

# Material Didáctico Hipermedia para la Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería: Inicios de una Investigación

Laura S. Del Río<sup>1</sup>, Néstor D. Bucari<sup>2</sup>, Cecilia V. Sanz<sup>3</sup>

<sup>1</sup>IMApEC (Investigación de Metodologías Alternativas para la Enseñanza de las Ciencias), Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata  
Calle 49 y 115, 1900, La Plata

<sup>2</sup>Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata  
49 y 115, 1900, La Plata

<sup>3</sup>Instituto de Investigación en Informática LIDI (III LIDI, Facultad de Informática, Universidad Nacional de La Plata)  
laura.delrio@ing.unlp.edu.ar - csanz@lidi.info.unlp.edu.ar

**Resumen.** En el presente trabajo, se analizan y discuten las oportunidades que brinda la inclusión de material didáctico hipermedia con diferentes niveles de interactividad, para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Se describe un prototipo de material hipermedia diseñado para alumnos de primer año de una Facultad de Ingeniería, y también se detalla el proceso de investigación que se está llevando a cabo para dar cuenta del impacto de dicho material en el aula. Se presenta también el marco teórico que da sustento a esta investigación, que considera los aportes de la didáctica específica de la matemática, y de la tecnología educativa, y al mismo tiempo se explica la metodología diseñada para dar respuestas a las preguntas que guían la investigación. Finalmente, se presentan las primeras conclusiones relacionadas a este proceso de investigación.

**Palabras Clave:** Hipermedia, Enseñanza de las matemáticas, Tecnologías de la información y la comunicación.

## 1 Introducción

En el presente trabajo, se describe un proceso de investigación que se encuentra en desarrollo y que se relaciona con una tesis para acceder al grado de Magíster en Tecnología Informática Aplicada a la Educación por la Facultad de Informática de la Universidad Nacional de La Plata.

La investigación se está llevando a cabo con los alumnos de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI-UNLP). La misma se enmarca en temas vinculados a la integración de las tecnologías digitales en distintos niveles de la enseñanza. Como parte de este proceso de investigación, se propone contribuir a mejorar la enseñanza de la matemática en el nivel universitario. Una de las apuestas en este sentido es la integración de material didáctico hipermedia que incluya Ambientes de Geometría Dinámica.

Se han definido una serie de preguntas que guían la investigación: La utilización de material hipermedia ¿en qué aspectos facilita el proceso de aprendizaje de la matemática?; ¿produce un cambio en la actitud de los estudiantes hacia la matemática?; al aprender en un Ambiente de Geometría Dinámica, que según varios autores [1-3] ofrece representaciones manipulables de los objetos matemáticos, volviéndolos más accesibles, ¿qué tipo de aprendizajes adquieren *con* el uso de la tecnología informática y *del* uso de dicha tecnología, siguiendo la categorización realizada por Solomon [4]. Entre los aportes que se esperan del desarrollo de esta investigación está la obtención de una metodología de análisis que permita dar cuenta del impacto de la implementación de TIC en la clase presencial, teniendo en cuenta la especificidad de los saberes a enseñar.

En este trabajo se desarrollará brevemente el marco teórico vinculando el área de la didáctica específica y de las posibilidades de la tecnología educativa, y se describirá el prototipo de material hipermedial diseñado *ad hoc* para la realización de una experiencia áulica, y también se detallará la metodología que se ha diseñado para el análisis de impacto.

## 2 Marco teórico

Teniendo en cuenta que se trata de una investigación en la cual se entrecruzan la enseñanza disciplinar y la integración de las TIC en el aula, se abordó un marco teórico con bases en la didáctica específica, en particular en la denominada Escuela Francesa de enseñanza de las matemáticas, y en aspectos relacionados con la

tecnología educativa. Se describirán a continuación los elementos conceptuales de estos marcos teóricos que consideramos más relevantes para el presente trabajo.

## 2.1 Escuela francesa de didáctica de la matemática

Se conoce como “Escuela Francesa de Didáctica de la Matemática” a un conjunto de investigadores, en su mayoría de habla francesa, que han desarrollado algunas teorías para dar cuenta de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

*En esta escuela se destacan dos convicciones epistemológicas. Por un lado, la de que la identificación e interpretación de fenómenos y procesos que son objeto de interés supone el desarrollo de un cuerpo teórico, y no puede reducirse a observaciones realizadas a partir de experiencias aisladas ni a cuestiones de opinión; por otro lado, la convicción de que ese cuerpo teórico debe ser específico del saber matemático, y no puede provenir de la simple aplicación de una teoría ya desarrollada en otros dominios (como la psicología o la pedagogía)[5]*

Dentro de esta escuela se reconocen dos grandes programas de investigación: por un lado, el *programa epistemológico*, conformado centralmente por la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, la Dialéctica Instrumento-Objeto (DIO) de Douady, y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard; por el otro, el *programa cognitivo*, conformado por la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) de Vergnaud y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (RRS) de Duval. Una descripción de estas teorías y su posible articulación puede encontrarse en [6].

Para este trabajo, se centrará el interés especialmente en las teorías de Brousseau (TSD) y de Duval (RRS). La primera por brindar un marco de análisis para las interacciones docente-alumno-saber en el aula, y la segunda debido a que la integración de materiales hipermediales posibilita, precisamente, la puesta en juego de registros de representación semiótica de naturaleza distinta a aquellos que permite el entorno lápiz-papel, y es por esto que se vuelve fundamental atender a cómo estos registros se articulan con los usuales.

