

# AGUJEROS NEGROS ASTROFÍSICOS

DANIELA PÉREZ



Tesis de Doctorado en Astronomía

Director: Gustavo E. Romero

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas  
Universidad Nacional de La Plata



*A mis padres,  
Angela Maria Scarpelli y Carlos Daniel Pérez.*

Fórmula de nuestra felicidad: un sí, un no,  
una línea recta, una meta.



## AGRADECIMIENTOS

---

Un libro, un acontecimiento, un pensamiento, una frase, acaso una mirada pueden llegar a trazar el destino de una persona. En mi vida, ha sido una combinación de todas estas cosas. Son, sin embargo, unas muy pocas personas las que han determinado de alguna forma mi destino. Es por ellas que hoy, 28 de enero de 2016, en París, termino de escribir mi tesis doctoral.

El hecho capital en mi vida académica, científica, y en lo humano, fue haber conocido a Gustavo. Él me ha enseñado a lo largo de estos años el valor del pensamiento crítico, la forma de trabajar seria, comprometida, rigurosa, las luces y las sombras del mundo de la ciencia. Nunca conocí, y dudo conoceré, a una persona con una vocación tan genuina por entender el mundo, y la naturaleza de las cosas. Gustavo es un hombre de lo absoluto, de las grandes preguntas, y ha dedicado su vida a vislumbrar las respuestas. Su generosidad es total. Ha compartido conmigo sus ideas en ciencia, y en filosofía, como un par. Más aún, su visión del mundo, de los seres, y de las cosas, trabajada por los años. Luego de haberlo conocido soy una mejor persona. Mi agradecimiento es absoluto, así como la responsabilidad por todo lo que me ha dado.

Si hay algo que me han inculcado mis padres, desde pequeña, es que nada que valga realmente la pena en la vida se consigue sin esfuerzo y trabajo duro; también me han enseñado a concentrarme en lo esencial, y saber ignorar lo superfluo. Su vida ha sido el ejemplo continuo de estas cosas. No hay carrera universitaria, no hay título académico que enseñe estas cosas. La sabiduría de mis padres no se consigue con un doctorado. Hace falta conocimiento, valor, y amor. A ellos, que han consagrado su vida a sus hijos, les dedico con todo mi amor esta tesis.



# ÍNDICE

---

1	INTRODUCCIÓN	1
2	AGUJEROS NEGROS	9
2.1	Teorías de la Gravitación	9
2.1.1	Teoría de la Relatividad General	9
2.1.2	Teorías alternativas de la Gravitación: teorías $f(R)$	11
2.2	Definición general de agujero negro	12
2.3	Soluciones de agujeros negros en Relatividad General	13
2.3.1	Agujeros negros de Schwarzschild	13
2.3.2	Diagrama de Penrose de un agujero negro de Schwarzschild	22
2.3.3	Agujeros negros de Reissner-Nordström	23
2.3.4	Agujeros negros de Kerr	25
2.3.5	Agujeros negros de Kerr-Newman	33
2.4	Soluciones de agujeros negros en gravedad $f(R)$	33
2.4.1	Agujeros negros de $f(R)$ -Schwarzschild	33
2.4.2	Agujeros negros de $f(R)$ -Kerr	34
2.5	Formación de agujeros negros	36
2.5.1	Formación de agujeros negros estelares	36
2.5.2	Formación de agujeros negros supermasivos	39
2.6	Leyes de la termodinámica de agujeros negros	40
2.7	Conjetura de Censura Cósmica	42
2.8	Teoremas de singularidades	43
3	INTERIORES DE AGUJEROS NEGROS	45
3.1	Introducción	45
3.2	Modelo del interior de un agujero negro regular	47
3.3	Termodinámica de la materia interior al horizonte de eventos	51
3.4	Equilibrio termodinámico del interior del agujero negro regular	54
3.5	Equilibrio dinámico del interior del agujero negro regular	58
3.6	Conclusiones	63
4	ENTROPIA GRAVITACIONAL DE AGUJEROS NEGROS	65
4.1	Estimadores clásicos para la entropía del campo gravitacional	66
4.1.1	Estimador de Weyl-Kretschmann	66
4.1.2	Estimador de Bel-Robinson	67
4.2	Estimador de Weyl-Kretschmann para agujeros negros	69
4.2.1	Agujeros negros de Reissner-Nordström	69
4.2.2	Agujeros negros de Kerr	72
4.2.3	Agujeros negros de Kerr-Newman	75
4.3	Estimador de Weyl-Kretschmann para un modelo de agujero negro regular	81

4.4	Estimador de Weyl-Kretschmann para un modelo de agujero de gusano	84
4.4.1	Características generales de un agujero de gusano	84
4.5	Estimador de Bel-Robinson para un agujero negro de Kerr	87
4.6	Conclusiones	94
5	ACRECIÓN SOBRE AGUJEROS NEGROS Y TEORÍAS DE LA GRAVITACIÓN	97
5.1	Introducción	97
5.2	Órbitas circulares entorno a un agujero negro en gravedad $f(R)$	98
5.2.1	Espacio-tiempo de $f(R)$ -Schwarzschild	98
5.2.2	Espacio-tiempo de $f(R)$ -Kerr	102
5.3	Discos de acreción en régimen de campo fuerte	108
5.3.1	Modelo de disco de Shakura & Sunyaev	108
5.3.2	Modelo de disco estándar en Relatividad General	111
5.3.3	Discos de acreción en gravedad $f(R)$	116
5.4	Límites para prescripciones específicas en $f(R)$	122
5.4.1	$f(R) = \alpha R^\beta$	123
5.4.2	$f(R) = R \epsilon \ln \frac{R}{\alpha}$	126
5.5	Discusión	127
5.6	Conclusiones	128
6	SOBRE SISTEMAS BINARIOS DE AGUJEROS NEGROS	129
6.1	Introducción	129
6.2	Disco de acreción relativista con un gap	131
6.3	Modelo para el jet	135
6.4	Resultados	138
6.4.1	Perfil de temperatura y espectro radiativo del disco	138
6.4.2	Radiación no térmica del jet	140
6.5	Discusión	148
6.5.1	Robustez y detectabilidad	148
6.5.2	Dependencia con los cambios en el espacio de parámetros	149
6.6	Conclusiones	150
7	AGUJEROS NEGROS COSMOLÓGICOS E IRREVERSIBILIDAD	153
7.1	Introducción	153
7.2	Modelos cosmológicos de Friedmann	155
7.3	Crecimiento de agujeros negros en contextos cosmológicos	156
7.3.1	Expansión cosmológica	157
7.3.2	Acreción de radiación de fondo de microondas por agujeros negros	158
7.4	Factor de llenado	159
7.5	Resultados: factor de llenado para los modelos cosmológicos de Friedmann	160
7.6	Implicaciones y conclusiones	161

8	AGUJEROS NEGROS Y ONTOLOGÍA DEL ESPACIO-TIEMPO	163
8.1	Introducción	163
8.2	Presentismo, Relatividad Especial, y Relatividad General	164
8.3	Agujeros negros y el presente	167
8.4	Implicaciones ontológicas	169
8.5	Comentarios finales	172
9	MIMICKERS	175
9.1	Introducción	175
9.2	Modelo de Mimicker	177
9.2.1	Ecuación de estado	177
9.2.2	Formalismo 3 + 1 en Relatividad General	177
9.3	Estudios numéricos	181
9.3.1	LORENE y CoCoNuT	181
9.3.2	Datos iniciales para calcular el colapso	182
9.3.3	Resultados	184
9.4	Discusión y trabajos futuros	186
10	CONCLUSIONES	187
A	INTEGRALES IMPROPIAS	191
A.1	Definición de integral impropia	191
A.2	Prueba de integral impropia	191
B	CONDICIONES DE ENERGÍA	193
C	FORMALISMO 3 + 1 EN RELATIVIDAD GENERAL	195
D	PUBLICACIONES	199
D.1	Trabajos científicos publicados en revistas internacionales con referato	199
D.2	Artículos completos en libros y actas de circulación internacional, con arbitraje formal o informal	199
D.3	Trabajos científicos publicados en revistas nacionales con referato	200
	BIBLIOGRAFÍA	203

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

- Figura 1 Potencial efectivo en función de la coordenada radial para distintos valores del momento angular  $\tilde{h}$  en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Los puntos indican la posición de la última órbita circular estable. 17
- Figura 2 Potencial efectivo en función de la coordenada radial para fotones en el espacio-tiempo de Schwarzschild. 18
- Figura 3 Los conos de luz a medida que se acercan al horizonte de eventos se van cerrando cada vez más. Para un observador distante, una partícula tarda un tiempo infinito en cruzar el horizonte de eventos. 19
- Figura 4 Diagrama espacio-temporal en coordenadas avanzadas de Eddington-Filkenstein donde de muestran los conos de luz cerca y dentro de un agujero negro de Schwarzschild. 20
- Figura 5 Diagrama espacio-temporal en coordenadas de Kruskal-Szekeres. 22
- Figura 6 Diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Minkowski. 23
- Figura 7 Diagrama de Penrose de un agujero negro de Schwarzschild. 24
- Figura 8 Esquema del interior de un agujero negro de Kerr. 27
- Figura 9 Potencial efectivo en función de la coordenada radial para distintos valores del momento angular  $a$  en el espacio-tiempo de Kerr. Los puntos indican la posición de la última órbita circular estable. 30
- Figura 10 Diagrama de Penrose de un agujero negro de Kerr no extremo. La figura se repite infinitamente en ambas direcciones. Una trayectoria termina en la singularidad (A), y las otras dos escapan (B y C). IH denota "horizonte interno", EH "horizonte externo", y S "singularidad". 32
- Figura 11 Escalar de Ricci en función de la coordenada radial del horizonte de eventos para un espacio-tiempo de  $f(R)$ -Schwarzschild. 34
- Figura 12 Escalar de Ricci en función de la coordenada radial del horizonte de eventos para un espacio-tiempo de  $f(R)$ -Kerr. 36
- Figura 13 Diagrama de Eddington-Filknstein de una estrella en colapso gravitacional y la subsiguiente formación de un agujero negro. 37

- Figura 14 Esquema de posibles caminos evolutivos para la formación de un agujero negro supermasivo [Volonteri, 2010]. 40
- Figura 15 Presión radial en función de la densidad. 48
- Figura 16 Presión radial en función de la coordenada radial. 50
- Figura 17 Presión tangencial como función de la coordenada radial. 51
- Figura 18 Temperatura en función de la coordenada radial dentro del agujero negro, dada por 3.15.  $T_{\text{sup}}$  denota la temperatura de la materia en  $r = R$ . 52
- Figura 19 Entropía de la materia en función de la coordenada radial dentro del agujero negro.  $S_{\text{sup}}$  denota la entropía de la materia en  $r = R$ . 53
- Figura 20 Densidad de entropía de la materia en función de la densidad.  $S_{\text{sup}}$  denota la entropía de la materia en  $r = R$ . 54
- Figura 21 Densidad de entropía de la materia en función de la coordenada radial.  $S_{\text{sup}}$  denota la entropía de la materia en  $r = R$ . 55
- Figura 22 Velocidad del sonido en función de la coordenada radial. 55
- Figura 23 Energía libre de Helmholtz como función de la coordenada radial.  $F_{0,2R}$  denota la energía libre de Helmholtz en  $r/R = 0,2$ . 56
- Figura 24 Calor específico a volumen constante como función de la coordenada radial en el interior del agujero negro.  $C_{V\text{sup}}$  denota el calor específico a volumen constante en  $r = R$ . 56
- Figura 25 Calor específico a presión constante como función de la coordenada radial en el interior del agujero negro.  $C_{P\text{sup}}$  denota el calor específico a presión constante en  $r = R$ . 57
- Figura 26 Compresibilidad isotérmica como función de la coordenada radial en el interior del agujero negro.  $\kappa_{T R/2}$  denota la compresibilidad isotérmica en  $r = R/2$ . 58
- Figura 27 Velocidad del sonido tangencial como función de la coordenada radial. 59
- Figura 28 Coeficiente  $A_*$  como función de la coordenada radial. 63
- Figura 29 Densidad de entropía para un agujero negro de Reissner-Nordström en función de la coordenada radial y de la carga, respectivamente. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ , y  $k_{RN} = 1$ . 71
- Figura 30 Radio del horizonte externo de eventos en función de la carga del agujero negro de Reissner-Nordström. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ . 72

- Figura 31 Densidad de entropía para un agujero negro de Reissner-Nordström para  $Q = 0,5$ . Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ , y  $k_{RN} = 1$ . 72
- Figura 32 Radio del horizonte externo de eventos en función del momento angular para un agujero negro de Kerr. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ . 73
- Figura 33 Densidad de entropía para un agujero negro de Kerr en función de la coordenada radial y del momento angular, respectivamente. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ ,  $\theta = \pi/2$ , y  $k_K = 1$ . 75
- Figura 34 Radio del horizonte de eventos externo para un agujero negro de Kerr-Newman en función del momento angular y la carga, respectivamente. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ . 76
- Figura 35 Densidad de entropía para un agujero negro de Kerr-Newman en función de la coordenada radial y el momento angular, respectivamente. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ ,  $Q = 0,6$ , y  $\theta = \pi/2$ . 78
- Figura 36 Densidad de entropía para un agujero negro de Kerr-Newman en función de la coordenada radial y la carga, respectivamente. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ ,  $a = 0,6$ ,  $\theta = \pi/2$ , y  $k_{KN} = 1$ . 79
- Figura 37 Densidad de entropía de un agujero negro de Kerr-Newman para distintos valores de la coordenada  $\theta$ , en  $r_+$ ,  $r_-$  y, para  $r \rightarrow 0$ . 79
- Figura 38 Densidad de entropía para un agujero negro de Kerr en función de la coordenada radial, para  $P = C^{\alpha\beta\gamma\delta}C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ ,  $a = 0,6$ ,  $\theta = \pi/2$ , y  $k_K = 1$ . 80
- Figura 39 Densidad de entropía para un agujero negro de Kerr en función de la coordenada radial. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ ,  $a = 0,6$ ,  $\theta = \pi/4$ , y  $k_K = 1$ . 80
- Figura 40 Escalar de Weyl como función de la coordenada radial para un modelo de agujero negro regular. 82
- Figura 41 Escalar de Kretschmann como función de la coordenada radial para un modelo de agujero negro regular. 83
- Figura 42 Densidad de entropía gravitacional en función de la coordenada radial para un modelo de agujero negro regular. 84
- Figura 43 Diagrama de *embedding* para un agujero de gusano que conecta dos universos diferentes. 85
- Figura 44 Densidad de entropía para un agujero de gusano con materia exótica limitada a la vecindad de la garganta. Aquí,  $k_w = 1$ . 87
- Figura 45  $\rho_{\text{grav}}$  como función de la coordenada radial para  $a = 0,8$  y  $\theta = \pi/2$ . 89



- Figura 46  $\rho_{\text{grav}}$  como función de la coordenada radial para  $\alpha = 0,8$  y  $\theta = \pi/4$ . 90
- Figura 47  $T_{\text{grav}}$  como función de las coordenadas radial y angular para  $\alpha = 0,8$ . 90
- Figura 48 Gráfico del dominio de integración  $D_{(\delta,\epsilon)}$ . 93
- Figura 49 Gráfico de la entropía de Bel-Robinson  $S_{\text{BR}}$  y Bekenstein-Hawking  $S_{\text{BH}}$  como función del momento angular del agujero negro. 94
- Figura 50 Gráfico de la función dada por la Ec. 5.14. El máximo absoluto corresponde a  $x = 15/2$  y  $R_0 = 2,85 \times 10^{-3}$ . 102
- Figura 51 Potencial efectivo para diferentes valores de  $R_0 > 0$  y  $h$  en el espacio-tiempo  $f(R)$ -Schwarzschild. Los puntos indican la posición de la última órbita circular estable. 103
- Figura 52 Potencial efectivo para diferentes valores de  $R_0 < 0$  y  $h$  en el espacio-tiempo  $f(R)$ -Schwarzschild. Los puntos indican la posición de la última órbita circular estable. 104
- Figura 53 Escalar de Ricci en función de la coordenada radial del horizonte de eventos (línea negra discontinua) y del escalar de Ricci en función de la coordenada radial de la última órbita circular estable (línea roja) para  $R_0 \in [-1,5, 0,45]$  en el espacio-tiempo de  $f(R)$ -Schwarzschild. 105
- Figura 54 Potencial efectivo como función de la coordenada radial ( $R_0 < 0$ ,  $\alpha = 0,99$ ) en el espacio-tiempo  $f(R)$ -Kerr. Los puntos indican la posición de la última órbita ecuatorial circular estable. 106
- Figura 55 Potencial efectivo como función de la coordenada radial ( $R_0 > 0$ ,  $\alpha = 0,99$ ) en el espacio-tiempo  $f(R)$ -Kerr. Los puntos indican la posición de la última órbita ecuatorial circular estable. 108
- Figura 56 Flujo de radiación en función de la coordenada radial para un disco de acreción entorno a un agujero negro de Schwarzschild en los modelos de Shakura-Sunyaev (SS) y Page-Thorne (PT), respectivamente. 113
- Figura 57 Temperatura en función de la coordenada radial para un disco de acreción entorno a un agujero negro de Schwarzschild en los modelos de Shakura-Sunyaev (SS) y Page-Thorne (PT), respectivamente. 114
- Figura 58 Flujo de radiación en función de la coordenada radial para un disco de acreción entorno a un agujero negro de Kerr de momento angular  $\alpha = 0,99$  en el modelo PT. 115

- Figura 59 Temperatura en función de la coordenada radial para un disco de acreción entorno a un agujero negro de Kerr de momento angular  $a = 0,99$  en el modelo PT. 115
- Figura 60 Luminosidad en función de la energía para un disco de acreción relativista en torno a un agujero negro de Schwarzschild y Kerr ( $a = 0,99$ ). Se grafica también la luminosidad en función de la energía para un disco de acreción entorno a un agujero negro de Schwarzschild correspondiente al modelo de Shakura-Sunyaev. 116
- Figura 61 Temperatura en función de la coordenada radial para algunos valores de  $R_0 < 0$ , para un agujero negro de  $f(R)$ -Schwarzschild. 117
- Figura 62 Luminosidad en función de la energía para algunos valores de  $R_0 < 0$ , para un agujero negro de  $f(R)$ -Schwarzschild. 119
- Figura 63 Temperatura en función de la coordenada radial para algunos valores de  $R_0 < 0$ , para un agujero negro de  $f(R)$ -Kerr. 122
- Figura 64 Luminosidad en función de la energía para algunos valores de  $R_0 < 0$ , para un agujero negro de  $f(R)$ -Kerr. 122
- Figura 65 Temperatura en función de la coordenada radial para algunos valores de  $R_0 > 0$ , para un agujero negro de  $f(R)$ -Kerr. 123
- Figura 66 Luminosidad en función de la energía para algunos valores de  $R_0 > 0$ , para un agujero negro de  $f(R)$ -Kerr. 124
- Figura 67 Gráfico de  $\alpha'$  en función de  $\beta$  para distintos valores de  $R_0$ . 126
- Figura 68 Disco de acreción con un gap. El disco se divide en cinco zonas distintivas: las zonas interior y exterior lejanas donde las perturbaciones causadas por el secundario son despreciables, la zona media, y las zonas interior y exterior cercanas donde las perturbaciones del secundario son fuertes. 133
- Figura 69 Esquema del sistema disco-jet (no está graficado a escala). Se muestran algunos de los parámetros relevantes. 136
- Figura 70 Temperatura superficial del disco en función del radio para el conjunto de parámetros  $M_{\text{disco1}}$  (arriba) y  $M_{\text{disco2}}$  (abajo). 139

- Figura 71 Distribución espectral de energía del disco para el conjunto de parámetros  $M_{\text{disco1}}$ . La luminosidad de un disco de acreción relativista sin gap entorno a un agujero negro supermasivo de la misma masa, espín, y tasa de acreción que el primario se muestra como comparación (línea discontinua). En todas las Spectral Energy Distributions (SEDs) mostradas en las figuras graficamos la luminosidad total en función de la energía. 140
- Figura 72 Distribución espectral de energía del disco para el conjunto de parámetros  $M_{\text{disco2}}$ . La luminosidad de un disco de acreción relativista sin gap entorno a un agujero negro supermasivo de la misma masa, espín, y tasa de acreción que el primario se muestra como comparación (línea discontinua). En todas las SEDs mostradas en las figuras graficamos la luminosidad total en función de la energía. 141
- Figura 73 Izquierda: distribución espectral de energía del jet corregida por absorción, para el conjunto de parámetros  $M_{\text{jet1}}$ . Derecha: lo mismo pero para el caso de un disco de acreción relativista delgado sin gap entorno a un agujero negro de la misma masa, espín y tasa de acreción que el primario. 144
- Figura 74 Izquierda: distribución espectral de energía del jet corregida por absorción, para el conjunto de parámetros  $M_{\text{jet2}}$ . Derecha: lo mismo pero para el caso de un disco de acreción relativista delgado sin gap entorno a un agujero negro de la misma masa, espín y tasa de acreción que el primario. 144
- Figura 75 Izquierda: distribución espectral de energía del jet corregida por absorción, para el conjunto de parámetros  $M_{\text{jet3}}$ . Derecha: lo mismo pero para el caso de un disco de acreción relativista delgado sin gap entorno a un agujero negro de la misma masa, espín y tasa de acreción que el primario. 145
- Figura 76 Izquierda: distribución espectral de energía del jet corregida por absorción, para el conjunto de parámetros  $M_{\text{jet4}}$ . Derecha: lo mismo pero para el caso de un disco de acreción relativista delgado sin gap entorno a un agujero negro de la misma masa, espín y tasa de acreción que el primario. 145

- Figura 77 Izquierda: distribución espectral de energía del jet corregida por absorción, para el conjunto de parámetros  $M_{\text{jet}5}$ . Derecha: lo mismo pero para el caso de un disco de acreción relativista delgado sin gap entorno a un agujero negro de la misma masa, espín y tasa de acreción que el primario. 146
- Figura 78 Izquierda: distribución espectral de energía del jet corregida por absorción, para el conjunto de parámetros  $M_{\text{jet}6}$ . Derecha: lo mismo pero para el caso de un disco de acreción relativista delgado sin gap entorno a un agujero negro de la misma masa, espín y tasa de acreción que el primario. 146
- Figura 79 Cambios en la distribución espectral de energía con cambios en algunos de los parámetros básicos del modelo. En todos los casos,  $z_0 = 50 r_g = z_{\text{acc}}$ ,  $p = 1,5$ , y  $\Gamma_{\text{jet}} = 10$ . Los paneles superiores, de izquierda a derecha, muestran modelos con  $z_{\text{max}} = 10^3 z_0$  pero difieren en el valor del campo magnético en la base de la región de aceleración:  $B(z_{\text{acc}}) = 1,8 \text{ G}$  y  $B(z_{\text{acc}}) = 0,06 \text{ G}$ , respectivamente. Los modelos en los paneles inferiores, difieren en la extensión de la región de aceleración:  $z_{\text{max}} = 10^4 z_0$  y  $10^2 z_0$ , respectivamente. En ambos casos  $B(z_{\text{acc}}) = 0,06 \text{ G}$ . 147
- Figura 80 Gráficos de  $\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)$  en función del tiempo cósmico para los modelos de Friedmann (FM) cerrado, plano, y abierto. 160
- Figura 81 Gráficos de  $f(t) - 1$  en función del tiempo cósmico para los modelos de Friedmann (FM) cerrado, plano, y abierto. 161
- Figura 82 Cono de luz. Se muestran el pasado y futuro causal, y el plano presente del evento central. 165
- Figura 83 Diagrama de espacio-tiempo en coordenadas de Schwarzschild donde se muestra los conos de luz cerca y dentro del agujero negro. 168
- Figura 84 Ángulos de apertura de los conos de luz a diferentes distancias del horizonte del agujero negro de Schwarzschild. En el horizonte la superficie nula coincide con el hiperplano del presente. 170
- Figura 85 Foliación de un espacio-tiempo temporalmente orientable con un agujero negro. El período de tiempo desde el nacimiento del agujero negro al evento  $E_1$  es  $\Delta t$ . 172
- Figura 86 Densidad central en función del tiempo. La línea roja indica los resultados de la primera corrida, y la línea negra los resultados de la segunda corrida. 184

- Figura 87 Factor conforme en función del tiempo. La línea roja indica los resultados de la primera corrida, y la línea negra los resultados de la segunda corrida. 185
- Figura 88 Función *lapse* en función del tiempo. La línea roja indica los resultados de la primera corrida, y la línea negra los resultados de la segunda corrida. 185

## ÍNDICE DE TABLAS

---

- Cuadro 1 Coordenada radial de los horizontes de eventos y cosmológicos, y de las órbitas más interna y externa circular estable para  $R_0 > 0$  en el espacio-tiempo de  $f(R)$ -Schwarzschild. Aquí  $x \equiv r/\mu$ . 101
- Cuadro 2 Coordenada radial del horizonte de eventos y de la órbita más interna circular estable para  $R_0 < 0$  en el espacio-tiempo de  $f(R)$ -Schwarzschild. Aquí  $x \equiv r/\mu$ . 101
- Cuadro 3 Radio del horizonte de eventos y de la última órbita ecuatorial circular estable para un agujero negro de  $f(R)$ -Kerr con momento angular  $a = 0,99$ , para algunos valores de  $R_0 < 0$ . Aquí,  $x \equiv r/\mu$ . 106
- Cuadro 4 Coordenada radial de los horizontes de eventos y cosmológicos, y de las órbitas ecuatoriales más interna y externa circular estable para  $R_0 > 0$  y  $a = 0,99$  en el espacio-tiempo de  $f(R)$ -Kerr. Aquí,  $x \equiv r/\mu$ . 107
- Cuadro 5 Valores de la energía para el pico de emisión, temperatura máxima, y luminosidad de un disco de acreción entorno a un agujero negro de Schwarzschild y Kerr ( $a = 0,99$ ) en los modelos SS y PT, respectivamente. 116
- Cuadro 6 Valores de la coordenada radial de la última órbita estable, coordenada radial correspondiente al máximo de la temperatura, temperatura máxima, luminosidad, y energía del pico de la emisión para un disco de acreción entorno a un agujero negro de  $f(R)$ -Schwarzschild con  $R_0 < 0$ . 118

Cuadro 7	Valores de la coordenada radial de la última órbita estable, coordenada radial correspondiente al máximo de la temperatura, temperatura máxima, luminosidad, y energía del pico de la emisión para un disco de acreción entorno a un agujero negro de $f(R)$ -Schwarzschild black hole con $R_0 > 0$ . <a href="#">118</a>
Cuadro 8	Valores de la coordenada radial de la última órbita estable, coordenada radial correspondiente al máximo de la temperatura, temperatura máxima, luminosidad, y energía del pico de la emisión para un disco de acreción entorno a un agujero negro de $f(R)$ -Kerr con $R_0 < 0$ y $a = 0,99$ . <a href="#">121</a>
Cuadro 9	Valores de la coordenada radial de la última órbita estable, coordenada radial correspondiente al máximo de la temperatura, temperatura máxima, luminosidad, y energía del pico de la emisión para un disco de acreción entorno a un agujero negro de $f(R)$ -Kerr con $R_0 > 0$ y $a = 0,99$ . <a href="#">121</a>
Cuadro 10	Valores de los parámetros relevantes del modelo. <a href="#">142</a>
Cuadro 11	Valores de los parámetros para los 6 modelos disco+jet. <a href="#">143</a>
Cuadro 12	Parámetros cosmológicos para los modelos cosmológicos de Friedmann cerrado, plano, y abierto : $\Omega_{k,o}$ , $\Omega_{m,o}$ , $R_0$ , y $t_0$ denotan los valores de la densidad de curvatura, densidad de materia, el factor de escala en $t_0$ , y la edad del universo, respectivamente. <a href="#">156</a>

## ACRÓNIMOS

---

<b>AGN</b>	Active Galactic Nucleus
<b>ADAF</b>	Advection-Dominated Accretion Flow
<b>IC</b>	Inverse Compton
<b>EC</b>	External Inverse Compton
<b>SED</b>	Spectral Energy Distribution
<b>SMBHB</b>	Supermassive Black Hole Binary
<b>SSC</b>	Synchrotron-Self Compton

## RESUMEN

---

En la presente tesis estudiamos diversos procesos asociados con agujeros negros astrofísicos; en particular, la estructura interna de los agujeros negros, la naturaleza de la entropía gravitacional, el proceso de acreción de materia por agujeros negros en régimen de campo fuerte y sistemas binarios de agujeros negros supermasivos. Analizamos también el rol de los agujeros negros en la caracterización de la Segunda Ley de la Termodinámica e implicaciones de los agujeros negros para teorías sobre la naturaleza del espacio-tiempo. Por último indagamos sobre la existencia misma de estos objetos y la posibilidad de que sistemas dinámicos en colapso puedan simular todas las propiedades que solemos atribuir a los agujeros negros estáticos.

En lo que respecta a la estructura interna de los agujeros negros, analizamos las propiedades termodinámicas de un modelo para el interior de un agujero negro regular estático y esféricamente simétrico. Obtenemos las ecuaciones para las cantidades termodinámicas válidas para un perfil de densidad arbitrario. A partir de estas ecuaciones mostramos que el modelo es termodinámicamente inestable. Asimismo, presentamos un análisis donde se pone en evidencia la inestabilidad dinámica del fluido.

Indagamos en la naturaleza de la entropía gravitacional mediante el análisis de dos estimadores clásicos basados en escalares construidos a partir del tensor de Weyl. Calculamos el primer estimador para agujeros negros de Reissner-Nordström, Kerr, Kerr-Newman, para un modelo particular de agujero de gusano y agujero negro regular estudiado anteriormente. Para el caso del segundo estimador, calculamos la densidad de energía gravitacional, la temperatura gravitacional y la entropía gravitacional en el espacio-tiempo de Kerr. En ambos casos, comparamos los resultados obtenidos para los distintos espacio-tiempos con la correspondiente entropía de Bekenstein-Hawking para determinar cuál de los estimadores representa mejor el comportamiento esperado para la entropía del campo gravitacional de los agujeros negros.

En el marco de teorías alternativas de la gravitación, calculamos la distribución espectral de energía de discos de acreción entorno a agujeros negros de  $f(R)$ -Schwarzschild y  $f(R)$ -Kerr. Además utilizamos datos recientes de la binaria de gran masa Cygnus X-1 para limitar los valores de los parámetros de una clase de modelos con gravedad descrita por una teoría  $f(R)$ .

Analizamos, también, las propiedades radiativas de un sistema binario de agujeros negros supermasivos, suponiendo que el agujero negro primario lanza un jet relativista y que debido a los torques ejercidos por el agujero negro secundario, una zona de vaciamiento (gap) anular aparece en el disco de acreción. Calculamos el espectro modificado de radiación del disco teniendo en cuenta los efectos de campo gravitacional fuerte en la región más interna del mismo. Por

otro lado, investigamos si la interacción de los electrones relativistas con los fotones emitidos por el disco de acreción inducen algún tipo de característica peculiar en la distribución espectral de energía del jet que permita identificar la presencia de un agujero negro secundario.

Proponemos que el apantallamiento de cargas por horizontes cosmológicos, para modelos de universo en expansión acelerada, y por horizontes de eventos, para modelos cosmológicos de Friedmann (i.e. sin expansión acelerada) determina, localmente, una dirección preferencial para el flujo de energía electromagnética. En el caso de modelos cosmológicos de Friedmann calculamos el crecimiento del horizonte de eventos debido tanto a la expansión cosmológica como a la acreción de fotones del fondo cósmico de radiación. Definimos un factor de llenado como el cociente entre el área total del horizonte de eventos y el área de una hipersuperficie radial co-móvil tipo espacio, y encontramos que este factor es mayor a 1 para los modelos de Friedmann plano, abierto y cerrado. Esto implica que para cualquier evento del espacio-tiempo su pasado y futuro causal no son simétricos, dando lugar a un flujo de Poynting neto en la dirección global futura; esto último está a su vez relacionado con el hecho de que la entropía termodinámica siempre crece. Por último, exponemos una conexión entre las cuatro flechas del tiempo distintas: cosmológica, electromagnética, gravitacional, y termodinámica.

En relación a las implicaciones de los agujeros negros para teorías del espacio-tiempo, se confronta la tesis del presentismo con física relativista, en el límite de régimen de campo gravitacional fuerte que es donde tiene lugar la formación de agujeros negros. Concluimos que la posición del presentista no es compatible con la existencia de los agujeros negros y otros objetos compactos en el universo. Una revisión de dicha tesis es necesaria, si pretende ser consistente con la visión científica actual del universo.

Investigamos la posible existencia de una situación donde el colapso gravitacional sea revertido antes de la aparición de un horizonte de eventos, generándose objetos astronómicos cuyas características sean indistinguibles de los agujeros negros estáticos sobre escalas temporales mayores que el tiempo de Hubble. Para ello resolvemos las ecuaciones de campo de Einstein para una nube en colapso gravitacional. La ecuación de estado se comporta como materia normal a bajas densidades mientras que a altas densidades, hacia el núcleo del objeto, tiene un comportamiento repulsivo. Obtenidos los coeficientes de la métrica, mostramos la ausencia de superficies atrapadas.

La tesis ofrece una visión integral de la física de los agujeros negros y soluciones a varios de los principales problemas que la misma presenta. Desde la problemática de la naturaleza de la región central de los agujeros hasta sus efectos cosmológicos, en esta tesis reportamos investigaciones sistemáticas de un programa de largo alcance que seguirá siendo investigado en los años por venir.



## ABSTRACT

---

In this thesis, we study several physical processes related to astrophysical black holes; in particular, black holes's interiors, the nature of the gravitational entropy, accretion process of matter onto black holes in the strong gravitational regime, and supermassive black hole binaries. We also analyze the role black holes play in the characterization of the Second Law of Thermodynamics, and implications of black holes for spacetime theories. Finally, we inquire into the very existence of these objects and the possibility that dynamical systems in collapse may mimic all the properties we attribute to static black holes.

In relation to the structure of black holes's interiors, we analyze the thermodynamical properties of a model of a regular spherical symmetric static black hole. The equations for the thermodynamical quantities valid for an arbitrary density profile are obtained. From these equations, we show that the model is thermodynamically unstable. Furthermore, we present an analysis that reveals the dynamical instability of the fluid.

We investigate the nature of the gravitational entropy through an analysis of two classical estimators based on scalars constructed from the Weyl tensor. We calculate the first estimator for Reissner-Nordström, Kerr, Kerr-Newman black holes, a particular model of a wormhole, and of the regular black hole previously studied. In the case of the second estimator, we compute the gravitational energy density, gravitational temperature, and gravitational entropy in Kerr spacetime. In both cases, we compare the results obtained for the different spacetimes with the corresponding Bekenstein-Hawking entropy to determine which of the estimators best represent the expected behavior for the gravitational entropy of black holes.

In the context of alternative theories of gravity, we compute the spectral energy distribution for accretion disks around  $f(R)$ -Schwarzschild and  $f(R)$ -Kerr black holes. We use recent data from the high mass binary Cygnus X-1 to constrain the values of the space of parameters of a class of models of  $f(R)$ -gravity.

We also analyzed the radiative properties of a supermassive black hole binary system, in which the primary black hole launches a relativistic jet and due to the tidal torques exerted by the secondary black hole, an annular gap appears in the accretion disk. We calculate the modified radiative spectrum of the disk taking into account the effects of the strong gravitational regime in the inner part of the disk. Besides, we investigate if the interaction between the relativistic electrons with the photons emitted by the accretion disk could produce a distinctive signature in the spectral energy distribution of the jet that may allow to identify the presence of a secondary black hole.

We propose that the screening of currents by cosmological horizons for models of the universe in accelerated expansion, and by event horizons, for Friedmann cosmological models (i.e. without accelerated

expansion) determines, locally, a preferred direction for the flux of electromagnetic energy. In the case of Friedmann cosmological models, we compute the growth of the event horizon due to both the cosmological expansion and the accretion of photons from the cosmic microwave background. We define a filling factor as the rate between the total area of the event horizon, and the the area of a radial comoving spacelike hypersurface, and we find that this factor is greater than one for the flat, open, and closed Friedmann models. This implies that for any event of spacetime its casual past and future are not symmetric, which gives a net Poynting flux in the global future direction; the latter is in turn related to the fact that the thermodynamical entropy always grows. Finally, we present a connection between the four arrows of time: cosmological, electromagnetic, gravitational, and thermodynamical arrows.

In relation to the implications of black holes for spacetime theories, we confront the presentism thesis with relativistic physics, in the limit of strong gravitational regime where the formation of black holes takes place. We conclude that the position of the presentist is not compatible with the existence of black holes and other compact objects in the universe. A revision of such thesis is necessary if it pretends to be consistent with the current scientific view of the universe.

Finally, we investigate the possible existence of a situation in which gravitational collapse might be reverted before the appearance of an event horizon, leading to the formation of astronomical objects whose properties make them indistinguishable from static black holes in time scales larger than the Hubble time. In order to study such a scenario we solve the Einstein equations for a collapsing cloud. The equation of state behaves as normal matter for low densities while at high densities, towards the core of the object, the matter has a repulsive behavior. Once the coefficients of the metric are obtained, we show the absence of trapped surfaces.

The thesis provides a comprehensive vision of black holes physics and solutions to several of the problems that it poses. From the nature of the central region of black holes to the cosmological effects, in this Thesis we report systematic investigations of a long term program that will continue in the years to come.

## INTRODUCCIÓN

---

Los agujeros negros constituyen la manifestación más extrema de la gravitación en el universo. El descubrimiento de estos objetos fue posible gracias a la teoría de la Relatividad General, la mejor teoría clásica sobre campos gravitacionales formulada hasta el momento. El hallazgo de las ecuaciones de campo de la Relatividad General por Albert Einstein, el 25 de noviembre de 1915, ha sido uno de los eventos capitales en la historia de la ciencia y cambió significativamente la concepción hasta entonces aceptada del espacio, el tiempo, y el cosmos.

La primera solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein fue hallada por el físico y astrónomo alemán Karl Schwarzschild, director del Observatorio Astrofísico de Postdam. Schwarzschild sirvió voluntariamente en el frente ruso durante la Primera Guerra Mundial<sup>1</sup>. Fue desde allí, en enero de 1916, que Schwarzschild le comunicó a Einstein la obtención de una solución exacta de las ecuaciones de campo, solución que describe la geometría del espacio-tiempo fuera de una distribución esféricamente simétrica de materia. El 9 de enero de 1916, Einstein le responde a Schwarzschild:

“He leído su trabajo con gran entusiasmo. No esperaba que se pudiese formular una solución exacta del problema de manera tan simple. Me gustó mucho su tratamiento matemático del tema. El próximo jueves, presentaré el trabajo en la Academia”.

En efecto, el 16 de enero de 1916, Einstein leyó el trabajo de Schwarzschild ante la Academia Prusiana [Schwarzschild, 1916b]. El 24 febrero de 1916, Einstein leyó un segundo trabajo de Schwarzschild [Schwarzschild, 1916a], en el cual se daba la solución para la geometría del espacio-tiempo interior a una distribución esféricamente simétrica de materia de densidad constante. Schwarzschild notó que existía un radio límite para el objeto, más allá del cual la presión central del mismo se hacía infinita. Este límite hoy se conoce como “límite de Schwarzschild”.

La métrica de Schwarzschild es singular en el centro de simetría ( $r = 0$ ); además, en las coordenadas de Schwarzschild, es discontinua sobre una esfera de radio  $r_S = 2GM/c^2$ , donde  $G$  denota la constante de gravitación universal,  $M$  la masa del objeto central, y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. La naturaleza de esta aparente singularidad, conocida como “singularidad de Schwarzschild”, fue objeto de estudio durante algunas décadas.

La primera tesis doctoral sobre el espacio-tiempo de Schwarzschild se debe Johannes Droste, bajo la dirección de H. A Lorentz. Droste

---

<sup>1</sup> Schwarzschild cumplió funciones en el cuartel general de la unidad de artillería calculando la trayectoria de misiles de largo alcance. Su muerte, acaecida el 11 de mayo de 1916, se debió a una rara enfermedad autoinmune llamada Pénfigos.

derivó la solución de Schwarzschild en varios sistemas de coordenadas [Droste, 1916a,b]; sus resultados fueron de referencia hasta principios de la década de 1950 [Droste, 1916a,b]; Flamm 1916, Weyl 1917, 1961, y Lanczos 1922 encontraron también otros sistemas de coordenadas para describir la geometría de Schwarzschild; todos ellos, sin embargo, interpretaban incorrectamente sus resultados; por ejemplo, el brillante matemático H. Weyl afirmaba que la superficie de radio  $r = r_S$  era singular y que allí residían fotones y partículas masivas.

David Hilbert [Hilbert, 1917] fue el primero en formular una definición de regularidad para la métrica del espacio-tiempo. Su definición de regularidad requiere que exista un sistema de coordenadas en el que los potenciales  $g_{\mu\nu}$  sean continuos, diferenciables, con determinante no nulo. La transformación de coordenadas, además, debe ser biyectiva e invertible. Luego para Hilbert, como también para otros expertos de la época incluyendo al propio Einstein, la solución de Schwarzschild era singular en  $r = 0$  y  $r = r_S$ .

Arthur S. Eddington, sin embargo, no coincidía con Einstein, Hilbert, y Weyl respecto a la “singularidad de Schwarzschild”. En el libro *The Mathematical Theory of Relativity* [Eddington, 1923], Eddington comenta que singularidades en la métrica no necesariamente indican la presencia de partículas materiales, ya que dichas singularidades pueden introducirse o removerse mediante transformaciones de coordenadas<sup>2</sup>.

En síntesis, hasta principios de 1930, se consideraba que la llamada “singularidad de Schwarzschild” consistía en una esfera impenetrable de radio  $r_S = 2GM/c^2$ ; una esfera “singular” donde partículas masivas y fotones se acumulaban en su superficie. La región interior a la esfera se pensaba que era inaccesible o bien que “no existía en la naturaleza”.

En el año 1932, Georges H. J. E. Lemaître publicó el trabajo “L’univers en expansion” [Lemaître, 1933], en el cual demostró que la “singularidad de Schwarzschild” era una singularidad aparente. Para ello Lemaître halló un único sistema de coordenadas para representar tanto la región interior como exterior de la métrica de Schwarzschild, siendo ésta sólo singular en  $r = 0$ . El elemento de línea era regular en  $r_S = 2GM/c^2$ . En este mismo trabajo, Lemaître encontró soluciones dinámicas de las ecuaciones de Einstein con geometría esféricamente simétrica para un fluido perfecto. En particular, fue el primero en hallar la solución general en el caso de un fluido tipo polvo, esto es, sin presión. Curiosamente, esta solución suele atribuirse a Tolman, Bondi, o incluso Datt<sup>3</sup>. El artículo de Lemaître de 1932 pasó casi desapercibido por la comunidad científica de la época. Fue a través de Tolman [Tolman, 1934] que las soluciones de Lemaître se hicieron

<sup>2</sup> “A singularity of  $ds^2$  does not necessarily indicate material particles, for we can introduce or remove such singularities by making transformations of coordinates. It is impossible to know whether to blame the world-structure or the inappropriateness of the coordinate system” (Eddington 1923, p.165).

<sup>3</sup> En su trabajo “Effect of inhomogeneity on cosmological models”, Tolman [Tolman, 1934] cita la solución de polvo derivada por Lemaître [Lemaître, 1933]. Tolman conocía el trabajo de Lemaître ya que habían estado trabajando juntos entre 1932 y 1933, durante un viaje de Lemaître a Estados Unidos.

conocidas. Estos trabajos fueron de una influencia decisiva para el estudio sobre colapso gravitacional desarrollado por [Oppenheimer & Snyder 1939](#).

La solución completa de la geometría del espacio-tiempo de Schwarzschild se debe a [Synge 1950](#), [Finkelstein 1958](#), [Kruskal 1960](#), [Fronsdal 1959](#), [Szekeres 1960](#), y [Novikov 1963, 1964](#). La caracterización final de este espacio-tiempo fue posible debido al empleo de técnicas globales para el estudio de la estructura causal, que comenzaron a desarrollarse a partir de la segunda mitad del siglo XX. Aún cuando se tuvo una comprensión cabal de las propiedades de la solución de Schwarzschild, se pensaba que esta solución no representaba a un objeto real. Resultaba inconcebible que existiese en la naturaleza un objeto tan compacto que su tamaño estuviese por debajo de su correspondiente radio de Schwarzschild.

Chandrasekhar fue uno de los pioneros en el estudio de sistemas gravitacionales muy compactos. En 1939, Chandrasekhar conjeturó que estrellas masivas podrían desarrollar un núcleo degenerado. Si el núcleo es lo suficientemente denso, los protones y electrones se combinarían para formar neutrones; las masas de las estrellas de neutrones deberían ser cercanas a 1,4 masas solares (límite de Chandrasekhar), la masa máxima para enanas blancas [[Chandrasekhar, 1931, 1939](#)]. Algunos años antes, [Baade & Zwicky 1934](#) ya habían sugerido la existencia de estrellas de neutrones. Además, en ese mismo trabajo, desarrollaron una teoría para las explosiones de supernovas y propusieron que estas explosiones eran el origen de los rayos cósmicos.

En la década de 1930, no se consideraba seriamente que pudiesen existir estrellas de neutrones. [Oppenheimer & Volkoff 1939](#) concluyeron que si el núcleo de una estrella de neutrones era lo suficientemente masivo, entonces “o la ecuación de estado de Fermi deja de ser válida a altas densidades, o la estrella continuará contrayéndose indefinidamente sin alcanzar nunca el equilibrio”. En un trabajo subsiguiente, [Oppenheimer & Snyder 1939](#) optaron por una de estas posibilidades: mostraron, por primera vez, que el estadio último de evolución de una estrella cuya masa supera el límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (aproximadamente 3 masas solares) es el de completo colapso gravitacional<sup>4</sup>. Lo que hoy entendemos por agujero negro, fue entonces concebido. Durante los años siguientes, las llamadas estrellas ‘congeladas’ o ‘colapsadas’ se consideraron objetos extremadamente exóticos<sup>5</sup>. Finalizada la Segunda Guerra Mundial, esta situación fue cambiando debido en gran parte a los espectaculares avances en el campo de la astronomía observacional.

4 “When all thermonuclear sources of energy are exhausted a sufficiently heavy star will collapse. Unless fission due to rotation, the radiation of mass, or the blowing off of mass by radiation, reduce the star’s mass to the order of that of the sun, this contraction will continue indefinitely. The total time of collapse for an observer comoving with the stellar matter is finite, and for this idealized case and typical stellar masses, of the order of the day; an external observer sees the star asymptotically shrinking to its gravitational radius” [[Oppenheimer & Snyder, 1939](#)].

5 El término “agujero negro” fue acuñado por John Archibal Wheeler durante una conferencia en el otoño de 1967 en el Goddard Institute of Space Studies en New York [[Wheeler, 1968](#)].

El estudio de fuentes discretas en radio comenzó con el descubrimiento accidental de una fuente pequeña y fluctuante en Cygnus por Hey et al. 1946 mientras realizaban un mapa de la Vía Láctea a 60 MHz. La naturaleza discreta de la fuente Cygnus fue confirmada por Bolton & Stanley 1948. En ese mismo año Bolton [Bolton, 1948] publicó un catálogo de seis fuentes discretas en radio introduciendo la nomenclatura Cyg A, Cas A, etc. En 1949 Bolton, Stanley, y Slee [Bolton et al., 1949] asociaron por primera vez radio fuentes con objetos conocidos en el rango óptico. Taurus A, Centaurus A, y Virgo A fueron identificados con la Nebulosa del Cangrejo, NGC 5128, y M87, respectivamente; Bolton y colaboradores no reconocieron la naturaleza extragaláctica de NGC 5128 y M87, perdiendo la oportunidad de descubrir entonces las primeras radio galaxias.

La radioastronomía extragaláctica comienza con el descubrimiento del primer cuásar (en inglés se denomina *Quasar*, siglas de *Quasi-stellar radio source*, que significa fuente de radio cuasi-estelar), la radio fuente 3C 273. Hazard et al. 1963 obtuvieron la posición precisa y la estructura en radio de la fuente; ésta podía resolverse en dos componentes A y B, un jet muy tenue y una estrella brillante, respectivamente. Hazard y colaboradores proporcionaron a Schmidt las coordenadas exactas de 3C 273. El corrimiento al rojo obtenido por Schmidt [Schmidt, 1963] era de 0.158 con una correspondiente luminosidad en el óptico cientos de veces mayor que la de galaxias típicas previamente identificadas con radio fuentes; el corrimiento al rojo del objeto evidenciaba su origen extragaláctico.

Los cuasares se presentaban como objetos astronómicos extremadamente exóticos; las luminosidades en óptico y radio superaban en varios órdenes de magnitud las luminosidades usualmente observadas en las galaxias elípticas más brillantes y radio galaxias. Por otro lado, la variabilidad en escalas temporales cortas implicaba que la región de emisión era compacta. Los agujeros negros, olvidados durante décadas, se presentaban ahora como los candidatos naturales para explicar los fenómenos energéticos más extremos jamás observados.<sup>6</sup>

Salpeter [Salpeter, 1964] y Zeldovich [Zel'dovich, 1964], en forma independiente, propusieron que la acreción de material interestelar por agujeros negros sería la fuente de potencia de los cuasares. Lynden-Bell 1969 fue quien mostró que el espectro de los cuasares podría ser explicado por la radiación producida por un disco de acreción entorno a un objeto compacto. Paralelamente, avances observacionales en el rango de las altas energías permitieron la detección de la primera binaria en rayos X, Sco X-1 [Giacconi et al., 1962; Sandage et al., 1966]. Guseinov & Zel'dovich 1966 propusieron un mecanismo para la generación de rayos X en sistemas binarios por acreción de material de una estrella a otra en forma de shocks con temperaturas de millones de grados; en particular, Shklovsky 1967 elaboró una teoría detallada para explicar la radiación de Sco X-1, mediante la acreción de gas producida por una estrella de neutrones sobre su compañera. Poco después, un

<sup>6</sup> Para más detalles sobre el desarrollo de la teoría de la Relatividad General durante el siglo XX, se sugiere el excelente libro *The Curious History of Relativity* de Jean Eisenstaedt [Eisenstaedt, 2006].

grupo de astrónomos de Cambridge liderado por Anthony Hewish<sup>7</sup> detectaron objetos astronómicos que emitían pulsos periódicos en radio [Hewish et al., 1968]. La identificación de los púlsares con las estrellas de neutrones fue propuesta por primera vez por Pacini 1967 y Gold 1968.

A principios de la década de 1970, se descubrió el primer candidato a agujero negro de masa estelar en la galaxia, que forma parte del sistema binario Cygnus X-1 [Webster & Murdin, 1972; Bolton, 1972]. El modelo que permitía explicar la emisión en rayos X observada consistía en un disco de material muy caliente formado por la acreción de gas de la estrella compañera tipo O sobre el agujero negro [Shakura & Sunyaev, 1973; Thorne & Price, 1975; Bisnovatyi-Kogan & Blinnikov, 1977].

El descubrimiento de las fuentes de rayos X galácticas, junto con los cuasares entre otras, motivaron el desarrollo de la teoría de discos de acreción. Uno de los aspectos fundamentales de la teoría era el de develar el mecanismo por el cual el momento angular era transportado hacia afuera mientras la materia se movía en espiral hacia adentro. En un trabajo sumamente influyente, Shakura & Sunyaev 1973 modelaron los discos de acreción en términos de un parámetro adimensional  $\alpha$  que caracterizaba al esfuerzo que llevaba al transporte del momento angular y la liberación de energía. Novikov & Thorne 1973 generalizaron el modelo de Shakura y Sunyaev para el caso de régimen de campo gravitacional fuerte. En la actualidad, el llamado “modelo- $\alpha$ ” sigue siendo el más utilizado.

En diciembre de 1963, se realizó el primer Texas Symposium en Astrofísica Relativista en Dallas. Esta conferencia fue motivada por el entonces reciente descubrimiento del primer cuásar. Fue en esta reunión donde el matemático neozelandés Roy P. Kerr anunció el descubrimiento de la solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein para un objeto rotante de masa  $M$  y momento angular por unidad de masa  $a$  [Kerr, 1963b,a]. Los importantes resultados de Kerr pasaron prácticamente desapercibidos para la audiencia. Poco tiempo después, sin embargo, el desarrollo de técnicas geométricas globales para el estudio de espacio-tiempos develaría importantes propiedades de la solución de Kerr y de los agujeros negros en general [Penrose, 1965b].

El matemático Roger Penrose [Penrose, 1965a] demostró que el colapso gravitacional en la teoría de la Relatividad General implica una incompletitud esencial del espacio-tiempo. En particular, probó que la singularidad en el origen de coordenadas de la solución de Schwarzschild es irremovible. El teorema de singularidades más importante se debe a Hawking & Penrose 1970.

Los teoremas de singularidades son meramente geométricos; no se invoca ninguna ley física. Si estos teoremas han de ser aplicados al mundo físico, las hipótesis de los mismos deben estar apoyadas por

<sup>7</sup> Este descubrimiento le valió a Hewish el premio Nobel de Física en 1974.



evidencia empírica<sup>8</sup>. Los teoremas de singularidades de la teoría de la Relatividad General no prueban la existencia de singularidades en el espacio-tiempo, sino de modelos de espacio-tiempos singulares; en otras palabras, éstos implican que bajo ciertas hipótesis las soluciones de las ecuaciones de la teoría de la Relatividad General resultan inevitablemente defectuosas [Romero, 2013a].

Otro teorema notable sobre propiedades de agujeros negros se debe a Israel 1967: la única solución de vacío para un agujero negro estático en un espacio asintóticamente plano es la métrica de Schwarzschild con masa positiva. En 1968, Israel generalizó este resultado para el caso de soluciones de agujeros negros estáticas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell y demostró que dicha solución coincide con la métrica de Reissner-Nordström [Israel, 1968].

Los resultados de Israel fueron posteriormente generalizados para el caso de agujeros negros estacionarios. En particular, Carter 1971 mostró que los agujeros negros con geometría axialmente simétrica dependían de sólo dos parámetros, la masa y el momento angular. Asimismo probó que la métrica de Kerr es la única que incluye el caso de un agujero negro con momento angular nulo. Luego, Hawking 1972 demostró que todos los agujeros negros estacionarios deben ser estáticos o axialmente simétricos y que la topología del horizonte de eventos tiene que ser esférica, siendo ésta última una de las hipótesis utilizadas en los trabajos de Israel y Carter. Finalmente, Robinson 1975 dio una prueba definitiva de los resultados de Carter: la familia de soluciones de Kerr, donde se cumple que el valor absoluto del momento angular es menor que la masa gravitacional, es la única familia pseudoestacionaria de soluciones de agujeros negros de las ecuaciones de Einstein en el vacío si el horizonte de eventos se supone no degenerado.

Luego de la formulación de los teoremas de unicidad de agujeros negros, la mayor parte del trabajo en el tema ha estado focalizado en remover algunas de las hipótesis “técnicas” utilizadas en demostraciones anteriores de los teoremas. Una de las hipótesis que hasta el momento no ha podido ser verificada es la llamada “conjetura de censura cósmica”, introducida por Penrose 1969. La conjetura de censura cósmica establece que las singularidades están siempre ocultas por horizontes de eventos. Aunque no se ha podido encontrar ningún ejemplo convincente de que una singularidad desnuda puede formarse a partir de condiciones iniciales genéricas bien comportadas, y a pesar de que la conjetura se considere usualmente válida, ésta no ha sido demostrada en el marco de la teoría de la Relatividad General.

El desarrollo de la termodinámica de agujeros negros comenzó mediante analogías con la segunda ley de la termodinámica. Penrose & Floyd 1971 notaron que el área de la superficie de un agujero negro de Kerr se incrementaba durante el “proceso de Penrose”, y sugirieron que esta podría ser una propiedad general de las interacciones de agujeros negros. En forma independiente, Christodoulou 1970 realizó un estudio detallado de la eficiencia de ciertos procesos cuasiestáticos

<sup>8</sup> Los teoremas de singularidades no parecen aplicarse al universo como un todo dado que existe fuerte evidencia de que las condiciones de energía se violan a grandes escalas [Riess et al., 1998; Perlmutter et al., 1999].



en el que los parámetros de un agujero negro cambian gradualmente mediante la inyección de una sucesión de partículas de prueba. Christodoulou encontró que una cantidad denominada “masa irreducible”, que depende de la masa y momento angular del agujero negro, nunca puede decrecer durante el mencionado proceso.

En el Texas Symposium llevado a cabo en Austin en diciembre de 1970, Hawking [Hawking, 1971] mostró que el resultado de Christodoulou era un caso especial del ahora denominado “teorema de las áreas de Hawking”: el área del horizonte de eventos de un agujero negro, en cualquier proceso clásico, nunca decrece. Bekenstein, quien era también un estudiante graduado en Princeton como Christodoulou y estaba familiarizado con el trabajo de tesis de éste último, propuso que que el área del horizonte de eventos no era simplemente análogo a la entropía, sino que era proporcional a la entropía del agujero negro [Bekenstein, 1972, 1973]; la constante de proporcionalidad resultaba el cuadrado de la longitud de Planck, a menos de un factor numérico. Bekenstein 1974 también formuló una generalización de la segunda ley de la termodinámica: en cualquier proceso físico, la suma de la entropía del agujero negro más la entropía ordinaria asociada a la materia nunca decrece<sup>9</sup>.

Las cuatro leyes de la mecánica de agujeros negros fueron desarrolladas por Bardeen, Carter, y Hawking durante la Les Houches Summer School en agujeros negros en agosto de 1972 [Bardeen et al., 1973]. Las leyes para agujeros negros fueron desarrolladas en analogía con las cuatro leyes de la termodinámica, donde el área del horizonte de eventos tiene el rol de la entropía y la gravedad superficial el rol de la temperatura.

Clásicamente, la analogía entre las leyes de la mecánica para agujeros negros y las termodinámicas era meramente formal. Por ejemplo, dado que un agujero negro no puede radiar, su temperatura efectiva real tiene que ser siempre cero. Esto implica que la gravedad superficial no puede representar realmente la temperatura del agujero negro. Si se tienen en cuenta los efectos cuánticos, sin embargo, la situación cambia notablemente.

El extraordinario físico soviético Yakov B. Zel’dovich, tuvo un papel determinante en el desarrollo de la teoría de evaporación de agujeros negros. En 1973, en Moscú, tuvo lugar el primer encuentro entre Hawking y Zel’dovich<sup>10</sup>. Éste último junto con Alexander Starobinsky mostraron a Hawking que el principio de indeterminación de la mecánica cuántica implicaba que los agujeros negros deberían crear y emitir partículas [Zel’dovich, 1971; Zel’dovich & Starobinskij, 1971].

El descubrimiento de Hawking [Hawking, 1974, 1975] que, a nivel cuántico, los agujeros negros pueden radiar y que esta radiación es térmica impulsó el estudio de efectos cuánticos específicos en agujeros negros; verbigracia, los efectos de la polarización en el vacío en la

<sup>9</sup> La generalización de la segunda ley en esta formulación fue sugerida por primera vez por Bekenstein antes del descubrimiento de la radiación de Hawking.

<sup>10</sup> Según una historia probablemente apócrifa, cuando Hawking y Zel’dovich fueron presentados, Hawking parece haberle dicho: “¿Ud es Zel’dovich? Pensé que era una corporación” (“You are Zel’dovich? I thought you were a corporation”) [Israel, 1987].

vecindad de un agujero negro. Por otro lado, si los agujeros negros pueden describirse completamente en términos del campo gravitacional, parece razonable que el campo gravitacional tenga asociada una entropía. Penrose sugirió que este problema está a su vez asociado con las condiciones de baja entropía del universo primordial [Penrose, 1979].

El estudio de las propiedades físicas de los agujeros negros ha revelado algunos aspectos del comportamiento del campo gravitacional a pequeña escala, donde los efectos cuánticos son relevantes. En ausencia de una teoría cuántica de la gravitación, los agujeros negros se presentan como laboratorios naturales para evaluar y llevar al límite las teorías físicas actuales.



En esta tesis se estudian diversos fenómenos asociados con agujeros negros astrofísicos que permiten comprender mejor algunos de los problemas antes mencionados. En particular, la estructura interna de los agujeros negros, la naturaleza de la entropía gravitacional, el proceso de acreción de materia por agujeros negros en régimen de campo fuerte. Se analiza también el rol de los agujeros negros en la caracterización de la segunda ley de la termodinámica e implicaciones de los agujeros negros para teorías sobre la naturaleza del espacio-tiempo. Finalmente se indaga sobre la existencia misma de estos objetos y la posibilidad de que sistemas dinámicos en colapso puedan simular todas las propiedades que solemos atribuir a los agujeros negros estáticos.

El objeto último de esta tesis es aportar una visión nueva, mediada por la astrofísica, de algunos de los problemas de la física fundamental.

## AGUJEROS NEGROS

---

### 2.1 TEORÍAS DE LA GRAVITACIÓN

#### 2.1.1 Teoría de la Relatividad General

La teoría de la Relatividad General es una teoría acerca del campo gravitacional y los sistemas físicos que interactúan con éste. Contrariamente a las definiciones que suelen encontrarse en la literatura, la Relatividad General no es una teoría acerca del espacio-tiempo [Romero, 2013b]. El concepto de espacio-tiempo, introducido por Minkowski [Minkowski, 1908, 1909], está presupuesto por todas las teorías clásicas de campos. El espacio-tiempo se define como:

*El sistema emergente de la suma ontológica de todos los eventos.*

Una cosa es un individuo dotado de propiedades físicas. Un evento es un cambio de estado en las propiedades de una cosa. Una suma ontológica es un agregado de cosas o propiedades físicas. El espacio-tiempo, entonces, no es ni un concepto ni una abstracción, sino una entidad emergente. Como toda entidad puede ser representado por un concepto. La representación usual para el espacio-tiempo viene dada por una variedad real cuadri-dimensional  $E$  equipada con un tensor métrico  $g_{ab}$ :

$$ST \triangleq \langle E, g_{ab} \rangle.$$

Para poder determinar la estructura geométrica del espacio-tiempo, y luego para especificar los efectos de la gravedad, es necesario determinar la ley que fija la métrica una vez que la fuente del campo gravitacional está dada. La fuente del campo gravitacional son los campos materiales que se representan por el *tensor de energía-momento*  $T_{ab}$ . Este campo tensorial representa las propiedades físicas de los sistemas materiales; en otras palabras, la curvatura de cualquier evento está relacionada con el contenido de energía-momento en ese evento.

Las ecuaciones de campo de la Relatividad General, que representan una ley física básica, fueron descubiertas por Albert Einstein [Einstein, 1915] hace ya 100 años, en noviembre de 1915. Las ecuaciones de campo de Einstein tienen la siguiente forma:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}, \quad (2.1)$$

donde  $R_{ab}$  representa el tensor de Ricci, formado a partir de derivadas segundas de la métrica y  $R \equiv g^{ab}R_{ab}$  denota el escalar de Ricci. Las constantes  $G$  y  $c$  denotan la constante de gravitación universal y la velocidad de la luz, respectivamente. Las ecuaciones de Einstein son un sistema de 10 ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden para los coeficientes del tensor métrico  $g_{ab}$ .

A diferencia de la electrodinámica clásica, la conservación de la masa-energía y momento puede derivarse de las ecuaciones de campo de Einstein:

$$T^{ab}{}_{;b} = 0, \quad (2.2)$$

que también puede escribirse como:

$$\nabla_a T^{ab} = \partial_a T^{ab} + \Gamma^a{}_{ca} T^{cb} + \Gamma^b{}_{ca} T^{ac} = 0, \quad (2.3)$$

donde la conexión afín,  $\Gamma^b{}_{ca}$ , viene dada por:

$$\Gamma^b{}_{ca} = \frac{1}{2} g^{bd} (\partial_c g_{ad} + \partial_a g_{cd} - \partial_d g_{ca}). \quad (2.4)$$

La conexión afín no es un tensor pero puede utilizarse para construir un tensor que está directamente asociado con la curvatura del espacio-tiempo, el tensor de Riemann:

$$R^a{}_{bcd} = \Gamma^a{}_{bd,c} - \Gamma^a{}_{bc,d} + \Gamma^a{}_{ec} \Gamma^e{}_{bd} - \Gamma^a{}_{de} \Gamma^e{}_{bc}. \quad (2.5)$$

Si el espacio-tiempo es plano,  $R^a{}_{bcd} = 0$  ya que las derivadas de la métrica son cero. En cambio si  $\mathcal{K} = R^a{}_{bcd} R^{bcd}{}_a > 0$ , la métrica tiene curvatura positiva.

De acuerdo al *principio de equivalencia* [Einstein, 1907], el campo gravitacional puede ser suprimido localmente en cualquier sistema en caída libre. Matemáticamente esto equivale a que la conexión afín puede anularse localmente mediante una transformación de coordenadas; esto es, el espacio tangente a la variedad que representa el espacio-tiempo es minkowskiano.

Si se considera el límite de campo débil de las Ecs. 2.1, es posible determinar el objeto matemático de la teoría que representa al campo gravitacional. Se encuentra que la métrica representa al campo gravitacional, y la conexión afín la fuerza del mismo. El tensor de Riemann, construido a partir de las derivadas de la conexión afín representa, pues, la tasa de cambio, tanto en espacio como en tiempo, de la fuerza del campo gravitacional.

