UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Matemática

Representación por Haces de riRigs

Tesis para optar por el título de Doctor de la
Facultad de Ciencias Exactas especialidad Matemática

William Javier Zuluaga Botero

Director: Dr. Matías Menni
Codirector: Dr. José Luis Castiglioni

2016

Agradecimientos

Al **CONICET** por haber financiado este trabajo.

A mis directores, por su ayuda incondicional, su ardua dedicación y su paciencia incuestionable.

A mis padres y a toda mi familia por haber sido siempre el refugio allende la distancia y la fuerza perenne para llevar a cabo esta tarea.

Pero ante todo, a cada una de las adversidades que tuve que afrontar, ya que seguramente sin estas trascendentales lecciones, no podría ser quién soy ahora.

Introducción

A partir de las teorías de representación por haces obtenidas por Grothendieck [20], Pierce [33] y Dauns y Hoffman [10], evolucionaron construcciones generales de representaciones por haces para álgebras universales [11]. Todas estas representaciones fueron desarrolladas utilizando el topos de homeos locales sobre un espacio adecuado. Un ejemplo concreto del método empleado en el caso de retículos distributivos acotados puede hallarse en [3].

En esta línea, Filipoiu y Georgescu encuentran en [18] una equivalencia entre MV-álgebras y MV-espacios; siendo un MV-espacio, en el contexto de dicho artículo, un par (X, E) , donde X es un espacio Hausdorff compacto y E un haz de MV-álgebras sobre X , tal que para cada $x \in X$, y cada cerrado $D \subseteq X$ con $x \notin D$, hay una sección global f tal que $f(x) = 1$ y $f|_D = 0$. Siguiendo este mismo estilo, una representación similiar a la obtenida por Davey en [11], es dada por Dubuc y Poveda en [15], en donde además, se halla una adjunción entre MV-álgebras y otra versión de MV-espacios. En esta versión, un MV-espacio es entendido como un par (X, E) , con X un espacio topológico cualquiera y E un haz de MV-cadenas. Esta última presentación es más próxima a la construcción dada por Davey en *op.cit.* para obtener una representación por haces de álgebras de un tipo dado a partir de su representación subdirecta. En [17], se propone un tercer tipo de representación para MV-álgebras en términos de MV-espacios algebraicos, donde un MV-espacio algebraico es un par (X, E) tal que X es un espacio compacto y E es un haz de MV-álgebras con fibras locales.

Como ejemplo de representaciones por haces de otras clases de estructuras residuadas, se puede citar la dualidad tipo Grothendieck para álgebras de Heyting propuesta en [13] y la obtenida por Di Nola y Leuştean en [14] para BL-álgebras. Cabe señalar además que, para el caso de retículos residuados integrales y acotados, Jipsen en [22], ofrece una caracterización de las descomposiciones subdirectas e introduce el producto poset (que generaliza el

de producto booleano) para dar teoremas de descomposición de diversas álgebras ordenadas.

Aplicando técnicas de teoría de topos, Johnstone [23] y Coste [9], desarrollaron diversos tipos de representaciones de anillos conmutativos con unidad; construyendo ciertos objetos adecuados en un topos de haces sobre un espacio topológico, a partir de la interpretación de secuentes en una teoría geométrica.

Siguiendo a Schnauel [35], un *rig* o “anillo sin negativos” en el topos de conjuntos, es una estructura $(A, \cdot, 1, +, 0)$, tal que $(A, \cdot, 1)$ y $(A, +, 0)$ son monoides conmutativos relacionados por las ecuaciones $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ y $a \cdot 0 = 0$, para todos $a, b, c \in A$. Si la ecuación $1 + x = 1$ se cumple para todo $x \in A$, el *rig* se dice *integral*. El monoide aditivo $(A, +, 0)$ determina un pre-orden en el conjunto subyacente al definir $a \leq b$ si y sólo si existe un u tal que $a + u = b$. El *rig* A se dice *residuado* si para todo $a \in A$, la función monótona $a \cdot (_) : A \rightarrow A$ tiene una adjunta a derecha, la cual suele ser notada como $a \rightarrow (_)$. Dicha adjunción puede expresarse a través de la conexión de Galois

$$a \cdot b \leq c \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b \rightarrow c$$

para todos $a, b, c \in A$. Un *riRig* es un *rig* residuado e integral. Algunas clases de *riRigs* ampliamente estudiadas en la literatura son las MV-álgebras, las BL-álgebras y los retículos residuados conmutativos e integrales, entre otras.

El presente trabajo está motivado por los teoremas de representación para anillos conmutativos con unidad, obtenidos por Pierce y los desarrollados por Dubuc-Poveda para MV-álgebras; así como las ideas estratégicas de Lawvere sobre el análisis de categorías coextensivas con herramientas de teoría de topos, expresadas en [28]. Para uno de los resultados principales de este trabajo, se hará uso de la noción de *rig really local* introducida originalmente en el inédito [27].

Los objetivos principales de este trabajo son dos. El primero, es una teoría de representación para *riRigs* como *riRigs* conexos internos en un topos de haces sobre un álgebra de Boole (Teorema 3.3.4), la cual será llamada *representación de Pierce*. El segundo, es una teoría de representación para *riRigs* como *riRigs* really local internos en un topos de haces sobre un retículo distributivo (Teorema 4.3.6), la cual se denominará *representación really local*. En el caso de los retículos residuados conmutativos, este retículo coincide con

la reticulación del álgebra, dada en [31]. Un hecho de interés independiente, es la definición de la reticulación de un riRig como una solución de un problema universal. Las construcciones elaboradas para la obtención de las representaciones anteriores no requieren del uso de herramientas topológicas, a diferencia de las representaciones citadas previamente. Estos resultados pueden restringirse a diversas subcategorías como las de los *riRigs pre-lineales*, *MV-rigs*, etc.

La traducción de estos resultados en términos de homeos locales sobre espacios espectrales, permite demostrar, sin recurrir al teorema de descomposición subdirecta de Birkhoff, que todo riRig es producto subdirecto de riRigs really local (Corolario 5.2.5). En particular, que todo riRig pre-lineal es producto subdirecto de riRigs totalmente ordenados. Como consecuencia especial, esta traducción permite relacionar la representación de Dubuc-Poveda en *loc.cit.* con la representación really local de riRigs .

Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se introduce la categoría algebraica de los riRigs y se estudian, desde la perspectiva del álgebra universal, algunos aspectos generales de dicha variedad. En el Capítulo 2 se utilizan contenidos básicos de teoría de categorías y teoría de topos para la caracterización de los riRigs conexos y los riRigs really local en el topos de haces sobre un retículo distributivo y acotado. En el Capítulo 3 se desarrolla la representación de Pierce y en el Capítulo 4 se desarrolla la representación really local. Con el propósito de hacer más accesible este trabajo a una mayor audiencia, el Capítulo 5, está dedicado a la interpretación de los resultados previos en términos de homeos locales sobre espacios espectrales. Finalmente en el Capítulo 6. se obtienen versiones de los teoremas de representación para la categoría de riRigs pre-lineales y en especial, se muestra como a partir de la representación really local, se obtiene la representación de Dubuc-Poveda para MV-álgebras.

Se asume que el lector posee conocimientos básicos de álgebra universal (ver [34]) y de teoría de categorías (ver [29]), así como de topología general y el conocimiento de la dualidad tipo Stone para retículos distributivos y acotados. Para teoría de topos basta con lo consignado en los capítulos II, III, VI y X de [30].

Índice general

1. riRigs.	11
1.1. Definición y Propiedades.	11
1.1.1. Centro Booleano de un riRig.	15
1.2. Propiedades Algebraicas	16
1.2.1. Caracterización de las Congruencias de riRigs.	16
1.2.2. Localizaciones en riRigs.	20
1.2.3. riRigs directamente indescomponibles.	23
1.2.4. riRigs really local.	24
1.2.5. riRigs subdirectamente irreducibles.	26
2. riRigs en $\mathbf{Shv}(\mathbf{D})$.	29
2.1. Coproductos binarios en $\mathbf{Shv}(\mathbf{D})$	29
2.2. riRigs conexos en $\mathbf{Shv}(\mathbf{D})$	32
2.3. riRigs really local en $\mathbf{Shv}(\mathbf{D})$	36
2.4. Subobjetos principales	38
3. Representación de Pierce de un riRig.	43
3.1. El haz conexo asociado a un riRig.	43
3.2. La categoría $\mathcal{P}$	45
3.3. Teorema de Representación.	46
4. Representación really local de un riRig.	51
4.1. El haz really local asociado a un riRig.	51
4.2. La categoría $\mathcal{RL}$	58
4.3. Teorema de Representación.	59
5. Representaciones en términos de homeos locales.	65
5.1. $\mathbf{Shv}(\mathbf{D})$ y $\mathbf{LH}/\mathbf{spec}(\mathbf{D})$ son equivalentes.	65
5.2. Corolarios en términos de homeos locales	68

6. Aplicaciones.	71
6.1. Representación de riRigs prelineales.	71
6.2. Teorema de Dubuc-Poveda.	72
6.2.1. MV-álgebras como riRigs	73
6.2.2. Representación para MV-álgebras	79
Apéndices	82
A. Reticulación en topos localicos coherentes.	85
B. riRigs es coextensiva.	89

Capítulo 1

riRigs.

En este capítulo se presenta la categoría algebraica de riRigs, y se introduce el centro booleano de un riRig. Además, se caracteriza el retículo de congruencias de un riRig en términos del conjunto de filtros y se obtiene una variante del Teorema del Filtro Primo para esta variedad. Adicionalmente, se demuestra que todo filtro de un riRig determina una localización del mismo y se prueba que los elementos del centro booleano de un riRig inducen descomposiciones directas del álgebra original. Posteriormente, se introduce la noción de riRig really local y se prueba que todo riRig es descomposición subdirecta de riRigs really local. Finalmente, se ofrece una caracterización de los riRigs subdirectamente irreducibles, análoga a la dada por Ono en [32] para retículos residuados conmutativos e integrales. Para todos los aspectos de este capítulo, se usará la notación establecida en [34].

1.1. Definición y Propiedades.

Se presentan a continuación unas definiciones previas con el fin de familiarizar al lector con parte de la terminología que se utilizará a lo largo de este trabajo.

Definición 1.1.1. Una estructura $(A, +, *, 0, 1)$ se dice un *rig* (ver [35]), si:

- i) $(A, +, 0)$ es un monoide conmutativo.
- ii) $(A, *, 1)$ es un monoide conmutativo.
- iii) Para todos $x, y, z \in A$ se tiene $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$.
- iv) Para todo $x \in A$, $x * 0 = 0$.

Definición 1.1.2. Sea A un rig. Si para todo $a \in A$, $a + 1 = 1$, A se dice *integral*. Si $a + a = a$, A se dice *aditivamente idempotente*.

Observación 1.1.3. Todo rig integral A es aditivamente idempotente ya que la ecuación $1 + x = 1$, implica que $1 + 1 = 1$ para $x = 1$. Considerando $y \neq 1$, se tiene que $y * (1 + 1) = y + y = y$, puesto que la multiplicación es distributiva y 1 es la identidad de $(A, *, 1)$. El caso contrario no es cierto. Considere $A = \{0, e, 1\}$ con $e \neq 1$ y:

$+$	0	e	1	$*$	0	e	1
0	0	e	1	0	0	0	0
e	e	e	e	e	0	e	e
1	1	e	1	1	0	e	1

Dado que A es finito, el residuo es de la forma $x \rightarrow y = \bigvee \{z \in A \mid x * z \leq y\}$. Es posible verificar que A es un rig aditivamente idempotente, en el cual $x^2 = x$, para todo $x \in A$. Sin embargo $1 + e = e$.

Observación 1.1.4. Si A es aditivamente idempotente, existe un orden parcial inducido por la suma; esto es, $a \leq b$ si y sólo si $a + b = b$. Respecto a este orden parcial, la suma es el supremo. En consecuencia A tiene como reducto un *join* semirretículo.

A continuación, se procede a describir la estructura algebraica a la cual se dedicará el desarrollo de este trabajo.

Definición 1.1.5. Un riRig es un álgebra $(A, +, *, \rightarrow, 0, 1)$, de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ donde:

- i) $(A, +, *, 0, 1)$ es un rig integral.
- ii) Para todos $a, b, c \in A$, $a * b \leq c$ si y sólo si, $a \leq b \rightarrow c$.

Nótese que la condición (ii) de la Definición 1.1.5 equivale a decir que para todo $a \in A$, la aplicación $a \cdot (-)$ tiene adjunto a derecha.

De la Definición 1.1.5, se advierte claramente la presentación de una categoría algebraica. Es importante resaltar este hecho ya que a lo largo de este trabajo se considerarán álgebras en topos distintos al topos **Set** de conjuntos y funciones; concretamente, se considerarán topos sobre espacios espectrales.

Los riRigs pueden ser comparados con varios tipos de estructuras en la literatura, a saber:

Un **pocrim** (ver [7]) es un conjunto ordenado, dotado con una operación monoidal conmutativa compatible con el orden, en la cual el supremo del

conjunto coincide con el elemento neutro del monoide. Dicha operación monoidal posee residuo. Así pues, todo riRig es un pocrim dotado con una operación binaria que lo hace un *join* semiretículo, respecto al orden del pocrim.

Un **shell** (ver [26]) es un álgebra $A=(A,+, \cdot, 0, 1, \dots, \omega, \dots)$ con $(A,+,0)$ y $(A,\cdot,1)$ magmas donde el 0 es un elemento identidad que es absorbente. Si $a \cdot 1 = a$, para todo a en A , entonces A se dice **unital**. Todas las demás operaciones ω son operaciones genéricas. En consecuencia, un riRig es un **shell unital**, donde las operaciones $+$ y $\cdot$ son conmutativas, asociativas y la suma es distributiva con respecto al producto. La única operación adicional está dada por $\rightarrow$.

Finalmente, todo riRig no trivial puede ser considerado como un **semianillo conmutativo residuado** (ver [19]).

A nivel del álgebra universal, la clase de riRigs forma una variedad, pues presenta una base ecuacional como lo expresa la siguiente observación, la cual es esencialmente una versión para riRigs del Teorema 7.1.10 de [7].

Observación 1.1.6. Un álgebra $(A, +, *, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$ es un riRig si y sólo si, $(A, +, 0, 1)$ es un join-semiretículo integral, $(A, *, 1)$ es un monoide conmutativo y A satisface las identidades:

- 1) $(a * b) \rightarrow c = a \rightarrow (b \rightarrow c),$
- 2) $(a * (a \rightarrow b)) + b = b,$
- 3) $a \rightarrow (a + b) = 1.$

En el resultado que sigue se presentan una serie de propiedades operacionales de los riRigs que serán usadas frecuentemente a lo largo de este trabajo. Su demostración puede consultarse en [7].

Lema 1.1.7 (Lema 7.1.6). *Sean a, b, c elementos de un riRig A . Entonces, se satisface lo siguiente:*

- 1) $a \rightarrow 1 = 1,$
- 2) $1 \rightarrow a = a,$
- 3) $a \rightarrow a = 1,$
- 4) $a * (a \rightarrow b) \leq b,$

$$5) a \rightarrow b \leq (a * c) \rightarrow (b * c),$$

$$6) a \leq (a \rightarrow b) \rightarrow b,$$

$$7) a \leq b \text{ implica que } c \rightarrow a \leq c \rightarrow b \text{ y } b \rightarrow c \leq a \rightarrow c,$$

$$8) a \rightarrow (b \rightarrow c) = (a * b) \rightarrow c = b \rightarrow (a \rightarrow c),$$

$$9) a \leq b \rightarrow c \text{ si y sólo si } b \leq a \rightarrow c,$$

$$10) a \leq b \rightarrow a,$$

$$11) a \rightarrow b \leq (c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b),$$

$$12) a \rightarrow b \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c),$$

$$13) a \rightarrow b = ((a \rightarrow b) \rightarrow b) \rightarrow b.$$

$$13) a \leq b \text{ si y sólo si } a \rightarrow b = 1.$$

A fin de simplificar la notación, a partir de ahora y para el resto de este trabajo el producto $a * b$ se escribirá como ab a menos que sea necesaria alguna aclaración al respecto.

Corolario 1.1.8. Sean x, y elementos de un $\mathbf{riRig}$ A , entonces para todo $v \geq 0$,

$$(x + y)^v \leq x + y^v$$

En especial, $(x + y)^{uv} \leq x^u + y^v$ para todos $u, v \geq 0$,

Prueba. Como consecuencia directa de la integralidad, para todo $v \geq 0$, se tiene,

$$(x + y)^v = \sum_{i=0}^v x^{v-i} y^i = x^v + x \sum_{i=1}^{v-1} x^{(v-1)-i} y^i + y^v \leq x + y^v$$

Así pues,

$$(x + y)^{uv} = (x + y)^{vu} \leq (x + y^v)^u \leq x^u + y^v$$

□

En lo que sigue, se denominará como **riRig** a la categoría algebraica de $\mathbf{riRigs}$ en **Set** y cuyos morfismos son los homomorfismos de $\mathbf{riRigs}$.

1.1.1. Centro Booleano de un riRig.

En esta sección se presentará el centro booleano de un riRig y se ofrecerá una caracterización de sus elementos, así como algunas propiedades operacionales de interés. Esto se hará mediante unos lemas técnicos muy sencillos con la finalidad de preparar al lector para los contenidos del Capítulo 3, en el cual se mostrará de forma secuencial como a partir de un riRig dado se construyen todos los elementos necesarios para la representación de Pierce.

Definición 1.1.9. Sea e un elemento de un riRig A . Si existe un $b \in A$ tal que $e + b = 1$ y $eb = 0$, entonces e se dice complementado.

El conjunto de elementos complementados de A será notado como $\mathcal{B}(A)$.

Lema 1.1.10. Si $e \in \mathcal{B}(A)$, y b_1, b_2 son complementos de e . Entonces, $b_1 = b_2$.

Prueba. Observar que

$$b_1 = b_1 \cdot 1 = b_1(e + b_2) = b_1e + b_1b_2 = b_1b_2 = b_2e + b_2b_1 = b_2(e + b_1) = b_2 \cdot 1 = b_2$$

por lo tanto, la proposición se tiene. $\square$

Dada la unicidad de los complementos de los elementos booleanos probada en el Lema 1.1.10, si $e \in \mathcal{B}(A)$, su complemento será notado como e' .

Lema 1.1.11. Si $e \in \mathcal{B}(A)$, entonces $e^2 = e$.

Prueba. $e = e \cdot 1 = e(e + e') = ee + ee' = ee = e^2$. $\square$

Observación 1.1.12. La implicación contraria es falsa. Para probarlo, considérese el riRig formado por $I = [0, 1]$, con la estructura de Gödel; esto es:

$$\begin{aligned} ab &= \min\{a, b\} \\ a + b &= \max\{a, b\} \\ a \rightarrow b &= \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a > b \end{cases} \end{aligned}$$

Claramente $a^2 = a$, para todo $a \in I$, pero $a^* = a \rightarrow 0 = 0$ si $a \neq 0$, por la linealidad de I . Así pues, los únicos elementos complementados de I son 0 y 1.

Lema 1.1.13. Sea $e \in \mathcal{B}(A)$, entonces:

- i) $e = e^{**}$.
- ii) $e^* \rightarrow e = e$.
- iii) $(e \rightarrow x) \rightarrow e = e$, para todo $x \in A$.

Prueba. Para esta prueba, el lector puede consultar la Proposición 3 de [4]. $\square$

Proposición 1.1.14. Para todo $e \in A$, son equivalentes:

- i) $e \in \mathcal{B}(A)$.
- ii) $e + e^* = 1$, donde $e^* = e \rightarrow 0$.

Prueba. Si $e \in \mathcal{B}(A)$, entonces $ee' = 0 \leq 0$, luego $e' \leq e \rightarrow 0 = e^*$ por la adjunción. Dada la monotonía de la suma, se concluye que $1 = e + e' \leq e + e^*$. Por otro lado, si $e + e^* = 1$, como $ee^* = 0$ por (4) del Lema 1.1.7, del Lema 1.1.10, el resultado se tiene. $\square$

1.2. Propiedades Algebraicas

En esta sección se estudiarán algunas propiedades algebraicas de los riRigs.

1.2.1. Caracterización de las Congruencias de riRigs.

En esta sección se definirán los filtros en riRigs y su correspondencia con las congruencias.

Definición 1.2.1. Sea A un riRig. Un *filtro* en A es un $S \subseteq A$, no vacío tal que:

- i) Si $a, b \in S$, entonces $ab \in S$
- ii) Si $a \leq b$ y $a \in S$, entonces $b \in S$.

La clase de filtros de A se notará como $\mathfrak{F}(A)$.

Observación 1.2.2. Teniendo en cuenta que un subconjunto S de un poset P se dice superior, si

$$(\uparrow S) = \{x \in P \mid (\exists s \in S), s \leq x\} = S,$$

se verifica que todo filtro en un *riRig* es un submonoide multiplicativo que es superior con respecto al orden inducido, ya que si S es filtro, en un riRig A , por (ii) y la Integralidad, se tiene que $1 \in S$.

Definición 1.2.3. Sea A un riRig y $X \subseteq A$. El *filtro generado* por X se define como:

$$\langle X \rangle = \{a \in A \mid (\exists_{x_1, \dots, x_n \in X}, x_1 \dots x_n \leq a)\}.$$

En particular, si $X = \{b\}$, entonces $\langle \{b\} \rangle = \{a \in A \mid (\exists_{n \in \mathbb{N}}, b^n \leq a)\}$. Dicho conjunto será notado como $\langle b \rangle$.

Lema 1.2.4. $\langle X \rangle$ es un filtro en A .

Prueba. Si $a, b \in \langle X \rangle$ entonces $x_1 \dots x_n \leq a$ y $y_1 \dots y_m \leq b$, para algunos $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m \in X$ con $m, n \in \mathbb{N}$. Dado que el producto es isótono

$$(x_1 \dots x_n)(y_1 \dots y_m) \leq ab$$

así pues, $ab \in \langle X \rangle$. Además, si $a \leq b$, y $a \in \langle X \rangle$, se tiene que $x_1 \dots x_n \leq a \leq b$, por lo tanto $b \in \langle X \rangle$. $\square$

Definición 1.2.5. Un filtro P de un riRig A tal que:

- i) $0 \notin P$
- ii) $a + b \in P$ implica que $a \in P$ o $b \in P$.

se dice *filtro primo*.

En lo sucesivo, el conjunto de los filtros primos de A se notará como $\mathfrak{P}(A)$.

Lema 1.2.6. Sea $P \in \mathfrak{P}(A)$. Para todo $a \in A$, se tiene que $a \in P$ o $a^* \in P$, pero no ambos.

Prueba. Supongase que $a \in P$ y $a^* \in P$, entonces $aa^* \in P$ pues P es filtro, así $0 \in P$. Lo cual es absurdo pues P es propio. $\square$

A continuación, se prueba la variante del Teorema del Filtro primo para riRigs. Este resultado, será de gran importancia para la demostración clásica del teorema de representación subdirecta de riRigs (Teorema 1.2.31).

Teorema 1.2.7. (Teorema del Filtro Primo) Sea $F \in \mathfrak{F}(A)$ y $a \in A$ tal que $a \notin F$. Entonces, existe un filtro primo P que incluye a F pero no contiene a a .

Prueba. Sea $\mathcal{L} = \{L \in \mathfrak{F}(A) \mid F \subseteq L \text{ y } a \notin L\}$. $\mathcal{L}$ es no vacío, pues $F \in \mathcal{L}$. Considérese una cadena $\mathcal{C} = \{P_\alpha\} \subseteq \mathcal{L}$. Se verifica que $\bigcup P_\alpha$ es un filtro. Si $x, y \in \bigcup P_\alpha$ se tiene que $x \in P_\beta, y \in P_{\beta'}$ para algún β, β' . Como $\mathcal{C}$ es cadena, $P_\beta \subseteq P_{\beta'}$ o vice versa. Si $P_\beta \subseteq P_{\beta'}$ entonces $x, y \in P_{\beta'}$, luego $xy \in P_{\beta'}$

pues es filtro. En consecuencia, $xy \in \bigcup P_\alpha$. Considérese ahora $x, y \in A$ tales que $x \leq y$, con $x \in \bigcup P_\alpha$, entonces $x \in P_\beta$ para algún β , luego $y \in P_\beta$, pues es un filtro, así pues, $y \in \bigcup P_\alpha$. La prueba para el otro caso es la misma. Por lo tanto, por el lema de Zorn, $\mathcal{L}$ tiene elemento maximal, esto es, P .

Para verificar que P es primo, supóngase que $x + y \in P$, pero $x, y \notin P$. Sean $F_1 = \langle P \cup \{x\} \rangle$ y $F_2 = \langle P \cup \{y\} \rangle$, entonces $P \subset F_1, F_2$, luego $F_1, F_2 \notin \mathcal{L}$ y en consecuencia $a \in F_1, F_2$. Esto significa que existen $s, t \in P$ y $m, n \geq 0$, tales que $sx^n \leq a$ and $ty^m \leq a$. Del Corolario 1.1.8 se tiene que, $(x + y)^{mn} \leq x^n + y^m$, entonces, como P es filtro, $x + y \in P$ implica que $(x + y)^{mn} \in P$ y por lo tanto $x^n + y^m \in P$. Así pues, $a \geq sx^n + ty^m \geq st(x + y)^{mn}$, luego $a \in P$, lo cual es absurdo por construcción. $\square$

Corolario 1.2.8. *Todo filtro propio de un riRig es la intersección de los filtros primos que lo contienen.*

Prueba. Sea $\mathcal{W} = \{P \in \mathfrak{P}(A) \mid F \subseteq P\}$. Es claro que $F \subseteq \bigcap \mathcal{W}$. Por otro lado, supóngase que existe un $x \in A$ tal que $x \in \bigcap \mathcal{W}$ pero $x \notin F$, entonces $x \in P$ para todo $P \in \mathcal{W}$ y $x \notin F$. Por el Teorema 1.2.7, existe un $P' \in \mathfrak{P}(A)$, tal que $F \subseteq P$ y $x \notin P$, lo cual es absurdo por hipótesis. $\square$

Definición 1.2.9. Sea A un riRig. Un $D \subseteq A$ tal que $1 \in D$ es un *Sistema Deductivo* si para todos $a, b \in A$ tales que $a \rightarrow b \in D$ y $a \in D$, se tiene que $b \in D$.

Proposición 1.2.10. *En un riRig A todo filtro es un Sistema Deductivo.*

Prueba. (c.f. Lemma 7.1.12 de [7]). $\square$

Lema 1.2.11. *Si $\theta \in \text{Con}(A)$, entonces $F_\theta = \{a \in A \mid (a, 1) \in \theta\}$ es un filtro en A .*

Prueba. Si $a, b \in F_\theta$, se tiene que $(a, 1), (b, 1) \in \theta$, entonces $(ab, 1) \in \theta$, puesto que $\theta \in \text{Con}(A)$. Además, si $a \leq b$ y $a \in F_\theta$ entonces $a + b = b$, $(a, 1) \in \theta$ y $(b, b) \in \theta$. Así, $(a + b, b + 1) = (b, 1) \in \theta$, dado que $\theta \in \text{Con}(A)$ y A es integral. Por lo tanto $b \in F_\theta$. $\square$

Lema 1.2.12. *Si F es un filtro en A , entonces*

$$\theta_F = \{(a, b) \in A \times A \mid a \rightarrow b \in F \quad y \quad b \rightarrow a \in F\}$$

es una congruencia en A .