## 2.2 Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)

Esta teoría se inscribe en el constructivismo piagetiano, ya que considera que: “*El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje*”[7]. Sin embargo, no considera apropiada la aplicación directa en el aula de la psicología de Piaget, ya que reconoce el riesgo de desligar al docente de toda responsabilidad didáctica: “*un medio sin intenciones didácticas es manifiestamente insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que adquiera*” [8].

Para Brousseau, el trabajo del alumno debe por momentos ser comparable a la actividad científica:

*Saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas (...) Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigiría que él actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la cultura, que tome las que le son útiles, etc.[8].*

Es importante destacar como antecedente que en el contexto de la cátedra Matemática A de la FI UNLP, donde se realiza el trabajo de campo asociado a este trabajo, se asume hace ya un tiempo esta concepción sobre el aprendizaje. “*La propuesta innovadora consistió esencialmente en transformar al aula de matemáticas en un espacio en cual todos trabajan*”[9]. Los alumnos tienen un rol activo en el aula, son guiados por un material teórico práctico diseñado *ad hoc* en el cual se comienza con consignas de trabajo que parten de conceptos e ideas intuitivas que poseen los estudiantes e instalan la necesidad de incorporar nuevos conceptos. Luego, se definen y describen esos conceptos que emergen del trabajo de los alumnos y se proponen nuevas actividades para ponerlos en juego: “*el material teórico práctico para trabajar en clase pudo construirse de modo que resultara funcional para una actividad que los estudiantes pudieran realizar por sí mismos –preferentemente en forma grupal- con la guía y la asistencia de los docentes*”[9]. Además, cuentan con una biblioteca en el aula con libros para consultar en clase y una computadora por mesa, con acceso a software específico de matemática.

### 2.3 Registros de Representación Semiótica (RRS)

La teoría formulada por Raymond Duval se apoya en que, a diferencia de los objetos de estudio de otras disciplinas científicas, los objetos matemáticos “no son accesibles físicamente, a través de evidencias sensoriales directas o mediante el uso de instrumentos. La única forma de acceder y trabajar con ellos es a través de signos y representaciones semióticas” [10].

Duval hace hincapié en la importancia del trabajo del alumno con diferentes registros de representación semiótica. Esto implica las habilidades de representar y reconocer a un mismo objeto matemático en distintos registros de representación, poder realizar transformaciones entre distintos registros y seleccionar, para cada situación problemática a abordar, aquel o aquellos registros que sean más convenientes para la ocasión: “la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados” [10]. Cuando Duval habla aquí de que esa coordinación debe ser construida, hace referencia a que su aprendizaje no es espontáneo y debe ser objeto de trabajo en el aula.

En el marco de esta teoría, “se deben distinguir dos clases de transformaciones de representaciones semióticas: la conversión y el tratamiento” [10]. Se habla de *tratamiento* cuando las transformaciones se dan dentro de un mismo registro de representación semiótica. En cambio, en el caso en que la transformación suponga un cambio de registro, se habla de *conversión*. “Desde un punto de vista matemático, la conversión y el tratamiento son un todo en la resolución de problemas”. Tanto la conversión como el tratamiento son objeto de construcción.

### 2.4 Representaciones Ejecutables o Dinámicas

Por último, se referirá aquí a un tipo de representación semiótica particular: las “representaciones dinámicas” o “ejecutables” en las cuales “las propiedades geométricas permanecen inalterables cuando los objetos se deforman según el arrastre. Por lo tanto, la imagen dinámica (sensorio-motora) que se forma un estudiante al hacer construcciones es distinta a la que se forma con el uso de otras herramientas.” [11]

“Las representaciones analíticas tradicionales, se han visto ampliamente complementadas y enriquecidas con estas recientes tecnologías. El carácter estático que poseen los sistemas de representación tradicionales desaparece con las representaciones ejecutables, que son manipulables, que permiten actuar directamente sobre ellas” [12]. Esto es, en este caso, de sumo interés; en particular para la enseñanza de los vectores y sus operaciones, y de las ecuaciones paramétricas de la recta, ya que estos objetos permiten describir movimientos, con lo cual, el uso exclusivo de representaciones estáticas puede constituir un obstáculo para el aprendizaje para algún sector del alumnado.

### 2.5 Aportes del área de la Tecnología Educativa

La integración de las llamadas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) a los procesos de enseñanza y aprendizaje son importantes en el contexto educativo, y en particular para el que se hace referencia en este trabajo [13-16]. Es por eso que las aulas de matemática en la FI UNLP, fueron equipadas con computadoras y se diseñaron actividades para que los alumnos realicen con ellas en las aulas. Si bien la implementación de estas actividades ha dado sus frutos [17], en tanto permiten a los alumnos acceder a representaciones más ricas de los objetos matemáticos, evitar cálculos tediosos y servir como instrumento de autoevaluación, aún queda camino por recorrer en relación a la estrategia de integración de las tecnologías digitales. El uso del software propuesto hasta el momento (Maple), demanda al alumno el aprendizaje de complejas sentencias que se convierten en una limitación para su uso; además, el hecho de tener que encender el equipo especialmente para realizar una actividad puntual y aislada indicada en el material impreso, también constituye un obstáculo. Es por esto que se está buscando evolucionar en las estrategias de integración de TIC, ya que aún muchos alumnos no realizan esas actividades y no se apropian de ese *software* como herramienta de aprendizaje. En la situación actual, son los docentes los que utilizan las TIC para hacer demostraciones a los alumnos, cuando quieren utilizar un recurso gráfico para apoyar su discurso. Esto va a contramano del espíritu de la reforma educativa implementada, y es por esto que se intenta buscar una alternativa para que la integración de las TIC sea coherente con el modelo pedagógico que se busca adoptar. En consecuencia, este trabajo describe la propuesta de un material educativo hipermedial que se incorporará como elemento estratégico en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula. Así, se indagó en la literatura acerca de la

potencialidad de los materiales hipermedia y cómo estos podían articularse con la propuesta de cátedra para facilitar el aprendizaje de los alumnos.