Las ecuaciones de campo de la Relatividad General pueden obtenerse mediante un principio variacional tal como lo hizo David Hilbert a finales de 1915. Para ello es necesario definir una densidad Lagrangiana gravitacional; ésta debe ser un escalar bajo transformaciones generales de coordenadas y además tiene que depender de las componentes del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . El escalar más simple que puede construirse a partir de la métrica y sus derivadas es el escalar de Ricci  $R$ . Luego, la acción más simple, denominada acción de *Einstein-Hilbert*, tiene la forma:

$$S_{EH} = \int_{\mathcal{R}} R \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.6)$$

donde la *densidad Lagrangiana* es

$$\mathcal{L} = R \sqrt{-g}. \quad (2.7)$$

Introduciendo una variación en la métrica

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

y luego de alguna manipulación algebraica, se obtiene:

$$\delta S_{\text{EH}} = \int_{\mathcal{R}} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.9)$$

Si se exige que  $\delta S_{\text{EH}} = 0$  y considerando que  $\delta g_{\mu\nu}$  es arbitrario, se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío.

### 2.1.2 Teorías alternativas de la Gravitación: teorías $f(R)$

En principio, no existe razón fundamental alguna para restringir la densidad Lagrangiana gravitacional (Ec. 2.7) a una función lineal del escalar de Ricci  $R$  (ver por ejemplo [Magnano et al. 1987](#)). Teorías más generales de la gravitación pueden formularse utilizando funciones no lineales de este escalar. Este es el caso de las llamadas *teorías  $f(R)$*  [[Capozziello & Faraoni, 2011](#)]. En estas teorías, el Lagrangiano de la acción de Einstein-Hilbert, dado por la Ec. 2.6, se generaliza como:

$$S = \frac{c^3}{16\pi G} \int (R + f(R)) \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.10)$$

donde  $g$  es el determinante del tensor métrico, y  $f(R)$  es una función arbitraria del escalar de Ricci. En el formalismo métrico las ecuaciones de campo se obtienen variando la Ec. 2.10 con respecto a la métrica:

$$R_{\mu\nu}(1 + f'(R)) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(R + f(R))(\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f'(R) + \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = 0, \quad (2.11)$$

donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $\square \equiv \nabla_\beta \nabla^\beta$ ,  $f'(R) = df(R)/dR$ , y el tensor de energía-momento está definido como:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.12)$$

Aquí,  $\mathcal{L}_m$  denota el Lagrangiano de la materia.

Las Ecs. 2.11 son un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de cuarto orden para el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Una diferencia importante entre éstas y las ecuaciones de Einstein es que en las teorías  $f(R)$ , el escalar de Ricci  $R$  y la traza  $T$  del tensor de energía-momento están relacionados en forma diferencial, como puede verse tomando la traza de la Ec. 2.11:

$$R(1 + f'(R)) - 2(R + f(R)) - 3\square f'(R) + \frac{16\pi G}{c^4} T = 0. \quad (2.13)$$

Luego, dependiendo de la forma de la función  $f$ , pueden existir soluciones en que la traza del tensor de energía-momento es cero y el escalar de Ricci es no nulo. Como se mostrará en la Sección 2.4, este es el caso para ciertas soluciones de agujeros negros en ausencia de fuentes de materia.

Si el escalar de Ricci es constante ( $R = R_0$ ) y no hay fuentes de materia, las Ecs. 2.11 pueden escribirse como:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu},$$

donde

$$\Lambda \equiv \frac{f(R_0)}{f'(R_0) - 1}, \quad (2.14)$$

y por la Ec. 2.13

$$R_0 = \frac{2f(R_0)}{f'(R_0) - 1}. \quad (2.15)$$

En este caso, pues, cualquier teoría  $f(R)$  es formalmente pero no físicamente equivalente a la Relatividad General con constante cosmológica dada por la Ec. 2.14.

## 2.2 DEFINICIÓN GENERAL DE AGUJERO NEGRO

Antes de presentar las soluciones de agujeros negros tanto en Relatividad General como en teorías  $f(R)$ , es conveniente introducir una definición de agujero negro que sea independiente de las coordenadas utilizadas para describir a estos objetos. Para ello son necesarios algunos conceptos preliminares (e.g. [Hawking & Ellis, 1973; Wald, 1984]).

**Definición.** Una curva causal en un espacio-tiempo  $(E, g_{ab})$  es una curva que no es tipo espacio, esto es, o es tipo tiempo o es tipo luz.

Un espacio-tiempo  $(E, g_{ab})$  es orientable temporalmente si se puede definir sobre  $E$  un campo vectorial suave no nulo tipo tiempo.

**Definición.** Si  $(E, g_{ab})$  es un espacio-tiempo orientable temporalmente, luego  $\forall p \in E$ , el futuro causal de  $p$ , denotado  $J^+(p)$ , se define como:

$$J^+(p) \equiv \{q \in E \mid \exists \text{ una curva causal dirigida hacia el futuro de } p \text{ a } q\}. \quad (2.16)$$

En forma similar,

**Definición.** Si  $(E, g_{ab})$  es un espacio-tiempo orientable temporalmente, luego  $\forall p \in E$ , el pasado causal de  $p$ , denotado  $J^-(p)$ , se define como:

$$J^-(p) \equiv \{q \in E \mid \exists \text{ una curva causal dirigida hacia el pasado de } p \text{ a } q\}. \quad (2.17)$$

El futuro causal y pasado causal de cualquier conjunto  $S \subset E$  están dados por:

$$J^+(S) = \bigcup_{p \in S} J^+(p) \quad (2.18)$$

y,

$$J^-(S) = \bigcup_{p \in S} J^-(p). \quad (2.19)$$

Un conjunto  $S$  se dice *acronal* si no existen dos puntos de  $S$  que estén relacionados mediante una curva tipo tiempo. Una *superficie de Cauchy* es una superficie acronal tal que toda curva que no es tipo espacio en  $E$  cruza una vez, y sólo una vez  $S$ . Un espacio-tiempo  $(E, g_{ab})$  es *globalmente hiperbólico* si y sólo si admite una hipersuperficie tipo espacio  $S \subset M$  que es una superficie de Cauchy para  $E$ .

Si se considera un espacio-tiempo donde todas las geodésicas nulas que comienzan en una región  $\mathcal{J}^-$  finalizan en  $\mathcal{J}^+$ , dicho espacio-tiempo,  $(E, g_{ab})$  se dice que contiene un *agujero negro* si  $E$  no está contenido en  $J^-(\mathcal{J}^+)$ . En otras palabras, existe una región desde donde ninguna geodésica nula puede alcanzar el espacio-tiempo futuro *asintóticamente plano*, o en forma equivalente, existe una región de  $E$  que está desconectada causalmente del futuro global. La región del agujero negro,  $BH$ , de dicho espacio-tiempo es  $BH = [E - J^-(\mathcal{J}^+)]$ , y el límite de  $BH$  en  $E$ ,  $H = J^-(\mathcal{J}^+) \cap E$ , es el *horizonte de eventos*.

Un agujero negro es una región del espacio-tiempo desconectada causalmente del resto del universo: ningún evento en esta región tiene influencia alguna sobre eventos fuera de la región. El horizonte de eventos es, precisamente, el límite que separa los eventos interiores al agujero negro de los eventos en el futuro global del espacio-tiempo externo al agujero negro. Los eventos en el agujero negro, no obstante, están determinados causalmente por eventos pasados. Un agujero negro no representa un quiebre de la causalidad.

## 2.3 SOLUCIONES DE AGUJEROS NEGROS EN RELATIVIDAD GENERAL

### 2.3.1 Agujeros negros de Schwarzschild

La solución de las ecuaciones de Einstein que describe la geometría del espacio-tiempo fuera de una distribución esféricamente simétrica de materia  $M$  en coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$  tiene la forma [Schwarzschild, 1916b]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.20)$$

De la expresión anterior se observa que la métrica diverge en  $r = 0$  y también en

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.21)$$

El radio denotado  $r_s$  se denomina *radio de Schwarzschild* del objeto de masa  $M$ . Para objetos no muy densos,  $r_s$  está por dentro del radio

externo del sistema físico, y la solución 2.20 es sólo válida en la región exterior al mismo. Por ejemplo, en el caso del Sol  $r_S \approx 3 \text{ km}$  ( $1 R_\odot = 6,955 \times 10^5 \text{ km}$ ). En cambio, para un objeto puntual, el radio de Schwarzschild está en la región de vacío y la geometría de todo el espacio-tiempo queda completamente descrita por la métrica 2.20.

El tiempo propio, de acuerdo a 2.20 se calcula como:

$$d\tau = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{1/2} dt, \quad (2.22)$$

o

$$dt = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2} d\tau. \quad (2.23)$$

Cuando  $r \rightarrow \infty$  ambos tiempos coinciden; luego  $t$  se interpreta como el tiempo propio medido desde una distancia infinita. Si un sistema con tiempo propio  $\tau$  se acerca a  $r_S$ ,  $dt$  tiende a infinito de acuerdo a 2.23. Para un observador infinitamente distante, el sistema nunca alcanza la superficie de Schwarzschild. En otras palabras, debido a la diferencia introducida por la gravedad entre el tiempo local y el tiempo en el infinito, la radiación emitida desde un dado  $r > r_S$  estará corrida al rojo cuando sea recibida por un observador distante. El corrimiento al rojo se define como:

$$z = \frac{\lambda_\infty - \lambda}{\lambda}, \quad (2.24)$$

y de 2.22 se obtiene:

$$1 + z = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2}. \quad (2.25)$$

Cuando  $r \rightarrow r_S$  el corrimiento al rojo diverge. Esto significa que un fotón necesita infinita energía para escapar de la región interior determinada por  $r_S$ . Los eventos, pues, que ocurren para  $r < r_S$  están desconectados del resto del universo. La superficie de radio  $r = r_S$  es el *horizonte de eventos*. El agujero negro es la región del espacio-tiempo interior al horizonte de eventos.

La divergencia de la métrica 2.20 en  $r = r_S$  se debe a que las coordenadas utilizadas para describir dicha región son inadecuadas. El escalar de Kretschmann, construido a partir de la contracción del tensor de Riemann consigo mismo, está perfectamente definido sobre el horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild:

$$\mathcal{K} = R^{abcd}R_{abcd} = \frac{48G^2M^2}{c^4r^6}. \quad (2.26)$$

El escalar de Kretschmann, sin embargo, no está definido para  $r = 0$ , siendo este punto una singularidad intrínseca de la geometría de Schwarzschild. Este tipo de singularidad se llama una singularidad escalar tipo espacio, ya que el escalar de curvatura diverge, y no hay geodésicas tipo tiempo que puedan evitar la región de divergencia.

El espacio-tiempo de Schwarzschild puede representarse en diferentes sistemas de coordenadas. Una representación usual de la



geometría de Schwarzschild se debe a Gullstrand [Gullstrand, 1922] y Painlevé [Painleve, 1922]. El elemento de línea en las coordenadas de Gullstrand-Painlevé  $(\tilde{t}, r, \theta, \phi)$  es:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 d\tilde{t}^2 + dr^2 + 2\sqrt{\frac{2GM}{c^2}} d\tilde{t} dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.27)$$

donde la coordenada temporal  $\tilde{t}$  está relacionada con las coordenadas de Schwarzschild mediante la transformación:

$$d\tilde{t} = dt + \frac{dr}{\frac{r-2M}{\sqrt{2Mr}}}. \quad (2.28)$$

Una propiedad notable de las coordenadas de Gullstrand-Painlevé es que las hipersuperficies  $\tilde{t}$  constante son planas; esto es, la geometría de cada una de la hipersuperficies es euclidea. Por otro lado, de la expresión 2.27 se observa que la métrica es regular sobre el horizonte de eventos.

### 2.3.1.1 Trayectorias de partículas en el espacio-tiempo de Schwarzschild

Las ecuaciones de las geodésicas en el espacio-tiempo de Schwarzschild pueden obtenerse considerando el Lagrangiano  $L = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$  que está dado por<sup>1</sup>:

$$L = -c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2), \quad (2.29)$$

donde  $\dot{x}^\alpha \equiv dx^\alpha/d\sigma$ , siendo  $\sigma$  un parámetro afín a lo largo de la geodésica  $x^\alpha(\sigma)$ , y  $\mu \equiv GM/c^2$ .

Si se reemplaza la expresión 2.29 en las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (2.30)$$

las ecuaciones de las geodésicas (para  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ) son:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \dot{t} &= k, \\ \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} \dot{r} + \frac{\mu c^2}{r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-2} \frac{\mu}{r^2} \dot{r}^2 - r (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) &= 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 &= 0, \\ r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 &= h, \end{aligned}$$

donde  $k$  y  $h$  son constantes. Dado que la métrica de Schwarzschild es esféricamente simétrica, se pueden estudiar sin pérdida de gene-

<sup>1</sup> Para el análisis de las trayectorias de partículas en el espacio-tiempo de Schwarzschild se sigue el tratamiento dado por Hobson et al. 2006.

ralidad, las trayectorias de las partículas sobre el plano ecuatorial ( $\theta = \pi/2$ ). El conjunto de ecuaciones anterior entonces resulta:

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (2.31)$$

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{\mu c^2}{r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-2} \frac{\mu}{r^2} \dot{r}^2 - r \dot{\phi}^2 = 0, \quad (2.32)$$

$$r^2 \dot{\phi}^2 = h. \quad (2.33)$$

Estas ecuaciones son válidas tanto para geodésicas correspondientes a fotones como para partículas masivas. A continuación se procederá a estudiar las trayectorias circulares de éstas últimas.

La trayectoria de una partícula masiva es una geodésica tipo tiempo; resulta, pues, conveniente elegir para el parámetro afín  $\sigma$  el tiempo propio  $\tau$  asociado a la partícula. La Ecuación 2.32 puede reemplazarse por:

$$g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = c^2, \quad (2.34)$$

que en función de los coeficientes de la métrica toma la forma:

$$c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = c^2, \quad (2.35)$$

Si se sustituye las Ecs. 2.31, y 2.33 en 2.35, se obtiene la ecuación de la energía para la coordenada radial  $r$ :

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) - \frac{\mu c^2}{r} = c^2(k-1). \quad (2.36)$$

La constante  $k$  se define como  $k = E/m_0 c^2$ , donde  $E$  representa la energía total de la partícula en su órbita, y  $m_0$  su masa; la constante  $h$  denota el momento angular de la partícula. De esta última ecuación se identifica el potencial efectivo por unidad de masa como:

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{\mu c^2}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{\mu h^2}{r^3}, \quad (2.37)$$

que posee un término adicional proporcional a  $1/r^3$  comparado al caso Newtoniano.

En la Figura 1 se muestra el gráfico del potencial efectivo (Ec. 2.37) en función de la coordenada radial  $r$  para distintos valores de  $\bar{h} = h/c\mu$ . Los puntos indican la localización de las órbitas circulares estables. El valor de la coordenada radial  $r$  correspondiente a los extremos del potencial efectivo se obtienen resolviendo la ecuación  $dV_{\text{ef}}(r)/dr = 0$ :

$$r = \frac{h}{2\mu c^2} \left( h \pm \sqrt{h^2 - 12\mu^2 c^2} \right). \quad (2.38)$$

De la expresión anterior se infiere que los valores de  $r$  para los cuales el potencial se hace extremo sólo dependen de la masa del objeto central  $M$  y del momento angular de la partícula  $h$ . En particular, si  $\bar{h} = 2\sqrt{3}$  existe un único extremo cuya coordenada radial es:

$$r_{\text{min}} = 6\mu = \frac{6GM}{c^2}, \quad (2.39)$$

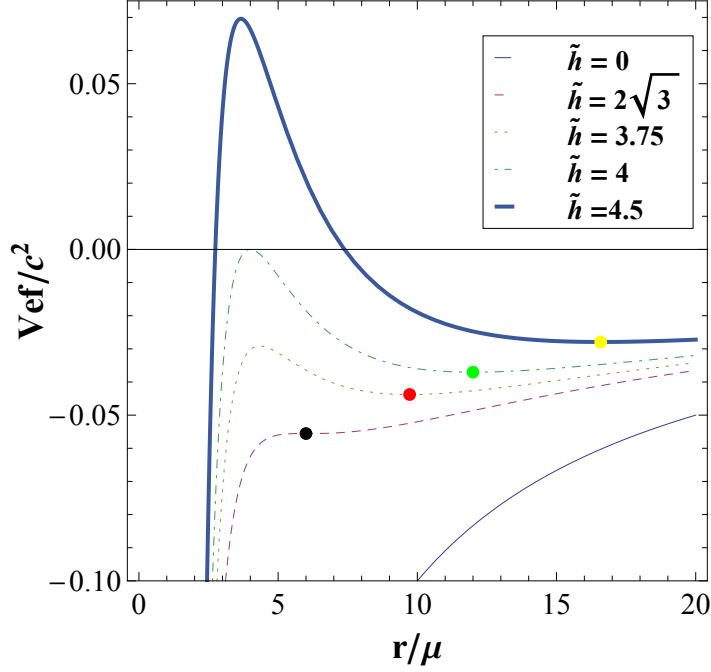


Figura 1: Potencial efectivo en función de la coordenada radial para distintos valores del momento angular  $\tilde{h}$  en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Los puntos indican la posición de la última órbita circular estable.

que además cumple con la condición de estabilidad:

$$\frac{d^2 V_{\text{ef}}(r)}{dr^2} \Big|_{r_{\text{min}}} > 0. \quad (2.40)$$

Para  $\tilde{h} < 2\sqrt{3}$ , el potencial efectivo carece de puntos de retorno. Luego,  $r_{\text{min}}$  es el valor del radio de la última órbita circular estable en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

La trayectoria de un fotón es una geodésica nula. Para parametrizar dichas trayectorias ya no puede utilizarse el tiempo propio  $\tau$ , sino un cierto parámetro afín  $\sigma$  a lo largo de la geodésica. Como en el caso de las partículas masivas, se considerará el movimiento de los fotones en el plano ecuatorial. Las ecuaciones de las geodésicas son ( $g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$ ):

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (2.41)$$

$$-c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = 0, \quad (2.42)$$

$$r^2 \dot{\phi}^2 = h. \quad (2.43)$$

La ecuación para la energía se obtiene sustituyendo las Ecs. 2.41 y 2.43 en la Ec. 2.42:

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) = c^2 k^2. \quad (2.44)$$

Esta última ecuación puede escribirse como:

$$\frac{\dot{r}^2}{h^2} + V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{b^2}, \quad (2.45)$$

donde  $b = h/ck$  denota el *parámetro de impacto* y el potencial efectivo es:

$$V_{\text{ef}} = \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2\mu}{r} \right). \quad (2.46)$$

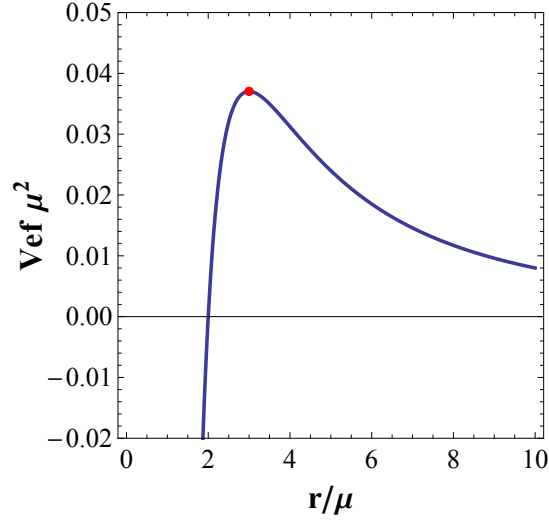


Figura 2: Potencial efectivo en función de la coordenada radial para fotones en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

El gráfico del potencial efectivo en función de la coordenada radial se muestra en la Figura 2; se observa que hay un único máximo para  $r = 3\mu$ , que corresponde a una órbita circular inestable. Luego, en el espacio-tiempo de Schwarzschild no existen órbitas de fotones circulares estables. Por otro lado, dependiendo del valor del parámetro de impacto  $b$  dos tipos de trayectorias son posibles: los fotones pueden acercarse al objeto central y luego alejarse del mismo, o pueden ser capturados por el agujero negro, en cuyo caso, el destino final será inexorablemente la singularidad central.

Para fotones moviéndose en órbitas radiales  $\dot{\phi} = 0$ , la Ec. 2.42 se reduce a:

$$-c^2 \left( 1 - \frac{2\mu}{r} \right) \dot{t}^2 + \left( 1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 = 0, \quad (2.47)$$

de la cual se deriva:

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left( 1 - \frac{2\mu}{r} \right). \quad (2.48)$$

La trayectoria para fotones salientes y entrantes se obtiene integrando la última ecuación:

$$ct = r + 2\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right| + \text{constante, fotones salientes} \quad (2.49)$$

$$ct = -r - 2\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right| + \text{constante, fotones entrantes.} \quad (2.50)$$

De la Ec. 2.48 (ver Figura 3) se observa que las líneas de mundo de los fotones tienen pendientes  $\pm 1$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , esto es, lejos de la fuente de campo gravitacional los conos de luz se corresponden con los del espacio-tiempo de Minkowski. Cerca del horizonte de eventos ( $r \rightarrow 2\mu$ ), sin embargo, las pendientes de los conos tienden a  $\pm\infty$ : los conos de luz se cierran cada vez más y más al acercarse a  $r = 2\mu$ .

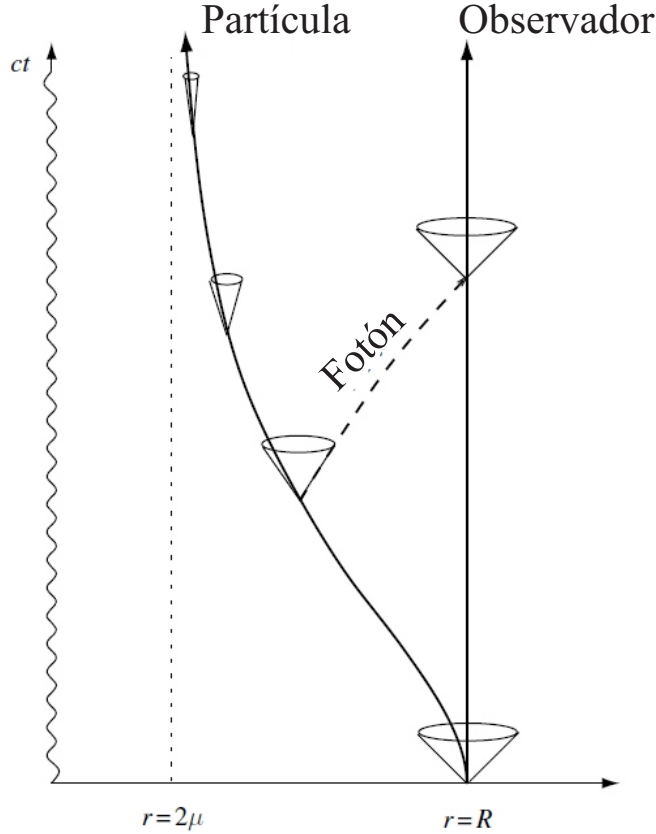


Figura 3: Los conos de luz a medida que se acercan al horizonte de eventos se van cerrando cada vez más. Para un observador distante, una partícula tarda un tiempo infinito en cruzar el horizonte de eventos.

La Ec. 2.50 puede utilizarse para construir un nuevo sistema de coordenadas donde la métrica sea regular sobre el horizonte de eventos. La constante de integración en la Ec.2.50 se toma como una nueva coordenada, que se denotará  $p$ . Luego, la transformación de coordenadas es:

$$p = ct + r + 2\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right|. \quad (2.51)$$

Si se calcula el diferencial de esta última ecuación y reemplaza en el elemento de línea de Schwarzschild (Ec. 2.20) resulta:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2\mu}{r} \right) dp^2 + 2 dp dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.52)$$

La métrica es ahora regular en  $r = 2\mu$ . La única singularidad real es en  $r = 0$ , donde el tensor de Riemann diverge.

Dado que  $p$  es una coordenada nula, se introduce una nueva coordenada tipo tiempo  $t'$  definida como:

$$ct' \equiv p - r = ct + 2\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right|. \quad (2.53)$$

El elemento de línea toma la forma:

$$ds^2 = -c^2 \left( 1 - \frac{2\mu}{r} \right) dt'^2 + \frac{4\mu c}{r} dt' dr + \left( 1 + \frac{2\mu}{r} \right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.54)$$

que es regular en todo el rango  $0 < r < \infty$ . Las coordenadas  $(t', r, \theta, \phi)$  se denominan *coordenadas avanzadas de Eddington-Filkenstein*. En estas coordenadas, las líneas de mundo de fotones entrantes y salientes vienen dadas por las ecuaciones:

$$ct' = -r + \text{constante}, \quad (2.55)$$

$$ct' = r + 4\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right| + \text{constante}. \quad (2.56)$$

La primera ecuación, para fotones entrantes, corresponde a líneas rectas continuas a través de  $r = 2\mu$  que forman un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $r$ . Los conos de luz, a medida que se acercan a la fuente de campo gravitacional, se van inclinando pasando en forma continua, de la región I a la región II, exterior e interior al agujero negro respectivamente, como se observa en el diagrama de la Figura 4. Sobre el horizonte de eventos, la línea de mundo de los fotones coincide con el horizonte, que es una superficie nula.

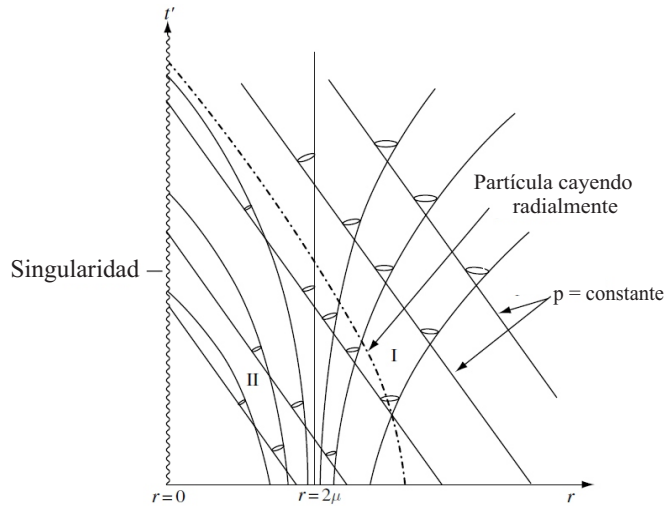


Figura 4: Diagrama espacio-temporal en coordenadas avanzadas de Eddington-Filkenstein donde se muestran los conos de luz cerca y dentro de un agujero negro de Schwarzschild.

En forma análoga, se puede introducir un nuevo sistema de coordenadas tomando la trayectoria de fotones salientes. A partir de la Ec. 2.49 se define la nueva coordenada nula  $q$  como:

$$q = ct - r - 2\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right|. \quad (2.57)$$

El elemento de línea de Schwarzschild se escribe entonces como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dq^2 - 2 dp dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.58)$$

que es nuevamente regular para  $0 < r < \infty$ . En forma similar al tratamiento de las coordenadas avanzadas de Eddington-Filkenstein, se introduce una coordenada temporal  $t^*$  dada por:

$$ct^* \equiv q + r = ct - 2\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right|. \quad (2.59)$$

Las coordenadas  $(t^*, r, \theta, \phi)$  se denominan *coordenadas retardadas de Eddington-Filkenstein*, y el correspondiente elemento de línea en estas coordenadas es simplemente el reverso temporal de la Ec. 2.54.

La estructura causal del espacio-tiempo resulta la opuesta que para las coordenadas avanzadas de Eddington-Filkenstein; las geodésicas tipo tiempo o nulas salientes sólo pueden cruzar de la región interior a la exterior del agujero negro. Ninguna partícula inicialmente fuera del agujero puede ingresar a éste: toda partícula es expelida de la región  $r < 2\mu$ . Esta clase de objetos teóricos se denominan *agujeros blancos*. No hay evidencia alguna de la existencia de agujeros blancos en el universo. Este tipo de objetos son inestables gravitacionalmente [Frolov, 1974; Zeldovich et al., 1974]

Las coordenadas de Eddington-Filkenstein avanzadas y retardadas no resultan satisfactorias para describir completamente la geometría del espacio-tiempo de Schwarzschild. Tanto las trayectorias de fotones radiales entrantes y salientes son discontinuas en las coordenadas avanzadas y retardadas, respectivamente.

Las *coordenadas de Kruskal-Szekeres* [Kruskal, 1960; Szekeres, 1960] cubren toda la variedad del espacio-tiempo de la solución maximalmente extendida de Schwarzschild y son bien comportadas en todo punto fuera de la singularidad  $r = 0$ . Estas coordenadas permiten, además, remover la singularidad no física en  $r = 2\mu$ . La transformación de coordenadas para la región  $r > 2\mu$  es:

$$v = \left(\frac{r}{2\mu} - 1\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{4\mu}\right) \sinh\left(\frac{ct}{4\mu}\right), \quad (2.60)$$

$$u = \left(\frac{r}{2\mu} - 1\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{4\mu}\right) \cosh\left(\frac{ct}{4\mu}\right), \quad (2.61)$$

mientras que para la región  $r < 2\mu$ :

$$v = \left(1 - \frac{r}{2\mu}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{4\mu}\right) \cosh\left(\frac{ct}{4\mu}\right), \quad (2.62)$$

$$u = \left(1 - \frac{r}{2\mu}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{4\mu}\right) \sinh\left(\frac{ct}{4\mu}\right). \quad (2.63)$$

El elemento de línea en coordenadas de Kruskal-Szekeres  $(v, u, \theta, \phi)$  resulta:

$$ds^2 = -\frac{32\mu^3}{r} \exp\left(\frac{-r}{2\mu}\right) (dv^2 - du^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.64)$$

Las curvas con  $r = \text{constante}$  son hipérbolas y satisfacen:

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2\mu} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2\mu}\right), \tag{2.65}$$

mientras que las curvas con  $t = \text{constante}$  son líneas rectas que pasan por el origen:

$$\frac{u}{v} = \tanh\left(\frac{ct}{4\mu}\right), \text{ si } r < 2\mu, \tag{2.66}$$

$$\frac{u}{v} = \coth\left(\frac{ct}{4\mu}\right), \text{ si } r > 2\mu. \tag{2.67}$$

En la Figura 5 se muestra el espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal-Szekeres. Cada hipérbola representa un conjunto de eventos de radio constante en las coordenadas de Schwarzschild. La línea de mundo radial de un fotón ( $ds = 0$ ) se representa en este diagrama como una línea recta formando un ángulo de  $\pm 45^\circ$  con el eje  $u$ . Una trayectoria tipo tiempo tiene siempre una pendiente mayor a  $45^\circ$ , mientras que una trayectoria tipo espacio tiene una pendiente menor a  $45^\circ$ . Una partícula que cae en el agujero negro cruza la línea recta a  $45^\circ$  y alcanza la singularidad en  $r = 0$ . Para un observador externo, esto ocurre en un tiempo infinito. Las coordenadas de Kruskal-Szekeres son particularmente útiles ya que las geodésicas radiales nulas salientes y entrantes vienen dadas por las simples fórmulas  $u = \text{constante}$ , y  $v = \text{constante}$ , respectivamente. Los horizontes de eventos futuros y pasados satisfacen la ecuación  $uv = 0$ , mientras que la singularidad cumple con la ecuación  $uv = 1$ .

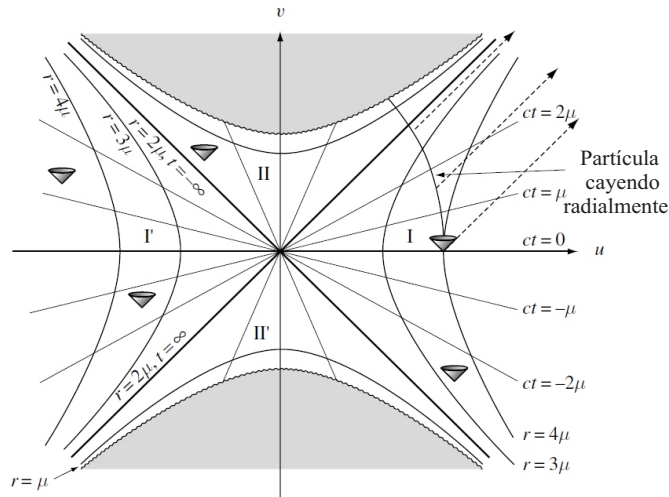


Figura 5: Diagrama espacio-temporal en coordenadas de Kruskal-Szekeres.

### 2.3.2 Diagrama de Penrose de un agujero negro de Schwarzschild

El diagrama de Penrose o Penrose-Carter es un diagrama bidimensional que representa la estructura causal del espacio-tiempo. Es una extensión del diagrama de Minkowski donde el eje vertical representa



la dimensión temporal, y el eje horizontal representa la dimensión espacial, mientras que las líneas a  $45^\circ$  corresponden a los rayos de luz. La principal diferencia con el diagrama de Minkowski es que, localmente, la métrica en un diagrama de Penrose es equivalentemente conforme a la métrica actual del espacio-tiempo. El factor conforme se elige de manera tal que el espacio-tiempo infinito se transforma en un diagrama de Penrose de dimensión finita. Para espacios-tiempos esféricamente simétricos, cada punto en el diagrama corresponde a una 2-esfera. En la Figura 6 se muestra un diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Minkowski.

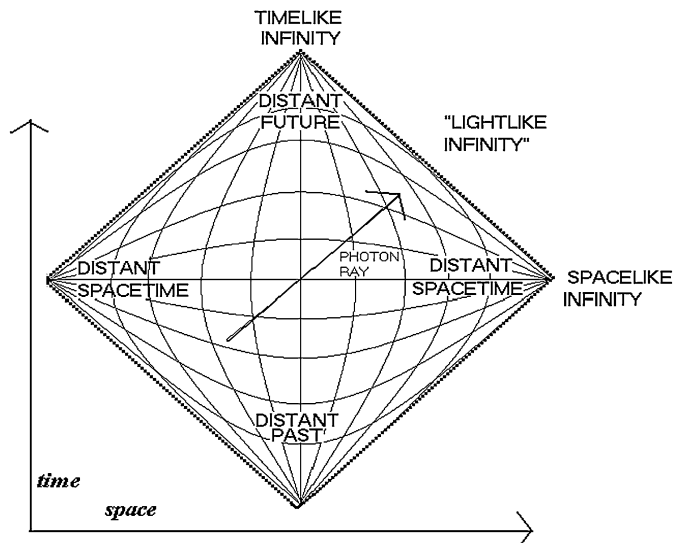


Figura 6: Diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Minkowski.

En la Figura 7 se presenta un diagrama de Penrose de un agujero negro de Schwarzschild. La trayectoria en el diagrama, representa una partícula que va desde un punto en nuestro universo hacia el agujero negro, arribando finalmente a la singularidad. Se muestra además una extensión del espacio-tiempo de Schwarzschild, también presente en el diagrama de Kruskal-Szekeres, donde está representado un agujero blanco y un universo paralelo pero inaccesible. Un agujero blanco representa una singularidad desnuda [Ne'eman, 1965; Novikov, 1966]. Éste actúa como una fuente que eyecta materia de su horizonte de eventos; dado que los agujeros blancos no pueden ser el resultado del colapso gravitacional de un objeto en el universo real, éstos pueden pensarse como características intrínsecas del espacio-tiempo. La existencia de los mismos, sin embargo, parece improbable ya que son inestables por la interacción de la materia circundante [Frolov, 1974] y por procesos cuánticos de creación de partículas en el campo gravitacional de los agujeros [Zeldovich et al., 1974].

### 2.3.3 Agujeros negros de Reissner-Nordström

La métrica de Reissner-Nordström es una solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein para una fuente de masa  $M$  y

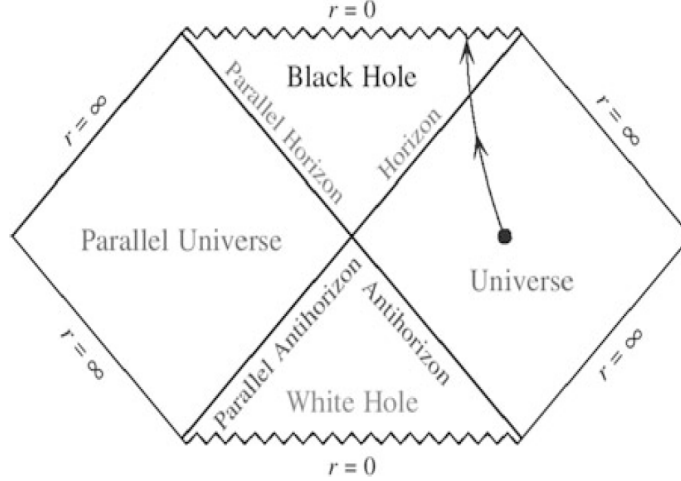


Figura 7: Diagrama de Penrose de un agujero negro de Schwarzschild.

carga eléctrica  $Q$ , que genera un campo electromagnético. El tensor de energía-momento, luego, es no nulo y tiene la forma:

$$T_{\mu\nu} = -\mu_0^{-1} \left( F_{\mu\rho} F^{\rho\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right), \quad (2.68)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética en el vacío,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  es el tensor de campo electromagnético y  $A_\mu$  es el cuadri-potencial electromagnético. Fuera del objeto cargado la cuadri-corriente  $j^\mu$  es cero, y entonces las ecuaciones de Maxwell son:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (2.69)$$

$$F_{\mu\nu;\sigma} + F_{\sigma\mu;\nu} + F_{\nu\sigma;\mu} = 0. \quad (2.70)$$

Las ecuaciones de Einstein y Maxwell están acopladas dado que  $F^{\mu\nu}$  está presente en el tensor de energía-momento y la métrica  $g_{\mu\nu}$  entra en las ecuaciones del electromagnetismo a través de la derivada covariante.

La solución para la métrica viene dada por:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right) + \left( 1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.71)$$

donde  $q$  y la carga eléctrica total  $Q$  están relacionadas por:

$$q = \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4}. \quad (2.72)$$

La métrica tiene singularidades de coordenadas para:

$$1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2} = 0, \quad (2.73)$$

cuyas soluciones son:

$$r_{\pm} = \mu \pm (\mu^2 - q^2)^{1/2}. \quad (2.74)$$

Para  $\mu = q$  se tiene un agujero negro de Reissner-Nordström extremo con un único horizonte de eventos en  $r = \mu$ . Para  $\mu^2 > q^2$ , existen dos horizontes de eventos; en caso contrario ningún horizonte oculta la singularidad intrínseca en  $r = 0$ .

#### 2.3.4 Agujeros negros de Kerr

La métrica de Kerr describe la geometría del espacio-tiempo exterior a un objeto rotante de masa  $M$  y momento angular  $a = J/M$ ; el elemento de línea es:

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 - 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2, \quad (2.75)$$

$$g_{tt} = (c^2 - 2GMr\rho^{-1}), \quad (2.76)$$

$$g_{t\phi} = 2GMa c^{-2} \rho^{-1} r \sin^2 \theta \quad (2.77)$$

$$g_{\phi\phi} = [(r^2 + a^2 c^{-2})^2 - a^2 c^{-2} \Delta \sin^2 \theta] \rho^{-1} \sin^2 \theta, \quad (2.78)$$

$$g_{rr} = \rho \Delta^{-1}, \quad (2.79)$$

$$g_{\theta\theta} = \rho, \quad (2.80)$$

$$\rho \equiv r^2 + a^2 c^{-2} \cos^2 \theta, \quad (2.81)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2GMc^{-2}r + a^2 c^{-2}. \quad (2.82)$$

Esta es la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist  $(t, r, \theta, \phi)$ ; se reduce a la métrica de Schwarzschild para  $a = 0$ .

Así como la solución de Schwarzschild es la única solución estática de vacío de las ecuaciones de Einstein [Israel, 1967], la métrica de Kerr es la única solución axisimétrica estacionaria de vacío de las ecuaciones de campo de la Relatividad General [Carter, 1971; Hawking, 1972; Robinson, 1975]. Debe notarse que no existe un teorema de Birkoff (ver Sec. 2.5.1) asociado a la métrica de Kerr. Fuera de una estrella rotante, la geometría del espacio-tiempo no está representada por dicha métrica; una estrella rotante genérica puede tener multipolos gravitacionales que no son los mismos que en el espacio-tiempo de Kerr. Si una estrella en rotación colapsa a un agujero negro, la métrica exterior se acercará asintóticamente a la de Kerr. Este no es el caso para un colapso esféricamente simétrico, donde la geometría externa es siempre la de Schwarzschild [Teukolsky, 2014].

La ecuación que satisface la superficie del horizonte de eventos queda determinada por la condición  $g_{rr} \rightarrow \infty$  ( $\Delta = 0$ ), que corresponde a la coordenada radial:

$$r_{\pm} \equiv GMc^{-2} \pm \left[ (GMc^{-2})^2 - a^2 c^{-2} \right]^{1/2}. \quad (2.83)$$

La métrica de Kerr posee, pues, dos horizontes de eventos  $r_+$  y  $r_-$ , respectivamente. En el límite de Schwarzschild  $a \rightarrow 0$ , la Ec. 2.83 se reduce a  $r_+ \rightarrow 2GM/c^2$  y  $r_- \rightarrow 0$ .

El segundo horizonte,  $r_-$ , es interno al horizonte de eventos externo  $r_+$ , y por lo tanto no puede ser visto por un observador fuera del agujero negro; además, el horizonte interno oculta la singularidad. De

la Ec. 2.83, si  $(GMc^{-2})^2 - a^2c^{-2} < 0$  no existen horizontes de eventos y se tiene una singularidad desnuda.

Si una partícula cae radialmente hacia un agujero negro desde el infinito con cero momento angular, durante su caída ganará momento. La velocidad angular para un observador distante es:

$$\Omega(r, \theta) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{(2GM/c^2)ar}{(r^2 + a^2c^{-2})^2 - a^2c^{-2}\Delta \sin^2 \theta}. \quad (2.84)$$

Una partícula que cae hacia el agujero negro desde el infinito adquirirá una velocidad angular en la dirección del espín del agujero negro. Al acercarse a éste, la partícula tenderá a moverse en el mismo sentido en que el agujero negro está rotando. Si la partícula ha de mantenerse estacionaria respecto a las estrellas distantes, será necesario aplicar una fuerza que contraresta esta tendencia; cuanto más cerca esté la partícula del agujero negro, mayor deberá ser la fuerza. En el punto  $r_e$  ya es imposible no co-rotar con el agujero negro. La superficie determinada por  $r_e$  es el *límite estático*. La región entre el límite estático y el horizonte de eventos se denomina *ergosfera*. La ergosfera no es esférica sino que su forma cambia con la latitud  $\theta$ , y puede determinarse resolviendo la ecuación  $g_{tt} = 0$ :

$$r_e = \frac{GM}{c^2} + \frac{1}{c^2} (G^2M^2 - a^2c^2 \cos^2 \theta)^{1/2}. \quad (2.85)$$

La superficie del límite estático y el horizonte sólo coinciden en los polos (ver Fig. 8). El fenómeno de "arrastré inercial"<sup>2</sup> es común a todas las métricas axialmente simétricas con  $g_{t\phi} \neq 0$ .

Las singularidades esenciales del espacio-tiempo de Kerr pueden determinarse analizando las divergencias del correspondiente escalar de Kretschmann:

$$\mathcal{K} = \frac{48M^2G^2}{c^4} \frac{(r^2 - a^2c^{-2} \cos^2 \theta) [\rho^2 - (4rac^{-1} \cos \theta)^2]}{\rho^6}. \quad (2.86)$$

De esta última ecuación se infiere que  $\mathcal{K} \rightarrow \infty$  para todo valor de las coordenadas  $r$  y  $\theta$  que cumplen:

$$r^2 + a^2c^{-2} \cos^2 \theta = 0. \quad (2.87)$$

Esta condición se satisface solamente para  $r = 0$  y  $\theta = \pi/2$ , que en coordenadas cartesianas

$$x = \sqrt{r^2 + a^2c^{-2}} \sin \theta \cos \phi, \quad (2.88)$$

$$y = \sqrt{r^2 + a^2c^{-2}} \sin \theta \sin \phi, \quad (2.89)$$

$$z = r \cos \theta, \quad (2.90)$$

cumplen:

$$x^2 + y^2 = a^2c^{-2} \quad y \quad z = 0. \quad (2.91)$$

La singularidad es un anillo de radio  $ac^{-1}$  en el plano ecuatorial. Si  $a = 0$ , se recupera la singularidad puntual de Schwarzschild. Si

<sup>2</sup> *Frame dragging*.

$a \neq 0$  la singularidad no se encuentra necesariamente en el futuro de todos los eventos con coordenada radial  $r < r_-$ : la singularidad puede evitarse para algunas geodésicas. Se trata pues, de una singularidad escalar tipo tiempo.

El elemento de línea en coordenadas de Boyer-Lindquist para  $a \rightarrow 0$  se reduce:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{r^2 + a^2 c^{-2} \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 c^{-2}} dr^2 + (r^2 + a^2 c^{-2} \cos^2 \theta) d\theta^2 + (r^2 + a^2 c^{-2}) \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.92)$$

Esta es la métrica del espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas esferoidales oblatas, cuya relación con las coordenadas cartesianas viene dada por las Ecs. 2.88, 2.89, y 2.90.

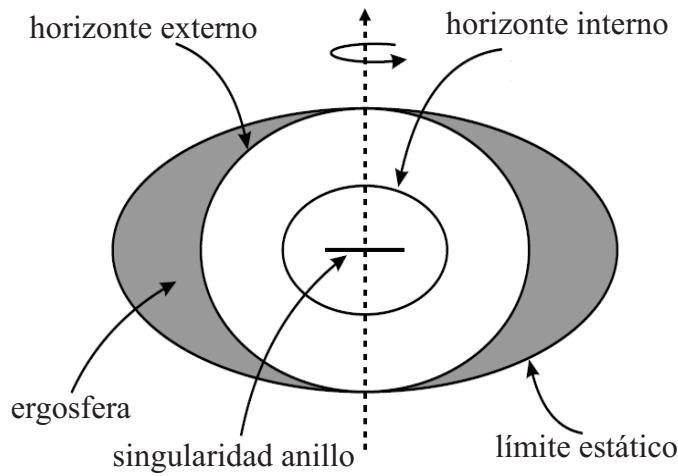


Figura 8: Esquema del interior de un agujero negro de Kerr.

La geometría del espacio-tiempo de Kerr puede representarse en varios sistemas de coordenadas; verbigracia, en coordenadas cartesianas  $(t, x, y, z)$  en la forma de Kerr-Schild [Kerr, 1963b,a], en coordenadas de Eddington-Filkenstein  $(v, r, \theta, \phi)$ , entre otros. En particular, Doran [Doran, 2000] introdujo un nuevo sistema de coordenadas tal que para  $a \rightarrow 0$  se obtiene la forma de Gullstrand-Painlevé del elemento de línea de Schwarzschild. En términos de las coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  el elemento de línea de Kerr en la forma de Doran se escribe como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 - 2\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} dt dr - 4aMr \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + 2a\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} \sin^2 \theta d\phi dr + \rho^2 d\theta^2 + \left[(r^2 + a^2) + 2Mra^2 \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}\right] \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.93)$$

En el límite  $a \rightarrow 0$ , la expresión anterior se reduce a 2.27. Por otro lado, si  $M \rightarrow 0$  se recupera el elemento de línea en el espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas esferoidales oblatas.

La métrica dada por la 4.95 se obtiene de la solución de Kerr en coordenadas avanzadas de Eddington-Filkenstein ( $v, r, \theta, \tilde{\phi}$ ):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dv^2 + 2dv dr - \frac{4Mra}{\rho^2} \sin^2 \theta dv d\tilde{\phi} \\ &\quad - 2a \sin^2 \theta dr d\tilde{\phi} + \rho^2 d\theta^2 \\ &\quad + \left[ (r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2Mra^2 \sin^4 \theta}{\rho^2} \right] d\tilde{\phi}^2, \end{aligned} \quad (2.94)$$

mediante la transformación:

$$dt = dv - \frac{dr}{1 + [2Mr/(r^2 + a^2)]^{1/2}}, \quad (2.95)$$

$$d\phi = d\tilde{\phi} - \frac{adr}{r^2 + a^2 + [2Mr(r^2 + a^2)]^{1/2}}. \quad (2.96)$$

#### 2.3.4.1 Trayectorias de partículas en el espacio-tiempo de Kerr

La geometría del espacio-tiempo de Kerr es estacionaria y axialmente simétrica. Luego, tanto las trayectorias de partículas masivas como de fotones no están circunscritas a un dado plano ya que el momento angular no se conserva. Existen dos cantidades, sin embargo, que se conservan a lo largo de las geodésicas:  $p_t$  y  $p_\phi$  (la métrica no depende en forma explícita de  $t$  y  $\phi$ ); esta última corresponde a la conservación del momento angular a lo largo del eje de rotación. Dado que la métrica es simétrica respecto al plano ecuatorial, partículas que inicialmente tienen  $p_\theta = 0$  permanecerán en dicho plano. Para simplificar los cálculos, se estudiarán las trayectorias de partículas con  $\theta = \pi/2$ ; la métrica 2.75 entonces resulta:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dt^2 - \frac{4\mu ac}{r} dt d\phi + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu a^2}{r}\right) d\phi^2. \quad (2.97)$$

Las ecuaciones de las geodésicas pueden obtenerse mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange. Es más simple, sin embargo, utilizar la propiedad de conservación de  $p_t$  y  $p_\phi$ :

$$p_t = g_{tt}\dot{t} + g_{t\phi}\dot{\phi} = c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \dot{t} + \frac{2\mu ac}{r} \dot{\phi} = kc^2, \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} p_\phi &= g_{\phi t}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi} \\ &= \frac{2\mu ac}{r} \dot{t} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu a^2}{r}\right) \dot{\phi} = -h, \end{aligned} \quad (2.99)$$

donde las constantes  $k$  y  $h$  coinciden en el límite  $a \rightarrow 0$ , con las correspondientes en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Las soluciones de las Ecs. 2.98, y 2.99 son:

$$\dot{t} = \frac{1}{\Delta} \left[ \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu a^2}{r}\right) k - \frac{2\mu a}{cr} h \right], \quad (2.100)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{2\mu ac}{r} k + \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) h \right]. \quad (2.101)$$

La ecuación para la energía puede derivarse a partir del invariante:

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \epsilon^2, \quad (2.102)$$

donde  $\epsilon^2 = c^2$  para una partícula masiva y  $\epsilon^2 = 0$  para un fotón. Dado que  $p_\theta = 0$ :

$$g^{tt}(p_t)^2 + 2g^{t\phi} p_t p_\phi + g^{\phi\phi}(p_\phi)^2 + g^{rr}(p_r)^2 = \epsilon^2. \quad (2.103)$$

Si se sustituye  $p_t = kc^2$  y  $p_\phi = -h$ ,  $p_r = g_{rr}\dot{r}$ , y  $g^{rr} = 1/g_{rr}$  en la Ec. 2.103, se llega a una expresión para  $\dot{r}$ :

$$\dot{r}^2 = g^{rr} (\epsilon^2 - g^{tt}c^4k^2 + 2g^{t\phi}c^2kh - g^{\phi\phi}h^2), \quad (2.104)$$

que en términos de la forma explícita de los coeficientes contravariantes de la métrica:

$$\dot{r}^2 = c^2k^2 - \epsilon^2 + \frac{2\epsilon^2\mu}{r} + \frac{a^2(c^2k^2 - \epsilon^2) - h^2}{r^2} + \frac{2\mu(h - ack)^2}{r^3}. \quad (2.105)$$

Las Ecs. 2.100, 2.101, y 2.105 determinan completamente las geodésicas nulas y no nulas en el plano ecuatorial.

Las geodésicas tipo tiempo en el plano ecuatorial vienen dadas por las Ecs. 2.100, 2.101, y la ecuación para la energía 2.105 con  $\epsilon^2 = c^2$ :

$$\dot{r}^2 = c^2(k^2 - 1) + \frac{2\mu c^2}{r} + \frac{a^2c^2(k^2 - 1) - h^2}{r^2} + \frac{2\mu(h - ack)^2}{r^3}, \quad (2.106)$$

que puede reescribirse como:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{ef}(r, h, k) = \frac{1}{2}c^2(k^2 - 1), \quad (2.107)$$

donde el potencial efectivo por unidad de masa es:

$$V_{ef}(r, h, k) = -\frac{\mu c^2}{r} + \frac{h^2 - a^2c^2(k^2 - 1)}{2r^2} - \frac{\mu(h - ack)^2}{r^3}. \quad (2.108)$$

De particular interés astrofísico es el estudio de las órbitas circulares y, especialmente del radio de la última órbita circular estable para partículas rotando tanto en la misma dirección como en el dirección opuesta al agujero negro. La ecuación que determina el valor del radio de la última órbita circular estable  $r_{isco}$  se obtiene a partir de las siguientes condiciones:

$$V_{ef}(r_{isco}, h, k) = \frac{c^2}{2}(k^2 - 1), \quad (2.109)$$

$$\left. \frac{dV_{ef}(r, h, k)}{dr} \right|_{r_{isco}} = 0, \quad (2.110)$$

$$\left. \frac{dV_{ef}^2(r, h, k)}{dr^2} \right|_{r_{isco}} = 0. \quad (2.111)$$

Luego de cierta manipulación algebraica (ver por ejemplo [Hobson et al. 2006](#)), se llega a una ecuación de cuarto orden para  $\sqrt{r}$ :

$$r^2 - 6\mu r - 3a^2 \mp 8a\sqrt{\mu r} = 0, \quad (2.112)$$

donde el signo  $- (+)$  corresponde a partículas rotando en (igual) sentido contrario al agujero. En el límite  $a \rightarrow 0$ ,  $r_{\text{isco}} \rightarrow 6\mu$ , que es el valor del radio de la última órbita circular estable en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Para un agujero negro de Kerr extremo  $a = \mu$ ,  $r_{\text{isco}} = \mu$  para partículas rotando en el mismo sentido que el objeto central, y  $r_{\text{isco}} = 9\mu$  en caso contrario. En la Figura 9 se muestra un gráfico del potencial efectivo en función de la coordenada radial para distintos valores del momento angular de un agujero negro de Kerr. Los puntos indican la posición de la última órbita circular estable.

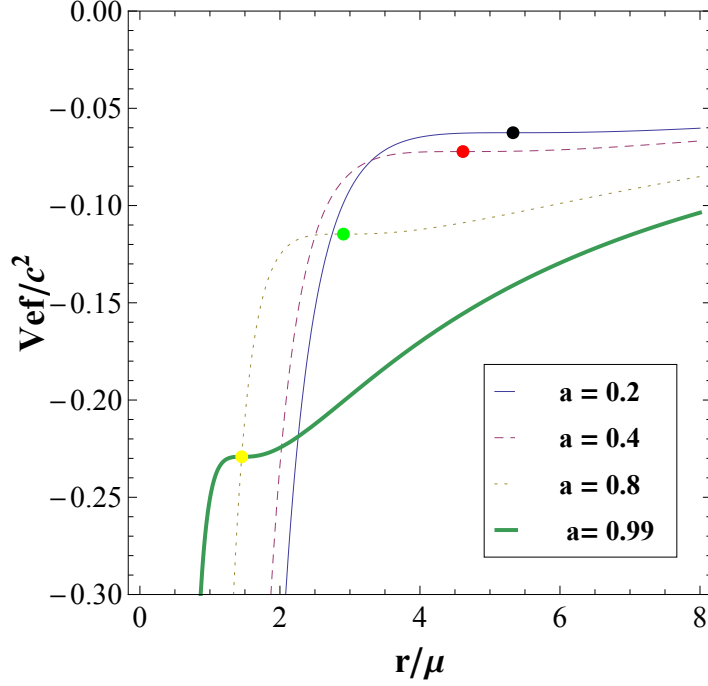


Figura 9: Potencial efectivo en función de la coordenada radial para distintos valores del momento angular  $a$  en el espacio-tiempo de Kerr. Los puntos indican la posición de la última órbita circular estable.

Las geodésicas nulas en el plano ecuatorial quedan determinadas por las Ecs. 2.100, 2.101, y la ecuación de la energía con  $\epsilon^2 = 0$ :

$$\dot{r}^2 = c^2 k^2 + \frac{a^2 c^2 k^2 - h^2}{r^2} + \frac{2\mu(h - ack)^2}{r^3}. \quad (2.113)$$

Al igual que en el tratamiento de la trayectoria de fotones en el espacio-tiempo de Schwarzschild, si se introduce el parámetro de impacto  $b = h/(ck)$ , la última ecuación puede reescribirse como:

$$\frac{\dot{r}^2}{h^2} + V_{\text{ef}}(r, b) = \frac{1}{b^2}, \quad (2.114)$$

donde el potencial efectivo es:

$$V_{\text{ef}}(r, b) = \frac{1}{r^2} \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{2\mu}{r} \left( 1 - \frac{a}{b} \right)^2 \right]. \quad (2.115)$$

En la métrica de Kerr, debido al fenómeno de arrastre inercial, no existen trayectorias de fotones radiales. Para estudiar la variación



radial de la estructura de los conos de luz es, sin embargo, útil el cálculo de las *geodésicas principales nulas*, las cuales están definidas por la condición  $b = a$ . El conjunto de Ecs. 2.100, 2.101, y 2.113 adopta la forma:

$$\dot{t} = \frac{(r^2 + a^2)k}{\Delta}, \quad (2.116)$$

$$\dot{\phi} = \frac{ack}{\Delta}, \quad (2.117)$$

$$\dot{r} = \pm ck. \quad (2.118)$$

Para fotones salientes  $\dot{r} = +ck$ , la integración del sistema anterior de ecuaciones es inmediata:

$$\begin{aligned} ct &= r + \left( \mu + \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 - a^2}} \right) \ln \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| \\ &+ \left( \mu - \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 - a^2}} \right) \ln \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right| + \text{constante}, \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\phi = \frac{a}{2\sqrt{\mu^2 - a^2}} \ln \left| \frac{r - r_+}{r - r_-} \right| + \text{constante}. \quad (2.120)$$

La solución correspondiente a fotones entrantes se obtiene escogiendo  $\dot{r} = -ck$ , y tiene la misma forma que la presentada arriba pero con  $t \rightarrow -t$  y  $\phi \rightarrow -\phi$ .

Las coordenadas de Boyer-Lindquist  $t$  y  $\phi$  no son bien comportadas en la región cercana a los horizontes de eventos: en los límites  $r \rightarrow r_+$  y  $r \rightarrow r_-$ , las Ecs. 2.119 y 2.120 divergen. Para remover dichas singularidades de coordenadas se utilizan las ecuaciones de las geodésicas principales nulas en su forma diferencial:

$$cdt = -\frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad (2.121)$$

$$d\phi = -\frac{a}{\Delta} dr. \quad (2.122)$$

En forma análoga al procedimiento utilizado para obtener las coordenadas avanzadas (retardadas) de Eddington-Filkenstein en el espacio-tiempo de Schwarzschild, se llega a las coordenadas avanzadas (retardadas) de Eddington-Filkenstein en la geometría de Kerr, cuyo elemento de línea viene dado por la Ec. 2.94.

La extensión analítica máxima del espacio-tiempo de Kerr se debe a [Boyer & Lindquist 1967](#) y [Carter 1968](#), cuyo diagrama se muestra en la Figura 10. En la región entre el horizonte externo (EH) y el horizonte interno (IH), espacio y tiempo intercambian sus roles tal como ocurre en el interior de un agujero negro de Schwarzschild; una partícula en esta región terminará inexorablemente en el segundo horizonte, que es también un horizonte de Cauchy. Una vez que éste se ha cruzado, espacio y tiempo revierten su carácter, y es posible evitar la singularidad y alcanzar una órbita estable. En la región interior al horizonte de Cauchy existen además curvas temporales cerradas; esto implica que para ciertas trayectorias futuro y pasado causales coinciden. La métrica de Kerr admite aún soluciones más extrañas: un observador

en la región central podría internarse en el espacio-tiempo interno al anillo singular y emerger en un universo anti-gravitatorio (cuyas leyes físicas serían extremadamente peculiares); o podría continuar viajando y atravesar dos antihorizontes para emerger en el tiempo coordinado  $t = -\infty$  en algún otro universo. Esta serie de viajes fantásticos, sin embargo, parece improbable en agujeros negros reales, ya que el horizonte interno es inestable, como demostraron [Poisson & Israel 1990](#).

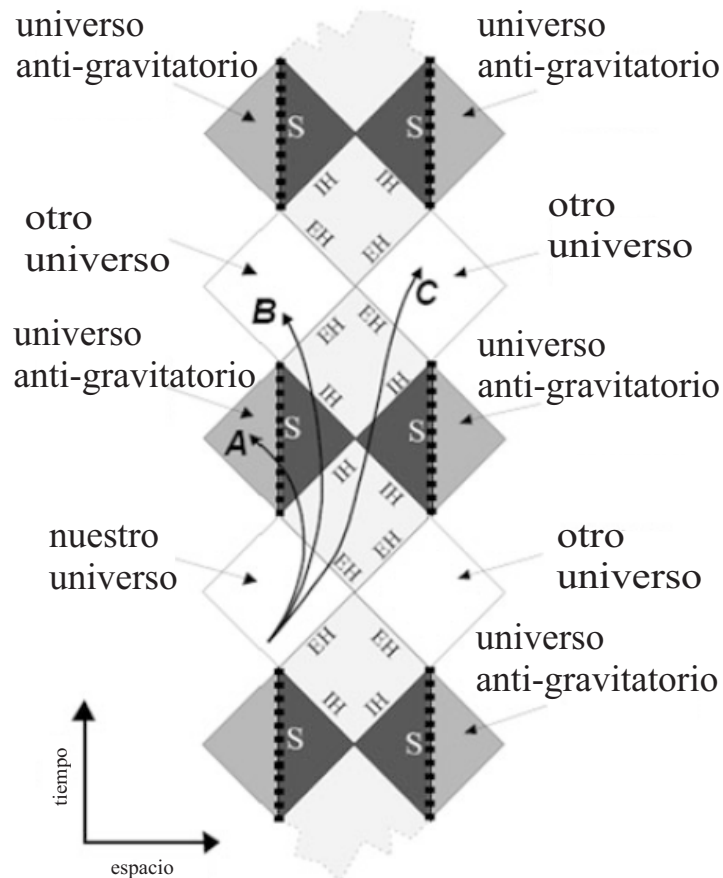


Figura 10: Diagrama de Penrose de un agujero negro de Kerr no extremo. La figura se repite infinitamente en ambas direcciones. Una trayectoria termina en la singularidad (A), y las otras dos escapan (B y C). IH denota "horizonte interno", EH "horizonte externo", y S "singularidad".

### 2.3.5 Agujeros negros de Kerr-Newman

La métrica de Kerr-Newman de un agujero negro cargado y rotante es la solución más general de agujero negro; ésta fue hallada por [Newman et al. 1965](#) y tiene la forma:

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 - 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + \rho\Delta^{-1}dr^2 + \rho d\theta^2, \quad (2.123)$$

$$g_{tt} = c^2 [1 - (2\mu r - q^2) \rho^{-1}], \quad (2.124)$$

$$g_{t\phi} = a \sin^2 \theta \rho^{-1} (2\mu r - q^2), \quad (2.125)$$

$$g_{\phi\phi} = \left[ (r^2 + a^2 c^{-2})^2 - a^2 c^{-2} \Delta \sin^2 \theta \right] \rho^{-1} \sin^2 \theta, \quad (2.126)$$

$$\rho \equiv r^2 + a^2 c^{-2} \cos^2 \theta, \quad (2.127)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2\mu r + a^2 c^{-2} + q^2. \quad (2.128)$$

La solución de Kerr-Newman no es una solución de vacío; al igual que la métrica de Kerr posee dos horizontes de eventos  $r_+$  y  $r_-$ , cuyas coordenadas radiales son, respectivamente:

$$r_{\pm} = \mu \pm (\mu^2 - a^2 c^{-2} - q^2)^{1/2}. \quad (2.129)$$

Además, como la solución de Kerr, tiene una ergosfera, que a una latitud  $\theta$  su coordenada radial es:

$$r_e = \mu + (\mu^2 - a^2 c^{-2} \cos^2 \theta - q^2)^{1/2}. \quad (2.130)$$

Dado que el campo eléctrico no puede permanecer estático en la ergosfera, un observador fuera del límite estático verá que se genera un campo magnético.

La métrica de Kerr-Newman es la solución estacionaria, axialmente simétrica y asintóticamente plana más simple de la ecuaciones de Einstein en presencia de un campo electromagnético en 4 dimensiones. Se piensa, sin embargo, que esta solución no representa objetos astrofísicos reales: un objeto astrofísico cargado se descargaría rápidamente por acreción de cargas de signo opuesto.

## 2.4 SOLUCIONES DE AGUJEROS NEGROS EN GRAVEDAD F(R)

### 2.4.1 Agujeros negros de f(R)-Schwarzschild

El elemento de línea del espacio-tiempo de Schwarzschild en teorías f(R) con escalar de Ricci constante  $R_0$  tiene la forma [[Cembranos et al., 2011](#)]:

$$ds^2 = - \left[ \left( c^2 - \frac{2GM}{r} \right) - \frac{c^2 R_0}{12} r^2 \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[ \left( 1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right) - \frac{R_0}{12} r^2 \right]} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.131)$$

donde  $R_0$ , dado por la Ec. 2.15, puede tomar en principio cualquier valor real. Dado que sólo estamos interesados en métricas de espacio-tiempos que representen agujeros negros astrofísicos, se seleccionarán

sólo aquellos valores de  $R_0$  que permitan soluciones aceptables, esto es, que contengan horizontes de eventos.