Prueba. Se verifica que θ_F es una relación de equivalencia: $(a, a) \in \theta_F$, dado que $1 = a \rightarrow a \in F$. Por definición, $(a, b) \in \theta_F$ implica que $(b, a) \in \theta_F$. Finalmente, si $(a, b) \in \theta_F$ y $(b, c) \in \theta_F$, por propiedades de $\rightarrow$ se tiene que $a \rightarrow b \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$, entonces $(a \rightarrow b)(b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$. Como F es filtro y $a \rightarrow b, b \rightarrow c \in F$ entonces $(a \rightarrow b)(b \rightarrow c) \in F$, luego $a \rightarrow c \in F$. La prueba de $c \rightarrow a \in F$ usa un argumento similar. Así pues, $(a, c) \in \theta_F$.

Para verificar que θ_F es una congruencia, sean $(a, b), (c, d) \in \theta_F$, entonces, $a \rightarrow b, b \rightarrow a, c \rightarrow d, d \rightarrow c$ son elementos de F . Por (4) del Lema 1.1.7, $a(a \rightarrow b) \leq b$. Como el producto es monótono, por la integralidad se tiene que,

$$a(a \rightarrow b)(c \rightarrow d) \leq a(a \rightarrow b) \leq b \leq b + d,$$

$$c(a \rightarrow b)(c \rightarrow d) \leq c(c \rightarrow d) \leq d \leq b + d,$$

Así, tras sumar las dos desigualdades anteriores y aplicar la adjunción del residuo, se obtiene que $(a \rightarrow b)(c \rightarrow d) \leq a + c \rightarrow b + d$. Como F es filtro, $(a \rightarrow b)(c \rightarrow d) \in F$, entonces $a + c \rightarrow b + d \in F$. La prueba para $b + d \rightarrow a + c \in F$ es similar. Por lo tanto, $(a + c, b + d) \in \theta_F$.

Para probar que θ_F es compatible con el producto, por (4) del Lema 1.1.7, se tiene que $a(a \rightarrow b) \leq b$ y $c(c \rightarrow d) \leq d$. Al multiplicar las dos desigualdades anteriores y aplicar la adjunción, se obtiene que $(a \rightarrow b)(c \rightarrow d) \leq ac \rightarrow bd$ luego $ac \rightarrow bd \in F$. Un argumento similar muestra que $bd \rightarrow ac \in F$. Así, $(ac, bd) \in \theta_F$.

Finalmente, para probar que θ_F es compatible con el residuo; nuevamente, por la aplicación sucesiva de (4) del Lema 1.1.7 y la monotonía del producto, resulta que

$$a(a \rightarrow b)(b \rightarrow d)(d \rightarrow c) \leq d(d \rightarrow c) \leq c,$$

luego $(a \rightarrow b)(d \rightarrow c) \leq (b \rightarrow d) \rightarrow (a \rightarrow c)$. Lo anterior implica que $(b \rightarrow d) \rightarrow (a \rightarrow c) \in F$. La prueba de que $(a \rightarrow c) \rightarrow (b \rightarrow d) \in F$ es similar. Por lo tanto $(a \rightarrow c, b \rightarrow d) \in \theta_F$. $\square$

La siguiente Proposición es una versión dual a la Proposición 3.1 de [2].

Lema 1.2.13. *La correspondencia*

$$\begin{aligned} \eta : \text{Con}(A) &\longrightarrow \mathfrak{F}(A) \\ \theta &\longmapsto F_\theta \end{aligned}$$

define un isomorfismo de conjuntos ordenados entre $\text{Con}(A)$ y $F(A)$.

1.2.2. Localizaciones en riRigs.

En términos generales, una localización es el proceso mediante el cual se agregan inversos formales a un álgebra dada. En esta Sección se estudian las localizaciones en riRigs. Para ello se hará uso de algunos resultados previos en relación a los elementos inversibles en un rig A (Definición 1.1.1).

Definición 1.2.14. Sea A un rig. Un elemento $x \in A$ se dice *inversible* si existe un $z \in A$ tal que $xz = 1$. En tal caso se dirá que z es un inverso de A .

Lema 1.2.15. Sea A un rig. Si $x \in A$ es inversible su inverso es único.

Prueba. Sean z, z' inversos de x . El enunciado se obtiene a partir del siguiente cálculo

$$z = z \cdot 1 = z(xz') = (zx)z' = 1 \cdot z' = z'.$$

□

El conjunto de elementos inversibles de un rig A será notado como $\text{Inv}(A)$. Si $x \in \text{Inv}(A)$, su inverso será notado como x^{-1} .

Lema 1.2.16. Sea A un rig integral. Entonces, si x es inversible, $x = 1$.

Prueba. Sea $x \in A$ inversible. Como A es integral, para todo $x \in A$, se tiene que

$$x = x \cdot 1 = x(x^{-1} + 1) = xx^{-1} + x = 1 + x = 1.$$

□

Corolario 1.2.17. Para todo riRig A , $\text{Inv}(A) = \{1\}$.

Por lo tanto, en la variedad de riRigs, el problema de invertir elementos, es equivalente al problema de hacer colapsar dichos elementos en 1. En lo sucesivo, para todo $S \subseteq A$, se notará como $A \longrightarrow A[S^{-1}]$ a cualquier solución al problema universal de colapsar todos los elementos de S en 1.

Notar que, del Lema 1.2.13, se deduce que todo $F \in \mathfrak{F}(A)$ induce una única congruencia θ_F , luego A/θ_F siempre es un riRig. En aras de una mayor claridad, el cociente anterior será notado como A/F y a su vez, la clase de un elemento x de A en A/F será notado como $[x]_F$. En particular, si $F = \langle a \rangle$ para algún a en A , la “clase de x módulo a ” en $A/\langle a \rangle$ se notará como $[x]_a$.

Lema 1.2.18. Sea $F \in \mathfrak{F}(A)$. El cociente $A \longrightarrow A/F$ tiene la propiedad universal de $A \longrightarrow A[F^{-1}]$.

Prueba. Se deduce inmediatamente del Lema 1.2.13 y de propiedad universal de las congruencias. $\square$

En particular, para todo $a \in A$, el problema de colapsar todos los elementos de $\langle a \rangle$ en 1 se reduce al problema de “forzar” a que a sea 1.

Obsérvese que si $e \in B(A)$, por el Lema 1.1.11, se tiene que $e^2 = e$, entonces para todo $x \leq e$, como $xe' = 0$, se tiene que $xe = x(e + e') = x1 = x$. Esto quiere decir que la estructura de riRig de A puede extenderse a

$$(\downarrow e) = \{x \in A \mid x \leq e\}.$$

Lema 1.2.19. Sea A un riRig y $e \in \mathcal{B}(A)$. La función $i : A \rightarrow (\downarrow e)$ definida como $i(x) = xe$, posee la propiedad universal de $A \rightarrow A[e^{-1}]$.

Prueba. Dado que $e = ee$, existe un unico $\psi : A/\langle e \rangle \rightarrow (\downarrow e)$ que factoriza a i . Se verifica que ψ es biyectiva. Dado que $\psi([x]_e) = x$, la sobreyectividad se tiene. Ahora, si $\psi([x]_e) = \psi([y]_e)$ entonces $ex = ey$, luego, por el Lema 1.2.12, $[x]_e = [y]_e$. Esto es, ψ es inyectiva. Así, la proposición se tiene. $\square$

De la definición de filtro generado, es claro que $\langle 0 \rangle = A$. Como $A/\langle 0 \rangle = 1$, la única manera de colapsar todos los elementos del álgebra en 1, es identificándolos con 0, en particular a 1, lo cual da como resultado el álgebra trivial. Sin embargo, es natural preguntarse que sucede en el caso contrario, esto es, dado un $a \in A$, cuándo $A/\langle a \rangle = 1$? Para responder a ésta interrogante, se define lo siguiente:

Definición 1.2.20. Un elemento a de un riRig A es *nilpotente* si existe un $n \geq 0$ tal que $a^n = 0$.

Lema 1.2.21. Para todo riRig A , $\langle a \rangle = A$ si y sólo si a es nilpotente.

Prueba. Supóngase a nilpotente. Entonces $a^n = 0 \leq x$, para todo $x \in A$. Por lo tanto $A \subseteq \langle a \rangle$. $\square$

Corolario 1.2.22. Para todo riRig A , $A/\langle a \rangle = 1$ si y sólo si a es nilpotente.

Finalmente, se exhibe un resultado que será de utilidad para la Sección 5.2.

Sea A un riRig y $F \in \mathfrak{F}(A)$. Considérese en F el orden parcial heredado de A . Como poset, F es cofiltrado puesto que para todos $x, y \in F$ se tiene que $xy \leq x$ y $xy \leq y$ por integralidad. La asignación que envía a $x \in F$ en $A[x^{-1}]$ en **riRig** determina un funtor $F^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{riRig}$ pues, si $x \leq y$ en F entonces,

existe un único morfismo $A[y^{-1}] \rightarrow A[x^{-1}]$ tal que el triángulo izquierdo del diagrama de abajo

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A[y^{-1}] & \longrightarrow & A[F^{-1}] \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & A[x^{-1}] & & \end{array}$$

conmuta. A su vez, el morfismo universal $A \rightarrow A[F^{-1}]$ determina morfismos $A[y^{-1}] \rightarrow A[F^{-1}]$ y $A[x^{-1}] \rightarrow A[F^{-1}]$; más aún, la propiedad universal de $A \rightarrow A[y^{-1}]$ implica que el triángulo derecho del diagrama de arriba conmuta. Dicho de otra forma, se tiene un cocono desde el funtor $F^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{riRig}$ hacia $A[F^{-1}]$.

Lema 1.2.23. *Para todo filtro F de un $\mathbf{riRig}$ A , existe un único isomorfismo $A[F^{-1}] \rightarrow \varinjlim_{x \in F^{\text{op}}} A[x^{-1}]$ tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A[F^{-1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A[x^{-1}] & \longrightarrow & \varinjlim_{x \in F^{\text{op}}} A[x^{-1}] \end{array}$$

conmuta para todo $x \in F$.

Prueba. Para probar el enunciado, sea g un cocono del funtor $F^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{riRig}$ a un $\mathbf{riRig}$ B . Entonces, existe un diagrama como el de abajo a la izquierda,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A[y^{-1}] \xrightarrow{g_y} B \\ & \searrow & \downarrow \nearrow \\ & & A[x^{-1}] \xrightarrow{g_x} B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A[F^{-1}] \\ & \searrow & \downarrow \\ & & B \end{array}$$

el cual induce un morfismo $g' : A \rightarrow B$ que colapsa a todos los elementos de F en 1. Así pues, existe un único $\bar{g} : A[F^{-1}] \rightarrow B$ tal que el diagrama de arriba a la derecha conmuta. La propiedad universal de $A \rightarrow A[x^{-1}]$ implica que el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} A[x^{-1}] & \longrightarrow & A[F^{-1}] \\ & \searrow & \downarrow \\ & & B \end{array}$$

conmuta para todo $x \in F$. Claramente, el morfismo $\bar{g}$ es el único con esta propiedad. Si se denota al funtor $F^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{riRig}$ como $\varinjlim_{x \in F^{\text{op}}} A[x^{-1}]$, el resultado se tiene. $\square$

1.2.3. riRigs directamente indescomponibles.

En esta sección se estudiarán las descomposiciones directas en la variedad de riRigs. Se mostrará que cada elemento del centro booleano de un riRig (Sección 1.1.1) induce una descomposición directa del álgebra original, obteniendo como resultado principal, una caracterización de los riRigs directamente indescomponibles.

Sean A y B riRigs. El producto directo (o simplemente, producto) de A y B es el riRig que tiene como universo al conjunto $A \times B$ y cuyas operaciones están definidas punto a punto.

Como se sabe (ver [34]), en un álgebra $\mathbf{A}$ una congruencia θ se dice factor si existe una congruencia θ^* tal que: (i) $\theta \cap \theta^* = \Delta$, (ii) $\theta \vee \theta^* = \nabla$ y (iii) $\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta$.

La siguiente Proposición es un caso particular del Teorema 7.5.II de [34].

Lema 1.2.24. *Sea A un riRig, entonces para todo $e \in \mathcal{B}(A)$ se tiene que $A \cong A/\theta_{\langle e \rangle} \times A/\theta_{\langle e' \rangle}$, donde $e' = e \rightarrow 0$.*

Prueba. Se verifica que $\theta_{\langle e \rangle}$ y $\theta_{\langle e' \rangle}$ son congruencias factor. Si (a, b) pertenece a $\theta_{\langle e \rangle} \cap \theta_{\langle e' \rangle}$ se tiene que $ae = be$ y $ae' = be'$, entonces $ae + ae' = be + be'$, luego $a = b$, lo cual significa que $(a, b) \in \Delta$. Ahora, si $(a, b) \in A \times A$ entonces $(a, ae) \in \theta_{\langle e \rangle}$, $(ae, be) \in \theta_{\langle e' \rangle}$, $(be, 0) \in \theta_{\langle e' \rangle}$, $(0, ae') \in \theta_{\langle e \rangle}$, $(ae', be') \in \theta_{\langle e \rangle}$ y $(be', b) \in \theta_{\langle e' \rangle}$. Por lo tanto $(a, b) \in \theta_{\langle e \rangle} \vee \theta_{\langle e' \rangle}$. Finalmente, para probar que $\theta_2 \circ \theta_1 = \theta_1 \circ \theta_2$, sea $(a, b) \in \theta_1 \circ \theta_2$, entonces, existe un $c \in A$ tal que $(a, c) \in \theta_1$, $(c, b) \in \theta_2$, luego $ae = ce$ y $ce' = c'b$, lo cual implica que $c = ae + e'b$, donde, $\theta_1 = \theta_{\langle e \rangle}$ y $\theta_2 = \theta_{\langle e' \rangle}$. Sea $d = ae' + be$, entonces, $ed = be^2 = be$ y $e'd = ae'$, pues $e, e' \in \mathcal{B}(A)$. Por tanto, existe un $d \in A$ tal que, $(a, d) \in \theta_2$, $(d, b) \in \theta_1$; esto es, $(a, b) \in \theta_2 \circ \theta_1$. Así, $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$. De manera similar se prueba que $\theta_2 \circ \theta_1 \subseteq \theta_1 \circ \theta_2$. En consecuencia $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$. $\square$

Corolario 1.2.25. *Sea A un riRig, entonces para todo $e \in \mathcal{B}(A)$ se satisface que $A \cong (\downarrow e) \times (\downarrow e')$.*

Prueba. Consecuencia directa de aplicar el Lema 1.2.19 al Lema 1.2.24. $\square$

Proposición 1.2.26. *Un riRig A no trivial es directamente indescomponible si y sólo si $\mathcal{B}(A)$ es trivial.*

Prueba. El Corolario 1.2.25 garantiza que $\mathcal{B}(A)$ es trivial si A es directamente indescomponible. Por otro lado, supóngase $\mathcal{B}(A)$ trivial. Si A es directamente descomponible, existen riRigs A y B no triviales tales que $A \cong B \times C$.

Es claro que $0_A = (0_B, 0_C)$ y $1_A = (1_B, 1_C)$. Sean $a = (1_B, 0_C)$ y $b = (0_B, 1_C)$, entonces $a + b = 1_A$ y $ab = 0_A$; esto es, existen $a, b \in \mathcal{B}(A)$ distintos de 0_A y 1_A , lo cual es absurdo por hipótesis. $\square$

1.2.4. riRigs really local.

El propósito de esta sección es presentar la definición de riRig really local, y mostrar que todo riRig se puede expresar como descomposición subdirecta de éstos. También se muestra que todo riRig subdirectamente irreducible es really local.

Un anillo conmutativo con unidad R se dice local, si posee un único ideal maximal. Es bien sabido (ver [21], por ejemplo) que esta última definición equivale a decir que: (i) R es no trivial y (ii) si la suma de dos elementos de R es inversible, entonces alguno de ellos es inversible. En [27], Lawvere aplica la observación anterior al contexto de rigs y la enuncia en términos de cantidades positivas (teniendo en cuenta que un rig es un “anillo sin negativos”), introduciendo así el concepto de *rig really local*. En palabras del mismo Lawvere: “*The preservation of addition is a strengthening, possible for positive quantities, of the usual notion of localness (which on truth values was only an inequality)*”. Se aclara además, que la palabra “*really*” alude a dos ideas: (1) un fortalecimiento del hecho de ser local y (2) un concepto apropiado al contexto real (en oposición al contexto complejo).

Dado que todo riRig A tiene un rig integral como reducto y además $1 \in A$ es el único elemento inversible (Corolario 1.2.17), de la discusión anterior se obtiene la siguiente

Definición 1.2.27. Un riRig A es *really local* si:

- i) A es no trivial.
- ii) Para todos $x, y \in A$, $x + y = 1$ implica que $x = 1$ o $y = 1$.

Lema 1.2.28. Sea A un riRig. Entonces A/P es really local si y sólo si P es un filtro primo no trivial.

Prueba. Sea $A/P = \{[x]_P \mid x \in A\}$. Supóngase que P es un filtro primo y que $[x]_P + [y]_P = [1]_P$, entonces $x + y \in P$, luego $x \in P$ o $y \in P$, por lo tanto, $[x]_P = [1]_P$ o $[y]_P = [1]_P$. Por otro lado, sea A/P really local y supóngase que $x + y \in P$ entonces $[x + y]_P = [x]_P + [y]_P = [1]_P$, luego $[x]_P = [1]_P$ o $[y]_P = [1]_P$, así pues, $x \in P$ o $y \in P$. Si $0 \in P$ entonces $[0]_P = [1]_P$, luego A/P debe ser trivial, lo cual es absurdo por definición. $\square$

El *kernel* de un homomorfismo $f : A \rightarrow B$ es el conjunto

$$\text{Ker}(f) = \{x \in A \mid f(x) = 1\}.$$

Lema 1.2.29. *Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo de *riRigs*. Entonces:*

- i) f es inyectiva si y sólo si $\text{Ker}(f) = \{1\}$.*
- ii) $\text{Ker}(f) \in \mathfrak{P}(A)$ si y sólo si B es no trivial y $f(A)$ como subálgebra de B es really local.*

Prueba. Se prueba (i). Sea f un morfismo inyectivo de *riRigs*, entonces, $f(x) = 1 = f(1)$ implica $x = 1$, luego $\text{Ker}(f) = \{1\}$. Por otro lado, asumiendo que $\text{Ker}(f) = \{1\}$, entonces $f(x) = f(y)$ implica que $f(x) \leq f(y)$ y $f(y) \leq f(x)$, luego, por el ítem (13) del Lema 1.1.7, $f(x) \rightarrow f(y) = 1$ y $f(y) \rightarrow f(x) = 1$, así, $f(x \rightarrow y) = 1$ y $f(y \rightarrow x) = 1$. Por hipótesis, se tiene que $x \rightarrow y = 1$ y $y \rightarrow x = 1$, por lo tanto, $x \leq y$ y $y \leq x$. Así pues, $x = y$, luego f es inyectiva.

Para verificar (ii), nótese que, por el Lema 1.2.28, $\text{Ker}(f) \in \mathfrak{P}(A)$ si y sólo si $A/\text{Ker}(f) \cong h(A)$ es no trivial y really local. $\square$

Sean A y A_i *riRigs* para cada $i \in I$. Una *Representación Subdirecta* de A con factores A_i es un embedding h de A al producto $\prod_{i \in I} A_i$ tal que h_i , definida por $h_i = \pi_i h$ es sobreyectiva en A_i para cada $i \in I$, donde π_i denota la i -ésima proyección.

Lema 1.2.30. *Un *riRig* A es producto subdirecto de una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de *riRigs* si y sólo si existe una familia de filtros $\{F_i\}_{i \in I}$ de A , tales que:*

- i) Para todo $i \in I$, $A_i \cong A/F_i$*
- ii) $\bigcap_{i \in I} F_i = \{1\}$.*

Prueba. Sea $h : A \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ una representación subdirecta de A . Considérese $F_j = \text{Ker}(h_j)$. Como h_j es sobreyectiva y F_j es filtro para todo $j \in I$, se tiene que $A_i \cong A/F_j$. Ahora, como h es inyectiva, por (i) del Lema 1.2.29, $\text{Ker}(h) = \{1\}$, luego $h(x) = 1$ si y sólo si $h_j(x) = 1_j$ para todo $j \in I$, esto es, $x \in F_j$ para todo $j \in I$ si y sólo si $x = 1$.

Por otro lado, supóngase que existe una familia de filtros $\{F_i\}_{i \in I}$ de A tales que (i) y (ii). Sea ϵ_j el isomorfismo entre A/F_j y A_j . Defina $h = \langle \epsilon_j \iota_j \rangle$, con $\iota_j : A \rightarrow A/F_j$. Es claro que $\epsilon_j \iota_j$ es sobreyectiva para todo $j \in I$. Ahora, si

$h(x) = 1$, entonces $(\epsilon_j \iota_j)(x) = 1_j$ para todo $j \in I$, luego $x \in \bigcap_{i \in I} F_i$, lo cual, por hipótesis, significa que $x = 1$. Por lo tanto, por (i) del Lema 1.2.29, h es inyectiva, esto es, una representación subdirecta de A .

Teorema 1.2.31. *Todo riRig no trivial es producto subdirecto de riRigs really local.*

Prueba. Sea A un riRig no trivial. Es claro que $\{1\} \in \mathfrak{F}(A)$ y es propio. Por el Corolario 1.2.8, $\{1\} = \bigcap \{P \in \mathfrak{P}(A) \mid \{1\} \subseteq P\}$. Ahora, por el Lema 1.2.28, A/P es really local, para todo $P \in \mathfrak{P}(A)$, luego, por el Lema 1.2.30, se tiene el enunciado. $\square$

Observación 1.2.32. Sea A un riRig. De la Definición 1.2.27 y la Proposición 1.2.26, se observa que si A es really local entonces A es directamente indescomponible. Sin embargo, esta implicación es estricta ya que, si se considera a $A = \{0, a, b, c, 1\}$ con $0 \leq c \leq a, b \leq 1$, la suma dada por el máximo, el producto dado por el mínimo y el residuo construido como en la Observación 1.1.3, es claro que $\mathcal{B}(A)$ es trivial, luego A es un riRig directamente indescomponible que no es really local, pues $a, b \neq 1$ y $a + b = 1$.

1.2.5. riRigs subdirectamente irreducibles.

Un riRig A es *subdirectamente irreducible* si para cualquier representación subdirecta $f : A \longrightarrow \prod_{i \in I} A_i$ existe un j tal que f_j es un isomorfismo.

Proposición 1.2.33. *Un riRig A es subdirectamente irreducible, si y sólo si, existe un elemento $r < 1$ tal que, para todo $a < 1$ en A , existe un entero positivo m tal que $a^m \leq r$.*

Prueba. Un riRig A es subdirectamente irreducible, si y sólo si $\text{Con}(A)$ tiene un átomo no trivial (Teorema 8.4 de [34]), lo cual, por el Lema 1.2.13, se corresponde con $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}(A)} F \supset \bigcap_{a \in A} \langle a \rangle \supset \{1\}$, luego existe un $r < 1$ tal que $r \in \langle a \rangle$, para todo $a < 1$ en A . Esto sucede, si y sólo si para todo $a < 1$ en A existe un número natural m , tal que $a^m \leq r$. $\square$

Corolario 1.2.34. *Todo riRig subdirectamente irreducible es really local.*

Prueba. Sea A un riRig subdirectamente irreducible. Si A no es really local se tiene que $x + y = 1$, para algún par de elementos $x, y < 1$ en A , entonces, por la Proposición 1.2.33, existe un $r < 1$ en A y m, n naturales tales que $x^m, y^n \leq r$. De la monotonía de la suma y del Corolario 1.1.8 se tiene que

$$1 = (x + y)^{mn} \leq x^m + y^n \leq r$$

luego, $r = 1$, lo cual es absurdo. $\square$

Definición 1.2.35. Un elemento a de un *riRig* A es un coátomo si es maximal entre los elementos de $A - \{1\}$.

Corolario 1.2.36. *Todo riRig subdirectamente irreducible A , tiene un sólo coátomo o ninguno.*

Prueba. Si A tiene dos coátomos distintos, $x, y < 1$, entonces $x + y = 1$, luego A no es subdirectamente irreducible. $\square$

Como ejemplo de *riRig* subdirectamente irreducible sin coátomos, considérese al intervalo real $I = [0, 1]$ con la estructura de álgebra producto ([7]); esto es, el producto está dado por el producto usual de números reales, la suma viene dada por $x + y = \max\{x, y\}$ y el residuo viene dado por

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & x \not\leq y \end{cases}$$

Claramente, $[0, 1]$ no tiene coátomos. Por la Propiedad Arquimedean del producto en dicho intervalo, para todo $0 < x < 1$, y $a < 1$ se tiene que $x^m \leq a$, para algún $m \geq 1$. Luego, por la Proposición 1.2.33, I es subdirectamente irreducible.

Observación 1.2.37. Nótese que el recíproco del Corolario 1.2.34 no es cierto, ya que si se considera a $I = [0, 1]$ con la estructura de *Gödel*; esto es, tomando al producto como $xy = x \wedge y$, la suma como $x + y = \max\{x, y\}$ y al residuo como

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x \not\leq y \end{cases}$$

al ser $[0, 1]$ cadena, el máximo de dos elementos estrictamente menores a 1 siempre es menor que 1, luego I es really local. Por otro lado, sea $r < 1$, como $[0, 1]$ no tiene coátomos, existe un $a < 1$ tal que $r < a < 1$. Como $a^m = a$ para todo $m > 0$, entonces $r < a^m < 1$. Así, de la Proposición 1.2.33, se tiene que I no es subdirectamente irreducible.

Capítulo 2

riRigs en $\mathbf{Shv}(D)$.

Este capítulo propone ofrecer las bases de teoría de topos necesarias para las representaciones de riRigs de los Capítulos 3 y 4. Para tal efecto, se obtiene una descripción concreta de los coproductos en el topos de haces sobre un retículo distributivo con el sitio coherente; lo anterior, junto con el uso de la lógica interna en dicho topos, resulta determinante para la obtención de una caracterización de los riRigs conexos y really local. Finalmente, se introducen los subobjetos principales; estos objetos son de particular importancia para la representación really local de riRigs del Capítulo 5. La notación utilizada en este capítulo, se corresponde con la utilizada en [30].

2.1. Coproductos binarios en $\mathbf{Shv}(D)$.

Todo retículo distributivo y acotado D , considerado como una categoría pequeña puede equiparse con una base para una topología de Grothendieck (ver, C.2.1.12 (d) en [25]) llamada *topología coherente*; cuyas familias recubridoras están dadas por familias finitas $\{d_i \rightarrow d \mid i \in I\}$ tales que $\bigvee_i d_i = d$. En lo sucesivo, el topos de haces inducido, será notado como $\mathbf{Shv}(D)$ y los términos retículo, retículo distributivo y retículo distributivo y acotado serán utilizados indistintamente.