Gregori Barberá [18] enumera algunas de las posibilidades educativas de los entornos hipermedia, entre los cuales se encuentra que ayudan (acompañados de una buena planificación educativa) a:

- comprometerse e implicarse en el propio aprendizaje al asumir el reto de aprender mediante un nuevo medio;
- construir conocimiento compartido con el profesor y otros compañeros. Ampliar los conocimientos individuales siguiendo itinerarios personales y mediante la exploración libre u orientada.
- plasmar el aprendizaje realizado y argumentar los procesos de comprensión de los contenidos.
- ordenar la propia manera de proceder durante el aprendizaje.
- indagar mediante la observación y comparación de datos obtenidos y realizarse preguntas al respecto.

Para que estas posibilidades se concreten, es fundamental que exista una planificación adecuada por parte del docente, mediante la cual se planteen los objetivos a alcanzar, se seleccionen actividades y materiales pertinentes para los mismos y se otorgue a estos recursos digitales una función en la misma dirección.

Brescó hace hincapié en los elementos multimedia y la posibilidad de la interactividad en los entornos hipermedia: *“partiendo de la existencia de una diversidad de estilos de aprendizaje, y disponiendo de un amplio abanico de recursos que las tecnologías de la información y la comunicación ofrecen, consideramos los contenidos digitales interactivos como elementos que pueden aportar respuestas a los diferentes estilos”* [19]. En la misma línea, Cabero señala que:

*Sin lugar a dudas una de las grandes características de las TIC radica en su capacidad para ofrecer una presentación multimedia, donde utilicemos una diversidad de símbolos, tanto de forma individual como conjunta para la elaboración de los mensajes: imágenes estáticas, imágenes en movimiento, imágenes tridimensionales, sonidos, etc.; es decir, nos ofrecen la posibilidad, la flexibilización, de superar el trabajo exclusivo con códigos verbales, y pasar a otros audiovisuales y multimedia, con las repercusiones que ello tiene ya que vivimos en un mundo multimedia interactivo, donde los códigos visuales han adquirido más importancia que en el pasado.*[13]

Por su parte, Armenteros Gallardo sostiene que:

*Desde un punto de vista educativo, lo fundamental del hipermedia es que ofrece una red de conocimiento interconectado que permite al estudiante moverse por rutas o itinerarios no secuenciales y, de este modo, suscitar un aprendizaje “incidental”. Un aprendizaje que se opone al aprendizaje dirigido por una serie de órdenes sobre tareas a realizar, y que se propone aprender por descubrimiento personal basado en la experiencia de explorar (“navegar”) a través de la aplicación* [20].

En síntesis, lo que se intentará aprovechar de los entornos hipermedia es: su riqueza semiótica, la posibilidad de habilitar recorridos no lineales del material de estudio y la actitud activa de los estudiantes frente a los mismos a través de la interactividad propuesta

## 2.6 Integración de los abordajes teóricos presentados

Tanto los autores de la Escuela Francesa de didáctica de la matemática, como aquellos que investigan el potencial educativo de los entornos hipermedia, hacen hincapié en la necesidad de propuestas pedagógicas que otorguen al alumno un rol activo en el aprendizaje, que permitan que investiguen, que asocien ideas.

En cuanto a la utilización de distintos tipos de registros de representación semiótica, encontramos que es esencial para el aprendizaje de la matemática, y que el uso de entornos hipermedia amplía el abanico de posibilidades en este aspecto, permitiendo introducir representaciones dinámicas, interactivas, e incluso tridimensionales.

Un aspecto sobre el cual es preciso reflexionar, es la forma de secuenciar los contenidos. Si bien en los entornos hipermediales es posible generar recorridos no lineales de los contenidos, esto dependerá de la intención didáctica del material educativo a desarrollar. Cuando se trata de materiales educativos que se utilizarán para presentar los contenidos por primera vez, es probable que el docente considere oportuno la construcción de materiales con posibilidades de navegación más secuenciales. Cuando se propongan materiales con el objetivo de reforzar la comprensión de los alumnos, el material podrá presentar mayor flexibilidad en su navegación. En este último caso, se verán estructuras de materiales en forma de árbol o redes, donde el alumno decide el camino a seguir a través de los contenidos, acorde a sus necesidades de aprendizaje. En este sentido, la didáctica de la matemática también considera necesaria la revisión de los aprendizajes adquiridos para favorecer la asociación entre las distintas situaciones de aprendizaje: *“Tiene que haber también un lugar*

para que los alumnos estabilicen y se familiaricen con los conceptos que ya aprendieron, con los que ya tuvieron una primera interacción, enfrentados a la resolución de ejercicios que conlleven a una reutilización de conceptos y técnicas ya aprendidas”[21]. Esto quiere decir, que una propuesta de material hipermedia que proporcione una secuencia lineal de situaciones didácticas, pero que luego habilite recorridos no lineales, a fin de visitar las actividades resueltas anteriormente y establecer nexos entre sus distintos nodos, podría ser interesante para atender a la presentación inicial de contenidos y a su posterior refuerzo.