El radio  $r_0$  del horizonte de eventos cumple con la condición  $g_{00}(r_0) = 0$ ; de la métrica 2.131, los valores de  $r$  que corresponden al horizonte de eventos satisfacen:

$$c^2 R_0 r^3 - 12c^2 r + 24GM = 0. \quad (2.132)$$

En términos de las siguientes cantidades adimensionales:

$$x \equiv \frac{r}{\mu}, \quad (2.133)$$

$$R_0 \equiv R_0 \mu^2, \quad (2.134)$$

donde  $\mu = GM/c^2$ , esta ecuación se escribe como:

$$R_0 x^3 - 12x + 24 = 0. \quad (2.135)$$

En la Figura 11 mostramos el gráfico del escalar de Ricci en función de la coordenada radial del horizonte de eventos. Para  $R_0 \in (0, 4/9)$  las soluciones poseen un horizonte interno de eventos y un horizonte externo cosmológico, mientras que para  $R_0 \leq 0$  hay un único horizonte. Los horizontes de eventos y cosmológico colapsan para  $R_0 = 4/9$  y para valores mayores del escalar de Ricci las soluciones representan singularidades desnudas. El estudio de soluciones de agujeros negros de Schwarzschild en teorías  $f(R)$  queda entonces restringido para valores del escalar de Ricci en el intervalo  $(-\infty, 4/9]$ .

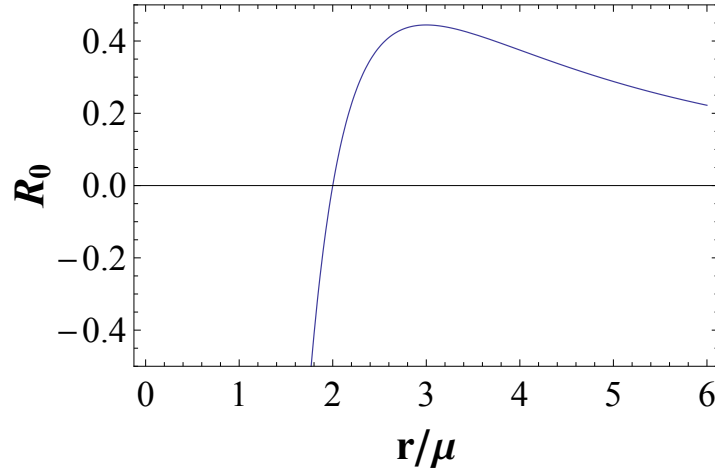


Figura 11: Escalar de Ricci en función de la coordenada radial del horizonte de eventos para un espacio-tiempo de  $f(R)$ -Schwarzschild.

#### 2.4.2 Agujeros negros de $f(R)$ -Kerr

La métrica de un espacio-tiempo axisimétrico, estacionario y con escalar de Ricci constante que describe un agujero negro con masa, carga eléctrica y momento angular fue descubierta por [Carter 1973](#)

y posteriormente utilizada por [Cembranos et al. 2011](#) para estudiar agujeros negros en teorías  $f(R)$ . El elemento de línea toma la forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\rho^2}{\Delta_r} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 \\ &+ \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\rho^2} \left[ a \frac{c dt}{\Xi} - (r^2 + a^2) \frac{d\phi}{\Xi} \right]^2 \\ &- \frac{\Delta_r}{\rho^2} \left( \frac{c dt}{\Xi} - a \sin^2 \theta \frac{d\phi}{\Xi} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.136)$$

donde:

$$\Delta_r = (r^2 + a^2) \left( 1 - \frac{R_0}{12} r^2 \right) - \frac{2GMr}{c^2}, \quad (2.137)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.138)$$

$$\Delta_\theta = 1 + \frac{R_0}{12} a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.139)$$

$$\Xi = 1 + \frac{R_0}{12} a^2, \quad (2.140)$$

donde  $M$  y  $a$  denotan la masa y momento angular del agujero negro por unidad de masa, respectivamente, y  $R_0$  está dado por Ec. 2.15.

Debido a la constancia de  $p^t$  y  $p^\phi$  sobre las trayectorias, y a las propiedades de simetría de la métrica respecto del plano ecuatorial, la órbita de cualquier partícula con condición inicial  $p^\theta = 0$  permanecerá en el plano  $\pi/2$ , donde la métrica es:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{c^2}{r^2 \Xi^2} (\Delta_r - a^2) dt^2 + \frac{r^2}{\Delta_r} dr^2 \\ &- \frac{2ac}{r^2 \Xi^2} (r^2 + a^2 - \Delta_r) dt d\phi \\ &+ \frac{d\phi^2}{r^2 \Xi^2} \left[ (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r a^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Si  $R_0 \rightarrow 0$ , Ec. 2.141 representa la métrica en el espacio-tiempo de Kerr en Relatividad General.

La ecuación que determina la posición del horizonte de eventos se obtiene haciendo  $1/g_{rr} = 0$ :

$$\Delta_r = (r^2 + a^2) \left( 1 - \frac{R_0}{12} r^2 \right) - \frac{2GMr}{c^2} = 0. \quad (2.142)$$

En términos de  $x$ ,  $R_0$ , y  $a \equiv a(r_g)^{-1}$ , resulta:

$$(x^2 + a^2) \left( 1 - \frac{R_0 x^2}{12} \right) - 2x = 0. \quad (2.143)$$

En la Figura 12 mostramos el escalar de Ricci en función de la coordenada radial del horizonte de eventos para  $R_0 \in [-0,3, 1]$  y  $a = 0,99$ . Si  $R_0 \in (0, 0,6]$ , existen 3 horizontes de eventos: el horizonte interno y externo de eventos del agujero negro y un horizonte cosmológico; para  $R_0 > 0,6$  se tiene un horizonte cosmológico cuyo radio va disminuyendo para valores mayores de  $R_0$ . Si  $R_0 \in (-0,13, 0)$  hay 2 horizontes de eventos. Para  $R_0 \leq -0,13$  las soluciones representan singularidades desnudas. El análisis de las propiedades de agujeros negros de Kerr en teorías  $f(R)$  entonces quedará restringido para valores del escalar de Ricci en el intervalo  $(-0,13, 0,6]$ .

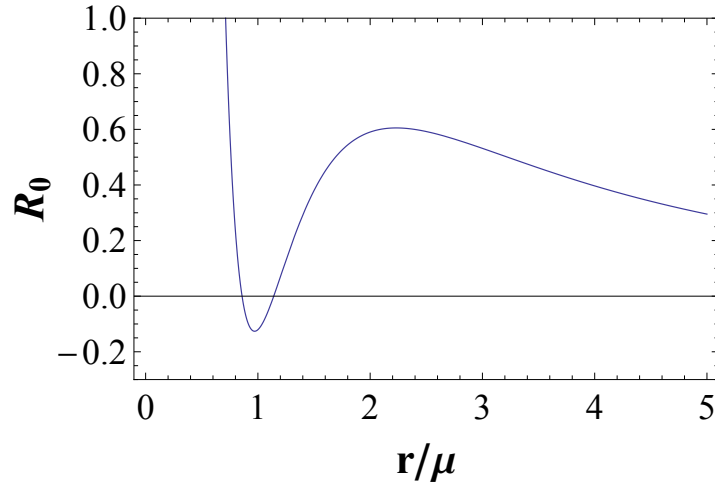


Figura 12: Escalar de Ricci en función de la coordenada radial del horizonte de eventos para un espacio-tiempo de  $f(R)$ -Kerr.

## 2.5 FORMACIÓN DE AGUJEROS NEGROS

### 2.5.1 Formación de agujeros negros estelares

Los agujeros negros se forman cuando la materia de un dado objeto se comprime por debajo de su correspondiente radio de Schwarzschild. Existen varios mecanismos de formación de agujeros negros tales como la colisión de partículas, o el colapso de materia oscura en el universo temprano; el mecanismo más común de formación de agujeros negros estelares es el colapso gravitacional.

Una estrella se mantiene estable si la presión térmica generada en su interior debido a las reacciones nucleares equilibra la fuerza gravitacional. Durante su evolución, las reacciones nucleares transforman la composición química del núcleo estelar, de H a He, y para el caso de estrellas masivas ( $M > 5M_{\odot}$ ), continua hasta C y finaliza con Fe. En cada una de estas etapas, el núcleo de la estrella se contrae para poder alcanzar la ignición correspondiente a cada fase de las reacciones nucleares. Finalmente, la desintegración endotérmica de los núcleos de hierro precipita el colapso indefinido del núcleo, produciendo la formación de un agujero negro estelar.

El colapso de estrellas de  $18 - 20 M_{\odot}$  resulta en agujeros negros de baja masa ( $1,5 M_{\odot} < M < 1,8 M_{\odot}$ ) junto con la eyección de las capas externas de las estrellas por una onda choque en un evento conocido como supernova de Tipo II. Estrellas con masas en el rango  $20 - 30 M_{\odot}$  acaban como agujero negros de  $M > 1,8 M_{\odot}$ ; estrellas muy masivas con momento angular alto terminan su existencia produciendo una explosión de rayos gamma y un agujero negro muy masivo ( $M > 10M_{\odot}$ ).

En la Figura 13 se muestra un diagrama de Eddington-Filkenstein del colapso gravitacional de una estrella. El agujero negro se forma ni bien la superficie de los conos de luz comienza a apuntar en la misma dirección del eje temporal; allí es cuando se origina el horizonte de

eventos: las trayectorias de los rayos de luz quedarán para siempre confinadas al interior del agujero negro.

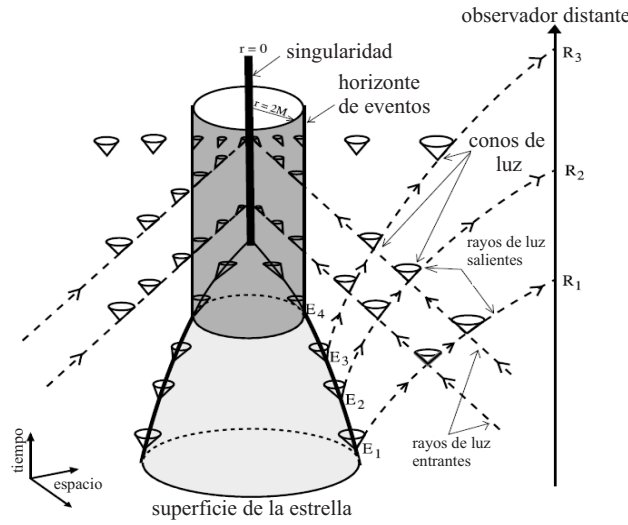


Figura 13: Diagrama de Eddington-Filknstein de una estrella en colapso gravitacional y la subsiguiente formación de un agujero negro.

La evolución dinámica del interior de una estrella en colapso gravitacional depende fundamentalmente de las propiedades de la materia estelar, descritas por su correspondiente ecuación del estado. El caso más simple fue estudiado por primera vez por [Oppenheimer & Snyder 1939](#): la estrella se modela como una nube esférica de polvo, esto es, sin presión  $p = 0$ . El tensor de energía impulso toma la forma:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu, \tag{2.144}$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía y  $u^\mu$  la cuadri-velocidad del fluido. Los coeficientes de la métrica quedan completamente determinados resolviendo las ecuaciones de campo de Einstein; el elemento de línea resulta idéntico al del modelo cerrado de Friedmann:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(r, t) \left[ \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \tag{2.145}$$

Aquí  $R(r, t)$  representa el factor de escala, y se han tomado unidades de  $c = 1$ . Dado que el polvo no radia, la solución exterior es la del espacio-tiempo de Schwarzschild, de acuerdo al *teorema de Birkhoff* [[Birkhoff & Langer, 1923](#)]:

La geometría del espacio tiempo fuera de una distribución esféricamente simétrica de materia es la geometría de Schwarzschild.

El teorema de Birkhoff implica que movimientos estrictamente radiales no perturban la métrica del espacio-tiempo; es por ello que pulsaciones radiales de estrellas no producen ondas gravitacionales.

Las ecuaciones relativistas que describen el colapso gravitacional esféricamente simétrico de un fluido adiabático ideal (sin viscosidad, conducción de calor, y radiación) con presión fueron obtenidas por

Misner & Sharp 1964. El tensor de energía impulso asociado a este fluido ideal es:

$$T^{\mu\nu} = (p + \epsilon) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (2.146)$$

donde  $\epsilon$  es la energía interna del fluido por unidad de volumen propio. El elemento de línea en coordenadas comóviles es:

$$ds^2 = -e^{2\phi} dt^2 + e^\lambda dr^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (2.147)$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (2.148)$$

Dado que la solución es dinámica las funciones  $\phi$ ,  $\lambda$ , y  $R$  dependen no sólo de la coordenada radial  $r$  sino también de la coordenada temporal  $t$  y quedan completamente determinadas por las ecuaciones de Einstein. Las componentes de la cuadri-velocidad en coordenadas comóviles son:

$$\begin{aligned} u^t &= e^{-\phi}, \\ u^i &= 0; \quad i = r, \theta, \varphi. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Las ecuaciones pueden escribirse en forma simple introduciendo la cantidad  $U$  que representa la velocidad relativa  $U d\theta$  de partículas del fluido adyacentes en la misma esfera de radio constante  $r$ :

$$U = D_t R \equiv e^{-\phi} \dot{R}, \quad (2.150)$$

siendo  $D_t$  la derivada de tiempo propio comovil:

$$D_t = u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = e^{-\phi} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_r. \quad (2.151)$$

En vez de trabajar con la función  $\lambda(r, t)$ , se introduce otra función denotada  $m(r, t)$  definida como:

$$e^{\lambda(r,t)} = g_{rr} = \left[ 1 + U^2 - \frac{2m(r,t)}{R} \right]^{-1} \left( \frac{\partial R}{\partial r} \right)^2. \quad (2.152)$$

El conjunto completo de ecuaciones dinámicas de Misner y Sharp para el colapso gravitacional esféricamente simétrico son:

$$D_t R = U, \quad (2.153)$$

$$D_t m = -4\pi R^2 p U, \quad (2.154)$$

$$\begin{aligned} D_t U &= - \left[ \frac{1 + U^2 - 2mR^{-1}}{\epsilon + p} \right] \left( \frac{\partial p}{\partial R} \right)_t \\ &\quad - \frac{m + 4\pi R^3 p}{R^2}, \end{aligned} \quad (2.155)$$

$$\left( \frac{\partial m}{\partial R} \right)_t = 4\pi R^2 \epsilon, \quad (2.156)$$

$$e^\phi = (-g_{00})^{1/2} = 1/h, \quad (2.157)$$

$$\left( \frac{dA}{dr} \right)_{t=0} = \frac{4\pi R^2 n}{(1 + U^2 - 2mR^{-1})^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial r}. \quad (2.158)$$

En la Ec. 2.157  $h = u + pv = (\epsilon + p) / n$  es la entalpía específica,  $n(r, t)$  la densidad de bariones,  $v = 1/n$  el volumen específico, y  $u = \epsilon v$  la



energía interna específica. En la Ec. 2.158  $dA$  representa la cantidad de materia en un dado cascarón esférico definida para un rango coordenado  $dr$  fijo.

El conjunto de ecuaciones 2.153, 2.154, 2.155, 2.156, 2.157, y 2.158 junto con la ecuación de estado del fluido determinan la evolución dinámica del colapso esféricamente simétrico de la estrella. Si  $p = 0$ , se recuperan los resultados de Oppenheimer & Snyder 1939. Si  $p \neq 0$ , el sistema de ecuaciones anterior sólo puede ser resuelto en forma numérica. Por otro lado, para obtener cualquier solución es necesario especificar los valores de las condiciones iniciales para  $R(r, 0)$ ,  $m(r, 0)$ , y  $U(r, 0)$ . Además, se requiere que la solución cumpla con las condiciones de contorno:

$$p = 0 \quad \text{para} \quad r = r_{\text{sup}} = \text{constante}, \quad (2.159)$$

donde  $r_{\text{sup}}$  define el límite exterior de la distribución de materia; luego,  $m(r_{\text{sup}}, t) = M$  es constante y la métrica interior puede pegarse en forma continua en la superficie  $r = r_{\text{sup}}$  a una métrica exterior de Schwarzschild de masa  $M$ . Es además necesario que en  $r = 0$  las funciones  $R$ ,  $m$ , y  $U$  se anulen.

El sistema de coordenadas utilizado en las ecuaciones de Misner y Sharp presenta severas desventajas para el cálculo numérico. Si la configuración que se estudia colapsa a un agujero negro, una singularidad de coordenadas aparece y ya no es posible continuar integrando el sistema de ecuaciones [Baumgarte & Shapiro, 2010].

Este problema numérico fue resuelto por Hernandez & Misner 1966; éstos introdujeron una coordenada nula  $u$  y transformaron el sistema de ecuaciones de Misner y Sharp a un sistema de coordenadas denominado “coordenadas para observador temporal<sup>3</sup>”. Las principales ventajas que presentan las ecuaciones de Hernandez-Misner es que las nuevas coordenadas siempre se mantienen por fuera del horizonte de eventos. Esto implica que no sólo no se producen singularidades de coordenadas sino que tampoco aparece la singularidad física de curvatura.

### 2.5.2 Formación de agujeros negros supermasivos

Los agujeros negros supermasivos ( $10^6 M_{\odot} < M < 10^9 M_{\odot}$ ) pueden formarse a partir de una variedad de procesos que acontecen en el centro de las galaxias [Rees, 1984]. Una cantidad significativa de agujeros negros supermasivos pudieron haberse originado durante “la edad oscura del universo”, luego de la primera combinación de protones y electrones [Volonteri, 2010]. Algunos de los procesos involucrados en esta etapa de formación temprana son [Romero & Vila, 2014]: 1) colapso gravitacional de la primera generación de estrellas, denominadas estrellas de Población III, 2) inestabilidades globales dinámicas en cúmulos masivos de gas, 3) colisiones entre estrellas en el núcleo de cúmulos estelares muy compactos, 4) colapso de materia oscura, 5) fluctuaciones de densidad en el universo temprano.

<sup>3</sup> Observer time coordinates.

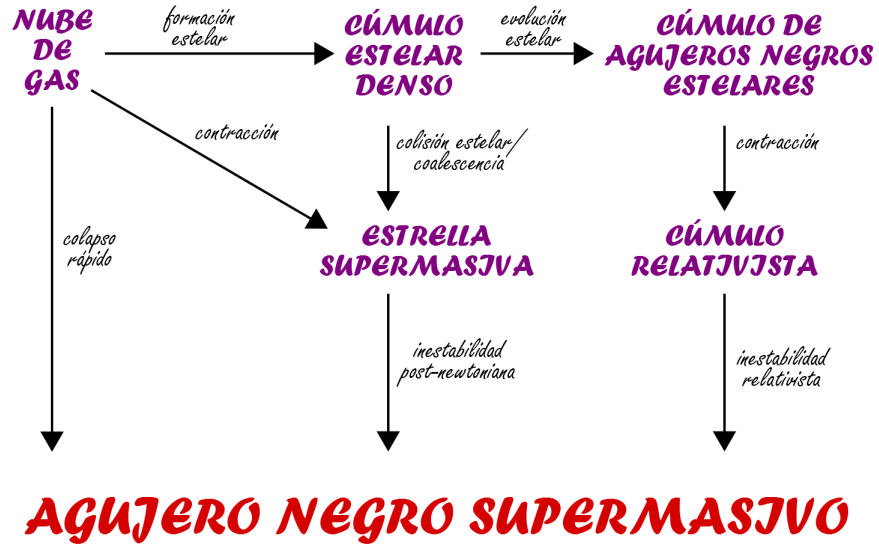


Figura 14: Esquema de posibles caminos evolutivos para la formación de un agujero negro supermasivo [Volonteri, 2010].

Durante el proceso de colapso gravitacional, cualquier asimetría queda suprimida mediante la radiación de ondas gravitacionales de manera tal que el agujero negro resultante queda completamente caracterizado por sólo 3 parámetros: masa  $M$ , momento angular  $J$ , y carga eléctrica  $Q$ . Las propiedades y estructura del objeto colapsado parecen eliminarse completamente; lo mismo ocurre durante el proceso de acreción de materia por el agujero negro: la entropía asociada al objeto acretado desaparece luego de que éste atraviesa el horizonte de eventos.

Wheeler fue el primero en notar que si no ha de abandonarse la Segunda Ley de la Termodinámica, el material acretado por un agujero negro no sólo debe transferir su masa, momento angular y carga eléctrica, sino también su entropía. Comienza así, el estudio de la termodinámica de agujeros negros, que se tratará en la próxima sección.

## 2.6 LEYES DE LA TERMODINÁMICA DE AGUJEROS NEGROS

La aplicación de la teoría cuántica de campos a la región cercana al horizonte de eventos resulta en la predicción de radiación térmica [Hawking, 1974, 1975]. Una temperatura, luego, puede asociarse al horizonte de eventos:

$$\Theta_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M} \cong 10^{-7} \text{K} \left( \frac{M_\odot}{M} \right), \quad (2.160)$$

donde  $\hbar$  representa la constante de Planck, y  $k_B$  denota la constante de Boltzmann. De la ecuación anterior puede notarse que la temperatura de Hawking es extremadamente pequeña para agujeros negros de masa estelar y agujeros negros supermasivos. Los efectos cuánticos

de evaporación son importantes para mini-agujeros negros<sup>4</sup>, tales como agujeros negros primordiales de poca masa, y micro agujeros negros, de naturaleza hipotética, en teorías de la gravitación de muchas dimensiones. Hasta el momento no ha podido probarse de forma empírica la existencia de la radiación de Hawking.

Antes del descubrimiento de la radiación de Hawking, Bekenstein [Bekenstein, 1972, 1973] notó que las propiedades del área del horizonte de eventos de un agujero negro se asemejaban a las de la entropía, y propuso la siguiente relación:

$$S_{\text{BH}} = \frac{\mathcal{A}}{4l_{\text{pl}}^2}. \quad (2.161)$$

Aquí  $S_{\text{BH}}$  denota la entropía del agujero negro y  $\mathcal{A}$  la superficie del horizonte de eventos. Para un agujero negro de Schwarzschild:

$$\mathcal{A}_{\text{Schw}} = 4\pi r_{\text{Schw}}^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4}. \quad (2.162)$$

En el caso de un agujero de Kerr-Newman, el área es:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{KN}} &= 4\pi \left( r_+^2 + \frac{a^2}{c^2} \right) \\ &= 4\pi \left[ \left( \frac{GM}{c^2} + \frac{1}{c^2} \sqrt{G^2 M^2 - GQ^2 - a^2} \right)^2 + \frac{a^2}{c^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.163)$$

La expresión 2.163 se reduce a la 2.162 para  $a = Q = 0$ .

La formación de un agujero negro implica un crecimiento extraordinario en la entropía; por ejemplo, una estrella tiene una entropía  $\approx 20$  veces menor que el correspondiente agujero negro de igual masa. Este incremento colosal de entropía está relacionado con la pérdida de toda la estructura del sistema original (e.g. la estrella) una vez formado el agujero negro.

Las 4 leyes de la termodinámica de agujeros negros fueron formuladas por Bardeen et al. 1973, haciendo una analogía entre área y entropía. Éstas se presentan a continuación:

**Ley cero (equilibrio térmico).** *La gravedad superficial  $\kappa$  (temperatura) de un agujero negro estacionario axialmente simétrico es constante en todo punto de su superficie.*

Esta ley fue probada por Bardeen & Press 1973 suponiendo que se cumple la condición de energía dominante (ver Apéndice B).

<sup>4</sup> Se denominan mini-agujeros negros a agujeros negros cuyas masas están muy por debajo de la masa solar. Éstos podrían haberse formado a partir de fluctuaciones primordiales de densidad. De haberse originado  $\approx 10^{-23}$  s luego del Big Bang, su masa sería de  $\approx 10^{15}$  g. Agujeros negros de esta masa o menor ya se deberían haber evaporado. Hasta el momento no hay evidencia observacional que apoye la existencia de agujeros negros primordiales [Carr et al., 2010]; se ha sugerido que agujeros negros que se hayan evaporado luego de la época de recombinación (aproximadamente  $3,8 \times 10^5$  años luego del Big Bang) podrían ser una fuente de reionización del universo, (e.g. He & Fang 2002).

**Primera ley** (*conservación de la energía*). Cuando un sistema que contiene un agujero negro cambia de un estado estacionario a otro, su masa varía como:

$$dM = \Theta dS_{\text{BH}} + \Omega dJ + \Phi dQ + \delta q, \quad (2.164)$$

donde  $dJ$  y  $dQ$  son las variaciones del momento angular total  $J$  y de la carga eléctrica total  $Q$  del agujero negro, respectivamente, y  $\delta q$  es la contribución al cambio en la masa total debido al cambio en la distribución estacionaria de materia exterior al agujero negro.

**Segunda ley** (*la entropía nunca decrece*). En cualquier proceso clásico, el área de un agujero negro  $A$ , y por ende su entropía  $S_{\text{BH}}$  nunca decrece:

$$\Delta S_{\text{BH}} \geq 0. \quad (2.165)$$

Efectos de evaporación cuántica reducen el área del agujero negro, y la desigualdad anterior se viola. Además, siendo la radiación de Hawking térmica, la evaporación del agujero negro se ve acompañada por un incremento en la entropía del medio circundante. Si se define una entropía generalizada  $\tilde{S}$ , como la suma de la entropía del agujero negro  $S_{\text{BH}}$  y la entropía de la radiación y materia fuera del agujero negro  $S_{\text{M}}$ , la segunda ley sigue valiendo en la siguiente forma generalizada [Bekenstein, 1974]:

**Segunda ley generalizada**. En cualquier proceso físico que involucre agujeros negros, la entropía generalizada  $\tilde{S}$  no decrece:

$$\Delta \tilde{S} = \Delta S_{\text{BH}} + \Delta S_{\text{M}} \geq 0. \quad (2.166)$$

**Tercera ley** (*ley de Nerst*). Es imposible mediante algún procedimiento, sin importar cuán idealizado sea, reducir la temperatura de un agujero negro a cero en una secuencia finita de operaciones.

Israel formuló y probó una versión alternativa de la tercera ley [Israel, 1986]: un agujero negro no extremo ( $M^2 > a^2 + Q^2$ ) no puede convertirse en un agujero negro extremo ( $M^2 = a^2 + Q^2$ ), en un tiempo finito avanzado, en cualquier proceso continuo en donde el tensor de energía de la materia acretada se mantiene acotado y satisface la condición de energía débil en la vecindad del horizonte aparente externo.

La imposibilidad de transformar un agujero negro en uno extremo está estrechamente relacionada con la imposibilidad de alcanzar un estado donde una singularidad desnuda apareciese, en cuyo caso la conjetura de censura cósmica se violaría. Existen dos versiones de la conjetura, llamadas débil y fuerte, formuladas por Roger Penrose. Ambas se presentan en la próxima sección.

## 2.7 CONJETURA DE CENSURA CÓSMICA

**Conjetura de censura cósmica débil** [Penrose, 1969]. El colapso gravitacional total de un objeto siempre resulta en un agujero negro y no en

una singularidad desnuda; i.e., todas las singularidades producto del colapso gravitacional están “ocultas” por agujeros negros, y no pueden ser “vistas” por observadores lejanos.

La formulación anterior es imprecisa ya que, entre otras razones, no se especifican qué condiciones deben satisfacer los campos de materia. Dos condiciones naturales para imponer a las fuentes de materia son: a)  $T_{ab}$  debe satisfacer una dada condición de energía (e.g., la condición de energía dominante) y b) las ecuaciones acopladas de Einstein y la materia tienen que admitir una formulación bien planteada del problema de valores iniciales.

**Conjetura de censura cósmica fuerte** [Penrose, 1979]. *Todos los espacios tiempos físicos son globalmente hiperbólicos, i.e., con excepción de una posible singularidad inicial (como la singularidad del “big bang”) ninguna singularidad es jamás “visible” para ningún observador.*

La conjetura de censura cósmica no está probada en la teoría de la Relatividad General, y por ello no tiene la fuerza de un teorema de la teoría. La prueba precisa de alguna versión de esta conjetura constituye uno de los problemas más importantes en la Relatividad General.

Debe notarse que la conjetura de censura cósmica se refiere a la formación de singularidades, y no a la existencia de las mismas. Como se menciona en la Introducción, los teoremas de singularidades de la Relatividad General prueban la existencia de modelos de espacio-tiempos singulares. Se dedica la última sección de este capítulo al análisis del primer teorema de singularidades, ya que es el que concierne en forma directa a los agujeros negros.

## 2.8 TEOREMAS DE SINGULARIDADES

Un modelo de espacio-tiempo se dice es *singular* si la variedad  $E$  es *incompleta*. Una variedad es incompleta si contiene al menos una curva *inextendible*. Una curva  $\gamma : [0, a) \rightarrow E$  es inextendible si no hay ningún punto  $p$  en  $E$  tal que  $\gamma(s) \rightarrow p$  para  $a \rightarrow s$ , i.e.  $\gamma$  no tiene punto final en  $E$ . Un dado modelo de espacio-tiempo  $\langle E, g_{ab} \rangle$  tiene una *extensión* si existe un embedding isométrico  $\theta : M \rightarrow E'$ , donde  $\langle E', g'_{ab} \rangle$  es otro espacio-tiempo y  $\theta$  es una aplicación en un subconjunto propio de  $E'$ . Un modelo de espacio-tiempo *singular* contiene una curva  $\gamma$  que es inextendible en el sentido antes mencionado. Modelos de espacio-tiempos singulares se dicen que contienen singularidades, pero esto es un abuso de lenguaje: las singularidades no son “cosas” en el espacio-tiempo sino características patológicas de algunas soluciones de las ecuaciones fundamentales de la teoría [Romero, 2014].

El primer teorema sobre espacio-tiempos singulares que no involucra ninguna suposición de simetría particular fue formulado por Penrose [Penrose, 1965a]. El teorema fue desarrollado para probar

la existencia de modelos de espacios-tiempos singulares que describen el colapso gravitacional de una estrella. A diferencia de la teoría Newtoniana, en Relatividad General aunque el colapso no fuese exactamente simétrico, una vez que la estrella se comprime por debajo de su correspondiente radio de Schwarzschild, la formación de una singularidad es inevitable. Penrose introdujo dos conceptos claves: la *incompletitud* para describir espacios-tiempos singulares y la noción de “superficie cerrada atrapada<sup>5</sup>”. A continuación se brinda una versión moderna del teorema de Penrose [Senovilla & Garfinkle, 2014].

**Teorema de singularidad de Penrose** [Penrose, 1965a]. *Si el espacio tiempo  $(E, g)$  contiene una hipersuperficie de Cauchy no compacta  $\Sigma$  y una superficie cerrada atrapada hacia el futuro, y si  $R_{ab}u^a u^b \geq 0$  para todo vector nulo  $u^a$  (condición de energía fuerte), luego existen geodésicas futuras nulas incompletas.*

Una superficie cerrada atrapada  $S$  es una subvariedad bidimensional (superficie) compacta, sin borde (cerrada) tal que 2 familias de geodésicas nulas que emergen ortogonalmente de  $S$  hacia el futuro convergen inicialmente. La noción de trapped surface es independiente de las coordenadas y de la existencia de simetrías particulares. Es por esto un concepto general concebido para representar regiones finitas que están completamente confinadas por un campo gravitacional [Senovilla & Garfinkle, 2014].

Los teoremas de singularidades pueden probarse a partir de propiedades puramente geométricas del modelo de espacio-tiempo [Clarke, 1993]; no se invoca ninguna ley física. Teoremas de este tipo son una consecuencia del enfoque gravitacional de congruencias [Raychaudhuri, 1955].

---

<sup>5</sup> Closed trapped surface.

## 3.1 INTRODUCCIÓN

La existencia de singularidades en algunas soluciones de las ecuaciones de campo de la Relatividad General es uno de los problemas más importantes aún no resueltos en la descripción clásica del campo gravitacional. Las singularidades son características indeseables en cualquier teoría de la gravitación; el propio Einstein las consideraba “intolerables”, como relata Peter G. Bergmann (ver por ejemplo [Earman 1995](#)):

Einstein siempre fue de la opinión de que las singularidades en teorías clásicas de campos son intolerables. Éstas son intolerables desde el punto de vista de teorías clásicas de campos ya que una región singular representa un quiebre en los postulados de las leyes de la naturaleza. Pienso que uno puede dar vuelta este argumento y decir que una teoría que involucra singularidades, y que las involucra inevitablemente, lleva en si misma las semillas de su propia destrucción<sup>1</sup>...

Los teoremas de singularidades mencionados en el Capítulo 2 no brindan información alguna sobre la naturaleza de las singularidades. Nótese, además, que estos teoremas no implican existencia física, bajo ciertas condiciones, de las singularidades del espacio-tiempo (la existencia material no puede ser implicada formalmente). Los teoremas de singularidades de la Relatividad General implican que bajo ciertas hipótesis, las soluciones de las ecuaciones de campo de la teoría son inevitablemente defectuosas, señalando la *incompletitud de la teoría* [[Romero, 2013a](#)].

Una singularidad esencial en las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein puede estar indicando alguna de dos cosas:

1. Una situación donde la materia es concentrada en un punto (*singularidad tipo espacio*).
2. Una situación donde ciertos rayos de luz provienen de una región con curvatura infinita (*singularidad tipo tiempo*).

Singularidades tipo espacio son características de las soluciones de agujeros negros descargados no rotantes, mientras que las singularidades tipo tiempo están presentes en soluciones exactas de agujeros

<sup>1</sup> “Einstein always was of the opinion that singularities in classical field theory are intolerable. They are intolerable from the point of view of classical field theory because a singular region represents a breakdown of the postulated laws of nature. I think one can turn this argument around and say that a theory that involves singularities, and involves them unavoidably, carries within itself the seeds of its own destruction...”



negros cargados o rotantes, donde las curvas tipo tiempo o tipo luz pueden siempre evitar la singularidad [Romero & Vila, 2014].

Por otro lado, las singularidades pueden clasificarse en *singularidades escalares de curvatura* y *singularidades no escalares*. Para ambas, el tensor de curvatura diverge, pero, en el primer caso, la singularidad está relacionada con la divergencia de una cantidad escalar asociada al tensor de curvatura; en el segundo caso, la singularidad está relacionada con la divergencia de las componentes del tensor de curvatura en una sistema de referencia ortonormal que se propaga paralelamente<sup>2</sup>. [Ellis et al., 2012].

Las singularidades escalares de curvatura pueden, asimismo, clasificarse de acuerdo a si el escalar de Ricci o el escalar de Weyl (o ambos) divergen:

- La divergencia del escalar de Ricci implica que la materia o los campos de densidad y energía no están acotados. El ejemplo clásico es el modelo estándar del Big Bang en el comienzo de los modelos de universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) para la materia ordinaria, donde  $R_{ab}u^a u^b$  y  $T_{ab}u^a u^b$  divergen para un campo vectorial unitario tipo tiempo  $u^a$  definido en forma única. El tensor de Weyl es regular es todo punto en los modelos de FLRW ya que es exactamente cero.
- La divergencia del escalar de Weyl implica divergencias del campo gravitacional. Ésto puede ocurrir aún si la densidad de materia no diverge; el ejemplo clásico es la singularidad en  $r = 0$  en la solución de Schwarzschild. El tensor de Ricci es regular (es cero en todo punto de la solución de Schwarzschild). El escalar  $C^{abcd}C_{abcd} \propto M/r^6$  diverge para  $r \rightarrow 0$ , siendo ésta una singularidad pura de Weyl.
- Las singularidades escalares de curvatura generales tienen asociadas tanto divergencias del tensor de Ricci como del tensor de Weyl, donde ambos  $R^a{}_b R_{ab}$  y  $C^{abcd}C_{abcd}$  divergen. Las singularidades asociadas pueden ser tipo espacio o tipo tiempo, como en el caso de algunos modelos de FLRW y la solución de Reissner-Nordström.

Existen varias formas en que las singularidades pueden evitarse (ver por ejemplo Novello & Bergliaffa 2008 para el caso de la Cosmología), tanto a nivel clásico como cuántico. Dado que todavía no existe una teoría cuántica de la gravitación, el problema de las singularidades en Relatividad General ha sido estudiado clásicamente de diversas formas. Un enfoque posible del problema es la introducción de una hipótesis de “curvatura límite”, basado en que invariantes construidos a partir del tensor de Riemann divergen en el límite hacia la singularidad. Una manera adecuada de eliminar la singularidad consistiría, pues, en imponer un límite al valor de la curvatura, asociado a una escala fundamental (podría ser la escala de Planck). Esta hipótesis, propuesta por primera vez por Markov 1982, se implementa exigiendo

<sup>2</sup> *Parallelly propagated orthonormal frame.*



que cualquier solución de las ecuaciones de campo se reduzca a una solución no singular (verbigracia la geometría del espacio-tiempo de de Sitter) cuando alguno de los invariantes alcanza su valor límite, de manera tal que la condición de energía fuerte se viola ([Penrose, 1965a; Hawking & Ellis, 1968; Hawking & Penrose, 1970]).

Una teoría basada en esta hipótesis ha sido implementada por Brandenberger et al. 1993, modificando la dinámica de la Relatividad General mediante la adición de términos no lineales. Existe otra estrategia, sin embargo, sugerida por Gliner 1966, que consiste en suponer que la micro física de la materia a muy altas densidades es tal que una transición de fase debe ocurrir llevando a cualquier sistema bajo condiciones extremas a una geometría de de Sitter. Modelos de este tipo han sido considerados también por Sakharov 1966, Zel'dovich 1968, y Bardeen 1968. En estos modelos la métrica del espacio-tiempo se comporta como la métrica de Schwarzschild para valores grandes del radio, y como de Sitter hacia el núcleo del objeto. Modelos de agujeros negros regulares que unen en forma directa un sistema cuyo interior es de de Sitter con la región exterior de Schwarzschild han sido propuestos por Poisson & Israel 1988, Frolov et al. 1989, 1990 y Dymnikova 2003.

Una solución exacta de las ecuaciones de Einstein que contiene un núcleo con un fluido de de Sitter fue hallada por Dymnikova 1992. Esta solución representa un estado de vacío con un agujero negro no singular. El tensor de energía-impulso que representa la fuente de la curvatura provee una “transición suave de un estado de vacío estándar muy lejos de la fuente hacia un estado de vacío isotrópico para  $r \rightarrow 0$  a través de un estado anisotrópico de vacío en la región intermedia [...]”. Por el momento dicha capa de material de transición no puede explicarse a partir de alguna teoría fundamental que describa la realidad a nivel microscópico” [Dymnikova, 1992].

El estado de vacío anisotrópico fue reemplazado por Mbonye & Kazanas 2005 por una región con materia; ésta tiene asociada una presión tanto radial como tangencial, y una ecuación de estado que reproduce en forma suave el espacio-tiempo de de Sitter cerca de  $r = 0$ , y tiende a una polítropa para valores grandes de la coordenada radial, a bajas densidades<sup>3</sup>.

El objetivo principal de este capítulo es investigar el modelo presentado por Mbonye & Kazanas 2005 para un agujero negro regular en el que la singularidad se evita mediante el segundo método mencionado arriba. En particular, se brinda un estudio detallado de los aspectos termodinámicos de la materia que es la fuente de la curvatura<sup>4</sup>.

3 Distintos tipos de soluciones de agujeros negros regulares fueron revisadas recientemente por Lemos & Zanchin 2011, en donde agujeros negros regulares cargados, cuyo exterior está descrito por la solución de Reissner-Nordström también se discuten. Soluciones de agujeros negros regulares sin centro alguno han sido examinadas por Bronnikov & Fabris 2006; Bronnikov et al. 2007.

4 Otras características del modelo fueron estudiadas por Mbonye et al. 2012. La termodinámica de la materia exótica es discutida, entre otros, por Saridakis et al. 2009; Dymnikova & Korpupik 2011; Silva et al. 2012.

## 3.2 MODELO DEL INTERIOR DE UN AGUJERO NEGRO REGULAR

El modelo introducido por [Mbonye & Kazanas 2005](#) representa un agujero negro regular estático, cuya fuente de materia produce en el origen del sistema un campo gravitacional cuyo comportamiento es tipo de Sitter, y que hacia el exterior del objeto cambia en forma suave a una métrica de Schwarzschild. La métrica del espacio-tiempo apropiada para el análisis de las propiedades de este sistema tiene la forma [[Mbonye et al., 2012](#)]:

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.1)$$

La ecuación de estado propuesta por [Mbonye & Kazanas 2005](#) viene dada por:

$$p_r(\rho) = \left[ \alpha - (\alpha + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^2 \right] \left( \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \rho, \quad (3.2)$$

donde  $p_r$  es la presión radial (la cual debe distinguirse de la presión tangencial, que es necesaria en estos modelos para satisfacer la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff<sup>5</sup>), y  $\alpha = 2,2135^6$ . La ecuación de estado 3.2 describe el comportamiento de la materia que cambia en forma suave de normal a un núcleo de “fluido exótico”, de forma tal que  $p_r = -\rho$  cuando  $r \rightarrow 0$ , como se muestra en la Fig. 15. Luego, para evitar la presencia de la singularidad en  $r = 0$ , la condición de energía fuerte se viola en el núcleo del objeto, mientras que la condición de energía débil y dominante se satisfacen en todo punto [[Mbonye & Kazanas, 2005](#)].

El perfil de densidad elegido por [Mbonye & Kazanas 2005](#) para resolver las ecuaciones de Einstein fue propuesto por [Dymnikova 1992](#) y tiene la forma<sup>7</sup>:

$$\rho(r) = \rho_{\max} e^{-8 \frac{r^3}{R^3}}, \quad (3.3)$$

donde  $R^3 = 8R_S r_0^2$ ,  $R_S$  es el radio de Schwarzschild,

$$r_0 = \left( \frac{3}{8\pi\rho_{\max}} \right)^{1/2}, \quad (3.4)$$

y  $\rho_{\max}$  es del orden de la densidad de Planck. De la Ec. 3.3 se infiere que la mayor parte de la masa del objeto está contenida dentro de una esfera de radio  $R$  muy por debajo del radio del horizonte de eventos, siendo  $R$  el radio de la superficie de la materia. La densidad tiene una

<sup>5</sup> Como se muestra en [Cattoen et al. 2005](#), para poder satisfacer la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, se debe introducir una presión anisotrópica cuando se tienen espacio-tiempos esféricamente simétricos y fuentes de campo gravitacional dadas por fluidos perfectos con presiones negativas en algún intervalo de la coordenada radial.

<sup>6</sup> Este valor de  $\alpha$  fue elegido para que la velocidad del sonido esté siempre acotada por la velocidad de la luz [[Mbonye & Kazanas, 2005](#)].

<sup>7</sup> MK supusieron de manera implícita que  $\rho = 0$  para  $r > R$ , aunque esto no es estrictamente correcto. La caída en el perfil de densidad, sin embargo, es lo suficientemente fuerte como para considerar la aproximación anterior correcta.

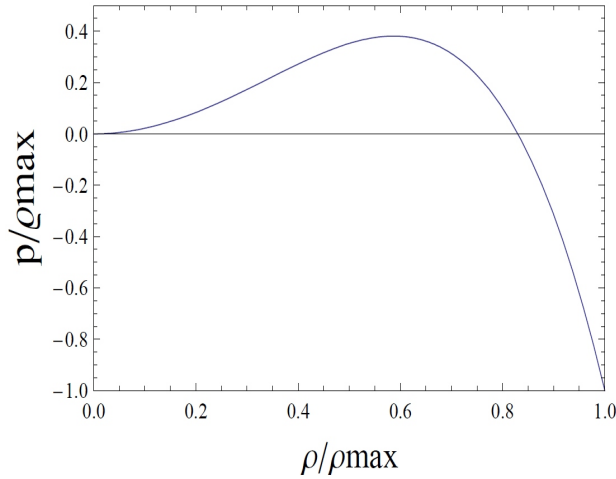


Figura 15: Presión radial en función de la densidad.

transición suave de un estado de de Sitter en el centro del objeto a un estado de vacío para  $r > R$ , siendo el material en la región intermedia no inflacionario, situación ya predicha por [Poisson & Israel 1988](#).

Si se toma el límite  $r \rightarrow \infty$  de la Ec. 3.1,  $m(r) \rightarrow M$ , y la métrica exterior ( $r \gg R_S$ ) tiende asintóticamente a la métrica de Schwarzschild.

La estructura del interior del agujero negro está caracterizada por las siguientes regiones, tal como se describe en [Mbonye & Kazanas 2005](#):

1. Región de materia exótica:

$$0 \leq r \leq r_* = 0,4R, \tag{3.5}$$

donde  $R$  es el radio del objeto compacto dentro del horizonte. En el núcleo de esta región la métrica es de Sitter.

2. Región de materia normal:

$$0,4R \leq r \leq R. \tag{3.6}$$

El núcleo de de Sitter soporta esta región evitando el colapso de la misma.

3. Región de vacío de Schwarzschild:

$$R < r < r_h = 2M, \tag{3.7}$$

donde  $r_h = R_S = 2M$  es el radio del horizonte de eventos. En esta región el tensor de Ricci es nulo.

Debe notarse que en el centro geométrico del objeto, la métrica del espacio-tiempo es exactamente de Sitter, y para  $r > R$  tiende rápidamente a Schwarzschild.

En la Fig. 16 se muestra el gráfico de la presión radial en función de la coordenada radial. En el centro del objeto, la presión está representada por la ecuación  $p = -\rho$ , y tiende a cero para  $r/R = 1$ , la superficie

de la región de materia. La presión radial tiene otro cero localizado en  $r/R = 0,28$ , dos puntos de inflexión en  $r/R = 0,26$  y  $r/R = 0,5$ , y un máximo absoluto en  $r/R = 0,4$ . La región de materia exótica (en la cual la presión decrece a medida que la coordenada radial disminuye) ocupa la región  $r/R < 0,4$ <sup>8</sup>.

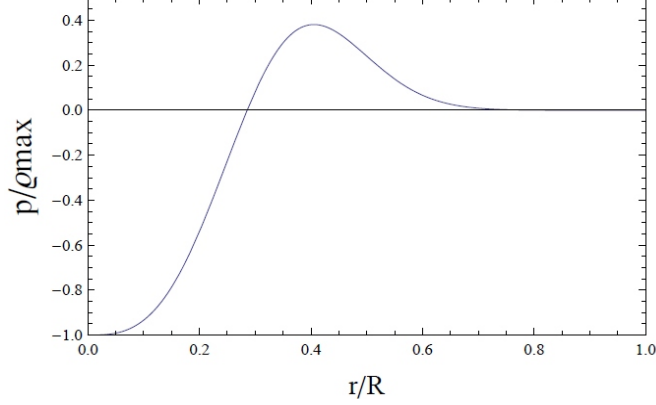


Figura 16: Presión radial en función de la coordenada radial.

La solución de las ecuaciones de Einstein  $G_{\nu}^{\mu} = -8\pi T_{\nu}^{\mu}$ , con:

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho(r), p_r(r), p_{\perp}(r), p_{\perp}(r)),$$

para la métrica dada por 3.1 y la ecuación de estado 3.2 tiene la forma [Mbonye et al., 2012]:

$$B(r) = \exp \int_{r_0}^r \frac{2}{r'^2} [m(r') + 4\pi r'^3 p_r'] \times \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{2m(r')}{r'}\right)} \right] dr'. \quad (3.8)$$

La masa total del objeto está dada por:

$$M = \int_0^R m(r) dr, \quad (3.9)$$

donde:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (3.10)$$

Las ecuaciones 3.8 y 3.10 describen la geometría del espacio-tiempo de un agujero negro regular propuesta por Mbonye & Kazanas 2005. Dado que la ecuación de estado y la densidad en función de la coordenada radial  $r$  fueron especificadas en Mbonye & Kazanas 2005, la presión tangencial en términos de las cantidades anteriores puede derivarse a partir de las ecuaciones de Einstein. En forma explícita:

$$p_{\perp} = p_r + \frac{r}{2} p_r' + \frac{1}{2} (p_r + \rho) \left[ \frac{m(r) + 4\pi r^3 p_r}{r - 2m(r)} \right]. \quad (3.11)$$

<sup>8</sup> Si bien este perfil se asemeja cualitativamente al gráfico de la presión radial de una gravastar [Cattoen et al., 2005], el modelo de Mbonye & Kazanas 2005 posee un horizonte de eventos, el cual está ausente en gravastars.

En la Fig. 17 se muestra un gráfico de la presión tangencial en función de la coordenada radial.

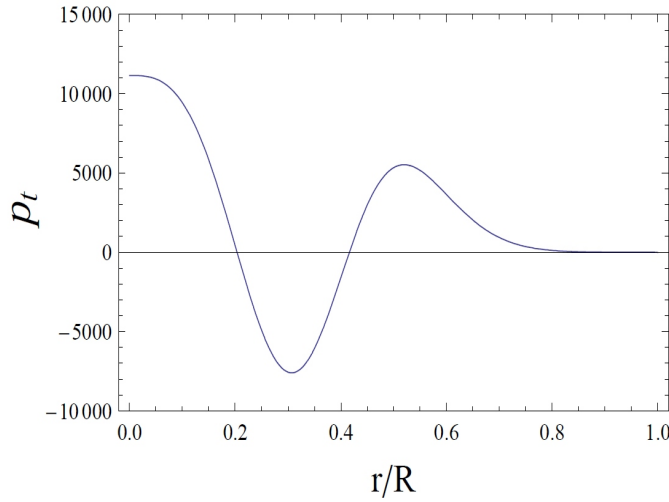


Figura 17: Presión tangencial como función de la coordenada radial.

Es importante enfatizar que la forma en que [Mbonye & Kazanas 2005](#) obtienen su modelo de agujero negro regular difiere del tratamiento usual para la resolución de las ecuaciones de campo de la Relatividad General. A diferencia de, por ejemplo [Horvat et al. 2011](#), las ecuaciones de estado y la forma de  $\rho(r)$  son propuestas, mientras que habitualmente, sólo se dan dos relaciones entre las cantidades  $p_r$ ,  $p_\perp$  y  $\rho$ . En la Sección 3.5 se mostrará que la elección de [Mbonye & Kazanas 2005](#) tiene consecuencias importantes en el análisis de las perturbaciones a las ecuaciones de Einstein.

### 3.3 TERMODINÁMICA DE LA MATERIA INTERIOR AL HORIZONTE DE EVENTOS

Siguiendo el tratamiento de [Mbonye & Kazanas 2005](#), suponemos que el objeto ha alcanzado una configuración de equilibrio estático (i.e. dentro del agujero negro, la fuerza ejercida por el campo gravitacional está balanceada por la repulsión debido a la materia exótica). Consideramos también que la materia se encuentra en equilibrio termodinámico. Como mostraremos más abajo, los resultados obtenidos bajo estas hipótesis son incorrectos y, por lo tanto, esto implica que el sistema es inestable dinámicamente y termodinámicamente.

La temperatura de la materia como función del radio puede ser estimada mediante las leyes de la termodinámica:

$$T dS = d(\rho V) + p_r dV, \quad (3.12)$$

donde  $dV$  es un elemento de volumen en el sistema de referencia propio del fluido [[Misner et al., 1973](#)]. De esta última ecuación, usando que  $\partial^2 S / \partial V \partial T = \partial^2 S / \partial T \partial V$ :

$$dp_r = \frac{(\rho + p_r)}{T} dT. \quad (3.13)$$

Reemplazando 3.2 y 3.3 en 3.13 se tiene:

$$\frac{dT}{T} = \frac{2 [\alpha - 2(\alpha + 1)(\rho/\rho_{\max})^2] d\rho}{\rho_{\max} + [\alpha - (\alpha + 1)(\rho/\rho_{\max})^2] \rho}, \quad (3.14)$$

de cuya integración obtenemos la fórmula para la temperatura en función de la coordenada radial:

$$\frac{T}{T_{\text{sup}}} = \left[ 1 + \alpha e^{-8r^3/R^3} - (\alpha + 1)e^{-24r^3/R^3} \right]^{4/3} e^{\Xi(r)}, \quad (3.15)$$

donde  $T_{\text{sup}}$  denota la temperatura del campo de materia en  $r = R$ , y

$$\Xi(r) = \frac{2}{3} \int_0^{e^{-8r^3/R^3}} \frac{\alpha d(\rho/\rho_{\max})}{1 + \alpha(\rho/\rho_{\max}) - (\alpha + 1)(\rho/\rho_{\max})^3}. \quad (3.16)$$

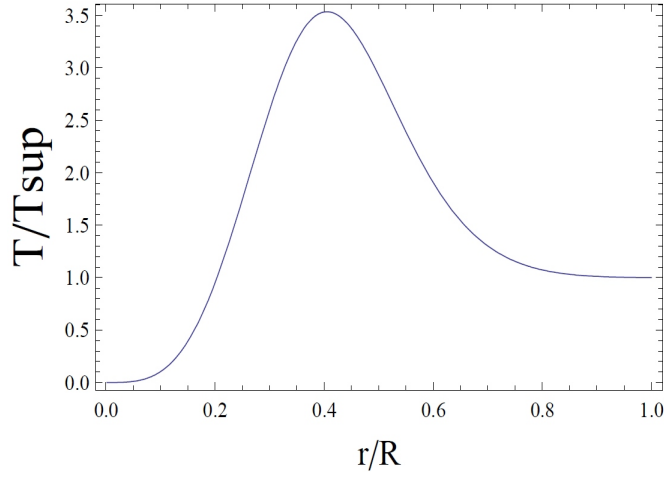


Figura 18: Temperatura en función de la coordenada radial dentro del agujero negro, dada por 3.15.  $T_{\text{sup}}$  denota la temperatura de la materia en  $r = R$ .

En la Fig. 18 mostramos la temperatura de la materia en función del radio. Se observa que la temperatura tiende a cero absoluto cerca del núcleo del objeto. Como en el caso de la presión radial (ver Fig. 16), se tiene un único máximo en  $r/R = 0,4$ . Los puntos de inflexión de  $T(r)$  se encuentran en  $r/R = 0,31$  y  $r/R = 0,57$ .

Una expresión para la entropía en función de las coordenadas puede derivarse sustituyendo 3.15 en 3.12:

$$S \equiv \frac{(\rho + p)}{T} V. \quad (3.17)$$

Grificamos el resultado en la Fig. 19. La entropía tiende a cero cuando  $r \rightarrow 0$  cumpliéndose así el Teorema de Nerst, y tiene un máximo cerca de  $r/R = 0,4$ , en la región de mayor densidad de la materia normal.

La densidad de entropía de la materia dentro del agujero negro regular puede también calcularse, y viene dada por:

$$\frac{s}{s_{R/2}} = \frac{(\rho/\rho_{\max}) [1 + \alpha(\rho/\rho_{\max}) - (\alpha + 1)(\rho/\rho_{\max})^3]^{-1/3}}{0,2076 e^{(2/3)} \int_0^{\rho} \alpha d\rho [\rho_{\max} + \alpha\rho - (\alpha + 1)(\rho^3/\rho_{\max}^2)]^{-1}}. \quad (3.18)$$

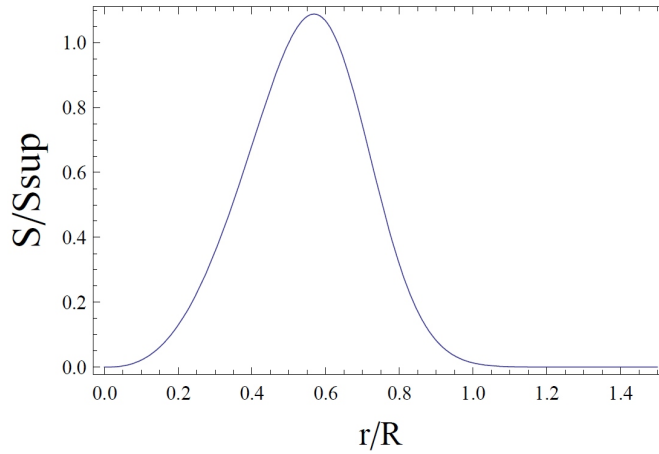


Figura 19: Entropía de la materia en función de la coordenada radial dentro del agujero negro.  $S_{\text{sup}}$  denota la entropía de la materia en  $r = R$ .

En las Figs. 20 y 21 mostramos los gráficos de la densidad de entropía en función de  $\rho$  y  $r$ : la densidad de entropía diverge en el origen dado que el volumen se hace nulo. La densidad de entropía en función de la densidad tiene un único punto de inflexión en  $\rho/\rho_{\text{max}} = 0,73$  que está localizado en  $r/R = 0,34$ .

La velocidad del sonido radial como función de la densidad de energía puede calcularse mediante  $v_r^2 = dp/d\rho$  (tomando  $c = 1$ ):

$$v_r^2 = 2e^{-8r^3/R^3} \left[ \alpha - 2(\alpha + 1)e^{-16r^3/R^3} \right]. \quad (3.19)$$

Graficamos el resultado en la Fig. 22. De las Figs. 16 y 22, advertimos que la velocidad del sonido es cero para el valor de  $r/R$  en que la presión es máxima. Además, la velocidad del sonido alcanza valores complejos en la región  $r/R < 0,4$ , en acuerdo con la pendiente negativa de la ecuación de estado en función de la densidad (ver 3.2 y Fig. 15). Las ondas sonoras no se propagan en la región  $r/R < 0,4$  como consecuencia del comportamiento exótico que allí tiene la materia: una variación en la presión causa una expansión en vez de una compresión.

Para analizar el equilibrio termodinámico de la materia, calculamos primero la energía libre de Helmholtz, dada por  $F = U - TS = -pV$ . En forma explícita:

$$\frac{F}{F_{0,2R}} = \frac{-1}{0,018} \left[ \alpha - (\alpha + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_{\text{max}}} \right)^2 \right] \left( \frac{\rho}{\rho_{\text{max}}} \right)^2 \frac{4\pi}{3} \left( \frac{r}{R} \right)^3. \quad (3.20)$$

En la Fig. 23 mostramos el gráfico de la energía libre de Helmholtz  $F$  como función de la coordenada radial.

A partir de la funciones termodinámicas derivadas en esta sección, procederemos a discutir el equilibrio termodinámico y dinámico del agujero negro regular.

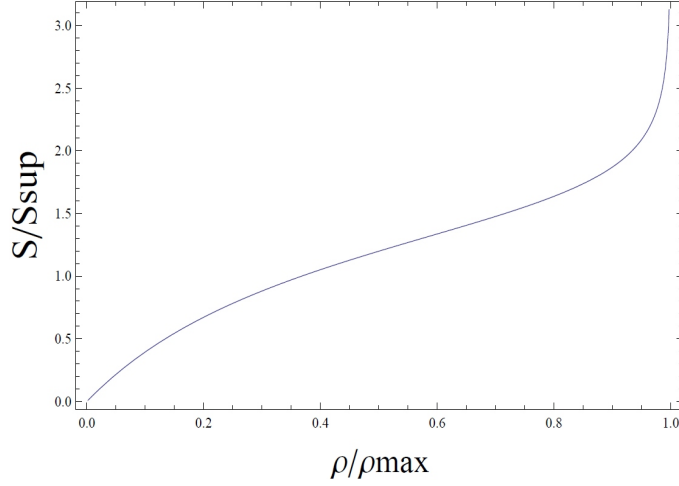


Figura 20: Densidad de entropía de la materia en función de la densidad.  $S_{\text{sup}}$  denota la entropía de la materia en  $r = R$ .

### 3.4 EQUILIBRIO TERMODINÁMICO DEL INTERIOR DEL AGUJERO NEGRO REGULAR

Una condición para que un sistema se encuentre en equilibrio termodinámico estable es que, para un dado valor de entropía y volumen, la energía debe ser mínima. Esto es equivalente a imponer la siguiente condición sobre el calor específico a volumen constante:

$$C_V > 0. \quad (3.21)$$

La dependencia de  $C_V$  con la coordenada radial puede ser calculada de:

$$C_V = T \left( \frac{dS}{dT} \right)_V. \quad (3.22)$$

Usando las expresiones deducidas en las secciones anteriores, obtenemos:

$$\frac{C_V}{V} = \frac{1}{2T} \frac{\rho_{\text{max}} \left( 1 + \left[ \alpha - (\alpha + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_{\text{max}}} \right)^2 \right] \frac{\rho}{\rho_{\text{max}}} \right)}{\left[ \alpha - 2(\alpha + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_{\text{max}}} \right)^2 \right]}. \quad (3.23)$$

Para  $r = R$ ,  $\rho$  es cero, y 3.23 tiene la forma:

$$\frac{C_{V\text{sup}}}{V_{\text{sup}}} = \frac{\rho_{\text{max}}}{2\alpha T_{\text{sup}}}. \quad (3.24)$$

Introduciendo esta expresión como una constante de normalización en 3.23 :

$$\frac{C_V}{C_{V\text{sup}}} = \left( \frac{r}{R} \right)^3 \frac{\alpha \left( 1 + \left[ \alpha - (\alpha + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_{\text{max}}} \right)^2 \right] \frac{\rho}{\rho_{\text{max}}} \right)}{\left[ \alpha - 2(\alpha + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_{\text{max}}} \right)^2 \right]} \frac{T_{\text{sup}}}{T}. \quad (3.25)$$



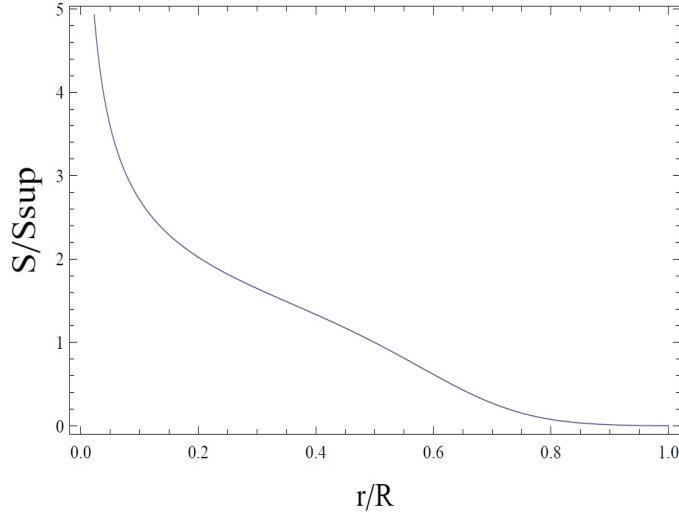


Figura 21: Densidad de entropía de la materia en función de la coordenada radial.  $S_{\text{sup}}$  denota la entropía de la materia en  $r = R$ .

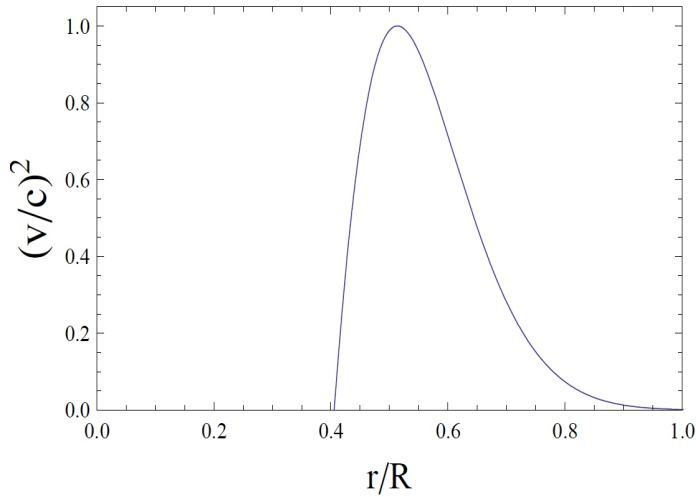


Figura 22: Velocidad del sonido en función de la coordenada radial.

El gráfico del calor específico a volumen constante está en la Fig. 24: el calor específico es negativo para  $r/R < 0,4$  y positivo para  $r/R > 0,4$ . En  $r/R = 0,4$  no está definido. El cambio de signo en  $C_V$  puede entenderse a partir de las Figs. 18 y 20, teniendo en cuenta que 3.22 puede también escribirse como:

$$C_V = T \left( \frac{dS}{d\rho} \right)_V \left( \frac{d\rho}{dT} \right)_V. \quad (3.26)$$

Dado que la pendiente de la entropía como función de la densidad es siempre positiva, el cambio de signo queda determinado por  $d\rho/dT$ , que también puede escribirse como  $d\rho/dT = (d\rho/dr) (dr/dT)$ . La densidad como función de la coordenada radial  $r$  es una función exponencial decreciente, luego  $d\rho/dr < 0$  para cualquier valor de  $r$ . De la Fig. 18 advertimos que para  $r/R < 0,4$ ,  $dr/dT > 0$  y  $d\rho/dT$

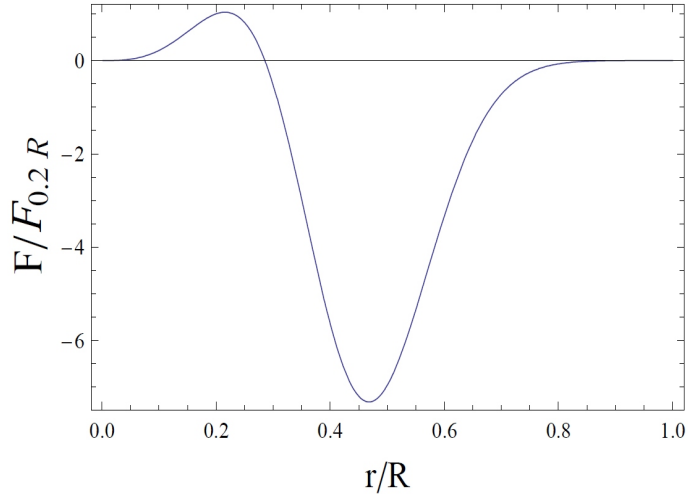


Figura 23: Energía libre de Helmholtz como función de la coordenada radial.  $F_{0,2R}$  denota la energía libre de Helmholtz en  $r/R = 0,2$ .

se vuelven negativas en dicha región; por otro lado para  $r/R > 0,4$ ,  $dr/dT < 0$  y  $d\rho/dT > 0$  en la región de materia normal.