Sea $\widehat{D}$ la categoría de prehaces sobre un retículo D . Es claro que para probar que un prehaz $P : D^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ es un haz con respecto a la *topología coherente*, basta con probar que P satisface la condición de haz para los cubrimientos binarios. A su vez, dado que la familia vacía cubre un objeto $d \in D$ si y sólo si $d = 0$, se tiene que para todo $X \in \mathbf{Shv}(D)$, $X(0) = 1$, esto es, el objeto terminal de $\mathbf{Set}$.

En esta sección, se ofrece en detalle, una descripción de los coproductos binarios en $\mathbf{Shv}(D)$, así como la definición de $riRig$ en dicho topos.

Lema 2.1.1. *Para todos A y B objetos de $\mathbf{Shv}(D)$, el funtor S , definido como*

$$S(d) = \{(d_0, d_1, x, y) \mid d_0 \vee d_1 = d, d_0 \wedge d_1 = 0, x \in A(d_0), y \in B(d_1)\}$$

es el coproducto de A y B en $Sh(D)$.

Prueba. Sean $c \leq d$ en D y $(d_0, d_1, x, y) \in S(d)$, es claro que $d_0 \wedge c$ y $d_1 \wedge c$ inducen una partición de c , luego la acción sobre d es definida como

$$\begin{aligned} S(d) &\longrightarrow S(c) \\ (d_0, d_1, x, y) &\mapsto (d_0 \wedge c, d_1 \wedge c, x \cdot (d_0 \wedge c), y \cdot (d_1 \wedge c)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, S es prehaz.

Para probar que S es un haz, considérese un cubrimiento binario de $d \in D$, $s \vee t = d$; supóngase que $(s_0, s_1, a, b) \in S(s)$ y $(t_0, t_1, l, m) \in S(t)$ son una familia compatible para el cubrimiento $\{s, t\}$. Entonces

$$(s_0, s_1, a, b) \cdot (s \wedge t) = (t_0, t_1, l, m) \cdot (s \wedge t)$$

implica que $s_0 \wedge t = s \wedge t_0$, $s_1 \wedge t = s \wedge t_1$, $a \cdot (s \wedge t) = l \cdot (s \wedge t)$ y que $b \cdot (s \wedge t) = m \cdot (s \wedge t)$.

Considérese $d_0 = s_0 \vee t_0$ y $d_1 = s_1 \vee t_1$; se verifica que es una partición de d . Dado que s_0, s_1 y t_0, t_1 son particiones de s y t respectivamente, se tiene que $d_0 \vee d_1 = (s_0 \vee t_0) \vee (s_1 \vee t_1) = s \vee t = d$. Además $d_0 \wedge d_1 = (s_0 \vee t_0) \wedge (s_1 \vee t_1) = (t_0 \wedge s_1) \vee (s_0 \wedge t_1)$; como $t_1 \leq t$, se tiene que $s_0 \wedge t_1 \leq s_0 \wedge t = s \wedge t_0$, pues son compatibles. Entonces $s_0 \wedge t_1 \leq (s \wedge t_0) \wedge t_1 = 0$, luego, $s_0 \wedge t_1 = 0$. De manera similar se verifica que $s_1 \wedge t_0 = 0$. Así pues, $d_0 \wedge d_1 = 0$.

Ahora, $a \cdot (s_0 \wedge t_0) = (a \cdot (s \wedge t)) \cdot (s_0 \wedge t) = (l \cdot (s \wedge t)) \cdot (s_0 \wedge t) = l \cdot (s_0 \wedge t_0)$. De manera similar, se verifica que $b \cdot (s_1 \wedge t_1) = m \cdot (s_1 \wedge t_1)$. Esto significa que $\{a, l\}$ y $\{b, m\}$ son familias compatibles de A y B para los cubrimientos $\{s_0, t_0\}$, $\{s_1, t_1\}$ de d_0 y d_1 , respectivamente. Entonces, existen $x \in A(d_0)$ e $y \in B(d_1)$ únicos que amalgaman a tales familias. Además, $d_0 \wedge s = (s_0 \vee t_0) \wedge s = s_0 \wedge (t_0 \vee s) = s_0 \wedge (t \vee s_0) = s_0$. Las comprobaciones de que $d_1 \wedge s = s_1$, $d_0 \wedge t = t_0$ y que $d_1 \wedge t = t_1$ son similares.

Entonces, existe un $(d_0, d_1, x, y) \in S(d)$ tal que $(d_0, d_1, x, y) \cdot s = (s_0, s_1, a, b)$ y $(d_0, d_1, x, y) \cdot t = (t_0, t_1, l, m)$.

Supóngase ahora, que existe otro $(c_0, c_1, u, v) \in S(d)$ tal que

$$(c_0, c_1, u, v) \cdot s = (s_0, s_1, a, b) \quad y \quad (c_0, c_1, u, v) \cdot t = (t_0, t_1, l, m)$$

Entonces, $c_0 \wedge s = s_0$, $c_1 \wedge s = s_1$, $c_0 \wedge t = t_0$, $c_1 \wedge t = t_1$, $u \cdot s_0 = a$, $v \cdot s_1 = b$, $u \cdot t_0 = l$ y $v \cdot t_1 = m$. Nótese que $d_0 \vee s = s \vee t_0 = s \vee (c_0 \wedge t) = (s \vee c_0) \vee d = s \vee c_0$; además $d_0 \wedge s = c_0 \wedge s = s_0$. Entonces, como D es distributivo, $c_0 = d_0$ (ver Proposición 1.6 de [24]). La prueba de que $c_1 = d_1$ es similar. Así, u y v son amalgamas de $\{a, l\}$ y $\{b, m\}$ respectivamente, lo cual, significa que $u = x$ y $v = y$, pues A y B son haces.

Finalmente, se verifica que S es el coproducto de A y de B en $\mathbf{Shv}(D)$. Sean a y b transformaciones naturales sobre C en $\mathbf{Shv}(D)$ tales que el cuadrado exterior conmuta

$$\begin{array}{ccccc} A(d) & \xrightarrow{\rho_{1,d}} & S(d) & \xleftarrow{\rho_{2,d}} & B(d) \\ & \searrow a_d & \downarrow r_d & \swarrow b_d & \\ & & C(d) & & \end{array}$$

Donde $\rho_{1,d}(x) = (d, 0, x, 1)$, $\rho_{2,d}(y) = (0, d, 1, y)$ son claramente, transformaciones naturales.

Dado un $(d_0, d_1, x, y) \in S(d)$, se tiene que $a_{d_0}(x) \in C(d_0)$ y además que $b_{d_1}(y) \in C(d_1)$, para todos $x \in A_{d_0}$ e $y \in B_{d_1}$. Entonces,

$$a_{d_0}(x) \cdot (d_0 \wedge d_1) = b_{d_1}(y) \cdot (d_0 \wedge d_1)$$

pues $d_0 \wedge d_1 = 0$; esto es, son una familia compatible para C , luego, existe un único $z \in C(d)$ tal que $z \cdot d_0 = a_{d_0}(x)$ y $z \cdot d_1 = b_{d_1}(y)$. Defínase tal z como $r_d(d_0, d_1, x, y)$.

Al considerar $c \leq d$, se tiene que

$$r_c((d_0, d_1, x, y) \cdot c) = r_c(d_0 \wedge c, d_1 \wedge c, x \cdot (d_0 \wedge c), y \cdot (d_1 \wedge c)) = w,$$

donde $w \cdot (d_0 \wedge c) = a_{d_0 \wedge c}(x \cdot (d_0 \wedge c))$ y $w \cdot (d_1 \wedge c) = b_{d_1 \wedge c}(y \cdot (d_1 \wedge c))$. Como a es natural, $d_0 \wedge c \leq d_0$ por la definición de r_d , entonces

$$a_{d_0 \wedge c}(x \cdot (d_0 \wedge c)) = a_{d_0}(x) \cdot (d_0 \wedge c) = (z \cdot (d_0)) \cdot (d_0 \wedge c) = z \cdot (d_0 \wedge c)$$

De manera similar, se tiene que $w \cdot (d_1 \wedge c) = z \cdot (d_1 \wedge c)$. Como $d_i \wedge c \leq c$, entonces, $(z \cdot c) \cdot (d_i \wedge c) = z \cdot (d_i \wedge c)$, para $i = 1, 2$. Dado que A, B son haces, $z \cdot c = w$. Por lo tanto, $r_c((d_0, d_1, x, y) \cdot c) = (r_d(d_0, d_1, x, y)) \cdot c$, luego, r es natural. Además,

$$r_d(\rho_{1,d}(x)) = r_d(d, 0, x, 1) = a_d(x) \quad y \quad r_d(\rho_{2,d}(y)) = r_d(0, d, 1, y) = b_d(y),$$

para todos $x \in A_{d_0}$ e $y \in B_{d_1}$. La unicidad de r está dada por construcción. Así pues, $S \cong A + B$. $\square$

Corolario 2.1.2. *Para el haz terminal de $\mathbf{Shv}(D)$ se tiene que, para todo $d \in D$*

$$(1 + 1)(d) = \{(x, y) \mid x, y \leq d, x \vee y = d, x \wedge y = 0\}.$$

Finalmente, dado que la teoría de rigs residuados e integrales es algebraica, es bien conocido que un riRig en $\mathbf{Shv}(D)$ es un funtor $F : D^{op} \rightarrow \mathbf{riRig}$ tal que la composición con el funtor de olvido $\mathbf{riRig} \rightarrow \mathbf{Set}$ es un haz con respecto a la topología coherente. Lo anterior puede reformularse a través del resultado siguiente, cuya prueba es inmediata:

Proposición 2.1.3. *Un funtor $F : D^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ es un riRig en $\mathbf{Shv}(D)$ si y sólo si:*

- i) *F es un haz con respecto a la topología coherente.*
- ii) *Para todo $d \in D$, $F(d)$ es un riRig en $\mathbf{Set}$.*
- iii) *Si $c \leq d$ en D , entonces $F(d) \rightarrow F(c)$ es un morfismo de riRigs.*

2.2. riRigs conexos en $\mathbf{Shv}(D)$.

Dado que la lógica interna de un topos es de primer orden (D1.4.10 de [23]), toda fórmula de primer orden es interpretable en el topos (ver Capítulo VI, Sección 7 en [30]). Esto es especialmente cierto en $\mathbf{Shv}(D)$. Sea $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula con variables libres $x_1, \dots, x_n$ interpretable en $\mathbf{Shv}(D)$. La interpretación de φ con respecto a un haz F , será notada como $[\varphi(x_1, \dots, x_n)]_F$. En caso de no ser necesaria la distinción en torno al objeto F , dicha interpretación se escribirá simplemente como $[\varphi(x_1, \dots, x_n)]$.

En esta sección se caracterizarán los riRigs conexos en el topos $\mathbf{Shv}(D)$ a través del uso la lógica interna del topos en cuestión.

Definición 2.2.1. Un riRig F se dice conexo (en el sentido de [28]) si satisface los siguientes secuentes:

$$\begin{aligned} 0 = 1 &\vdash \perp \\ x + y = 1 &\wedge xy = 0 \vdash_{x,y} x = 1 \vee y = 1. \end{aligned}$$

Obsérvese que esta presentación puede interpretarse en cualquier topos; en particular, en el topos $\mathbf{Shv}(D)$.

Lema 2.2.2. *El diagrama*

$$0 \longrightarrow 1 \xrightleftharpoons[0]{1} F$$

es un egalizador en $\mathbf{Shv}(D)$ si y sólo si $F(d) = 1$ implica que $d = 0$.

Prueba. Sea E el egalizador de las flechas 1 y 0. Supóngase que $E \cong 0$. Si existe un $d_0 > 0$ en D tal que $F(d_0) = 1$ entonces $0 = 1 \in F(d_0)$, luego $E(d_0) \neq \emptyset$, lo cual es absurdo. Por otro lado, supóngase que $F(d) = 1$ implica que $d = 0$. Si E no es el objeto inicial en $\mathbf{Shv}(D)$, existe un $d_0 > 0$ en D tal que $E(d_0) \neq \emptyset$; en consecuencia $F(d_0) = 1$, luego $d_0 = 0$, lo cual es absurdo dada la elección de d_0 . $\square$

Sea F un haz de riRigs conexo en $\mathbf{Shv}(D)$. Por motivos generales (Teorema VI.7.1 de [30]), las interpretaciones de las fórmulas $x + y = 1$ y $xy = 0$ están dadas por los siguientes pullbacks en el topos

$$\begin{array}{ccc} [x + y = 1] & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow 1 \\ F \times F & \xrightarrow{+} & F \end{array} \quad \begin{array}{ccc} [xy = 0] & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow 0 \\ F \times F & \xrightarrow{\cdot} & F \end{array}$$

y la interpretación de la conjunción de las fórmulas anteriores se obtiene a partir de la intersección de $[x + y = 1]$ y $[xy = 0]$ como subobjetos de $F \times F$.

Observar que de los puntos $\langle 0, 1 \rangle : 1 \rightarrow F \times F$ y $\langle 1, 0 \rangle : 1 \rightarrow F \times F$, se obtiene el punto $[\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle] : 1 + 1 \rightarrow F \times F$. Dado que los diagramas de arriba son pullbacks, existen morfismos $l : 1 + 1 \rightarrow [x + y = 1]$ y $r : 1 + 1 \rightarrow [xy = 0]$ únicos, tales que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} 1 + 1 & \xrightarrow{l} & [x + y = 1] \\ & \searrow [\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle] & \downarrow \\ & & F \times F \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 + 1 & \xrightarrow{r} & [xy = 0] \\ & \searrow [\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle] & \downarrow \\ & & F \times F \end{array}$$

conmutan. Lo anterior, permite concluir que existe un único morfismo canónico $c : 1 + 1 \rightarrow [x + y = 1 \wedge xy = 0]$.

Por otro lado, obsérvese que semánticamente, los secuentes

$$(S1) \quad (x + y = 1) \wedge (xy = 0) \vdash_{x,y} (x = 1) \vee (y = 1)$$

$$(S2) \quad (x + y = 1) \wedge (xy = 0) \vdash_{x,y} (x = 1 \wedge y = 0) \vee (x = 0 \wedge y = 1)$$

son equivalentes, ya que de asumirse $(S1)$, si $x + y = 1$ y $xy = 0$ entonces $x = 1$ o $y = 1$. Ahora, $x = 1$ implica que $0 = 1 \cdot y = y$; de manera análoga, si $y = 1$, se obtiene que $x = 0$, esto es, $(S2)$ es verdadero. La verificación de que a partir de $(S2)$ se deduce $(S1)$ es inmediata.

Dado que $[(x = 1 \wedge y = 0) \vee (x = 0 \wedge y = 1)] \cong 1 + 1$, como resultado de la discusión anterior, se obtiene una caracterización de los riRigs conexos en $\mathbf{Shv}(D)$.

Proposición 2.2.3. *Un haz de riRigs F es conexo en $\mathbf{Shv}(D)$ si y sólo si el morfismo canónico $1 + 1 \rightarrow [x + y = 1 \wedge xy = 0]$ es un isomorfismo y el diagrama*

$$0 \longrightarrow 1 \xrightleftharpoons[0]{1} F$$

es un egalizador en $\mathbf{Shv}(D)$.

Prueba. Dado que $1 + 1 \leq [x + y = 1 \wedge xy = 0]$ como subobjetos de $F \times F$, es claro que $[x + y = 1 \wedge xy = 0] \leq 1 + 1$ si y sólo si F satisface $(S2)$, el cual, como se vio anteriormente, es semánticamente equivalente a $(S1)$. La última parte es una aplicación directa del Lema 2.2.2. $\square$

Observar que en $\mathbf{Set}$, la Proposición 2.2.3, se corresponde con la caracterización de los riRigs directamente indescomponibles (Proposición 1.2.26). Esto implica que en dicho topos, las nociones de riRig conexo y riRig directamente indescomponible coinciden.

Sea D un retículo distributivo. Es bien sabido (ver [1]) que un elemento $x \in D$ se dice complementado si existe un $y \in D$ tal que $x \vee y = 1$ y $x \wedge y = 0$. También es bien conocido que si un elemento tiene complemento, éste es único. Esto implica que todo elemento complementado de un retículo distributivo D puede ser descrito como el par ordenado formado por él y su complemento. Nótese como $\mathcal{B}(D)$ al conjunto de tales elementos. Del Corolario 2.1.2, se observa que para todo $d \in D$, $(1 + 1)(d)$ ofrece una descripción isomorfa a

$\mathcal{B}(\downarrow d)$.

Por otro lado, sea A un riRig. Está claro que los argumentos anteriores pueden ser aplicados de manera análoga a $\mathcal{B}(A)$ (ver Lema 1.1.10). Esto implica que para un riRig conexo $F : D^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ en $\mathbf{Shv}(D)$, se tiene que para todo $d \in D$, cada elemento del conjunto $\mathcal{B}(F(d))$ puede ser descrito como el par ordenado formado por él y su complemento, lo cual equivale a decir que para todo $d \in D$, $[x + y = 1 \wedge xy = 0](d)$ brinda una descripción isomorfa a $\mathcal{B}(F(d))$. De la Proposición 2.2.3 se tiene que existe un iso natural $t : [x + y = 1 \wedge xy = 0] \rightarrow 1 + 1$ en $\mathbf{Shv}(D)$, lo cual significa que en particular, para todo $d \in D$ la flecha $t_d : [x + y = 1 \wedge xy = 0](d) \rightarrow (1 + 1)(d)$ es una biyección. De lo dicho anteriormente, se concluye que para todo $d \in D$ existe una biyección $t_d : \mathcal{B}(F(d)) \rightarrow \mathcal{B}(\downarrow d)$ para todo $d \in D$.

Así, como resultado de la discusión anterior y del Lema 2.2.2, la Proposición 2.2.3 puede reformularse ahora, de la manera siguiente:

Corolario 2.2.4. *Un haz de riRigs F es conexo en $\mathbf{Shv}(D)$ si y sólo si:*

- i) $F(d) = \mathbf{1}$ implica que $d = 0$.
- ii) Para todo $d \in D$, $\mathcal{B}(F(d)) \cong \mathcal{B}(\downarrow d)$. En consecuencia, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F(1)) & \xrightarrow{t_1} & \mathcal{B}(D) \\ i_d \downarrow & & \downarrow j_d \\ \mathcal{B}(F(d)) & \xrightarrow{t_d} & \mathcal{B}(\downarrow d) \end{array}$$

conmuta, donde i, j son las respectivas restricciones y t es el isomorfismo entre $[x + y = 1 \wedge xy = 0]$ y $1 + 1$ en $\mathbf{Shv}(D)$.

Observación 2.2.5. Si bien el contenido de esta sección se ha venido desarrollando hasta ahora en el contexto de $\mathbf{Shv}(D)$, las técnicas empleadas anteriormente pueden utilizarse en el topos de prehaces sobre D . Como la teoría de riRigs es algebraica, un riRig interno en $\widehat{D}$, es simplemente un funtor $A : D^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{riRig}$. Observar que el egalizador de las flechas 0 y 1 es el objeto inicial en $\widehat{D}$ si y sólo si para todo $c \in D$, $0 \neq 1 \in A(c)$. Además, para todo c en D ,

$$[x + y = 1 \wedge xy = 0](c) = \{(x, y) \in A(c) \times A(c) \mid x + y = 1 \wedge xy = 0\}$$

Así pues, $[x + y = 1 \wedge xy = 0] \cong 1 + 1$ si y sólo si

$$[x + y = 1 \wedge xy = 0](c) = \{(0, 1), (1, 0)\},$$

para todo $c \in D$. Por lo tanto:

Lema 2.2.6. *Un haz de *riRigs* A es conexo en $\widehat{D}$ si y sólo si $A(c)$ es conexo en $\mathbf{Set}$ para todo $c \in D$.*

2.3. *riRigs* really local en $\mathbf{Shv}(D)$.

En esta sección se caracterizarán los *riRigs* really local en el topos $\mathbf{Shv}(D)$.

Definición 2.3.1. Un *riRig* F se dice really local si satisface los siguientes secuentes

$$(RL1) \quad 0 = 1 \quad \vdash \quad \perp$$

$$(RL2) \quad x + y = 1 \quad \vdash_{x,y} \quad x = 1 \quad \vee \quad y = 1$$

Observar que la anterior presentación es interpretable en cualquier topos; en particular, es interpretable en $\mathbf{Shv}(D)$.

Sea F un haz de *riRigs* en $\mathbf{Shv}(D)$. Como se vio en la Sección 2.2, la interpretación de la fórmula $x + y = 1$ en el topos está dada por el siguiente pullback:

$$\begin{array}{ccc} [x + y = 1] & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow 1 \\ F \times F & \xrightarrow{+} & F \end{array}$$

Como F es integral y conmutativo, existen morfismos λ y ρ únicos, tales que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} 1 \times F & \xrightarrow{\lambda} & [x + y = 1] \longrightarrow 1 \\ \downarrow 1 \times id_F & \searrow & \downarrow 1 \\ F \times F & \xrightarrow{+} & F \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F \times 1 & \xrightarrow{\rho} & [x + y = 1] \longrightarrow 1 \\ \downarrow id_F \times 1 & \searrow & \downarrow 1 \\ F \times F & \xrightarrow{+} & F \end{array}$$

conmutan. Sea $r : F + F \rightarrow [x + y = 1]$ el morfismo inducido por el coproducto de $(F \times 1) + (1 \times F) \cong F + F$. Entonces

Proposición 2.3.2. *Un *riRig* F en $\mathbf{Shv}(D)$ es really Local si y sólo si el egalizador de las flechas 0 y 1 es el objeto inicial; y el morfismo inducido por el coproducto $r : F + F \rightarrow [x + y = 1]$ es un epimorfismo en $\mathbf{Shv}(D)$.*

Prueba. Sea F un *riRig* en $\mathbf{Shv}(D)$. Dado que $[x = 1] \cong 1 \times F$ y que $[y = 1] \cong F \times 1$, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccc} [x = 1] & \longrightarrow & F + F & \longleftarrow & [y = 1] \\ & \searrow \lambda & \downarrow r & \swarrow \rho & \\ & & [x + y = 1] & & \end{array}$$

se tiene. Dado que el mono $m : [x = 1 \vee y = 1] \rightarrow [x + y = 1]$ es la imagen de r , sea e la parte epi de la factorización de r :

$$\begin{array}{ccc} F + F & \xrightarrow{r} & [x + y = 1] \\ & \searrow e \quad \nearrow m & \\ & [x = 1 \vee y = 1] & \end{array}$$

Entonces, r es epi, si y sólo si m es un iso. Esto a su vez, sucede si y sólo si $[x + y = 1] \leq [x = 1 \vee y = 1]$ como subobjetos de $F \times F$, es decir, F satisface (RL2) en la lógica interna del topos. Finalmente, del Lema 2.2.2, es claro que la interpretación de la no trivialidad en un topos, equivale a decir que el egalizador de las flechas 0 y 1 es el objeto inicial en el $\mathbf{Shv}(D)$. $\square$

Con la finalidad de obtener una caracterización más específica de los *riRigs* really local en $\mathbf{Shv}(D)$, es necesario recurrir a las caracterizaciones existentes (ver Cap. III, sec. 7, de [30]) de los epimorfismos en dicho topos.

Lema 2.3.3. *Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es epi en $\mathbf{Shv}(D)$ si y sólo si, para todo $d \in D$ y $z \in Y(d)$, existe un cubrimiento finito $\bigvee_{i \in I} d_i = d$, tal que $z \cdot d_i$ pertenece a la imagen de la función $f_{d_i} : X(d_i) \rightarrow Y(d_i)$.*

Prueba. Es un caso particular del Corolario III.7.5 de *op.cit.*

A las $f : X \rightarrow Y$ como en Lema 2.3.3 también se les denomina “localmente sobreyectivas”.

Lema 2.3.4. *El morfismo r es un epimorfismo en $\mathbf{Shv}(D)$ si y sólo si, para todo $d \in D$ y $s, t \in F(d)$ tales que $s + t = 1$, existen $u, v \leq d$ con $u \vee v = d$ tales que $s \cdot v = 1_v$ y $t \cdot u = 1_u$.*

Prueba. Supóngase que r es epi en $\mathbf{Shv}(D)$. Sea $(s, t) \in [x + y = 1](d)$ con $d \in D$ fijo. Por el Lema 2.3.3 existe un cubrimiento finito $\bigvee_{i \in I} d_i = d$ tal que para todo $i \in I$, existe un $(m_i, n_i, a_i, b_i) \in (F + F)(d_i)$, tal que

$$r_{d_i}(m_i, n_i, a_i, b_i) = (s \cdot d_i, t \cdot d_i) = (s, t) \cdot d_i$$

Considérense $u = \bigvee_{i \in I} m_i$ y $v = \bigvee_{i \in I} n_i$; es claro que $u \vee v = d$. Dado que $m_i, n_i \leq d_i$ entonces, $s \cdot n_i = (s \cdot d_i) \cdot n_i = 1_{n_i}$ y $t \cdot m_i = (t \cdot d_i) \cdot m_i = 1_{m_i}$ luego $(s \cdot n_i) \cdot (n_i \wedge n_j) = (s \cdot n_j) \cdot (n_i \wedge n_j)$ y $(t \cdot m_i) \cdot (m_i \wedge m_j) = (t \cdot m_j) \cdot (m_i \wedge m_j)$, para todo $i, j \in I$. Más aún, $m_i \leq u$ y $n_i \leq v$ implican que $(s \cdot v) \cdot n_i = s \cdot n_i = 1_{n_i}$ y que $(t \cdot u) \cdot m_i = t \cdot m_i = 1_{m_i}$. Así, dado que F es un haz sobre D , se tiene que $s \cdot v = 1_v$ y $t \cdot u = 1_u$.

Por otro lado, sea $d \in D$. Si para todos $s, t \in F(d)$ tales que $s + t = 1$, existen $u, v \leq d$ con $u \vee v = d$ tales que $s \cdot v = 1_v$ y $t \cdot u = 1_u$, se tiene entonces que $r_v(0, v, 1, t \cdot v) = (1_v, t \cdot v) = (s, t) \cdot v$ y $r_u(u, 0, s \cdot u, 1) = (s \cdot u, 1_u) = (s, t) \cdot u$, luego, r es localmente sobreyectiva, y en consecuencia, por el Lema 2.3.3, un epimorfismo en $\mathbf{Shv}(D)$. $\square$

Corolario 2.3.5. *Un haz F en $\mathbf{Shv}(D)$ es really local si y sólo si:*

- i) *Para todo $d \in D$ y $s, t \in F(d)$ tales que $s + t = 1$, existen $u, v \leq d$ con $u \vee v = d$, tales que $s \cdot v = 1_v$ y $t \cdot u = 1_u$.*
- ii) *$F(d) = \mathbf{1}$ si y sólo si $d = 0$.*

Prueba. Directamente de la Proposición 2.3.2 y los Lemas 2.3.4 y 2.2.2. $\square$

Observación 2.3.6. De manera análoga a lo visto en la Observación 2.2.5, las técnicas empleadas para la obtención de los resultados obtenidos en esta Sección pueden aplicarse en el topos $\widehat{D}$. Para tal efecto, nótese que el egalizador de las flechas 0 y 1 es el objeto inicial en $\widehat{D}$ si y sólo si para todo $c \in D$, $0 \neq 1 \in A(c)$. Además, para todo c en D ,

$$[x + y = 1](c) = \{(x, y) \in A(c) \times A(c) \mid x + y = 1\}$$

Por lo tanto, la función $r : A + A \rightarrow [x + y = 1](c)$ es epi en $\widehat{D}$ si y sólo si $r : A(c) + A(c) \rightarrow [x + y = 1](c)$ es epi en $\mathbf{Set}$ para todo c en D . Dicho de otra forma, para todo $c \in D$ y todos x e y en $A(c)$, $x + y = 1$ implica que $x = 1$ o $y = 1$. Como resultado de la discusión anterior, se tiene que

Lema 2.3.7. *Un $riRig$ A en $\widehat{D}$ es really local si y sólo si, el $riRig$ $A(c)$ es really local en $\mathbf{Set}$ para todo c en D .*

2.4. Subobjetos principales

El contenido de esta sección, está dirigido hacia el estudio de los subobjetos principales en el topos $\mathbf{Shv}(D)$. En especial, se mostrará el rol que cumple el subobjeto $\Lambda \rightarrow \Omega$ en dicho topos.