### 3 Características del material didáctico hipermedia diseñado

En lo que sigue, se describirán las características del MDH diseñado para la experiencia áulica en el marco de esta investigación y se presentarán ejemplos que ilustren de qué modo se han tenido en cuenta los elementos explicados en el marco teórico.

En este material se presenta una secuencia lineal, con páginas numeradas en forma correlativa y botones “anterior” y “siguiente”, pero también cuenta con un menú de páginas a la izquierda, visible en todas las páginas, que permite acceder a cualquiera de ellas desde cualquier otra, de manera que si el alumno en el transcurso de una actividad o de una lectura necesita volver a alguna página que ya había recorrido, puede hacerlo con tan solo hacer clic en el lugar correspondiente del menú. Asimismo en el contexto de estudio o repaso de la materia, puede acceder desde del lugar que considere más conveniente o necesario.

El material incluye teoría, actividades interactivas y también actividades para realizar con lápiz y papel. En la pantalla inicial, se encuentran dos videos. Uno cuyo fin es introducir los temas a tratar y anticipar el contenido y otro que incluye las orientaciones para el uso del material en sí.

Las actividades interactivas diseñadas para utilizar el entorno de Geometría Dinámica GeoGebra constituyen un medio en el cual los alumnos pueden desarrollar una actividad de indagación y recibir retroalimentaciones por parte del entorno, que les permiten decidir si lo realizado es correcto o no. De acuerdo con la TSD, que sea el medio el que proporcione retroalimentaciones y que el alumno pueda interpretarlas para validar por sí mismo su actividad, en lugar de buscar la aprobación del docente, es fundamental para la construcción del conocimiento matemático.

El MDH consiste en un *remix* [22] digital del capítulo 6 del libro de la cátedra [23], en el cual se abordan los siguientes temas: vectores en el plano y en el espacio; operaciones básicas entre vectores; y rectas y planos en el espacio.

Para construir la noción de vector, se proponen situaciones en las cuales aparece la necesidad de resolver cuestiones que tienen que ver con desplazamientos. La suma de vectores aparece asociada a la idea de desplazamientos sucesivos de un objeto. Se eligió este contexto debido a que la noción de movimiento es una noción que los alumnos dominan intuitivamente, y pueden utilizar para abordar los problemas presentados y que aparezca allí la necesidad de formalizar. Además, esto se relaciona con lo trabajado acerca de desplazamientos en una dimensión y puede vincularse con ello.

Esta forma de introducir los vectores ya estaba propuesta en la versión original del material, en soporte papel, pero fue necesario modificar las consignas, pensadas originalmente para que sean realizadas con el *software* GeoGebra.

Por ejemplo, una de las primeras actividades planteadas en el material impreso era la siguiente:

“Supongan que  $A(1,-1)$  y  $B(3,0)$  consideren  $\mathbf{d}=\mathbf{AB}$ . Respondan las siguientes cuestiones

- 1 Un objeto se encuentra inicialmente en  $(4,0)$  ¿Dónde va a parar si se desplaza en  $\mathbf{AB}$ ? Dibujen.
- 2 Si  $D(6,1)$  ¿Es correcto afirmar que  $\mathbf{AB}=\mathbf{CD}$ ? Controlen su respuesta.
- 3 ¿Cómo puede saberse si  $\mathbf{AB}=\mathbf{CD}$  a partir de las coordenadas de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ?”

Con esta actividad se pretende que los alumnos arriben a la idea de que lo que caracteriza un vector entre dos puntos son las diferencias entre las ordenadas de los puntos y entre las abscisas de los mismos, y a partir de esto institucionalizar el concepto de componente de un vector. En el caso del entorno GeoGebra, al utilizar la herramienta *vector* entre dos puntos para construir una flecha entre ellos, automáticamente aparece ese par de valores en forma de vector columna, por lo cual la pregunta se “invirtió” pidiendo a los alumnos que asignen algún significado a ese par de valores (ver Fig. 1).

Al trabajar con *applets* embebidos se crea una sensación de unidad entre las actividades propuestas con el programa y el resto de los componentes del material hipermedial. Además, en el *applet* se puede confeccionar una barra de herramientas particular para cada actividad, de manera que el alumno no tiene que enfrentarse desde un primer contacto con la totalidad de los recursos disponibles en el programa Geogebra, y puede ir aprendiéndolos de a poco, a medida que las va necesitando.

- Ejercicios con rectas y planos
- Ecuaciones simétricas de recta
- ¡Últimos ejercicios con rectas y planos!
- editos

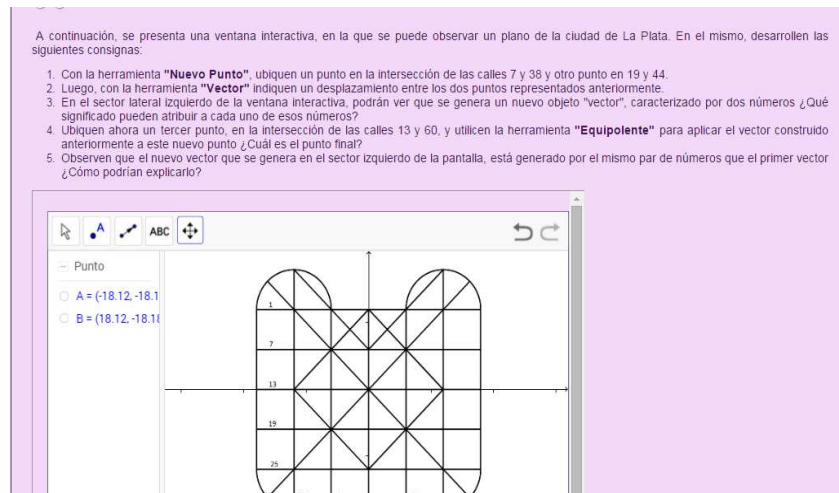


Fig. 1. Pantalla que presenta una Actividad Interactiva dentro del MDH

### 3.1 Uso de representaciones ejecutables para producir conjeturas

La primera actividad presentada en el material original para hacer emerger el concepto de ecuación vectorial de una recta en el espacio es el que se presenta en la Fig. 2.