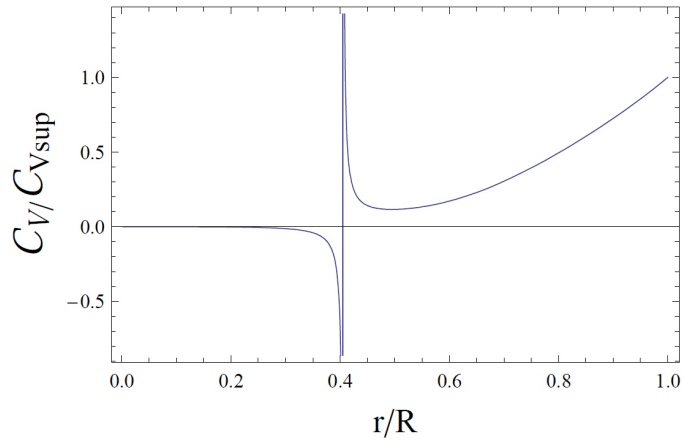


Figura 24: Calor específico a volumen constante como función de la coordenada radial en el interior del agujero negro.  $C_{Vsup}$  denota el calor específico a volumen constante en  $r = R$ .

De manera similar, calculamos el calor específico a presión constante, que está definido como:

$$C_p = T \left( \frac{dS}{dT} \right)_p. \quad (3.27)$$

El resultado es:

$$C_p/C_{psup} = \frac{\alpha}{7} \frac{f_1 f_2}{\left( \frac{T}{T_{sup}} \right) \left[ \alpha - 2(\alpha + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_{max}} \right)^2 \right]_p}, \quad (3.28)$$

donde:

$$f_1 = 8 \left( \frac{r}{R} \right)^3 - 1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \left[ \alpha - (\alpha + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^2 \right], \quad (3.29)$$

$$f_2 = 1 + \frac{\rho}{\rho_{\max}} \left[ \alpha - (\alpha + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^2 \right]. \quad (3.30)$$

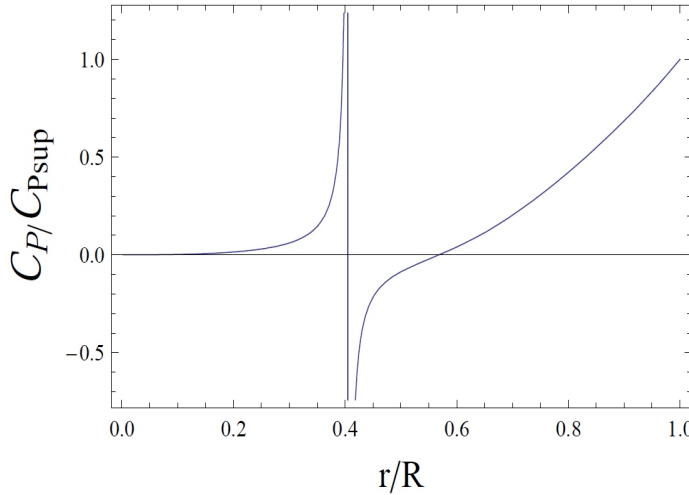


Figura 25: Calor específico a presión constante como función de la coordenada radial en el interior del agujero negro.  $C_{P_{\text{sup}}}$  denota el calor específico a presión constante en  $r = R$ .

Mostramos el gráfico del calor específico a presión constante en la Fig. 25. Notamos que  $C_p = 0$  en  $r/R = 0,57$ ; este punto coincide con uno de los puntos de inflexión de la temperatura. Para  $r/R < 0,4$  y  $r/R > 0,57$   $C_p$  es positivo, mientras que en la región  $0,4 < r/R < 0,57$ ,  $C_p$  resulta negativo. Resulta útil reescribir la fórmula 3.27 como:

$$C_p = T \left( \frac{dS}{dr} \right)_p \left( \frac{dr}{dT} \right)_p. \quad (3.31)$$

para comprender el cambio de signo en el calor específico a presión constante. De la Fig. 19 vemos que  $dS/dr > 0$  para  $r/R < 0,57$  y  $dS/dr < 0$  para  $r/R > 0,57$  y dado que la pendiente de la temperatura como función del radio es positiva para  $r/R < 0,4$  y negativa para  $r/R > 0,4$  (ver Fig. 18),  $C_p$  presenta un cambio de signo en  $r/R = 0,57$ .

El comportamiento discontinuo de  $C_p$  como también de  $C_v$  en  $r/R = 0,4$  es típico de una transición de fase de segundo orden; este hecho nos sugiere que el sistema es termodinámicamente inestable. Estos resultados además muestran que los calores específicos no están definidos para el valor de  $r/R$  donde la velocidad del sonido se hace cero, lo cual refuerza la hipótesis de la existencia de una región de inestabilidad en la región de materia normal. El cambio de signo en ambas cantidades termodinámicas se debe a la presencia de materia exótica en el núcleo del objeto. Ésto no ocurre en sistemas que sólo están constituidos por materia normal.

Se llega a esta misma conclusión al examinar el gráfico de la compresibilidad isotérmica  $\kappa_T$ , definida como:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T, \quad (3.32)$$

que es una función de  $r/R$ . La condición de equilibrio en este caso es  $\kappa_T > 0$ .

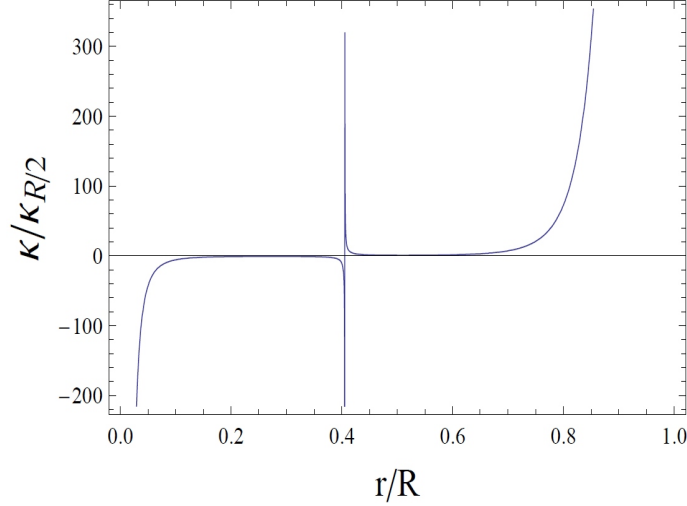


Figura 26: Compresibilidad isotérmica como función de la coordenada radial en el interior del agujero negro.  $\kappa_{T R/2}$  denota la compresibilidad isotérmica en  $r = R/2$ .

En síntesis, las discontinuidades presentes en las derivadas segundas de las funciones de estado (junto con la continuidad de las funciones de estado y de sus derivadas primeras respectivas, como se ha mostrado en los gráficos) parecen indicar que la materia dentro del agujero negro no se encuentra en equilibrio termodinámico. Esta conclusión se ve reafirmada al estudiar el comportamiento de la velocidad transversal como función de la coordenada radial  $r$ :

$$v_{\perp}^2 = \frac{dp_{\perp}}{d\rho}. \quad (3.33)$$

La función  $v_{\perp}(r)$  puede calcularse de 3.2 y 3.11 y presentamos su gráfico en la Fig. 27.

Al analizar esta última figura no sólo se evidencian las inestabilidades discutidas arriba, sino que además se descubre una nueva inestabilidad en la región de materia normal del objeto.

### 3.5 EQUILIBRIO DINÁMICO DEL INTERIOR DEL AGUJERO NEGRO REGULAR

Para estudiar la estabilidad dinámica del sistema físico dentro del agujero negro regular, es necesario un análisis detallado del problema de Sturm-Liouville asociado a las ecuaciones perturbadas de movimiento para el fluido y la métrica, respectivamente. Antes de desarrollar dicho análisis, discutiremos algunos argumentos que parecen sugerir que el sistema es dinámicamente inestable.

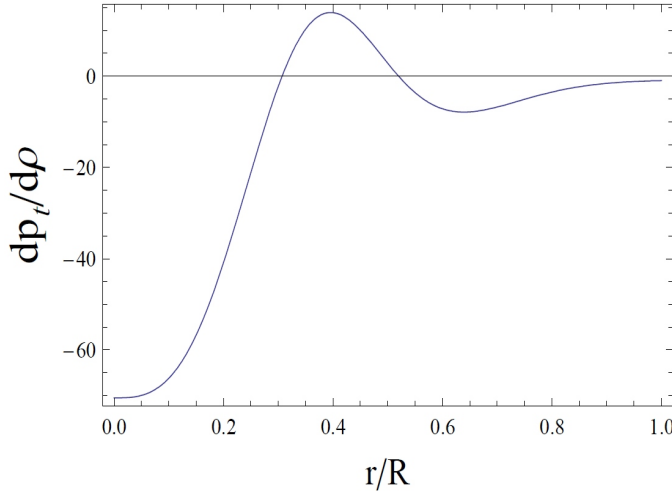


Figura 27: Velocidad del sonido tangencial como función de la coordenada radial.

Como mostramos en la Sección 3.3, en la región de materia exótica no hay propagación de las ondas de sonido. La ecuación para la velocidad radial del sonido, en la región de materia exótica, puede escribirse como:

$$v_r^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta \rho}, \quad (3.34)$$

y de esta última expresión obtenemos para la presión en función de la densidad:

$$\Delta p = -v_r^2 \Delta \rho. \quad (3.35)$$

Si la presión aumenta, la densidad decrece; pero si la densidad decrece, la presión continua creciendo. En este proceso, tanto la densidad como la presión están relacionados mediante 3.35 de forma tal que si el sistema se perturba, el fluido nunca detiene su expansión. Suggerimos entonces que la gran acumulación de energía en este proceso de expansión continua puede llevar a divergencias que indiquen la inestabilidad del sistema.

Para estudiar la estabilidad de un sistema sometido a presiones tangenciales con perturbaciones en la dirección radial, se hará un estudio perturbativo de las ecuaciones de campo de Einstein como de la ecuación de estado siguiendo el procedimiento usual (ver por ejemplo Hillebrandt & Steinmetz 1976). El objetivo es obtener una ecuación diferencial para la cantidad  $\xi(r, t)$  que representa un pequeño desplazamiento radial del fluido respecto de su posición de equilibrio al tiempo  $t$ , esto es,  $r(r, t) = r_0 + \xi(r, t)$ .

Los coeficientes no perturbados de la métrica  $A(r)$ ,  $B(r)$ , y las variables termodinámicas no perturbadas se denotarán con un subíndice cero. Sus correspondientes perturbaciones se denotarán  $\delta A(r, t)$ ,  $\delta B(r, t)$ ,  $\delta p_r(r, t)$ ,  $\delta p_\perp(r, t)$  y  $\delta \rho(r, t)$ .

Luego de cierta manipulación algebraica (que se asemeja a la presentada en [Hillebrandt & Steinmetz 1976](#)) obtenemos las ecuaciones para las perturbaciones:

$$8\pi r^2 \delta\rho = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r\delta A}{A_0^2} \right), \quad (3.36)$$

$$8\pi \dot{\xi}(\rho_0 + p_r^0) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \delta A}{\partial t} \frac{1}{A_0^2}, \quad (3.37)$$

$$8\pi r^2 \delta p_r = \frac{r}{A_0} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\delta B}{B_0} \right) - \frac{dB_0}{dr} \frac{\delta A}{A_0} \right] - \frac{\delta A}{A_0^2}, \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \delta p_{\perp} = & \frac{r}{2} \frac{\partial \delta p_r}{\partial r} + \delta p_r + \frac{r}{4B_0} \frac{dB_0}{dr} (\delta p_r + \delta\rho) \\ & + \left[ \frac{r}{4} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\delta B}{B_0} \right) + \frac{r}{2} \frac{A_0}{B_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right] (p_r^0 + \rho_0). \end{aligned} \quad (3.39)$$

El sistema anterior presenta 6 incógnitas, siendo ésto una consecuencia de la elección hecha por [Mbonye & Kazanas 2005](#) (una ecuación de estado y la forma explícita de la función  $\rho(r)$ ) para determinar su modelo de agujero negro regular.

La ecuación 3.37 puede integrarse respecto al tiempo<sup>9</sup>:

$$\frac{\delta A}{A_0} = -8\pi r(\rho_0 + p_r^0) A_0 \xi. \quad (3.40)$$

Si se despeja  $\delta B$  de 3.38 obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\delta B}{B_0} \right) = 8\pi r A_0 \delta p_r + \frac{\delta A}{A_0} \left( \frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{dr} + \frac{1}{r} \right). \quad (3.41)$$

El conjunto final de ecuaciones tiene la forma:

$$8\pi r^2 \delta\rho = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r\delta A}{A_0^2} \right), \quad (3.42)$$

$$\delta p_r + (p_r^0)' \xi = \left( \frac{dp_r}{d\rho} \right)_0 (\delta\rho + \rho_0' \xi), \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \delta p_{\perp} = & \frac{r}{2} \frac{\partial \delta p_r}{\partial r} + \delta p_r + \frac{r}{4B_0} \frac{dB_0}{dr} (\delta p_r + \delta\rho) \\ & + \left( \frac{r}{4} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\delta B}{B_0} \right) + \frac{r}{2} \frac{A_0}{B_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right) (p_r^0 + \rho_0), \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\frac{\delta A}{A_0} = -8\pi r(\rho_0 + p_0) A_0 \xi, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\delta B}{B_0} \right) = 8\pi r A_0 \delta p_r + \frac{\delta A}{A_0} \left( \frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{dr} + \frac{1}{r} \right). \quad (3.46)$$

Proponemos para la función  $\xi(r, t)$  la forma  $\xi(r, t) = \sigma(r) \exp i\omega t$  que da lugar en el sistema de ecuaciones anteriores a una ecuación diferencial inhomogénea de segundo orden para la función  $\sigma(r)$ :

$$A_{\star}(r)\sigma''(r) + C_{\star}(r)\sigma'(r) + [B_{\star}(r) + \omega D_{\star}(r)] \sigma(r) = \Pi(r), \quad (3.47)$$

donde hemos utilizado  $\delta p_{\perp}(r, t) = \Pi(r) \exp i\omega t$ .

<sup>9</sup> Elegimos la constante de integración de manera tal que  $\delta A(r, t) = 0$  si  $\delta r = 0$ .

Esta ecuación define un problema de Sturm-Liouville (SL) inhomogéneo, siendo la inhomogeneidad una consecuencia directa de la forma en que fue obtenida la solución de [Mbonye & Kazanas 2005](#), como mencionamos anteriormente.

El dominio de la variable  $r$  en la ecuación 3.47 es  $r \in [0, 1]$ , usando las condiciones de contorno  $\sigma(r) = 0$ ,  $\sigma(1) = 0$ , y  $[\delta\rho(1, t) + \rho'_0(1, t)\xi(1, t)] = 0$  [[Hillebrandt & Steinmetz, 1976](#)]. Los coeficientes  $A_\star(r)$ ,  $B_\star(r)$ ,  $C_\star(r)$ , y  $D_\star(r)$  están dados por:

$$A_\star(r) = \frac{r}{2} (p_r^0 + \rho_0) \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0, \quad (3.48)$$

$$B_\star(r) = B_1(r) + B_2(r) + B_3(r) + B_4(r), \quad (3.49)$$

donde:

$$B_1(r) = \frac{1}{8\pi r^2} q'(r) \alpha, \quad (3.50)$$

$$q'(r) = \frac{\partial}{\partial r} [-8\pi r^2 (\rho_0 + p_r^0)],$$

$$\alpha = \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 + \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \Sigma(r) + \frac{r}{4B_0} \frac{dB_0}{dr},$$

$$\Sigma(r) = 1 + \frac{r}{4B_0} \frac{dB_0}{dr} + 4\pi r^2 A_0 (p_r^0 + \rho_0),$$

$$B_2(r) = \frac{r}{2} \tau(r), \quad (3.51)$$

$$\tau(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \rho'_0 - \frac{\partial}{\partial r} (p_r^0)' + \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial \rho'_0}{\partial r},$$

$$B_3(r) = \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{8\pi r^2} q'(r) \right) \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0, \quad (3.52)$$

$$B_4(r) = -8\pi r (\rho_0 + p_r^0) A_0 \left[ r \frac{d}{dr} (\ln B_0) + 1 \right], \quad (3.53)$$

$$C_\star(r) = C_1(r) + C_2(r) + C_3(r), \quad (3.54)$$

$$C_1(r) = \frac{1}{8\pi r^2} q \alpha, \quad (3.55)$$

$$q = -8\pi r^2 (\rho_0 + p_r^0),$$

$$C_2(r) = \frac{r}{2} \left[ \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \rho'_0 - p'_0 \right], \quad (3.56)$$

$$C_3(r) = \frac{1}{8\pi r} \left( -\frac{1}{r} q + q' \right), \quad (3.57)$$

$$D_*(r) = -\frac{r}{2} \frac{A_0}{B_0} (p_r^0 + \rho_0). \quad (3.58)$$

Para una dada  $\Pi(r)$ , la ecuación 3.47 puede resolverse utilizando el método de la función de Green (ver por ejemplo Morse & Feshbach [1953]). Como mostraremos a continuación, sin embargo, el problema de Sturm-Liouville definido por la ecuación 3.47 posee un punto singular. Consideramos la ecuación [Zettl, 2005]:

$$-(py')' + qy = \lambda wy, \quad (3.59)$$

que corresponde al problema de Sturm-Liouville homogéneo definido en  $J = (a, b)$ , con  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ . El autovalor  $\lambda$  es tal que  $\lambda \in \mathbb{C}$ , y  $p, q, w$  y  $y$  son funciones de  $x$ . Suponemos además que:

$$\frac{1}{p}, q, w \in L_{\text{loc}}(J, \mathbb{C}), \quad (3.60)$$

donde  $L_{\text{loc}}(J, \mathbb{C})$  denota la variedad lineal de funciones  $y$  que satisfacen  $y \in L([\alpha, \beta], \mathbb{C})$  para todos los intervalos compactos  $[\alpha, \beta] \subseteq J$ .  $L(J, \mathbb{C})$  denota la variedad lineal de funciones complejas de Lebesgue y definidas en  $J$  para las cuales:

$$\int_a^b |y(t)| dt \equiv \int_J |y(t)| dt \equiv \int_J |y(t)| < \infty. \quad (3.61)$$

Siguiendo Zettl 2005, presentamos las siguientes definiciones<sup>10</sup>:

- El punto final (*endpoint*), finito o infinito  $a$  es *regular* si

$$\frac{1}{p}, q, w \in L((a, d), \mathbb{C}), \quad (3.62)$$

para algún  $d \in J$ .

- Un punto final se denomina *singular* si no es regular.

Las definiciones son análogas para  $r = b$ .

Para determinar si  $a = 0$  es un punto regular o singular en nuestro problema, definido por la Ecuación 3.47, mostramos en la Fig. 28 un gráfico del coeficiente  $A_*$  en función de la coordenada radial.

Se observa que  $A_*(0) = A_*(0,4) = 0$ ,  $A_*(r) < 0$  para  $r \in (0, 0,4)$ , y  $A_*(r) > 0$  para  $r \in (0,4, 1)$ . Luego,  $1/A_* \notin L((0, d), \mathbb{C})$  para cualquier  $d \in (0, 1)$ . Concluimos entonces que el punto final  $a = 0$  es singular.

Si un punto final es singular, puede clasificarse como *punto límite* o *círculo límite*. De acuerdo a Zettl 2005, "hay escasa literatura sobre la dicotomía LP/LC (punto límite- círculo límite) cuando los 3 coeficientes en la ecuación de Sturm-Liouville están presentes<sup>11</sup>". En particular, "parece no haber literatura en el criterio LP/LC cuando  $p$  cambia de signo<sup>12</sup>".

Debido a la complejidad del problema, cuya resolución matemática dista de conocerse, se atacará el problema en una publicación futura.

<sup>10</sup> Aquí  $J$  es un intervalo de la recta real, abierto, cerrado, semi abierto, acotado o no acotado.

<sup>11</sup> "There is hardly any literature on the LP/LC (limit point-limit circle) dichotomy when all three coefficients are present in the SL equation".

<sup>12</sup> "There seems to be no literature on LP/LC criteria when  $p$  changes sign".



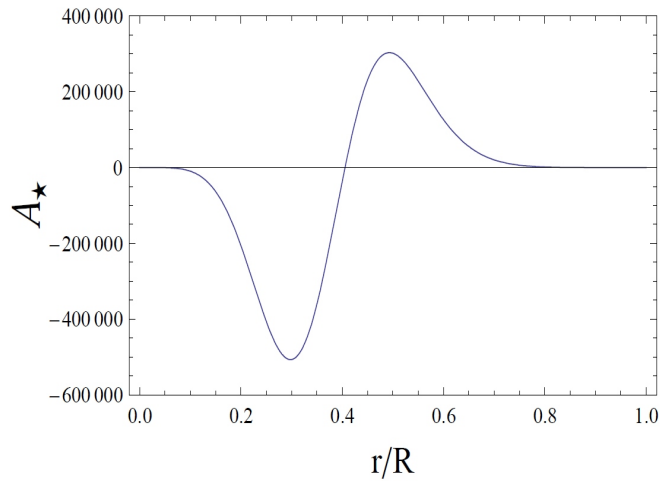


Figura 28: Coeficiente  $A_*$  como función de la coordenada radial.

### 3.6 CONCLUSIONES

Hemos mostrado que las cantidades termodinámicas que describen la materia, que es la fuente en el modelo de agujero negro regular propuesto por [Mbonye & Kazanas 2005](#), indican que la región de materia exótica es inestable. Por otro lado, hemos presentado cierta evidencia que muestra la inestabilidad dinámica del modelo. Dicha evidencia viene dada por los gráficos de  $v_r$  y  $v_\perp$  (ver Figs. 22 y 27). En particular, este último indicaría la presencia de un segundo tipo de inestabilidad dinámica en la región de materia normal del objeto. Estos resultados podrían confirmarse mediante un análisis perturbativo (que será presentado en el futuro), basado en las ecuaciones de la Sección 3.5.



## ENTROPIA GRAVITACIONAL DE AGUJEROS NEGROS

Como mencionamos en el Capítulo 2, los agujeros negros tienen asociada temperatura y entropía. La radiación emitida por un agujero negro es térmica y tiene una temperatura dada por [Hawking, 1974, 1975]:

$$\Theta_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M} \cong 10^{-7} \text{K} \left( \frac{M_\odot}{M} \right), \quad (4.1)$$

donde  $\hbar$  es la constante de Planck, y  $k_B$  denota la constante de Boltzmann. Bekenstein, antes del descubrimiento de Hawking, notó que las propiedades del área del horizonte de eventos de un agujero negro se asemejaban a las de la entropía, y propuso la siguiente relación [Bekenstein, 1972, 1973]:

$$S_{\text{BH}} = \frac{\mathcal{A}}{4l_{\text{Pl}}^2}. \quad (4.2)$$

Aquí  $S_{\text{BH}}$  denota la entropía del agujero negro y  $\mathcal{A}$  la superficie del horizonte de eventos.

Dado que los agujeros negros pueden describirse completamente en términos del campo gravitacional, parece entonces razonable asociar una entropía al propio campo gravitacional. En ausencia de una teoría cuántica de la gravitación, una medida estadística de la entropía gravitacional no es posible. Pueden construirse, sin embargo, estimadores de la misma utilizando invariantes clásicos de la teoría de la Relatividad General. En un trabajo pionero, Penrose 1979 propuso la denominada *Conjetura de Weyl*: escalares construidos a partir del tensor de Weyl pueden utilizarse para cuantificar la entropía del campo gravitacional.

El tensor de Weyl es un tensor de rango 4 que contiene las componentes independientes del tensor de Riemann no incluidas en el tensor de Ricci; el tensor de Weyl puede obtenerse del tensor de curvatura mediante la sustracción de algunos índices: el tensor de Riemann tiene 20 componentes independientes, 10 de las cuales vienen dadas por el tensor de Ricci y las restantes por el tensor de Weyl.

La forma del tensor de Weyl es la siguiente:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{2}{n-2} (g_{\alpha[\gamma} R_{\delta]\beta} - g_{\beta[\gamma} R_{\delta]\alpha}) + \quad (4.3)$$

$$+ \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{\alpha[\gamma} g_{\delta]\beta}, \quad (4.4)$$

donde  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  es el tensor de Riemann,  $R_{\alpha\beta}$  es el tensor de Ricci,  $R$  es el escalar de Ricci,  $[\ ]$  denota la parte antisimétrica, y  $n$  es el número de dimensiones del espacio-tiempo.

La Conjetura de Weyl ofrece, además, una posible explicación del estado termodinámico del universo como un todo a través del tiempo.

Los procesos físicos en cualquier sistemas termodinámico son irreversibles. En consecuencia, todo sistema siempre tiende a su estado de máxima entropía, tal como se expresa en la Segunda Ley de la Termodinámica. Si consideramos el sistema maximal, el universo, notamos que en el pasado estaba más caliente y en algún punto, materia y radiación estaban en equilibrio termodinámico, i.e. en un estado de máxima entropía. Luego, cabe preguntarse ¿cómo la entropía ha continuado creciendo si era máxima en el pasado?

Si el campo gravitacional tiene asociada una entropía, según Penrose [Penrose, 1979], la entropía total del universo correspondería a la entropía usual más la entropía del campo gravitacional. Inicialmente, aunque materia y radiación estaban localmente en equilibrio térmico, el campo gravitacional tendría que haber estado muy lejos del equilibrio dado que la gravedad es una fuerza atractiva y el universo, en sus comienzos, carecía de estructura. Consecuentemente, el universo temprano se encontraba fuera del equilibrio, estando la entropía total dominada por la entropía del campo gravitacional.

El comportamiento del tensor de Weyl, precisamente, es el esperado para la entropía gravitacional a través de la historia del universo: el valor del escalar de Weyl es nulo en los modelos homogéneos de FLRW y es muy grande en el espacio-tiempo de Schwarzschild [Penrose, 1979].

La propuesta de Penrose ha sido ampliamente estudiada. En particular, Rudjord et al. 2008 definieron un estimador clásico para la entropía del campo gravitacional basado en el cociente entre los escalares de Weyl y Kretschmann, respectivamente. Recientemente, Clifton et al. 2013 presentaron una nueva definición para la entropía gravitacional basada en integrales sobre cantidades construidas a partir del tensor de Bel-Robinson. Ambos estimadores han sido calculados exitosamente en distintos espacio-tiempos. En el primer caso, Rudjord et al. 2008 obtuvieron la densidad de entropía gravitacional para los espacio-tiempos de Schwarzschild, de Sitter, y Schwarzschild-de-Sitter, respectivamente. Por otro lado, Clifton et al. 2013 evaluaron su estimador en los espacio-tiempos de Schwarzschild, Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker espacialmente plano con perturbaciones escalares, y para la solución inhomogénea de Lemaître-Tolman-Bondi.

El objetivo de este capítulo es analizar cual de los estimadores arriba mencionados aproxima mejor la entropía del campo gravitacional. Para ello se evaluará ambos estimadores en espacio-tiempos que contienen agujeros negros y se compararán los resultados obtenidos.

En la próxima sección se describen detalladamente los estimadores sugeridos por Rudjord et al. 2008 y Clifton et al. 2013, que denominaremos estimador de Weyl-Kretschmann y estimador de Bel-Robinson, respectivamente.

## 4.1 ESTIMADORES CLÁSICOS PARA LA ENTROPÍA DEL CAMPO GRAVITACIONAL

4.1.1 *Estimador de Weyl-Kretschmann*

Rudjord et al. 2008 sugirieron un estimador para la entropía gravitacional que incorpora naturalmente la entropía de Bekenstein-Hawking. La entropía de un agujero negro puede ser descripta mediante una integral de superficie como:

$$S_{\sigma} = k \int_{\sigma} \vec{\Psi} \cdot d\vec{\sigma}, \quad (4.5)$$

donde  $\sigma$  es la superficie del horizonte de eventos del agujero negro y el campo escalar  $\vec{\Psi}$  es:

$$\vec{\Psi} = P \vec{e}_r, \quad (4.6)$$

con  $\vec{e}_r$  un vector radial unitario. El escalar  $P$  se define en términos del escalar de Weyl ( $\mathcal{W}$ ) y el escalar de Kretschmann ( $\mathcal{R}$ ):

$$P^2 = \frac{\mathcal{W}}{\mathcal{K}} = \frac{C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta}}{R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}}. \quad (4.7)$$

Para encontrar una descripción aceptable de la entropía de un agujero negro, se requiere que la expresión 4.5 sea igual en el horizonte a la entropía de Bekenstein-Hawking:

$$S_{\sigma} = S_{\text{BH}}. \quad (4.8)$$

La última ecuación permite calcular la constante  $k$ :

$$k = \frac{k_B}{4l_p^2} = \frac{k_B c^3}{4G\hbar}. \quad (4.9)$$

La densidad de entropía puede entonces determinarse mediante el teorema de divergencia de Gauss, reescribiendo la fórmula 4.5 como una integral de volumen:

$$s = k |\nabla \cdot \vec{\Psi}|. \quad (4.10)$$

Aquí, el símbolo de valor absoluto fue añadido para evitar valores negativos o complejos para la entropía.

Rudjord et al. 2008 calcularon la densidad de entropía en los espacio-tiempos de Schwarzschild, de Sitter, y Schwarzschild-de-Sitter (SdS). La entropía gravitacional en el espacio-tiempo de de Sitter es cero (el tensor de Weyl se hace cero), lo cual sugiere que la entropía del horizonte cosmológico tiene un origen no gravitacional. Contrariamente, el espacio-tiempo de Schwarzschild parece sólo tener entropía gravitacional. Los espacio-tiempos de Schwarzschild y de de Sitter fueron, pues, interpretados como dos casos extremos del espacio-tiempo de SdS. Este resultado ofrece una descripción razonable de la entropía gravitacional tal como sugirió Penrose: valores grandes de entropía clásica en el universo temprano y valores grandes de entropía gravitacional entorno a agujeros negros.

4.1.2 *Estimador de Bel-Robinson*

Clifton et al. 2013 definieron la entropía del campo gravitacional en analogía con la primera ley fundamental de la termodinámica:

$$T_{\text{grav}} dS_{\text{grav}} = dU_{\text{grav}} + p_{\text{grav}} dV. \quad (4.11)$$

Aquí,  $T_{\text{grav}}$ ,  $S_{\text{grav}}$ ,  $U_{\text{grav}}$  y  $p_{\text{grav}}$  denotan la temperatura efectiva, entropía, energía interna, y presión isotrópica del campo gravitacional respectivamente, y  $V$  es el volumen espacial. Expresiones para la densidad de energía efectiva  $\rho_{\text{grav}}$  y presión  $p_{\text{grav}}$  se derivan del tensor de Bel-Robinson. Este último se comporta como un tensor de energía-momento efectivo para el campo gravitacional<sup>1</sup> [Bretón et al., 1993] [Krishnasamy, 1985]. Dependiendo de si el campo gravitacional es tipo Coulomb (espacio-tiempos de Petrov tipo D) o tipo onda (espacio-tiempos de Petrov tipo N) diferentes expresiones pueden obtenerse para  $\rho_{\text{grav}}$  y  $p_{\text{grav}}$ . Para campos gravitacionales tipo Coulomb, tales como espacio-tiempos que contienen agujeros negros, la densidad de energía efectiva y presión del campo gravitacional toman la forma:

$$8\pi\rho_{\text{grav}} = 2\alpha\sqrt{\frac{2\mathcal{W}}{3}}, \quad (4.12)$$

$$p_{\text{grav}} = 0, \quad (4.13)$$

donde  $\alpha$  es una constante y  $\mathcal{W}$  es la *super densidad de energía*:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{4} (E_a{}^b E^a{}_b + H_a{}^b H^a{}_b), \quad (4.14)$$

denotando  $E_{ab}$  y  $H_{ab}$  la parte eléctrica y magnética del tensor de Weyl, respectivamente.

La temperatura del campo gravitacional se define como una cantidad local que reproduce la temperatura de Hawking [Hawking, 1974], Unruh [Unruh, 1976], y de Sitter [Gibbons & Hawking, 1977] en los límites apropiados [Clifton et al., 2013]. Su expresión es:

$$T_{\text{grav}} = \frac{|\dot{u}_a z^a + H + \sigma_{ab} z^a z^b|}{2\pi}. \quad (4.15)$$

Aquí  $u_a$  es un vector unitario tipo tiempo,  $z^a$  es un vector unitario tipo espacio alineado con la tetrad principal de Weyl,  $H = \Theta/3$  siendo  $\Theta = \nabla_a u^a$  el escalar de expansión y  $\sigma_{ab} = \nabla_{(a} u_{b)} + a_{(a} u_{b)} - 1/3 \Theta h_{ab}$  es el tensor de cizalladura<sup>2</sup>;  $h_{ab}$  es el tensor de proyección  $h_{ab} = g_{ab} - (u_c u^c) u_a u_b$ .

Clifton et al. 2013 calcularon la entropía gravitacional de un agujero negro de Schwarzschild. Como se esperaba, el estimador reproduce sobre el horizonte de eventos la entropía de Bekenstein-Hawking. Si este resultado puede ser generalizado a otros espacio-tiempos con agujeros negros, el estimador de Bel-Robinson resultaría más apropiado desde el punto de vista teórico que el de Weyl-Kretschmann, ya que se computa a partir de leyes físicas básicas y no involucra constantes fenomenológicas como  $k$ .

<sup>1</sup> Dado que el tensor de Bel-Robinson tiene dimensiones de  $L^{-4}$ , es necesario tomar el cuadrado de esta cantidad para obtener densidades de energía y presión con la dimensionalidad correcta [Bonilla & Senovilla, 1997].

<sup>2</sup> *Shear tensor*.

## 4.2 ESTIMADOR DE WEYL-KRETSCHMANN PARA AGUJEROS NEGROS

4.2.1 *Agujeros negros de Reissner-Nordström*

La métrica de Reissner-Nordström es una solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein; no es una solución de vacío ya que la fuente posee una carga eléctrica  $Q$ , generando un campo electromagnético. El elemento de línea tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - \left( 1 - \frac{r_S}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{1}{\left( 1 - \frac{r_S}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.16)$$

donde  $r_S = 2GM/c^2$  es el radio de Schwarzschild y:

$$q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4}, \quad (4.17)$$

está relacionada con la carga eléctrica  $Q$ .

Para hallar la expresión para  $P$ , primero calculamos el escalar de Weyl y el escalar de Kretschmann<sup>3</sup>. El resultado es:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \frac{8(6M^2 r^2 - 12MrQ^2 + 7Q^4)}{r^8} \end{aligned} \quad (4.18)$$

y

$$\mathcal{W} = C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48}{r^8} (Q^2 - Mr)^2. \quad (4.19)$$

Luego,  $P$  está dado por:

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta}}{R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}} \\ &= \frac{6M^2 r^2 - 12MrQ^2 + 6Q^4}{6M^2 r^2 - 12MrQ^2 + 7Q^4}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$P = \sqrt{\frac{6M^2 r^2 - 12MrQ^2 + 6Q^4}{6M^2 r^2 - 12MrQ^2 + 7Q^4}}. \quad (4.21)$$

De acuerdo a la prescripción de [Rudjord et al. 2008](#), para calcular la entropía gravitacional, se debe operar en un espacio de dimensión 3. La métrica espacial está definida como:

$$h_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{i0}g_{j0}}{g_{00}}, \quad (4.22)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es la métrica en un espacio-tiempo de dimensión 4 y los índices latinos denotan las componentes espaciales,  $i, j = 1, 2, 3$ . Luego, el elemento infinitesimal de superficie tiene la forma:

$$d\sigma = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h_{rr}}} d\theta d\phi. \quad (4.23)$$

<sup>3</sup> Se han utilizado unidades geometrizadas, esto es,  $G = c = 1$  en los cálculos del presente capítulo.

De las Ecs. 4.22, y 4.23 en el espacio-tiempo de Reissner-Nordström, la métrica espacial y el elemento de superficie infinitesimal son:

$$h_{ij} = \text{diag} \left[ \left( 1 - \frac{r_S}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1}, r^2, r^2 \sin \theta \right], \quad (4.24)$$

$$d\sigma = r^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (4.25)$$

La integración sobre los dos horizontes debe hacerse cuidadosamente debido a la presencia de la singularidad en el origen de coordenadas. El método sencillo desarrollado por [Rudjord et al. 2008](#) en el caso de un agujero negro de Schwarzschild consiste en integrar sobre una esfera pequeña de radio  $\epsilon$  centrada en el origen, y luego sustraerla de la integral 4.5. En nuestro caso resulta en:

$$\begin{aligned} S_{\pm} &= k_{\text{RN}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P(r_{\pm}) r_{\pm}^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &- k_{\text{RN}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P(\epsilon) \epsilon^2 \sin \theta d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (4.26)$$

El escalar  $P$  no depende de las coordenadas  $\theta$  y  $\phi$ :

$$S_{\pm} = k_{\text{RN}} [P(r_{\pm}) r_{\pm}^2 - P(\epsilon) \epsilon^2] \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (4.27)$$

En el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , se obtiene la entropía sobre los horizontes:

$$S_{\pm} = k_{\text{RN}} 4\pi r_{\pm}^2 \pm \sqrt{\frac{6M^2 r_{\pm}^2 - 12M r_{\pm} Q^2 + 6Q^4}{6M^2 r_{\pm}^2 - 12M r_{\pm} Q^2 + 7Q^4}}. \quad (4.28)$$

Si se reemplaza  $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$  en la Ec. 4.28, cuando  $Q \rightarrow 0$ , se recupera la expresión de la entropía sobre el horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild [[Rudjord et al., 2008](#)]. Para el horizonte interno se encuentra la forma indeterminada:

$$\lim_{Q \rightarrow 0} S_- \rightarrow 0 \times \frac{0}{0}. \quad (4.29)$$

Una posible interpretación del límite anterior es la siguiente: cuando la carga eléctrica tiende a cero, el horizonte interno colapsa en la singularidad. En otras palabras, la entropía del horizonte interno tiende a la entropía de la singularidad. La Relatividad General no es una teoría bien determinada epistemológicamente: el lenguaje de la teoría nada puede decir acerca de la singularidad ya que el espacio-tiempo continuo deja allí de existir.

Calculamos ahora la densidad de entropía utilizando la Ec. 4.10, obteniendo:

$$\begin{aligned} s_{\text{RN}} &= k_{\text{RN}} \left| \frac{1}{r^2} \sqrt{\left( 1 - \frac{r_S}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P) \right| \\ &= k_{\text{RN}} \left| \frac{1}{r^2} \sqrt{\left( 1 - \frac{r_S}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)} \times (s_{\text{RN1}} + s_{\text{RN2}}) \right|, \end{aligned} \quad (4.30)$$



donde:

$$s_{RN1} = 2r \sqrt{\frac{6r^2 - 12rQ^2 + 6Q^4}{6r^2 - 12rQ^2 + 7Q^4}}, \quad (4.31)$$

y

$$s_{RN2} = \frac{1}{2} r^2 \left[ \frac{\sqrt{6} Q^4 M}{(6r^2 - 12rQ^2 + 7Q^4)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (4.32)$$

Nuevamente, si  $Q \rightarrow 0$ , se recupera la expresión para la densidad de entropía para un agujero negro de Schwarzschild. En la Fig. 29 mostramos un gráfico de  $s_{RN}$  para distintos valores de la carga.

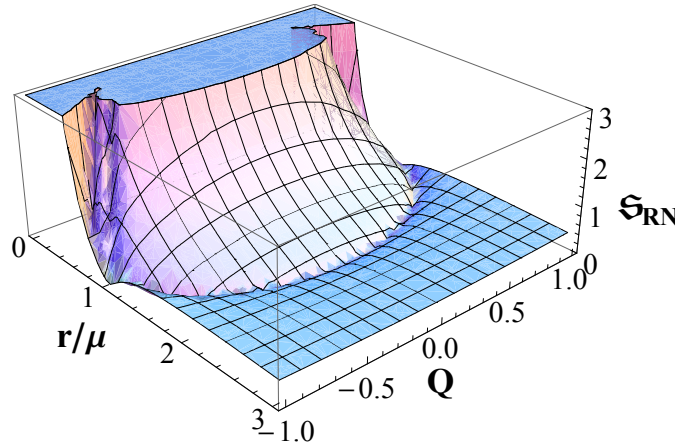


Figura 29: Densidad de entropía para un agujero negro de Reissner-Nordström en función de la coordenada radial y de la carga, respectivamente. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ , y  $k_{RN} = 1$ .

En la Fig. 30 presentamos un gráfico del radio del horizonte externo de eventos en función de la carga eléctrica. El radio sólo está bien definido para  $Q \in [-1, +1]$ . Fuera de este intervalo el horizonte no existe y se tiene una singularidad desnuda. De acuerdo a la conjetura de censura cósmica [Penrose, 1969, 1979], las singularidades se hallan siempre ocultas por horizontes de eventos. Si la conjetura es válida, el valor de la carga debe restringirse.

En la Fig. 31 mostramos un gráfico de la densidad de entropía para un dado valor fijo de la carga ( $Q = 0,5$ ). Observamos que la función  $s_{RN}$  no está definida en  $r = 0$  y tiende asintóticamente a cero para valores grandes del radio. Este comportamiento es precisamente el esperado para la densidad de entropía de un agujero negro de Reissner-Nordström:  $s_{RN}$  no puede definirse en el origen dada la presencia de la singularidad, y tiende a cero lejos de la fuente de campo gravitacional.

Notamos, además, que uno de los mínimos de la función  $s_{RN}$  está en  $r = 0,13$  donde se encuentra el horizonte interno de Cauchy. Este horizonte está cerca de dos máximos relativos y otro mínimo relativo de la función  $s_{RN}$ . Una posible explicación es que en el caso de un agujero negro de Reissner-Nordström, cerca del horizonte de Cauchy, existe una pequeña región del espacio-tiempo cuya curvatura es muy alta y potencialmente inestable frente a perturbaciones externas como

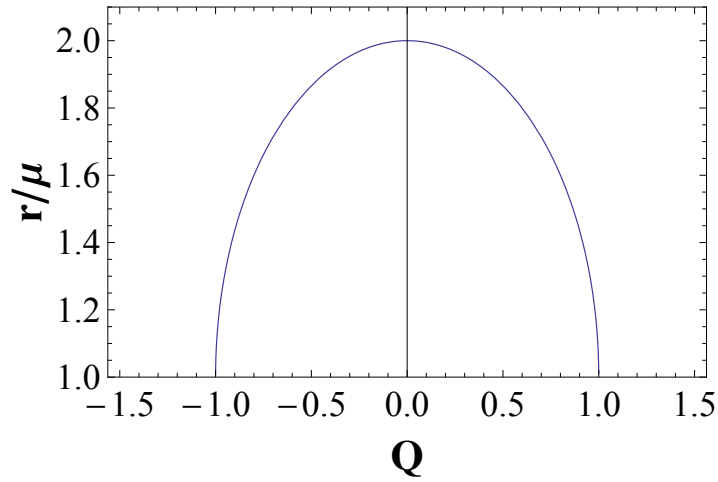


Figura 30: Radio del horizonte externo de eventos en función de la carga del agujero negro de Reissner-Nordström. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ .

mostraron [Poisson & Israel 1990](#). El comportamiento de la densidad de entropía para  $r \in [0,13,0,3]$  podría estar reflejando la acumulación de energía y entropía gravitacional en dicha región, y la inestabilidad del horizonte interno.

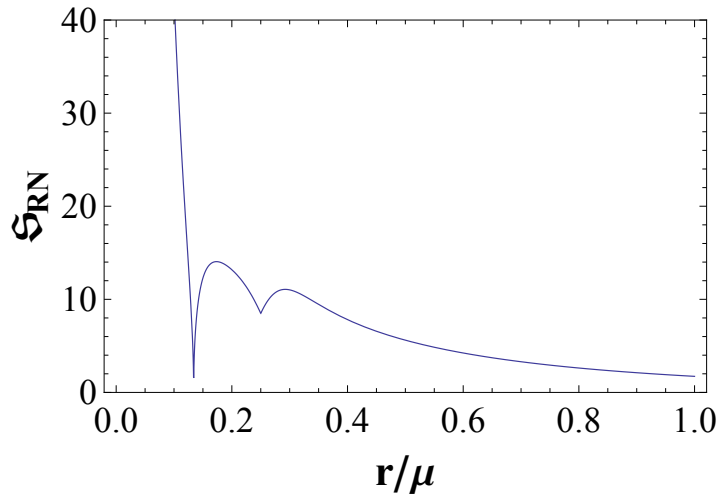


Figura 31: Densidad de entropía para un agujero negro de Reissner-Nordström para  $Q = 0,5$ . Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ , y  $k_{RN} = 1$ .

#### 4.2.2 Agujeros negros de Kerr

Dado que las coordenadas de Boyer-Lindquist presentan singularidades de coordenadas en el horizonte de eventos, trabajamos en las coordenadas de Kerr donde estas patologías han sido removidas. Las coordenadas de Boyer-Lindquist y Kerr están relacionadas mediante la siguiente transformación de coordenadas ( $G = c = 1$ ):

$$dv = dt + \frac{(r^2 - a^2)}{\Delta} dr \quad (4.33)$$

$$d\chi = d\phi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (4.34)$$

La métrica puede escribirse en forma matricial como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \beta \\ 1 & 0 & 0 & -a \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ \beta & -a \sin^2 \theta & 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

donde

$$\alpha = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}, \quad (4.36)$$

$$\beta = \frac{-a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\rho^2}, \quad (4.37)$$

$$\delta = \frac{[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta]}{\rho^2} \sin^2 \theta, \quad (4.38)$$

y

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr,$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

$$a = \frac{J}{M}.$$

Aquí  $J$  representa el momento angular del agujero negro; el horizonte de eventos interno y externo están localizados en

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (4.39)$$

En la Fig. 32 mostramos un gráfico del radio del horizonte externo de eventos en función del momento angular. Si se supone válida la conjetura de censura cósmica, los valores del momento angular quedan restringidos al intervalo  $a \in [-1, +1]$ .

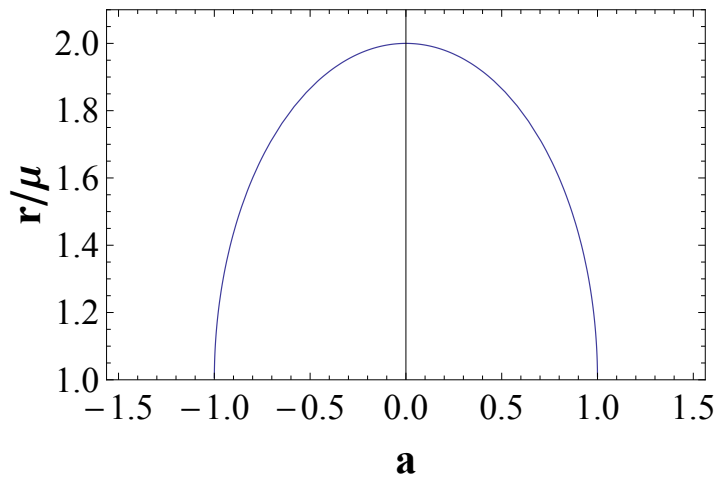


Figura 32: Radio del horizonte externo de eventos en función del momento angular para un agujero negro de Kerr. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ .

Así como la solución de Schwarzschild es la única solución esféricamente de vacío de las ecuaciones de campo de Einstein [Israel,

1967], la métrica de Kerr es la única solución de vacío estacionaria y axialmente simétrica [Carter, 1971; Robinson, 1975]. Los escalares de Ricci, Weyl, y Kretschmann son:

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (4.40)$$

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta}C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (4.41)$$

$$P^2 = 1, \quad (4.42)$$

$$P = +1. \quad (4.43)$$

Dado que  $P = 1$ , la entropía en el horizonte de eventos externo es igual al área de este horizonte. La métrica en dicho horizonte toma la forma:

$$ds^2 = \frac{[(r_+^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta]}{\rho^2} \sin^2 \theta d\chi^2 + \rho^2 d\theta^2. \quad (4.44)$$

La función  $\Delta$  puede escribirse como  $\Delta = (r - r_-)(r - r_+)$ , donde  $r_-$  y  $r_+$  representan los radios internos y externos del horizonte de eventos, respectivamente. De la Ec. 4.44, reemplazando  $\Delta(r = r_+) = 0$ , se obtiene:

$$ds^2 = \frac{(r_+^2 + a^2)^2}{\rho^2} \sin^2 \theta d\chi^2 + \rho^2 d\theta^2. \quad (4.45)$$

Finalmente, el cálculo del área es:

$$\begin{aligned} A_+ &= \iint \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\chi\chi}} d\theta d\chi, \quad (4.46) \\ &= \iint \sqrt{\frac{(r_+^2 + a^2)^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \rho^2} d\theta d\chi \\ &= \iint (r_+^2 + a^2) \sin \theta d\theta d\chi. \\ &= (r_+^2 + a^2) \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^\pi \sin \theta d\theta, \\ &= 4\pi(r_+^2 + a^2). \quad (4.47) \end{aligned}$$

De la misma manera, para el horizonte interno de eventos  $r = r_-$ :

$$A_- = 4\pi(r_-^2 + a^2). \quad (4.48)$$

Luego, la entropía de los horizontes tiene la forma simple:

$$\begin{aligned} S_+ &= k_K 4\pi(r_+^2 + a^2), \\ S_- &= k_K 4\pi(r_-^2 + a^2). \quad (4.49) \end{aligned}$$

Para  $a \rightarrow 0$ , obtenemos el límite correcto para el espacio-tiempo de Schwarzschild.

En el caso de espacio-tiempos axialmente simétricos, no es posible calcular la métrica espacial (ver Ec. 4.22) debido a la presencia del coeficiente  $g_{t\phi}$ : dado que la fuente de campo gravitacional está rotando, la posición espacial de cada evento en el espacio-tiempo de Kerr

depende del tiempo. La divergencia covariante, pues, se obtiene del determinante de toda la métrica:

$$\nabla \cdot \vec{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{-g} P \right), \quad (4.50)$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica y está dado por:

$$g = -\frac{1}{4} [a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\theta]^2 \sin^2 \theta. \quad (4.51)$$

Reemplazando la fórmula 4.51 en 4.50, obtenemos la siguiente expresión para la densidad de entropía gravitacional:

$$s_K = k_K \left| \frac{4r}{a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\theta} \right|. \quad (4.52)$$

Notamos que la densidad de entropía no depende en forma explícita de la masa del agujero negro.

En la Fig. 33 se muestra un gráfico 3-dimensional de la Ec. 4.52 para  $\theta = \pi/2$  y distintos valores del momento angular. La densidad de entropía está bien definida salvo para  $\theta = \pi/2$  y  $r = 0$ , donde está localizada la singularidad anillo. Lejos de la fuente de campo gravitacional,  $r \rightarrow \infty$ , la función  $s_K$  tiende a cero, tal como se esperaba.

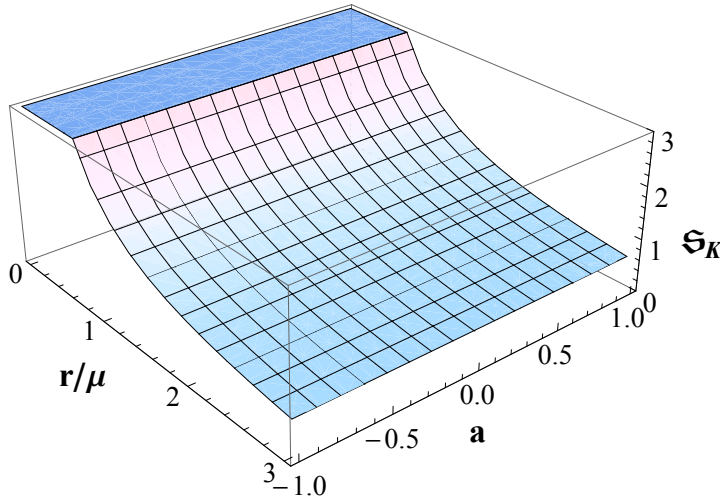


Figura 33: Densidad de entropía para un agujero negro de Kerr en función de la coordenada radial y del momento angular, respectivamente. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ ,  $\theta = \pi/2$ , y  $k_K = 1$ .

### 4.2.3 Agujeros negros de Kerr-Newman

La métrica de Kerr-Newman para un agujero negro cargado rotante es la solución más general conocida que representa un agujero negro [Newman et al., 1965].

Como en el caso de un agujero negro de Kerr, para evitar las singularidades de coordenadas en el horizonte de eventos, realizamos la transformación ( $G = c = 1$ ):

$$dv = dt + \frac{(r^2 - a^2)}{\Delta_{KN}} dr, \quad (4.53)$$

$$d\chi = d\phi + \frac{a}{\Delta_{KN}} dr, \quad (4.54)$$

donde

$$\Delta_{\text{KN}} = r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr. \quad (4.55)$$

La métrica en forma matricial es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 1 & 0 & \eta \\ 1 & 0 & 0 & -a \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ \eta & -a \sin^2 \theta & 0 & \xi \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Aquí,  $\rho_{\text{KN}}^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ , y:

$$\gamma = - \left( 1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2} \right), \quad (4.57)$$

$$\eta = -a \frac{(2Mr - Q^2)}{\rho^2} \sin^2 \theta, \quad (4.58)$$

$$\xi = \frac{[(r^2 + a^2)^2 - \Delta_{\text{KN}} a^2 \sin^2 \theta]}{\rho^2} \sin^2 \theta. \quad (4.59)$$

La solución de Kerr-Newman depende de 3 parámetros: la masa, el momento angular, y la carga. Mostramos en la Fig. 34, que el radio del horizonte externo está bien definido para  $a \in [-1, 1]$  y  $Q \in [-1, 1]$ , lo que es claramente una combinación de los casos previos.

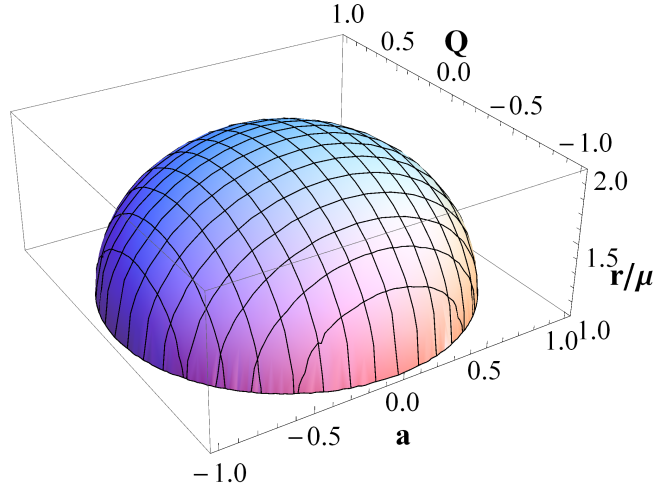


Figura 34: Radio del horizonte de eventos externo para un agujero negro de Kerr-Newman en función del momento angular y la carga, respectivamente. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ .

El determinante de la métrica  $g = \det(g_{\mu\nu})$  es:

$$g = - \sin^2 \theta (r^4 + 2 \cos^2 \theta a^2 r^2 + \cos^4 \theta a^4), \quad (4.60)$$

que tiene la misma forma que en el espacio-tiempo de Kerr.

Dado que el espacio-tiempo de Kerr-Newman no es una solución de vacío de la ecuaciones de campo de Einstein debido a la presencia

de un campo electromagnético, el escalar de Weyl y Kretschmann no son iguales. Luego,  $P \neq 1$  y tiene la forma:

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{W}{\mathcal{K}} \\ P &= \sqrt{\frac{W}{\mathcal{K}}} = \sqrt{\frac{A}{B}}, \end{aligned} \quad (4.61)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= -48(M^2\xi^6 + 10\xi^4rMQ^2 - \xi^4Q^4 - 15\xi^4M^2r^2 \\ &+ 6\xi^2Q^4r^2 + 15r^4M^2\xi^2 - 20MQ^2r^3\xi^2 \\ &- M^2r^6 + 2Mr^5Q^2 - Q^4r^4), \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} B &= -8(-6M^2r^6 + 90\xi^2r^4M^2 - 90\xi^4M^2r^2 \\ &+ 6\xi^6M^2 + 12r^5Q^2M - 120\xi^2MQ^2r^3 \\ &+ 60M\xi^4Q^2r - 7Q^4r^4 + 34\xi^2Q^4r^2 - 7\xi^4Q^4), \end{aligned} \quad (4.63)$$

y,

$$\xi = a \cos \theta. \quad (4.64)$$

El cálculo de la densidad de entropía, utilizando la Ec. 4.50, resulta en una función que es singular para ciertos valores de la coordenada radial:

$$s = k_{\text{KN}} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{g} \sqrt{A} g' + \frac{A'}{\sqrt{A}} \right) \frac{1}{\sqrt{B}} - \left( B' \sqrt{\frac{A}{B^3}} \right) \right], \quad (4.65)$$

dado que el escalar de Kretschmann  $\mathcal{K}$  es un polinomio de orden 6 con al menos una raíz real positiva. Por ejemplo, si resolvemos la ecuación  $B = 0$  para  $a = 0,5$ ,  $\theta = \pi/4$ ,  $Q = 0,6$ , y  $M = 1$ , las raíces del escalar de Kretschmann son:

$$r_1 = -1,21 \quad (4.66)$$

$$r_2 = -0,27 \quad (4.67)$$

$$r_3 = 0,007 \quad (4.68)$$

$$r_4 = 0,22 \quad (4.69)$$

$$r_5 = 0,53 \quad (4.70)$$

$$r_6 = 1,45 \quad (4.71)$$

Dado que la única diferencia entre el espacio-tiempo de Kerr y Kerr-Newman es el escalar  $P$  (el determinante  $g$  es el mismo), concluimos que la propuesta de Rudjorn et al. (ver Ec 4.7) no puede utilizarse para calcular la densidad de entropía en el espacio-tiempo de Kerr-Newman. Proponemos, entonces, una definición alternativa para  $P$ :

$$P = C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (4.72)$$

Para un agujero negro de Kerr-Newman, la fórmula anterior tiene la forma:

$$P = -\frac{48}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6} (p_1 p_2) \quad (4.73)$$

donde

$$p_1 = -Mr^3 - 3Mr^2 a \cos^2 \theta + 3Mr \cos^2 \theta a^2 + \\ + M \cos^3 \theta a^3 - \cos^2 \theta a^2 Q^2 + 2 \cos \theta a Q^2 r + Q^2 r^2,$$

$$p_2 = +Mr^3 - 3Mr^2 \cos \theta a - 3M \cos^2 \theta a^2 r + \\ + M \cos^3 \theta a^3 + \cos^2 \theta a^2 Q^2 + 2 \cos \theta a Q^2 r - Q^2 r^2.$$

La densidad de entropía ahora resulta:

$$s = \left| -\frac{96 k_{KN}}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^7} (s_1 + s_2 - s_3 + s_4) \right|, \quad (4.74)$$

y

$$s_1 = 5 \cos^6 \theta a^6 Q^2 M - 20 \cos^6 \theta a^6 r M^2 + 90 \cos^4 \theta M^2 r^3,$$

$$s_2 = 11 \cos^4 \theta a^4 Q^4 r - 75 \cos^4 \theta a^4 Q^2 M r^2 - \\ 26 \cos^2 \theta a^2 Q^4 r^3,$$

$$s_3 = 48 \cos^2 \theta a^2 r^5 M^2 + 75 \cos^2 \theta a^2 r^4 Q^2 M,$$

$$s_4 = 3r^5 Q^4 + 2r^7 M^2 - 5r^6 Q^2 M.$$

En las Figs. 35 y 36 mostramos los gráficos de la densidad de entropía de un agujero negro de Kerr-Newman en función de la coordenada radial y el momento angular o la carga, respectivamente. En ambos casos, la densidad de entropía diverge para  $r = 0$  y  $\theta = \pi/2$  como se esperaba.

En la Fig. 37 presentamos una tabla con valores de la densidad de entropía para distintos valores de la coordenada  $\theta$ , en el centro del objeto y en ambos horizontes. Vemos que sólo en el plano ecuatorial la densidad de entropía diverge, donde está localizada la singularidad anillo. Para  $\theta \neq \pi/2$ , la densidad de entropía está bien definida.

Para verificar si la nueva forma del escalar  $P$  (Ec. 4.72) aquí presentada es adecuada para la descripción de la entropía gravitacional en otros espacio-tiempos no-esféricamente simétricos, calculamos nuevamente la densidad de entropía para un agujero negro de Kerr utilizando ahora la Ec. 4.72. El escalar  $P$  toma la forma:

$$P = M^2 \frac{48 \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \tilde{p}_3}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6}, \quad (4.75)$$

donde

$$\tilde{p}_1 = r^2 - 4r \cos \theta a + a^2 \cos^2 \theta,$$

$$\tilde{p}_2 = r^2 + 4r \cos \theta a + a^2 \cos \theta,$$

$$\tilde{p}_3 = a^2 \cos^2 \theta - r^2,$$



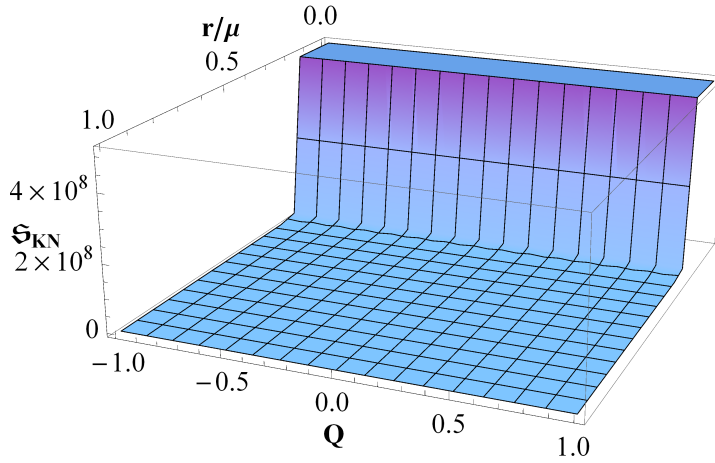


Figura 35: Densidad de entropía para un agujero negro de Kerr-Newman en función de la coordenada radial y el momento angular, respectivamente. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ ,  $Q = 0,6$ , y  $\theta = \pi/2$ .

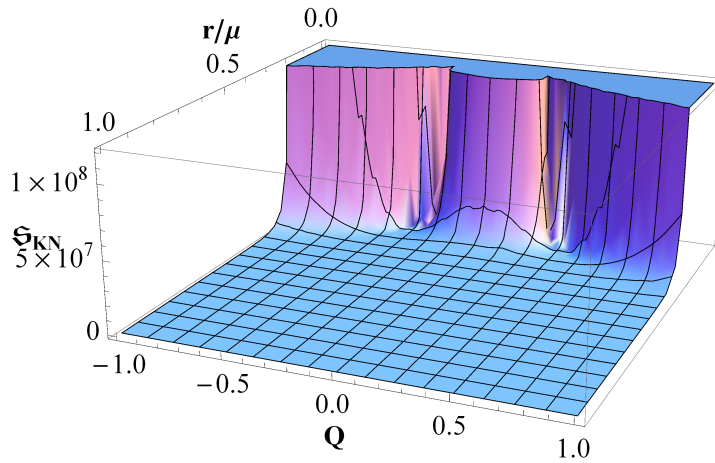


Figura 36: Densidad de entropía para un agujero negro de Kerr-Newman en función de la coordenada radial y la carga, respectivamente. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ ,  $\alpha = 0,6$ ,  $\theta = \pi/2$ , y  $k_{KN} = 1$ .

$\theta$	$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{s}{k_{KN}}$	$\lim_{r \rightarrow r_+}$	$\lim_{r \rightarrow r_-}$
$\pi/2$	$\infty$	$\sim 4,26$	$\sim 161$
$\pi/3$	$\sim 10^6$	$\sim 0,31$	$\sim 22400$
$\pi/4$	$\sim 10^5$	$\sim 1,81$	$\sim 7570$
$\pi/6$	$\sim 22580$	$\sim 2,81$	$\sim 1510$
$0$	$\sim 7144$	$\sim 3,13$	$\sim 103$

Figura 37: Densidad de entropía de un agujero negro de Kerr-Newman para distintos valores de la coordenada  $\theta$ , en  $r_+$ ,  $r_-$  y, para  $r \rightarrow 0$ .

y la densidad de entropía es:

$$s_K = k_K \left| \frac{192r (10a^6 \cos^6 \theta - 45a^4 \cos^4 \theta r^2 + 24r^4 a^2 \cos^2 \theta - r^6)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^7} \right|.$$

(4.76)

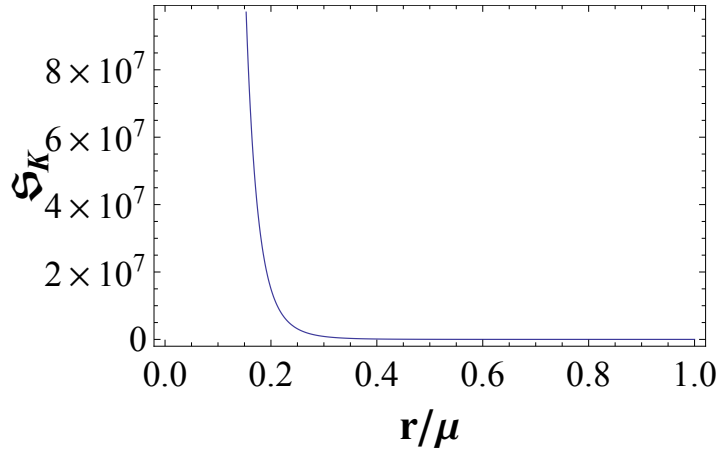


Figura 38: Densidad de entropía para un agujero negro de Kerr en función de la coordenada radial, para  $P = C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ ,  $a = 0,6$ ,  $\theta = \pi/2$ , y  $k_K = 1$ .