Definición 2.4.1. Un subobjeto $U \rightarrow X$ de X en $\widehat{D}$ es *principal* si para todo d en D y $x \in X(d)$ existe el mayor $c \leq d$ tal que $x \cdot c \in U(c)$.

Lema 2.4.2. Si X es un haz y $u : U \rightarrow X$ es principal entonces U también es un haz.

Prueba. Supóngase que $a \vee b = d$ y sean $x \in U(a)$ e $y \in U(b)$ una familia compatible. Entonces x e y forman también una familia compatible para X , por lo tanto, existe un único $z \in X(d)$ tal que $z \cdot a = x$ y $z \cdot b = y$. Por hipótesis, existe el mayor $e \leq d$ tal que $z \cdot e \in U(e)$, luego $a \leq e$ y $b \leq e$, así $a \vee b = d \leq e$. Por lo tanto, $d = e$ y U es un haz. $\square$

Sea Λ en $\widehat{D}$ el objeto que envía a $d \in D$ en $(\downarrow d)$. Para todo $d \in D$, $x \in \Lambda(d)$ y $c \leq d$, se tiene que $x \cdot c = x \wedge c \in \Lambda(c)$.

Lema 2.4.3. El prehaz Λ es un haz.

Prueba. Supóngase que $a \vee b = d$ y sean $x \in \Lambda(a) = (\downarrow a)$ y $y \in \Lambda(b) = (\downarrow b)$ una familia compatible, entonces $x \vee y \in (\downarrow d)$ y además $x \cdot (a \wedge b) = y \cdot (a \wedge b)$; esto es, $x \wedge b = y \wedge a$. Ahora,

$$(x \vee y) \cdot a = (x \vee y) \wedge a = (x \wedge a) \vee (y \wedge a) = x \vee (x \wedge b) = x,$$

de manera similar, se tiene que $(x \vee y) \cdot b = y$. Finalmente, supóngase que existe un $z \in \Lambda(d)$ que satisface $z \cdot a = x$ y $z \cdot b = y$; esto es, $z \wedge a = x$ y $z \wedge b = y$, entonces

$$(z \wedge a) \vee (z \wedge b) = x \vee y$$

y por lo tanto,

$$x \vee y = z \wedge (a \vee b) = z \wedge d = z$$

lo cual completa la prueba de que Λ es un haz. $\square$

Existe un punto $\top : 1 \rightarrow \Lambda$ evidente, tal que, evaluado en d , es el top de $\Omega(d)$; esto es, $\Lambda(d) = (\downarrow d)$.

Proposición 2.4.4. El subobjeto $\top : 1 \rightarrow \Lambda$ clasifica subobjetos principales.

Prueba. Sea X un haz sobre D y sea $U \rightarrow X$ principal. Entonces, para todo $x \in X(d)$, existe el mayor $c \leq d$ tal que $x \cdot c \in U(c)$. Sea

$$m = \max\{c \leq d \mid x \cdot c \in U(c)\}$$

Esto permite definir $\phi : X \rightarrow \Lambda$ para todo $d \in D$ como $\phi_d(x) = m$. Para probar que ϕ es natural, sea $d \leq d'$ en D . Dado que U es prehaz y además $\phi_{d'}(x) \wedge d \leq \phi_{d'}(x)$, d , para todo $x \in X(d')$, la identidad

$$(x \cdot \phi_{d'}(x)) \cdot (\phi_{d'}(x) \wedge d) = x \cdot (\phi_{d'}(x) \wedge d) = (x \cdot d) \cdot (\phi_{d'}(x) \wedge d)$$

se satisface. Por definición de $\phi_{d'}(x)$, $x \cdot \phi_{d'}(x) \in U\phi_{d'}(x)$. Esto implica que $(x \cdot \phi_{d'}(x)) \cdot (\phi_{d'}(x) \wedge d) \in U(\phi_{d'}(x) \wedge d)$, entonces, por el argumento anterior, se tiene que $x \cdot (\phi_{d'}(x) \wedge d) \in U(\phi_{d'}(x) \wedge d)$, luego $(x \cdot d) \cdot (\phi_{d'}(x) \wedge d) \in U(\phi_{d'}(x) \wedge d)$. Así pues, $\phi_{d'}(x) \wedge d \leq \phi_d(x \cdot d)$, por definición de $\phi_d(x \cdot d)$. Por otro lado, $(x \cdot d) \cdot \phi_d(x \cdot d) \in U(\phi_d(x \cdot d))$ por definición de $\phi_d(x \cdot d)$, entonces, dado que $\phi_d(x \cdot d) \leq d$, $(x \cdot d) \cdot \phi_d(x \cdot d) = x \cdot \phi_d(x \cdot d)$. Por lo tanto, $x \cdot \phi_d(x \cdot d) \in U(\phi_d(x \cdot d))$, luego $\phi_d(x \cdot d) \leq \phi_{d'}(x)$ por definición de $\phi_{d'}(x)$. Esto implica que $\phi_d(x \cdot d) \leq \phi_{d'}(x) \wedge d$. Así $\phi_d(x \cdot d) = \phi_{d'}(x) \wedge d$.

Sea P el pullback de $\top$ a lo largo de ϕ .

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \top \\ X & \xrightarrow{\phi} & \Lambda \end{array}$$

Como los pullbacks en $\mathbf{Shv}(D)$ se calculan como en $\widehat{D}$, entonces

$$P(d) = \{x \in X(d) \mid \phi_d(x) = d\}$$

Esto significa que $x \cdot d \in U(d)$, luego, dado que $x \cdot d = x$, se tiene que $x \in U(d)$. El recíproco es claro, así $P(d) = U(d)$ para todo $d \in D$. Finalmente, si existiese otra $\varphi : X \rightarrow \Lambda$ tal que $\varphi_d(x) = d$ para todo $x \in U(d)$, entonces, como d es el elemento máximo de D tal que $x \cdot d \in U(d)$, se concluye que $\varphi_d(x) = \phi_d(x)$. Por lo tanto, $\top : 1 \rightarrow \Lambda$ clasifica a $U \rightarrow X$. $\square$

Por definición del clasificador de subobjetos, existe un único $\iota : \Lambda \rightarrow \Omega$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{id} & 1 \\ \top \downarrow & & \downarrow \top \\ \Lambda & \xrightarrow{\iota} & \Omega \end{array}$$

es pullback en $\mathbf{Shv}(D)$. Observar que en dicho topos, $\Omega(d) = Idl(\downarrow d)$, para todo $d \in D$ (Proposición III.7.3 de [30]) y que la asignación $\iota_d : \Lambda(d) \rightarrow \Omega(d)$ envía $x \leq d$ en el ideal principal $(\downarrow x) \in \Omega(d)$.

Corolario 2.4.5. *Para todo subobjeto $U \rightarrow X$ de X en $\mathbf{Shv}(D)$, son equivalentes:*

1. $U \rightarrow X$ es principal.
2. El morfismo $\iota : X \rightarrow \Omega$ se factoriza a través de $\phi : X \rightarrow \Lambda$.

Finalmente, sea X un $\mathbf{riRig}$ in $\mathbf{Shv}(D)$; de la interpretación de la fórmula $xy = 1$ en la lógica interna del topos, se obtiene el subobjeto $\text{Inv}(X) \rightarrow X \times X$ como el pullback

$$\begin{array}{ccc} \text{Inv}(X) & \xrightarrow{!} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow 1 \\ X \times X & \xrightarrow{\cdot} & X \end{array}$$

Las dos proyecciones $\text{Inv}(X) \rightarrow X$ son mono en $\mathbf{Shv}(D)$ e inducen el mismo subobjeto de X . Observar que por integralidad $\text{Inv}(X) \cong 1$ y que para cada $d \in D$ la flecha $\iota_d : X(d) \rightarrow \Omega(d)$ está definida como

$$\iota_d(x) = \{c \leq d \mid x \cdot c = 1 \in X(c)\}$$

Como consecuencia directa del Corolario 2.4.5, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 2.4.6. *Si X es un $\mathbf{riRig}$ en $\mathbf{Shv}(D)$, entonces son equivalentes:*

1. *X es really local y $1 : 1 \rightarrow X$ es principal.*
2. *X es really local y para todo $d \in D$ y $x \in X(d)$ existe el mayor $c \leq d$ tal que $x \cdot c = 1 \in X(c)$*
3. *X es really local y el morfismo $\iota : X \rightarrow \Omega$ se factoriza a través de $\phi : \Lambda \rightarrow \Omega$.*

Capítulo 3

Representación de Pierce de un riRig.

En este capítulo muestra el primer resultado principal de este trabajo: *Todo riRig es el álgebra de puntos de un haz de riRigs conexo sobre un álgebra de boole*. Para tal efecto, se desarrolla la primera teoría de representación por haces de riRigs; esto es, la representación de Pierce. A través de ésta, se muestra que todo riRig determina un haz conexo interno en el topos de haces sobre el álgebra de boole de su centro booleano, el cual, es un objeto de la categoría de representaciones de Pierce. Existe un funtor pleno y fiel desde la categoría de riRigs a la categoría anteriormente mencionada. Éste funtor es adjunto a izquierda del funtor de puntos.

3.1. El haz conexo asociado a un riRig.

Sea A un riRig en **Set** fijo y $\mathcal{B}(A)$ su centro booleano (Sección 1.1.1). En esta sección se muestra como a partir del riRig A en **Set**, se puede construir un riRig conexo $\overline{A}$ en **Shv**($\mathcal{B}(A)$).

Lema 3.1.1. *Sea A un riRig. Entonces, para todo $e, f \in \mathcal{B}(A)$,*

$$(ef)' = e' + f'.$$

donde e' y f' denotan a los complementos de e y f , respectivamente.

Prueba. Como $e, f \in \mathcal{B}(A)$, es claro que $ef(e' + f') = 0$. Por otro lado, como $e + e' = 1$ y $f + f' = 1$ entonces $ef + e'f = f$ y $ef + ef' = e$. Por lo tanto $ef + e'f + f' = 1$ y $ef + ef' + e' = 1$. Así

$$ef + (e' + f') = ef + (e' + e'f) + (f' + f'e) = (ef + e' + e'f) + (ef + f' + f'e) = 1 + 1 = 1$$

ya que $e'f \leq e'$ y $f'e \leq f'$, y además la suma es idempotente. $\square$

Corolario 3.1.2. *Para todos $e, f \in \mathcal{B}(A)$ se tiene que $(ef)' = e' + f'$.*

Prueba. Por el Lema 3.1.1, $(e'f')' = (e')' + (f')' = e + f$. $\square$

Lema 3.1.3. $(\mathcal{B}(A), +, \cdot, ', 0, 1)$ es un álgebra de Boole.

Prueba. Por el Lema 3.1.1 y el Corolario 3.1.2, tanto la suma como el producto de elementos en $\mathcal{B}(A)$ es cerrada. Además, la restricción del orden de A a $\mathcal{B}(A)$, hace que dicho conjunto sea un join-semilattice acotado y complementado. Como la suma se distribuye con respecto al producto, sólo hace falta verificar que el producto de A restringido a $\mathcal{B}(A)$ es un ínfimo. Sean $e, f \in \mathcal{B}(A)$, si existe $d \in \mathcal{B}(A)$ tal que $d \leq e, f$, entonces, por el Lema 1.1.11, $d^2 = d \leq ef$. $\square$

Lema 3.1.4. *Sea A un riRig. Considérese $\bar{A}: \mathcal{B}(A)^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ definido como $\bar{A}(e) = A[e^{-1}]$. Entonces, $\bar{A} \in \mathbf{Sh}(\mathcal{B}(A))$.*

Prueba. Si, $e, f \in \mathcal{B}(A)$ y $e \leq f$ entonces $ef = e$, así por el Lema 1.2.19, se sabe que para todo $e \in \mathcal{B}(A)$, $A[e^{-1}] \cong (\downarrow e)$, luego, por la propiedad universal, existe un único morfismo de riRigs $(\downarrow e) \rightarrow (\downarrow f)$ que factoriza a $A \rightarrow (\downarrow f)$, así, $\bar{A}$ es prehaz. Para probar que es un haz para el sitio coherente sobre $\mathcal{B}(A)$, asúmase que $e = e_1 + e_2$ y sea $z_1 \in (\downarrow e_1)$, $z_2 \in (\downarrow e_2)$ una familia compatible, entonces, $z_1e_1 = z_2e_2$. Considérese $z = z_1 + z_2$. Claramente $z \in (\downarrow e)$; más aún,

$$ze_1 = (z_1 + z_2)e_1 = z_1e_1 + z_2e_1 = z_1e_1 + z_1e_2 = ze,$$

luego $ze = z$ y en consecuencia $ze_1 = z$. La prueba de que $ze_2 = z$ es similar. Si existiese otra amalgama $h \in (\downarrow e)$ para z_1, z_2 , entonces $he_1 = z_1$ y $he_2 = z_2$, luego $h = he = z_1 + z_2 = z$. Así pues, $\bar{A}$ es un haz. $\square$

Sea A un riRig. Observar que por el Corolario 2.1.2 y la Proposición 3.1.3, se tiene que para todo $e \in \mathcal{B}(A)$

$$(1 + 1)(e) = \{(a, b) \mid a, b \in \mathcal{B}(A), a, b \leq e, a + b = e, ab = 0\}$$

entonces, de lo visto en la discusión previa a la Proposición 2.2.3 se deduce que el morfismo canónico

$$c_e : (1 + 1)(e) \rightarrow [x + y = 1 \quad \wedge \quad xy = 0]_{\bar{A}}(e)$$

está definido como $c_e(a, b) = (a, b)$.

Proposición 3.1.5. $\bar{A}$ es un riRig conexo en $\mathbf{Sh}(\mathcal{B}(A))$.

Prueba. Por la Proposición 3.1.4, y el Lema 1.2.19, $\overline{A}$ es un riRig en $\mathbf{Sh}(\mathcal{B}(A))$. Ahora, para probar el enunciado hay que verificar que el morfismo canónico $c : 1 + 1 \rightarrow [x + y = 1 \wedge xy = 0]_{\overline{A}}$ es un isomorfismo en $\mathbf{Shv}(\mathcal{B}(A))$. Sea $e \in \mathcal{B}(A)$. Por definición, c_e es inyectiva, luego c es mono en $\mathbf{Shv}(\mathcal{B}(A))$. Por otro lado, sea $(a, b) \in [x + y = 1 \wedge xy = 0]_{\overline{A}}(e)$. Como $a + b = e$ y $ab = 0$, es claro que $a, b \in \mathcal{B}(A)$ y que el conjunto $\{a, b\}$ forma un cubrimiento de e en $\mathcal{B}(A)$. Ahora, como $a, b \leq e$ y $\overline{A}$ es prehaz, notar que

$$c_a(a, 0) = (a, 0) = (a^2, ba) = (a, b) \cdot a$$

pues por el Lema 1.1.11, $a^2 = a$. De manera similar, se prueba que

$$c_b(0, b) = (a, b) \cdot b$$

Lo cual, por el Lema 2.3.3, significa que c es epi en $\mathbf{Shv}(\mathcal{B}(A))$. Así pues c es un isomorfismo. Finalmente, si $\overline{A}(e) = 1$, entonces $(\downarrow e) = 1$, lo cual implica claramente que $e = 0$. Por lo tanto, por el Lema 2.2.2 y la Proposición 2.2.3, $\overline{A}$ es conexo en $\mathbf{Sh}(\mathcal{B}(A))$. $\square$

Sea A un riRig y $\mathcal{B}(A)$ su centro booleano. Sea $T \rightarrow \mathcal{B}(A)$ el subconjunto de átomos de $\mathcal{B}(A)$. Si $\mathcal{B}(A)$ es finito, entonces, por razones generales (Lema C2.2.21 en [25]), la inclusión $T \rightarrow \mathcal{B}(A)$ induce una equivalencia $\widehat{T} \rightarrow \mathbf{Shv}(\mathcal{B}(A))$ entre el topos de prehaces en T y el topos de haces en el álgebra de boole $\mathcal{B}(A)$. El haz $\overline{A}$ en $\mathbf{Shv}(\mathcal{B}(A))$ de la representación, se corresponde con un prehaz $L \in \widehat{T}$ que carga su estructura asociada de riRig conexo. Por el Lema 2.2.6, esto significa que para todo t en T , $L(t)$ es un riRig conexo. Se ha obtenido entonces

Proposición 3.1.6. *Sea A un riRig con centro booleano finito. Entonces, el haz $\overline{A}$ es conexo en $\mathbf{Shv}(\mathcal{B}(A))$ si y sólo si, el riRig $A[e^{-1}]$ es conexo en $\mathbf{Set}$ para todo e en $T \rightarrow \mathcal{B}(A)$.*

3.2. La categoría $\mathcal{P}$.

Cualquier morfismo $f : C \rightarrow D$ de retículos distributivos es un morfismo de sitios (en el sentido del Teorema VII.10.1 en [30]) cuando éstos son considerados como categorías pequeñas equipadas con la topología coherente. Por el Teorema VII.10.2 de *op. cit.* existe un morfismo geométrico $f : \mathbf{Shv}(D) \rightarrow \mathbf{Shv}(C)$ cuya imagen directa f_* está definida para todo $P \in \mathbf{Shv}(D)$ como $f_*(P) = P \circ f$, esto es $f_*(P)(d) = P(f(d))$ para todo $d \in C$.

Definición 3.2.1. Una *representación de Pierce* es un par (C, P) donde C es un retículo distributivo y P es un riRig conexo en $\mathbf{Shv}(C)$. Un morfismo $(C, P) \rightarrow (D, Q)$ de representaciones de Pierce es un par (f, g) , donde $f : C \rightarrow D$ es un morfismo de retículos y $g : P \rightarrow f_*(Q)$ es un morfismo de riRigs en $\mathbf{Shv}(C)$.

Considérese $(p, h) : (D, Q) \rightarrow (E, R)$ otro morfismo de representaciones de Pierce. La composición $(p, h)(f, g) : (D, P) \rightarrow (E, R)$, se define como el par $(pf, f_*(h)g)$.

$$P \xrightarrow{g} f_*(Q) \xrightarrow{f_*(h)} (pf)_*(R)$$

De la funtorialidad de f_* y del hecho de que $(pf)_* = f_*p_*$, es claro que la composición está bien definida y es asociativa. Además, para todo retículo C el morfismo id_C , induce la identidad en $\mathbf{Shv}(C)$, así (id_C, id_P) es $id_{(C, P)}$.

En lo sucesivo, se denotará como $\mathfrak{P}$ a la categoría cuyos objetos son representaciones de Pierce y cuyos morfismos están determinados por los pares descritos en la Definición 3.2.1.

3.3. Teorema de Representación.

Previo a la demostración de la representación de Pierce de riRigs, se enunciarán algunos resultados que serán de utilidad para el desarrollo de esta Sección.

Lema 3.3.1. Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo de riRigs, entonces f preserva elementos booleanos.

Prueba. Sea $e \in \mathcal{B}(A)$, de la Proposición 1.1.14, se tiene que $e + e' = 1$, con $e' = e \rightarrow 0$. Entonces

$$1 = f(1) = f(e + e') = f(e) + f(e') = f(e) + f(e)'$$

luego, nuevamente por la Proposición 1.1.14, $f(e) \in \mathcal{B}(B)$. □

Lema 3.3.2. Para todo riRig A en $\mathbf{Set}$, el par $(\mathcal{B}(A), \overline{A})$ es una representación de Pierce.

Prueba. Se sigue inmediatamente de las Proposiciones 3.1.3 y 3.1.5. □

Sean A y B riRigs en $\mathbf{Set}$ y sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo de riRigs. Por el Lema 3.3.1, se tiene que la restricción de f a $\mathcal{B}(A)$ determina un morfismo

de retículos $f : \mathcal{B}(A) \rightarrow \mathcal{B}(B)$, el cual, por lo enunciado al comienzo de la Sección 3.2, determina un morfismo geométrico

$$f : \mathbf{Shv}(\mathcal{B}(B)) \longrightarrow \mathbf{Shv}(\mathcal{B}(A))$$

cuya imagen directa f_* está definida como $f_*(G)(e) = G(f(e))$ para todo $G \in \mathbf{Shv}(\mathcal{B}(B))$.

Ahora, sea $e \in \mathcal{B}(A)$. Es claro que $i_{f(e)}(f(e)) = 1_{B/\langle f(e) \rangle}$, entonces, por el Lema 1.2.18,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ i_e \downarrow & & \downarrow i_{f(e)} \\ (\downarrow e) & \xrightarrow{\bar{f}_e} & (\downarrow f(e)) \end{array}$$

existe un único morfismo de $\mathbf{riRigs}$ $\bar{f}_e : A/\langle e \rangle \rightarrow B/\langle f(e) \rangle$ tal que el diagrama de arriba conmuta. Sean $e_1, e_2 \in \mathcal{B}$, tales que $e_2 \leq e_1$. Dado que $f(e_2) \leq f(e_1)$, nuevamente por el Lema 1.2.18, la conmutatividad del diagrama (donde las filas del cuadrado de la derecha son los morfismos canónicos de $A[e_1^{-1}] \rightarrow A[e_2^{-1}]$ y $B[f(e_1)^{-1}] \rightarrow B[f(e_2)^{-1}]$, respectivamente)

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_{e_1}} & (\downarrow e_1) & \longrightarrow & (\downarrow e_2) \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f}_{e_1} & & \downarrow \bar{f}_{e_2} \\ B & \xrightarrow{i_{f(e_1)}} & (\downarrow f(e_1)) & \longrightarrow & (\downarrow f(e_2)) \end{array}$$

se tiene y como $B/\langle f(e) \rangle = f_*(\bar{B})(e)$, se concluye que $\bar{f} : \bar{A} \rightarrow f_*(\bar{B})$ es natural en $\mathbf{Shv}(\mathcal{B}(A))$. Por la Proposición 3.1.5, $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son conexos en $\mathbf{Shv}(\mathcal{B}(A))$ y $\mathbf{Shv}(\mathcal{B}(B))$, respectivamente, así

$$(f, \bar{f}) : (\mathcal{B}(A), \bar{A}) \longrightarrow (\mathcal{B}(B), \bar{B})$$

es un morfismo en $\mathfrak{V}$.

A partir del Lema 3.3.2 y como consecuencia de la discusión anterior, se obtiene una asignación $\mathcal{F} : \mathbf{riRig} \rightarrow \mathfrak{V}$, definida como $\mathcal{F}(A) = (\mathcal{B}(A), \bar{A})$ para un $\mathbf{riRig}$ A y como $\mathcal{F}(f) = (f, \bar{f})$ para un morfismo de $\mathbf{riRigs}$ $f : A \rightarrow B$.

Lema 3.3.3. *La asignación $\mathcal{F} : \mathbf{riRig} \rightarrow \mathfrak{V}$ es funtorial.*

Prueba. Es claro que $\mathcal{F}(id_A) = (id_A, id_{\overline{A}}) = id_{\mathcal{F}(A)}$. Ahora, sean $f : A \rightarrow B$ y $h : B \rightarrow C$ morfismos de $\mathbf{riRigs}$. Entonces, se tiene que $\mathcal{F}(hf) = (hf, \overline{hf})$ y además se tiene que $\mathcal{F}(h)\mathcal{F}(f) = (hf, f_*(\overline{h})\overline{f})$.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{h} & C \\
 i_e \downarrow & & i_{f(e)} \downarrow & & i_{hf(e)} \downarrow \\
 (\downarrow e) & \xrightarrow{\overline{f}_e} & (\downarrow f(e)) & \xrightarrow{\overline{h}_{f(e)}} & (\downarrow hf(e)) \\
 & \searrow \overline{hf}_e & & &
 \end{array}$$

Dado que $i_{hf(e)} = i_{h(f(e))}$ y $(\downarrow hf(e)) = (\downarrow h(f(e)))$, por el Lema 1.2.18, el diagrama de arriba conmuta para todo $e \in \mathcal{B}(A)$. Por lo tanto, dado que $\overline{h}_{f(e)}\overline{f}_e = f_*(\overline{h})_e\overline{f}_e$, entonces $f_*(\overline{h})\overline{f} = \overline{hf}$, así $\mathcal{F}(h)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(hf)$. $\square$

Sea $(f, g) : (C, P) \rightarrow (D, Q)$ un morfismo de representaciones de Pierce. Es claro que para todo $d \in C$, el morfismo $g_d : P(d) \rightarrow Q(f(d))$ es un morfismo de $\mathbf{riRigs}$ en **Set**. Lo anterior determina un funtor

$$\Gamma : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathbf{riRig}$$

definido en objetos como $\Gamma(C, Q) = Q(1)$ y en morfismos como $\Gamma(f, g) = g_1$. Dicho funtor es conocido como el funtor de puntos. Vale la pena mencionar que, en este trabajo la terminología de “*puntos*” hace referencia a la noción de elementos globales del prehaz Q . Esto es, el conjunto de transformaciones naturales $1 \rightarrow Q$ en $\mathbf{Shv}(C)$, el cual, por el Lema de Yoneda, es isomorfo al conjunto $Q(1)$.

Observar que para todo $\mathbf{riRig}$ A en **Set**, $\Gamma(\mathcal{B}(A), \overline{A}) = \overline{A}(1) \cong (\downarrow 1) = A$. Dicho de otra forma, todo $\mathbf{riRig}$ es el álgebra de puntos de un haz de $\mathbf{riRigs}$ conexo sobre un álgebra de boole.