## 6.3 Ecuaciones de las rectas y los planos

### ■ Ecuación vectorial de una recta

#### ACTIVIDAD

1. Consideren el vector  $\mathbf{v} = \langle -1, 3, -2 \rangle$  ¿Cómo describirían al conjunto de los puntos  $P(x, y, z)$  del espacio tales que  $\overrightarrow{OP}$  es un múltiplo de  $\mathbf{v}$ ? Dibujen..
2. Consideremos ahora dos puntos, digamos  $A(2, 3, -5)$  y  $B(0, 1, 2)$ . Describan por medio de una expresión al conjunto de los puntos  $P(x, y, z)$  tales que  $\overrightarrow{AP}$  sea un múltiplo de  $\overrightarrow{AB}$  ¿Cómo se ve ese conjunto en el espacio? ¿El punto  $A$  pertenece al conjunto? ¿Y el punto  $B$ ? Dibujen.

Fig.2. Ejemplo de una Actividad de ecuación vectorial en el material impreso de la cátedra.

A partir de esta actividad, se busca que los alumnos formulen algunas conjeturas, tarea que en el marco de la TSD es de suma importancia, ya que es parte constitutiva de la tarea del matemático: a) que el conjunto de los puntos  $P$  tales que  $\overrightarrow{OP}$  es múltiplo de  $\mathbf{v}$  es una recta paralela a  $\mathbf{v}$  que pasa por el origen de coordenadas  $O$ ; b) que tal conjunto puede representarse por medio de una ecuación vectorial:  $\overrightarrow{OP} = t\mathbf{v}$ ; c) que el conjunto de los puntos  $P$  tales que  $\overrightarrow{AP}$  es múltiplo de  $\overrightarrow{AB}$  es la recta que pasa por  $A$  y por  $B$ ; y d) que este conjunto puede representarse por medio de una ecuación vectorial:  $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ .

Esta actividad, requiere que los alumnos interactúen con, por lo menos, dos registros de representación, en el sentido definido por Duval: el registro algebraico y el registro gráfico del espacio tridimensional. Esto último constituye muchas veces un obstáculo para los alumnos (y a la vez es necesario que lo utilicen) ya que son las primeras actividades que realizan en  $\mathbb{R}^3$  y deben familiarizarse con este nuevo registro de representación. Se postula que la vista gráfica 3D de GeoGebra puede ayudarlos en esta tarea de familiarización para luego utilizarla como herramienta en la resolución de problemas. Esta actividad se reformula para el nuevo material hipermedial como se muestra en la Fig. 3.

**12. Rectas en el espacio**

**Reflexión**

**Situación 1:**  
Consideren el vector  $\vec{a} = \langle -1, 1, -2 \rangle$ .

¿Qué representará gráficamente el conjunto de los puntos  $P(x, y, z)$  del espacio tales que  $\vec{OP} = t \vec{a}$  es un múltiplo de  $\vec{a}$ ?

Para ayudarles a responder esta pregunta, les sugerimos:

1. Abrir el GeoGebra 5, y su vista gráfica 3D.
2. Graficar el vector
3. Utilizar un deslizador para definir una variable  $t$  y generar el vector  $\vec{OP} = t \vec{a}$  que representa a un múltiplo de  $\vec{a}$ . (¡Atención! Los deslizadores se colocan en la vista gráfica 2D)
4. Modificar el valor de  $t$  desde el deslizador, para ver los distintos vectores  $\vec{OP}$  posibles.
5. ¿Cómo es la trayectoria del punto  $P$ ? Para visualizarla, generen el punto  $P$  (para ello, coloquen el punto  $O = (0, 0, 0)$  y utilicen la herramienta "Traza línea" aplicada al punto  $O$  con el vector  $\vec{OP}$  para obtener el punto final de ese vector), hagan clic en el botón secundario y seleccionen la opción "Activar rastro".

**Situación 2:**  
Consideremos ahora dos puntos, digamos  $A(2, 3, 5)$  y  $B(0, 1, 2)$ . Describan por medio de una expresión al conjunto de los puntos  $P(x, y, z)$  tales que  $\vec{AP} = t \vec{AB}$ .

¿Cómo se ve ese conjunto en el espacio? ¿El punto  $A$  pertenece al conjunto? ¿Y el punto  $B$ ? Representen esta situación en la vista gráfica 3D de GeoGebra 5.

**Fig. 3.** Actividad propuesta en el material hipermedial para que el alumno reflexione proponga una ecuación para la recta en el espacio tridimensional.