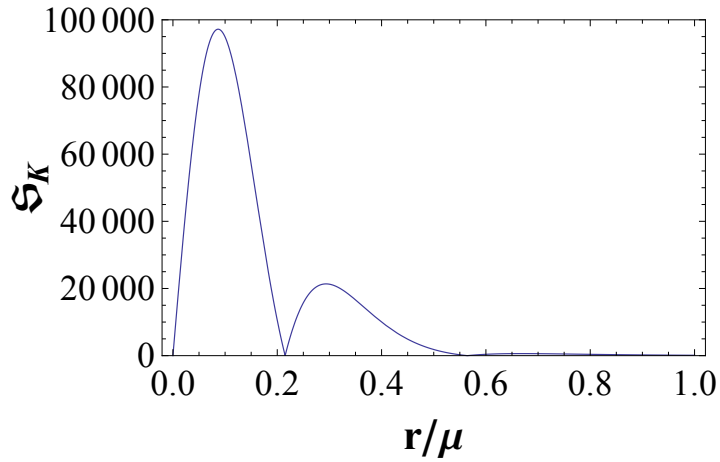


Figura 39: Densidad de entropía para un agujero negro de Kerr en función de la coordenada radial. Aquí,  $c = G = 1$ ,  $M = 1$ ,  $a = 0,6$ ,  $\theta = \pi/4$ , y  $k_K = 1$ .

Hacia el centro del objeto, la densidad de entropía tiende a cero, excepto para  $\theta = \pi/2$  y  $r = 0$  (ver Figs. 38 y 39). Concluimos que este nuevo escalar brinda también una descripción adecuada de la densidad de entropía gravitacional en el espacio-tiempo de Kerr.

Nótese que en espacios-tiempos axialmente simétricos, el campo escalar  $\vec{\Psi}$  podría tener una componente angular:

$$\vec{\Psi} = P (\vec{e}_r + \vec{e}_\theta), \quad (4.77)$$

donde  $\vec{e}_\theta$  es un vector unitario. De acuerdo a la expresión 4.10, la densidad de entropía toma la forma:

$$s = k \left| \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{-g}P) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sqrt{-g}P) \right] \right|. \quad (4.78)$$

El segundo término de la expresión anterior es singular para  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , esto es, en los polos de los agujeros negros de Kerr y Kerr-Newman. El campo vectorial  $\vec{\Psi}$  no es regular sobre todo el horizonte

y, luego, no puede ser utilizado para estimar la entropía gravitacional. Esto es consecuencia directa del acoplamiento de las componentes espaciales y temporal en sistemas rotantes.

#### 4.3 ESTIMADOR DE WEYL-KRETSCHMANN PARA UN MODELO DE AGUJERO NEGRO REGULAR

En el Capítulo 3 presentamos la métrica de un modelo de agujero negro regular [Mbonye & Kazanas, 2005]. La forma del elemento de línea es la siguiente [Mbonye et al., 2012]:

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.79)$$

Las funciones  $B(r)$  y  $m(r)$  vienen dadas por:

$$\begin{aligned} B(r) &= \exp \int_{r_0}^r \frac{2}{r'^2} [m(r') + 4\pi r'^3 p_{r'}] \times \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{2m(r')}{r'}\right)} \right] dr', \\ m(r) &= 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \end{aligned} \quad (4.80)$$

siendo la masa total del objeto

$$M = \int_0^R m(r) dr. \quad (4.81)$$

El perfil de densidad tiene la forma [Dymnikova, 1992]:

$$\rho(r) = \rho_{\max} e^{-8\frac{r^3}{R^3}}, \quad (4.82)$$

donde  $R^3 = 8r_S r_0^2$ ,  $r_S$  es el radio de Schwarzschild,

$$r_0 = \left( \frac{3}{8\pi\rho_{\max}} \right)^{1/2}, \quad (4.83)$$

y  $\rho_{\max}$  es del orden de la densidad de Planck. De la Ec. 4.82 se infiere que la mayor parte de la masa del objeto está contenida dentro de una esfera de radio  $R$  muy por debajo del radio del horizonte de eventos, siendo  $R$  el radio de la superficie de la materia. La densidad tiene una transición suave de un estado de de Sitter en el centro del objeto a un estado de vacío para  $r > R$ , mientras que el material en la región intermedia es no inflacionario, situación ya predicha por Poisson & Israel 1988.

La ecuación de estado propuesta por Mbonye & Kazanas 2005 viene dada por:

$$p_r(\rho) = \left[ \alpha - (\alpha + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^2 \right] \left( \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \rho, \quad (4.84)$$

donde  $p_r$  es la presión radial.

El escalar de Weyl para este espacio-tiempo es:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{4}{3}\pi^2 \rho_{\max}^2 (p_8 x^8 + p_6 x^6 + p_5 x^5 + p_4 x^4 + p_3 x^3 + p_2 x^2 + \\ &+ p_1 x + p_0)^2 / [(3r - \pi R^3 \rho_{\max} + \pi R^3 \rho_{\max} x) r^6 R^6], \end{aligned} \quad (4.85)$$

donde  $\chi = e^{-8\frac{r^3}{R^3}}$  y los coeficientes  $p_i$  son:

$$\begin{aligned}
p_0 &= 3R^6r - R^9\pi\rho_{\max}, \\
p_1 &= 2R^9\pi\rho_{\max} - 3R^6r + 6r^3R^6\pi\rho_{\max} - 24r^4R^3, \\
p_2 &= -6r^3R^6\pi\rho_{\max} - R^9\pi\rho_{\max} + 576r^7\alpha - \\
&\quad - 192r^6\alpha\pi R^3\rho_{\max} - 2R^6r^3\alpha\pi\rho_{\max}, \\
p_3 &= 2R^6r^3\alpha\pi\rho_{\max} + 144r^6\alpha\pi R^3\rho_{\max}, \\
p_4 &= (-1152 - 1152\alpha)r^7 - 48\pi R^3\rho_{\max}(-8\alpha - 8 + \alpha^2)r^6 + \\
&\quad + 2\pi\rho_{\max}R^6(\alpha + 1)r^3, \\
p_5 &= -336\pi\rho_{\max}R^3(\alpha + 1)r^6 - 2\pi\rho_{\max}R^6(\alpha + 1)r^3, \\
p_6 &= 96\pi\rho_{\max}\alpha R^3(\alpha + 1)r^6, \\
p_8 &= -48\pi R^3\rho_{\max}(\alpha + 1)^2r^6.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

En el límite  $r \rightarrow 0$ , el escalar de Weyl tiende a cero. Dado que la geometría del espacio-tiempo para el agujero negro regular en el origen es de Sitter, el límite obtenido es el esperado.

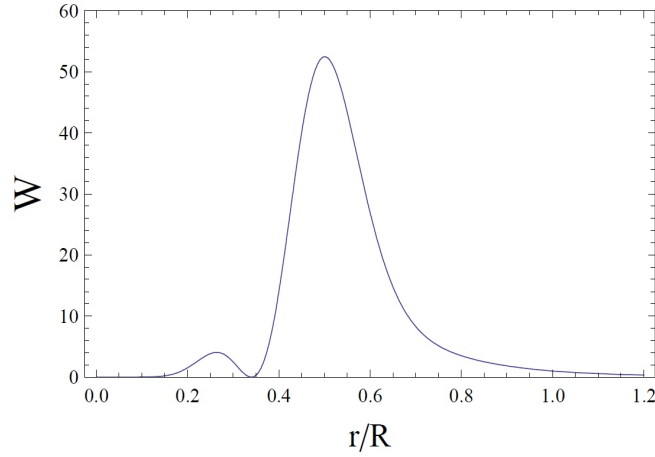


Figura 40: Escalar de Weyl como función de la coordenada radial para un modelo de agujero negro regular.

El gráfico del escalar de Weyl en función de la coordenada radial se muestra en la Fig. 40. Lejos de la fuente de campo gravitacional el escalar de Weyl tiende asintóticamente a cero. En la región de materia ( $r/R < 1$ ), posee un máximo absoluto en  $r/R = 0,5$  y un máximo relativo en  $r/R = 0,26$ . Entre estos dos puntos,  $W = 0$  para  $r/R = 0,34$ . Analizando la ecuación de estado en función de la densidad (Ec. 4.84), se encuentra un punto de inflexión en  $r/R = 0,5$ . El valor máximo absoluto del escalar de Weyl parece estar relacionado con el punto de transición entre las dos regiones de materia.

El valor de  $r/R$  para el cual el escalar de Weyl tiene un máximo relativo está cerca de la región donde la presión se anula. Ésto sugiere una relación entre la región donde la materia tiene presión negativa y el comportamiento del escalar de Weyl. Nótese que el punto de inflexión para la densidad de entropía de la materia coincide con

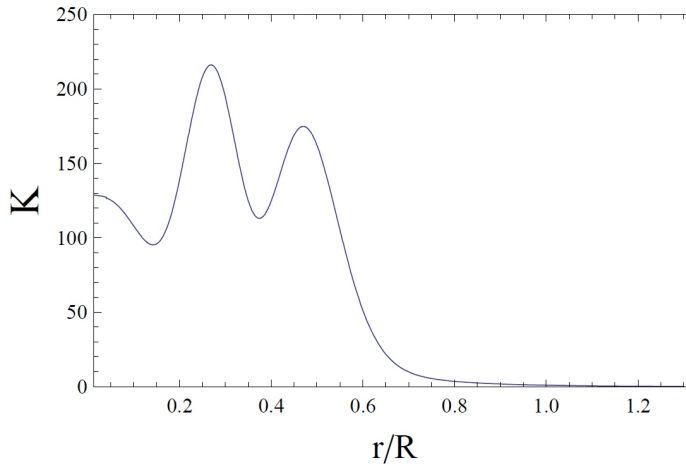


Figura 41: Escalar de Kretschmann como función de la coordenada radial para un modelo de agujero negro regular.

el valor de  $r/R$  para el cual el escalar de Weyl es cero, esto es en  $r/R = 0,34$ . En este punto el campo gravitacional pasa de ser atractivo a repulsivo.

Se realizó también el cálculo del escalar de Kretschmann. El correspondiente gráfico se muestra en la Fig. 41. Nuevamente, tal como se esperaba, fuera de la región de materia el escalar de Kretschmann tiende asintóticamente a cero. Por otro lado, en el límite  $r \rightarrow 0$ , éste resulta:

$$\mathcal{K} = \frac{512\pi^2 \rho_{\max}^2}{3}, \quad (4.87)$$

como se espera para un espacio-tiempo de de Sitter. El escalar de Kretschmann es siempre positivo y tiene un máximo absoluto en  $r/R = 0,27$  y un máximo relativo en  $r/R = 0,47$ .

Para verificar que los resultados obtenidos son correctos, a partir de los gráficos para el escalar de Weyl y Kretschmann, vemos que éstos satisfacen la relación:

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \geq C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (4.88)$$

que se cumple en todo espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico [Rudjord et al., 2008].

Finalmente, se obtiene una expresión para la densidad de entropía gravitacional (ver Fig. 42). En  $r/R = 0,27$ ,  $s = 0$ , que está cerca del punto de transición de presión positiva a negativa. El valor máximo absoluto para la densidad de entropía ocurre para  $r/R = 0,37$  y los dos máximos relativos para  $r/R = 0,16$  y at  $r/R = 0,65$ . Para valores grandes de la coordenada  $r/R$ , la densidad de entropía gravitacional tiende asintóticamente a cero, y en el núcleo del objeto, también se anula. Este último resultado está en acuerdo con una correcta descripción clásica de la entropía del campo gravitacional.

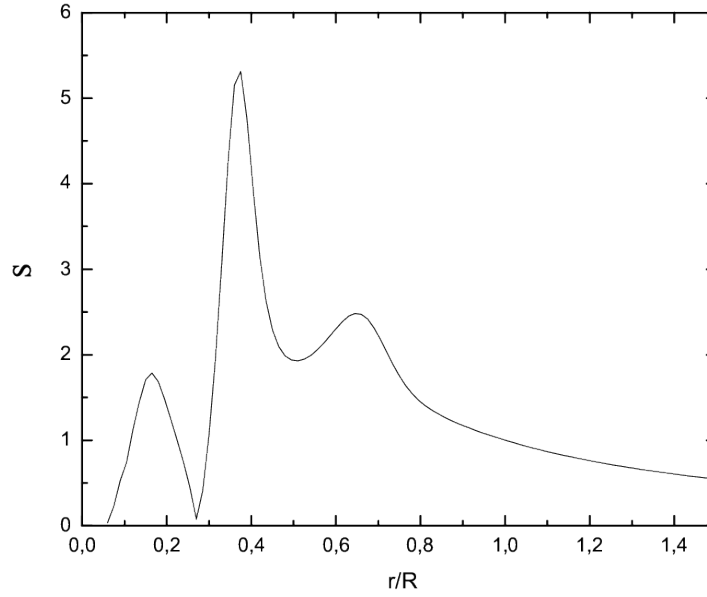


Figura 42: Densidad de entropía gravitacional en función de la coordenada radial para un modelo de agujero negro regular.

#### 4.4 ESTIMADOR DE WEYL-KRETSCHMANN PARA UN MODELO DE AGUJERO DE GUSANO

##### 4.4.1 Características generales de un agujero de gusano

Un agujero de gusano es una región del espacio-tiempo cuya topología es no trivial. Éste posee dos bocas conectadas por una garganta. Las bocas no están ocultas por horizontes de eventos como en el caso de los agujeros negros, y además, no hay singularidad que evite el pasaje de partículas de un lado hacia el otro (ver Fig. 43). Contrariamente a los agujeros negros, los agujeros de gusanos son *agujeros* en el espacio-tiempo, i.e., su existencia implica un espacio-tiempo múltiplemente conectado [Romero & Vila, 2014].

Existen varios tipos de soluciones de agujeros de gusanos de las ecuaciones de campo de Einstein [Visser, 1996]. Consideremos el elemento de línea estático esféricamente simétrico:

$$ds^2 = -\exp^{2\Phi} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.89)$$

Aquí,  $\Phi = \Phi(r)$  y  $b = b(r)$  son dos funciones arbitrarias que adoptarán una forma particular de acuerdo a las propiedades requeridas para el agujero de gusano. La función  $b = b(r)$  se denomina “función de forma” (*shaped function*) ya que determina la forma espacial del agujero de gusano, mientras que  $\Phi(r)$  determina el corrimiento al rojo y pues, se denomina “función de corrimiento al rojo” (*redshift function*). La coordenada radial  $r$  tiene una interpretación particular:  $2\pi r$  es la circunferencia de un círculo centrado en la garganta del agujero de gusano. La coordenada radial decrece desde  $+\infty$  hasta un valor mínimo  $b_0$ , el radio de la garganta; luego, ésta crece desde  $b_0$  hasta  $+\infty$  a medida que la distancia al agujero de gusano se incrementa.

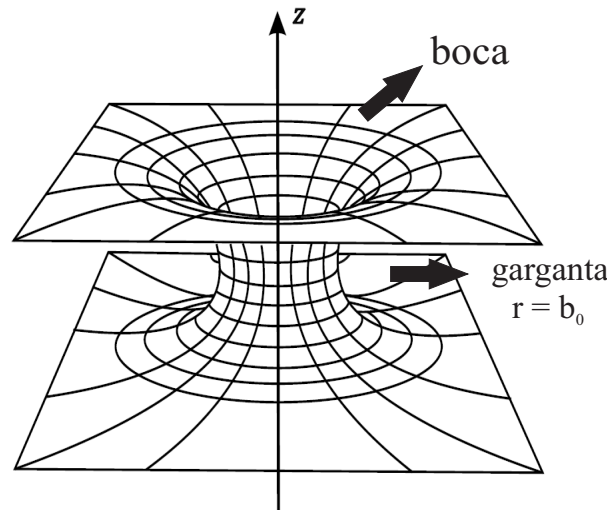


Figura 43: Diagrama de *embedding* para un agujero de gusano que conecta dos universos diferentes.

En principio, para poder tener un agujero de gusano atravesable, se exige [Morris & Thorne, 1988] [Romero & Vila, 2014]:

1. La función  $\Phi(r)$  debe ser finita en todo punto (para ser consistente con la ausencia de horizonte de eventos).
2. Para que la geometría espacial tienda a un límite asintóticamente plano apropiado, debe cumplirse que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{b(r)}{r} \rightarrow 0,$$

y,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) \rightarrow 0.$$

Asimismo, pueden imponerse ciertas restricciones en el tensor de energía-momento que genera la curvatura del agujero de gusano. Estas “condiciones de juntura” permiten determinar la forma específica de las funciones  $b(r)$  y  $\Phi(r)$ .

Un caso posible es confinar la materia exótica, que mantiene abierta la garganta, al interior de una esfera de radio  $r = r_s$ . La región de vacío exterior a  $r = r_s$  restringe la geometría del espacio-tiempo a la forma estándar de Schwarzschild [Morris & Thorne, 1988]:

$$\begin{aligned} b(r) &= b(r_s) = B = \text{const} && \text{para } r \geq r_s, \\ \Phi(r) &= \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{B}{r} \right) && \text{para } r \geq r_s. \end{aligned}$$

Existen otras soluciones para las cuales la materia exótica está limitada a la vecindad de la garganta. Morris & Thorne 1988 mostraron un caso de agujero de gusano cuya solución interior dentro y alrededor de la garganta tiene materia exótica y que está unida a materia normal a un radio  $r_c$ . Hay una capa en  $r = r_s$  de espesor  $\Delta R$  donde la

tensión  $\tau$  cae a cero. Finalmente, la región externa tiene la forma de Schwarzschild para  $r \geq r_s + \Delta R$ .

La solución completa de agujero de gusano tiene la forma:

$$b(r) = \begin{cases} (b_0 r)^{\frac{1}{2}} & \text{en } b_0 \leq r \leq r_c, \\ 1/100r & \text{en } r_c \leq r \leq r_s, \\ \frac{1}{3} [(r^3 - r_s^3)/r_s^2] + r_s/100 & \text{en } r_s \leq r \leq R_l, \\ B \equiv r_s/100 & \text{en } R_l \leq r, \end{cases}$$

$$\Phi(r) = \begin{cases} \Phi_0 \cong -0,01 & \text{en } b_0 \leq r \leq R_l, \\ \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{B}{r}\right) & \text{en } R_l \leq r, \end{cases}$$

donde  $r_c = 10^4 b_0$ ,  $R_l = r_s + \Delta R$ , y  $\Delta R = 1/100 r_s$ .

#### 4.4.1.1 Densidad de entropía

Dado que una de las características más importantes de los agujeros de gusano es la ausencia de horizonte de eventos, la formulación de un estimador de la entropía gravitacional en términos de una integral de superficie sobre el horizonte de eventos carece de sentido. Como se mostrará, sin embargo, el cálculo de la densidad de entropía utilizando el estimador propuesto por [Rudjord et al. 2008](#) es todavía posible.

En la región más cercana a la garganta y con materia exótica, el elemento de línea es:

$$ds^2 = -\exp^{2\Phi_0} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \sqrt{\frac{b_0}{r}}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.90)$$

donde  $\Phi_0 \cong -0,01$  y  $b_0$  es el radio de la garganta.

El escalar de Weyl y Kretschmann resultan:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{25b_0}{12r^5}, \\ \mathcal{K} &= R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{9b_0}{2r^5}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

El escalar P tiene la forma simple:

$$P = \frac{5}{3\sqrt{6}}. \quad (4.92)$$

De la Ec. 4.90 la métrica espacial es:

$$h_{ij} = \text{diag} \left( \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{b_0}{r}}}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right). \quad (4.93)$$

En términos de P y la derivada covariante, la densidad de entropía es:

$$s = k_w \left| \sqrt{\frac{2}{27}} 5 \sqrt{\left[ 1 - \sqrt{\frac{b_0}{r}} \right] \frac{1}{r}} \right|. \quad (4.94)$$



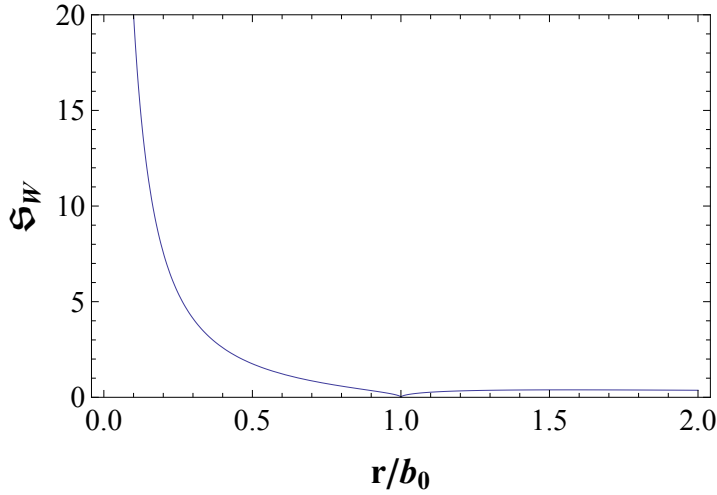


Figura 44: Densidad de entropía para un agujero de gusano con materia exótica limitada a la vecindad de la garganta. Aquí,  $k_w = 1$ .

El gráfico de  $s$  como función de  $r$  se muestra en la Fig. 44.

En la Fig. 44 observamos que la densidad de entropía es cero en la garganta (donde la materia exótica está confinada), luego se incrementa suavemente y tiende asintóticamente a cero lejos del objeto. Para  $r \leq b_0$  la solución obtenida no tiene significado físico dado que la métrica no está definida para  $r \in [b_0, +\infty)$ . Este resultado es el esperado, interpretando al agujero de gusano como una construcción a partir de dos espacio-tiempos de Schwarzschild simétricos.

#### 4.5 ESTIMADOR DE BEL-ROBINSON PARA UN AGUJERO NEGRO DE KERR

El elemento de línea del espacio-tiempo de Kerr en coordenadas oblatas esferoidales  $(t, r, \theta, \phi)$  toma la forma [Doran, 2000]:

$$\begin{aligned}
 d\tau^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 - 2\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} dt dr \\
 & - 4aMr \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + 2a\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} \sin^2 \theta d\phi dr + \rho^2 d\theta^2 \\
 & + \left[ (r^2 + a^2) + 2Mra^2 \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \right] \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.95)
 \end{aligned}$$

donde  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ . La constante  $M$  representa la masa del agujero negro y  $a$  su correspondiente momento angular.

El estimador propuesto por Clifton et al. 2013 depende del sistema de referencia elegido. En particular, escogemos los siguientes vectores unitarios  $u^a$  y  $z^a$ :

$$u^a = \left( \frac{r^2 + a^2}{\sqrt{-\Delta} \sqrt{\rho^2}}, 0, 0, \frac{a}{\sqrt{\rho^2} \sqrt{-\Delta}} \right), \quad (4.96)$$

$$z^a = \left( \frac{\sqrt{r^2 + a^2} \sqrt{2Mr}}{\sqrt{-\Delta} \sqrt{\rho^2}}, \frac{\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{\rho^2}}, 0, \frac{a\sqrt{2Mr}}{\sqrt{-\Delta} \sqrt{\rho^2} \sqrt{r^2 + a^2}} \right), \quad (4.97)$$

donde  $u = a \cos \theta$  y  $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$ . En la región interior al horizonte externo de eventos  $u^\alpha u_\alpha = 1$  y  $z^\alpha z_\alpha = -1$ . El vector  $z^\alpha$  se elige de manera tal que sea ortogonal a las hipersuperficies de coordenada  $t$  constante<sup>4</sup>. Debido a los cuatro grados de libertad inherentes a la teoría de la Relatividad General, no existe una única foliación del espacio-tiempo en una familia de hipersuperficies  $\Sigma$  (que no se intersecten entre ellas) de dimensión 3. Para la métrica del espacio-tiempo de Kerr dada por 4.95, hemos verificado que los vectores unitarios  $u^\alpha$  y  $z^\alpha$  satisfacen todas las condiciones para el cálculo de la entropía gravitacional de acuerdo a Clifton et al. 2013. En forma específica: Clifton et al. 2013 hacen uso de la tetrada nula compleja:

$$m^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^\alpha - iy^\alpha), \quad (4.98)$$

$$l^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^\alpha - z^\alpha), \quad (4.99)$$

$$k^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^\alpha + z^\alpha), \quad (4.100)$$

donde  $x^\alpha$ ,  $y^\alpha$ , y  $z^\alpha$  son vectores unitarios tipo espacio que, junto con  $u^\alpha$ , forman una base ortonormal, y  $g_{\alpha\beta} = 2m_{(\alpha} \bar{m}_{\beta)} - 2k_{(\alpha} l_{\beta)}$ . Los vectores  $l^\alpha$  y  $k^\alpha$  están alineados con las 2 direcciones principales nulas. Las *direcciones principales nulas* satisfacen la ecuación [Wald, 1984]:

$$k^b k^c k_{[e} C_{a]bc[d} k_{f]} = 0, \quad (4.101)$$

donde  $C_{abcd}$  es el tensor de Weyl. Espacio-tiempos para los cuales existen menos que 4 direcciones principales nulas en cada punto se denominan *espacio-tiempos algebraicamente especiales*. En la clasificación algebraica de espacio-tiempos, la métrica de Kerr es tipo II-II [D], para la cual dos pares de direcciones principales nulas coinciden. En este caso, la Ec. 4.101 toma la forma:

$$k^b k^c C_{abc[d} k_{e]} = 0. \quad (4.102)$$

En coordenadas de Kerr, las dos direcciones principales nulas son [Misner et al., 1973]:

$$k^\alpha = (0, -d_0, 0, 0), \quad (4.103)$$

$$l^\alpha = \left( \frac{2(r^2 + a^2)d_0}{\Delta}, d_0, 0, \frac{2ad_0}{\Delta} \right), \quad (4.104)$$

donde  $d_0$  es una constante de normalización arbitraria. Los vectores anteriores en coordenadas de Chris Doran son:

$$k^\alpha = \left( -(r^2 + a^2) \frac{\alpha d_0}{\Delta}, d_0, 0, -a \frac{\alpha d_0}{\Delta} \right), \quad (4.105)$$

$$l^\alpha = \left( \frac{-d_0}{\alpha}, -d_0, 0, \frac{-ad_0}{(r^2 + a^2)\alpha} \right), \quad (4.106)$$

<sup>4</sup> Un campo vectorial  $\xi^\alpha$  es ortogonal a una hipersuperficie si y sólo si  $\xi_{[\alpha} \nabla_\beta \xi_{c]} = 0$  (ver por ejemplo Wald 1984). Puede mostrarse que el vector  $z^\alpha$  dado por la Ec. 4.97 satisface  $z_{[\alpha} \nabla_\beta z_{c]} = 0$ .

siendo la transformación entre las coordenadas de Kerr y Chris Doran, en forma matricial:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a}{(r^2+a^2)\alpha} & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.107)$$

donde

$$\alpha = 1 + \frac{2Mr}{(r^2 + a^2)^{1/2}}. \quad (4.108)$$

A partir de las Ecs. 4.99 y 4.100 se obtienen en forma inmediata los vectores  $u^a$  y  $z^a$ .

Se procede ahora, al cálculo de la densidad de energía gravitacional y temperatura de acuerdo a las Ecs. 4.12 y 4.15, respectivamente.

La densidad de energía gravitacional es:

$$\rho_{\text{grav}} = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{M}{(r^2 + u^2)^{3/2}}. \quad (4.109)$$

En las Figs. 45 and 46, se muestran los gráficos de  $\rho_{\text{grav}}$  como función de la coordenada radial para  $\theta = \pi/2$  y  $\theta = \pi/4$ , respectivamente. La densidad de energía gravitacional es positiva y está bien definida en todo punto, excepto hacia la singularidad anillo, como se esperaba.

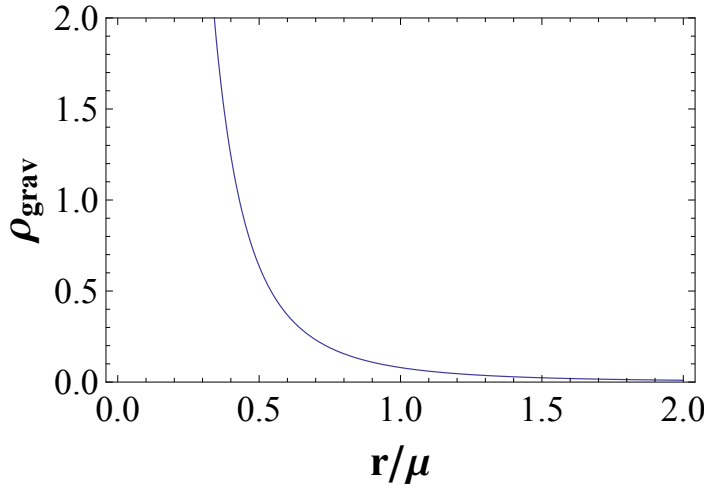


Figura 45:  $\rho_{\text{grav}}$  como función de la coordenada radial para  $\alpha = 0,8$  y  $\theta = \pi/2$ .

Obtuvimos la siguiente expresión para la temperatura del campo gravitacional:

$$T_{\text{grav}} = \frac{|-ra^2 - Mu^2 + ru^2 + Mr^2|}{2\pi (r^2 + u^2)^{3/2} \sqrt{-\Delta}}, \quad (4.110)$$

donde el símbolo de valor absoluto fue añadido para evitar valores negativos o complejos. Un gráfico 3-dimensional de  $T_{\text{grav}}$  como función de las coordenadas radial y angular para  $\alpha = 0,8$  se muestra en la Fig.

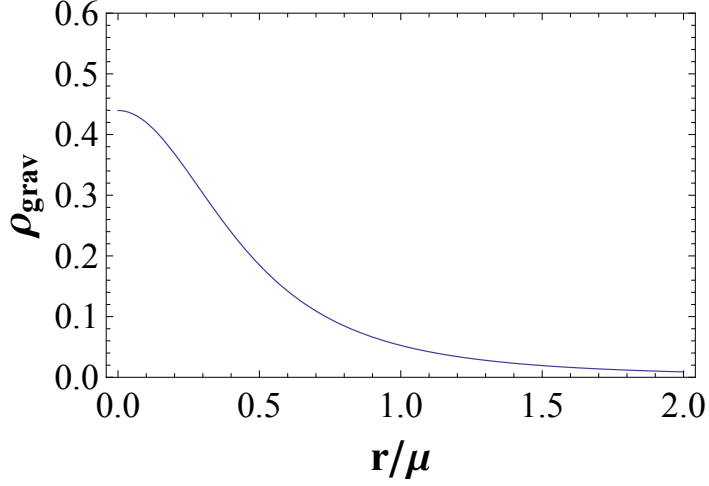


Figura 46:  $\rho_{\text{grav}}$  como función de la coordenada radial para  $\alpha = 0,8$  y  $\theta = \pi/4$ .

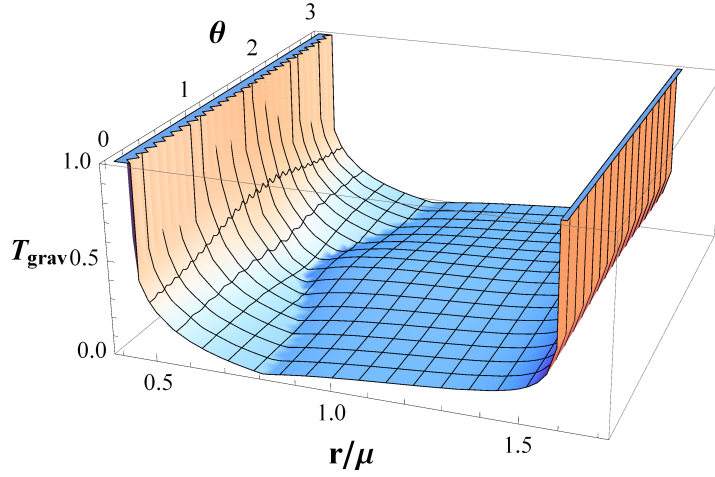


Figura 47:  $T_{\text{grav}}$  como función de las coordenadas radial y angular para  $\alpha = 0,8$ .

47: se observa que  $T_{\text{grav}}$  está bien definida en todo punto excepto en los horizontes interno y externo de eventos.

Como se explica en Clifton et al. 2013, un pequeño cambio en la densidad de entropía gravitacional de un agujero negro ocurre cuando éste acreta una pequeña cantidad de masa:

$$\delta S_{\text{grav}} = \frac{\delta (\rho_{\text{grav}} v)}{T_{\text{grav}}}. \tag{4.111}$$

En la expresión anterior  $v = z^a \eta_{abcd} dx^b dx^c dx^d$ , donde  $\eta_{abcd} = \eta_{[abcd]}$ ,  $\eta_{0123} = \sqrt{|g_{ab}|}$ . Para nuestra elección particular de coordenadas:

$$v = \frac{\sqrt{2Mr} (r^2 + a^2)^{1/2} (r^2 + u^2)^{1/2}}{a \sqrt{-\Delta}} d\phi du dr. \tag{4.112}$$

Se procede ahora al cálculo de la entropía gravitacional  $S_{\text{grav}}$  mediante la integración de la Ec. 4.111 en el volumen  $V$  encerrado por el

horizonte externo de eventos, en una hipersuperficie de coordenada  $t$  constante, para un valor fijo de  $a$ :

$$S_{\text{grav}} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_{\text{grav}} \mathcal{V}}{T_{\text{grav}}}. \quad (4.113)$$

Mediante este cálculo pretendemos verificar si el estimador de Bel-Robinson, en el sistema de referencia elegido, reproduce la entropía de Bekenstein-Hawking de un agujero negro de Kerr. Nótese, sin embargo, que independientemente de la elección de coordenadas, la región interior al horizonte interno de eventos no es temporalmente orientable ya que es una región con violación cronológica [Visser, 1996]. La contribución a la entropía gravitacional corresponderá, pues, a la región entre el horizonte interno y externo de eventos.

La integral 4.113 puede escribirse en forma explícita como:

$$\begin{aligned} S_{\text{grav}} &= \beta \iint_{\mathcal{T}} s(r, \theta) \, d\theta \, dr \\ &= \beta \int_{r_-}^{r_+} \int_0^\pi \frac{r^{1/2} (r^2 + a^2)^{1/2} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \sin \theta \, d\theta \, dr}{|f(r, \theta)|}, \end{aligned} \quad (4.114)$$

donde  $\beta = 2^{1/2} \pi \alpha M^{3/2}$ . En esta última fórmula ya se ha integrado sobre la coordenada azimutal  $\phi$ . La función  $f(r, \theta)$  se define como:

$$f(r, \theta) \equiv -ra^2 + Mr^2 + a^2 \cos^2 \theta (-M + r). \quad (4.115)$$

El dominio de integración  $\mathcal{T}$  es:

$$\mathcal{T} = \{(r, \theta) \in \mathfrak{R}^2 / r_- \leq r \leq r_+ \wedge 0 \leq \theta \leq \pi\}. \quad (4.116)$$

Se divide  $\mathcal{T}$  en 3 subregiones denotadas E, D y G respectivamente, tal que  $\mathcal{T} = E \cup D \cup G$ ,

$$E = \{(r, \theta) \in \mathfrak{R}^2 / r_- \leq r < a^2 \wedge 0 \leq \theta \leq \pi\}, \quad (4.117)$$

$$D = \{(r, \theta) \in \mathfrak{R}^2 / a^2 \leq r < a \wedge 0 \leq \theta \leq \pi\}, \quad (4.118)$$

$$G = \{(r, \theta) \in \mathfrak{R}^2 / a \leq r \leq r_+ \wedge 0 \leq \theta \leq \pi\}, \quad (4.119)$$

Dadas las definiciones anteriores, la Ec. 4.114 puede escribirse como:

$$S_{\text{grav}} = \beta \left( S_{\text{grav}}^E + S_{\text{grav}}^D + S_{\text{grav}}^G \right) \quad (4.120)$$

donde,

$$S_{\text{grav}}^E = \iint_E \frac{r^{1/2} (r^2 + a^2)^{1/2} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \sin \theta \, d\theta \, dr}{|f(r, \theta)|},$$

$$S_{\text{grav}}^D = \iint_D \frac{r^{1/2} (r^2 + a^2)^{1/2} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \sin \theta \, d\theta \, dr}{|f(r, \theta)|},$$

$$S_{\text{grav}}^G = \iint_G \frac{r^{1/2} (r^2 + a^2)^{1/2} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \sin \theta \, d\theta \, dr}{|f(r, \theta)|}.$$

La integral  $S_{\text{grav}}^D$  es una integral impropia divergente (ver Apéndice A para definición de integral impropia); en particular, ésta tiende a

infinito para aquellos valores  $r$  y  $\theta$  tales que  $f(r, \theta) = 0$ . Contrariamente, las integrales  $S_{\text{grav}}^E$  y  $S_{\text{grav}}^G$  están bien definidas en el intervalo  $a \in (0, 1)$ , y pueden ser integradas numéricamente, como se mostrará más abajo.

Para demostrar que la integral  $S_{\text{grav}}^D$  es divergente, definimos 4 subregiones cerradas:

$$D_{(\delta, \epsilon)} = D_{1(\delta, \epsilon)} \cup D_{2(\delta, \epsilon)} \cup D_{3(\delta, \epsilon)} \cup D_{4(\delta, \epsilon)}, \quad (4.121)$$

$$\begin{aligned} D_{1(\delta, \epsilon)} &= \{ (r, \theta) \in \mathfrak{R}^2 / a^2 + \delta \leq r \leq a \wedge 0 \leq \theta \leq \pi/2 - \epsilon \wedge f(r, \theta) < 0 \}, \\ D_{2(\delta, \epsilon)} &= \{ (r, \theta) \in \mathfrak{R}^2 / a^2 + \delta \leq r \leq a \wedge 0 \leq \theta \leq \pi/2 - \epsilon \wedge f(r, \theta) > 0 \}, \\ D_{3(\delta, \epsilon)} &= \{ (r, \theta) \in \mathfrak{R}^2 / a^2 + \delta \leq r \leq a \wedge \pi/2 + \epsilon \leq \theta \leq \pi \wedge f(r, \theta) > 0 \}, \\ D_{4(\delta, \epsilon)} &= \{ (r, \theta) \in \mathfrak{R}^2 / a^2 + \delta \leq r \leq a \wedge \pi/2 + \epsilon \leq \theta \leq \pi \wedge f(r, \theta) < 0 \}, \end{aligned} \quad (4.122)$$

donde  $\epsilon, \delta > 0$ , y

$$\lim_{(\delta, \epsilon) \rightarrow 0} D_{(\delta, \epsilon)} \rightarrow D. \quad (4.123)$$

En la Fig. 48 se muestra un diagrama del dominio de integración  $D_{(\delta, \epsilon)}$ . En cada  $D_{(\delta, \epsilon)}$  la función  $s(r, \theta)$  está bien definida y es continua:

$$s(r, \theta) = \begin{cases} s_1(r, \theta) = -\frac{r^{1/2} (r^2 + a^2)^{1/2} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \sin \theta}{-r a^2 + M r^2 + a^2 \cos^2 \theta (-M + r)}, & \text{para } (r, \theta) \in D_{1(\delta, \epsilon)} \\ s_2(r, \theta) = \frac{r^{1/2} (r^2 + a^2)^{1/2} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \sin \theta}{-r a^2 + M r^2 + a^2 \cos^2 \theta (-M + r)}, & \text{para } (r, \theta) \in D_{2(\delta, \epsilon)} \\ s_3(r, \theta) = \frac{r^{1/2} (r^2 + a^2)^{1/2} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \sin \theta}{-r a^2 + M r^2 + a^2 \cos^2 \theta (-M + r)}, & \text{para } (r, \theta) \in D_{3(\delta, \epsilon)} \\ s_4(r, \theta) = -\frac{r^{1/2} (r^2 + a^2)^{1/2} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \sin \theta}{-r a^2 + M r^2 + a^2 \cos^2 \theta (-M + r)}, & \text{para } (r, \theta) \in D_{4(\delta, \epsilon)} \end{cases}$$

La integral de la función  $s(r, \theta)$  en el dominio  $D_{(\delta, \epsilon)}$  toma la forma:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{(\delta, \epsilon)}} s(r, \theta) d\theta dr &= \iint_{D_{1(\delta, \epsilon)}} s_1(r, \theta) d\theta dr + \iint_{D_{2(\delta, \epsilon)}} s_2(r, \theta) d\theta dr \\ &+ \iint_{D_{3(\delta, \epsilon)}} s_3(r, \theta) d\theta dr + \iint_{D_{4(\delta, \epsilon)}} s_4(r, \theta) d\theta dr. \end{aligned}$$

La función  $f(r, \theta)$  puede aproximarse muy bien mediante una expansión en serie de potencias entorno al punto  $r_* = a^2$  hasta orden  $(r - r_*)^4$  en la región  $D_{(\delta, \epsilon)}$ :

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &\cong f_4 \equiv a_0(a, r_*, \theta) + a_1(a, r_*, \theta)(r_* - r) \\ &+ a_2(a, r_*, \theta)(r_* - r)^2 + a_3(a, r_*, \theta)(r_* - r)^3 \\ &+ a_4(a, r_*, \theta)(r_* - r)^4, \end{aligned} \quad (4.124)$$

donde los coeficientes  $a_j(a, r_*, \theta)$ ,  $j = 0, \dots, 4$  son funciones continuas de  $a, r_*$ , y  $\theta$  en cada  $D_{i(\delta, \epsilon)}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

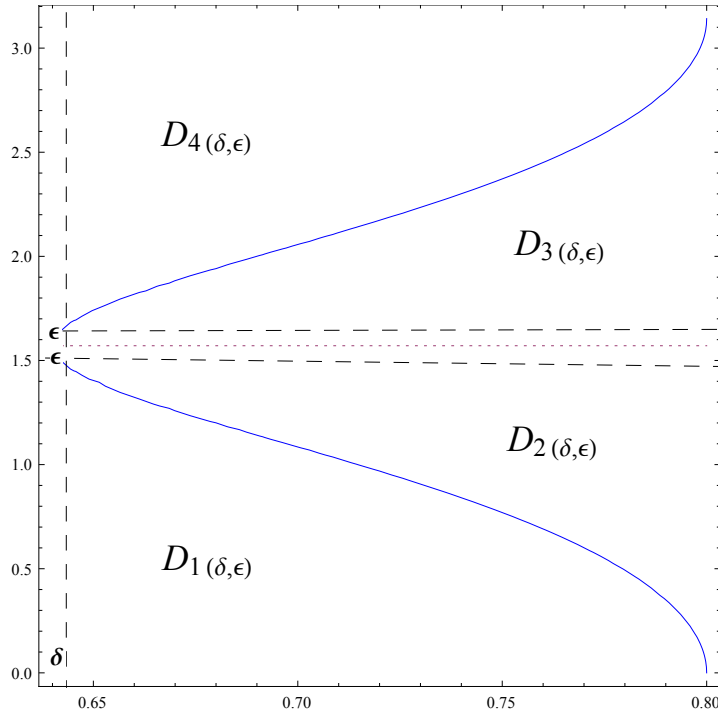


Figura 48: Gráfico del dominio de integración  $D_{(\delta, \epsilon)}$ .

Dado que  $D_{(\delta, \epsilon)}$  es un conjunto cerrado y acotado y  $f_4$  es continua en  $D_{(\delta, \epsilon)}$ , luego existen puntos en  $D_{(\delta, \epsilon)}$  donde cada coeficiente  $a_j$ ,  $j = 0, \dots, 4$  toma sus valores máximos y mínimos [Courant, 1961]. Hacemos uso de esta propiedad para encontrar en cada dominio  $D_{i(\delta, \epsilon)}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  una constante  $\tilde{a}_j^i \geq 0$  tal que

$$\sum_{j=0}^4 a_j (r_* - r)^j \leq \sum_{j=0}^4 \tilde{a}_j^i (r_* - r)^j \equiv g_i(r) \quad \forall i = 1, \dots, 4. \quad (4.125)$$

En la última ecuación  $g_i(r)$  representa un polinomio de orden 4. Dado que  $r < 1$  en cada  $D_{i(\delta, \epsilon)}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , siempre se puede encontrar una función lineal de la forma:

$$h_i(r) \equiv \gamma_i (r_* - r) \quad \gamma_i \in \mathfrak{R}^+, \quad (4.126)$$

tal que

$$g_i(r) \leq h_i(r) \quad \forall i = 1, \dots, 4. \quad (4.127)$$

Luego,

$$0 \leq \frac{1}{h_i(r)} \leq \frac{1}{g_i(r)} \leq \frac{\tilde{C}_i}{f_4} \leq s_i(r, \theta) \quad \forall i = 1, \dots, 4 \quad \tilde{C}_i \in \mathfrak{R}^+, \quad (4.128)$$

y (ver [Courant, 1961] p. 383):

$$\iint_{D_{i(\delta, \epsilon)}} \frac{1}{h_i(r)} d\theta dr \leq \iint_{D_{i(\delta, \epsilon)}} \frac{\tilde{C}_i}{f_4} d\theta dr \leq \iint_{D_{i(\delta, \epsilon)}} s_i(r, \theta) d\theta dr. \quad (4.129)$$

Se prueba en el Apéndice A que

$$I \equiv \iint_D \frac{1}{h_i(r)} d\theta dr, \quad \forall i = 1, \dots, 4, \quad (4.130)$$

es divergente. Luego, dado que en cada  $D_{i(\delta, \epsilon)}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  se satisface la desigualdad 4.129, entonces:

$$\sum_{i=1}^4 \iint_{D_{i(\delta, \epsilon)}} \frac{1}{h_i(r)} d\theta dr \leq \sum_{i=1}^4 \iint_{D_{i(\delta, \epsilon)}} s_i(r, \theta) d\theta dr = \iint_{D(\delta, \epsilon)} s(r, \theta) d\theta dr. \quad (4.131)$$

Si se aplica el criterio de comparación para integrales impropias [Pre-[doi & Balan, 2005](#)] se concluye que  $S_{\text{grav}}^D$  es divergente.

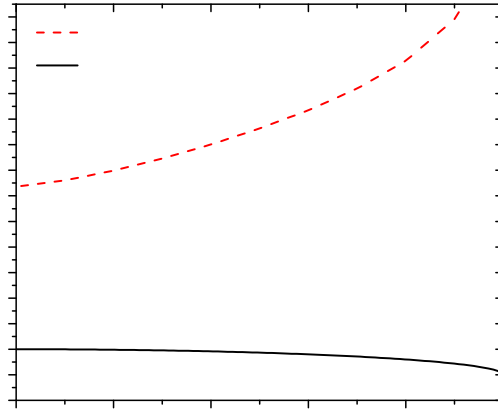


Figura 49: Gráfico de la entropía de Bel-Robinson  $S_{\text{BR}}$  y Bekenstein-Hawking  $S_{\text{BH}}$  como función del momento angular del agujero negro.

Mostramos en la Fig. 49 el resultado de la integración numérica de  $S_{\text{grav}}^E + S_{\text{grav}}^G$ . En la misma figura graficamos la entropía de Bekenstein-Hawking, denotada  $S_{\text{BH}}$ , como función del momento angular del agujero negro. Es evidente que  $S_{\text{BR}}$  no reproduce la entropía de Bekenstein-Hawking de un agujero negro. Concluimos que aún en el dominio de integración  $E \cup G$  donde la entropía está bien definida, el estimador de Bel-Robinson no resulta una buena aproximación de la entropía de Bekenstein-Hawking, al menos para nuestra elección particular de coordenadas. No descartamos que para una elección distinta de vectores  $u^a$  y  $z^a$ , el estimador de Bel-Robinson pueda coincidir con el resultado de Bekenstein-Hawking. Sin embargo, el hecho de que la región más interna del espacio-tiempo de Kerr no es foliable y orientable temporalmente parece sugerir que nuestro resultado podría ser general.

#### 4.6 CONCLUSIONES

La densidad de entropía gravitacional obtenida con el estimador de Weyl-Kretschmann en el caso de objetos compactos esféricamente



simétricos (agujeros negros de Reissner-Nordström, un modelo particular de agujero negro regular y de agujero de gusano) posee las características esperadas de una buena medida de la densidad de entropía gravitacional: la densidad de entropía está bien definida en todo punto, excepto donde se encuentra localizada la singularidad, y tiende a cero a medida que el campo gravitacional decrece. En el modelo simple de agujero de gusano,  $s = 0$  en la garganta debido a la presencia de materia exótica. Para el modelo de agujero negro regular, cerca del núcleo del objeto y para valores grandes de la coordenada radial, la densidad de entropía tiende a cero. El comportamiento del estimador de Weyl-Kretschmann es, pues, correcto en los límites de de Sitter y de Schwarzschild. Para espacio-tiempos axialmente simétricos, sin embargo, modificamos dicho estimador debido a que la densidad de entropía presentaba divergencias: calculamos la densidad de entropía a partir de la forma completa de la métrica. Redefinimos, además, el escalar  $P$  como el escalar de Weyl. Con estos cambios, el estimador para la densidad de entropía gravitacional  $s$ , está bien definido en todo punto excepto donde el espacio-tiempo es singular, y tiende asintóticamente a cero fuera del agujero negro.

Por otro lado, hemos calculado la densidad de energía gravitacional, temperatura, y entropía gravitacional para un agujero negro de Kerr de acuerdo al estimador de Bel-Robinson. Los cálculos aquí presentados están basados en una elección particular de un vector unitario tipo tiempo  $u^\alpha$  y un vector unitario tipo espacio  $z^\alpha$  que determinan una tetraada principal de Weyl. La elección de dichos vectores, sin embargo, no es única. Consecuentemente, la forma funcional de  $\rho_{\text{grav}}$ , y  $T_{\text{grav}}$  depende de la tetraada particular escogida. Hemos probado que con la elección de coordenadas más simple posible, la entropía gravitacional no reproduce la entropía de Bekenstein-Hawking de un agujero negro de Kerr. No se descarta que para otro par diferente de vectores  $u^\alpha$  y  $z^\alpha$  (que cumplan los requisitos estipulados por [Clifton et al. 2013](#)), el estimador de Bel-Robinson pueda coincidir con la entropía de Bekenstein-Hawking.

Si se comparan los estimadores de Weyl-Kretschmann y Bel-Robinson, el primero no sólo reproduce la entropía de Bekenstein-Hawking para un agujero negro de Kerr sino que está definido de manera tal que no depende de la foliación específica del espacio-tiempo y puede aplicarse a espacio-tiempos con violación cronológica. Concluimos, pues, que en el estado actual de nuestro conocimiento de la gravitación, caracterizado por la ausencia de una teoría cuántica completa de la misma, el estimador de Weyl-Kretschmann es la mejor aproximación clásica disponible para cuantificar la entropía del campo gravitacional, al menos en el caso de agujeros negros.



## ACRECIÓN SOBRE AGUJEROS NEGROS Y TEORÍAS DE LA GRAVITACIÓN

---

### 5.1 INTRODUCCIÓN

La teoría de la Relatividad General es consistente, con buena precisión, con resultados observacionales (ver por ejemplo [Will 2006](#)). Sin embargo, un tensor de energía-momento que representa materia exótica (en forma vaga denominado “energía oscura”, e.g. [Li et al. 2011](#)) debe introducirse en el miembro derecho de las ecuaciones de Einstein para ajustar los datos actuales cuando estos son interpretados en el marco del modelo cosmológico estándar (basado en la teoría de la Relatividad General). La “energía oscura” puede modelarse mediante un campo escalar con una ecuación de estado dada por  $p = \omega_{DE}\rho$ , donde  $\omega_{DE} < -1/3$  [[Biswas et al., 2010a,b](#)]. Ninguna de estas descripciones está libre de problemas, dado que la densidad de energía asociada a la constante cosmológica que se infiere mediante observaciones astronómicas es aproximadamente 120 órdenes de magnitud menor que el valor predicho por teoría de campos (e.g. [Weinberg 1989](#); [Capozziello & Faraoni 2011](#)), mientras que el campo escalar posee características que están en desacuerdo con los campos escalares de física de partículas [[Sotiriou & Faraoni, 2010](#)].

Un enfoque diferente para explicar los datos cosmológicos es modificar las ecuaciones para el campo gravitacional, de manera tal que la teoría resultante difiera de la de Einstein en el régimen de curvatura pequeña. Dado que no hay una razón fundamental *a priori* para restringir el Lagrangiano gravitacional a una función lineal del escalar de Ricci  $R$  (ver por ejemplo [Magnano et al. 1987](#)), teorías más generales pueden formularse usando funciones no lineales de este escalar. Las denominadas teorías  $f(R)$  (e.g. [Capozziello & Faraoni 2011](#)) fueron utilizadas por [Capozziello & Fang 2002](#) para emular la expansión acelerada del universo. En la actualidad, existe una gran cantidad de modelos  $f(R)$  en acuerdo con los datos disponibles [[de Felice & Tsujikawa, 2010](#)].

Aunque el actual resurgimiento de teorías  $f(R)$  se debe fundamentalmente a su uso para la descripción de fenómenos donde el valor de la curvatura de Riemann es bajo, estas teorías también han sido aplicadas en régimen de campo gravitacional fuerte. Dado que no existe evidencia directa del comportamiento del campo gravitacional para valores muy grandes de la curvatura, el universo temprano y los objetos compactos ofrecen la posibilidad de encontrar desviaciones de la Relatividad General. Entre los estudios de gravedad modificada en régimen de campo fuerte, se destacan el modelo inflacionario basado en la teoría  $R + \alpha R^2$  [[Starobinsky, 1980](#)], y estudios relacionados de recalentamiento cósmico [[Motohashi & Nishizawa, 2012](#)] y producción de partículas en el universo temprano [[Arbuzova et al., 2012](#)], como

también el tratamiento de estrellas de neutrones [Cooney et al., 2010] y soluciones de agujeros negros.

Diferentes aspectos de la física de agujeros negros en teorías  $f(R)$  han sido discutidos en la literatura por Psaltis et al. 2008b,a, Hendi & Momeni 2011, Myung 2011, Myung et al. 2011, Moon et al. 2011a,b, Hendi et al. 2012, y Habib Mazharimousavi et al. 2012. Soluciones de agujeros negros estáticas y esféricamente simétricas fueron obtenidas mediante teoría de perturbaciones por de La Cruz-Dombriz et al. 2009, mientras que agujeros negros con estas simetrías han sido estudiados por medio del un análisis cercano al horizonte (*near-horizon analysis*) por Perez Bergliaffa & Yves de Oliveira 2011. Finalmente, soluciones de agujeros negros de  $f(R)$ -Kerr-Newman con escalar de Ricci constante se deben a Cembranos et al. 2011.

Desde un punto de vista astrofísico, discos de acreción delgados en el espacio-tiempo de  $f(R)$ -Schwarzschild han sido discutidos por Pun et al. 2008, sin incluir el espectro esperado para agujeros negros astrofísicos concretos o algún tipo de comparación con datos observacionales.

En la primera parte de este capítulo se investiga la existencia de órbitas circulares estables en los espacio-tiempos de  $f(R)$ -Schwarzschild y  $f(R)$ -Kerr con escalar de Ricci constante, y se analizan las principales características de discos de acreción entorno a estos agujeros negros. En particular, se presenta la distribución de temperatura y espectro de energía para discos de Page-Thorne, y se comparan los resultados con los obtenidos usando el modelo estándar de Shakura-Sunyaev.

## 5.2 ÓRBITAS CIRCULARES ENTORNO A UN AGUJERO NEGRO EN GRAVEDAD $f(r)$

### 5.2.1 Espacio-tiempo de $f(R)$ -Schwarzschild

La métrica de  $f(R)$ -Schwarzschild con escalar de Ricci constante  $R_0$  es [Cembranos et al., 2011]:

$$ds^2 = - \left[ \left( c^2 - \frac{2GM}{r} \right) - \frac{c^2 R_0}{12} r^2 \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[ \left( 1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right) - \frac{R_0}{12} r^2 \right]} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.1)$$

donde  $R_0 \in (-\infty, 4/9]$  para que la métrica anterior represente agujeros negros con un horizonte de eventos interno y un horizonte externo cosmológico (ver Capítulo 2, Sección 2.4).

Las ecuaciones de las geodésicas para la métrica dada por 5.1 pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange usando el Lagrangiano:

$$L = - \left[ \left( c^2 - \frac{2GM}{r} \right) - \frac{c^2 R_0}{12} r^2 \right] \dot{t}^2 + \frac{1}{\left[ \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) - \frac{R_0}{12} r^2 \right]} \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2), \quad (5.2)$$

donde  $\dot{x}^\mu \equiv dx^\mu/d\sigma$ , y  $\sigma$  es un parámetro afín a lo largo de la geodésica  $x^\mu(\sigma)$ . Si se reemplaza la Ec. 5.2 en las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad (5.3)$$

donde  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Las ecuaciones de las geodésicas resultantes para  $t$  y  $\phi$  son (tomando  $\theta = \pi/2$ ):

$$\left[ \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) - \frac{R_0}{12} r^2 \right] \dot{t} = k, \quad (5.4)$$

$$r^2 \dot{\phi} = h, \quad (5.5)$$

donde  $k$  y  $h$  son constantes. La ecuación para  $r$  que resulta más simple de la que se obtiene a partir del Lagrangiano, se deriva del módulo del cuadri-momento  $\mathbf{p}$ , dado por  $g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \epsilon^2$ , donde  $\epsilon^2 = c^2$  para partículas masivas, y  $\epsilon^2 = 0$  para fotones:

$$- \left[ \left( c^2 - \frac{2GM}{r} \right) - \frac{c^2 R_0}{12} r^2 \right] \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\left[ \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) - \frac{R_0}{12} r^2 \right]} + r^2 \dot{\phi}^2 = \epsilon^2, \quad (5.6)$$

con  $\dot{t}$  y  $\dot{\phi}$  dados por las Ecs. 5.4 y 5.5, respectivamente. El conjunto de Ecs. 5.4, 5.5, y 5.6 determina en forma completa el movimiento de una partícula en el espacio-tiempo de  $f(R)$ -Schwarzschild.

### 5.2.1.1 Trayectorias de partículas masivas

Las Ecs. 5.4, 5.5, y 5.6 pueden utilizarse para obtener la denominada ecuación de la energía (e.g. [Hobson et al. 2006](#))

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \left[ \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) - \frac{R_0}{12} r^2 \right] + \left( -\frac{2GM}{r} - \frac{c^2 R_0}{12} r^2 \right) = c^2 (k^2 - 1). \quad (5.7)$$

La constante  $k$  se define como  $k = E/m_0 c^2$ , donde  $E$  representa la energía total de la partícula en su órbita, y  $m_0 c^2$  su masa en reposo. La constante  $h$  denota el momento angular de la partícula por unidad de masa. De la Ec. 5.7 se puede identificar el potencial efectivo por unidad de masa como:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{h^2}{2r^2} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{R_0}{12} r^2 \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{2GM}{r} - \frac{c^2 R_0}{12} r^2 \right). \quad (5.8)$$

Si  $R_0 \rightarrow 0$ , recuperamos la expresión del potencial efectivo para la métrica de Schwarzschild en Relatividad General.

Los extremos del potencial efectivo se obtienen hallando las raíces de la derivada de la función  $V_{\text{eff}}(r)$  respecto a la coordenada radial:

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{h^2}{r^3} + \frac{3h^2 GM}{r^4 c^2} + \frac{GM}{r^2} - \frac{c^2 R_0 r}{12} = 0, \quad (5.9)$$

que en términos de  $x = r/\mu$ ,  $R_0 = R_0\mu^2$ , y el momento angular adimensional por unidad de masa  $h = h(c\mu)^{-1}$ , se reescribe como:

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dx} = c^2 \left( -\frac{h^2}{x^3} + \frac{3h^2}{x^4} + \frac{1}{x^2} - \frac{R_0 x}{12} \right) = 0. \quad (5.10)$$

La derivada de la Ec. 5.10 respecto a  $x$  resulta:

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dx^2} = \frac{c^2}{\mu^2} \frac{(-4R_0x^4 + 15R_0x^3 + 12x - 72)}{x^4 \left(-\frac{3}{x} + 1\right)}, \quad (5.11)$$

donde se ha reemplazado  $h$  por [Harko et al., 2009]:

$$h = x_c^2 \frac{\sqrt{\frac{1}{x_c^3} - \frac{R_0}{12}}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x_c}}}, \quad (5.12)$$

donde  $x_c$  corresponde al radio de una órbita circular.

Hemos calculado en forma numérica los extremos del potencial efectivo para distintos valores de  $R_0$ .

Para  $R_0 > 0$ , como mostraron Stuchlík & Hledík 1999 y Rezzolla et al. 2003 en el espacio-tiempo de Schwarzschild-de Sitter, existen órbitas circulares estables para valores del momento angular específico que satisfacen:

$$h_{\text{isco}} < h < h_{\text{osco}}, \quad (5.13)$$

donde  $h_{\text{isco}}$  y  $h_{\text{osco}}$  denotan el mínimo y máximo local del momento angular específico para los radios marginalmente estables más interno y externo, respectivamente. De la Ec. 5.11 se observa que la existencia y localización de las órbitas circulares depende del escalar de Ricci  $R_0$ . Si se iguala la Ec. 5.10 a cero y despeja  $R_0$ , se obtiene el escalar de Ricci como función de la coordenada radial para órbitas circulares:

$$R_0 = \frac{12(6 - x_c)}{(15 - 4x_c)x_c^3}. \quad (5.14)$$

En la Fig. 50 se muestra el gráfico de la última ecuación: hay un valor límite superior para el escalar de Ricci,  $R_0 = 2,85 \times 10^{-3}$ , para el cual las órbitas circulares son posibles. En la Fig. 51 se grafica el potencial efectivo como función de la coordenada radial. Los puntos indican la localización de la última órbita circular estable. Los valores correspondientes de los horizontes de eventos y cosmológicos, radios de las órbitas más interna y externa circular estable, para seis valores distintos de  $R_0 \in (0, 2,85 \times 10^{-3})$  se presentan en la Tabla 1. Observamos que para valores crecientes del escalar de Ricci el horizonte de eventos se hace más grande que en el espacio-tiempo de Schwarzschild en Relatividad General como también la localización de la última órbita circular estable.

Los extremos del potencial efectivo para  $R_0 < 0$  están todos localizados fuera del horizonte de eventos, como se muestra en la Fig. 52. El valor de la coordenada radial para el horizonte de eventos es menor a 2 (i.e. menor que para agujeros negros de Schwarzschild en Relatividad General). La localización de la última órbita circular estable es

Cuadro 1: Coordenada radial de los horizontes de eventos y cosmológicos, y de las órbitas más interna y externa circular estable para  $R_0 > 0$  en el espacio-tiempo de  $f(R)$ -Schwarzschild. Aquí  $x \equiv r/\mu$ .

$R_0$	Radio horizonte de eventos	Radio horizonte cosmológico
$10^{-12}$	$x_{eh} = 2$	$x_{ch} = 3,46 \times 10^6$
$10^{-6}$	$x_{eh} = 2$	$x_{ch} = 3463,10$
$10^{-4}$	$x_{eh} = 2$	$x_{ch} = 345,40$
$10^{-3}$	$x_{eh} = 2,00067$	$x_{ch} = 108,53$
$2 \times 10^{-3}$	$x_{eh} = 2,00134$	$x_{ch} = 76,44$
$2,84 \times 10^{-3}$	$x_{eh} = 2,0019$	$x_{ch} = 63,98$
$R_0$	Radio órbita más interna circular estable	Radio órbita más externa circular estable
$10^{-12}$	$x_{isco} = 6$	$x_{osco} = 14421,70$
$10^{-6}$	$x_{isco} = 6,00016$	$x_{osco} = 143,45$
$10^{-4}$	$x_{isco} = 6,02$	$x_{osco} = 30,16$
$10^{-3}$	$x_{isco} = 6,19$	$x_{osco} = 13,17$
$2 \times 10^{-3}$	$x_{isco} = 6,51$	$x_{osco} = 9,80$
$2,84 \times 10^{-3}$	$x_{isco} = 7,40$	$x_{osco} = 7,60$

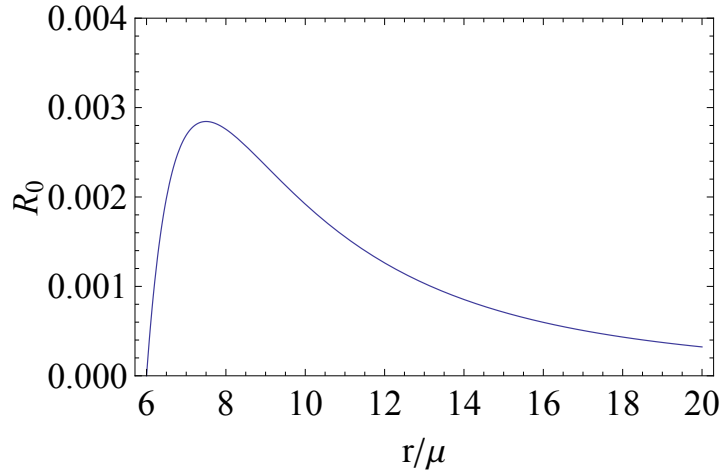


Figura 50: Gráfico de la función dada por la Ec. 5.14. El máximo absoluto corresponde a  $x = 15/2$  y  $R_0 = 2,85 \times 10^{-3}$ .