A continuación, se muestra el resultado principal de este capítulo:

Teorema 3.3.4. *El funtor de puntos $\Gamma : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathbf{riRig}$ es adjunto a derecha de $\mathcal{F} : \mathbf{riRig} \rightarrow \mathfrak{P}$, el cual además, es pleno y fiel.*

Prueba. Para verificar la adjunción, sea (C, P) una representación de Pierce y $f : A \rightarrow P(1)$ un morfismo de $\mathbf{riRigs}$ en **Set**. Entonces, por el Corolario 2.2.4, para todo $e \in \mathcal{B}(A)$ existe un único $x_e \in \mathcal{B}(C)$ tal que $(tf)(e) = x_e$.

$$\mathcal{B}(A) \xrightarrow{f} \mathcal{B}(P(1)) \xrightarrow{t} \mathcal{B}(C)$$

Defínase $g : \mathcal{B}(A) \longrightarrow C$ como $g(e) = x_e$. Por construcción, g es un morfismo de retículos. Por el Corolario 2.2.4, $t_{x_e}(f(e) \cdot x_e) = x_e \wedge t_1(f(e)) = x_e = 1_{\mathcal{B}(\downarrow x_e)}$, así $f(e) \cdot x_e = 1_{P(x_e)}$, pues t es un isomorfismo. Por el Lema 1.2.18, existe un único morfismo de riRigs, $k_e : A/\langle e \rangle \longrightarrow P(x_e)$, definido para todo $[x]_e \in A$ como $k_e([x]_e) = f(x) \cdot x_e$, que hace que para todo $e \in \mathcal{B}(A)$, el diagrama (con $f = k_1$),

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & P(1) \\ i_e \downarrow & & \downarrow \\ A/\langle e \rangle & \xrightarrow{k_e} & P(f(e)) \end{array}$$

conmute, así $k : \overline{A} \longrightarrow f_*(P)$ es un morfismo de riRigs en $\mathbf{Shv}(\mathcal{B}(A))$ que es único por construcción, luego $(f, k) : (\mathcal{B}(A), \overline{A}) \longrightarrow (C, P)$ es un morfismo en $\mathcal{P}$. Por lo tanto, $\mathcal{F} \dashv \Gamma$. Dado que la unidad de la adjunción es un isomorfismo, el enunciado se tiene. $\square$

Capítulo 4

Representación really local de un riRig.

En este capítulo, se demuestra el segundo resultado principal de este trabajo: *Todo riRig es el álgebra de puntos de un haz de riRigs really local sobre un retículo distributivo.* Para tal efecto, se desarrolla la segunda teoría de representación por haces de riRigs, esto es, la representación really local. A través de ésta, se muestra que todo riRig determina un haz really local interno en el topos de haces sobre su reticulación, el cual, es un objeto de la categoría de representaciones really local. Existe un funtor pleno y fiel desde la categoría de riRigs a la categoría anteriormente mencionada. Éste funtor es adjunto a izquierda del funtor de puntos.

4.1. El haz really local asociado a un riRig.

En esta sección se muestra como a partir de un riRig A en **Set**, se puede construir un haz really local $\tilde{A}$ sobre un retículo determinado por A .

Sea A un riRig y $a, b \in A$. Considérese la relación $a \sim b$ si y sólo si $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ o equivalentemente, $a \sim b$ si y sólo si existe un $n \in \mathbb{N}$, tal que $a^n \leq b$ y $b^n \leq a$. Esta relación claramente es de equivalencia en A . En lo sucesivo, se denominará $\mathcal{V}_A$ al cociente resultante; la clase de equivalencia de un elemento $a \in A$ será notada como $\bar{a}$.

Lema 4.1.1. *Sea A un riRig y $a, b \in A$. Entonces:*

i) Si $a \leq b$ entonces $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$.

ii) $\langle a + b \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$.

Prueba. Supóngase $a \leq b$. Si $z \in \langle b \rangle$, existe un $n \geq 0$, tal que $b^n \leq z$, luego, por propiedades del producto, $a^n \leq b^n \leq z$; esto es, $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$. Ahora, de lo anterior, es claro que $\langle a+b \rangle \subseteq \langle a \rangle, \langle b \rangle$, entonces $\langle a+b \rangle \subseteq \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Por otro lado, si $z \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, existen $n, m \geq 0$, tales que, $a^n \leq z$, $b^m \leq z$. Por el Corolario 1.1.8 se tiene que $(a+b)^{nm} \leq a^n + b^m \leq z$, luego $z \in \langle a+b \rangle$, lo cual implica que, $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \subseteq \langle a+b \rangle$. $\square$

Obsérvese que como consecuencia del item (i) del Lema 4.1.1, se tiene que la relación de contenencia sobre filtros principales induce un orden parcial en $\mathcal{V}_A$ definiendo $\bar{a} \preceq \bar{b}$ si y sólo si $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$ para todos $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{V}_A$. Mas aún, dicho poset tiene como primer y último elementos a $\bar{0}$ y $\bar{1}$, respectivamente. Defínase $\bar{a} \vee \bar{b} = \overline{a+b}$ y $\bar{a} \wedge \bar{b} = \overline{ab}$.

Lema 4.1.2. $(\mathcal{V}_A, \vee, \wedge, \bar{1}, \bar{0})$ es un retículo distributivo y acotado.

Prueba. Por el item (i) del Lema 4.1.1, como $a, b \leq a+b$, entonces se tiene que $\langle a+b \rangle \subseteq \langle a \rangle, \langle b \rangle$ luego $\bar{a}, \bar{b} \preceq \overline{a+b}$. Si existiese un $\bar{c} \in \mathcal{V}_A$ tal que $\bar{a}, \bar{b} \preceq \bar{c}$, entonces $\langle c \rangle \subseteq \langle a \rangle, \langle b \rangle$, por el item (ii) del Lema 4.1.1, $\langle c \rangle \subseteq \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a+b \rangle$, esto es, $\overline{a+b} \preceq \bar{c}$. Por otro lado, dado que $ab \leq a, b$ por la integralidad, nuevamente, por el item (i) del Lema 4.1.1, se tiene que $\overline{ab} \preceq \bar{a}, \bar{b}$. Supóngase que existe un $\bar{d} \in \mathcal{V}_A$ tal que $\bar{d} \preceq \bar{a}, \bar{b}$, entonces $a, b \in \langle d \rangle$, luego, existen $n, m \geq 0$ tales que $d^n \leq a$ y $d^m \leq b$, así, $d^{n+m} \leq ab$, esto es, $ab \in \langle d \rangle$, y por lo tanto $\langle ab \rangle \subseteq \langle d \rangle$, es decir, $\bar{d} \preceq \overline{ab}$. Finalmente, la distributividad en $\mathcal{V}_A$ es consecuencia directa de la distributividad del producto con respecto a la suma en A . $\square$

Es claro que **riRig** es una subcategoría de **iRig**, donde **iRig** denota a la categoría algebraica de los rigs integrales en **Set** (Definición 1.1.2). Por otro lado, también **dLat** es subcategoría de **iRig**, ya que como se observa en la Sección 8 de [28], son exactamente los retículos distributivos, aquellos rigs integrales que satisfacen la ecuación $x^2 = x$. Dicha ecuación, dice que la multiplicación es idempotente.

Lema 4.1.3. Si A es un $riRig$ el cociente $\eta_A : A \rightarrow A/\sim$ es universal desde A a la inclusión **dLat** $\rightarrow$ **iRig**.

Prueba. Sea $f : A \rightarrow D$ un morfismo de rigs con D un retículo distributivo. Si $x \preceq y$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $x^m \leq y$ y, como la multiplicación es idempotente en D , se tiene que $f(x) = f(x^m) \leq f(y)$. Por lo tanto, $x \sim y$ implica que $f(x) = f(y)$. $\square$

En sucesivo, al codominio del morfismo $\eta_A = \eta : A \rightarrow \mathcal{V}_A$ se le denominará la *reticulación* del $riRig$ A .

Finalmente, sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo de $\mathbf{riRigs}$ y sean $\mathcal{V}_A$ y $\mathcal{V}_B$ sus respectivas reticulaciones. Por el Lema 4.1.3, existe un único morfismo de retículos $\bar{f} : \mathcal{V}_A \rightarrow \mathcal{V}_B$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ \mathcal{V}_A & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathcal{V}_B \end{array}$$

conmuta. Esto es, las asignaciones $A \mapsto \mathcal{V}_A$ y $f \mapsto \bar{f}$ determinan un funtor $\mathcal{V} : \mathbf{riRig} \rightarrow \mathbf{dLat}$. Para el resto del trabajo, el morfismo $\bar{f}$ será notado como $\mathcal{V}_f : \mathcal{V}_A \rightarrow \mathcal{V}_B$.

Lema 4.1.4 (Lema del Pushout-Pullback.). *Sea A un $\mathbf{riRig}$ y $a_1, a_2 \in A$. El siguiente diagrama es un Pushout y también un Pullback en $\mathbf{riRig}$.*

$$\begin{array}{ccc} A/\langle a_1 + a_2 \rangle & \longrightarrow & A/\langle a_1 \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/\langle a_2 \rangle & \longrightarrow & A/\langle a_1 a_2 \rangle \end{array}$$

Prueba. Considérese el diagrama siguiente, donde B es un $\mathbf{riRig}$ arbitrario:

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & \\ & \searrow^{i_{1,2}} & & \searrow^{i_1} & \\ & A/\langle a_1 + a_2 \rangle & \xrightarrow{\pi_1} & A/\langle a_1 \rangle & \\ & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \rho_1 & \\ & A/\langle a_2 \rangle & \xrightarrow{\rho_2} & A/\langle a_1 a_2 \rangle & \\ & \searrow t & & \searrow k & \\ & & & & B \end{array}$$

Se prueba que es un pushout. Supóngase que $s\pi_1 = t\pi_2$. Observar que como $\pi_1 i_{1,2} = i_1$ y $\pi_2 i_{1,2} = i_2$, entonces $si_1 = ti_2$. Ahora, nótese que

$$si_1(a_1 a_2) = si_1(a_1)si_1(a_2) = si_1(a_2) = ti_2(a_2) = 1.$$

Luego, por la propiedad universal de las localizaciones (Lema 1.2.18), existe un único morfismo de $\mathbf{riRigs}$ $k : A/\langle ab \rangle \rightarrow B$, tal que $k\rho_1 i_1 = si_1$ y por consiguiente, dado que i_1 es epi, se tiene que $k\rho_1 = s$. Ahora, dado que $\rho_1 \pi_1 = \rho_2 \pi_2$

y $s\pi_1 = t\pi_2$, entonces $k\rho_1\pi_1 = s\pi_1$ implica que $k\rho_2\pi_2 = t\pi_2$. Como π_2 es epi, se tiene que $k\rho_2 = t$. Así, el diagrama del enunciado es un Pushout.

Para una mejor comprensión en la parte final de la prueba, se establece la siguiente notación, para todo $x \in A$: Los elementos de $A/\langle a_1 + a_2 \rangle$ serán escritos como $[x]$, los elementos de $A/\langle a_i \rangle$, con $i = 1, 2$, como $[x]_i$ y los elementos de $A/\langle a_1 a_2 \rangle$ como $[x]_0$. Habiendo dicho esto, considérese el siguiente diagrama, donde B es un riRig arbitrario:

$$\begin{array}{ccccc}
 B & & & & \\
 \swarrow \scriptstyle h & & \searrow \scriptstyle l & & \\
 A/\langle a_1 + a_2 \rangle & \xrightarrow{\pi_1} & A/\langle a_1 \rangle & & \\
 \downarrow \scriptstyle \pi_2 & & \downarrow \scriptstyle \rho_1 & & \\
 A/\langle a_2 \rangle & \xrightarrow{\rho_2} & A/\langle a_1 a_2 \rangle & & \\
 \nwarrow \scriptstyle m & & & &
 \end{array}$$

Supóngase $\rho_1 l = \rho_2 m$. Si $l(c) = [x]_1$ y $m(c) = [y]_2$, se tiene que $[x]_0 = [y]_0$, luego, existe un $r \geq 0$, tal que $a_1^r a_2^r x \leq y$ y $a_1^r a_2^r y \leq x$.

Defínase $h(c) = [z] = [a_1^r x + a_2^r y]$. Este morfismo está bien definido, pues si $[x]_1 = [x']_1$ y $[y]_2 = [y']_2$, entonces, existen $s, t, l \geq 0$ tales que, $a_1^s x \leq x'$, $a_1^s x' \leq x$, $a_2^t y \leq y'$, $a_2^t y' \leq y$, $a_1^l a_2^l x' \leq y'$ y $a_1^l a_2^l y' \leq x'$. Así pues, si $z' = a_1^l x' + a_2^l y'$ se tiene: $a_1^u z \leq a_1^{s+l} x \leq a_1^l x'$ y $a_2^v z \leq a_2^{t+l} y \leq a_2^l y'$, por tanto, por el Corolario 1.1.8, se tiene que $(a_1 + a_2)^{uv} z \leq (a_1^u + a_2^v) z' \leq z'$, donde $u = r + l + s$ y $v = r + t + l$. De manera similar, se verifica que $(a_1 + a_2)^{uv} z' \leq z$, lo cual significa que $[z] = [z']$.

Ahora, por hipótesis, la integralidad de A y el hecho de que $a_1^r x \leq z$ y $a_2^r y \leq z$ por construcción, se tiene que $a_1^r z = a_1^{2r} x + a_1^r a_2^r y \leq a_1^{2r} x + x \leq x$ y que $a_2^r z = a_2^{2r} y + a_1^r a_2^r x \leq a_2^{2r} y + y \leq y$. Entonces $[z]_1 = [x]_1$ y $[z]_2 = [y]_2$, lo cual significa $\pi_1 h = l$ y $\pi_2 h = m$.

Para mostrar que h es un morfismo de riRigs, considérese el morfismo inducido por el producto $p : A/\langle a_1 + a_2 \rangle \rightarrow A/\langle a_1 \rangle \times A/\langle a_2 \rangle$, el cual se encuentra definido como $p([x]) = ([x]_1, [x]_2)$. Supóngase que $p([x]) = p([y])$ entonces $[x]_1 = [y]_1$ y $[x]_2 = [y]_2$. Luego, existen $r, s \geq 0$ tales que $a_1^r x \leq y$, $a_1^s y \leq x$, $a_2^s x \leq y$ y $a_2^s y \leq x$. Por el Corolario 1.1.8, $(a_1 + a_2)^{rs} x \leq y$ y $(a_1 + a_2)^{rs} y \leq x$, así pues $[x] = [y]$. Claramente, p es un morfismo de riRigs, por lo tanto p es

monomorfismo.

Si $c, d \in B$, se tiene que

$$p(h(c)) = p([z]) = ([z]_1, [z]_2) = ([x]_1, [y]_2) = (l(c), m(c))$$

Entonces si existe un morfismo h' desde B a $A/\langle a_1 + a_2 \rangle$ tal que $\pi_1 h' = l$ y $\pi_2 h' = m$, de la parte anterior, se tiene que $p(h(c)) = p(h'(c))$ para todo $c \in B$. Como p es inyectiva, se concluye que $h = h'$.

Ahora, para probar que h es un morfismo de riRigs, considérese el diagrama de abajo, donde $\diamond$ es cualquiera de las operaciones $\diamond$ binarias de A . Se verifica que $p(h(c \diamond d)) = p(h(c) \diamond h(d))$.

$$\begin{array}{ccc} B \times B & \xrightarrow{h \times h} & A/\langle a_1 + a_2 \rangle \times A/\langle a_1 + a_2 \rangle \\ \diamond \downarrow & & \downarrow \diamond \\ B & \xrightarrow{h} & A/\langle a_1 + a_2 \rangle \end{array}$$

Si $l(d) = [x']_1$ y $m(d) = [y']_2$, entonces, $h(d) = [a_1^n x' + a_2^n y'] = [w]$. Ahora,

$$\begin{aligned} p(h(c) \diamond h(d)) &= ([z] \diamond [w]) = ([z \diamond w]) = ([z \diamond w]_1, [z \diamond w]_2) \\ &= ([z]_1 \diamond [w]_1, [z]_2 \diamond [w]_2) = ([x]_1 \diamond [x']_1, [y]_2 \diamond [y']_2) \\ &= (l(c) \diamond l(d), m(c) \diamond m(d)) = (l(c \diamond d), m(c \diamond d)) = p(h(c \diamond d)). \end{aligned}$$

Luego, como p es mono, se tiene que $h(c \diamond d) = h(c) \diamond h(d)$. Es claro que preserva 0 y 1, luego, el diagrama es Pushout. $\square$

Como consecuencia directa del último resultado, se tiene lo siguiente:

Lema 4.1.5. *Sea A un riRig. Considérese $\tilde{A} : \mathcal{V}_A^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ definido como $\tilde{A}(\bar{a}) = A/\langle a \rangle$. Entonces $\tilde{A} \in \mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$.*

Prueba. Si $\bar{a} \preceq \bar{b}$ se tiene que $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$, entonces, por la propiedad universal de las localizaciones, existe un único morfismo $A/\langle b \rangle \longrightarrow A/\langle a \rangle$. Esto es, $\tilde{A}$ es un prehaz. Finalmente, si $\bar{a} = \bar{a}_1 \vee \bar{a}_2$ entonces $\langle a \rangle = \langle a_1 + a_2 \rangle$, luego, por el Lema 4.1.4, es claro que $\tilde{A}$ satisface la condición de haz. $\square$

Proposición 4.1.6. *El haz $\tilde{A}$ es really local en $\mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$.*

Prueba. Por el Lema 2.1.1, se tiene que para todo $\bar{a} \in \mathcal{V}_A$,

$$(\tilde{A} + \tilde{A})(\bar{a}) = \{(\bar{a}_0, \bar{a}_1, [x]_0, [y]_1) \mid \bar{a}_0 \vee \bar{a}_1 = \bar{a}, \bar{a}_0 \wedge \bar{a}_1 = \bar{0}, [x]_0 \in \tilde{A}(\bar{a}_0), [y]_1 \in \tilde{A}(\bar{a}_1)\}$$

y

$$[x + y = 1](\bar{a}) = \{([x], [y]) \mid x + y \in \langle a \rangle\}$$

Para llevar a cabo la prueba, es imperativo, describir el morfismo inducido por el coproducto de manera precisa. Así pues, considérese el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{A}(\bar{a}) & \xrightarrow{\rho_{1,\bar{a}}} & (\tilde{A} + \tilde{A})(\bar{a}) & \xleftarrow{\rho_{2,\bar{a}}} & \tilde{A}(\bar{a}) \\ & \searrow l & \downarrow r_{\bar{a}} & \swarrow m & \\ & & [x + y = 1](\bar{a}) & & \end{array}$$

donde $\rho_{1,\bar{a}}([x]) = (\bar{a}, \bar{0}, [x], [1])$, $\rho_{2,\bar{a}}([x]) = (\bar{0}, \bar{a}, [1], [x])$, $l_{\bar{a}}([x]) = ([x], [1])$ y $m_{\bar{a}}([x]) = ([1], [x])$.

Como en la prueba del Lema 2.1.1, $r_{\bar{a}}(\bar{a}_0, \bar{a}_1, [x]_0, [y]_1) = ([s], [t])$, donde

$$([s], [t]) \cdot \bar{a}_0 = l_{\bar{a}_0}([x]_0) = ([x]_0, [1]_0) \quad y \quad ([s], [t]) \cdot \bar{a}_1 = m_{\bar{a}_1}([y]_1) = ([1]_1, [y]_1).$$

Entonces, existen $s, t \in A$ tales que $s \in \langle a_1 \rangle$, $t \in \langle a_0 \rangle$, $s + t \in \langle a \rangle$, $a_0^k s \leq x$, $a_0^k x \leq s$, $a_1^p y \leq t$ y $a_1^p t \leq y$ para algún $p, q \geq 0$. Como $\bar{a}_1 \bar{a}_0 = \bar{0}$, existen $w, v \geq 0$, tales que $a_0^w a_1^w \leq y$ y $a_0^v a_1^v \leq x$. Considérense $s = a_1^v + y$ y $t = a_0^w + x$. Se verifica que: $a_0^w \leq a_0^w + y = t$, entonces $t \in \langle a_0 \rangle$. Por otro lado, $a_1^w(a_0^w + y) \leq y + a_1^w y = y$ y $a_1^w y \leq y \leq t$, por tanto $[t]_1 = [y]_1$. De manera similar, se verifica que $[s]_1 = [1]_1$ y $[s]_0 = [x]_0$. Como $a_0 + a_1 \in \langle a \rangle$, existe un $r \geq 0$ tal que $a^r \leq a_0 + a_1$, entonces, $a^{rvw} \leq (a_0 + a_1)^{vw} \leq a_1^v + a_0^w \leq s + t$, por lo tanto $s + t \in \langle a \rangle$.

Así, el morfismo inducido por el coproducto, queda descrito como

$$\begin{aligned} r_{\bar{a}} : (\tilde{A} + \tilde{A})(\bar{a}) &\longrightarrow [x + y = 1](\bar{a}) \\ (\bar{a}_0, \bar{a}_1, [x]_0, [y]_1) &\mapsto ([a_1^v + x], [a_0^w + y]). \end{aligned}$$

Sólo falta probar que r es epi en $\mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$. Para tal efecto, sean $\bar{a} \in \mathcal{V}_A$ y $([x], [y]) \in [x + y = 1](\bar{a})$, entonces $x + y \in \langle a \rangle$ implica que $\langle x + y \rangle \subseteq \langle a \rangle$, por tanto $\bar{a} \leq \overline{x + y}$. Así pues, $\bar{a} = \bar{a} \wedge \overline{x + y} = \overline{a(x + y)} = \overline{ax} \vee \overline{ay}$, luego $\overline{ax}, \overline{ay}$ es un cubrimiento para $\bar{a}$. Ahora,

$$([x], [y]) \cdot \overline{ax} = ([x]_{ax}, [y]_{ax}) = ([1]_{ax}, [y]_{ax}) = r_{\overline{ax}}(\bar{0}, \overline{ax}, [1]_0, [y]_{ax}),$$

similarmente, $([x], [y]) \cdot \overline{ay} = ([x]_{ay}, [1]_{ay}) = r_{\overline{ay}}(\overline{ay}, \bar{0}, [x]_{ay}, [1]_0)$. Lo cual, por el Lema 2.3.3, significa que r es localmente sobreyectiva, por tanto, es un

epimorfismo en $\mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$.

Es claro que, si $\bar{a} = \bar{0}$, entonces $\tilde{A}(\bar{0}) = A/\langle 0 \rangle = 1$. Por otro lado, si $\tilde{A}(\bar{a}) = 1$, por el Lema 1.2.21, a es nilpotente, luego $\langle a \rangle = \langle 0 \rangle$. Por lo tanto $\bar{a} = \bar{0}$. Consecuentemente, en virtud del Corolario 2.3.5, $\tilde{A}$ es really local. $\square$

Sea A un riRig con reticulación $A \rightarrow \mathcal{V}_A$. Sea $P \rightarrow \mathcal{V}_A$ el subposet de elementos (join-)irreducibles en $\mathcal{V}_A$. Si $\mathcal{V}_A$ es finito, entonces, por razones generales (Lema C2.2.21 en [25]), la inclusión $P \rightarrow \mathcal{V}_A$ induce una equivalencia $\hat{P} \rightarrow \mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$ entre el topos de prehaces en P y el topos de haces en el retículo $\mathcal{V}_A$. El haz $\tilde{A}$ en $\mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$ de la representación, se corresponde con un prehaz $B \in \hat{P}$ que carga su estructura asociada de riRig really local. Por el Lema 2.3.7, esto significa que para todo p en P , $B(p)$ es un riRig really local. Se ha obtenido entonces

Proposición 4.1.7. *Sea A un riRig con reticulación finita. Entonces, el haz $\tilde{A}$ es really local en $\mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$ si y sólo si, el riRig $A[x^{-1}]$ es really local en $\mathbf{Set}$ para todo $\bar{x}$ en $P \rightarrow \mathcal{V}_A$.*

Ejemplo 4.1.8. Como un ejemplo de un riRig con reticulación finita, considérese $A = \mathbb{Z}_{\leq 0} \cup \{-\infty\}$ con $0 = \top$ y $-\infty = \perp$. El producto está definido como

$$mn = \begin{cases} m +_{\mathbb{Z}} n, & m, n > -\infty \\ -\infty, & m = -\infty \text{ o } n = -\infty \end{cases}$$

donde $m +_{\mathbb{Z}} n$ es la suma usual en $\mathbb{Z}$. A su vez, la suma está definida como $m + n = \max\{m, n\}$ y el residuo como

$$m \rightarrow n = \begin{cases} 0, & m \leq n \\ m - n, & m > n, \quad n \neq -\infty \\ -\infty, & m > n, \quad n = -\infty \end{cases}$$

donde $m - n$ es la resta usual de $\mathbb{Z}$.

Como A es un conjunto totalmente ordenado, todo par $\perp < m, n < \top$, es comparable, así que si se asume $m \leq n$, por la propiedad Arquimedean de la suma, existe un $k \geq 0$ tal que $n^k \leq m$. Esto significa que $\bar{m} = \bar{n}$ en $\mathcal{V}_A$, luego la reticulación de A es el conjunto totalmente ordenado de tres elementos.

Adicionalmente, observar que, dado que el único elemento irreducible de $\mathcal{V}_A$ es $\bar{x}$, con $\perp < x < \top$ entonces $\tilde{A}(\bar{x}) = A[x^{-1}] = \{\perp, \top\}$, el cual es claramente really local. Por la Proposición 4.1.7, $\tilde{A}$ es un riRig really local interno en el topos $\mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$.

4.2. La categoría $\mathfrak{RL}$.

A lo largo de esta sección, se utilizará una notación más específica en torno al clasificador de subobjetos principales de un topos de haces sobre un retículo distributivo (ver Sección 2.4), dado que se involucrarán diversos retículos en simultáneo. Esto es, se escribirá $\top : 1 \rightarrow \Lambda_D$ para denotar el clasificador de subobjetos principales de $\mathbf{Shv}(D)$, con D un retículo dado.

De los comentarios hechos al inicio de la Sección 3.2, se tiene que todo morfismo de retículos $f : D \rightarrow C$, determina un funtor $f_* : \mathbf{Shv}(C) \rightarrow \mathbf{Shv}(D)$ que resulta ser la imagen directa de un morfismo geométrico entre los topos $\mathbf{Shv}(C)$ y $\mathbf{Shv}(D)$. Así mismo, el morfismo f , determina un morfismo $f' : \Lambda_D \rightarrow f_*\Lambda_C$ en $\mathbf{Shv}(D)$, tal que para cada $d \in D$,

$$f'_d : (\downarrow d) \rightarrow (f_*\Lambda_C)_d = (\downarrow f(d))$$

está definida como $f'_d(x) = f(x)$, para todo $x \in (\downarrow d)$. En lo sucesivo, se escribirá $f : \Lambda_D \rightarrow f_*\Lambda_C$ para denotar al morfismo f' .

Definición 4.2.1. Una *representación really local* es un par (D, P) donde D es un retículo distributivo y P es un riRig en $\mathbf{Shv}(D)$ que satisface las condiciones equivalentes del Corolario 2.4.6. Un morfismo $(D, P) \rightarrow (C, Q)$ es un par (f, g) donde $f : D \rightarrow C$ es un morfismo de retículos y $g : P \rightarrow f_*(Q)$ es un morfismo de riRigs en $\mathbf{Shv}(D)$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & f_*(Q) \\ \phi_P \downarrow & & \downarrow f_*(\phi_Q) \\ \Lambda_D & \xrightarrow{f} & f_*(\Lambda_C) \end{array}$$

conmuta. Esta última condición será denominada como *compatibilidad con subobjetos principales*.

Sea $(p, h) : (C, Q) \rightarrow (B, R)$ otro morfismo de representaciones really local. La composición de morfismos de representaciones really local, se define de manera análoga a la composición de representaciones de Pierce (Sección 3.2); esto es, $(p, h)(f, g) : (D, P) \rightarrow (B, R)$ está dada por el par $(pf, f_*(h)g)$. De la funtorialidad de f_* y del hecho de que $(pf)_* = f_*p_*$, es claro que la composición está bien definida y es asociativa. Además, para todo retículo D el morfismo id_D , induce la identidad en $\mathbf{Shv}(D)$, así (id_D, id_P) es $id_{(D, P)}$.