Esta actividad, en particular la situación 1, está guiada paso a paso ya que los alumnos no conocen aún las herramientas que brinda GeoGebra, y por lo tanto tiene un doble rol: que los alumnos formulen las conjeturas mencionadas anteriormente y que se familiaricen con estas nuevas herramientas para luego poder hacer una actividad de carácter más exploratorio. A su vez, se le permite al alumno comenzar a manipular las representaciones ejecutables que se definieron en apartados anteriores, lo cual les podría permitir comprender la naturaleza variable del parámetro  $t$  y las consecuencias que su variación tiene en la construcción de la gráfica.

Con estos ejemplos se ha buscado mostrar cómo el material diseñado propone incorporar los aspectos presentados en el marco teórico que se ha presentado en las secciones anteriores.

#### 4 Metodología diseñada

En cuanto a la metodología diseñada para analizar el impacto de la implementación de este material en el aula, se pensó en realizar un estudio descriptivo, en el cual se triangulen métodos cuantitativos y cualitativos a fin de no descuidar los distintos aspectos que influyen en una realidad compleja como es el contexto educativo [24].

No se realizó un diseño experimental, ya que no se pretende arribar a explicaciones causales de los fenómenos a estudiar, sino establecer relaciones entre las distintas variables de análisis. Bravin y Pievi afirman que “*los estudios descriptivos suelen ser muy recurridos en nuestro campo, ya que producen un tipo de información de relevancia respecto de cuáles aspectos del problema son significativos y qué dimensiones del mismo tienen relación entre sí*” [24]. Definen la investigación descriptiva como una investigación en la cual se “*realiza una ‘descripción’ de un fenómeno (en este caso el que se está estudiando), de su estado en el presente. Su propósito es describir las características del objeto de conocimiento recortado, en un proceso respecto del cual tenemos escaso o nulo control sobre las variables, a través de técnicas como las encuestas y/u observaciones, por ejemplo*” [24].

Antes de comenzar la experiencia en el aula, se realizó una encuesta a seis comisiones de la cátedra. Tres de ellas utilizaron el material digital diseñado y las otras tres se consideran para contraste. La encuesta inicial persigue dos finalidades: tener un control sobre las variables de entrada (afinidad de los alumnos hacia las matemáticas y hacia el uso de las TIC como herramienta de aprendizaje, conocimientos previos sobre el software GeoGebra) y contrastar dichas variables al finalizar la experiencia a fin de evidenciar si hubo cambios o no sobre las mismas (en uno u otro sentido).

Durante la experiencia, se realizó una observación participante del trabajo de los alumnos con el material diseñado a fin de recabar información acerca de las dificultades que los alumnos encuentren en la navegación y en la interactividad con el material, las actitudes que manifiestan en el aula durante el trabajo (si se entusiasman con el uso del material, si prefieren trabajar con papel y lápiz y la versión impresa de la guía de la cátedra, etc.) y describir el tipo de actividad matemática que los alumnos desarrollan en interacción con el material.

Al finalizar la experiencia, se realizó una nueva encuesta a los alumnos. A todas las comisiones se les volvió a hacer el test de actitudes hacia las matemáticas y hacia el uso de las TIC como herramienta de aprendizaje. A las comisiones que se utilizaron como contraste (grupos control), se les preguntó además si los temas vistos

en el transcurso de la unidad 6 les resultaron más difíciles, más fáciles o de similar orden de dificultad que los temas vistos en las unidades previas, y si para estos temas consideran más importante el uso de *software* matemático. A las comisiones que utilizaron el material se les pedirá también que realicen una evaluación de distintos aspectos del material y del desarrollo de la experiencia.

Por último, se entrevistó a los docentes de las tres comisiones que utilizaron el material a fin de indagar si desde su perspectiva esta versión del material facilitó o dificultó el aprendizaje de los alumnos, si consideran que en todos los alumnos se evidenció el mismo fenómeno, o si pueden identificar cuáles son las características de los alumnos para los que el material impactó de mejor manera. También se les preguntó si observaron cambios entre estos grupos de alumnos con respecto a anteriores cohortes en cuanto a la comprensión que manifiestan de los temas.

Además, se tendrán en cuenta las producciones de los alumnos en los exámenes parciales, no solamente en cuanto al rendimiento evidenciado por la nota, sino en el modo de enfrentar los problemas allí propuestos (por ejemplo, si los alumnos que utilizaron el material digital utilizan más los gráficos esquemáticos en  $R^3$ , lo cual evidenciaría una mejor familiarización con este tipo de registros).

## 5 Primeros resultados de la investigación

En esta última parte del artículo, se compartirán los primeros resultados obtenidos a partir de la investigación realizada. En particular, se comentará el análisis cualitativo de las encuestas realizadas a los estudiantes.

En dicha encuesta, se solicitó a los alumnos, entre otras cuestiones, que señalen un aspecto positivo y un aspecto negativo de la experiencia de haber trabajado en el aula con el material hipermedial. Se considerarán a continuación las respuestas de los 142 alumnos que respondieron a estas cuestiones. Se formuló como pregunta abierta, por lo cual algunos alumnos mencionaron más de un aspecto positivo y más de un aspecto negativo, de manera que un mismo alumno puede ser computado en más de uno de los grupos presentados a continuación.