Cuadro 2: Coordenada radial del horizonte de eventos y de la órbita más interna circular estable para  $R_0 < 0$  en el espacio-tiempo de  $f(R)$ -Schwarzschild. Aquí  $x \equiv r/\mu$ .

$R_0$	Radio horizonte de eventos	Radio órbita más interna circular estable
$-10^{-3}$	$x_{eh} = 1,999$	$x_{isco} = 5,86$
$-10^{-2}$	$x_{eh} = 1,993$	$x_{isco} = 5,26$
$-10^{-1}$	$x_{eh} = 1,939$	$x_{isco} = 4,35$
$-1,5$	$x_{eh} = 1,541$	$x_{isco} = 3,83$

más cercana al horizonte que para la solución de Schwarzschild en Relatividad General.

El límite  $R_0 \rightarrow -\infty$  en la Ec. 5.11 resulta:

$$x^3(-4x + 15) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3,75. \tag{5.15}$$

El gráfico del potencial efectivo correspondiente a los valores de los parámetros de la Tabla 2 se muestran en la Fig. 52.

### 5.2.2 Espacio-tiempo de $f(R)$ -Kerr

La métrica del espacio-tiempo de  $f(R)$ -Kerr para  $\theta = \pi/2$  con escalar de Ricci constante  $R_0$  es:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -\frac{c^2}{r^2\Xi^2} (\Delta_r - a^2) dt^2 + \frac{r^2}{\Delta_r} dr^2 \\
 & - \frac{2ac}{r^2\Xi^2} (r^2 + a^2 - \Delta_r) dt d\phi \\
 & + \frac{d\phi^2}{r^2\Xi^2} \left[ (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r a^2 \right],
 \end{aligned} \tag{5.16}$$



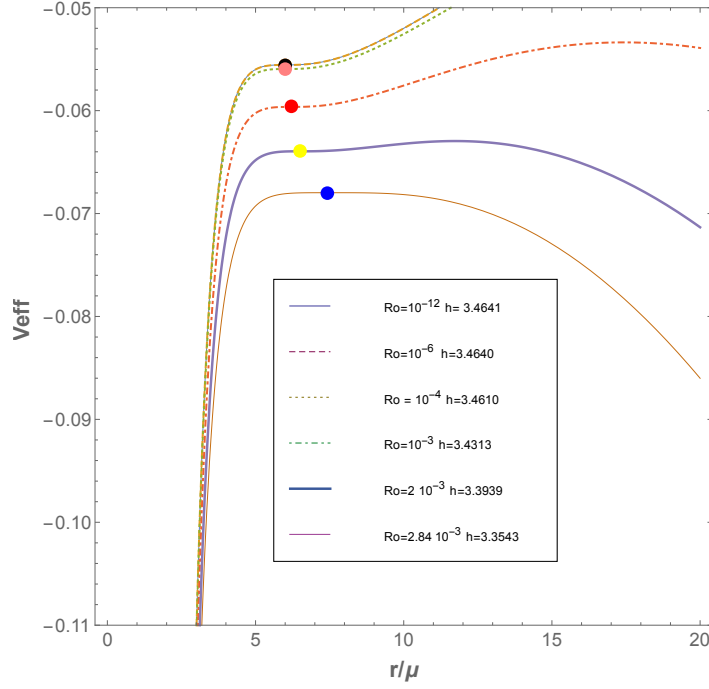


Figura 51: Potencial efectivo para diferentes valores de  $R_0 > 0$  y  $h$  en el espacio-tiempo  $f(R)$ -Schwarzschild. Los puntos indican la posición de la última órbita circular estable.

y,

$$\Delta_r = (r^2 + a^2) \left( 1 - \frac{R_0}{12} r^2 \right) - \frac{2GMr}{c^2}, \quad (5.17)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2, \quad (5.18)$$

$$\Xi = 1 + \frac{R_0}{12} a^2, \quad (5.19)$$

donde  $M$  y  $a$  denotan la masa y momento angular del agujero negro por unidad de masa, respectivamente. Soluciones que representen agujeros negros (tomando  $a = 0,99$ ) son posibles para valores del escalar de Ricci en el intervalo  $(-0,13,0,6]$  (ver Cap. 2 Sección 2.4.2).

Obtenemos una expresión para el potencial efectivo a partir de la invarianza del cuadri-momento  $\mathbf{p}$ :

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \epsilon^2, \quad (5.20)$$

donde  $\epsilon^2 = c^2$  para partículas masivas y  $\epsilon^2 = 0$  para fotones. Dado que sólo estamos interesados en las trayectorias sobre el plano ecuatorial, tomamos  $p_\theta = 0$ , y la Ec. 5.20 resulta:

$$g^{tt}(p_t)^2 + 2g^{t\phi} p_t p_\phi + g^{\phi\phi} p_\phi^2 + g^{rr} p_r^2 = \epsilon^2, \quad (5.21)$$

donde

$$p_t = kc^2, \quad (5.22)$$

$$p_\phi = -h, \quad (5.23)$$

$$p_r = g_{rr} \dot{r}. \quad (5.24)$$

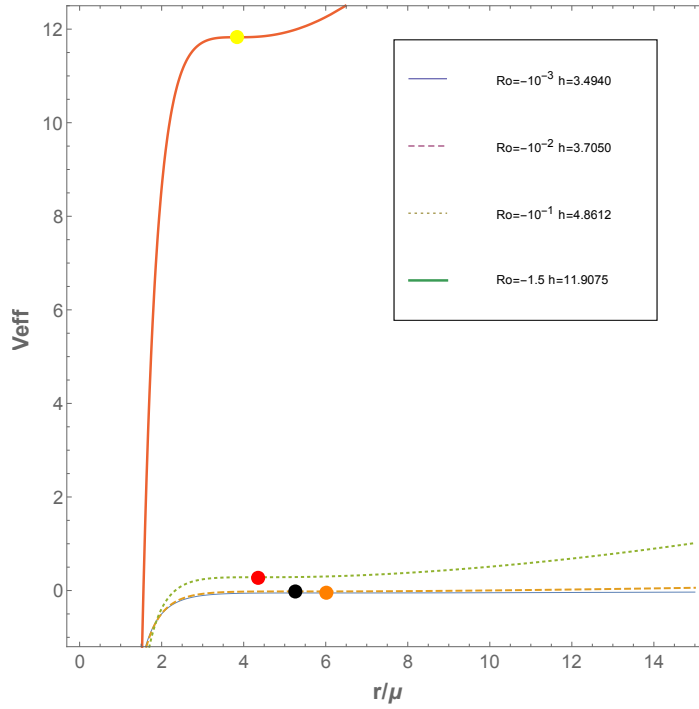


Figura 52: Potencial efectivo para diferentes valores de  $R_0 < 0$  y  $h$  en el espacio-tiempo  $f(R)$ -Schwarzschild. Los puntos indican la posición de la última órbita circular estable.

Si se sustituyen las Ecs. 5.22, 5.23, y 5.24 en 5.21, la ecuación para  $\dot{r}^2$  toma la forma:

$$\dot{r}^2 = g^{rr} \left[ \epsilon^2 - g^{tt} (kc^2)^2 + 2g^{t\phi} hkc^2 - g^{\phi\phi} h^2 \right]. \quad (5.25)$$

Las componentes contravariantes de la métrica 5.16 son:

$$g^{tt} = \frac{\Xi^2}{\Delta_r c^2 r^2} \left[ (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r a^2 \right], \quad (5.26)$$

$$g^{rr} = -\frac{\Delta_r}{r^2}, \quad (5.27)$$

$$g^{t\phi} = \frac{\Xi^2}{c \Delta_r r^2} a (r^2 + a^2 - \Delta_r), \quad (5.28)$$

$$g^{\phi\phi} = -\frac{\Xi^2}{\Delta_r r^2} (\Delta_r - a^2). \quad (5.29)$$

Luego, la ecuación de la energía para una partícula masiva es:

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r, a, R_0, k, h) = \frac{c^2}{2} (k^2 - 1), \quad (5.30)$$

donde el potencial efectivo es:

$$V_{\text{eff}}(r, a, R_0, k, h) = \frac{c^2 \Delta_r}{2r^2} + \frac{c^2}{2} (k^2 - 1) - \frac{\Xi^2}{2r^4} \Gamma, \quad (5.31)$$

y

$$\Gamma \equiv [(r^2 + a^2) ck - ah]^2 - \Delta_r (ack - h)^2. \quad (5.32)$$

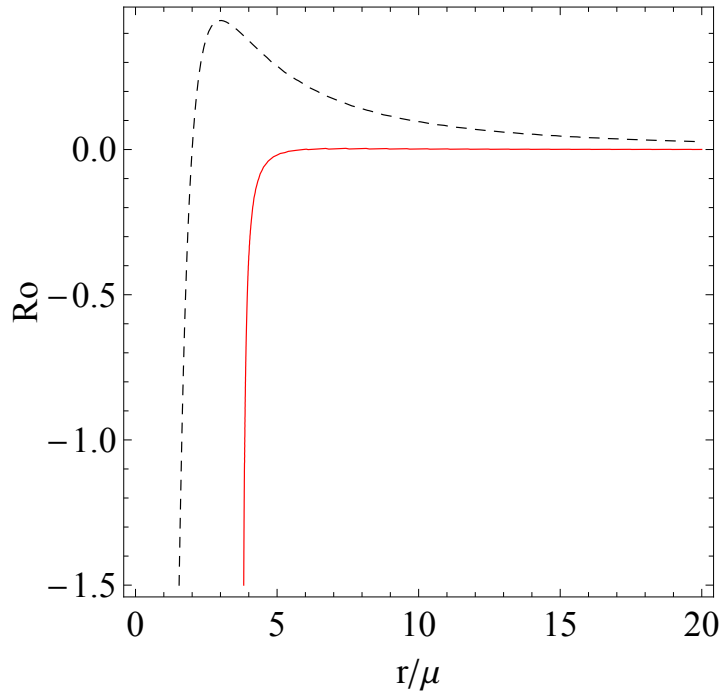


Figura 53: Escalar de Ricci en función de la coordenada radial del horizonte de eventos (línea negra discontinua) y del escalar de Ricci en función de la coordenada radial de la última órbita circular estable (línea roja) para  $R_0 \in [-1,5,0,45]$  en el espacio-tiempo de  $f(R)$ -Schwarzschild.

#### 5.2.2.1 Órbitas circulares estables de partículas masivas

Si una partícula masiva se está moviendo en una órbita circular de radio  $r_{\text{isco}}$ , el valor del potencial efectivo en cualquier punto de su órbita satisface la ecuación:

$$V_{\text{eff}}(r_{\text{isco}}, a, R_0, k, h) = \frac{c^2}{2} (k^2 - 1), \quad (5.33)$$

y,

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{dr}(r, a, R_0, k, h) \right|_{r_{\text{isco}}} = 0. \quad (5.34)$$

Para una órbita estable, la ecuación:

$$\left. \frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}(r, a, R_0, k, h) \right|_{r_{\text{isco}}} > 0, \quad (5.35)$$

debe también satisfacerse.

En forma numérica, calculamos el radio de la última órbita circular estable para distintos valores de  $R_0 < 0$ , con  $a = 0,99$ . Los valores obtenidos se muestran en la Tabla 3; Observamos que las órbitas se encuentran por fuera del horizonte de eventos; nótese que a medida que el valor del escalar decrece, el radio de la última circular estable se hace más pequeño. El radio de la última órbita circular estable en el espacio-tiempo de Kerr en Relatividad General ( $r_{\text{isco}} = 1,4545 r_g$ , para partículas rotando en la misma dirección que el agujero negro) es siempre mayor que las correspondientes en  $f(R)$ -Kerr. En la Fig. 54,

Cuadro 3: Radio del horizonte de eventos y de la última órbita ecuatorial circular estable para un agujero negro de  $f(R)$ -Kerr con momento angular  $a = 0,99$ , para algunos valores de  $R_0 < 0$ . Aquí,  $x \equiv r/\mu$ .

$R_0$	Radio horizonte de eventos	Radio última órbita circular estable
$-10^{-3}$	$x_{eh1} = 0,86, x_{eh2} = 1,14$	$x_{isco} = 1,452$
$-1,2 \times 10^{-3}$	$x_{eh1} = 0,86, x_{eh2} = 1,14$	$x_{isco} = 1,451$
$-10^{-2}$	$x_{eh1} = 0,86, x_{eh2} = 1,13$	$x_{isco} = 1,43$
$-10^{-1}$	$x_{eh1} = 0,91, x_{eh2} = 1,03$	$x_{isco} = 1,20$
$-1,25 \times 10^{-1}$	$x_{eh1} = 0,96, x_{eh2} = 0,98$	$x_{isco} = 1,04$

se grafican los potenciales efectivos que corresponden a los valores de la Tabla 3.

Para el análisis de la existencia de órbitas circulares estables para  $R_0 \in (0,0,6]$ , seguimos el tratamiento de [Stuchlík & Slaný 2004](#). El momento angular específico de una partícula masiva en una órbita circular co-rotante es:

$$h = -\frac{2a + ax_c (x_c^2 + a^2) \frac{R_0}{12} - x_c (x_c^2 + a^2) \left(\frac{1}{x_c^3} - \frac{R_0}{12}\right)^{1/2}}{x_c \left[1 - \frac{3}{x_c} - \frac{a^2 R_0}{12} + 2a \left(\frac{1}{x_c^3} - \frac{R_0}{12}\right)^{1/2}\right]^{1/2}}. \quad (5.36)$$

De la última ecuación, observamos que las órbitas circulares deben satisfacer las siguientes dos condiciones:

$$x_c < \left(\frac{12}{R_0}\right)^{1/3}, \quad (5.37)$$

que es la misma para el espacio-tiempo de  $f(R)$ -Schwarzschild con escalar de Ricci positivo, y:

$$1 - \frac{3}{x_c} - \frac{a^2 R_0}{12} + 2a \left(\frac{1}{x_c^3} - \frac{R_0}{12}\right)^{1/2} \geq 0. \quad (5.38)$$

El mínimo y máximo de la Ec. 5.36 son los valores del momento angular específico que corresponden a la órbita más interna y externa circular estable, respectivamente, una vez fijado el momento angular del agujero negro  $a$  y el valor de  $R_0$ . Presentamos en la Tabla 4 los valores de los radios de dichas órbitas para distintos valores de  $R_0$ , y  $a = 0,99$ , y en la Fig. 55 el correspondiente gráfico del potencial efectivo. Como esperábamos, el radio de la última órbita circular estable es mayor en el espacio-tiempo de Kerr en Relatividad General. Encontramos, también, igualando a cero la derivada de la Ec. 5.36, que órbitas circulares estables sólo existen si  $R_0 \in (0, 1,45 \times 10^{-1})$ .

El análisis de las órbitas circulares aquí presentado, será a continuación aplicado a la construcción de discos de acreción en torno a agujeros negros.

Cuadro 4: Coordenada radial de los horizontes de eventos y cosmológicos, y de las órbitas ecuatoriales más interna y externa circular estable para  $R_0 > 0$  y  $a = 0,99$  en el espacio-tiempo de  $f(R)$ -Kerr. Aquí,  $x \equiv r/\mu$ .

$R_0$	Radio horizonte de eventos	Radio horizonte cosmológico
$10^{-6}$	$x_{eh1} = 0,86$ $x_{eh2} = 1,14$	$x_{ch} = 3463$
$10^{-4}$	$x_{eh1} = 0,86$ $x_{eh2} = 1,14$	$x_{ch} = 345,40$
$6,67 \times 10^{-4}$	$x_{eh1} = 0,86$ $x_{eh2} = 1,14$	$x_{ch} = 113,12$
$10^{-3}$	$x_{eh1} = 0,86$ $x_{eh2} = 1,14$	$x_{ch} = 108,53$
$10^{-2}$	$x_{eh1} = 0,85$ $x_{eh2} = 1,15$	$x_{ch} = 33,59$
$10^{-1}$	$x_{eh1} = 0,83$ $x_{eh2} = 1,22$	$x_{ch} = 9,80$
$R_0$	Radio órbita más interna circular estable	Radio órbita más externa circular estable
$10^{-6}$	$x_{isco} = 1,4545$	$x_{osco} = 143,59$
$10^{-4}$	$x_{isco} = 1,4547$	$x_{osco} = 30,53$
$6,67 \times 10^{-4}$	$x_{isco} = 1,4560$	$x_{osco} = 16,002$
$10^{-3}$	$x_{isco} = 1,4567$	$x_{osco} = 13,93$
$10^{-2}$	$x_{isco} = 1,4765$	$x_{osco} = 6,25$
$10^{-1}$	$x_{isco} = 1,92$	$x_{osco} = 3,22$

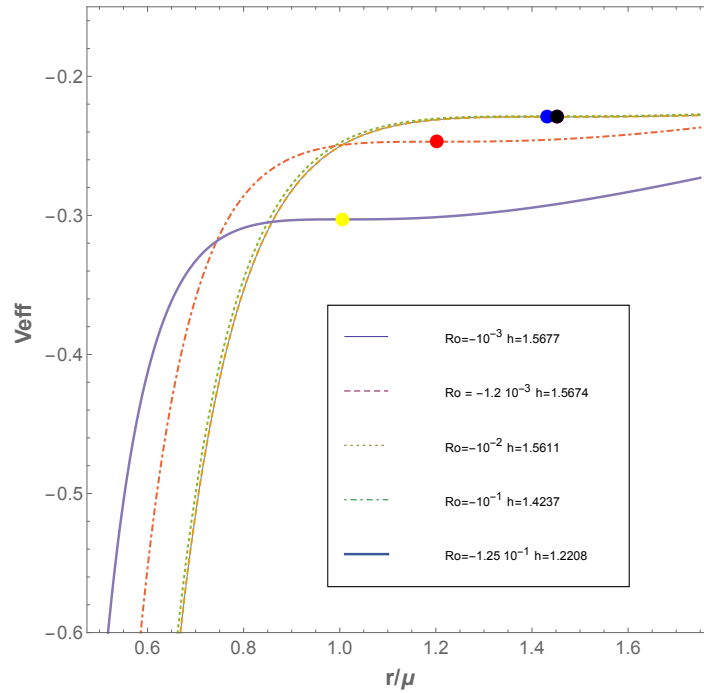


Figura 54: Potencial efectivo como función de la coordenada radial ( $R_0 < 0$ ,  $a = 0,99$ ) en el espacio-tiempo  $f(R)$ -Kerr. Los puntos indican la posición de la última órbita ecuatorial circular estable.

### 5.3 DISCOS DE ACRECIÓN EN RÉGIMEN DE CAMPO FUERTE

#### 5.3.1 Modelo de disco de Shakura & Sunyaev

El primer modelo realista de un disco de acreción entorno a agujeros negros fue formulado por Shakura & Sunyaev 1973. Éstos consideraron que la materia rotando en órbitas circulares Keplerianas entorno a objetos compactos pierde momento angular debido a la fricción entre capas adyacentes de materia y espirala hacia adentro. En el proceso, se libera energía gravitacional, la energía cinética del plasma se incrementa y el disco se calienta, emitiendo radiación térmica.

Shakura & Sunyaev 1973 caracterizaron el mecanismo de transporte de momento angular hacia afuera, principalmente debido a turbulencia en el disco, mediante un sólo parámetro denotado  $\alpha$ .

Aquí, sólo se considera un estado de acreción estacionario, donde la tasa de acreción es:

$$\dot{M} = \frac{dM}{dt} = C, \tag{5.39}$$

siendo  $C$  una constante, que al igual que  $\alpha$ , se toma como un parámetro externo.

Las hipótesis del modelo son:

1. el disco es delgado, i.e. su escala característica en el eje  $z$  es  $H \ll R$ , donde  $H$  es la mitad del grosor del disco y  $R$  el radio.
2. El gas está en equilibrio hidrostático en el eje  $z$ .

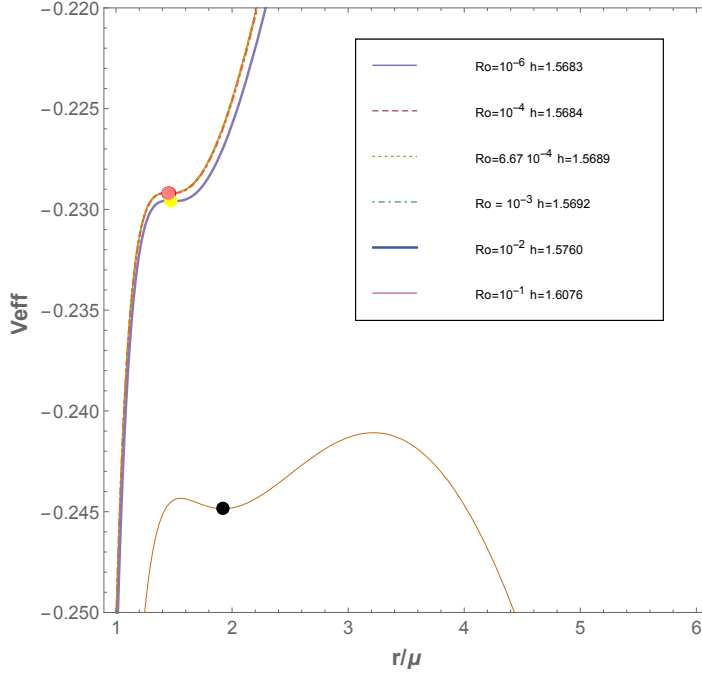


Figura 55: Potencial efectivo como función de la coordenada radial ( $R_0 > 0$ ,  $a = 0,99$ ) en el espacio-tiempo  $f(R)$ -Kerr. Los puntos indican la posición de la última órbita ecuatorial circular estable.

3. El campo gravitatorio generado por el propio disco se desprecia.

La segunda hipótesis puede escribirse como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} = -\frac{GM}{r^3} z, \quad (5.40)$$

o en forma equivalente,

$$\alpha_s = \omega_K H, \quad (5.41)$$

donde  $P = \rho \alpha_s^2$ ,  $\alpha_s$  denota la velocidad del sonido y

$$\omega_K = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}, \quad (5.42)$$

la velocidad angular kepleriana. [Shakura & Sunyaev 1973](#) hicieron todos sus cálculos usando mecánica newtoniana. Los efectos de gravedad fuerte, descritos por la teoría de la Relatividad General, deben tenerse en cuenta sólo en la región  $r < 6\mu$ , como se mostrará en las próximas secciones.

El transporte de momento angular en el disco resulta en la generación de calor:

$$Q^+ = -\frac{1}{2} W_{r\phi} r \frac{dW}{dr}, \quad (5.43)$$

donde  $Q^+$  es el calor producido por unidad de superficie de disco por unidad de tiempo en cada lado, y  $W_{r\phi}$  es la componente del esfuerzo viscoso en el disco.

El conjunto completo de ecuaciones que determina la acreción del disco es:

1.  $\omega = \omega_K = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$  (ley de Kepler).
2.  $\dot{M} = -2\pi \sum v_r r$  (ecuación de continuidad).
3.  $W_{r\phi} = -\frac{\dot{M}}{2\pi} \omega_K \left[ 1 - \left( \sqrt{\frac{r_d}{r}} \right) \right] + W_{r\phi}(\text{in})$  (variación del momento angular).
4.  $P = \frac{\sum \omega^2 H}{6}$  (equilibrio hidrostático).
5.  $W_{r\phi} = \alpha PH$  (tensor de viscosidad).
6.  $Q^+ = -\frac{1}{2} W_{r\phi} r \frac{dW}{dr}$  (emisión de energía).
7.  $Q^- = \sigma_{\text{SB}} T^4$  (pérdidas por radiación).
8.  $P = \frac{3}{2} \rho R_u (T_e + T_i) + \frac{\epsilon}{3}$  (ecuación de estado, con  $\epsilon$  densidad de energía).
9.  $\sigma[\text{cm}^2] = \sigma_T + \sigma_\phi \approx 6,65 \times 10^{-25} n + \frac{1,8 \times 10^{-25}}{T^{7/2}}$  (sección eficaz de absorción),

donde  $v_r$  es la velocidad radial de la materia en el disco,  $r_d$  el radio del borde interno del disco, y  $W_{r\phi}(\text{in})$  es la componente del tensor de esfuerzo viscoso evaluado en  $r = r_d$ . Para un agujero negro de Schwarzschild, la última órbita estable se encuentra en  $r_d = 6\mu$ , y se puede tomar:

$$W_{r\phi}(\text{in}) = W_{r\phi}(r_d) = W_{r\phi}(6\mu) = 0. \quad (5.44)$$

Se tiene, entonces, un sistema de 9 ecuaciones con 9 funciones de  $r$  como soluciones, tomando  $M$ ,  $\dot{M}$ , y  $\alpha$  como parámetros externos del modelo. Las soluciones fueron encontradas por [Shakura & Sunyaev 1973](#).

La expresión para el flujo de energía de un disco de acreción entorno a un agujero negro de Schwarzschild toma la forma [[Shakura & Sunyaev, 1973](#)]:

$$Q(r) = \frac{3}{8\pi} \dot{M} \frac{GM}{r^3} \left[ 1 - \sqrt{\frac{r_0}{r}} \right], \quad [Q(r)] = \text{erg/cm}^2\text{s}^{-1} \quad (5.45)$$

donde  $r_0 = 6GM/c^2$  es el borde interno del disco. La Ecuación 5.45 como función de la coordenada radial adimensional es:

$$Q(x) = \frac{3}{8\pi} \dot{M} \frac{c^6}{(GM)^2} \frac{1}{x^3} \left[ 1 - \sqrt{\frac{6}{x}} \right], \quad [Q(x)] = \text{erg/cm}^2\text{s}^{-1} \quad (5.46)$$



Si se supone que el disco emite como un cuerpo negro, la temperatura del disco puede determinarse mediante la ley de Stefan-Boltzmann:

$$Q(r) = \sigma T(r)^4, \quad (5.47)$$

donde  $\sigma = 5,67 \times 10^{-5} \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{K}^{-4}$  es la constante de Stefan-Boltzmann. La emisión de energía en forma de radiación térmica puede expresarse en términos de la ley de Stefan-Boltzmann:

$$Q^- = \sigma_{\text{SB}} T^4, \quad (5.48)$$

y de esta última ecuación puede obtenerse la distribución de temperatura a lo largo de la dirección radial del disco:

$$T(r) = \left( \frac{Q(r)}{\sigma_{\text{SB}}} \right)^{1/4}, \quad [T(r)] = \text{K}. \quad (5.49)$$

El espectro total es el resultado de la superposición de cada anillo de temperatura  $T(r)$ :

$$I = 2\pi \int_{R_d}^{R_{\text{out}}} B[T(r)] r dr. \quad (5.50)$$

Aquí,  $B$  es la distribución de Planck:

$$B_\nu(T(r)) = \frac{2h\nu^3}{c^2 (\exp h\nu/kT(r) - 1)}, \quad [I_\nu] = \text{erg cm}^{-2}. \quad (5.51)$$

La luminosidad del disco para un observador cuya línea de la visual forma un ángulo  $i$  respecto a la normal del plano del disco es [Frank et al., 2002]:

$$L(\nu) = \frac{4\pi h \cos i \nu^3}{c^2} \int_{R_d}^{R_{\text{out}}} \frac{r dr}{\exp \frac{h\nu}{kT} - 1}, \quad [L(\nu)] = \text{erg}, \quad (5.52)$$

donde

- $d$  : distancia a la fuente,
- $h$  =  $6,6256 \times 10^{-27} \text{erg s}$  : constante de Planck,
- $i$  : inclinación,
- $R_d$  : borde interno del disco,
- $R_{\text{out}}$  : borde externo del disco,
- $k$  =  $1,3805 \times 10^{-16} \text{erg K}^{-1}$  : constante de Boltzmann.

### 5.3.2 Modelo de disco estándar en Relatividad General

Novikov & Thorne 1973 y Page & Thorne 1974 realizaron un análisis relativista de la estructura de un disco de acreción en torno a un agujero negro. Supusieron que la geometría del espacio-tiempo es estacionaria, axialmente simétrica, asintóticamente plana, y simétrica respecto al plano ecuatorial. Postularon, además, que el plano central del disco coincide con el plano ecuatorial del agujero negro. Esta

hipótesis implica que los coeficientes de la métrica  $g_{tt}$ ,  $g_{t\phi}$ ,  $g_{rr}$ ,  $g_{\theta\theta}$ , y  $g_{\phi\phi}$  dependen solamente de la coordenada radial  $r$ .

El disco se supone en un estado cuasi-estacionario [Novikov & Thorne, 1973]; luego, cualquier cantidad relevante (por ejemplo la densidad o la temperatura del gas) es promediada sobre  $2\pi$ , una distancia radial propia de orden  $2H^1$ , y un intervalo  $\Delta t$ , que es el tiempo que le toma al gas moverse hacia adentro una distancia  $2H$ . En el intervalo  $\Delta t$ , el cambio en la geometría del espacio-tiempo se considera despreciable.

La expresión para el flujo de radiación de un disco de acreción relativista tiene la forma [Novikov & Thorne, 1973; Page & Thorne, 1974]:

$$Q(r) = -\frac{\dot{M}_0}{4\pi\sqrt{-g}} \frac{\Omega_{,r}}{(\tilde{E} - \Omega\tilde{L})^2} \int_{r_{\text{isco}}}^r (\tilde{E} - \Omega\tilde{L}) \tilde{L}_{,r} dr, \quad (5.53)$$

donde  $\dot{M}_0$  denota la tasa de acreción de masa,  $\Omega$  la velocidad angular, y  $\tilde{E}$  y  $\tilde{L}$  representan la energía específica y el momento angular, respectivamente. El límite inferior de la integral  $r_{\text{isco}}$  corresponde a la localización de la última órbita circular estable.

La velocidad angular  $\Omega$ , la energía específica  $\tilde{E}$ , y el momento angular específico  $\tilde{L}$  de partículas moviéndose en órbitas circulares vienen dados por [Harko et al., 2009]:

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{-g_{t\phi,r} + \sqrt{(-g_{t\phi,r})^2 - g_{tt,r}g_{\phi\phi,r}}}{g_{\phi\phi,r}}, \quad (5.54)$$

$$\tilde{E} = -\frac{g_{tt} + g_{t\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}, \quad (5.55)$$

$$\tilde{L} = \frac{g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}. \quad (5.56)$$

Las Ecuaciones 5.55, y 5.56 pueden derivarse del potencial efectivo  $V_{\text{eff}}(r)$  escrito en términos de los coeficientes de la métrica y resolviendo para  $\tilde{E}$  y  $\tilde{L}$  las ecuaciones  $V_{\text{eff}}(r) = 0$  y  $V_{\text{eff},r}(r) = 0$ . La expresión para la velocidad angular  $\Omega = d\phi/dt$  se obtiene sustituyendo  $\tilde{E}$ , y  $\tilde{L}$  en las ecuaciones de las geodésicas  $dt/d\tau$  y  $d\phi/d\tau$  [Harko et al., 2009].

En las próximas subsecciones calculamos el flujo de radiación, temperatura y luminosidad de un disco de acreción entorno a un agujero negro de Schwarzschild y Kerr en Relatividad General, y gravedad  $f(R)$  con escalar de Ricci constante. Tomamos los siguientes valores para los parámetros relevantes del modelo:  $M = 14,8M_{\odot}$ ,  $\dot{M} = 0,472 \times 10^{19} \text{ g s}^{-1}$ , y  $a = 0,99$ , que son las mejores estimaciones disponibles del agujero negro galáctico Cygnus-X1 [Orosz et al., 2011; Gou et al., 2011].

<sup>1</sup> Aquí  $H$  representa la altura-mitad del disco ( $|z| \leq H \ll r$ ).

### 5.3.2.1 Discos de acreción relativistas en torno a agujeros negros de Schwarzschild y Kerr

Para obtener una expresión del flujo de radiación y temperatura del disco para un agujero negro de Schwarzschild, calculamos la velocidad angular  $\Omega$ , la energía específica  $\tilde{E}$  y momento angular  $\tilde{L}$  de las partículas en el disco, usando la métrica [Schwarzschild, 1916b]:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (5.57)$$

De las Ecs. 5.54, 5.55, y 5.56:

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}, \quad (5.58)$$

$$\tilde{E} = c \frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{3GM}{c^2 r}\right)}}, \quad (5.59)$$

$$\tilde{L} = \frac{\sqrt{GM} \sqrt{r}}{c \sqrt{\left(1 - \frac{3GM}{c^2 r}\right)}}. \quad (5.60)$$

Reemplazando estas ecuaciones en la Ec. 5.53, obtenemos:

$$Q(x) = \frac{3\dot{M}_0 c^6}{8\pi x^{7/2}} \frac{1}{(GM)^2} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{-1} \left[ \sqrt{x} + \sqrt{3} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{x}{3}} \right]_{x_{\text{isco}}}^x, \quad (5.61)$$

donde  $x_{\text{isco}} = 6\mu$  es la coordenada radial de la última órbita circular estable en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

A partir de la ley de Stefan-Boltzmann,

$$T(r) = z \left( \frac{Q(r)}{\sigma_{\text{SB}}} \right)^{1/4}, \quad (5.62)$$

(donde  $z$  denota la corrección por corrimiento al rojo), la temperatura del disco puede derivarse como función de la coordenada radial  $r$ .

En las Figs. 56 y 57 graficamos el flujo de radiación y la temperatura en función de la coordenada radial para los modelos de disco de acreción Kepleriano y relativista. Observamos que los efectos relativistas producen un decrecimiento en el pico del flujo de energía en un factor  $\approx 2$ , y que la distribución de temperatura también se ve disminuida.

La métrica del espacio-tiempo de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist para  $\theta = \pi/2$  es:

$$ds^2 = -\frac{c^2}{r^2} (\Delta_r - a^2) dt^2 + \frac{r^2}{\Delta_r} dr^2 - \frac{2ac}{r^2} (r^2 + a^2 - \Delta_r) dt d\phi + \frac{d\phi^2}{r^2} \left[ (r^2 + a^2)^2 - \Delta_r a^2 \right], \quad (5.63)$$

donde:

$$\Delta_r \equiv (r^2 + a^2) - \frac{2GM r}{c^2}. \quad (5.64)$$

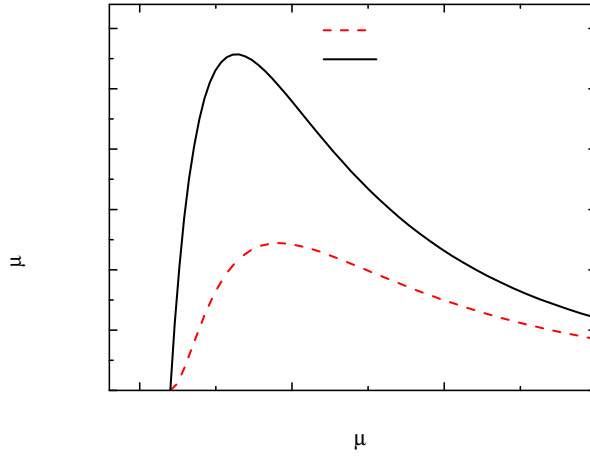


Figura 56: Flujo de radiación en función de la coordenada radial para un disco de acreción entorno a un agujero negro de Schwarzschild en los modelos de Shakura-Sunyaev (SS) y Page-Thorne (PT), respectivamente.

La expresión para el flujo de radiación toma la forma:

$$Q(r) = -\frac{\dot{M}_0}{4\pi\sqrt{-g}} \frac{\Omega_{,r}}{(\tilde{E} - \Omega\tilde{L})^2} \int_{r_{\text{isco}}}^r (\tilde{E} - \Omega\tilde{L}) \tilde{L}_{,r} dr, \quad (5.65)$$

donde:

$$(\tilde{E} - \Omega\tilde{L}) \tilde{L}_{,r} = -\frac{c}{2} \frac{[(p_1 + p_2) p_3]}{p_4}, \quad (5.66)$$

$$-\frac{\dot{M}_0}{4\pi\sqrt{-g}} \frac{\Omega_{,r}}{(\tilde{E} - \Omega\tilde{L})^2} = \frac{3\dot{M}_0 c^2}{8\pi \mu^2 (p_1 + p_2)^2}, \quad (5.67)$$

y los coeficientes  $p_i$  vienen dados por:

$$p_1 = x^{5/2} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{a}{x^{3/2}}\right) \left(-1 + \frac{a^2}{x^3}\right), \quad (5.68)$$

$$p_2 = \left(-a + x^{3/2}\right) \left(1 + \frac{a^2}{x^2} - 2\frac{a}{x^{3/2}}\right), \quad (5.69)$$

$$p_3 = \left(1 + \frac{a}{x^{3/2}}\right) \left(-1 + \frac{6}{x} - \frac{8a}{x^{3/2}} + \frac{3a^2}{x^2}\right), \quad (5.70)$$

$$p_4 = x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2a}{x^{3/2}}\right)^2 \left(-1 + \frac{a^2}{x^3}\right), \quad (5.71)$$

$$p_5 = \frac{1}{x^{3/2}} \left(x^3 + a - 2ax^{3/2}\right) \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2a}{x^{3/2}}\right). \quad (5.72)$$

Aquí  $x = r/\mu$  es una coordenada radial adimensional, y  $a = a/\mu$  es el momento angular del agujero negro en unidades adimensionales.

En las Figs. 58 y 59 mostramos los gráficos del flujo de radiación y temperatura de un disco de acreción en torno de un agujero negro de

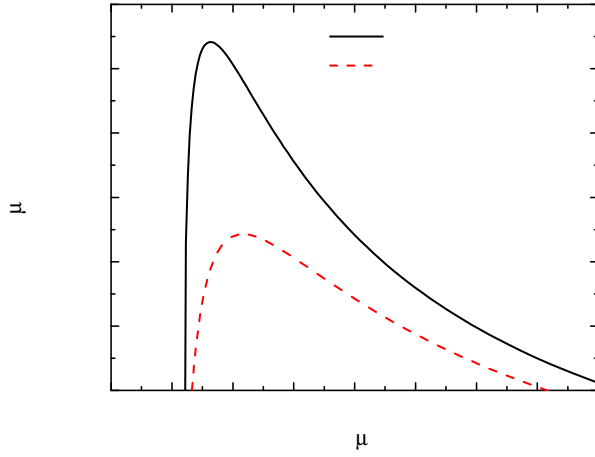


Figura 57: Temperatura en función de la coordenada radial para un disco de acreción entorno a un agujero negro de Schwarzschild en los modelos de Shakura-Sunyaev (SS) y Page-Thorne (PT), respectivamente.

Cuadro 5: Valores de la energía para el pico de emisión, temperatura máxima, y luminosidad de un disco de acreción entorno a un agujero negro de Schwarzschild y Kerr ( $a = 0,99$ ) en los modelos SS y PT, respectivamente.

	Schwarzschild (SS)	Schwarzschild (PT)	Kerr (PT)
$E_{\text{max}}$	1007,59 eV	746,94 eV	1654,9 eV
$T_{\text{max}}$	0,406 keV	0,277 keV	0,539 keV
$L(E_{\text{max}})$	$2,42 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$	$1,22 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$	$2,26 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$

Kerr de momento angular  $a = 0,99$ , cuya última órbita circular estable está en  $r_{\text{isco}} = 1,4545 \mu$ . En la Fig. 60 presentamos la luminosidad de un disco de acreción relativista entorno a agujeros negros tanto de Schwarzschild como de Kerr. Como comparación, se presenta también la luminosidad de Schwarzschild/Shakura-Sunyaev.

Los valores máximos de temperatura, luminosidad, y energía del pico de emisión para todos estos modelos se muestran en la Tabla 5. Como esperábamos, la luminosidad máxima corresponde a un disco de acreción que rota en el mismo sentido que el agujero negro. Dado que la última órbita circular estable se encuentra más cerca del agujero negro que en el espacio-tiempo de Schwarzschild, la radiación térmica es emitida a más altas energías.

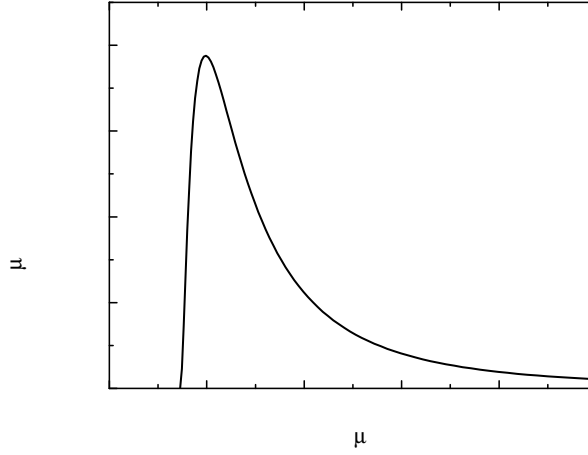


Figura 58: Flujo de radiación en función de la coordenada radial para un disco de acreción entorno a un agujero negro de Kerr de momento angular  $a = 0,99$  en el modelo PT.

### 5.3.3 Discos de acreción en gravedad $f(R)$

#### 5.3.3.1 Agujeros negros de $f(R)$ -Schwarzschild

El flujo de radiación de un disco de acreción entorno a un agujero negro de  $f(R)$ -Schwarzschild tiene la forma:

$$Q = \frac{9\dot{M}_0 c^6}{4\pi (GM)^2} \frac{\left(1 - \frac{3}{x}\right)^{-1}}{x^5 \sqrt{\frac{36}{x^3} - 3c^2 R_0}} \int_{x_{\text{isco}}}^x \left(\tilde{E} - \Omega \tilde{L}\right) \tilde{L}_r dx, \quad (5.73)$$

donde

$$\left(\tilde{E} - \Omega \tilde{L}\right) \tilde{L}_r = -\frac{\sqrt{3}}{12x^3} \frac{(-12x + 72 + 4R_0x^4 - 15R_0x^3)}{\left(1 - \frac{3}{x}\right) \left(\frac{12}{x^3} - R_0\right)^{1/2}}. \quad (5.74)$$

Suponemos para el radio exterior del disco [Dove et al., 1997]:

$$r_{\text{out}} = 11r_{\text{isco}}. \quad (5.75)$$

De acuerdo a la última ecuación, si el radio de la última órbita circular es  $r_{\text{isco}} = 6,3 r_g$ , el radio externo del disco es aproximadamente  $70 r_g$ . Si se consideran valores mayores de  $r_{\text{out}}$ , no hay grandes diferencias en la distribución de temperatura y luminosidad.

Primero, calculamos la temperatura y distribución espectral de luminosidad para  $R_0 < 0$ , usando los valores presentados en la Tabla 2. En las Figs. 61 y 62 mostramos los gráficos de la temperatura como función de la coordenada radial, y de la luminosidad como función de la energía, respectivamente. Nótese que se ha hecho la correspondiente corrección por corrimiento al rojo gravitacional.

La temperatura máxima como también la luminosidad se incrementan para valores pequeños de  $R_0$ . En los cuatro casos presentados, el disco de acreción está más caliente que en el caso de Relatividad General, e.g. en un disco de acreción entorno a un agujero negro de

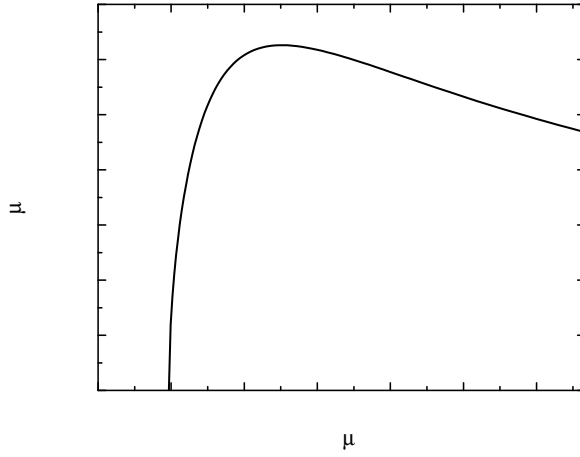


Figura 59: Temperatura en función de la coordenada radial para un disco de acreción entorno a un agujero negro de Kerr de momento angular  $a = 0,99$  en el modelo PT.

$f(R)$ -Schwarzschild para  $R_0 = -1,5$ , la temperatura máxima y luminosidad son más altas en un factor 1.9 y 3.7, respectivamente.

La energía correspondiente al pico de la emisión está corrida a valores más altos, alcanzando 1359.20 eV para los parámetros utilizados en este trabajo.

Mostramos en la Sección 5.2.1.1 que para  $R_0 > 0$ , órbitas circulares estables son posibles entre un radio mínimo y máximo. En la Tabla 1, observamos que sólo para  $R_0 = 10^{-12}$  y  $R_0 = 10^{-6}$  se puede tener órbitas circulares estables, si el radio externo del disco es  $r_{\text{out}} = 70r_g$ . En la Tabla 7 se presentan los valores de la coordenada radial para la última órbita circular estable, para el radio donde se alcanza la máxima temperatura, temperatura máxima, luminosidad, y energía del pico de emisión. Concluimos que para  $R_0 \in (0, 10^{-6}]$  la temperatura y distribución de energía no presentan grandes diferencias respecto a las correspondientes distribuciones en Relatividad General.

### 5.3.3.2 Agujeros negros de $f(R)$ -Kerr

Calculamos ahora el flujo de radiación de un disco de acreción entorno a un agujero negro de  $f(R)$ -Kerr:

$$Q(x) = -\frac{\dot{M}_0}{4\pi\sqrt{-g}} \frac{\Omega_{,x}}{(\tilde{E} - \Omega\tilde{L})^2} \int_{x_{\text{isco}}}^x (\tilde{E} - \Omega\tilde{L}) \tilde{L}_{,x} dx, \quad (5.76)$$

donde

$$\Omega_{,x} = -36\sqrt{3} \frac{c}{\mu^2} \eta, \quad (5.77)$$

$$\eta \equiv \frac{x^{1/2} \left\{ 12x^3 + a \left[ 12a - aR_0x^3 - 4\sqrt{36x^3 - 3x^6R_0} \right] \right\}}{(12x^3 + a^2R_0x^3 - 12a^2)^2 \sqrt{-R_0x^3 + 12}},$$

Cuadro 6: Valores de la coordenada radial de la última órbita estable, coordenada radial correspondiente al máximo de la temperatura, temperatura máxima, luminosidad, y energía del pico de la emisión para un disco de acreción entorno a un agujero negro de  $f(R)$ -Schwarzschild con  $R_0 < 0$ .

$f(R)$ -Schwarzschild	$R_0 = 0$	$R_0 = -10^{-3}$	$R_0 = -10^{-2}$
$r_{\text{isco}}/r_g$	6	5,85	5,26
$r_{T_{\text{max}}}/r_g$	10,05	10,82	11,04
$T_{\text{max}}$	0,277 keV	0,298 keV	0,371 keV
$E_{\text{max}}$	746,94 eV	825,31 eV	1007,59 eV
$L(E_{\text{max}})$	$1,22 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$	$1,97 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$	$2,91 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$
$f(R)$ -Schwarzschild	$R_0 = -10^{-1}$	$R_0 = -1,5$	
$r_{\text{isco}}/r_g$	4,35	3,82	
$r_{T_{\text{max}}}/r_g$	7,58	6,45	
$T_{\text{max}}$	0,468 keV	0,526 keV	
$E_{\text{max}}$	1230,13 eV	1359,20 eV	
$L(E_{\text{max}})$	$3,93 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$	$4,5 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$	

Cuadro 7: Valores de la coordenada radial de la última órbita estable, coordenada radial correspondiente al máximo de la temperatura, temperatura máxima, luminosidad, y energía del pico de la emisión para un disco de acreción entorno a un agujero negro de  $f(R)$ -Schwarzschild black hole con  $R_0 > 0$ .

$f(R)$ -Schwarzschild	$R_0 = 0$	$R_0 = 10^{-6}$
$r_{\text{isco}}/r_g$	6	6,00016
$r_{T_{\text{max}}}/r_g$	10,81	10,82
$T_{\text{max}}$	0,277 keV	0,277 keV
$E_{\text{max}}$	746,94 eV	746,94 eV
$L(E_{\text{max}})$	$1,22 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$	$1,22 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$



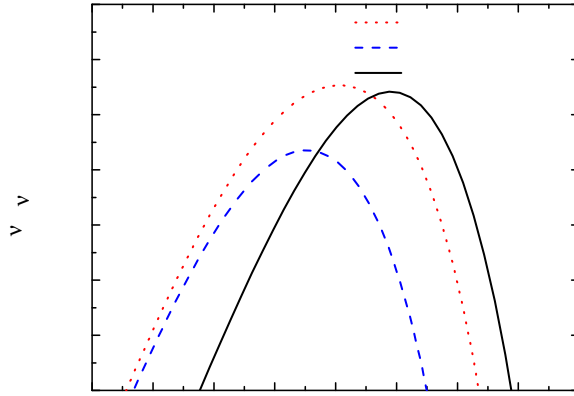


Figura 60: Luminosidad en función de la energía para un disco de acreción relativista en torno a un agujero negro de Schwarzschild y Kerr ( $a = 0,99$ ). Se grafica también la luminosidad en función de la energía para un disco de acreción entorno a un agujero negro de Schwarzschild correspondiente al modelo de Shakura-Sunyaev.

$$\tilde{L} = \frac{2\mu(l_1 + l_2)}{(12 + a^2 R_0) x \sqrt{l_3 + l_4}}, \quad (5.78)$$

$$\tilde{L}_{,x} = -\frac{4x [12x^3 + a^2 (-12 + R_0 x^3)] (l_5 + l_6 + l_7 + l_8 + l_9)}{(12 + a^2 R_0) \sqrt{12x^3 - R_0 x^6} (l_{10} + l_{11})^{3/2}}, \quad (5.79)$$

$$(\tilde{E} - \Omega \tilde{L}) = \frac{12c \sqrt{l_3 + l_4}}{(12 + a^2 R_0) [12x^3 + a^2 (-12 + x^3 R_0)]}, \quad (5.80)$$

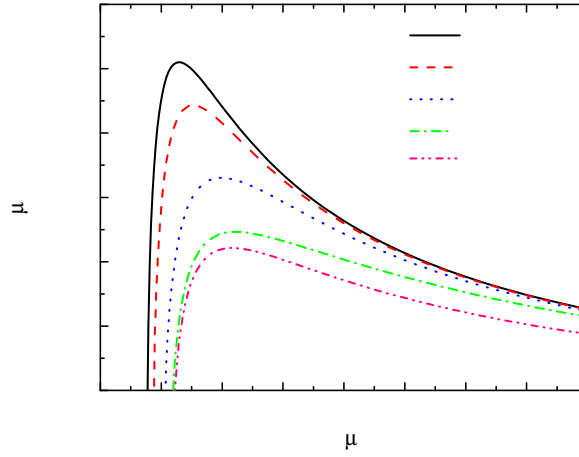


Figura 61: Temperatura en función de la coordenada radial para algunos valores de  $R_0 < 0$ , para un agujero negro de  $f(R)$ -Schwarzschild.

y

$$\begin{aligned}
 l_1 &= -72a^3x - 216ax^3 + 12x^3\sqrt{36x^3 - 3x^6R_0}, \\
 l_2 &= a^2\sqrt{36x^3 - 3x^6R_0} [a^2xR_0 + 24 + x(12 + x^2R_0)], \\
 l_3 &= -432a^2x^2 + x^6(12 + a^2R_0)^2 + 48a^3\sqrt{36x^3 - 3x^6R_0}, \\
 l_4 &= 144ax^2\sqrt{36x^3 - 3x^6R_0} \\
 &\quad - 12x^3 [36x^2 + a^4R_0 + a^2(36 - 3x^2R_0)], \\
 l_5 &= [108ax^2(-24 - 12x + 5R_0x^3)]\sqrt{12x^3 - R_0x^6}, \\
 l_6 &= 36a^3(-48 - 36x + 7R_0x^3)\sqrt{12x^3 - R_0x^6}, \\
 l_7 &= \sqrt{3}a^4x(-12 + R_0x^3)[-108 + R_0x^2(-3 + R_0x^3)], \\
 l_8 &= 36\sqrt{3}x^5\{72 + x[-12 + R_0x^2(-15 + 4x)]\}, \\
 l_9 &= 3\sqrt{3}a^2x^2\{864 + xl_{9a}\}, \\
 l_{9a} &= [2160 + xl_{9a1}], \\
 l_{9a1} &= (432 + R_0^2x^4(15 + 8x) - 12R_0x(21 + 26x)), \\
 l_{10} &= 144(-3 + x)x^5 + a^4R_0x^3(-12 + R_0x^3) \\
 &\quad + 48a^3\sqrt{36x^3 - 3R_0x^6}, \\
 l_{11} &= 144ax^2\sqrt{36x^3 - 3R_0x^6} + 12a^2x^2l_{11a}, \\
 l_{11a} &= -36 + x[-36 + R_0x^2(3 + 2x)].
 \end{aligned}$$

Si consideramos que el radio interno del disco es  $1,4545r_g$ , de acuerdo a la Ec. 5.75,  $r_{out} \approx 16r_g$ . De la Ec. 5.76, calculamos en forma numérica la temperatura y luminosidad para los valores que se muestran en la Tabla 3, teniendo en cuenta las correcciones por corrimiento al rojo. Los resultados pueden apreciarse en las Figs. 63, 64, y la Tabla 8. La temperatura del disco aumenta para valores decrecientes de  $R_0$ . El cociente de la temperatura máxima para los casos de Relatividad General y gravedad  $f(R)$ , con  $R_0 = -1,25 \times 10^{-1}$ , es 1.20. El pico de la emisión se incrementa en un factor 2, y la energía correspondiente se desplaza a valores más altos.

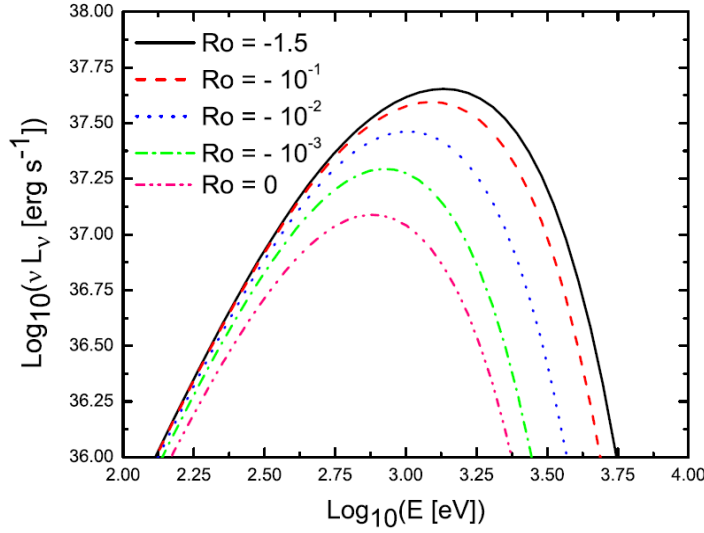


Figura 62: Luminosidad en función de la energía para algunos valores de  $R_0 < 0$ , para un agujero negro de f(R)-Schwarzschild.

Dado que el radio externo del disco es  $16r_g$ , a partir de la Tabla 4 notamos que sólo es posible construir discos de acreción para  $R_0 = 10^{-6}$  y  $R_0 = 10^{-4}$ , hasta  $R_0 = 6,67 \times 10^{-4}$ . Para dichos valores de  $R_0$ , en la Tabla 9 se muestran los valores de la coordenada radial de la última órbita circular estable, temperatura máxima, luminosidad, y la energía del pico de la emisión, y en las Figs. 65 y 66, las distribuciones de temperatura y luminosidad, respectivamente. Al igual que para agujeros negro de f(R)-Schwarzschild con escalar de Ricci positivo, las diferencias respecto al caso de Relatividad General son despreciables.

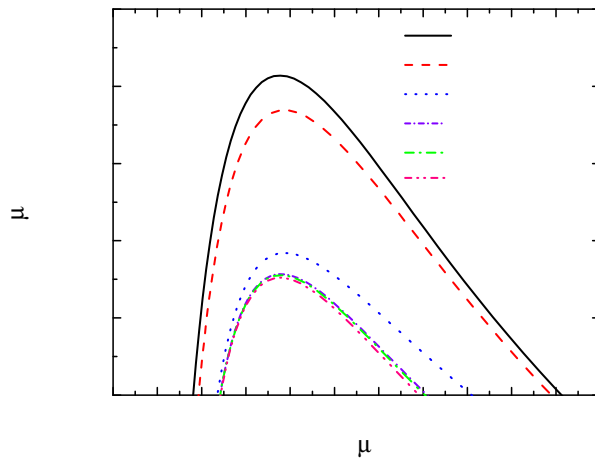


Figura 63: Temperatura en función de la coordenada radial para algunos valores de  $R_0 < 0$ , para un agujero negro de f(R)-Kerr.

En siguiente sección, se examinarán algunas formas específicas para la función  $f$ , y se obtendrán restricciones sobre las mismas a partir de los resultados obtenidos sobre discos de acreción.

Cuadro 8: Valores de la coordenada radial de la última órbita estable, coordenada radial correspondiente al máximo de la temperatura, temperatura máxima, luminosidad, y energía del pico de la emisión para un disco de acreción entorno a un agujero negro de  $f(R)$ -Kerr con  $R_0 < 0$  y  $a = 0,99$ .

$f(R)$ -Kerr	$R_0 = 0$	$R_0 = -10^{-3}$	$R_0 = -1,2 \times 10^{-3}$
$r_{\text{isco}}/r_g$	1,4545	1,4523	1,4518
$r_{T_{\text{max}}}/r_g$	3,79	3,79	3,79
$T_{\text{max}}$	0,539 keV	0,54119 keV	0,54148 keV
$E_{\text{max}}$	1659,4 eV	1659,4 eV	1659,4 eV
$L(E_{\text{max}})$	$2,26 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$	$2,38 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$	$2,41 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$
$f(R)$ -Kerr	$R_0 = -10^{-2}$	$R_0 = -10^{-1}$	$R_0 = -1,25 \times 10^{-1}$
$r_{\text{isco}}/r_g$	1,4325	1,2017	1,0419
$r_{T_{\text{max}}}/r_g$	3,85	3,85	3,78
$T_{\text{max}}$	0,553 keV	0,663 keV	0,652 keV
$E_{\text{max}}$	1833,52 eV	2025,9 eV	2025,9 eV
$L(E_{\text{max}})$	$2,94 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$	$4,23 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$	$4,60 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$

Cuadro 9: Valores de la coordenada radial de la última órbita estable, coordenada radial correspondiente al máximo de la temperatura, temperatura máxima, luminosidad, y energía del pico de la emisión para un disco de acreción entorno a un agujero negro de  $f(R)$ -Kerr con  $R_0 > 0$  y  $a = 0,99$ .

$f(R)$ -Kerr	$R_0 = 0$	$R_0 = 10^{-4}$	$R_0 = 6,67 \times 10^{-4}$
$r_{\text{isco}}/r_g$	1,4545	1,4547	1,4559
$r_{T_{\text{max}}}/r_g$	3,79	3,79	3,79
$T_{\text{max}}$	0,53942 keV	0,53927 keV	0,53843 keV
$E_{\text{max}}$	1659,4 eV	1659,4 eV	1659,4 eV
$L(E_{\text{max}})$	$2,26 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$	$2,25 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$	$2,09 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$

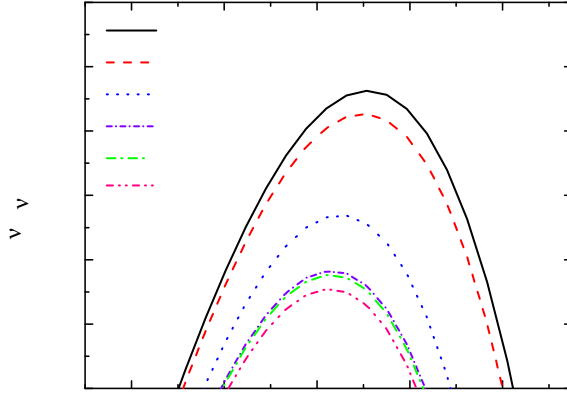


Figura 64: Luminosidad en función de la energía para algunos valores de  $R_0 < 0$ , para un agujero negro de  $f(R)$ -Kerr.

#### 5.4 LÍMITES PARA PRESCRIPCIONES ESPECÍFICAS EN $f(r)$

Como se discutió en la Secciones 5.2.1.1 y 5.2.2.1, la existencia de discos de acreción de Page-Thorne entorno a agujeros negros en teorías  $f(R)$  restringe los valores de  $R_0$ :

- espacio-tiempo de  $f(R)$ -Schwarzschild:

$$R_0 \in (-\infty; 10^{-6}], \quad (5.81)$$

- espacio-tiempo de  $f(R)$ -Kerr:

$$R_0 \in [-1,2 \times 10^{-3}; 6,67 \times 10^{-4}]. \quad (5.82)$$

Como mostraremos en la Sección 5.5, observaciones actuales de Cygnus X-1 descartan discos de acreción entorno de agujeros negros de  $f(R)$ -Schwarzschild, dado que la máxima temperatura obtenida en dichos modelos es inferior a la que se infiere mediante observaciones [Gou et al., 2011]. Luego, sólo consideraremos los valores de  $R_0$  dados por la expresión 5.82.

Se mostrará en esta sección cómo estos valores llevan a límites en los parámetros de teorías  $f(R)$  particulares, mediante la ecuación:

$$R_0 = \frac{2f(R_0)}{f'(R_0) - 1}. \quad (5.83)$$

Se imponen, además, las siguientes condiciones de viabilidad, que debe satisfacer cualquier  $f(R)$  [Cembranos et al., 2011]:

$$-1 < f'(R_0) < 0, \quad (5.84)$$

$$f''(R_0) > 0. \quad (5.85)$$

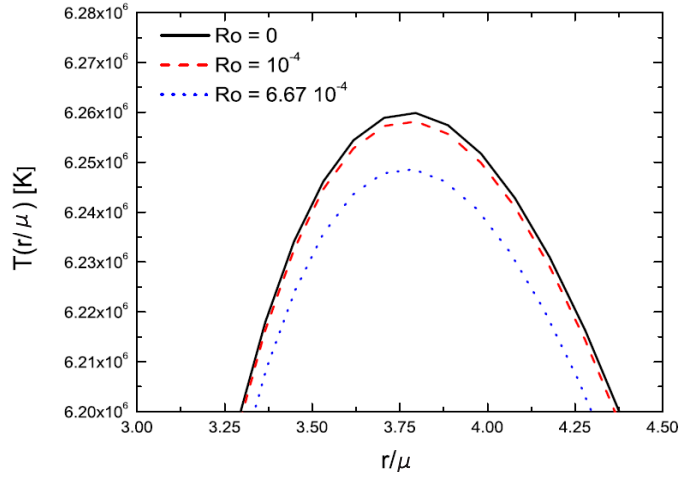


Figura 65: Temperatura en función de la coordenada radial para algunos valores de  $R_0 > 0$ , para un agujero negro de  $f(R)$ -Kerr.

5.4.1  $f(R) = \alpha R^\beta$

Los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ , y el escalar de Ricci están relacionados por la Ec. 5.83 de la forma:

$$R_0 = \left[ \frac{1}{\alpha (\beta - 2)} \right]^{\frac{1}{\beta - 1}}. \tag{5.86}$$

Si se introduce el parámetro adimensional  $\alpha' = R_g^{\beta - 1} \alpha$  con  $R_g \equiv \mu^{-2}$ , esta ecuación puede reescribirse como

$$R_0 = \left[ \frac{1}{\alpha' (\beta - 2)} \right]^{\frac{1}{\beta - 1}}. \tag{5.87}$$

Nótese que la condición  $\beta > 0$  garantiza el límite a Relatividad General para valores pequeños del escalar de Ricci  $R$ .

Consideramos primero el caso de escalar de Ricci positivo:

**Caso I**

$$\alpha' > 0 \wedge \beta > 2, \tag{5.88}$$

o

$$\alpha' < 0 \wedge \beta < 2, \tag{5.89}$$

**Caso II**

$$\alpha' < 0 \wedge \beta > 2, \tag{5.90}$$

o

$$\alpha' > 0 \wedge \beta < 2, \tag{5.91}$$

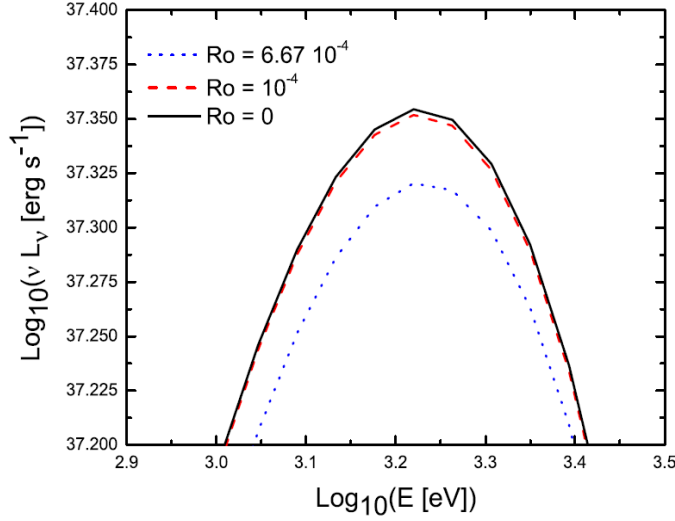


Figura 66: Luminosidad en función de la energía para algunos valores de  $R_0 > 0$ , para un agujero negro de  $f(R)$ -Kerr.

y  $1/(\beta - 1)$  un número entero, esto es:

$$\beta = 1 + \frac{1}{2n}, \quad (5.92)$$

con  $n \in \mathbb{Z}$ . Si se despeja  $\alpha'$  de la Ec. 5.87, se obtiene la función:

$$\alpha'(\beta) = \frac{1}{R_0^{\beta-1}} \left( \frac{1}{\beta-2} \right). \quad (5.93)$$

Mostramos en la Fig. 67 el gráfico de  $\alpha'$  como función de  $\beta$  (con  $\beta > 0$ ) para valores fijos del escalar de Ricci.