Lema 4.2.2. La composición de morfismos de representaciones really local definida como arriba, determina una categoría.

Prueba. Sólo hace falta probar que si g y h son compatibles con subobjetos principales, se tiene que $f_*(h)g$ también lo es. Del diagrama, se tiene que:

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{g} & f_*(Q) & \xrightarrow{f_*(h)} & (pf)_*(R) \\ \phi_P \downarrow & & \downarrow f_*(\phi_Q) & & \downarrow (pf)_*(\phi_R) \\ \Lambda_D & \xrightarrow{f} & f_*(\Lambda_C) & \xrightarrow{f_*(p)} & (pf)_*(\Lambda_B) \end{array}$$

Como h es compatible con subobjetos principales, $p_*(\phi_R)h = p\phi_Q$. La functorialidad de f_* y $(pf)_* = f_*p_*$ implican que $(pf)_*(\phi_R)f_*(h) = f_*(p)f_*(\phi_Q)$, luego $(pf)_*(\phi_R)f_*(h)g = f_*(p)f_*(\phi_Q)g$. Como g es compatible con subobjetos principales, $(pf)_*(\phi_R)f_*(h)g = f_*(p)(f\phi_P)$. $\square$

En lo sucesivo, se denotará como $\mathfrak{Rl}$ a la categoría cuyos objetos son representaciones really local y cuyos morfismos se corresponden con los pares descritos en la Definición 4.2.1.

4.3. Teorema de Representación.

Para poder probar el resultado central de este capítulo, es preciso introducir algunos resultados previos sobre representaciones really local.

Lema 4.3.1. *Sea A un $riRig$ en $\mathbf{Set}$ y sea R un $riRig$ en $\widehat{\mathcal{V}}_A$. Para todo $g : A \rightarrow R(\bar{1})$ existe a lo sumo un $\varphi : \tilde{A} \rightarrow R$ tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\simeq} & \tilde{A}(\bar{1}) \\ & \searrow g & \downarrow \varphi_{\bar{1}} \\ & & R(\bar{1}) \end{array}$$

conmuta. Más aún, dicho φ existe si y sólo si para todo $a \in A$, $g(a) \cdot \bar{a} = 1 \in R(\bar{a})$.

Prueba. Sea $\varphi : \tilde{A} \rightarrow R$ tal que el triángulo de la proposición conmuta. Para todo $\bar{a}$ en $\mathcal{V}_A$ el cuadrado de la izquierda

$$\begin{array}{ccccc} & & g & & \\ & \searrow & \nearrow & & \\ A & \xrightarrow{\simeq} & \tilde{A}(\bar{1}) & \xrightarrow{\varphi_{\bar{1}}} & R(\bar{1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A/\langle a \rangle & \xrightarrow{=} & \tilde{A}(\bar{a}) & \xrightarrow{\varphi_{\bar{a}}} & R(\bar{a}) \end{array}$$

conmuta por definición de $\tilde{A}$ y el cuadrado de arriba a la derecha conmuta por la naturalidad de φ . Entonces $\varphi_{\bar{a}}$ está determinada por φ_1 y la propiedad universal de $A \rightarrow A/\langle a \rangle$. Esto completa la prueba de la primera parte del enunciado. Observar que el rectángulo también muestra que para todo $x \in A$, $g(a) \cdot \bar{a} = 1$.

Para la prueba del recíproco, supóngase que $g(a) \cdot \bar{a} = 1$ para todo $a \in A$. Entonces, la propiedad universal de $A \rightarrow A/\langle a \rangle$ implica la existencia de una única $\varphi_{\bar{a}} : \tilde{A}(\bar{a}) \rightarrow R(\bar{a})$ tal que el rectángulo de arriba conmuta. La propiedad universal de las localizaciones también implica que la colección $\{\varphi_{\bar{a}} \mid (\bar{a}) \in \mathcal{V}_A\}$ es natural. $\square$

Lema 4.3.2. *Sea (C, P) una representación really local y $g : A \rightarrow P(1)$ un morfismo de *riRigs* en **Set**. Entonces, existe un único morfismo de retículos $f : \mathcal{V}_A \rightarrow C$, tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & P(1) \\ \eta \downarrow & & \downarrow \phi_1 \\ \mathcal{V}_A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

conmuta.

Prueba. Sea $\phi_1 g = F : A \rightarrow C$. Del Lema 4.1.3, se tiene que la existencia y unicidad del morfismo $f : \mathcal{V}_A \rightarrow C$ depende de si F es un morfismo de rigs integrales. Previo a la prueba de este hecho, observar que como (C, P) es una representación really local, por 2. del Corolario 2.4.6, se tiene que para todo $a \in A$, $F(a) = \bigvee \{d \in C \mid g(a) \cdot d = 1\}$. En lo que sigue, $F(a)$ será notado como d_a .

Es claro que $F(1) = 1$. Ahora, para probar que F preserva productos, nótese que en $P(d_{ab})$

$$1 = g(ab) \cdot d_{ab} = (g(a) \cdot d_{ab})(g(b) \cdot d_{ab})$$

pues g preserva productos, luego por integralidad se tiene que

$$g(a) \cdot d_{ab} = g(b) \cdot d_{ab} = 1$$

por lo tanto, $d_{ab} \leq d_a, d_b$, así $d_{ab} \leq d_a \wedge d_b$. Por otro lado, dado que en $P(d_a \wedge d_b)$

$$1 = (g(a) \cdot d_a) \cdot (d_a \wedge d_b) = g(a) \cdot (d_a \wedge d_b)$$

y

$$1 = (g(b) \cdot d_b) \cdot (d_a \wedge d_b) = g(b) \cdot (d_a \wedge d_b)$$

entonces $g(ab) \cdot (d_a \wedge d_b) = 1$, por lo tanto $d_a \wedge d_b \leq d_{ab}$, lo cual termina la prueba de que $F(ab) = F(a) \wedge F(b)$. Para probar que F preserva supremos, observar que por integralidad, se tiene que $g(a+b) \cdot d_a = 1 \in P(d_a)$ y $g(a+b) \cdot d_b = 1 \in P(d_b)$, esto es, $d_a, d_b \leq d_{a+b}$, luego $d_a \vee d_b \leq d_{a+b}$. Por otro lado, como g preserva supremos,

$$g(a+b) \cdot d_{a+b} = (g(a) \cdot d_{a+b}) + (g(b) \cdot d_{a+b})$$

entonces, por 2. del Corolario 2.4.6, existen $u, v \leq d_{a+b}$ con $u \vee v = d_{a+b}$ tales que $g(a) \cdot u = 1 \in P(u)$ y $g(b) \cdot v = 1 \in P(v)$. Esto implica que $u \leq d_a$ y $v \leq d_b$, luego, $d_{a+b} = u \vee v \leq d_a \vee d_b$. Por lo tanto $F(a+b) = F(a) \vee F(b)$. Finalmente, como P es really local en $\mathbf{Shv}(E)$, por (ii) del Corolario 2.3.5, $0 \cdot d = 1$ si y sólo si $d = 0$, así, $F(0) = 0$. $\square$

Lema 4.3.3. *Para todo riRig A , el par $(\mathcal{V}_A, \tilde{A})$ es una representación really local.*

Prueba. Sea A un riRig, por la Proposición 4.1.6, $\tilde{A}$ es really local en $\mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$. Ahora, sea $[x]_a \in A/\langle a \rangle$, entonces

$$[x]_{xa} = [x]_1 \cdot \bar{x}\bar{a} = [x]_x \cdot \bar{a} = [1]_x \cdot \bar{a} = [1]_{xa}$$

Supóngase que existe un $\bar{c} \leq \bar{a}$ en $\mathcal{V}_A$, tal que $[x]_c = [1]_c$, entonces, $x \in \langle c \rangle$, luego $\langle x \rangle \subseteq \langle c \rangle$. Así pues, $\bar{c} \leq \bar{x}\bar{a}$ implica que $\bar{c} = \bar{x}\bar{a} = \bar{x} \wedge \bar{a}$. Por lo tanto, $(\phi_{\tilde{A}})_{\bar{a}}([x]_a) = \bar{x}\bar{a}$, así $\phi_{\bar{a}}([x]_a) = (\downarrow \bar{x}\bar{a})$, luego, por el Corolario 2.4.6, el resultado se tiene. $\square$

Sean A y B riRigs en $\mathbf{Set}$ y sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo de riRigs. De la Proposición 4.1.3, se tiene que f se extiende a un único morfismo de retículos $\mathcal{V}_f : \mathcal{V}_A \rightarrow \mathcal{V}_B$, el cual determina un functor canónico

$$\mathcal{V}_{f*} : \mathbf{Shv}(\mathcal{V}_B) \rightarrow \mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$$

que resulta ser la imagen directa de un morfismo geométrico entre $\mathbf{Shv}(\mathcal{V}_B)$ y $\mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$.

Nótese que $\mathcal{V}_{f*}(\tilde{B})(\bar{1}) = \tilde{B}(\mathcal{V}_f(\bar{1})) = B/\langle f(1) \rangle \cong B$, entonces por el Lema 4.3.1, existe un único $\tilde{f} : \tilde{A} \rightarrow \mathcal{V}_{f*}(\tilde{B})$ en $\mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/\langle a \rangle & \xrightarrow{\tilde{f}_{\bar{a}}} & B/\langle f(a) \rangle \end{array}$$

conmuta. Observar que para todo $\bar{a} \in \mathcal{V}_A$ el morfismo $\tilde{f}_{\bar{a}} : A/\langle a \rangle \rightarrow B/\langle f(a) \rangle$ está definido como $\tilde{f}_{\bar{a}}(x) = [f(x)]_{f(a)}$.

Lema 4.3.4. *Para todo morfismo de riRigs $f : A \rightarrow B$, el par $(\mathcal{V}_f, \tilde{f})$ es compatible con subobjetos principales.*

Prueba. Por lo visto anteriormente, está claro que $\tilde{f}$ es un morfismo en $\mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$. Sólo falta verificar que dicho morfismo es compatible con subobjetos principales. Para tal efecto, sea $\bar{a} \in \mathcal{V}_A$. Considérese el siguiente diagrama en **Set** (cuyas columnas son las evaluaciones en $\bar{a}$ de los morfismos $\phi_{\tilde{A}} : \tilde{A} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{V}_A}$ y $\mathcal{V}_{f*}(\phi_{\tilde{B}}) : \mathcal{V}_{f*}(\tilde{B}) \rightarrow \mathcal{V}_{f*}(\Lambda_{\mathcal{V}_f})$, y cuyas filas son las evaluaciones de $\bar{a}$ de los morfismos $\tilde{f} : \tilde{A} \rightarrow \mathcal{V}_{f*}(\tilde{B})$ y $\mathcal{V}_f : \Lambda_{\mathcal{V}_A} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{V}_B}$ en $\mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$):

$$\begin{array}{ccc} A/\langle a \rangle & \xrightarrow{\tilde{f}_{\bar{a}}} & B/\langle f(a) \rangle \\ (\phi_{\tilde{A}})_{\bar{a}} \downarrow & & \downarrow (\phi_{\tilde{B}})_{\tilde{f}(\bar{a})} \\ (\downarrow \bar{a}) & \xrightarrow{\mathcal{V}_f} & (\downarrow \overline{f(a)}) \end{array}$$

Entonces, para todo $[x]_a \in A/\langle a \rangle$, se tiene que

$$\mathcal{V}_f((\phi_{\tilde{A}})_{\bar{a}}([x]_a)) = \mathcal{V}_f(\overline{xa}) = \overline{f(xa)} = \overline{f(x)f(a)} = (\phi_{\tilde{B}})_{\tilde{f}(\bar{a})}(\tilde{f}_{\bar{a}}([x]_a))$$

esto es, el diagrama conmuta. Así, de la Definición 4.2.1, el enunciado se tiene. $\square$

Los Lemas 4.3.3 y 4.3.4, determinan una asignación

$$\mathcal{R} : \mathbf{riRig} \rightarrow \mathfrak{R}\mathfrak{X}$$

definida como $\mathcal{R}(A) = (\mathcal{V}_A, \tilde{A})$ para un riRig A y como $\mathcal{R}(f) = (\mathcal{V}_f, \tilde{f})$ para un morfismo de riRigs $f : A \rightarrow B$.

Lema 4.3.5. *La asignación $\mathcal{R}$ es funtorial.*

Prueba. Como $\mathcal{V}$ es funtor, se tiene que

$$\mathcal{R}(id_A) = (\mathcal{V}_{id_A}, id_{\tilde{A}}) = (id_{\mathcal{V}_A}, id_{\tilde{A}}) = id_{(\mathcal{V}_A, \tilde{A})} = id_{\mathcal{R}(A)}$$

Ahora, sean $f : A \rightarrow B$ y $h : B \rightarrow C$ morfismos de riRigs. Nuevamente por la funtorialidad de $\mathcal{V}$ se tiene que,

$$(\mathcal{V}_g, \tilde{g})(\mathcal{V}_f, \tilde{f}) = (\mathcal{V}_g \mathcal{V}_f, \mathcal{V}_{f*}(\tilde{g})\tilde{f}) = (\mathcal{V}_{gf}, \mathcal{V}_{f*}(\tilde{g})\tilde{f})$$

Ahora, sean $\bar{a} \in \mathcal{V}_A$ y $[x]_a \in \tilde{A}(\bar{a})$, entonces:

$$\begin{aligned} (\mathcal{V}_{f*}(\tilde{g})\tilde{f})_{\bar{a}}([x]_a) &= \tilde{g}_{\mathcal{V}_f(\bar{a})}(\tilde{f}_{\bar{a}}([x]_a)) = (\tilde{g}_{\overline{f(a)}})([f(x)]_{f(a)}) \\ &= [g(f(x))]_{g(f(a))} = [(gf)(x)]_{(gf)(a)} = (\mathcal{V}_{gf})_{\bar{a}}([x]_a). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{V}_{f*}(\tilde{g})\tilde{f} = \mathcal{V}_{gf*}$ y en consecuencia, $\mathcal{R}(g)\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(gf)$. $\square$

Por otro lado, sea $(f, g) : (C, P) \rightarrow (D, Q)$ un morfismo de representaciones really local. De manera análoga a la Sección 3.3, es posible establecer un funtor

$$\Gamma : \mathfrak{R}\mathfrak{L} \longrightarrow \mathbf{riRig}$$

definido en objetos como $\Gamma(C, Q) = Q(1)$ y como $\Gamma(f, g) = g_1$ en morfismos. Observar que para todo $\mathbf{riRig}$ A en **Set**, $\Gamma(\mathcal{V}_A, \tilde{A}) = \tilde{A}(\bar{1}) = A[1^{-1}] \cong A$. Esto es, todo $\mathbf{riRig}$ es el álgebra de puntos de un haz de $\mathbf{riRigs}$ really local sobre un retículo distributivo.

Teorema 4.3.6. *El funtor de puntos $\Gamma : \mathfrak{R}\mathfrak{L} \longrightarrow \mathbf{riRig}$ es adjunto a derecha de $\mathcal{R} : \mathbf{riRig} \rightarrow \mathfrak{R}\mathfrak{L}$, el cual además, es pleno y fiel.*

Prueba. Para verificar la adjunción, sea (C, P) una representación really local y $g : A \rightarrow P(1)$ un morfismo de $\mathbf{riRigs}$ en **Set**. Por el Lema 4.3.2, existe un único morfismo de retículos $k : \mathcal{V}_A \rightarrow C$, definido como $k(\bar{a}) = F(a)$, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & P(1) \\ \downarrow & \searrow F & \downarrow \phi_1 \\ \mathcal{V}_A & \xrightarrow{k} & C \end{array}$$

conmuta. Ahora, es claro que para todo $\bar{a} \in \mathcal{V}_A$, $g(a) \cdot k(\bar{a}) = 1 \in P(k(\bar{a}))$, entonces por el Lema 4.3.1, existe un único $\beta : \tilde{A} \rightarrow k_*(P)$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & P(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/\langle a \rangle & \xrightarrow{\beta_{\bar{a}}} & P(F(\bar{a})) \end{array}$$

conmuta para todo $\bar{a} \in \mathcal{V}_A$. Para probar que el par (k, β) es un morfismo de representaciones really local, sólo falta verificar que β es compatible con factorizaciones. Para tal efecto, sea $\bar{a} \in \mathcal{V}_A$. Entonces, dada la naturalidad de $\phi_{\tilde{A}} : \tilde{A} \rightarrow \Lambda_{\mathcal{V}_A}$ y $k_*(\phi_P) : k_*(P) \rightarrow k_*(\Lambda_C)$, así como la de β ,

$$\begin{array}{ccccc} & & A & \xrightarrow{g} & P(1) \\ & \swarrow (\phi_{\tilde{A}})_{\bar{1}} & \downarrow & & \downarrow & \searrow (\phi_P)_{\bar{1}} \\ \mathcal{V}_A & & A/\langle a \rangle & \xrightarrow{\beta_{\bar{a}}} & P(k(\bar{a})) & E \\ & \swarrow (\phi_{\tilde{A}})_{\bar{a}} & \downarrow & (*) & \downarrow (\phi_P)_{k(\bar{a})} & \searrow (-) \cdot k(\bar{a}) \\ & & (\downarrow \bar{a}) & \xrightarrow{k} & (\downarrow k(\bar{a})) & \end{array}$$

la conmutatividad de los diagramas laterales y del cuadrado central superior se tienen. Así, de lo anterior se tiene que para todo $[x]_{\bar{a}} \in A/\langle a \rangle$:

$$\begin{aligned}
 k_*(\phi_P)_{\bar{a}}(\beta_{\bar{a}}([x]_a)) &= (\phi_P)_{k(\bar{a})}(g(x) \cdot k(\bar{a})) \\
 &= (\phi_P)_1(g(x)) \wedge k(\bar{a}) \\
 &= k(\bar{x}) \wedge k(\bar{a}) = k(\overline{xa}) \\
 &= k((\phi_{\bar{A}})_{\bar{a}}([x]_a)),
 \end{aligned}$$

luego el diagrama $(*)$ conmuta. Como la unidad de la adjunción es un isomorfismo, el resultado se tiene. $\square$

Capítulo 5

Representaciones en términos de homeos locales.

En este capítulo se lleva a cabo la traducción de los resultados de los Capítulos 3 y 4 a su expresión en términos de homeos locales. La herramienta fundamental para lograrlo, es la equivalencia entre el topos de haces de un retículo distributivo con el sitio coherente y el topos de homeos locales sobre un espacio espectral. Posteriormente, se define el espectro de un $\mathbf{riRig}$, como un espacio topológico asociado a su reticulación y se muestra que las fibras del homeo local asociado al haz de la representación really local, coinciden con los cocientes sobre filtros primos. Adicionalmente, en el Corolario 5.2.5, se da una prueba alternativa del Teorema de Representación subdirecta de $\mathbf{riRigs}$ (Teorema 1.2.31).

5.1. $\mathbf{Shv}(D)$ y $\mathbf{LH}/\mathbf{spec}(D)$ son equivalentes.

Sea D un retículo. Con base en hechos conocidos sobre la dualidad entre retículos distributivos y *espacios coherentes* (ver Sección 2.3 de [24]), en esta sección se discuten los detalles de la equivalencia entre las categorías $\mathbf{LH}/\mathbf{Spec}(D)$ y $\mathbf{Shv}(D)$ utilizando la presentación del espacio $\mathbf{Spec}(D)$ formulada en [36]. En lo sucesivo, el conjunto de abiertos compactos de un espacio topológico X , será notado como $\mathcal{K}(X)$.

El *espectro* de un retículo distributivo D es el espacio topológico $\mathbf{Spec}(D)$ cuyos puntos son los morfismos de retículos $p : D \rightarrow 2$ (donde 2 denota al conjunto totalmente ordenado $\{\perp, \top\}$) y cuya topología tiene como base a los subconjuntos $\sigma(a) \subseteq \mathbf{Spec}(D)$, definidos como

$$\sigma(a) = \{p \in \mathbf{Spec}(D) \mid p(a) = \top\}$$

para todo $a \in D$. Es bien sabido que cada punto p tiene un par asociado $(p^{-1}(\perp), p^{-1}(\top))$ compuesto por un ideal primo y un filtro primo, respectivamente. Los abiertos básicos satisfacen $\sigma(\top) = \sigma(D)$, $\sigma(\perp) = \emptyset$, $\sigma(a \vee b) = \sigma(a) \cup \sigma(b)$ y $\sigma(a \wedge b) = \sigma(a) \cap \sigma(b)$, para todos $a, b \in D$. Más aún, un conjunto $K \subseteq \sigma(D)$ es compacto si y sólo si existe un $a \in D$ tal que $K = \sigma(a)$. Observar que el morfismo de retículos $\phi_D : D \rightarrow \mathcal{K}(\mathbf{Spec}(D))$, definido como $\phi_D(a) = \sigma(a)$ es un isomorfismo.

Por otro lado, un espacio topológico X se dice *coherente* (ver [24]) (conocidos también como *espectrales* en [36]) si es *sobrio* (todo conjunto cerrado irreducible es la clausura de un único punto), $\mathcal{K}(X)$ es cerrado por intersecciones finitas y además forma una base para la topología de X . Una función $h : X \rightarrow Y$ es *coherente* si h^{-1} preserva compactos abiertos. Nótese que la función $\tau_X : X \rightarrow \mathbf{spec}(\mathcal{K}(X))$ definida como $\tau_X(x) = \mu_x$, con

$$\mu_x(V) = \begin{cases} \top, & x \in V \\ \perp, & x \notin V \end{cases}$$

para todo $V \in \mathcal{K}(X)$, es un homeomorfismo.

Es un resultado clásico, que para todo espacio topológico X , las categorías $\mathbf{LH}/X$ y $\mathbf{Shv}(X)$ son equivalentes (ver Corolario 3,II.6 en [30]). La equivalencia $\mathbf{Shv}(X) \rightarrow \mathbf{LH}/X$ envía un haz $P : \mathcal{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ al *espacio de gérmenes* de P definido de la manera siguiente: Para cada $x \in X$, sea $P_x = \varinjlim_{x \in U} P(U)$ donde el colímite está indexado por el poset de vecindades abiertas de x (ordenadas por inclusión inversa). La familia de los P_x determina una función $\pi : \coprod_{x \in X} P_x \rightarrow X$. Así mismo, cada $s \in P(U)$ determina una función obvia $\dot{s} : U \rightarrow \coprod_{x \in X} P_x$ tal que $\pi \dot{s} : U \rightarrow X$ es la inclusión $U \rightarrow X$. El conjunto $\coprod_{x \in X} P_x$ está topologizado por la base de imágenes abiertas de las funciones $\dot{s}$. Esta topología convierte a π en un homeo local sobre el espacio de gérmenes anteriormente mencionado.

Toda base B para la topología de X puede ser considerada como un subposet $B \rightarrow \mathcal{O}(X)$. La topología de Grothendieck usual en $\mathcal{O}(X)$ se restringe a lo largo de $B \rightarrow \mathcal{O}(X)$ y el morfismo de sitios resultante determina una equivalencia $\mathbf{Shv}(B) \rightarrow \mathbf{Shv}(X)$ (ver Teorema II.1.3 en [30]).

La composición de las equivalencias $\mathbf{Shv}(B) \rightarrow \mathbf{Shv}(X) \rightarrow \mathbf{LH}/X$ se asemeja a la anterior, pues por finalidad (en sentido de la Sección IX.3 de [29]), el colímite $P_x = \varinjlim_{x \in U} P(U)$ puede calcularse utilizando sólo abiertos básicos.

Siguiendo los detalles de la construcción anterior de acuerdo a las especificaciones concernientes al espacio $\text{Spec}(D)$, y acordando que el dominio de cualquier $L \in \mathbf{LH}/\text{Spec}(D)$ sea notado como $\bar{L}$, se tiene que la primera parte de la equivalencia $\Gamma : \mathbf{LH}/\text{Spec}(D) \rightarrow \mathbf{Shv}(D)$ envía a un $L \in \mathbf{LH}/\text{Spec}(D)$ en el haz $\Gamma(L)$, el cual está definido como $\Gamma(L)(d) = \{\tau : \sigma(d) \rightarrow \bar{L} \mid L\tau = \text{id}_{\sigma(d)}\}$ para todo $d \in D$; y envía un morfismo $H : L \rightarrow M$ en la transformación natural $\Gamma(H) : \Gamma(L) \rightarrow \Gamma(M)$, cuya instancia, para todo $d \in D$, está definida como $\Gamma(H)_d(\tau) = H\tau$, para todo $\tau \in \Gamma(L)(d)$.

Ahora, para la segunda parte de la equivalencia $\Lambda : \mathbf{Shv}(D) \rightarrow \mathbf{LH}/\text{spec}(D)$, sea $p \in \sigma(D)$ y considérese su respectivo filtro primo $p^{-1}(\top)$. Dado que $p^{-1}(\top)$ es un poset filtrante en D^{op} (ver Sección IX de [29]), entonces, para todo $d \in p^{-1}(\top)$, la asignación $d \mapsto Pd$ define un cocono indexado por $p^{-1}(\top)$ para todo $F \in \mathbf{Sh}(D)$. Dado que $\mathbf{Set}$ posee colímites filtrantes, entonces F_p existe y además

$$F_p = \varinjlim_{d \in p^{-1}(\top)} F(d) = \varinjlim_{p \in \sigma(d)} F(d).$$

Observar que dichos colímites pueden ser descritos en términos de la *relación de gérmenes* (ver Sección II.5 de [30]), esto es,

$$F_p \cong (\coprod_{d \in p^{-1}(\top)} F(d)) / \sim$$

donde $(x, d) \sim (x', d')$ si y sólo si existe un $c \leq d \wedge d'$ con $p(c) = \top$, tal que $x \cdot c = x' \cdot c$. A partir de lo anterior y considerando $\overline{\Lambda(F)} = \coprod_{p \in \text{Spec}(D)} F_p$, se define el homeo local $\Lambda(F) : \overline{\Lambda(F)} \rightarrow \text{Spec}(D)$, el cual, a su vez, está definido como $\Lambda(F)([(x, d)], p) = p$. Para una transformación natural $\alpha : F \rightarrow G$, el morfismo $\Lambda(\alpha)$ se define en fibras como $\Lambda(\alpha)_p[(x, d)] = [(\alpha_d(x), d)]$.

Es bien sabido que Λ es adjunto a izquierda de Γ y que la unidad y counidad son isomorfismos. La unidad de la adjunción $\eta_F : F \rightarrow \Gamma(\Lambda(F))$ está dada para todo $d \in D$ como $\eta_{F_d}(x) = \dot{x}$, donde $\dot{x} : \sigma(d) \rightarrow \overline{\Lambda(F)}$ está definida como $\dot{x}(p) = [(x, d)], p$. A su vez, la counidad $\epsilon_L : \Lambda(\Gamma(L)) \rightarrow L$, se encuentra definida en fibras como $(\epsilon_L)_p[(\tau, d)] = \tau p$.