En primer lugar, se comentarán los aspectos que los alumnos destacaron como *positivos*:

56 alumnos (40%) mencionaron la posibilidad de visualizar los conceptos (en especial en el espacio tridimensional), mediante gráficos y animaciones. Algunos ejemplos de los comentarios que realizaron con respecto a esta cuestión fueron:

- *“me parece demasiado positivo ver distintas gráficas como son en 3D, ayuda a entender con más claridad los conceptos generales”*
- *“al ver los gráficos en 3D ayuda a darse una idea de lo que se está haciendo”*
- *“te permite visualizar con imágenes y animaciones algunos conceptos para comprenderlos mejor”*

23 alumnos (16%) mencionaron como algo positivo la posibilidad de poder corroborar con GeoGebra los ejercicios realizados a mano:

- *“es una forma fácil y rápida de comprobar si el ejercicio está bien resuelto”*
- *“no dependo tanto del profesor, puedo comprobar los resultados con la computadora (GeoGebra)”*
- *“podías representar lo que pensabas y ver si estaba bien y lo habías entendido o no”*

Desde el marco teórico adoptado, resulta positivo que los alumnos encuentren estrategias para corroborar sus ideas y resoluciones de las actividades por sus propios medios, y que estas les brinden suficiente seguridad para no tener que recurrir a validaciones externas, como ser el visto bueno del profesor. En este caso, la estrategia de validación a la que hacen referencia consiste en representar gráficamente en GeoGebra las soluciones obtenidas para los problemas propuestos, lo cual implica interpretar en un registro de representación lo obtenido en otro, es decir, una *conversión* en el sentido definido por Duval.

39 alumnos (27%) mencionaron que les ayudó a comprender el tema, o que les facilitó, pero no explicitaron cómo o por qué les parece que el material los ayudó:

- *“es útil y de muy buena ayuda porque podemos entender mejor las matemáticas”*
- *“hay algunos temas que es más fácil entenderlo con las actividades interactivas del material”*
- *“Mejor interpretación del material ya que a veces lo teórico resulta difícil de comprender”*

No se registraron menciones a la posibilidad de explorar y conjeturar, aunque fueron actividades que se dieron en el aula, lo cual podría implicar que la importancia de estas actividades no es percibida por los estudiantes.



En cuanto a los aspectos *negativos*, uno de los más mencionados (31 alumnos, 21,8%), fue el tiempo adicional que les demandó el uso del material digital. Hubo una sensación generalizada de que se fue más lento que con la forma de trabajo tradicional. Algunos asociaron esta lentitud a la necesidad de compartir la computadora y no poder ir al ritmo propio. Otros mencionaron que fueron más lento por tener que aprender a la vez el uso del programa GeoGebra y los temas de la materia. Sin embargo, el desarrollo de la unidad no tomó a las comisiones que realizaron la experiencia más tiempo (en cantidad de clases) que las previstas por los cronogramas de la cátedra. Con lo cual, esto es una cuestión subjetiva de los alumnos que se debe analizar con más profundidad para futuras implementaciones de la experiencia.

Otro grupo importante de alumnos (25 alumnos, 17%) hizo mención a cuestiones ajenas al material en sí, tales como que la cantidad de computadoras en el aula fue insuficiente, al hecho de tener que acarrear la computadora hasta la Facultad todos los días, o que la vista 3D no funcionaba en todas las computadoras. Sería cuestión entonces de mejorar la estrategia para contar con más dispositivos en el aula, y lograr que el material funcione correctamente en dispositivos más pequeños (por ejemplo, *tablets*).

Otro grupo (12 alumnos, 8%) mencionó cuestiones más profundas como el hecho de que el aprendizaje con la computadora podría ser un obstáculo luego a la hora de resolver el parcial o la creencia de que se aprende menos o con menos calidad:

- “en la prueba no hay computadora, por lo tanto es fundamental aprender el contenido con lápiz y papel”
- “un mal aspecto es que practicar mucho o hacer muchos ejercicios en GeoGebra resta práctica para los parciales”
- “no exige mucho de lo analítico que es lo que en realidad importa”
- “es que si nos acostumbramos a hacerlo todo por ahí a la hora de la evaluación no vamos a poder hacerlo, por ende alguien que solo utilizaba la computadora no sabrá cómo realizar los gráficos”
- “impide el uso del razonamiento matemático”

Algunos de estos comentarios reflejan un perfil de alumno preocupado por la aprobación del parcial en sí, más allá de los aprendizajes que se pueden adquirir en la clase. También revelan creencias acerca de lo que se espera en el parcial, como por ejemplo que se valora más lo analítico que lo gráfico. Tales creencias deben ser abordadas, y es un resultado interesante obtenido en la investigación, ya que la vinculación entre las diferentes representaciones no son vislumbradas por los alumnos como un conocimiento integrado. Solomon [4] distingue los aprendizajes que se adquieren *con* el uso de las tecnologías de los aprendizajes que se adquieren a partir *del* uso de las tecnologías. Al parecer, este grupo de alumnos no reconoce la existencia de este segundo tipo de aprendizajes, que son considerados importantes desde el marco teórico construido para esta investigación, por lo cual habría que encontrar la manera de ayudar a estos alumnos a reconocerlos y valorarlos.

19 alumnos (13,4%) mencionaron que tuvieron dificultades para aprender a utilizar el *software* GeoGebra; otros 9 (6%) que les resultaba incómodo trabajar con la computadora (leer en particular) y que se distraían, o disconformidades genéricas tales como: “prefiero hacer los ejercicios en una hoja” o “no me gusta trabajar con esto”. Un último grupo (12 alumnos, 8,5%) que parece interesante mencionar, es el de los que reclamaron más explicación teórica, o que la teoría esté luego de la ejercitación y no antes:

- “considero que falta explicación teórica ya que tuve que complementar las fotocopias de la unidad y libros de matemática”
- “estaría bueno por ahí que haya un poco más de explicaciones de los temas”
- “que la definición se encontraba en algunos casos después de los ejercicios”

Estas últimas críticas tienen que ver no con el material en sí, sino con la estrategia didáctica adoptada desde la Cátedra.