Observamos que para  $\beta \in (0, 2)$ ,  $\alpha' \in (-\infty, 0)$ . Para  $\beta = 2$ , la Ec. 5.93 no está definida, mientras que para  $\beta > 2$ ,  $\alpha'$  toma valores positivos grandes. Dado que  $\alpha$  debe ser pequeño para recuperar la teoría de la Relatividad General para valores pequeños del escalar de Ricci, el caso  $\alpha' > 0$ ,  $\beta > 2$  se descarta. Obtenemos, entonces, las siguientes restricciones en los parámetros:

$$\alpha' \in (-\infty; 0) \wedge \beta \in (0; 2) \wedge R_0 \in (0; 6,67 \times 10^{-4}].$$

Para valores negativos del escalar de Ricci, de la Ec. 5.93 se requiere que:

$$1 - \beta = 2m, \Rightarrow \beta_{\text{odd}} = 1 - 2m, \quad (5.94)$$

o

$$1 - \beta = 2m + 1, \Rightarrow \beta_{\text{even}} = -2m, \quad (5.95)$$

donde  $m \in \mathbb{Z}_0^-$ , para tener  $\beta > 0$ . Si  $m = 0$ ,  $\beta = 1$  y  $\alpha' = \alpha = -1$ . Estos valores de los parámetros llevan a  $f(R) = -R$ , la cual no se reduce a Relatividad General. Para  $\beta = 2$ , la Ec. 5.93 no está definida. Si  $\beta \geq 3$  y es un número impar,  $\alpha'$  toma valores positivos grandes, mientras que si  $\beta \geq 4$  y es un número par,  $\alpha'$  es negativo y grande. Dado que

$\alpha'$  tiene que ser pequeño para recuperar la teoría de la Relatividad General para valores pequeños del escalar de Ricci, concluimos que valores negativos de  $R_0$  no están permitidos en esta teoría.

Nos restringimos ahora a valores de  $\alpha$  y  $\beta$  de acuerdo a las Ecs. 5.84 y 5.85.

Las derivadas primera y segunda para la función  $f$  son:

$$f'(R) = \alpha\beta R^{\beta-1}, \quad (5.96)$$

$$f''(R) = \alpha\beta(\beta-1)R^{\beta-2}. \quad (5.97)$$

Las restricciones sobre  $\alpha$  y  $\beta$  que satisfacen la Ec. 5.85 son:

$$\alpha > 0 \wedge \beta > 1, \quad (5.98)$$

o

$$\alpha < 0 \wedge \beta \in (0, 1). \quad (5.99)$$

La condición dada por la Ec. 5.98 se descarta ya que no satisface la Ec. 5.93. La condición de viabilidad, dada por la Ec. 5.84, toma la forma:

$$-1 < \alpha\beta R_0^{\beta-1} < 0. \quad (5.100)$$

Se pueden restringir los valores de  $\alpha$  utilizando la última desigualdad como:

$$0 < \beta < 1.$$

Multiplicando por  $R_0^{\beta-1}$   $\alpha$ , la última restricción toma la forma:

$$0 > \alpha\beta R_0^{\beta-2} > \alpha R_0^{\beta-1}. \quad (5.101)$$

Para satisfacer la Ec. 5.100:

$$\alpha R_0^{\beta-1} > -1 \Rightarrow \alpha > \frac{-1}{R_0^{\beta-1}}.$$

Si  $\beta = 0$ ,  $\alpha > -R_0$ , y para  $\beta = 1$ ,  $\alpha > -1$ . El conjunto de valores para  $\alpha$  es  $\alpha \in (-R_0, 0)$ .

Concluimos que los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que están permitidos por nuestro modelo como también por las dos condiciones de viabilidad son:

$$\alpha \in (-R_0; 0) \wedge \beta \in (0; 1) \wedge R_0 \in (0; 6,67 \times 10^{-4}].$$

$$5.4.2 \quad f(R) = R \epsilon \ln \frac{R}{\alpha}$$

En este caso, los parámetros  $\epsilon$  y  $\alpha$ , y el escalar de Ricci están relacionados por la Ec. 5.83 en la forma simple:

$$\alpha = R_0 \exp\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right). \quad (5.102)$$

Si se divide por  $R_g$ , obtenemos  $\alpha' = R_0 \exp\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)$ . Para  $R_0 > 0$ , la función  $\alpha'(\epsilon)$  es siempre positiva, siendo negativa para todo valor de  $\epsilon$  si  $R_0 < 0$ . Los límites sobre  $\epsilon$  y  $\alpha$  que se derivan de la Ec. 5.83 son:



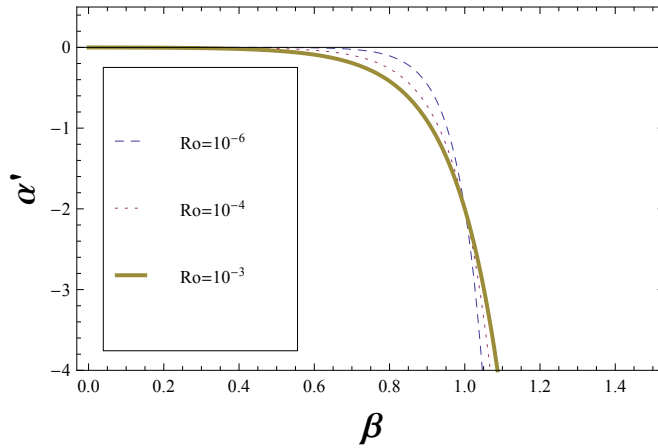


Figura 67: Gráfico de  $\alpha'$  en función de  $\beta$  para distintos valores de  $R_0$ .

- $R_0 \in (0; 6,67 \times 10^{-4}]$

$$\epsilon \in (-\infty; 0) \wedge \alpha' \in (0; e^{-1} R_0),$$

o

$$\epsilon \in (0; \infty) \wedge \alpha' \in (e^{-1} R_0; \infty),$$

- $R_0 \in [-1,2 \times 10^{-3}; 0)$

$$\epsilon \in (-\infty; 0) \wedge \alpha' \in (-e^{-1} |R_0|; 0),$$

o

$$\epsilon \in (0; \infty) \wedge \alpha' \in (-\infty; -e^{-1} |R_0|),$$

La derivada primera y segunda de la función  $f$  toma la forma:

$$f'(R) = \epsilon \left( 1 + \ln \frac{R}{\alpha'} \right), \tag{5.103}$$

$$f''(R) = \frac{\epsilon}{R}. \tag{5.104}$$

La condición  $f''(R_0) > 0$  se satisface si  $\epsilon > 0 \wedge R_0 > 0$ , o  $\epsilon < 0 \wedge R_0 < 0$ .

La Ec. 5.84 en forma adimensional es:

$$-1 < \epsilon \left( 1 + \ln \frac{R_0}{\alpha'} \right) < 0. \tag{5.105}$$

Esta ecuación, junto con 5.104, resultan en:

- Para  $\epsilon > 0$  y  $R_0 > 0$ ,  $\alpha' \in (e R_0; R_0 \exp \{ (\frac{1}{\epsilon} + 1) \})$ .
- Para  $\epsilon < 0$  y  $R_0 < 0$ ,  $\alpha' \in (-e |R_0|; -|R_0| \exp \{ 1 - \frac{1}{|\epsilon|} \})$ .

En resumen, las restricciones que se tienen son:

$$\begin{aligned} R_0 &\in (0; 6,67 \times 10^{-4}], \quad \epsilon > 0, \quad \alpha' \in (e^{-1} R_0; \infty), \quad (5.106) \\ \alpha' &\in \left( e R_0; R_0 \exp \left\{ \left( \frac{1}{\epsilon} + 1 \right) \right\} \right), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} R_0 &\in [-1,2 \times 10^{-3}; 0), \quad \epsilon < 0, \quad \alpha' \in (-e^{-1} |R_0|; 0), \quad (5.107) \\ \alpha' &\in \left( -e |R_0|; -|R_0| \exp \left\{ 1 - \frac{1}{|\epsilon|} \right\} \right). \end{aligned}$$

El primer grupo de restricciones se satisface para  $\epsilon > 0$ , mientras que el segundo grupo sólo para  $\epsilon \in (-1/2, 0)$ . Concluimos que para la función  $f(R)$  que se analiza, los valores

$$R_0 \in (0; 6,67 \times 10^{-4}], \quad \epsilon > 0, \quad \alpha' \in (e R_0; \infty), \quad (5.108)$$

y,

$$R_0 \in [-1,2 \times 10^{-3}; 0), \quad \epsilon \in (-1/2, 0), \quad \alpha' \in (-e^{-1} |R_0|; 0) \quad (5.109)$$

están permitidos.

## 5.5 DISCUSIÓN

Los resultados presentados en la Sección 5.3 pueden compararse con datos observacionales actuales para así derivar algunas restricciones sobre una dada teoría  $f(R)$ . Para ilustrar esta afirmación, consideremos a Cygnus X-1, candidato a agujero negro perteneciente a un sistema binario de alta masa en la Galaxia. Recientemente, una serie de trabajos sobre dicha fuente [Reid et al., 2011; Orosz et al., 2011; Gou et al., 2011] ha provisto de medidas de alta precisión, hasta el momento sin precedentes, de la distancia, masa del agujero negro, parámetro de espín  $a$ , y la inclinación orbital de la fuente. Esto ha abierto la posibilidad de restringir teorías modificadas de la gravedad con observaciones locales precisas de objetos astrofísicos en la Galaxia.

Cygnus X-1 fue descubierta en rayos X por Bowyer et al. 1965. Estudios dinámicos preliminares del objeto compacto sugerían la presencia de un agujero negro (e.g. [Bolton, 1972]). La distancia a Cygnus X-1 se estima actualmente en  $1,86_{-0,11}^{+0,12}$  kpc [Reid et al., 2011]. Este valor fue determinado mediante el método de paralaje trigonométrica utilizando el *Very Long Baseline Array* (VLBA). A esta distancia, la masa del agujero negro es  $M = 14,8 M_{\odot}$  [Orosz et al., 2011]. Este es el valor que tomamos en todos los cálculos presentados en las secciones anteriores.

La fuente ha sido observada tanto en *low-hard state*, dominado por la emisión de la corona (e.g. [Dove et al., 1997; Gierlinski et al., 1997; Poutanen, 1998; Romero et al., 2014]), y en *high-soft state*, dominado por el disco de acreción, que en este estado se extiende hasta la última órbita estable. En el *low-hard state*, donde la fuente reside la mayor parte del tiempo, un jet estacionario y no-térmico puede observarse [Stirling et al., 2001]. El jet está ausente en el estado térmico. Es en este

último estado, pues, cuando un espectro en rayos X más claro puede obtenerse.

La tasa de acreción y el parámetro de espín del agujero negro son  $\sim 0,472 \times 10^{19} \text{ g s}^{-1}$  y 0.99, respectivamente, de acuerdo a las estimaciones de un modelo de Kerr más disco que emite como cuerpo negro [Gou et al., 2011]. Estos modelos en Relatividad General dan lugar a una distribución espectral de energía con un máximo en  $E_{\text{máx}} \sim 1,6 \text{ keV}$ . Contrariamente, modelos de  $f(R)$  con curvatura negativa corresponden a una temperatura máxima baja, mucho más baja de lo que se espera para el caso (no realista) de un agujero negro de Schwarzschild. Luego, podemos suponer que un ajuste de modelos de  $f(R)$ -Kerr a los datos preferirían también de valores altos para la temperatura, i.e., aquellos con curvatura no-negativa. Modelos con tasas de acreción y espín cercanos a los obtenidos por Gou et al. 2011 y curvatura pequeña positiva parecen viables, lo que es consistente con un comportamiento asintótico correspondiente a un espacio-tiempo de de Sitter dotado de un valor para la constante cosmológica pequeño y positivo.

Estudios adicionales en rayos X con el satélite *Chandra* podrían imponer límites más restrictivos, particularmente si se disponen de límites para el valor de la tasa de acreción obtenidos en forma independiente.

## 5.6 CONCLUSIONES

Hemos calculado y analizado órbitas circulares estables y discos de acreción relativistas en torno a agujeros negros de Schwarzschild y Kerr en gravedad  $f(R)$  con escalar de Ricci constante en régimen de campo fuerte. Hemos encontrado que discos estables sólo pueden formarse para curvaturas en los rangos  $(-\infty, 10^{-6}]$  y  $[-1,2 \times 10^{-3}, 6,67 \times 10^{-4}]$  para agujeros negros de Schwarzschild y Kerr, respectivamente. Observaciones actuales de Cygnus X-1 en el *soft state* descartan valores para el escalar de Ricci menores a  $-1,2 \times 10^{-3}$ . Restricciones adicionales pueden imponerse para prescripciones específicas de gravedad  $f(R)$ ; en particular, las prescripciones logarítmicas están fuertemente acotadas por datos observacionales. Determinaciones futuras de alta precisión de los parámetros de otros candidatos a agujeros negros pueden imponer límites más restrictivos a teorías alternativas de la gravitación.



## SOBRE SISTEMAS BINARIOS DE AGUJEROS NEGROS

---

### 6.1 INTRODUCCIÓN

Los sistemas binarios de agujeros negros supermasivos son probablemente el resultado de la fusión de galaxias. La formación y evolución de dichos sistemas ha sido discutida extensamente en la literatura (ver por ejemplo la revisión de [Dotti et al. 2012](#), como también de [Colpi & Dotti 2009](#), y [Komossa 2006](#)). Actualmente, la identificación de sistemas binarios de agujeros negros supermasivos o Supermassive Black Hole Binary ([SMBHB](#)) es de gran interés, ya que se espera que estos sistemas sean potentes fuentes de ondas gravitacionales a bajas y muy bajas frecuencias, siendo blancos apropiados para interferómetros espaciales y *pulsar timing arrays* [[Sesana, 2013](#)].

Hasta el momento, hay alrededor de 20 [SMBHBs](#) identificados, y numerosos candidatos. Los [SMBHBs](#) conocidos tienen una separación orbital de entre  $\sim 7$  pc hasta 10 kpc. Los que poseen separaciones orbitales más grandes pueden resolverse directamente en rayos X como dos núcleos galácticos activos en la misma galaxia [[Komossa et al., 2003](#); [Fabbiano et al., 2011](#)]. Otro tipo de evidencia para la identificación de [SMBHBs](#) incluye observaciones de líneas dobles anchas o angostas en cuasares [[Zhou et al., 2004](#); [Boroson & Lauer, 2009](#); [Tsalmantza et al., 2011](#); [Woo et al., 2014](#)] y curvas de luz periódicas en el óptico, siendo el objeto BL Lac OJ 287 el candidato más fuerte encontrado por este método [[Sillanpaa et al., 1988, 1996](#); [Valtaoja et al., 2000](#)]. Distorsiones helicoidales, curvatura y precesión de jets han sido también asociados con la presencia de [SMBHBs](#) [[Begelman et al., 1980](#); [Kaastra & Roos, 1992](#); [Roos et al., 1993](#); [Villata & Raiteri, 1999](#); [Abraham & Romero, 1999](#); [Katz, 1997](#); [Romero et al., 2000, 2003](#); [Stirling et al., 2003](#); [Lobanov & Roland, 2005](#); [Liu & Chen, 2007](#); [Caproni et al., 2013](#); [Kun et al., 2014](#)]. Nótese, sin embargo, que la binaridad no es la única explicación posible para dichas características, siendo varias de las identificaciones no concluyentes. La otra posible explicación rival es la precesión del jet por el efecto *Lense-Thirring*. La búsqueda de características específicas en el espectro electromagnético de [SMBHB](#), particularmente en la fase previa a la coalescencia, ha sido abordada en varios estudios. Estos trabajos se focalizan en la predicción de la emisión de líneas o de la radiación del continuo por el flujo acretado (e.g. [Bogdanović et al. 2008](#); [Bode et al. 2010](#); [Shen & Loeb 2010](#); [Zanotti et al. 2010](#); [Tanaka et al. 2012](#)).

Los Núcleos de Galaxias Activos o Active Galactic Nucleus ([AGN](#)) que albergan sistemas binarios de agujeros negros supermasivos en sus núcleos pueden estar en una configuración tal que el plano orbital sea coplanar con el disco circumbinario. La evolución acoplada del sistema binario y el disco ha sido estudiada tanto en forma teórica

como numérica, como por ejemplo Gould & Rix 2000, Dotti et al. 2007, Hayasaki et al. 2007, Kocsis et al. 2012b, Roedig et al. 2012, D’Orazio et al. 2013, Rafikov 2013, y Hayasaki et al. 2013. Simulaciones recientes en Relatividad General magnetohidrodinámicas de discos de acreción circumbinarios magnetizados han sido realizadas por Gold et al. 2014a, y Gold et al. 2014b. El comportamiento de un sistema binario de agujeros negros supermasivos se asemeja al de un sistema proto-planetario. En particular, los torques de marea ejercidos sobre el gas por el objeto menos masivo (el *objeto secundario*) pueden abrir un *gap* (i.e. una región de densidad muy baja) en el disco (e.g. Papaloizou & Lin 1984; Lin & Papaloizou 1986a,b; Syer et al. 1991; Syer & Clarke 1995; Takeuchi et al. 1996).

Si el objeto secundario es mucho menos masivo que el objeto primario, el disco está fuertemente perturbado y la migración del objeto secundario hacia adentro es rápida en relación a la vida media típica del disco. Esta migración se denomina de Tipo I. Cuando el cociente de masas es del orden de la unidad los torques de marea cerca del objeto secundario son lo suficientemente fuertes como para que el disco se trunque: un anillo externo de material permanece pero el flujo de gas a través de la órbita del objeto secundario es insignificante. Para valores del cociente de masas intermedio, el disco interno no es evacuado pero un hueco anular se desarrolla en la trayectoria orbital del objeto secundario – esta es la migración de Tipo II que prosigue en escalas temporales grandes.<sup>1</sup> El objeto secundario sigue el movimiento del gas permaneciendo siempre dentro del hueco.

Simulaciones numéricas recientes de Kocsis et al. 2012b,a muestran que, para ciertos valores del cociente de masas y separación orbital, existe otro tipo de régimen de migración caracterizado por una tasa de migración intermedia entre la Tipo I y Tipo II. En este régimen, denominado “Tipo 1.5 *overflowing*”, el gas se filtra a través del hueco anular, siendo la densidad de masa del disco distinta de cero hasta la última órbita circular estable. Luego, la acreción sobre el objeto primario puede sostener la actividad central y eventualmente alimentar un jet.

En un disco de acreción en el régimen “*overflowing*”, una cantidad considerable de gas se acumula fuera de la órbita del objeto secundario, causando que el disco localmente se engrose y caliente. Estas perturbaciones en la densidad y temperatura se traducen en características en el espectro radiativo del disco que están ausentes en el caso de un disco estándar genérico delgado sin *gap* (e.g. Liu & Shapiro 2010; Kocsis et al. 2012b; Gültekin & Miller 2012).

La emisión a altas energías (i.e. en rayos gamma  $E_\gamma > 1$  MeV) proveniente de núcleos galácticos activos está relacionada con radiación producida en jets relativistas. Uno de los mecanismos más eficientes de emisión no térmica a altas energías de jets es el *scattering* Inverse Compton (IC) de fotones por electrones relativistas. Campos de radiación de bajas energías producidos tanto dentro como fuera del jet

<sup>1</sup> La transición entre los regímenes de migración no sólo dependen del cociente de masas sino también de la separación orbital y propiedades del disco de acreción tales como el valor de la viscosidad.

son blancos adecuados para interacciones IC; estos mismos fotones pueden absorber rayos gamma producidos en el jet. Gran cantidad de fotones blanco son provistos por el disco de acreción. Dado que las características del espectro IC y la opacidad a la propagación de rayos gamma depende de la distribución de energía de los fotones blanco, cualquier característica notoria en el espectro radiativo del disco se espera que tenga una correlación en el espectro a altas energías de los jets.

En este trabajo consideramos un sistema binario de agujeros negros supermasivos en el régimen “*overflowing*” donde el objeto primario lanza un jet relativista. Aplicamos los resultados de las simulaciones de Kocsis et al. 2012b,a para caracterizar la estructura del disco y calcular su espectro modificado. Luego, computamos la distribución espectral de energía o SED no térmica del jet incluyendo el *external IC scattering* de los fotones del disco y corregimos por absorción. Finalmente, evaluamos si la parte de altas energías de la SED presenta alguna característica que pueda revelar la presencia de un agujero negro secundario. Este tipo de estudios, propuestos aquí por primera vez, sirve para identificar posibles emisores de ondas gravitacionales.

## 6.2 DISCO DE ACRECIÓN RELATIVISTA CON UN GAP

Consideramos un sistema binario de agujeros negros supermasivos en estado estacionario. El primario es un agujero negro de Kerr con masa  $M_{\bullet}$  y momento angular  $a$  rodeado por un disco de acreción. La posición del primario corresponde a un radio cilíndrico de valor  $r = 0$ . El agujero negro supermasivo secundario de masa  $m_s$  posee una órbita circular de radio  $r_s$  dentro del disco. Suponemos que el secundario produjo en su camino orbital un gap anular en el disco. Para que esto ocurra, dos condiciones básicas deben satisfacerse:

1. El radio de la esfera de Hill del secundario (su región de influencia gravitacional) debe ser más grande que la altura del disco  $h$ .<sup>2</sup> El radio de Hill se define como

$$r_H \equiv r_s \left( \frac{m_s}{3M_{\bullet}} \right)^{\frac{1}{3}} = r_s \left( \frac{q}{3} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (6.1)$$

donde  $q = m_s/M_{\bullet}$  es el cociente de masas. El secundario puede abrir un gap en el disco si  $r_H \geq h$ , lo que implica de la Ec. 6.1 que

$$q \geq 3 \left( \frac{h}{r_s} \right)^3. \quad (6.2)$$

<sup>2</sup> Suponemos que el cociente entre la altura del disco y su radio,  $h/r$ , es aproximadamente constante.

2. La escala temporal para que se cierre el gap debido a la reacción viscosa del disco es mayor que la escala temporal para que se abra el gap. Si el disco se modela como un disco estándar [Shakura & Sunyaev, 1973], esto implica que [Takeuchi et al., 1996]

$$q \gtrsim \left(\frac{h}{r}\right)^2 \alpha^{1/2}, \quad (6.3)$$

donde  $\alpha$  es el parámetro de viscosidad adimensional.

Para un dado valor de  $M_\bullet$ , nos restringimos a aquellos valores de  $q$  y  $r_s$  de acuerdo a las condiciones encontradas por Kocsis et al. 2012a para que el sistema se establezca en el régimen *overflowing*; en particular, elegimos  $10^{-3} < q < 10^{-1}$  y  $r_s$  en el rango mostrado en la Fig. 3 de Kocsis et al. 2012a. El disco puede dividirse en cinco zonas distintivas como se muestra en la Fig. 68: interior lejana (*inner far*), interior cercana (*near interior*), exterior cercana (*near exterior*), media (*middle*), y exterior lejana (*outer far*). En las regiones lejanas la influencia del secundario es despreciable, es significativa en la zona media, y fuerte en las regiones cercanas. Para caracterizar la estructura del disco de acreción en la región donde las perturbaciones de marea del secundario son importantes, seguimos la prescripción dada por Kocsis et al. 2012b, que son ajustes de los resultados de sus simulaciones numéricas. Kocsis et al. 2012b calculan la temperatura superficial  $T_s$  en términos de la temperatura central  $T_c$  y la densidad superficial del disco  $\Sigma$  (ver la Ec. 15 de Kocsis et al. 2012b) como:

$$T_s = \left(\frac{8}{3\kappa\Sigma}\right)^{1/4} T_c, \quad (6.4)$$

donde  $\kappa = 0,35 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$  es la opacidad que se supone dominada por *electron scattering*. La temperatura central y la densidad superficial están expresadas en términos de:

$$T_c = T_c(\alpha_{-1}, \dot{m}_{-1}, M_7, f_{-2}, q_{-3}, r_{s2}, r_2, r), \quad (6.5)$$

$$\Sigma = \Sigma(\alpha_{-1}, \dot{m}_{-1}, M_7, f_{-2}, q_{-3}, r_{s2}, r_2, r), \quad (6.6)$$



donde:<sup>3</sup>

$$\alpha_{-1} = \frac{\alpha}{0,1}, \quad (6.7)$$

$$\dot{m}_{-1} = \frac{\dot{M}}{0,1\dot{M}_{\text{Edd}}}, \quad (6.8)$$

$$M_7 = \frac{M_{\bullet}}{10^7 M_{\odot}}, \quad (6.9)$$

$$f_2 = \frac{f}{0,01}, \quad (6.10)$$

$$q_{-3} = \frac{q}{10^{-3}}, \quad (6.11)$$

$$r_{s2} = \frac{r_s}{10^2 M_{\bullet}}, \quad (6.12)$$

$$r_2 = \frac{r}{10^2 M_{\bullet}}. \quad (6.13)$$

Aquí,  $\alpha$  es un parámetro libre en la prescripción de [Shakura & Sunyaev 1973](#) para la viscosidad,  $\dot{M}$  es la tasa de acreción de masa,  $\dot{M}_{\text{Edd}}$  es la tasa de acreción de Eddington, y  $f$  es una constante calibrada con simulaciones. En lo que sigue, describimos las características principales de cada una de las zonas perturbadas del disco.

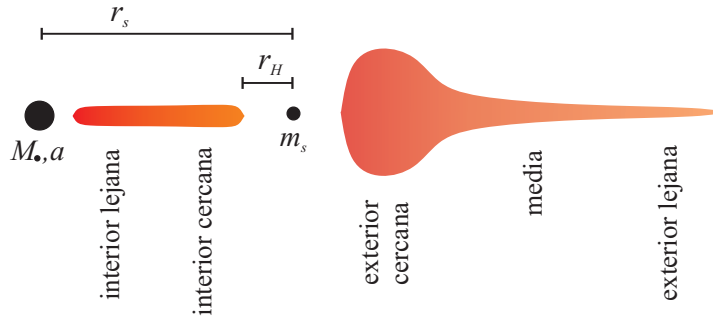


Figura 68: Disco de acreción con un gap. El disco se divide en cinco zonas distintas: las zonas interior y exterior lejanas donde las perturbaciones causadas por el secundario son despreciables, la zona media, y las zonas interior y exterior cercanas donde las perturbaciones del secundario son fuertes.

- Zona interior lejana.** Los efectos del agujero negro supermasivo secundario son despreciables. El disco de acreción, sin embargo, se encuentra bajo la fuerte influencia gravitacional del primario. Para el cálculo del perfil de temperatura en esta zona, supongamos el modelo de disco relativista de [Page & Thorne 1974](#). La expresión para el flujo de radiación a través de la superficie tiene la forma [[Novikov & Thorne, 1973](#); [Page & Thorne, 1974](#)]

$$F(r) = -\frac{\dot{M}}{4\pi\sqrt{-g}} \frac{\Omega_{,r}}{(\tilde{E} - \Omega\tilde{L})^2} \int_{r_{\text{isco}}}^r (\tilde{E} - \Omega\tilde{L}) \tilde{L}_{,r} dr, \quad (6.14)$$

<sup>3</sup> [Kocsis et al. 2012a](#) utilizan unidades geométricas  $G = c = 1$ .

donde  $\dot{M}$  denota la tasa de acreción de materia,  $\Omega$  la velocidad angular, y  $\tilde{E}$  y  $\tilde{L}$  representan la energía y momento angular específico, que pueden calcularse a partir de los coeficientes de la métrica. Suponiendo que el disco radia como un cuerpo negro, la temperatura superficial como función de la coordenada radial puede obtenerse mediante la ley de Stefan-Boltzmann,

$$T_s^{\text{if}}(r) = Z(r) \left( \frac{F(r)}{\sigma_{\text{SB}}} \right)^{1/4}. \quad (6.15)$$

Aquí  $\sigma_{\text{SB}}$  es la constante de Stefan-Boltzmann y  $Z$  es la corrección por corrimiento al rojo,

$$Z(r) = \frac{r^{\frac{3}{4}} \left( r^{\frac{3}{2}} + 2a\sqrt{r_g} - 3r_g\sqrt{r} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left( a\sqrt{r_g} + r^{\frac{3}{2}} \right)}. \quad (6.16)$$

El radio gravitacional del primario es  $\mu = GM_{\bullet}/c^2$ .

- **Zona interior cercana.** La zona interior cercana está dentro de la órbita del secundario. Aquí los efectos de marea del secundario dominan sobre los efectos viscosos. La expresión del perfil de temperatura superficial se calcula a partir de la Ec. 6.4 y la Tabla 2 de [Kocsis et al. 2012b](#)

$$T_s^{\text{ni}}(r) = C_{\text{T}}^{\text{ni}} \frac{8}{3\text{K}} 1,73 \times 10^4 \dot{m}_{-1}^{1/4} M_7^{1/4} r_{\text{s}2}^{-5/16} \times \left( \frac{r}{10^2 M_{\bullet}} \right)^{-7/16} \left| 1 - \frac{r_{\text{s}}}{r} \right|^{1/4}. \quad (6.17)$$

El valor de la constante  $C_{\text{T}}^{\text{ni}}$  se determina igualando las Ecs. 6.15 y 6.17 en el radio de transición  $r_{\text{ni}}$  entre las zonas interior lejana y cercana. Calculamos el valor  $r_{\text{ni}}$  suponiendo que es la distancia radial donde los perfiles de densidad de la zona interior lejana [[Novikov & Thorne, 1973](#); [Page & Thorne, 1974](#)] e interior cercana [[Kocsis et al., 2012b,a](#)] toman el mismo valor.

- **Zona exterior cercana.** La zona exterior cercana está justo por fuera de la órbita del secundario. Como en la zona interior cercana, los efectos de marea son más importantes que los efectos viscosos. De la Ec 6.4 y la Tabla 2 de [Kocsis et al. 2012b](#), la temperatura superficial es<sup>4</sup>

<sup>4</sup> En la región exterior cercana, suponemos el caso de torque no saturado, esto es,  $h(r) < r - r_{\text{s}}$ . En particular, en la expresión aproximada para el torque por unidad de masa en el disco dada por [Kocsis et al. 2012b](#)) en la Ec 5, la función  $\Delta$  tiene la forma  $\Delta = r - r_{\text{s}}$ .

$$T_s^{\text{ne}}(r) = \frac{8}{3\kappa} 1,12 \times 10^4 \alpha_{-1}^{-1/2} f_{-2}^{5/8} M_7^{-1/8} q_{-3}^{5/6} r_{s2}^{19/96} \\ \times \left( \frac{r}{10^2 M_\bullet} \right)^{-77/96} \left( \frac{r-r_s}{r_s} \right)^{-5/8} \zeta_r(r)^{1/2}, \quad (6.18)$$

$$\zeta_r = \frac{2}{5} \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{6}} \left( 1 + \frac{r_H}{r_s} \right)^{-\frac{115}{72}} \left[ 1 - \left( \frac{r_s + r_H}{r} \right)^{\frac{115}{72}} \left( \frac{r_H}{r - r_s} \right)^{\frac{5}{2}} \right], \quad (6.19)$$

Debido a los intensos torques de marea una cantidad significativa de gas se acumula en la zona exterior cercana, siendo entonces el disco más caliente y grueso que un disco de acreción estándar a la misma distancia del primario.

- **Zona media.** Los torques de marea y los efectos del calor son despreciables en comparación a los efectos viscosos. Hay, sin embargo, una cantidad de gas considerable acumulado. El perfil de temperatura viene dado por (ver Ec. 6.4 y la Tabla 2 de [Kocsis et al. 2012b](#))

$$T_s^{\text{m}}(r) = C_T^{\text{m}} \frac{8}{3\kappa} 2,39 \times 10^4 \alpha_{-1}^{-1/2} M_7^{-1/8} f_{-2}^{5/8} r_{s2}^{1/16} \\ \times \left( \frac{r}{10^2 M_\bullet} \right)^{-7/8}. \quad (6.20)$$

Como en la zona interior cercana, el valor de la constante  $C_T^{\text{m}}$  se calcula igualando las Ecs. 6.18 y 6.20 en el radio de transición  $r_{\text{ne}}$  entre las zonas exterior cercana y media. Una expresión para  $r_{\text{ne}}$  se encuentra en [Kocsis et al. 2012a](#).

- **Zona exterior lejana.** La parte más exterior del disco no está prácticamente perturbada por el secundario y puede describirse mediante el modelo de Shakura-Sunyaev. La temperatura de la superficie se calcula mediante la siguiente conocida expresión (ver Ec. 6.4 y Tabla 2 de [Kocsis et al. 2012b](#))

$$T_s^{\text{of}}(r) = \frac{8}{3\kappa} 2,06 \times 10^4 \dot{m}_{-1}^{1/4} M_7^{-1/4} \\ \times \left( \frac{r}{10^2 M_\bullet} \right)^{-3/4} \left[ 1 - \sqrt{\frac{r_{\text{isco}}}{r}} \right]^{1/4}, \quad (6.21)$$

donde  $r_{\text{isco}}$  es el radio de la última órbita circular estable.

### 6.3 MODELO PARA EL JET

Para caracterizar el jet hacemos uso del modelo de jet extendido e inhomogéneo desarrollado por [Romero & Vila 2008](#), [Reynoso et al.](#)

2011, y Vila et al. 2012. Este tipo de modelo de jet ha sido aplicado en forma extensiva a microcuasares galácticos en el estado *low hard*, pero también adaptados a radio galaxias FR I [Reynoso et al., 2011] y *blazars* [Reynoso et al., 2012]. Dado que el jet se parametriza en términos de la tasa de acreción, la adaptación para situaciones diferentes es inmediata. Las prescripciones generales, como la evolución del campo magnético con la distancia al agujero negro o la existencia de una zona de aceleración de partículas en la región donde el *outflow* es dominado por el plasma, se esperan tengan un rango amplio de validez.

Los jets son dos haces cónicos lanzados a una distancia  $z_0 = 50r_g$  del primario con un radio inicial  $r_0 = 0,1z_0$ . El eje de simetría de los jets (que definimos como el eje  $z$ ) está inclinado un ángulo  $\theta_{\text{jet}}$  con respecto a la normal al disco, y forma un ángulo  $\theta_{\text{obs}}$  con la línea de la visual del observador<sup>5</sup>; ver Fig 69 para un esquema. Suponemos que el fluido se propaga con un factor de Lorentz constante  $\Gamma_{\text{jet}}$  hasta una distancia  $z_{\text{end}}$  del primario antes de romperse debido a la interacción con el medio externo.

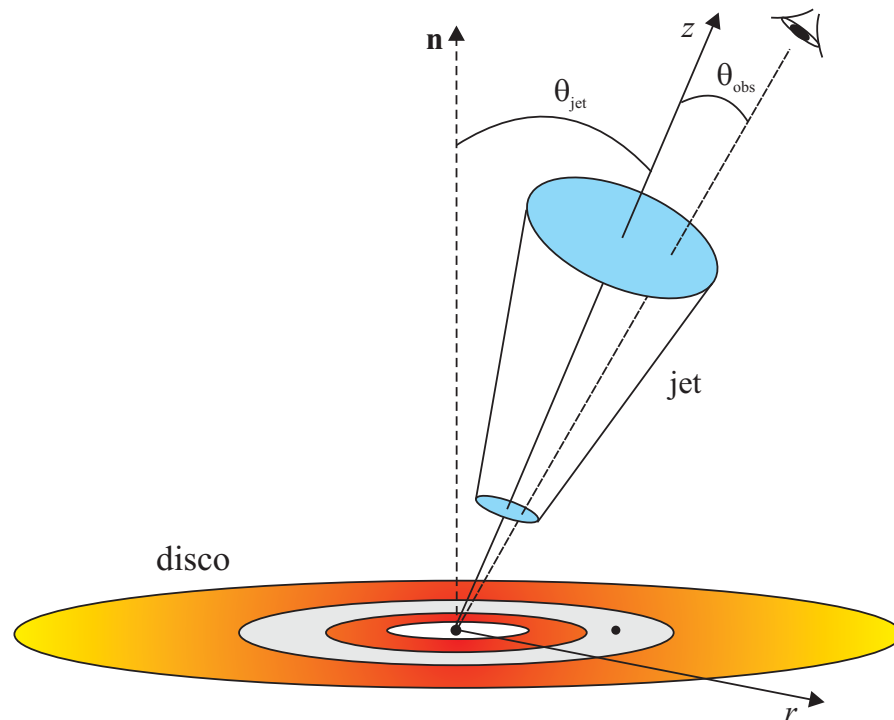


Figura 69: Esquema del sistema disco-jet (no está graficado a escala). Se muestran algunos de los parámetros relevantes.

Cada jet tiene una potencia total de  $L_{\text{jet}} = 0,05\dot{M}c^2$ . En la región  $z_{\text{acc}} \leq z \leq z_{\text{max}}$  (de aquí en más región de aceleración), una fracción  $L_{\text{rel}} = 0,05L_{\text{jet}}$  de esta potencia es transferida a las partículas que son aceleradas hasta energías relativistas por algún mecanismo no especificado. En este trabajo, sólo consideramos electrones acelerados, aunque jets que contienen protones relativistas han sido estudiados en apli-

<sup>5</sup> Por simplicidad, suponemos que la normal al disco, el eje  $z$ , y la línea de la visual se encuentran en el mismo plano. Esta simplificación no tiene incidencia alguna en los resultados de los cálculos.

caciones previas del mismo modelo (ver Vila et al. 2012 y referencias allí).

Suponemos una función para los electrones relativistas que, en el sistema de referencia comovil con el jet, es isotrópica y una ley de potencia con un corte exponencial (*exponential cutoff*) en energía,

$$Q(E, z) = Q_0 E^{-p} \exp[-E/E_{\max}(z)] \quad [Q] = \text{erg}^{-1} \text{s}^{-1} \text{cm}^{-3}. \quad (6.22)$$

La función  $Q$  es distinta de cero sólo en la región de aceleración y para  $E \geq E_{\min}$ . La energía máxima  $E_{\max}(z)$  se determina mediante el balance entre la tasa total de pérdida de energía y la tasa de aceleración. Incluimos pérdidas de energía adiabáticas y radiativas por Bremsstrahlung relativista, radiación sincrotrón, Synchrotron-Self Compton (SSC), y External Inverse Compton (EC) *scattering* con los fotones del disco como blancos. Para la tasa de aceleración, consideramos la expresión usual

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{\text{acc}} = \eta e c B(z). \quad (6.23)$$

Aquí  $c$  es la velocidad de la luz,  $e$  la carga del electrón, y  $\eta < 1$  es un parámetro adimensional que caracteriza la eficiencia del mecanismo de aceleración. El campo magnético en el jet decae como  $B(z) \propto z^{-1}$ .

Finalmente, para calcular la distribución de electrones relativistas en estado estacionario en el sistema de referencia comovil,  $N(E, z)$ , resolvemos numéricamente la ecuación cinética

$$v_{\text{conv}} \frac{\partial N}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial E} \left( \left. \frac{dE}{dt} \right|_{\text{tot}} N \right) = Q(E, z) \quad [N] = \text{erg}^{-1} \text{cm}^{-3} \quad (6.24)$$

en la región  $z_{\text{acc}} \leq z \leq z_{\text{end}}$ . En esta ecuación,  $dE/dt|_{\text{tot}}$  es la suma de todas la pérdidas energéticas, y  $v_{\text{conv}} \sim v_{\text{jet}}$  es la velocidad de convección del plasma.

Computamos la SED del jet<sup>6</sup> aplicando las fórmulas usuales para la radiación sincrotrón, Bremsstrahlung relativista, e *inverse Compton scattering* en los regímenes de Thomson y Klein-Nishina (e.g. Blumenthal & Gould 1970; Romero & Vila 2014). En el caso del espectro del *external Compton* tenemos en cuenta la anisotropía del campo de radiación del disco visto desde el jet, ver por ejemplo Dermer & Schlickeiser 1993, Dermer et al. 2009, y Khangulyan et al. 2014.

$$q_{\text{EC}}(E_\gamma, \Omega_\gamma, z) = c \int d\Omega_{\text{ph}} \int dE_{\text{ph}} \frac{dN_{\text{ph}}}{dE_{\text{ph}} d\Omega_{\text{ph}}} \times \quad (6.25)$$

$$\int d\Omega_e \int dE (1 - \beta_e \cos \psi) \frac{dN}{dE d\Omega_e} \frac{d\sigma_{\text{IC}}}{dE_\gamma d\Omega_\gamma}.$$

Aquí  $dN_{\text{ph}}/dE_{\text{ph}}d\Omega_{\text{ph}}$  es la densidad numérica de fotones blanco (disco) con energía  $E_{\text{ph}}$  propagándose en la dirección dada por el

<sup>6</sup> La SED se calcula inicialmente en el sistema comovil y luego es transformada al sistema de referencia del observador.

ángulo sólido  $\Omega_{\text{ph}}$ ,  $dN/dEd\Omega_e$  es la densidad numérica de electrones con energía  $E$  que se propagan en la dirección  $\Omega_e$ , el factor  $\beta_e = \sqrt{1 - \gamma_e^{-2}} \sim 1$  donde  $\gamma_e$  es el factor de Lorentz para los electrones,  $\psi$  es el ángulo de colisión, y  $d\sigma_{\text{IC}}/dE_\gamma d\Omega_\gamma$  es la sección eficaz doble diferencial de Klein-Nishina.

Aproximamos  $\Omega_e \sim \Omega_\gamma$ , dado que  $\gamma_e \gg 1$  y luego los fotones son dispersados básicamente en la dirección de movimiento de los electrones. Bajo esta suposición la sección eficaz doble diferencial se simplifica como

$$\frac{d\sigma_{\text{IC}}}{dE_\gamma d\Omega_\gamma} \sim \frac{d\sigma_{\text{IC}}}{dE_\gamma} \delta(\Omega_\gamma - \Omega_e), \quad (6.26)$$

donde  $d\sigma_{\text{IC}}/dE_\gamma$  esta dado por las Ecs. 25-27 en [Dermer et al. 2009](#) o la Ec. 2 en [Khanguyan et al. 2014](#). Luego, la Ec. 6.26 se reduce a

$$q_{\text{EC}}(E_\gamma, \Omega_\gamma, z) = c \int d\Omega_{\text{ph}} \int_{E_{\text{ph}}^{\text{min}}}^{E_{\text{ph}}^{\text{max}}} dE_{\text{ph}} \frac{dN_{\text{ph}}}{dE_{\text{ph}} d\Omega_{\text{ph}}} \times \int dE (1 - \beta_e \cos \psi) \frac{dN}{dEd\Omega_e} \frac{d\sigma_{\text{IC}}}{dE_\gamma}, \quad (6.27)$$

con el ángulo de colisión y la distribución de electrones evaluada en  $\Omega_e = \Omega_\gamma$ . Los límites de la integral sobre la energía de los fotones blancos son

$$E_{\text{ph}}^{\text{min}} = \left( \frac{E_\gamma}{E - E_\gamma} \right) \frac{m_e c^2}{2\gamma_e (1 - \beta_e \cos \psi)} \quad E_{\text{ph}}^{\text{max}} = \frac{2E_\gamma}{(1 - \beta_e \cos \psi)}. \quad (6.28)$$

Las integrales en la Ec. 6.27 pueden calcularse en forma equivalente en un sistema de referencia fijo al disco de acreción (i.e. sistema de referencia del observador) o en el sistema comovil con el jet. Elegimos realizar los cálculos en el sistema de referencia del observador donde el campo de fotones es conocido,

$$\left. \frac{dN_{\text{ph}}}{dE_{\text{ph}} d\Omega_{\text{ph}}} \right|_{\text{obs}} = \frac{2}{c^3 h^3} \frac{E_{\text{ph}}^2}{\exp[E_{\text{ph}}/(kT_s)] - 1}. \quad (6.29)$$

La distribución (isotrópica) de electrones en el sistema de referencia del jet es

$$\left. \frac{dN}{dEd\Omega_e} \right|_{\text{jet}} = \frac{N}{4\pi'}, \quad (6.30)$$

donde  $N$  está dado por la solución de la Ec. 6.24. Puede transformarse al sistema del observador aplicando de la Ec. 5 en [Torres & Reimer 2011](#).

Por último, para corregir por absorción, se multiplica la SED por un parámetro de atenuación  $\exp(-\tau_{\gamma\gamma})$ , donde  $\tau_{\gamma\gamma}(E_\gamma)$  es la profundidad óptica para la producción de pares en la aniquilación de dos fotones (e.g. [Becker & Kafatos 1995](#)). Ésta es una corrección a primer orden; el desarrollo de la cascada electromagnética queda por ser investigada.

## 6.4 RESULTADOS

Consideramos los dos conjuntos de parámetros dados en la Tabla 10,  $M_{\text{disco1}}$  y  $M_{\text{disco2}}$ , para caracterizar el sistema acretante. La masa del primario es  $10^7 M_{\odot}$  en el modelo  $M_{\text{disco1}}$ , y  $10^8 M_{\odot}$  en el modelo  $M_{\text{disco2}}$ . En ambos casos el momento angular del primario es  $a/\mu = 0,99$  (cuya última órbita circular estable se encuentra a un radio de  $r_{\text{isco}} = 1,4545\mu$ ) y la tasa de acreción es  $\dot{M} = 0,1\dot{M}_{\text{Edd}}$ , donde  $\dot{M}_{\text{Edd}}$  es la tasa de Eddington. Debe notarse que los microcuasares en el estado *low hard* y los *blazars* siempre se han pensado como fuentes acretantes ineficientes. Modelos Advection-Dominated Accretion Flow (ADAF) y modelos de disco truncado más corona se utilizan comúnmente para la descripción de este tipo de fuentes. La tasa de acreción que suponemos en este trabajo está en la banda superior de los valores permitidos, que corresponde a las fuentes más luminosas (ver por ejemplo Narayan et al. 1998).

Los valores de  $r_s$  y  $q$  se han elegido para obtener la mayor separación orbital posible y el gap más ancho. Estos parámetros no son independientes. En la Fig. 4 de Kocsis et al. 2012a se muestra la región permitida en el espacio  $q - r_s$ . Aproximamos el valor de la mitad del ancho del gap por el radio de Hill  $r_H$  del secundario. Debe notarse que las simulaciones de Kocsis et al. 2012a,b no se aplican en el interior del gap, luego la región  $r_s - r_H < r < r_s + r_H$  se excluye de nuestros cálculos. Los parámetros libres restantes en las fórmulas de Kocsis et al. 2012a son la viscosidad del disco  $\alpha$  y un coeficiente  $f$  en la expresión del torque de marea. Fijamos  $\alpha = 0,1$ , y  $f = 0,01$  siguiendo a Kocsis et al. 2012b.

### 6.4.1 Perfil de temperatura y espectro radiativo del disco

En la Fig. 70 se muestra la temperatura de la superficie del disco en función del radio calculada con la parametrización dada en la Sección 6.2 para ambos modelos. Debido al incremento en la densidad y presión, la temperatura aumenta bruscamente justo por fuera de la órbita del secundario. La correspondiente distribución espectral de energía está graficada en las Figs. 71 y 72. Los espectros son claramente distintos de aquellos de un disco de acreción estándar sin gap entorno a un agujero negro de la misma masa y momento angular que el primario. A bajas energías la luminosidad es más alta que para un disco de acreción sin gap. Este incremento se debe a las altas temperaturas en las zonas exterior cercana y media comparada con la temperatura en el modelo de Page-Thorne. Desde aproximadamente 1 eV (infrarrojo) hasta el corte (*cutoff*) a  $\gtrsim 100$  eV (ultravioleta) ambas SEDs coinciden. Debe notarse que a medida que la masa del primario aumenta y la distancia entre los agujeros negros supermasivos disminuye, el tamaño del gap decrece y los signos de la presencia del gap en la SED comienzan a desaparecer. Notamos también que la perturbación causada por el secundario ocurre a grandes distancias del agujero negro en comparación con las distancias asociadas al disco

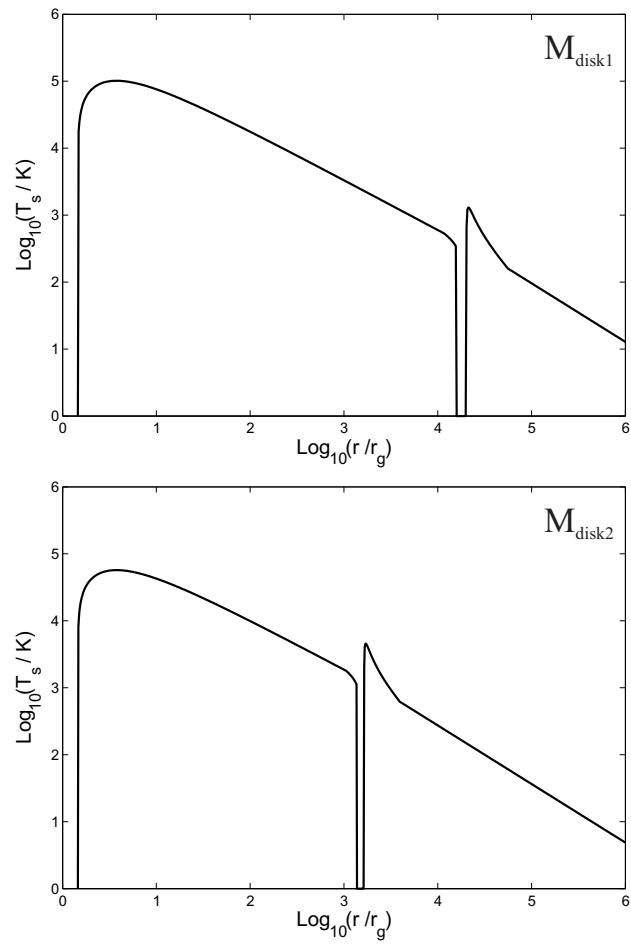


Figura 70: Temperatura superficial del disco en función del radio para el conjunto de parámetros  $M_{\text{disco1}}$  (arriba) y  $M_{\text{disco2}}$  (abajo).



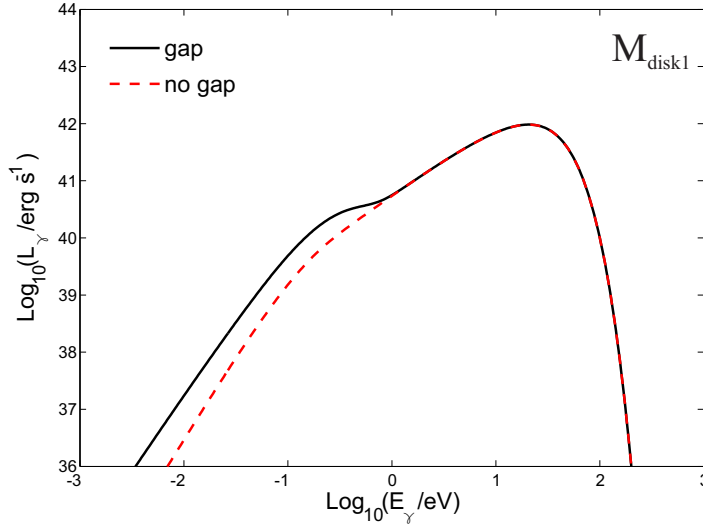


Figura 71: Distribución espectral de energía del disco para el conjunto de parámetros  $M_{\text{disk1}}$ . La luminosidad de un disco de acreción relativista sin gap entorno a un agujero negro supermasivo de la misma masa, espín, y tasa de acreción que el primario se muestra como comparación (línea discontinua). En todas las SEDs mostradas en las figuras graficamos la luminosidad total en función de la energía.

interno. Luego, si el disco estuviese truncado y la parte más interna reemplazada por un ADAF, ésto no afectaría en forma significativa los efectos en altas energías que se discuten en este trabajo.

#### 6.4.2 Radiación no térmica del jet

Hemos calculado la emisión del jet para un gran número de modelos con diferentes conjuntos de parámetros con el fin de explorar el impacto de la existencia del gap y la radiación térmica externa modificada en las SEDs de distintos modelos. En las Figs. 73-78 exponemos una muestra de casos que ilustran las distribuciones espectrales de energía de la radiación del jet de sistemas binarios de agujeros negros con un gap en sus discos. El conjunto de parámetros para los modelos de jet se enumeran en la Tabla 11. Los modelos se denotan  $M_i$  con  $i = 1 - 6$ . Los modelos de disco correspondientes son  $M_{\text{disko2}}$  para  $M_{\text{jet1}}$ , y  $M_{\text{disko1}}$  para los casos restantes. Como comparación, las SEDs obtenidas para los mismos parámetros del modelo de jet pero para un disco sin gap se grafican también con las en las Figs. 73-78.

En todos los modelos de jet, la base del jet está cerca del agujero negro (50 radios gravitacionales) y la zona de aceleración de partículas se extiende desde la región cercana a la base hasta varios miles de radios gravitacionales. El factor de Lorentz del jet es moderado en los tres primeros modelos (alrededor de 20) y más bajo en los restantes (de 10 a 5, ver Tabla 11); para una referencia general sobre esto ver Lister et al. 2009. La inyección de electrones original es la canónica con una pendiente de 2,2 en todos los modelos, excepto en el modelo  $M_{\text{jet6}}$ , que tiene un índice espectral más duro de 1,5. Los ángulos de

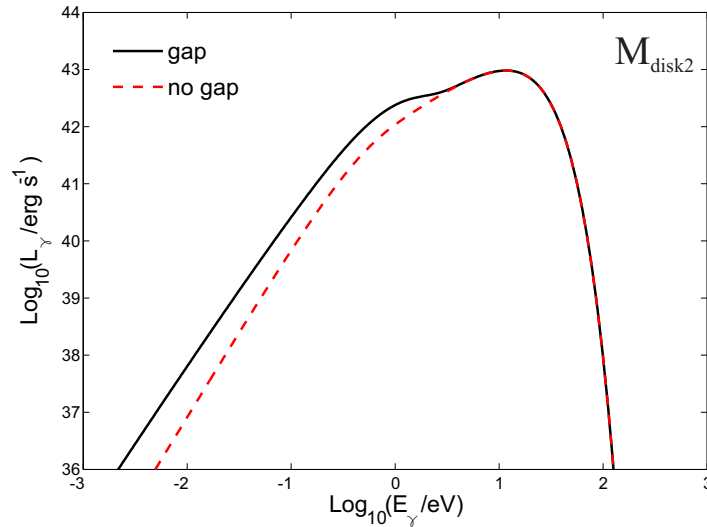


Figura 72: Distribución espectral de energía del disco para el conjunto de parámetros  $M_{\text{disk}2}$ . La luminosidad de un disco de acreción relativista sin gap entorno a un agujero negro supermasivo de la misma masa, espín, y tasa de acreción que el primario se muestra como comparación (línea discontinua). En todas las SEDs mostradas en las figuras graficamos la luminosidad total en función de la energía.

observación son pequeños (de 5 a 1 grado) de forma tal que estamos tratando con objetos tipo blazares. La potencia del jet está en el rango de  $\sim 10^{41} - \sim 10^{44} \text{ erg s}^{-1}$ . Todos los resultados presentados en las figuras han sido corregidos por absorción interna de rayos gamma y se presentan en el sistema de referencia del observador.

A bajas energías todas las SEDs están dominadas por radiación sincrotrón. En el rango de energías del óptico-ultravioleta, dado que los jets no son excesivamente potentes, el exceso azul con la forma característica dada por el gap es discernible en la mayoría de los casos. A energías altas la emisión es el resultado de la adición de EC y SSC. Hemos seleccionado modelos dominados por el primero. Todos los resultados muestran un espectro suave alrededor de 10 GeV cuando se comparan con los modelos correspondientes sin gap. La supresión de radiación a energías muy altas por aniquilación de fotones también ocurre a bajas energías en los modelos con gap que en aquellos con discos de acreción estándar. Este efecto se debe al exceso de fotones blandos provenientes del borde externo del gap en el disco perturbado.

El modelo que presenta las diferencias más grandes con respecto a discos sin perturbar es el modelo  $M_{\text{jet}6}$ . Este es el caso donde se ha considerado la inyección más dura. La radiación sincrotrón tiene un pico en rayos X, tal como sucede en los objetos BL Lacertae intensos en rayos X. Tres picos pueden distinguirse en la SED: el disco, el pico sincrotrón y el pico EC. En forma contraria, en el caso correspondiente sin gap un espectro duro se extiende desde el ultravioleta hasta tera-electronvoltios.

Debe notarse que modelos con un primario del orden de  $10^7 M_{\odot}$  presentan características más peculiares a altas energías que modelos

Cuadro 10: Valores de los parámetros relevantes del modelo.

Parámetro, símbolo [unidades]	$M_{\text{disco1}}$	$M_{\text{disco2}}$
Masa del primario, $M_{\bullet}$ [ $M_{\odot}$ ]	$10^7$	$10^8$
Tasa de acreción de masa, $\dot{M}$ [ $\text{g s}^{-1}$ ]	$1,5 \cdot 10^{23}$	$1,5 \cdot 10^{24}$
Cociente de masas, $q$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$2,38 \cdot 10^{-3}$
Separación orbital, $r_s$ [ $\mu$ ]	$1,8 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^3$
Radio de Hill (mitad del ancho del gap), $r_H$ [ $\mu$ ]	$2,2 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^2$
Radio interno del disco (radio de la ISCO), $r_{\text{in}}$ [ $\mu$ ]	1,4545	1,4545
Radio de transición interna lejana/interna cercana, $r_{\text{ni}}$ [ $\mu$ ]	$1,17 \cdot 10^4$	$1,06 \cdot 10^3$
Radio de transición exterior/media, $r_{\text{ne}}$ [ $\mu$ ]	$5,63 \cdot 10^4$	$3,94 \cdot 10^3$

con agujeros negros más masivos. En estos discos la región exterior cercana está localizada más lejos del agujero negro, lo que causa que el exceso en la emisión del disco perturbado se corra a energías más bajas para los fotones, como se observa en la Fig. 71. En los sistemas descritos por estos modelos, pues, hay un exceso de fotones blanco en la banda apropiada de energía para producir rayos gamma cuando éstos son dispersados por los electrones relativistas en los jets.

El cociente entre las masas del agujero negro secundario y el primario que llevan a los espectros más notables a energías altas y que pueden utilizarse, por lo tanto, para detectar binaridad es  $\sim 0,05$ . Luego el secundario podría ser un agujero negro intermedio capturado por el primario. Galaxias con erupciones estelares viejas y reactivadas por un flujo de gas, podrían ser progenitores propicios de este tipo de sistemas binarios.

Otras regiones del espacio de parámetros permitidas por el régimen *overflowing* restan por ser exploradas, pero esperamos que los efectos de la existencia del gap estén maximizados para los valores de  $M_{\bullet}$  en el rango aquí analizado. Para primarios menos masivos, el gap sería más ancho pero localizado muy lejos, en la regiones frías del disco. Para primarios más masivos, por otro lado, el secundario estaría más cerca pero el gap sería muy angosto como para provocar alguna característica notable en la SED.

## 6.5 DISCUSION

### 6.5.1 Robustez y detectabilidad

El tipo de modelo estudiado en este trabajo está ajustado intencionalmente para maximizar las características observacionales de SMBHBs en AGNs. Aunque varias condiciones deben satisfacerse para que un dado sistema pueda ser detectado a través de su emisión a altas energías, muchas de estas condiciones son improbables que las cumplan varios objetos de una muestra. Las condiciones son las siguientes: 1) La órbita del sistema binario de agujeros negros debe ser

Cuadro 11: Valores de los parámetros para los 6 modelos disco+jet.

Parámetro, símbolo [unidades]	$M_{\text{jet1}}$	$M_{\text{jet2}}$	$M_{\text{jet3}}$
Modelo de disco	$M_{\text{disco2}}$	$M_{\text{disco1}}$	$M_{\text{disco1}}$
Base jet, $z_0$ [ $\mu$ ]	50	50	50
Base región aceleración, $z_{\text{acc}}$ [ $\mu$ ]	67,40	67,40	67,40
Fin región aceleración, $z_{\text{max}}$ [ $\mu$ ]	6740,34	3370,17	3370,17
Fin jet, $z_{\text{end}}$ [ $\mu$ ]	$6,7 \cdot 10^5$	$6,7 \cdot 10^6$	$6,7 \cdot 10^6$
Ángulo inclinación jet, $\theta_{\text{jet}}$ [deg]	4	0	4
Ángulo visión jet, $\theta_{\text{obs}}$ [deg]	1	5	1
Factor Lorentz jet, $\Gamma_{\text{jet}}$	20	20	20
Campo magnético en $z_{\text{acc}}$ , $B(z_{\text{acc}})$ [G]	0,66	2,08	2,08
Potencia jet, $L_{\text{jet}}$ [ $\text{erg s}^{-1}$ ]	$6,5 \cdot 10^{43}$	$6,5 \cdot 10^{42}$	$6,5 \cdot 10^{42}$
Potencia electr. rel., $L_{\text{rel}}$ [ $\text{erg s}^{-1}$ ]	$3,25 \cdot 10^{42}$	$3,25 \cdot 10^{41}$	$3,25 \cdot 10^{41}$
Energía mín. de electr. rel., $E_{\text{min}}$ [ $m_e c^2$ ]	10	10	10
Índice espectral inyección, $p$	2,2	2,2	2,2
Eficiencia aceleración, $\eta$	0,1	0,1	0,1
Parámetro, símbolo [unidades]	$M_{\text{jet4}}$	$M_{\text{jet5}}$	$M_{\text{jet6}}$
Modelo disco	$M_{\text{disco1}}$	$M_{\text{disco1}}$	$M_{\text{disco1}}$
Base jet, $z_0$ [ $\mu$ ]	50	50	50
Base región aceleración, $z_{\text{acc}}$ [ $\mu$ ]	67,40	67,40	67,40
Fin región aceleración, $z_{\text{max}}$ [ $\mu$ ]	3370,17	3370,17	3370,17
Fin jet, $z_{\text{end}}$ [ $\mu$ ]	$6,7 \cdot 10^6$	$6,7 \cdot 10^6$	$6,7 \cdot 10^6$
Ángulo inclinación jet, $\theta_{\text{jet}}$ [deg]	0	0	0
Ángulo observación jet, $\theta_{\text{obs}}$ [deg]	5	5	5
Factor Lorentz jet, $\Gamma_{\text{jet}}$	10	5	10
Campo magnético en $z_{\text{acc}}$ , $B(z_{\text{acc}})$ [G]	2,08	2,10	2,08
Potencia jet, $L_{\text{jet}}$ [ $\text{erg s}^{-1}$ ]	$6,5 \cdot 10^{42}$	$6,5 \cdot 10^{42}$	$6,5 \cdot 10^{42}$
Potencia electr. rel., $L_{\text{rel}}$ [ $\text{erg s}^{-1}$ ]	$3,25 \cdot 10^{41}$	$3,25 \cdot 10^{41}$	$3,25 \cdot 10^{41}$
Energía mín. electr. rel., $E_{\text{min}}$ [ $m_e c^2$ ]	10	10	10
Índice espectral inyección, $p$	2,2	2,2	1,5
Eficiencia aceleración, $\eta$	0,1	0,1	0,1

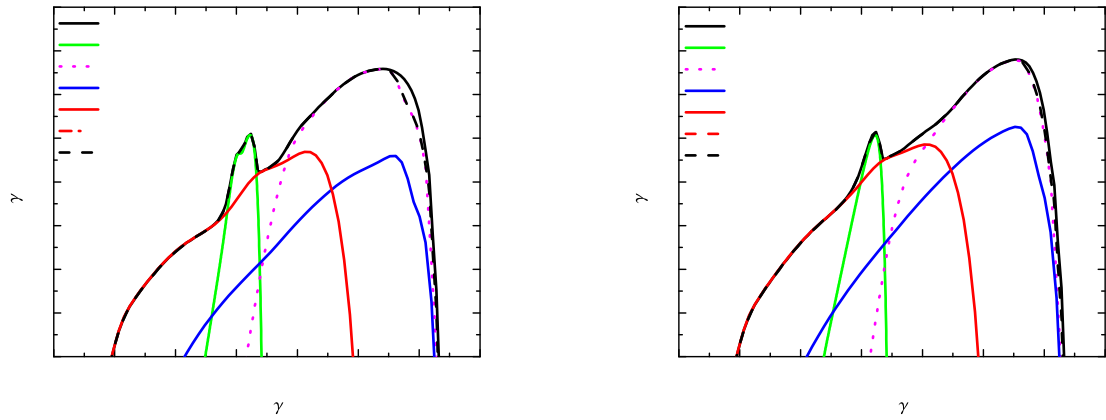


Figura 73: Izquierda: distribución espectral de energía del jet corregida por absorción, para el conjunto de parámetros  $M_{\text{jet}1}$ . Derecha: lo mismo pero para el caso de un disco de acreción relativista delgado sin gap entorno a un agujero negro de la misma masa, espín y tasa de acreción que el primario.