Como resultado de lo anterior, se obtiene que

Lema 5.1.1. *Sea D un retículo distributivo. Las categorías $\mathbf{LH}/\text{Spec}(D)$ y $\mathbf{Shv}(D)$ son equivalentes.* $\square$

5.2. Corolarios en términos de homeos locales

En esta sección se explica de manera detallada como las representaciones de riRigs desarrolladas en términos haces sobre un retículo adecuado en las secciones precedentes, pueden expresarse en términos de homeos locales. Como aplicación principal, se obtiene una demostración alternativa del teorema de descomposición subdirecta para riRigs, expuesta anteriormente en la Sección 1.2.4.

Lema 5.2.1. *Para todo riRig A , existe una biyección entre $\mathfrak{P}(A)$ y $\mathbf{dLat}(\mathcal{V}_A, 2)$.*

Prueba. Es claro que para todo Q filtro primo de A , la función característica $\mu_Q : A \rightarrow 2$ determina un único morfismo de rigs integrales. Entonces por la propiedad universal de la reticulación $\eta_A : A \rightarrow \mathcal{V}_A$, existe un único morfismo de retículos $p_Q : \mathcal{V}_A \rightarrow 2$ que factoriza a μ_Q a través de η_A , el cual, está definido para todo $\bar{a} \in \mathcal{V}_A$ como

$$p_Q(\bar{a}) = \begin{cases} \top, & a \in Q \\ \perp, & a \notin Q \end{cases}$$

Considérese $f : \mathfrak{P}(A) \rightarrow \mathbf{dLat}(\mathcal{V}_A, 2)$ como $f(Q) = p_Q$. La biyectividad de f es consecuencia del Lema 4.1.3. $\square$

Está claro que $\mathcal{V}_A$ tiene un espacio topológico asociado, cuyo conjunto de puntos está dado por $\mathbf{dLat}(\mathcal{V}_A, 2)$ y cuya topología está determinada por los abiertos básicos $\sigma(\bar{x}) = \{p \in \mathbf{dLat}(\mathcal{V}_A, 2) \mid p(\bar{x}) = \top\}$, para todo $\bar{x} \in \mathcal{V}_A$. Del Lema 5.2.1, se tiene que los puntos de dicho espacio se identifican con el conjunto de filtros primos de A , lo cual permite a su vez, identificar a los abiertos básicos $\sigma(\bar{x})$ con el conjunto de aquellos $Q \in \mathfrak{P}(A)$ tales que $p_Q(\bar{x}) = \top$. Como consecuencia de dicha identificación, es claro que $\sigma(1) = \mathfrak{P}(A)$, $\sigma(0) = \emptyset$ y para todos $x, y \in A$, se satisface que $\sigma(xy) = \sigma(x) \cap \sigma(y)$ y que $\sigma(x + y) = \sigma(x) \cup \sigma(y)$. Notar que en un riRig A arbitrario pueden existir x e y distintos tales que $\sigma(x) = \sigma(y)$.

Lo anterior, motiva la siguiente definición:

Definición 5.2.2. Sea A un riRig. El *espectro* de A , se define como el espacio topológico cuyo conjunto de puntos está dado por $\mathfrak{P}(A)$ y cuya topología está determinada por los abiertos básicos $\sigma(x) = \{Q \in \mathfrak{P}(A) \mid p_Q(\bar{x}) = \top\}$. Dicho espacio, será notado como $Spec(A)$.

Por el Lema 5.1.1 la equivalencia $\mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A) \rightarrow \mathbf{LH}/Spec(A)$ se tiene. Como se vio, ésta envía a un $F \in \mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$ en un homeo local sobre $Spec(A)$, cuya

fibra F_Q sobre un filtro primo Q en $\mathfrak{P}(A)$ puede ser descrita como

$$F_Q = \varinjlim_{p_Q(\bar{x})=\top} F(\bar{x})$$

donde x se extiende sobre los elementos de A . Dicho de otra forma, la fibra es el colímite del funtor

$$(p_Q^{-1}(\top))^{\text{op}} \longrightarrow A^{\text{op}} \xrightarrow{\eta_A} (\mathcal{V}_A)^{\text{op}} \xrightarrow{F} \mathbf{Set}$$

donde $Q = p_Q^{-1}(\top) \subseteq A$ es la inclusión usual.

Ahora, aplicando el Lema 5.1.1 al haz really local $\tilde{A}$ asociado al riRig A (ver Lema 4.1.5) y aplicando el proceso anteriormente descrito, junto con el Lema 1.2.23 en la última igualdad, se obtiene que la fibra sobre el filtro primo Q es

$$\tilde{A}_Q = \varinjlim_{p_Q(\bar{x})=\top} \tilde{A}(\bar{x}) = \varinjlim_{p_Q(\bar{x})=\top} A[x^{-1}] = A[Q^{-1}] = A/Q$$

ya que $p_Q^{-1}(\top) = Q$. Dicho de otra forma, cuando se considera al haz de la representación really local $\tilde{A} \in \mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$ como un homeo local sobre $\text{Spec}(\mathcal{V}_A)$, la fibra sobre un filtro primo Q de A , coincide con la localización de A en Q .

De vuelta a los espacios topológicos, todo punto $x : 1 \rightarrow X$ de un espacio X determina un morfismo geométrico $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{LH}/X$ cuya imagen inversa $\mathbf{LH}/X \rightarrow \mathbf{Set}$ envía a un homeo local en la fibra correspondiente sobre x . Como las imágenes inversas de morfismos geométricos preservan límites finitos y colímites, entonces preservan riRigs really local. Así, como resultado directo del Teorema 4.3.6 y del Lema 5.1.1, se obtiene el siguiente

Corolario 5.2.3. *Todo riRig puede representarse como el álgebra de secciones globales de un homeo local sobre un espacio coherente, cuyas fibras son riRigs really local.*

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos en $\mathbf{riRig}$ y sea $C = \coprod_{i \in I} A_i$ su coproducto en $\mathbf{Set}$. Considérese $\alpha : C \rightarrow I$ el morfismo en $\mathbf{Set}$, que asigna a cada par (x, i) de C , el índice i . Para lo que sigue, el conjunto de secciones de α será notado como $\Sigma(\alpha)$. Entonces:

Lema 5.2.4. *Existe un isomorfismo en $\mathbf{Set}$ entre $\prod_{i \in I} A_i$ y $\Sigma(\alpha)$.*

Prueba. Sea $x \in \prod_{i \in I} A_i$ y x_i su i -ésima proyección. Defínase

$$g : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \Sigma(\alpha)$$

como $g(x) = s_x$, donde $s_x : I \rightarrow C$ está a su vez, definida como $s_x(i) = (x_i, i)$. Claramente $g(x)$ es una sección de α . Para probar la sobreyectividad de g , sea $s \in \Sigma(\alpha)$, entonces $s(i) = (y, j) \in C$, para todo $i \in I$. Como $\alpha s = id_I$, siempre existe un elemento $s_i \in A_i$ tal que $s(i) = (s_i, i)$, por lo tanto existe un único $z \in \prod_{i \in I} A_i$ tal que $\pi_i(z) = s_i$, para todo $i \in I$. Así, $g(z) = s_z$ implica que $s_z(i) = (s_i, i) = s(i)$, para todo $i \in I$. La inyectividad de g es inmediata. Lo cual finaliza la prueba de la biyectividad de g . $\square$

Como consecuencia de lo visto en esta sección, se obtiene una prueba alternativa del Teorema 1.2.31.

Corolario 5.2.5. *Todo riRig no trivial A es producto subdirecto de riRigs really local.*

Prueba. Es claro que $\Gamma(\Lambda(\tilde{A})) \subseteq \Sigma(\Lambda(\tilde{A}))$. Ahora, por el Corolario 5.2.3, todo riRig A es isomorfo a $\Gamma(\Lambda(\tilde{A}))$ y por el Lema 5.2.4, $\Sigma(\Lambda(\tilde{A}))$ es isomorfo a $\prod_{Q \in \text{Spec}(LA)} \tilde{A}_Q$. La inclusión resultante $A \rightarrow \prod_{Q \in \text{Spec}(A)} \tilde{A}_Q$ está determinada por las localizaciones $A \rightarrow \tilde{A}_Q = A[Q^{-1}]$, para todo $Q \in \text{Spec}(A)$. $\square$

Observar que si D es un álgebra de Boole, el espacio topológico asociado $\text{Spec}(D)$ es de Stone, esto es, es compacto, Hausdorff, y 0-dimensional. Luego, la base de abiertos para el caso de retículos distributivos, se convierte en una base de clopens (ver Capítulo 11 de [12]). Así mismo, las consideraciones sobre los morfismos geométricos determinados por los puntos de un espacio topológico mencionadas previo al Corolario 5.2.3, se aplican al caso de los riRigs conexos. Por lo tanto, como resultado del Teorema 3.3.4 y nuevamente del Lema 5.1.1, se obtiene el siguiente

Corolario 5.2.6. *Todo riRig puede representarse como el álgebra de secciones globales de un homeo local sobre un espacio de Stone, cuyas fibras son riRigs conexos.*

Finalmente, dado un riRig A , es claro que todo ultrafiltro U de $\mathcal{B}(A)$ es filtro primo de A . Entonces, aplicando nuevamente el Lema 5.1.1 al haz conexo $\overline{A}$ asociado al riRig A (ver Proposición 3.1.4) y aplicando el Lema 1.2.23 sobre los elementos de U , se obtiene que la fibra sobre el ultrafiltro U es

$$\overline{A}_U = \varinjlim_{e \in U} \overline{A}(e) = \varinjlim_{e \in U} A[e^{-1}] = A[U^{-1}] = A/U$$

Expresado en otros términos; si se considera al haz de la representación de Pierce $\overline{A} \in \mathbf{Shv}(\mathcal{B}(A))$ como un homeo local sobre $\text{Spec}(\mathcal{B}(A))$, la fibra sobre un ultrafiltro U de $\mathcal{B}(A)$, coincide con la localización de A en U .

Capítulo 6

Aplicaciones.

El propósito de este capítulo es la aplicación de las representaciones obtenidas en los Capítulos 3 y 4, a la teoría de los $\mathbf{riRigs}$ pre-lineales y posteriormente, a la teoría de MV-álgebras. Con esta finalidad, se introduce la categoría de MV-rigs y se prueba en detalle, como a partir de la signatura de $\mathbf{riRigs}$, se logra un isomorfismo entre la categoría de MV-álgebras y la categoría anteriormente mencionada. Usando los resultados del Capítulo 5, se obtiene una versión análoga del teorema de representación para MV-álgebras de Dubuc-Poveda. Finalmente, se ofrece una prueba del Teorema de McNaughton análoga a la ofrecida por Dubuc y Poveda en [16].

6.1. Representación de $\mathbf{riRigs}$ prelineales.

Diversas restricciones pueden ser impuestas a un $\mathbf{riRig}$, una de ellas es la *pre-linealidad*. Esta restricción resulta ser de interés particular pues está presente a lo largo de estructuras residuadas e integrales ampliamente estudiadas en la literatura, como es el caso de las *MV-álgebras*, las *BL-álgebras* y los *retículos residuados conmutativos e integrales*, por mencionar algunas. El contenido de esta sección está dirigido a aplicar los resultados obtenidos previamente para el caso de los $\mathbf{riRigs}$ prelineales.

Definición 6.1.1. Un $\mathbf{riRig}$ A se dice *pre-lineal* si la ecuación

$$(a \rightarrow b) + (b \rightarrow a) = 1$$

se satisface, para todos $a, b \in A$.

Sea $\mathbf{plriRig}$ la categoría algebraica de $\mathbf{riRigs}$ pre-lineales en $\mathbf{Set}$ y a su vez, sea $\mathbf{plriRig} \rightarrow \mathbf{riRig}$ la subcategoría plena de aquellos $\mathbf{riRigs}$ que también son pre-lineales.

Lema 6.1.2. *Sea A un $\mathbf{riRig}$ no trivial. Si el orden canónico de A es total entonces A es really local. Si además, A es pre-lineal, la recíproca se satisface.*

Prueba. Si A es pre-lineal y really local entonces, para todos $a, b \in A$, se tiene que $1 = (a \rightarrow b)$ o $1 = (b \rightarrow a)$.

Claramente, las localizaciones en $\mathbf{plriRig}$ se calculan como en $\mathbf{riRig}$. Esto implica que todas las construcciones realizadas anteriormente para $\mathbf{riRig}$ pueden utilizarse como se venía haciendo.

Sea $\mathbf{pl}\mathcal{V}$ la subcategoría plena de $\mathcal{V}$, determinada por los objetos (D, X) tales que X es pre-lineal en $\mathbf{Shv}(D)$. Entonces el funtor $\mathbf{riRig} \rightarrow \mathcal{V}$ se restringe a un funtor $\mathbf{plriRig} \rightarrow \mathbf{pl}\mathcal{V}$. Este hecho, permite enunciar una versión análoga del Teorema 3.3.3 como se muestra a continuación:

Corolario 6.1.3. *La asignación $A \mapsto (\mathcal{B}(A), \bar{A})$ se extiende a un funtor*

$$\mathbf{plriRig} \longrightarrow \mathbf{pl}\mathcal{V}$$

que es fiel y pleno; y además tiene como adjunto a derecha al funtor Γ .

Ahora, sea $\mathbf{pl}\mathcal{A}$ la subcategoría plena de $\mathcal{A}$, determinada por los objetos (D, X) tales que X es pre-lineal en $\mathbf{Shv}(D)$, entonces, la restricción del funtor $\mathbf{riRig} \rightarrow \mathcal{A}$ del Teorema 4.3.6 a un funtor $\mathbf{plriRig} \rightarrow \mathbf{pl}\mathcal{A}$, junto con el Lema 6.1.2, producen el siguiente resultado, análogo al Corolario 6.1.3:

Corolario 6.1.4. *La asignación $A \mapsto (\mathcal{V}_A, \tilde{A})$ se extiende a un funtor*

$$\mathbf{plriRig} \longrightarrow \mathbf{pl}\mathcal{A}$$

el cual, es pleno y fiel. Dicho funtor es además, adjunto a izquierda del funtor Γ .

Así pues, todo $\mathbf{riRig}$ pre-lineal A es, functorialmente, tanto el $\mathbf{riRig}$ de secciones globales de un haz $\bar{A}$ en $\mathbf{Shv}(\mathcal{B}(A))$ con fibras conexas, como, por el Lema 6.1.2, el $\mathbf{riRig}$ de secciones globales de un haz $\tilde{A}$ en $\mathbf{Shv}(\mathcal{V}_A)$ con fibras totalmente ordenadas.

6.2. Teorema de Dubuc-Poveda.

Restricciones adicionales en la teoría algebraica de $\mathbf{riRigs}$ pre-lineales proveen nuevos resultados de representaciones por haces con fibras totalmente ordenadas. Un ejemplo concreto viene dado por las MV-álgebras, esto es, $\mathbf{riRigs}$

pre-lineales que satisfacen la doble negación ($\neg\neg x = x$, con $\neg x = x \rightarrow 0$) y la condición de Wajsberg $((y \rightarrow x) \rightarrow y = (x \rightarrow y) \rightarrow x)$. En [15], Dubuc y Poveda elaboran una representación por haces sobre un espacio topológico para MV-álgebras. En esta sección se muestra como las técnicas de representación para riRigs desarrolladas hasta ahora, restringidas para el caso de MV-álgebras, conducen a la representación de Dubuc-Poveda.

6.2.1. MV-álgebras como riRigs

La íntima relación entre MV-álgebras y álgebras de Wajsberg es bien conocida (ver Sección 4.2 de [8]). En esta sección se presenta una variante de esta relación elaborada por M. Menni en términos de riRigs.

Una *MV-álgebra* se define usualmente como una estructura $(A, \oplus, 0, \neg)$ tal que $(A, \oplus, 0)$ es un monoide conmutativo y $\neg : A \rightarrow A$ es una función tal que las siguientes ecuaciones se satisfacen:

1. $\neg\neg x = x$,
2. $x \oplus (\neg 0) = \neg 0$,
3. $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$.

Esto determina una categoría algebraica que será denotada como $\mathbf{MV} \rightarrow \mathbf{Set}$. Toda MV-álgebra tiene una estructura de retículo asociada y una operación binaria denominada residuo (ver Lema 1.1.4(iii) en [8] donde la operación residuo se nota como $\ominus$). Es bien sabido que en toda MV-álgebra M se satisfacen las propiedades generales siguientes, para todos x, y y z elementos de M (ver [8]): $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$, $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$ y $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$. También es cierto (ver [16]) que $0 \leq x$ y $x \ominus y \leq z$ si y sólo si $x \leq y \oplus z$, donde $x \ominus y = \neg(\neg x \oplus y)$. De estos hechos, se deduce que $x \vee y \leq x \oplus y$. Con la finalidad de explicitar aún más lo anterior y así poder relacionarlo con los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo, se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones.

Definición 6.2.1. Un riRig A se dice *involutivo* si $\neg\neg a = a$ para todo $a \in A$.

Lema 6.2.2. Si A es un riRig, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. A es involutivo.
2. Para todos $x, y \in A$, $x \rightarrow y = \neg(x \cdot \neg y)$.
3. Para todos $x, y \in A$, $x \rightarrow y = \neg y \rightarrow \neg x$.

Prueba. Para probar que el primer item implica el segundo, se calcula:

$$\neg(x \cdot \neg y) = (x \cdot \neg y) \rightarrow 0 = x \rightarrow (\neg y \rightarrow 0) = x \rightarrow \neg \neg y = x \rightarrow y$$

para todos $x, y \in A$. El segundo item implica el primero, pues

$$x = 1 \rightarrow x = \neg(1 \cdot \neg x) = \neg \neg x$$

para todo $x \in A$. Los primeros dos items (equivalentes) claramente implican el tercero; y para probar que el tercero implica el primero, calcular:

$$y = 1 \rightarrow y = \neg y \rightarrow \neg 1 = \neg y \rightarrow 0 = \neg \neg y$$

para todos $x, y \in A$. □

La siguiente, es otra caracterización relevante de los riRigs involutivos.

Lema 6.2.3. *Un riRig A es involutivo si y sólo si, las siguientes condiciones se satisfacen:*

1. *El poset $(A, \leq)$ tiene ínfimos finitos (denotado por $\wedge$),*
2. *Para todos $x, y \in A$, $x \wedge y = \neg((\neg x) + (\neg y))$.*

En este caso, $\neg(x \wedge y) = (\neg x) + (\neg y)$.

Prueba. Si se satisfacen las dos condiciones anteriores, entonces

$$x = x \wedge x = \neg((\neg x) + (\neg x)) = \neg \neg x$$

Por otro lado, supóngase que A es involutivo y sea $a \in A$, entonces se tiene que $a \leq \neg((\neg x) + (\neg y))$ si y sólo si $(\neg x) + (\neg y) \leq \neg a$, lo cual equivale a decir que $\neg x \leq \neg a$ y que $\neg y \leq \neg a$; esto a su vez, sucede si y sólo si $a \leq x$ y $a \leq y$. Luego $\neg((\neg x) + (\neg y))$ es el ínfimo de x e y . □

Definición 6.2.4. Se dice que un riRig satisface la *condición de Wajsberg* si

$$(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$$

para todos $x, y \in A$.

Notar que en riRigs, la condición anterior es más fuerte que la condición de la Definición 6.2.1.

Lema 6.2.5. *Si A es un riRig que satisface la condición de Wajsberg, entonces $\neg \neg x = x$ para todo $x \in A$.*

Prueba. Considerando $y = 0$, la condición de Wajsberg implica que

$$\neg\neg x = (0 \rightarrow x) \rightarrow x$$

Como A es integral, $\neg\neg x = 1 \rightarrow x = x$. □

El siguiente resultado, es esencialmente el Lemma 1.1.2 en [8].

Lema 6.2.6. *Si A es un riRig que satisface la condición de Wajsberg, las condiciones siguientes:*

1. $x \leq y$,
2. $x \cdot \neg y = 0$,
3. $y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$,
4. *Existe un $z \in A$ tal que $\neg x \rightarrow z = y$,*

son equivalentes para todos $x, y \in A$.

Prueba. El primer item implica el segundo, pues $x \leq y$ si y sólo si

$$1 = x \rightarrow y = \neg(x \cdot \neg y)$$

Si el segundo item se satisface, se tiene que

$$(y \rightarrow x) \rightarrow x = (x \rightarrow y) \rightarrow y = \neg(x \cdot \neg y) \rightarrow y = \neg 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = y$$

lo cual prueba el tercer item. Si el tercer item se cumple, entonces

$$y = (y \rightarrow x) \rightarrow x = \neg x \rightarrow \neg(y \rightarrow x)$$

luego, se puede tomar a $z = \neg(y \rightarrow x)$. Por último, si el cuarto item se satisface, entonces

$$x \rightarrow y = x \rightarrow (\neg x \rightarrow z) = (x \cdot \neg x) \rightarrow z = 0 \rightarrow z = 1$$

esto es, el primer item se cumple. □

Esta descripción del orden parcial permite una formulación alternativa de la condición de Wajsberg. (Ver el primer item de la Proposición 1.1.5 en [8].)

Proposición 6.2.7. *Si A es un riRig, las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *A satisface la condición de Wajsberg.*

2. Para todos $x, y \in A$, $x + y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$.

3. Las dos condiciones siguientes se satisfacen:

a) A es involutivo y

b) Para todos $x, y \in A$, $x \wedge y = x \cdot (x \rightarrow y)$.

Prueba. Como $+$ es conmutativa, el segundo ítem implica la condición de Wajsberg. Por otro lado, claramente se tiene que

$$x \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x \geq y$$

Asúmase entonces que $x \leq a$ y $y \leq a$. La primera desigualdad implica que $a \rightarrow y \leq x \rightarrow y$ y, por el Lema 6.2.6, la segunda desigualdad implica que

$$a = (a \rightarrow y) \rightarrow y$$

Se tiene entonces que

$$((x \rightarrow y) \rightarrow y) \cdot (a \rightarrow y) \leq ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \cdot (x \rightarrow y) \leq y$$

luego

$$(x \rightarrow y) \rightarrow y \leq (a \rightarrow y) \rightarrow y = a$$

lo cual prueba que $(x \rightarrow y) \rightarrow y = x + y$. Así pues, los primeros dos ítems son equivalentes. Se verifica que el segundo y tercer ítem son equivalentes. Si el segundo ítem se satisface, entonces $x = x + 0 = (x \rightarrow 0) \rightarrow 0 = \neg\neg x$. Luego, se puede asumir que A es involutivo y a su vez, probar que el segundo ítem es equivalente a $\beta(b)$. Para tal efecto, observar que $x \cdot (x \rightarrow y) \leq y$ por la adjunción, y que $x \cdot (x \rightarrow y) \leq x$ por integralidad. Por lo tanto, se tiene que $x \cdot (x \rightarrow y) \leq x \wedge y$. De manera similar, se tiene que $x \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y$ y que $y \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y$, así pues, $x + y \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y$. Sólo falta verificar que las condiciones siguientes

1. Para todo $x, y \in A$, $(x \rightarrow y) \rightarrow y \leq x + y$.

2. Para todo $u, v \in A$, $u \wedge v \leq u \cdot (u \rightarrow v)$.

son equivalentes (tener en cuenta, que se A se asume involutivo). Supóngase que la primera desigualdad se satisface y considérense $x = \neg v$ e $y = \neg u$. Entonces

$$\neg(\neg v + \neg u) \leq \neg((\neg v \rightarrow \neg u) \rightarrow \neg u)$$

y, por los Lemas 6.2.3 y 6.2.2, se tiene que

$$v \wedge u \leq \neg\neg((\neg v \rightarrow \neg u) \cdot \neg\neg u) = (\neg v \rightarrow \neg u) \cdot u = u \cdot (u \rightarrow v)$$

así, el segundo ítem se cumple. Por otro lado, sean $u = \neg y$ y $v = \neg x$ entonces

$$\neg y \wedge \neg x \leq \neg y \cdot (\neg y \rightarrow \neg x)$$

Nuevamente, por los Lemas 6.2.3 y 6.2.2, se tiene que

$$y + x \geq \neg(\neg y \cdot (\neg y \rightarrow \neg x)) = \neg((x \rightarrow y) \cdot \neg y) = (x \rightarrow y) \rightarrow y$$

lo cual implica que la primera desigualdad se satisface. $\square$

Este resultado permite enunciar la siguiente

Definición 6.2.8. Un *MV-rig* es un riRig $(A, \cdot, 1, +, 0, \rightarrow)$ que satisface las condiciones equivalentes de la Proposición 6.2.7.

A continuación se prueba que los MV-rigs son pre-lineales.

Lema 6.2.9. Si A es un riRig, entonces, se tiene lo siguiente.

1. Si A tiene ínfimo entonces $x \rightarrow y = (x + y) \rightarrow y$ para todos $x, y \in A$.
2. Si A es un MV-rig entonces $(x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow x) = y \rightarrow x$ para todos $x, y \in A$.

Prueba. Como el funtor contravariante $(_) \rightarrow y : A \rightarrow A^{\text{op}}$ envía colímites en A en límites en A , la ecuación $(x + y) \rightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow y)$ se satisface. Como $y \rightarrow y = 1$ por integralidad, el primer ítem se tiene.

Para probar el segundo ítem, calcular:

$$(x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow x) = ((x + y) \rightarrow y) \rightarrow ((y + x) \rightarrow x) = *_0$$

usando la integralidad y el ínfimo. Dado que A también es involutiva, entonces:

$$*_0 = (\neg y \rightarrow \neg(x+y)) \rightarrow (\neg x \rightarrow \neg(y+x)) = \neg x \rightarrow ((\neg y \rightarrow \neg(x+y)) \rightarrow \neg(x+y)) = *_1$$

y como A es un MV-rig, se tiene que

$$*_1 = \neg x \rightarrow (\neg y + \neg(x+y)) = \neg(\neg y + \neg(x+y)) \rightarrow x = (y \wedge (x+y)) \rightarrow x = y \rightarrow x$$

para todos $x, y \in A$. $\square$

Así pues, se obtiene el resultado enunciado inicialmente

Lema 6.2.10. Si A es un MV-rig entonces $(x \rightarrow y) + (y \rightarrow x) = 1$ para todos $x, y \in A$.

Prueba. El resultado se obtiene al calcular:

$$(x \rightarrow y) + (y \rightarrow x) = ((x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow x)) \rightarrow (y \rightarrow x) = (y \rightarrow x) \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$$

utilizando el Lema 6.2.9. $\square$

Surge entonces la pregunta: Bajo qué condiciones un riRig satisface la condición de pre-linealidad? Para responderla, se establece la siguiente

Definición 6.2.11. Para todos $x, y \in A$, se define $x \oplus y$ como $\neg((\neg x) \cdot (\neg y))$.

Esto determina una función $\oplus : A \times A \rightarrow A$.

Lema 6.2.12. Si A es un riRig, las condiciones siguientes son equivalentes:

1. A es involutivo;
2. Para todos $a \in A$, $a \oplus 0 = a$.

Más aún, la tripla $(A, \oplus, 0)$ es un monoide conmutativo tal que $a \oplus 1 = 1$ para todo $a \in A$, y $x \oplus y = \neg x \rightarrow y$ para todos $x, y \in A$.