## 6 Conclusiones y trabajos a futuro

En este artículo se describió el fundamento teórico de un trabajo de investigación que se está desarrollando en relación al uso de materiales didácticos hipermedia para la enseñanza de la matemática. Se analizaron algunos ejemplos de cómo el material diseñado contempla los aspectos teóricos previamente formulados. También, se describió la metodología diseñada para dar cuenta de los resultados de esta investigación, aspecto que aún queda recorrer y que denota parte del aporte de esta investigación.

De los primeros resultados analizados aquí se desprende que los alumnos valoran positivamente el material como ayuda para la comprensión de los temas en cuanto herramienta para la visualización (en especial de los objetos del espacio tridimensional) y para la corroboración de ideas, pero que es importante mejorar la

estrategia para la integración del material al aula, a fin de evitar ciertas cuestiones que produjeron incomodidad entre los estudiantes.

En trabajos posteriores se presentarán otros datos que se puedan obtener a partir de la encuesta y de los otros instrumentos de observación diseñados, se discutirán los mismos y se expondrán las conclusiones a las que se arriben.

## Referencias

1. Moreno Armella, L.; Lupiáñez, J.L.: Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En: Gómez, P., Rico, L. (eds.) *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Universidad de Granada, Granada, pp. 291-300 (2001)
2. Hohenwarter, M.: Multiple representations and GeoGebra-based learning environments. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, Vol. 39, pp.11-18, (2014)
3. Carrillo, A.: El dinamismo de GeoGebra. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, No.29, pp.9-22, (2012)
4. Solomon, G.; Perkins, D.N.; Globerson, T.: Coparticipando en el conocimiento: la ampliación de la inteligencia humana con las tecnologías inteligentes. *Comunicación, lenguaje y educación*, Vol. 4, No.13, pp.6-22, (1992)
5. Panizza, M.: Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. En: Panizza, M. (ed.) *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la E.G.B.: análisis y propuestas*. Paidós, Buenos Aires, (2004)
6. Godino, J.D.; Font, V.; Contreras, Á.; Wilhelmi, M.R.: Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Relime*, Vol. 9, No.1, pp.117-150, (2006)
7. Brousseau, G.: *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Editorial Libros Del Zorzal (2007)
8. Brousseau, G.: Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. *Recherches en didactique de mathématiques*, Vol. 7, No.2, pp.33-115, (1986)
9. Bucari, N.; Abate, S.M.; Melgarejo, A.: Estructura didáctica e innovación en educación matemática. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería*, Vol. 8, No.14, pp.17-28, (2007)
10. Duval, R.: Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación semiótica. *La gaceta de la RSME*, Vol. 9, No.1, pp.143-168, (2006)
11. Sandoval Caceres, I.T.; Moreno Armella, L.E.: Tecnología digital y cognición matemática: Retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, Vol. 14, No.1, pp.21-29, (2012)
12. Lupiáñez, J.L.; Moreno Armella, L.: Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En: Gómez, P., Rico, L. (eds.) *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro*. Universidad de Granada, Granada, pp. 291-300 (2001)
13. Cabero Almenara, J.: Los retos de la integración de las TICs en los procesos educativos. Límites y posibilidades. *Revista Perspectiva Educacional. Formación permanente de profesores*, Vol. 49, No.1, pp.32-61, (2010)
14. Salinas Ibáñez, J.: Innovación docente y uso de las TIC en la enseñanza universitaria. *RUSC. Universities and Knowledge Society Journal*, Vol. 1, No.1, pp.3, (2004)
15. Geromini, N.S.: *Descripción y análisis de las interacciones entre los actores de los foros de un entorno virtual de enseñanza y aprendizaje*. Tesis para acceder al grado de Magister en Tecnología Informática Aplicada a la Educación. Universidad Nacional de La Plata (2014)
16. Costa, V.A.; Di Domenicantonio, R.M.; Vacchino, M.C.: Material educativo digital como recurso didáctico para el aprendizaje del Cálculo Integral y Vectorial. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, Vol. 21, pp.173-185, (2010)
17. Gregori, E.B.; Badía, A.: Hacia el aula virtual: actividades de enseñanza y aprendizaje en la red. *Revista Iberoamericana de Educación*, Vol. 36, No.9, pp.5, (2005)
18. Brescó Baiges, E.; Verdú Surroca, N.; Flores i Alarcia, O.: Valoración del estudiantado sobre el uso del material interactivo en materias de la Universidad de Lleida. *EDUTECH Revista electrónica de Tecnología Educativa*, Vol. 42, (2012)
19. Armenteros Gallardo, M.: Hipermedia y aprendizaje. *Revista Icono 14. Revista de comunicación y nuevas tecnologías*, Vol. 4, No.1, pp.320-330, (2006)
20. Napp, C.; Novembre, A.; Sadovsky, P.; Sessa, C.: *La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar matemática*. Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Secretaría de Educación. (2000)
21. Schwartzman, G.; Odetti, V.: Remix como estrategia para el diseño de Materiales Didácticos Hipermediales. PENT FLACSO (2013)
22. Bucari, N.; Langoni, L.; Vallejo, D.: *Cálculo diferencial*. Editorial de la Universidad Nacional de La Plata (2014)
23. Bravin, C.; Pievi, N.: *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Ministerio de Educación de la Nación - Organización de los Estados Iberoamericanos (2008)