Prueba. Como A es integral, entonces $a \oplus 0 = \neg(\neg a \cdot \neg 0) = \neg(\neg a \cdot 1) = \neg\neg a$. Luego, los dos items son equivalentes. La operación $\oplus$ es claramente conmutativa. Para probar la asociatividad, nótese que

$$x \oplus (y \oplus z) = \neg(\neg x \cdot \neg(\neg y \cdot \neg z)) = \neg(\neg x \cdot (\neg y \cdot \neg z))$$

y, similarmente $(x \oplus y) \oplus z = \neg((\neg x \cdot \neg y) \cdot \neg z)$, luego la asociatividad de $\oplus$ se sigue de la de $\cdot$. Por lo tanto $(A, \oplus, 0)$ es de hecho, un monoide conmutativo. Además, $a \oplus 1 = \neg(\neg a \cdot \neg 1) = \neg(\neg a \cdot 0) = \neg 0 = 1$. Finalmente, el cálculo

$$\neg(\neg x \cdot \neg y) = (\neg x \cdot \neg y) \rightarrow 0 = \neg x \rightarrow \neg\neg y = \neg x \rightarrow y$$

completa la prueba. $\square$

A continuación, se relaciona la operación $\oplus$ y la condición de Wajsberg de la Definición 6.2.4.

Corolario 6.2.13. Si A es un riRig involutivo, entonces satisface la condición de Wajsberg si y sólo si $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$, para todos $x, y \in A$.

Prueba. Claramente, se tiene que

$$\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg\neg x \rightarrow y) \oplus y = \neg(x \rightarrow y) \oplus y = \neg\neg(x \rightarrow y) \rightarrow y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$$

y, similarmente, $\neg(\neg y \oplus x) \oplus x = (y \rightarrow x) \rightarrow x$. $\square$

Por la Definición 6.2.8, es claro que los MV-rigs, forman una categoría algebraica $\mathbf{mvRig} \rightarrow \mathbf{Set}$. Además, los resultados anteriores, implican que existe un funtor $\mathbf{mvRig} \rightarrow \mathbf{MV}$ que envía al MV-rig $(A, \cdot, 1, +, 0, \rightarrow)$ en la MV-álgebra $(A, \oplus, \neg)$, definiendo las operaciones como $\neg x = x \rightarrow 0$ y $x \oplus y = \neg((\neg x)(\neg y))$, para todos $x, y \in A$. Dicho funtor, es una equivalencia; de hecho, un isomorfismo. Su inversa $\mathbf{MV} \rightarrow \mathbf{mvRig}$ envía a una MV-álgebra $(A, \oplus, \neg)$ en el MV-rig con el mismo conjunto subyacente y las operaciones definidas como

$$\begin{aligned} x + y &= \neg(\neg x \oplus y) \oplus y & 1 &= \neg 0 \\ xy &= \neg(\neg x \oplus \neg y) & x \multimap y &= \neg x \oplus y \end{aligned}$$

para todos $x, y \in A$. Dicho isomorfismo, en el contexto del álgebra universal, se corresponde con el hecho de que las MV-álgebras y los MV-rigs, son *equivalentes por términos*. Vale la pena agregar, que para toda MV-álgebra A , el semirretículo $(A, +, 0)$, se extiende a una estructura de retículo, definiendo $x \wedge y = \neg((\neg x) + (\neg y))$, para todos $x, y \in A$. Observar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $nx = \neg(\neg x)^n$.

Por el Lema 6.2.10, todo MV-rig es pre-lineal, luego, del Corolario 5.2.3 y del Lema 6.1.2, se deduce que todo MV-rig es el álgebra de secciones globales de un homeo local cuyas fibras son MV-rigs totalmente ordenados.

6.2.2. Representación para MV-álgebras

A partir de ahora y hasta el final de esta sección, sea $M = (A, \oplus, \neg)$ una MV-álgebra y sea $R = (A, \cdot, 1, +, 0, \multimap)$ su MV-rig asociado. El *orden natural* de M puede definirse diciendo que $x \leq_n y$ si $x \cdot (\neg y) = 0$. (Ver Lema 1.1.2 en [8].) Esto equivale a decir que $x \leq \neg(\neg y) = y$, donde, $\leq$ es el orden canónico del riRig R . Así, $x \leq_n y$ en M si y solo si $x \leq y$ en R . Es decir, el orden natural de A como una MV-álgebra, coincide con el orden canónico de A como un riRig; por tal motivo, la notación $\leq_n$ será omitida y sólo se usará la notación $\leq$.

Un subconjunto I de una MV-algebra M se dice un *ideal* si: *i)* $0 \in I$, *ii)* si $x, y \in I$ entonces $x \oplus y \in I$ y *iii)* si $x \leq y$ e, $y \in I$ entonces $x \in I$. El ideal se dice *propio* si $1 \notin I$ y se dice *primo* si es propio y para todos $x, y \in A$, se tiene que $(x \cdot (\neg y)) \in I$ o $(y \cdot (\neg x)) \in I$. En lo que sigue, se empleará la siguiente caracterización para los filtros primos (ver [15]): $I \rightarrow M$ es primo si y solo si, es propio y además la condición $x, y \in M$, $x \wedge y \in I$ implica que

$x \in I$ o $y \in I$, se satisface para todos $x, y \in M$. Siguiendo la notación de *op.cit*, el conjunto de filtros primos de M se escribirá como Z_M .

A continuación, se relacionan los ideales primos de una MV-álgebra M , con los filtros primos del MV-rig subyacente R .

Lema 6.2.14. *Para toda MV-álgebra M , se satisface lo siguiente:*

1. *Para todo I en Z_M , el conjunto $Q_I = \{\neg x \mid x \in I\}$ es un elemento de $\mathfrak{P}(R)$.*
2. *Para todo Q en $\mathfrak{P}(R)$, el conjunto $I_Q = \{\neg x \mid x \in Q\}$ es un elemento de Z_M .*

Prueba. Se verifica el ítem 1. Sea I un ideal primo en M y supóngase que $x, y \in Q_I$, entonces, como la negación es idempotente, se tiene que $\neg x, \neg y \in I$, luego, $\neg x \oplus \neg y = \neg(xy) \in I$, pues I es un ideal, por lo tanto, $xy \in Q_I$. Para probar que Q_I es un conjunto superior, supóngase que $x \leq y$ con $x \in Q_I$, entonces $\neg y \leq \neg x$, ya que la negación invierte el orden. Como $\neg x \in I$, entonces $\neg y \in I$, pues I es un ideal, luego $y \in Q_I$. Esto es, Q_I es un filtro de M . Finalmente, supóngase que $x \vee y \in Q_I$, entonces $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y \in I$. Como $I \in Z_M$, se tiene que $\neg x \in I$ o $\neg y \in I$, por lo tanto $x \in Q_I$ o $y \in Q_I$. Si $0 \in Q_I$, entonces $\neg 0 = 1 \in I$, luego $1 \in I$, lo cual es absurdo pues I es propio. La prueba del ítem 2. es similar. $\square$

Como consecuencia directa del Lema 6.2.14 y del hecho de que la negación es idempotente, se obtiene que:

Corolario 6.2.15. *Para toda MV-álgebra M , existe una biyección entre $\mathfrak{P}(R)$ y Z_M .*

Prueba. El resultado se sigue de asignar a cada filtro primo Q en $\mathfrak{P}(R)$, el conjunto $I_Q = \{\neg x \mid x \in Q\}$. $\square$

Como se sabe (ver [15]), toda MV-álgebra M tiene un espacio topológico asociado, cuyo conjunto de puntos está dado por Z_M y cuya topología está determinada por los abiertos básicos de la forma $W_a = \{P \in Z_M \mid a \in P\}$, para todo $a \in M$, los cuales, a su vez satisfacen $W_0 = Z_M$, $W_1 = \emptyset$ y $W_b \cap W_c = W_{b \oplus c}$, para todos $b, c \in M$. Dicha topología se denomina *CoZariski* y el espacio topológico se nota como $Spec_M$.

Teniendo en cuenta que el espectro de R (ver Definición 5.2.2) es el espacio topológico cuyos puntos están dados por $\mathfrak{P}(R)$ y cuya topología está determinada por los abiertos básicos $\sigma(x) = \{Q \in \mathfrak{P}(R) \mid p_Q(\bar{x}) = \top\}$, para todo $x \in R$, se obtiene la siguiente

Proposición 6.2.16. *La biyección del Corolario 6.2.15, se extiende a un homeomorfismo entre los espacios $\text{Spec}(R)$ y Spec_M .*

Prueba. Sea $\varphi : \mathfrak{P}(R) \rightarrow Z_M$, con $\varphi(Q) = I_Q$, la biyección del Corolario 6.2.15. Para probar que φ es continua, sea W_x un abierto básico de Spec_M . Un elemento Q de $\mathfrak{P}(A)$ pertenece a $\varphi^{-1}(W_x)$ si y sólo si $I_Q \in W_x$, lo cual equivale a decir que $x \in I_Q$. La idempotencia de la negación hace que lo anterior suceda si y sólo si $\neg x \in Q$. Por el Lema 5.2.1, esto es equivalente a que $p_Q(\neg x) = \top$, lo cual, por definición de los abiertos básicos de $\text{Spec}(R)$ implica que $Q \in \sigma(\neg x)$. Por lo tanto $\varphi^{-1}(W_x) = \sigma(\neg x)$. Más aún, φ es abierta. Para verificarlo, sea $\sigma(y)$ un abierto básico de $\text{Spec}(R)$. Entonces, $I \in \varphi(\sigma(y))$, si y sólo si $Q_I \in \sigma(y)$, lo cual, nuevamente por definición de los abiertos básicos de $\text{Spec}(R)$, equivale a que $p_{Q_I}(\bar{y}) = \top$. Por el Lema 5.2.1, lo anterior sucede si y sólo si $y \in Q_I$, lo cual equivale a decir que $\neg y \in I$; esto es $I \in W_{\neg y}$. Así pues, $\varphi(\sigma(y)) = W_{\neg y}$. Por lo tanto, la Proposición se tiene. $\square$

Toda función continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos induce un morfismo geométrico $\mathbf{LH}/X \rightarrow \mathbf{LH}/Y$ entre los correspondientes topos de haces. La imagen inversa $f^* : \mathbf{LH}/Y \rightarrow \mathbf{LH}/X$ envía a un homeo local sobre Y , en su pullback a lo largo de $f : X \rightarrow Y$ (calculado como en la categoría de espacios topológicos). (Ver Teorema II.9.2 en [30].) En particular, para cualquier homeo local $E \rightarrow Y$, la fibra $(f^*E)_x$ sobre $x \in X$ puede ser identificada con la fibra $E_{f(x)}$ de $E \rightarrow Y$ sobre $f(x)$.

Concretamente, el isomorfismo φ de la Proposición 6.2.16 induce una equivalencia $\varphi^* : \mathbf{LH}/\text{Spec}_M \rightarrow \mathbf{LH}/\text{Spec}(\mathcal{V}_M)$. La representación de Dubuc-Poveda para la MV-álgebra M consiste de un espacio E_M cuyo conjunto subyacente es el coproducto $\sum_{I \in Z_M} M/I$, donde M/I es el cociente de M por el ideal primo I . La topología en E_M es aquella que hace que la función $E_M \rightarrow Z_M$, que asigna a cada elemento del coproducto su respectivo índice, sea un homeo local cuya álgebra de secciones globales es isomorfa a M . Ahora, a partir del cálculo

$$(\varphi^*E_M)_Q = (E_M)_{\varphi(Q)} = M/(I_Q)$$

obsérvese que, como $M \rightarrow M/(I_Q)$ es la manera universal de colapsar todos los elementos del ideal $I_Q \rightarrow M$ en 0, entonces, también posee una manera universal de invertir a $\varphi^{-1}(I_Q) = Q_{I_Q} = Q$. Esto es, $(\varphi^*E_M)_Q = R/Q = \hat{R}_Q$, donde $\hat{R}_Q$ es la fibra de la representación para riRigs, como se explicó en la Sección 5.2. Dicho de otra forma, la representación a través de homeos locales

de [15] es esencialmente la misma que se obtuvo en este trabajo.

Alternativamente, en 2.3 de *op.cit.* se prueba que el homeo local $E_M \rightarrow Z_M$ es el resultado de aplicar la *construcción de Godement* al prehaz que envía a W_a en $M/(a)$, donde (a) es el ideal generado por $a \in M$. Nuevamente, $M/(a)$ es, salvo la equivalencia entre MV-álgebras y MV-rigs, lo mismo que $R/\langle \neg a \rangle$. Así, nuevamente puede verse, que las construcciones realizadas para riRigs, restringidas a MV-álgebras, producen esencialmente el mismo resultado que las de Dubuc y Poveda.

La principal diferencia con el resultado de [15], es que la categoría de representaciones para riRigs es mucho más pequeña. Nótese, que en particular, las construcciones hechas en este trabajo, tratan exclusivamente con funciones coherentes (o espectrales) en vez de funciones solamente continuas.

Apéndice

Apéndice A

Reticulación en topos localicos coherentes.

En la literatura sobre representación por haces de varios tipos de álgebras (ver [24] para anillos conmutativos con unidad y [4] para BL-álgebras, por ejemplo) existe la evidencia de poder asociar un retículo distributivo con “buenas propiedades” a la estructura que se está representando; dicho retículo suele denominarse reticulación. En este apéndice se muestra que la existencia de la reticulación de un $\mathbf{riRig}$ A no es un fenómeno exclusivo de $\mathbf{Set}$ sino que se extiende a $\mathbf{riRig}$ en $\mathbf{Shv}(D)$.

Lema A.0.1. *Para todo $\mathbf{riRig}$ R en $\widehat{D}$ y $d \in D$, el siguiente diagrama es un pushout en $\mathbf{Set}$.*

$$\begin{array}{ccc} R(\top) & \xrightarrow{\eta_\top} & \mathcal{V}_{R(\top)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ R(d) & \xrightarrow{\eta_d} & \mathcal{V}_{R(d)} \end{array}$$

Donde $\mathcal{V}_{R(d)}$ es la reticulación en $\mathbf{Set}$ del $\mathbf{riRig}$ $R(d)$.

Prueba. Sea M un retículo distributivo en $\mathbf{Set}$ y sean $a : R(d) \rightarrow M$ y $b : \mathcal{V}_{R(\top)} \rightarrow M$ morfismos de retículos tales que $a\eta_\top = b(-) \cdot d$, en donde $(-) \cdot d : R(\top) \rightarrow R(d)$ hace referencia a la restricción en d . Por otro lado,

sea $k_d : \mathcal{V}_{R(\top)} \rightarrow \mathcal{V}_{R(d)}$ la restricción en d , definida como $k_d(\eta x) = \eta_d(x \cdot d)$.

$$\begin{array}{ccc}
 R(\top) & \xrightarrow{\eta_\top} & \mathcal{V}_{R(\top)} \\
 \downarrow & (*) & \downarrow k_d \\
 R(d) & \xrightarrow{\eta_d} & \mathcal{V}_{R(d)} \\
 & \searrow b & \nearrow a \\
 & & M
 \end{array}$$

(Note: A dashed arrow labeled f also points from $\mathcal{V}_{R(d)}$ to M .)

Como $(\eta_d, \mathcal{V}_{R(d)})$ es la reticulación de $R(d)$, existe un único morfismo de retículos $f : \mathcal{V}_{R(d)} \rightarrow M$ tal que $f\eta_d = b$. Entonces, componiendo con $(-) \cdot d$ se obtiene que $f\eta_d(-) \cdot d = b(-) \cdot d$ luego, $f\eta_d(-) \cdot d = a\eta_\top$ por hipótesis. Como $(*)$ conmuta, se tiene que $\eta_d(-) \cdot d = k_d\eta_\top$, entonces, $f k_d\eta_\top = a\eta_\top$, luego, por la sobreyectividad de $\eta_\top$ se concluye que $f k_d = a$. La unicidad de f se sigue de la sobreyectividad de η_d . $\square$

Como consecuencia del Lema A.0.1, es claro que la asignación $LR(d) = \mathcal{V}_{R(d)}$ define un pre haz sobre D . Dicho pre haz es un retículo distributivo en dicho topos.

Lema A.0.2. *Para todo $\text{riRig } R$ en $\widehat{D}$, la asignación $\eta : R \rightarrow \mathcal{V}_R$ es un morfismo de rigs integrales en $\widehat{D}$.*

Sea R un $\text{riRig } R$ en $\widehat{D}$ y $c \leq d$ en D .

$$\begin{array}{ccc}
 R(\top) & \longrightarrow & \mathcal{V}_{R(\top)} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R(d) & \longrightarrow & \mathcal{V}_{R(d)} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R(c) & \longrightarrow & \mathcal{V}_{R(c)}
 \end{array}$$

Como los cuadrados exterior y superior son pushouts, el diagrama inferior es un pushout, en especial, conmuta. Por construcción, es claro que η es un morfismo de rigs integrales.

Lema A.0.3. *Sea R un riRig en $\widehat{D}$. Para todo retículo distributivo M en $\widehat{D}$ y todo morfismo de rigs $\alpha : R \rightarrow M$, existe un único morfismo de riRigs $\alpha' : \mathcal{V}_R \rightarrow M$ tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{V}_R \\
 \searrow \alpha & & \downarrow \alpha' \\
 & & M
 \end{array}$$

conmuta.

Prueba. Sea $c \leq d$ en D . La prueba se sigue de aplicar el Lema A.0.2 al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \alpha_d & & \\
 R(d) & \xrightarrow{\eta_d} & \mathcal{V}_{R(d)} & \xrightarrow{\alpha'_d} & M(d) \\
 \downarrow & & \downarrow k_d & & \downarrow \\
 R(c) & \xrightarrow{\eta_c} & \mathcal{V}_{R(c)} & \xrightarrow{\alpha'_c} & M(c) \\
 & & \alpha_c & &
 \end{array}$$

□

Proposición A.0.4. *Los topos localicos coherentes, poseen reticulaciones.*

Prueba. Sea R un riRig en $\mathbf{Shv}(D)$. Claramente R es un prehaz y en particular, es un riRig en $\widehat{D}$. Por el Lema A.0.3, $\eta : R \rightarrow \mathcal{V}_R$ es la reticulación de R en $\widehat{D}$. Sea $\mathbf{a} : \widehat{D} \rightarrow \mathbf{Shv}(D)$ el adjunto a izquierda de la inclusión. Aplicando $\mathbf{a}$ a η , se obtiene que $\mathbf{a}\eta : R \rightarrow \mathbf{a}\mathcal{V}_R$, pues $\mathbf{a}R = R$. Como $\mathbf{a}$ preserva límites finitos, en especial productos, entonces $\mathbf{a}\mathcal{V}_R$ es un retículo distributivo en $\mathbf{Shv}(D)$. Es claro que $\mathbf{a}\mathcal{V}_R$ tiene la propiedad universal del Lema A.0.3 para todo retículo distributivo M en $\mathbf{Shv}(D)$. □

Apéndice B

riRigs es coextensiva.

En este apéndice se prueba que la categoría algebraica de riRigs es coextensiva y se muestra como dicha propiedad categórica está relacionada con las descomposiciones directas de un álgebra concreta. Para todo lo concerniente con categorías extensivas, se adoptan las definiciones y la terminología de [5]. Para la co-extensividad, se hace uso de las nociones expuestas por Lawvere en [28].

Definición B.0.1. Una categoría se dice *extensiva* si tiene coproductos finitos y para cada par de objetos X_1, X_2 de $\mathcal{C}$, los funtores canónicos $1 \rightarrow \mathcal{C}/0$ y $\mathcal{C}/X_1 \times \mathcal{C}/X_2 \rightarrow \mathcal{C}/X_1 + X_2$ son equivalencias.

Por ejemplo, cualquier topos y la categoría de espacios topológicos son extensivas. Si la opuesta $\mathcal{C}^{op}$ de una categoría $\mathcal{C}$ es extensiva entonces se dice que $\mathcal{C}$ es *co-extensiva*. En lo sucesivo, se hará uso de la siguiente caracterización de categorías extensivas cuya prueba se encuentra en [5].

Lema B.0.2. Una categoría con límites finitos es extensiva si y sólo si el pullback a lo largo de inyecciones de coproductos es el objeto inicial y en todo diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{a_1} & A & \xleftarrow{a_2} & A_2 \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \\ 1 & \xrightarrow{\rho_1} & 1 + 1 & \xleftarrow{\rho_2} & 1 \end{array}$$

tal que los cuadrados son pullbacks entonces $A \cong A_1 + A_2$.

Proposición B.0.3. La categoría **riRig** es co-extensiva.

Prueba. Se procede demostrar el dual del Lema B.0.2. Para todo par de riRigs A y B , el pushout P de las proyecciones $A \leftarrow A \times B \rightarrow B$ es el objeto

terminal ya que, al tener que $\pi_1(1, 0) = 1$ y $\pi_2(1, 0) = 0$ entonces en P se tiene que $1 = 0$.

Por otro lado, observar que el álgebra de heyting de dos elementos 2 es también el *riRig* inicial. Entonces, sea $f : 2 \times 2 \rightarrow A$ un morfismo de *riRigs* y asúmase que los diagramas

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \xleftarrow{\pi_0} & 2 \times 2 & \xrightarrow{\pi_1} & 2 \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \\ A_0 & \longleftarrow & A & \longrightarrow & A_1 \end{array}$$

son pushout. El elemento $(1, 0)$ en 2×2 tiene complemento $(0, 1)$ y así f está determinada por $a_0 = f(1, 0)$ y también por $a_1 = f(0, 1)$. La propiedad universal de los pushouts implica que $A \rightarrow A_0$ coincide con $A \rightarrow A[a_0^{-1}]$ y que $A \rightarrow A_1$ coincide con $A \rightarrow A[a_1^{-1}]$. Para completar la prueba, basta con verificar que si a es complementado en A entonces el morfismo canónico $A \rightarrow A[a^{-1}] \times A[b^{-1}] = (\downarrow a) \times (\downarrow b)$ es un isomorfismo, donde b es el complemento de a . La sobreyectividad es fácil, ya que si $x \leq a$ y $y \leq b$ entonces $x + y \in A$ es enviado en $(ax, by) = (x, y) \in (\downarrow a) \times (\downarrow b)$. Para probar la inyectividad supóngase que $u, v \in A$ son tales que $(au, bu) = (av, bv)$. Entonces como

$$u = (a + b)u = au + bu = av + bv = (a + b)v = v$$

el enunciado se tiene. □

Bibliografía

- [1] BALBES, R., AND DWINGER, P. *Distributive lattices*. Melinda Inn, 1975.
- [2] BLOK, W., AND RAFTERY, J. Varieties of commutative residuated integral pomonoids and their residuation subreducts. *Journal of Algebra* 190, 2 (1997), 280–328.
- [3] BREZULEANU, A., AND DIACONESCU, R. Sur la duale de la catégorie des treillis. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées* 14, 3 (1969), 311–323.
- [4] BUŞNEAG, D., AND PICIU, D. Residuated lattice of fractions relative to a $\wedge$ -closed system. *Bull. Math. Soc. Math. Roumanie* 97 (2006).
- [5] CARBONI, A., LACK, S., AND WALTERS, R. Introduction to extensive and distributive categories. *Journal of Pure and Applied Algebra* 84, 2 (1993), 145–158.
- [6] CASTIGLIONI, J., MENNI, M., AND ZULUAGA, W. A representation theorem for integral rigs and its applications to residuated lattices. *to appear in Journal of Pure and Applied Algebra* (2015).
- [7] CHAJDA, I., HALAS, R., AND KÜHR, J. *Semilattice Structures*, vol. 30 of *Research and Exposition in Mathematics*. Heldermann Verlag, Cambridge, 2007.
- [8] CIGNOLI, R., D’OTTAVIANO, I., AND MUNDICI, D. *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, vol. 7. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] COSTE, M. Localisation, spectra and sheaf representation. In *Applications of sheaves*. Springer, 1979, pp. 212–238.
- [10] DAUNS, J., AND HOFMANN, K. The representation of biregular rings by sheaves. *Mathematische Zeitschrift* 91, 2 (1966), 103–123.

- [11] DAVEY, B. Sheaf spaces and sheaves of universal algebras. *Mathematische Zeitschrift* 134, 4 (1973), 275–290.
- [12] DAVEY, B., AND PRIESTLEY, H. *Introduction to lattices and order*. Cambridge university press, 2002.
- [13] DI NOLA, A., AND GEORGESCU, G. Grothendieck-like duality for Heyting algebras. *algebra universalis* 47, 3 (2002), 215–221.
- [14] DI NOLA, A., AND LEUȘTEAN, L. Compact representations of BL-algebras. *Archive for Mathematical Logic* 42, 8 (2003), 737–761.
- [15] DUBUC, E., AND POVEDA, Y. Representation theory of MV-algebras. *Ann. Pure Appl. Logic* 161, 8 (2010), 1024–1046.
- [16] DUBUC, E., AND POVEDA, Y. The intimate relationship between the McNaughton and the Chinese Remainder Theorems for MV-algebras. *Studia Logica* 101, 3 (2013), 483–485.
- [17] FERRAIOLI, A., AND LETTIERI, A. Representations of MV-algebras by sheaves. *Mathematical Logic Quarterly* 57, 1 (2011), 27–43.
- [18] FILIPOIU, A., AND GEORGESCU, G. Compact and Pierce representations of MV-algebras. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées* 40, 7 (1995), 599–618.
- [19] GOLAN, J. *Semirings and affine equations over them: theory and applications*, vol. 556. Springer Science & Business Media, 2013.
- [20] GROTHENDIECK, A. Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné): IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie. *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 32 (1967), 5–361.
- [21] HUNGERFORD, T. *Abstract algebra: An introduction*. Cengage Learning, 2012.
- [22] JIPSEN, P. Generalizations of Boolean products for lattice-ordered algebras. *Annals of Pure and Applied Logic* 161, 2 (2009), 228–234.
- [23] JOHNSTONE, P. Rings, fields, and spectra. *Journal of Algebra* 49, 1 (1977), 238–260.
- [24] JOHNSTONE, P. *Stone spaces*, vol. 3. Cambridge University Press, 1986.

- [25] JOHNSTONE, P. *Sketches of an elephant: A topos theory compendium*, vol. 2. Oxford University Press, 2002.
- [26] KNOEBEL, A. *Sheaves of algebras over Boolean spaces*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [27] LAWVERE, F. W. Grothendieck's 1973 Buffalo Colloquium. Email to the *categories* list: <http://permalink.gmane.org/gmane.science.mathematics.categories/2228>. March 4, 2003.
- [28] LAWVERE, W. Core varieties, extensivity, and rig geometry. *Theory and Applications of Categories* 20, 14 (2008), 497–503.
- [29] MACLANE, S. *Categories for the working mathematician*, vol. 5. Springer Science & Business Media, 1978.
- [30] MACLANE, S., AND MOERDIJK, I. *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [31] MUREŞAN, C. The reticulation of a residuated lattice. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie* 51, 99 (2008), 47–65.
- [32] ONO, H. Logics without the contraction rule and residuated lattices. *Australasian Journal of Logic* (2010).
- [33] PIERCE, R. *Modules over commutative regular rings*, vol. 70. American Mathematical Soc., 1967.
- [34] SANKAPPANAVAR, H., AND BURRIS, S. A course in universal algebra. *Graduate Texts Math* 78 (1981).
- [35] SCHANUEL, S. Negative sets have Euler characteristic and dimension. In *Category theory* (1991), Springer, pp. 379–385.
- [36] SIMMONS, H. Reticulated rings. *Journal of Algebra* 66, 1 (1980), 169–192.