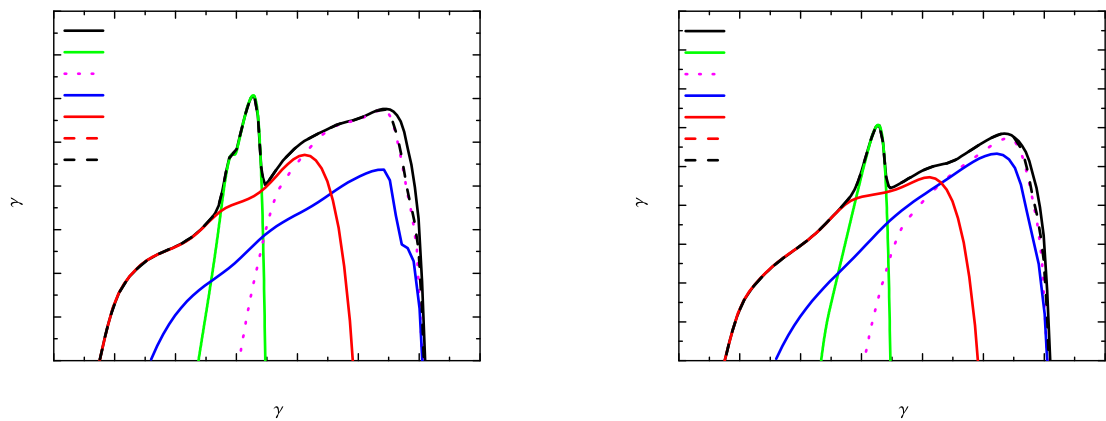


Figura 74: Izquierda: distribución espectral de energía del jet corregida por absorción, para el conjunto de parámetros  $M_{\text{jet}2}$ . Derecha: lo mismo pero para el caso de un disco de acreción relativista delgado sin gap entorno a un agujero negro de la misma masa, espín y tasa de acreción que el primario.

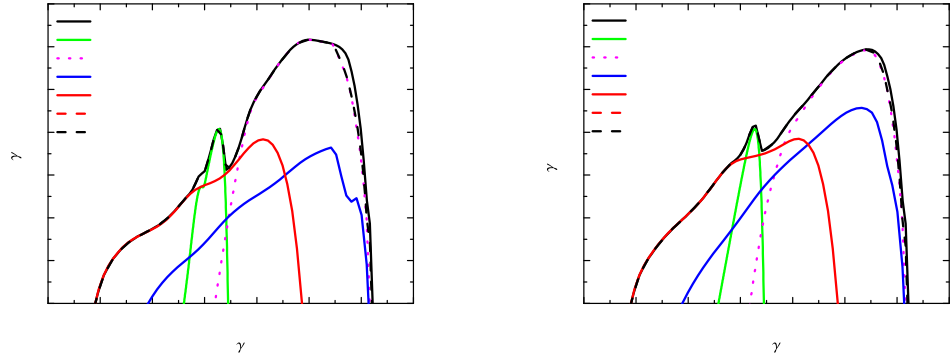


Figura 75: Izquierda: distribución espectral de energía del jet corregida por absorción, para el conjunto de parámetros  $M_{\text{jet}3}$ . Derecha: lo mismo pero para el caso de un disco de acreción relativista delgado sin gap entorno a un agujero negro de la misma masa, espín y tasa de acreción que el primario.

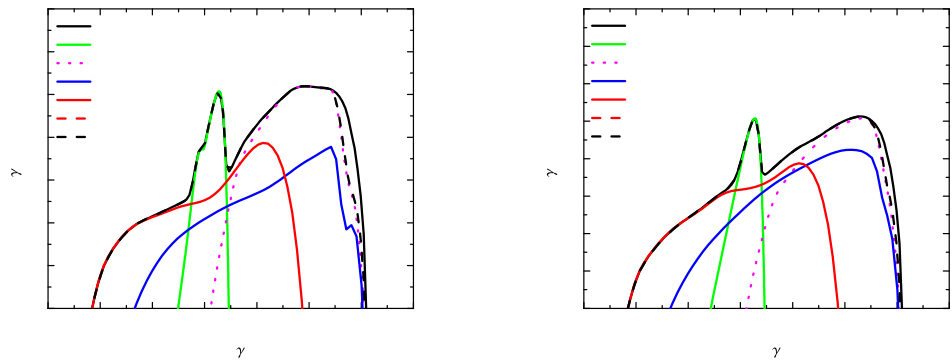


Figura 76: Izquierda: distribución espectral de energía del jet corregida por absorción, para el conjunto de parámetros  $M_{\text{jet}4}$ . Derecha: lo mismo pero para el caso de un disco de acreción relativista delgado sin gap entorno a un agujero negro de la misma masa, espín y tasa de acreción que el primario.

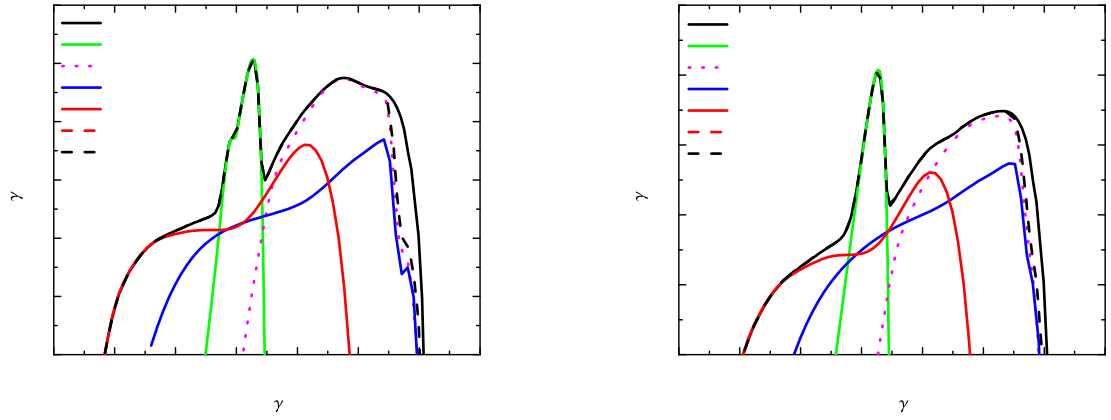


Figura 77: Izquierda: distribución espectral de energía del jet corregida por absorción, para el conjunto de parámetros  $M_{\text{jet}5}$ . Derecha: lo mismo pero para el caso de un disco de acreción relativista delgado sin gap entorno a un agujero negro de la misma masa, espín y tasa de acreción que el primario.

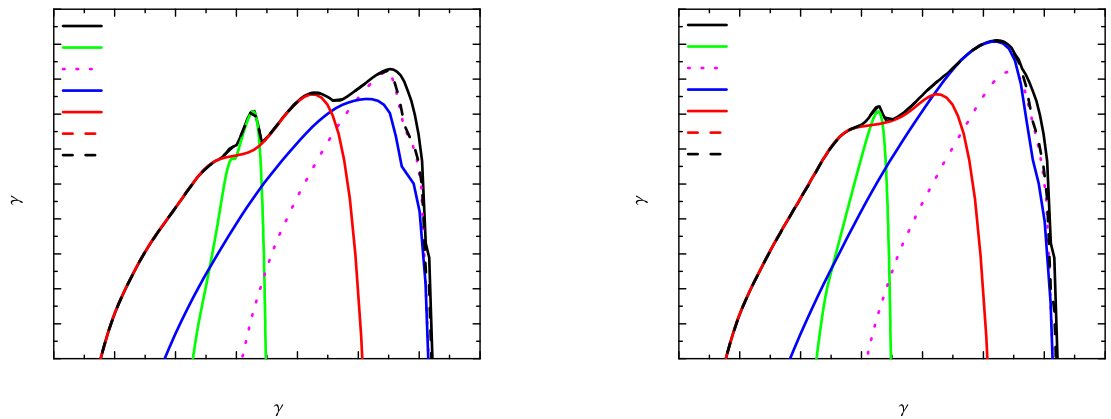


Figura 78: Izquierda: distribución espectral de energía del jet corregida por absorción, para el conjunto de parámetros  $M_{\text{jet}6}$ . Derecha: lo mismo pero para el caso de un disco de acreción relativista delgado sin gap entorno a un agujero negro de la misma masa, espín y tasa de acreción que el primario.

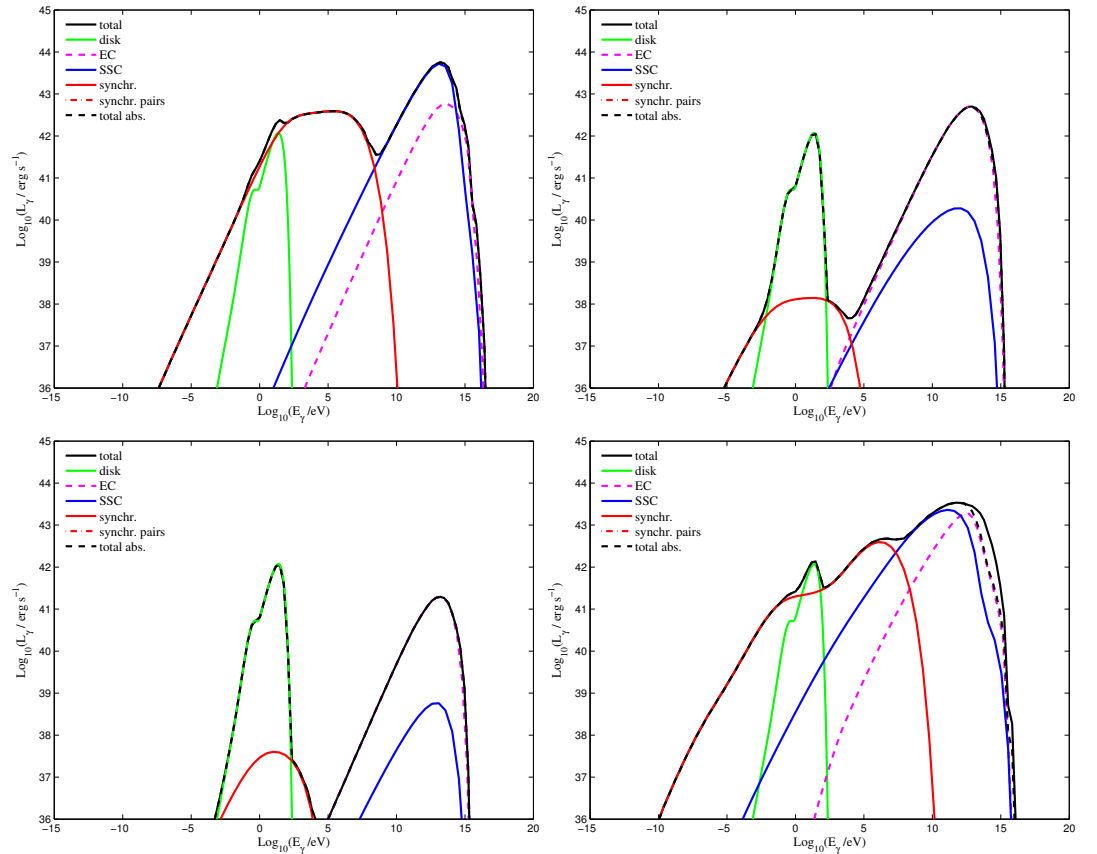


Figura 79: Cambios en la distribución espectral de energía con cambios en algunos de los parámetros básicos del modelo. En todos los casos,  $z_0 = 50 r_g = z_{\text{acc}}$ ,  $p = 1,5$ , y  $\Gamma_{\text{jet}} = 10$ . Los paneles superiores, de izquierda a derecha, muestran modelos con  $z_{\text{max}} = 10^3 z_0$  pero difieren en el valor del campo magnético en la base de la región de aceleración:  $B(z_{\text{acc}}) = 1,8 \text{ G}$  y  $B(z_{\text{acc}}) = 0,06 \text{ G}$ , respectivamente. Los modelos en los paneles inferiores, difieren en la extensión de la región de aceleración:  $z_{\text{max}} = 10^4 z_0$  y  $10^2 z_0$ , respectivamente. En ambos casos  $B(z_{\text{acc}}) = 0,06 \text{ G}$ .



coplanar. Este es el caso para sistemas binarios de agujeros negros supermasivos debido a los procesos de resonancia y de amortiguamiento hidrodinámico de un cuerpo satélite (secundario) interaccionando con el disco circumprimario (e.g. Artymowicz 1998). Estos efectos son conocidos en formación planetaria. 2) El cociente de masas entre el agujero negro secundario y primario. El valor de este parámetro debe ser pequeño (en el rango  $0,1 - 10^{-3}$ ) para asegurar la existencia de un gap amplio. Este caso, sin embargo, no parece ser inusual ya que agujeros negros primarios con masas en el rango  $10^7 - 10^8 M_{\odot}$  son la fuente de la mayor parte de los AGNs, y los agujeros negros de masa intermedia se encontrarían en galaxias satélites. Las fusiones de galaxias en el universo temprano fueron, por lo demás, eventos muy comunes (Wilson & Colbert 1995). 3) La separación entre agujeros negros es de varios miles de radios gravitacionales. Esto asegura que el exceso de radiación en el disco perturbado está localizado entre el infrarrojo y el óptico, siendo un blanco apropiado para los procesos de EC scattering en el jet. Agujeros negros muy cercanos pertenecientes a sistemas binarios tendrían una vida media pequeña debido a las fuentes pérdidas por emisión de ondas gravitacionales. Los sistemas de separación intermedia parecen ser los más numerosos entre SMBHBs. 4) El secundario es capaz de abrir un gap en el disco. Ésto se espera de todos los sistemas que también cumplan los puntos 2) and 3) arriba mencionados – ver Sec. 6.2. 5) La excentricidad de el SMBHB es baja. Este requerimiento se espera que lo cumplan la mayor parte de los sistemas debido a la rápida circularización de las órbitas producida por la interacción viscosa entre el secundario y el gas en el disco. 6) El régimen de acreción desborda el gap. Las simulaciones numéricas de Kocsis et al. 2012a,b muestran que este es el caso usual para el rango seleccionado de masas. 7) El AGN lanza un jet relativista que apunta en la dirección del observador. Este punto lo cumplen básicamente todos los AGNs no cercanos para ser detectados en rayos gamma. Esto no afecta, pues, la muestra observada. 8) Las partículas son aceleradas en el jet no muy lejos de la fuente central. Este parece ser el caso en la mayor parte de los blazars como señala la alta incidencia de variabilidad rápida en muestras grandes (e.g. Romero et al. 1997, 1999, 2002). 9) Finalmente, el proceso EC es la contribución dominante en rayos gamma. Esta preponderancia depende básicamente del campo magnético en el jet, donde el campo es alto y los electrones se enfrían fundamentalmente por los mecanismos sincrotrón y SSC. La detectabilidad del binario a partir de las características descritas en este trabajo depende, pues, crucialmente en la posibilidad de tener un campo magnético modesto  $B < 1$  G en la región de emisión de rayos gamma. Dado que esta región se extiende hasta distancias de varios miles de radios gravitacionales y el campo debe estar debajo de la equipartición para que el fluido permanezca compresible (de lo contrario no se desarrollarían ondas de choque), estos valores no serían excepcionales.

¿Cuándo robusto es nuestro modelo y cuáles son las probabilidades reales de detectar un SMBHB a través de observaciones gamma? Una estimación cuantitativa no es posible, dado que algunas de las condi-

ciones enumeradas arriba permanecen en forma cualitativa debido a la falta de conocimiento sobre evolución galáctica; sin embargo, dados los miles de AGNs detectados hasta el momento por el telescopio gamma *Fermi* y los arreglos Cherenkov la probabilidad actual de ya haber observado un SMBHB con su SED dominada por radiación EC es cercana a uno. Por supuesto, identificar dicha fuente en la muestra es una cuestión diferente, y los cálculos de SEDs presentados en este trabajo tienen el propósito de proveer *templates* para dicha búsqueda.

### 6.5.2 Dependencia con los cambios en el espacio de parámetros

¿Cuán sensible es nuestro modelo a los cambios en los diferentes parámetros, en particular el campo magnético y la localización de la región de aceleración? Para poder responder a esta pregunta hemos calculado un cierto número de SEDs cambiando sistemáticamente estos parámetros. Las siguientes tendencias fueron observadas.

Como esperábamos, un valor alto del campo magnético resulta en una componente sincrotrón más fuerte; el pico SSC en altas energías asociado también resulta acentuado (ver Fig. 79, panel izquierdo superior). Modelos con condiciones similares pero un campo más bajo en dos órdenes de magnitud tiene el pico sincrotrón suprimido y la radiación a altas energías dominada por la componente EC. Notamos que estos modelos tiene una región de aceleración compacta ubicada cerca de la base del jet, y luego, hay muchos fotones provenientes del disco por interacciones IC (ver Fig. 79, panel derecho superior). Si la región de aceleración se extiende a distancias mayores por un orden de magnitud, dos efectos son observados: el pico sincrotrón prácticamente desaparece y el pico EC a altas energías se ve también fuertemente disminuido. La razón es que el mismo presupuesto de energía en partículas relativistas es distribuido sobre una región más amplia, las partes más lejanas que están a una distancia del disco en las que el *scattering* EC resulta inefectivo (ver Fig. 79, panel izquierdo inferior). Los modelos con las características más importantes a altas energías son aquellos en los que la región de aceleración es muy compacta y localizada en la base del jet. En estos modelos, todo el presupuesto energético de las partículas relativistas es inyectado muy cerca de la fuente de fotones externos y, al mismo tiempo, las pérdidas sincrotrón tienden a ser altas debido a los valores relativamente altos del campo magnético en la base del jet. Dicha combinación de parámetros resulta en una SED con dos picos anchos a altas energías, como mostramos en la Fig. 79, (panel inferior derecho).

La existencia de una región de aceleración cercana a la base del jet parece favorecida en la mayoría de los blazars por la observación de variabilidad rápida, que es un indicativo de una fuente muy compacta. Al mismo tiempo, campos magnéticos muy fuertes parecen poco plausibles ya que si el flujo del jet está dominado magnéticamente, no se producirían ondas de choque ya que el gas resultaría mecánicamente incompresible. En todos los modelos calculados en este trabajo el campo magnético está por debajo de la equipartición del gas.

## 6.6 CONCLUSIONES

Hemos estudiado las características en el espectro radiativo de sistemas binarios de agujeros negros supermasivos. Nos hemos focalizado en un tipo particular de sistemas binarios acretantes: aquellos en que el primario es mucho más masivo y el secundario puede abrir un gap en el disco de acreción del sistema. Hemos mostrado que en presencia de un jet relativista, interacciones Compton externa entre fotones provenientes del disco perturbado y electrones relativistas en la base del jet, pueden producir una impronta única en la distribución espectral de energía en rayos gamma, donde toda la emisión es de origen no térmico. Ciertamente, no todos los núcleos binarios en AGNs presentarán estas características. Sin embargo, la mera identificación de un solo sistema podría proveer un laboratorio natural único para estudiar sistemas binarios de agujeros negros y la física de acreción relacionada mediante observaciones a altas energías.

Las SEDs difieren de los espectros típicos con dos excesos bien ajustados por leyes de potencias predichas por los modelos *one-zone* de jets de AGNs. En este tipo de sistemas la distribución de electrones  $N(E, z)$  es usualmente una única ley de potencias en energía para todo  $z$ , tanto fijada de antemano como calculada de versiones simplificadas de la Ec. 6.24 que supone un mecanismo de enfriamiento dominante. En nuestro modelo la región de emisión es extendida, inhomogénea, y el proceso dominante de pérdida de energía de los electrones varía a lo largo del jet. La forma de la función  $N(E, z)$  es pues bastante compleja y esto se refleja directamente en las SEDs. Nótese que un valor del campo magnético en la región de aceleración de  $\sim 1$  G o menos es requerido para evitar que la componente sincrotrón de las SEDs oculte la componente EC. Dichos campos se estiman usualmente para la parte interior sub-parsec del jet (e.g. Marscher & Gear 1985; Dermer & Schlickeiser 1993; Romero 1995; Romero et al. 1995).

La diferencia en el corte a bajas energías de la emisión EC entre los modelos con y sin gap en el disco parece débil como para ser una característica no ambigua de la presencia de un agujero negro secundario. De acuerdo a nuestros resultados, las características de la SED a muy altas energías (además de las propiedades esperadas en la emisión del disco de acreción) podrían proveer de un buen criterio para apoyar la identificación de candidatos de sistemas binarios de agujeros negros supermasivos. En este rango de energías, observaciones futuras con los telescopios Cherenkov, tales como el *Cherenkov Telescope Array* (CTA, Actis et al. 2011), serán las herramientas apropiadas para investigar los efectos aquí predichos.

Una vez que un buen conjunto de candidatos de sistemas binarios de agujeros negros supermasivos haya sido identificado, futuros detectores espaciales podrían intentar encontrar las ondas gravitacionales producidas por estos sistemas.



## AGUJEROS NEGROS COSMOLÓGICOS E IRREVERSIBILIDAD

### 7.1 INTRODUCCIÓN

Es un hecho notable que todas las representaciones formales de las leyes fundamentales de la física son invariantes bajo la operación de inversión temporal, mientras que los procesos macroscópicos son asimétricos respecto al tiempo. Parece existir una dirección privilegiada para la ocurrencia de los eventos, la denominada flecha del tiempo<sup>1</sup>. Indefectiblemente, el estado final de todas las cosas es de equilibrio, de entropía máxima tal como se expresa en la Segunda Ley de la Termodinámica. ¿Cómo es entonces posible que procesos macroscópicos irreversibles emerjan de leyes fundamentales de la física de carácter reversible?

Tal como señalaron [Gold 1962](#) y [Penrose 1979](#), el origen de la irreversibilidad no está en las leyes sino en las condiciones iniciales y de contorno bajo las cuales estas leyes operan.

Las interacciones físicas que dominan en escalas medias (humanas) son aquellas de origen electromagnético. Las interacciones fuertes y débiles son de muy corto alcance. La gravitación es la fuerza dominante en escalas cosmológicas, pero es muy débil en comparación con el electromagnetismo sobre escalas cortas.

La radiación del campo electromagnético puede ser descrita en términos del cuadri-potencial  $A^\mu$ , que satisface las ecuaciones de Maxwell en el gauge de Lorentz:

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu(\mathbf{r}, t) = 4\pi j^\mu(\mathbf{r}, t), \quad (7.1)$$

donde hemos tomado  $c = 1$  y  $j^\mu$  denota la cuadri-corriente. La solución  $A^\mu$  es una funcional de las fuentes  $j^\mu$ . La Ec. 7.1 tiene tanto soluciones avanzadas como retardadas:

$$A_{\text{ret}}^\mu(\vec{r}, t) = \int_{V_{\text{ret}}} \frac{j^\mu(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|) d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{\partial V_{\text{ret}}} \frac{j^\mu(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|) d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

$$A_{\text{adv}}^\mu(\vec{r}, t) = \int_{V_{\text{adv}}} \frac{j^\mu(\vec{r}', t + |\vec{r} - \vec{r}'|) d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{\partial V_{\text{adv}}} \frac{j^\mu(\vec{r}', t + |\vec{r} - \vec{r}'|) d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Las dos funcionales de  $j^\mu(\vec{r}, t)$  están relacionadas mediante una transformación de inversión temporal. La solución  $A_{\text{ret}}^\mu(\vec{r}, t)$  está determinada por las contribuciones de las corrientes en el pasado causal

<sup>1</sup> La expresión “flecha del tiempo” es confusa ya que el tiempo no es un vector. El tiempo es una propiedad emergente de las cosas materiales y puede ser representado por un continuo unidimensional. El tiempo en sí mismo no es asimétrico; los procesos que el tiempo parametrizada pueden serlo respecto a un cierto grupo de transformaciones.

( $V_{\text{ret}} = J^-(p)$ ) del punto del espacio tiempo  $p(\vec{r}, t)$ , y la solución  $A_{\text{adv}}^\mu(\vec{r}, t)$  por las corrientes en el futuro causal ( $V_{\text{adv}} = J^+(p)$ ) de dicho punto. Las integrales en el segundo término del miembro derecho son integrales de superficie que dan las contribuciones de las fuentes fuera de  $V$  y de radiación libre. Si  $V$  es el pasado causal ( $J^-(p)$ ) y futuro causal ( $J^+(p)$ ), las integrales de superficie no contribuyen ya que fuentes materiales fuera de  $V$  o en el borde están desconectadas causalmente de  $p(\vec{r}, t)$ . Suponemos, también, las condiciones de radiación de Sommerfeld, siendo la radiación libre nula.

La combinación lineal de soluciones electromagnéticas es también una solución, dado que las ecuaciones son lineales y el Principio de Superposición es válido. Se suele considerar que los potenciales retardados son los únicos que tienen significado físico para estimar el campo electromagnético en  $p(\vec{r}, t)$ :  $F_{\text{ret}}^{\mu\nu} = \partial^\mu A_{\text{ret}}^\nu - \partial^\nu A_{\text{ret}}^\mu$ . No parece haber ninguna razón, sin embargo, para dicha elección<sup>2</sup>. Podemos suponer, por ejemplo, una solución de la forma:

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left( \int_{J^-} \text{ret} + \int_{J^+} \text{adv} \right) dV, \quad (7.2)$$

que es formalmente válida y trata en forma igual el pasado y futuro causal del evento  $p(\vec{r}, t)$ .

En el espacio-tiempo de Minkowski, el cono de luz que determina la estructura local causal es simétrico respecto al punto  $p(\vec{r}, t)$ . Luego, las fuentes en el pasado y futuro causal son las mismas, las condiciones de contorno son las mismas, y las soluciones retardadas y avanzadas son idénticas. Este no es el caso en presencia del campo gravitacional: debido a la curvatura del espacio-tiempo, los conos de luz no son simétricos respecto al punto  $p(\vec{r}, t)$ , y las contribuciones de las corrientes pasadas y futuras difieren.

Romero & Pérez 2011 mostraron recientemente que si el universo se encuentra en un estado de expansión acelerada [Perlmutter et al., 1999],  $J^-(p)$  y  $J^+(p)$  no son simétricas debido a la presencia de un horizonte cosmológico de partículas. Ésto implica que  $A_{\text{ret}}^\mu$  y  $A_{\text{adv}}^\mu$  serán diferentes. De la Ec. 7.2 puede definirse un campo vectorial  $L^\mu$  como:

$$L^\mu = \left( \int_{J^-} \text{ret} - \int_{J^+} \text{adv} \right) dV \neq 0. \quad (7.3)$$

Si  $g_{\mu\nu}L^\mu T^\nu \neq 0$ , donde  $T^\nu = (1, 0, 0, 0)$ , existe una dirección privilegiada para el flujo de energía electromagnética en el espacio-tiempo hacia la región de futuro global dada por el gradiente de la distribución de corrientes [Romero & Pérez, 2011].

En modelos cosmológicos sin expansión acelerada, la asimetría descrita por Romero & Pérez 2011 no está presente debido a la ausencia de horizontes cosmológicos de partículas. En este Capítulo proponemos que los agujeros negros podrían también causar una asimetría en la contribución de corrientes en el pasado causal con respecto a las corrientes en el futuro causal de cualquier evento. Esto

<sup>2</sup> Ver Sciama 1973 y en particular Clarke 1977. Ver también Wheeler-Feynmann absorber theory [Wheeler & Feynman, 1945] [Wheeler & Feynman, 1949].

permite definir una “dirección temporal” aún en universos que no están en un estado de expansión acelerada (e.g. modelos cosmológicos de Friedmann).

El objetivo de este Capítulo es investigar el apantallamiento de corrientes por horizontes de eventos en las soluciones de las ecuaciones de Maxwell que determinan localmente el flujo electromagnético. En particular, mostramos que el cociente del área del horizonte de eventos respecto al área de una hipersuperficie radial tipo espacio en los modelos cosmológicos de Friedmann es siempre mayor a uno. Suponemos que el crecimiento del horizonte de eventos se debe a la expansión cosmológica y a la acreción de radiación del fondo cósmico de microondas (*cosmic microwave background*, CMB) a la cual todos los agujeros negros en el universo están expuestos. Esto determina un límite inferior al crecimiento total del área de agujeros negros. El resultado es que agujeros negros más grandes en el futuro ocultarán más corrientes que agujeros negros en el pasado de cualquier evento, con la consecuente asimetría que resulta de la Ec. 7.3.

A continuación se describen los modelos cosmológicos de Friedmann.

## 7.2 MODELOS COSMOLÓGICOS DE FRIEDMANN

Los modelos cosmológicos de Friedmann son casos particulares de los modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Los modelos de Friedmann están caracterizados por una constante cosmológica nula y la densidad de radiación es despreciable en relación a la densidad de materia. El elemento de línea de estos modelos en coordenadas comóviles  $(t, r, \theta, \phi)$  es:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2 R_0^{-2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (7.4)$$

Aquí  $a(t) \equiv R(t)/R_0$  es el factor de escala normalizado, donde  $R_0$  es el factor de escala para la época presente, y  $k$  toma los valores  $-1, 0,$  o  $1$  dependiendo si la sección espacial tiene curvatura negativa, nula, o positiva, respectivamente.

El factor de escala normalizado  $a(t)$  depende del signo de la curvatura espacial. Si  $\Omega_{m,0}$  y  $\Omega_{k,0}$  denotan las densidades de materia y energía de curvatura normalizadas presentes, respectivamente, los factores de escala normalizados para los modelos de Friedmann cerrado, plano, y abierto están dados por:

- Modelo de Friedmann cerrado ( $k > 0$ ):

$$a = \frac{\Omega_{m,0}}{2(\Omega_{m,0} - 1)} (1 - \cos \varphi), \quad (7.5)$$

$$t = \frac{\Omega_{m,0}}{2H_0(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} (\varphi - \sin \varphi), \quad (7.6)$$

donde el parámetro  $\varphi \in [0; 2\pi]$ .

Cuadro 12: Parámetros cosmológicos para los modelos cosmológicos de Friedmann cerrado, plano, y abierto :  $\Omega_{k,o}$ ,  $\Omega_{m,o}$ ,  $R_0$ , y  $t_0$  denotan los valores de la densidad de curvatura, densidad de materia, el factor de escala en  $t_0$ , y la edad del universo, respectivamente.

	FM Cerrado	FM Plano	FM Abierto
$\Omega_{k,o}$	-0,30	0	0,21
$\Omega_{m,o}$	1,30	1	0,79
$R_0$ [cm]	$2,52 \times 10^{28}$	$2,75 \times 10^{28}$	$2,98 \times 10^{28}$
$t_0$ [s]	$2,90 \times 10^{17}$	$3,06 \times 10^{17}$	$3,20 \times 10^{17}$

- Modelo de Friedmann plano ( $k = 0$ ):

$$a(t) = \left( \frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}. \quad (7.7)$$

- Modelo de Friedmann abierto ( $k < 0$ ):

$$a = \frac{\Omega_{m,o}}{2(1 - \Omega_{m,o})} (\cosh \varphi - 1), \quad (7.8)$$

$$t = \frac{\Omega_{m,o}}{2H_0(1 - \Omega_{m,o})^{3/2}} (\sinh \varphi - \varphi), \quad (7.9)$$

donde el parámetro  $\varphi > 0$ .

Tomamos para la constante de Hubble:

$$H_0 = 67,3 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}, \quad (7.10)$$

valor obtenido recientemente por la Colaboración Planck [Planck Collaboration et al., 2014].

Los valores de los parámetros cosmológicos<sup>3</sup>  $\Omega_{k,o}$ ,  $\Omega_{m,o}$ ,  $R_0$ , y  $t_0$  utilizados en este trabajo se presentan en la Tabla 12.

### 7.3 CRECIMIENTO DE AGUJEROS NEGROS EN CONTEXTOS COSMOLÓGICOS

Suponemos que al menos dos procesos distintivos contribuyen al crecimiento de un agujero negro durante el tiempo cósmico  $t$ . Por un lado, los agujeros negros participan de la expansión cosmológica; dado que los agujeros negros son esencialmente regiones del espacio-tiempo, los horizontes de eventos incrementan su tamaño junto con

<sup>3</sup> Los valores de la densidad de materia y curvatura en la época presente fueron calculados usando la ecuación:

$$\Omega_{m,o} + \Omega_{k,o} = 1. \quad (7.11)$$

Los valores del factor de escala presente fueron obtenidos a partir de:

$$R_0 = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (7.12)$$



todo el espacio-tiempo. Este no es el caso para objetos que se mantienen ligados por otras fuerzas que la gravitatoria, tales como estrellas de neutrones, planetas, etc. Proponemos métricas de McVittie generalizadas para representar agujeros negros en evolución cosmológica. Además, suponemos que los agujeros negros, inevitablemente, acretan fotones del CMB. Ésto impone una cota inferior absoluta al incremento de masa por acreción. Nuestra estimación es aproximada ya que tenemos en cuenta la radiación para la física local pero la despreciamos en la dinámica cosmológica global. En cualquier etapa cosmológica posterior al desacople de materia con radiación el error es despreciable. En las próximas subsecciones se detallan ambos procesos.

### 7.3.1 Expansión cosmológica

Suponemos que los agujeros negros son comóviles con la expansión cosmológica del universo. Para describir el incremento de tamaño del agujero negro debido a esta expansión, hacemos uso de la masa cuasi-local de Hawking-Hayward [Hawking, 1968] [Hayward, 1994], que mide la masa de una fuente de campo gravitacional ligada en un universo asintóticamente FRWL [Nolan, 1998]. Específicamente:

$$M_{\text{BH}}^{\text{HH}}(t) = M_0 a(t), \quad (7.13)$$

donde  $M_0$  es la masa del agujero negro en el presente y  $a(t)$  denota el factor de escala normalizado. Para implementar esta propuesta, reemplazamos la masa cuasi-local de Hawking-Hayward en las métricas de McVittie [McVittie, 1933] para un modelo cosmológico de Friedmann y, mediante las ecuaciones de Einstein, analizamos el tensor de energía-momento correspondiente.

Para un agujero negro cosmológico embebido en un modelo de Friedmann plano, proponemos la siguiente métrica en coordenadas comóviles:

$$ds^2 = - \frac{\left\{ 1 - \frac{[M_0 a(t)]}{2[r a(t)]} \right\}^2}{\left\{ 1 + \frac{[M_0 a(t)]}{2[r a(t)]} \right\}^2} dt^2 + a(t)^2 \left\{ 1 + \frac{[M_0 a(t)]}{2[r a(t)]} \right\}^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2); \quad (7.14)$$

mientras que para los modelos abierto y cerrado de Friedmann, las métricas correspondientes tienen la forma:

$$ds^2 = - \frac{\left\{ 1 - \frac{[M_0 a(t)]}{2[r a(t)]} \left( 1 \pm \frac{r^2}{4R_0^2} \right)^{1/2} \right\}^2}{\left\{ 1 + \frac{[M_0 a(t)]}{2[r a(t)]} \left( 1 \pm \frac{r^2}{4R_0^2} \right)^{1/2} \right\}^2} dt^2 + \frac{\left\{ 1 + \frac{[M_0 a(t)]}{2[r a(t)]} \left( 1 \pm \frac{r^2}{4R_0^2} \right)^{1/2} \right\}^4}{\left( 1 \pm \frac{r^2}{4R_0^2} \right)^2} a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (7.15)$$

donde  $\pm$  es el signo de la curvatura espacial. Nótese que si  $a(t) = 1$  y  $r \ll R_0$ , las métricas 7.14 y 7.15 se reducen a la métrica de

Schwarzschild en coordenadas físicas isotrópicas  $(t, a(t)r, \theta, \phi)$  para una masa central  $M_0 a(t)$ . En cambio, si  $M_0 = 0$ , recuperamos la geometría de los modelos de Friedmann.

La métrica asintóticamente plana 7.14 y su tensor de energía-momento correspondiente han sido analizados por Gao et al. 2008. La métrica resulta consistente con un tensor de energía-momento para un fluido imperfecto acretante sin presión. Enfatizamos que, asintóticamente, el tensor de energía-momento coincide con el del modelo cosmológico:

$$T_{\mu\nu} = \rho(r, t)u_\mu u_\nu + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu$$

$$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \rho_\infty(t)u_\mu u_\nu, \quad (7.16)$$

donde  $u^\mu \rightarrow (|g_{00}(r, t)|^{-1/2}, 0, 0, 0)$ ,  $q^\mu \rightarrow (0, q(r, t), 0, 0)$ , y  $\rho_\infty \propto H^2(t)$ , en acuerdo con las ecuaciones de Friedmann<sup>4</sup>.

Sostenemos que el mismo resultado puede extenderse a las métricas asintóticamente curvas 7.15. De acuerdo a las ecuaciones de Einstein, el contenido de materia de estas geometrías es un fluido imperfecto acretante que, asintóticamente, coincide con el de los modelos curvos de Friedmann ( $k \neq 0$ ):

$$T_{\mu\nu} = [P(r, t) + \rho(r, t)]u_\mu u_\nu + P(r, t)g_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu$$

$$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \rho_\infty(t)u_\mu u_\nu, \quad (7.18)$$

donde  $\rho_\infty(t) \propto H^2(t) \pm C a^{-2}(t)$ , con  $C$  una constante positiva, en acuerdo con las ecuaciones de Friedmann.

Hemos mostrado que las métricas dadas por las ecuaciones 7.14 y 7.15 son consistentes con la masa cuasi-local de Hawking-Hayward para un agujero negro embebido en un modelo cosmológico de Friedmann. Un análisis detallado de las superficies atrapadas para estas métricas se presentará en un trabajo futuro. En el resto de este Capítulo, suponemos que la masa cuasi-local de Haywking-Hayward es la masa efectiva del agujero negro embebido en un modelo cosmológico de Friedmann.

### 7.3.2 Acreción de radiación de fondo de microondas por agujeros negros

La tasa de acreción de fotones del CMB por un agujero negro viene dada por:

$$\dot{M}_{\text{BH}}^{\text{CMB}} = \pi b^2 n_{\text{CMB}}(z) \langle \epsilon_{\text{ph}} \rangle c, \quad (7.19)$$

donde  $b = (3\sqrt{3}r_S)/2$  es el parámetro de impacto crítico de un agujero negro de Schwarzschild ( $r_S$  denota un radio de Schwarzschild);  $n_{\text{CMB}}(z)$  y  $\langle \epsilon_{\text{ph}} \rangle$  son la densidad y energía de fotones del CMB como función del corrimiento al rojo  $z$ , respectivamente:

$$n_{\text{CMB}}(z) = 5 \cdot 10^{-2} \text{cm}^{-3} (1+z)^3, \quad (7.20)$$

$$\langle \epsilon_{\text{ph}} \rangle = 6 \cdot 10^{-6} \text{erg} (1+z). \quad (7.21)$$

<sup>4</sup> Ecuaciones de Friedmann:

$$H^2(t) \equiv \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m(t) - \frac{c^2 k}{R_0^2 a^2(t)}. \quad (7.17)$$

Por simplicidad, sólo consideramos agujeros negros supermasivos<sup>5</sup> de  $M_0 = 10^8 M_\odot$ . Las Ecs. 7.19 y 7.13 pueden escribirse como:

$$\dot{M}_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t) = 5,5 \cdot 10^{25} \pi \left( \frac{a_0}{a(t)} \right)^2 \frac{\text{erg}}{\text{s}}. \quad (7.22)$$

La variación de la masa de un agujero negro por acreción de fotones del CMB durante el intervalo de tiempo cósmico  $\Delta t = t - t_0$  ( $t_0$  es el valor del tiempo cósmico presente) puede obtenerse mediante la integración de la última ecuación:

$$\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t) = \int_{t_0}^t \frac{\dot{M}_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t')}{c^2} dt'. \quad (7.23)$$

Como se mencionó antes, se espera que también haya acreción de materia y corrientes, tal como se observa en núcleos galácticos activos [Romero & Vila, 2014]. Es en este sentido que nuestra estimación del crecimiento de la masa del agujero negro debido a la acreción de fotones del CMB resulta en un mínimo absoluto.

#### 7.4 FACTOR DE LLENADO

Definimos el *factor de llenado*, denotado  $f(t)$ , como el cociente entre el área del horizonte de eventos  $A_{\text{BH}}(t)$  y el área de una hipersuperficie radial tipo espacio en los modelos de Friedmann  $\Sigma(t)$ :

$$f(t) \equiv \frac{A_{\text{BH}}(t)}{\Sigma(t)}. \quad (7.24)$$

El área del horizonte de eventos en función del tiempo cósmico  $t$  tiene la forma:

$$A_{\text{BH}}(t) = \frac{16\pi G^2}{c^4} M_{\text{BH}}^{\text{TOT}}(t)^2, \quad (7.25)$$

donde

$$M_{\text{BH}}^{\text{TOT}}(t) = M_{\text{BH}}^{\text{HH}}(t) + \Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t). \quad (7.26)$$

El área de una hipersuperficie radial tipo espacio en los modelos de Friedmann puede derivarse del elemento de línea 7.4 y resulta:

$$\Sigma(t) = 4\pi R_0^2 r^2 a(t)^2. \quad (7.27)$$

Dadas las expresiones anteriores, obtenemos una fórmula para  $f(t)$  de las Ecs. 7.24, 7.25, y 7.27:

$$f(t) = \frac{4 G^2}{c^4 R_0^2 r^2 a(t)^2} [M_0 a(t) + \Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)]^2. \quad (7.28)$$

<sup>5</sup> Los agujeros negros supermasivos se encuentran en la mayor parte de las galaxias y tienen masas entre  $\approx 10^6$  hasta  $10^9 M_\odot$  [Romero & Vila, 2014]. La contribución al apantallamiento de corrientes por agujeros negros de masa estelar, en comparación, es despreciable.

Imponemos la condición de que el valor del factor de escala debe ser igual a 1 en el tiempo cósmico presente  $t_0$  y tomamos la hipersuperficie radial de coordenadas comóviles:

$$r = \frac{2GM_0}{c^2 R_0}. \quad (7.29)$$

El factor de llenado tiene la forma:

$$f(t) = 1 + \frac{2\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)}{M_0 a(t)} + \frac{\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)^2}{M_0^2 a(t)^2}. \quad (7.30)$$

A continuación se probará que la función  $f(t)$  es mayor a su valor presente  $f(t_0) = 1$ , para  $t > t_0$  en los modelos de Friedmann abierto, plano, y cerrado. Ésto resultará en una asimetría temporal para estos modelos.

#### 7.5 RESULTADOS: FACTOR DE LLENADO PARA LOS MODELOS COSMOLÓGICOS DE FRIEDMANN

En las Figura 80 mostramos los gráficos de la Ec. 7.23 como función del tiempo cósmico  $t$  para modelos de Friedmann cerrado, plano, y abierto. Se observa que la masa total del agujero negro siempre se incrementa debido a la acreción de fotones del CMB. En los modelos plano y abierto,  $\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)$  tiende aproximadamente a un valor constante para  $t \rightarrow \infty$ . La densidad y energía de los fotones del CMB es inversamente proporcional al factor de escala normalizado (Ecs. 7.20 y 7.21). Para un universo que siempre se expande, tales como los modelos plano y abierto, los agujeros negros acretan fotones cada vez menos energéticos para  $t \rightarrow \infty$ . Contrariamente, en el caso cerrado, mientras el universo colapsa,  $\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)$  tiende a infinito.

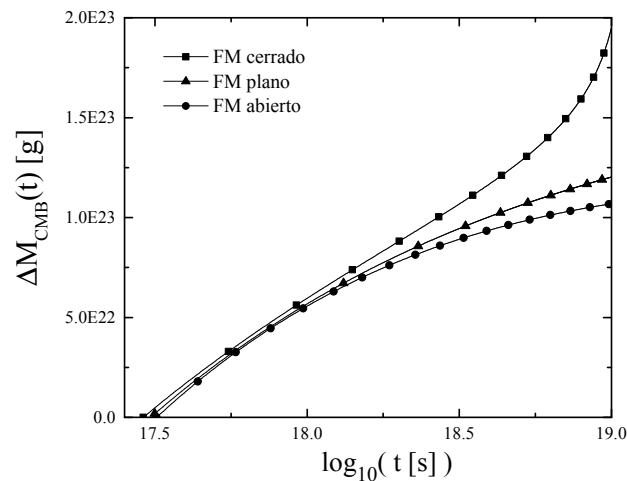


Figura 80: Gráficos de  $\Delta M_{\text{BH}}^{\text{CMB}}(t)$  en función del tiempo cósmico para los modelos de Friedmann (FM) cerrado, plano, y abierto.

En la Figura 81 se muestra el gráfico de la función  $f(t) - 1$  (ver Ec. 7.30) en función del tiempo cósmico. En los tres modelos cosmológicos,

$f(t) - 1$  es siempre positivo. Tanto para los modelos plano como abierto,  $f(t) - 1$  se incrementa hasta un valor máximo para  $t \approx 10^{18}$ s, y tiende a cero para valores grandes del tiempo cósmico. Éste no es el caso para el modelo cerrado; la función  $f(t) - 1$  posee un máximo y un mínimo local en  $t \approx 10^{18,2}$ s y  $t \approx 10^{18,5}$ s, respectivamente. Para  $t \rightarrow \infty$ ,  $f(t) - 1$  tiende a infinito.

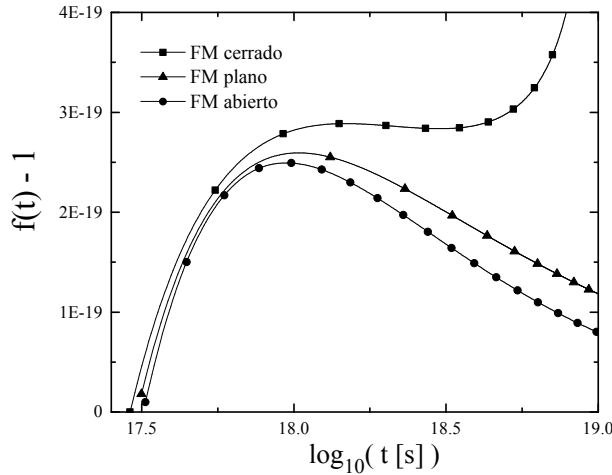


Figura 81: Gráficos de  $f(t) - 1$  en función del tiempo cósmico para los modelos de Friedmann (FM) cerrado, plano, y abierto.

## 7.6 IMPLICACIONES Y CONCLUSIONES

Hemos mostrado que el factor de llenado  $f(t)$  es siempre mayor respecto a su valor presente  $f(t_0) = 1$ , para  $t > t_0$  en los modelos cosmológicos de Friedmann plano, abierto, y cerrado. El crecimiento del área del horizonte de eventos de un agujero negro es siempre mayor que el área de una hipersuperficie tipo espacio en expansión cosmológica. La estructura causal de un dado punto del espacio-tiempo  $p(\mathbf{r}, t)$  está determinada por el pasado y futuro causal de  $p(\mathbf{r}, t)$ . Hay una asimetría en la contribución de las corrientes en el pasado causal con respecto al futuro causal debido al apantallamiento de corrientes por horizontes de eventos más grandes. Esto implica que  $J^-(p)$  y  $J^+(p)$  no son simétricas. Luego, los cuadri-potenciales  $A_{\text{ret}}^\mu$  y  $A_{\text{adv}}^\mu$  son diferentes. En todos los casos esto implica que  $g_{\mu\nu}L^\mu T^\nu > 0$ .

Aún para un universo en contracción, tal como el modelo cerrado de Friedmann, los procesos macroscópicos resultan irreversibles. Este resultado es contrario a la predicción hecha por [Hawking 1985](#), en la que se afirma que la dirección en que los procesos ocurren deberían revertirse si el universo pasa a un estado de contracción.

Puede argumentarse que en los modelos plano y abierto habrá un tiempo en que la temperatura de los agujeros negros será mayor que la temperatura del CMB y luego la evaporación de los agujeros negros se hará efectiva. Si bien esto es correcto, no afecta nuestro resultado dado que la radiación de Hawking es térmica [[Hawking, 1974, 1975](#)]

y las corrientes apantalladas nunca podrán recuperarse. Ésto deja la asimetría temporal intacta.

Penrose 1979 distinguió varios procesos fundamentales asimétricos en el universo que parecen ser independientes: 1) la Segunda Ley de la Termodinámica, 2) la flecha de radiación, 3) la expansión del universo, 4) la formación de agujeros negros<sup>6</sup>. Nuestro trabajo implica que los cuatro procesos asimétricos mencionados están todos relacionados en los modelos de Friedmann. Como hemos mostrado, existe una dirección temporal preferencial para el flujo de la energía electromagnética hacia el futuro. El flujo electromagnético  $L$  está relacionado con la temperatura macroscópica por medio de la ley de Stefan-Boltzmann:  $L = A\sigma_{SB}T^4$ , donde  $\sigma_{SB}$  es la constante de Stefan-Boltzmann. Si suponemos que la energía se conserva localmente, la temperatura de un cuerpo decrece hacia el futuro, incrementando su entropía de acuerdo a la Segunda Ley de la Termodinámica. La flecha de la radiación y la Segunda Ley de la Termodinámica surgen del apantallamiento de corrientes por agujeros negros más grandes a medida que el tiempo cósmico se incrementa.

Concluimos que el acoplamiento entre las condiciones cosmológicas globales y procesos gravitacionales, con procesos locales de naturaleza electromagnética da lugar a la irreversibilidad macroscópica local observada. Esta irreversibilidad aún existiría en el caso de un universo en colapso que contenga agujeros negros.

---

<sup>6</sup> La Segunda Ley de la Termodinámica: la entropía de un sistema cerrado nunca decrece. La flecha de radiación: sólo medimos potenciales retardados, aunque tanto los potenciales retardados como avanzados son soluciones de las ecuaciones de Maxwell. La expansión del universo: hay varios procesos involucrados en la expansión del universo tales como la recesión de las galaxias distantes o la disminución de la temperatura media del universo. La formación de agujeros negros: los agujeros blancos y negros son ambos soluciones de las ecuaciones de Einstein, relacionadas por una transformación de inversión temporal. Sin embargo, sólo los agujeros negros parecen existir. Los agujeros blancos son objetos intrínsecamente inestables [Eardley, 1974].

## AGUJEROS NEGROS Y ONTOLOGÍA DEL ESPACIO-TIEMPO

---

### 8.1 INTRODUCCIÓN

El presentismo es una tesis metafísica sobre lo que existe. Puede expresarse como (e.g. [Crisp 2003](#)):

*Presentismo.* Siempre es el caso que, para cada  $x$ ,  $x$  es presente.

El operador de cuantificación lógico es ilimitado. Para que la definición anterior tenga significado, el presentista debe dar una especificación del término “presente”. Crisp, en el trabajo citado, propone la siguiente definición:

*Presente.* La suma mereológica de todos los objetos con distancia temporal nula.

La noción de distancia temporal de Crisp es definida en forma poco rigurosa, pero de forma tal que está en acuerdo con el sentido común y el intervalo de tiempo físico entre dos eventos. De estas definiciones se desprende que el presente es una cosa, no un concepto. El presente es la agregación ontológica de todas las cosas presentes. Luego, si se dice que ‘ $x$  es presente’, significa que “ $x$  es parte del presente”.

La tesis opuesta al presentismo es el eternalismo, también llamado cuadri-dimensionalismo. Los eternalistas afirman la existencia de objetos pasados y futuros. La distancia temporal entre estos objetos es distinta de cero. El nombre cuadri-dimensionalismo proviene del hecho de que de acuerdo a los eternalistas, los objetos se extienden en el tiempo y, poseen un volumen cuadri-dimensional, con 3 dimensiones espaciales y 1 dimensión temporal. Existen distintas versiones del eternalismo. El lector puede consultar [Rea 2003](#) y las referencias allí dadas para una discusión sobre el eternalismo.

Varios filósofos han defendido la tesis del presentismo; entre éstos se destacan [Chisholm 1990](#), [Bigelow 1996](#), [Zimmerman 1996](#), [Zimmerman 2011](#), [Merricks 1999](#), [Hinchliff 2000](#), [Crisp 2007](#), y [Markosian 2004](#)<sup>1</sup>. Algunas de las críticas contra el presentismo se basan en la supuesta incompatibilidad del presentismo y la teoría de la Relatividad Especial. En lo que sigue, haremos una revisión de las principales objeciones a la tesis presentista en el marco de las teorías de la Relatividad Especial y General. Posteriormente, se presentará un nuevo tipo de argumento basado en la existencia de objetos compactos en el universo. Mostramos que el presentista no puede aceptar el actual conocimiento físico de estos objetos, sin introducir cambios su visión ontológica<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Ver también la revisión de [Mozersky 2011](#).

<sup>2</sup> Algunos autores tales como [Savitt 2006](#), [Dorato 2006](#), [Dolev 2006](#), y recientemente [Norton 2013](#) han argumentado que la disputa entre presentismo y eternalismo no es

## 8.2 PRESENTISMO, RELATIVIDAD ESPECIAL, Y RELATIVIDAD GENERAL

La teoría de la Relatividad Especial postula la invarianza de Lorentz de los enunciados de las leyes de la física en un tipo particular de sistemas de referencias denominados *sistemas de referencia inerciales*. De aquí el carácter ‘restringido’ o ‘especial’ de la teoría. Las ecuaciones de la electrodinámica de Maxwell son invariantes ante transformaciones de Lorentz, a diferencia de las ecuaciones de la mecánica clásica. Cuando la mecánica clásica se corrige para que las ecuaciones de la teoría sean invariantes bajo transformaciones de Lorentz entre sistemas de referencia inerciales, varias modificaciones surgen. La más notable es la imposibilidad de definir una relación de simultaneidad absoluta entre eventos. La relación de simultaneidad resulta dependiente del sistema de referencia. Luego, algunos eventos pueden ser eventos futuros en algún sistema de referencia, presentes, o pasados en otros sistemas. Dado que lo que existe no puede depender del sistema de referencia adoptado para describir la naturaleza, se concluye que tantos los eventos pasados, presentes, y futuros existen. Luego, el presentismo es falso.

Este argumento ha sido formulado con distintos niveles de sofisticación por filósofos tales como [Smart 1963](#), [Rietdijk 1966](#), y [Putnam 1967](#). En particular, Rietdijk y Putnam argumentaron en forma independiente que la Relatividad Especial implica el determinismo. Esta posición fue revisada por [Maxwell 1985](#) en la década de los ochenta. Éste sostenía que el probabilismo<sup>3</sup> y la Relatividad Especial eran incompatibles. Fuertes objeciones a Rietdijk, Putnam, y Maxwell pueden encontrarse en [Stein 1968, 1991](#)<sup>4</sup>. En su trabajo de 1991, Stein mostró que la apertura del futuro relativa al pasado para cualquier región del espacio-tiempo es, dada la Relatividad Especial, lógicamente incompatible con la estructura temporal global objetiva [[Harrington, 2009](#)]. En los últimos años, [Harrington 2008, 2009](#) defendió una teoría de temporalidad local, también llamada teoría *point-present*, en la que suponiendo la Relatividad Especial se permite la posibilidad de un futuro abierto, i.e no determinado completamente (ver también [Ellis 2006](#) y [Ellis & Rothman 2010](#)).

El argumento a favor del eternalismo a partir de la Relatividad Especial es particularmente fuerte en la reformulación de esta teoría propuesta por Hermann Minkowski. [Minkowski 1907, 1909](#) introdujo el concepto de espacio-tiempo: la suma mereológica de todos los eventos. El espacio-tiempo puede representarse mediante una variedad cuadri-dimensional dotada de una métrica que permite calcular distancias entre eventos. Estas son distancias espacio-temporales o

---

genuina. En este trabajo no estamos interesados en esta disputa sino en la consistencia del presentismo con la teoría de la Relatividad General.

3 El Probabilismo es la tesis en la que el universo es tal que, para cualquier instante, existe sólo un pasado pero muchos futuros alternativos [[Maxwell, 1985](#)].

4 La controversia entre Putman y Stein fue discutida por [Saunders 2002](#).



*intervalos*. El intervalo diferencial en el espacio-tiempo de Minkowski, que es invariante bajo transformaciones de Lorentz, es:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \quad (8.1)$$

donde el tensor métrico Minkowskiano  $\eta_{\mu\nu}$  es pseudo-Euclideo, de rango 2 y traza  $-2$ . Las coordenadas con el mismo signo se denominan *espaciales* (la convención usual en la notación es  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ , y  $x^3 = z$ ) y la coordenada  $x^0 = ct$  se denomina *coordenada temporal*. La constante  $c$  denota la velocidad de la luz en el vacío.

La interpretación de Minkowski permite separar el espacio-tiempo, en cada punto (cada punto representa un evento), en tres regiones de acuerdo a si  $ds^2 < 0$  (región tipo espacio),  $ds^2 = 0$  (región tipo luz o nula), y  $ds^2 > 0$  (región tipo tiempo). Las partículas que atraviesan el origen de coordenadas sólo pueden moverse por regiones tipo tiempo. La superficie nula  $ds^2 = 0$  sólo puede ser habitada por partículas que se mueven a la velocidad de la luz, como los fotones. Puntos en la región tipo espacio no pueden ser alcanzados por objetos materiales del origen del *cono de luz* que puede formarse en cada punto del espacio-tiempo (ver Fig. 82).

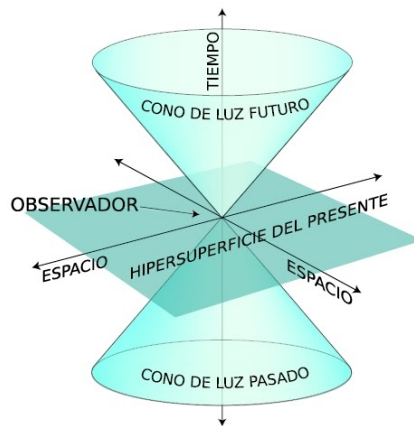


Figura 82: Cono de luz. Se muestran el pasado y futuro causal, y el plano presente del evento central.

La introducción de una métrica permite definir el futuro y el pasado de un dado evento. Una vez que esto se hace, todos los eventos tipo tiempo pueden clasificarse por la relación *antes de* o *después de*. La designación de un evento como *presente* o *ahora*, es completamente convencional. Ser presente no es una propiedad intrínseca de cualquier evento. Más bien, es una propiedad relacional que requiere la interacción con un ser consciente. La extinción de los dinosaurios siempre será anterior al comienzo de la Segunda Guerra Mundial. Pero este último evento era presente para algunos seres humanos en un dado estado físico. El presente es una propiedad como el olor o el color. Emerge de la interacción de individuos auto-cocientes con cosas cambiantes y no tiene existencia independientemente de ellos (ver Grünbaum 1973, Capítulo X, Romero 2015b).

Aunque el argumento anterior parece convincente, hay una hipótesis ontológica fuerte: se supone la existencia del sistema de todos los eventos. Ésto simplifica al físico, pero puede aterrar al filósofo. Los presentistas pueden rechazar esta hipótesis, pero ¿existe una interpretación alternativa de la Relatividad Especial con el mismo poder predictivo y explicativo como la de Minkowski?

La alternativa existe y fue propuesta por [Poincaré 1902](#) en la forma de la tesis convencionalista. Poincaré remarcó que es siempre posible salvar una interpretación basada en la geometría física Euclidea si campos adicionales se introducen en la teoría para ajustar todas las cantidades físicas (longitudes, masas, velocidades) a la geometría que se adopta. En el caso de la Relatividad Especial, ésto da lugar a la teoría de Lorentz de los cuerpos en movimiento. Los físicos siempre van a preferir la teoría más simple, pero el presentista puede argumentar que desde un punto de vista ontológico, la interpretación de Minkowski es mucho más costosa que la del presentista: una teoría 3-dimensional Euclidea e invariante de Lorentz. Un espacio-tiempo Euclideo es consistente con el presentismo ya que el intervalo puede escribirse como:

$$ds^2 = (cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (8.2)$$

Luego, dado que en un sistema propio  $ds = cd\tau$ , y usando la invarianza del intervalo obtenemos:

$$d\tau^2 = dt^2 + \frac{1}{c^2} d\vec{x}^2 = dt^2 (1 + \vec{\beta}^2), \quad (8.3)$$

donde

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}.$$

De la Ec. 8.3 se sigue que  $d\tau = 0$  sí y sólo si  $dt = 0$ . Todos los eventos tienen distancia temporal cero en el plano 3-dimensional Euclideo. Una discusión completa se presenta en [Craig 2001](#).

Una geometría euclidea puede preservarse (a un precio alto, i.e. introduciendo campos distorsionadores) en Relatividad Especial dado que tanto las geometrías Euclideas y Minkowskianas tienen curvatura intrínseca nula. La curvatura de una dada variedad viene dada por el tensor de Riemman  $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ , formado con derivadas segundas de la métrica. Este tensor es idénticamente nulo para cualquier espacio-tiempo con una métrica constante. Dado que la curvatura intrínseca es la misma en las geometrías Euclidea y Minkowskiana, siempre es posible encontrar una transformación global entre estas. Para espacios-tiempos más generales, representados por variedades con curvatura intrínseca, tales transformaciones sólo pueden ser locales. Ésto nos lleva a la Relatividad General.

En la ausencia de gravedad, como en el espacio-tiempo de Minkowski, siempre es posible encontrar un sistema global de coordenadas  $(\xi^\alpha)$  en el que la métrica toma la forma dada por 8.1 en todo punto. Con gravedad, contrariamente, dicho sistema de coordenadas puede

sólo representar al espacio-tiempo en una vecindad infinitesimal de un dado punto. La curvatura del espacio-tiempo significa que no es posible encontrar coordenadas en las que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  en todo punto de la variedad. Siempre es posible, sin embargo, representar el evento (punto)  $P$  en un sistema tal que  $g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}$  y  $(\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\sigma)_P = 0$ .

Un aspecto crucial de la Relatividad General es que el espacio-tiempo 4-dimensional con curvatura no nula ya no es más prescindible. ¿Ésto implica que el presentismo debe abandonarse? No necesariamente.

Thomas Crisp [Crisp, 2007] propuso un modelo “presentista amigable” de la Relatividad General; sugirió que el mundo puede representarse mediante una hipersuperficie tipo espacio 3-dimensional que evoluciona en el tiempo. Esta interpretación requiere introducir una foliación preferencial del espacio-tiempo, y considerar la descomposición usual  $3 + 1$  para la dinámica del espacio-tiempo de manera tal que ‘el presente’ se identifica con la hipersuperficie en evolución.

Para poder formular dicho modelo de espacio-tiempo deben imponerse algunas restricciones globales: tiene que ser posible una foliación en hipersuperficies de Cauchy de manera tal que permita la existencia de campos vectoriales globales tipo-tiempo que pueden usarse para introducir una “coordenada temporal global” como, por ejemplo, en la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Entre las condiciones generales para dichas métricas se incluye la ausencia de horizontes de Cauchy y el cumplimiento de las llamadas *condiciones de energía* [Hawking & Ellis, 1973].

Aunque se pueden exponer argumentos en contra del modelo de Crisp, tales como métricas generales inhomogéneas y violaciones masivas de las condiciones de energía basadas en datos cosmológicos recientes (e.g. Plebanski & Krasinski 2006), en lo que sigue nos concentraremos en aspectos locales que deben satisfacerse en cualquier modelo cosmológico compatible con la astrofísica actual.

### 8.3 AGUJEROS NEGROS Y EL PRESENTE

El tipo más simple de agujero negro es descrito por la métrica de Schwarzschild; esta métrica caracteriza la geometría del espacio-tiempo fuera de una distribución de materia esféricamente simétrica (ver Capítulo 2). La métrica de Schwarzschild para una masa  $M$  está dada por la Ec. 2.20.

Los conos de luz pueden calcularse de la métrica 2.20 imponiendo la condición  $ds^2 = 0$ . Luego:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right), \quad (8.4)$$

donde tomamos  $c = 1$ . Debe notarse que cuando  $r \rightarrow \infty$ ,  $dr/dt \rightarrow \pm 1$ , como en el espacio-tiempo de Minkowski. Cuando  $r \rightarrow 2GM$ ,  $dr/dt \rightarrow 0$ , la luz se mueve sobre la superficie  $r = 2GM$ . El horizonte es, pues, una superficie nula. Para  $r < 2GM$ , el signo de la derivada se invierte. La región interna a  $r = 2GM$  es tipo tiempo para cualquier sistema físico que ha cruzado el horizonte de eventos. En la Fig. 83

se muestra el comportamiento de los conos de luz en coordenadas de Schwarzschild. Cuando nos acercamos al horizonte de eventos, los conos de luz se hacen más angostos indicando la restricción a las posibles trayectorias impuestas por la curvatura creciente. Del otro lado del horizonte la dirección del tiempo se ‘invierte’ en el sentido que trayectorias nulas o tipo tiempo tienen en su futuro la singularidad en el centro del agujero negro.

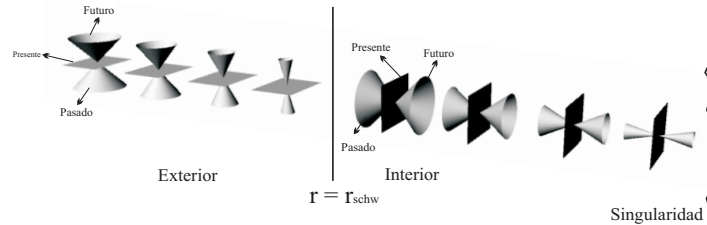


Figura 83: Diagrama de espacio-tiempo en coordenadas de Schwarzschild donde se muestra los conos de luz cerca y dentro del agujero negro.

Una consecuencia muy interesante de todo esto es que un observador en el horizonte tendrá su presente *sobre* el horizonte. Todos los eventos que ocurren en el horizonte son simultáneos. La distancia temporal del observador en cualquier punto en el horizonte a cualquier evento que ocurre en el horizonte es cero (el observador se encuentra sobre una superficie nula  $ds = 0$  siendo el intervalo de tiempo propio necesariamente cero<sup>5</sup>). Si el agujero negro ha existido durante toda la historia del universo, todos los eventos en el horizonte durante dicha historia (por ejemplo la emisión de fotones en el horizonte por materia cayendo al agujero negro) son *presentes* para cualquier observador cruzando el horizonte. Estos eventos no son todos presentes para un observador fuera del agujero negro. Si el observador externo es un presentista, pensará seguramente que algunos de esos eventos no existen porque ocurrieron o ocurrirán tanto en el pasado como en el futuro remoto. Pero si aceptamos que lo que existe no puede depender del sistema de referencia adoptado para la descripción de los eventos, parece que tenemos aquí un argumento contra el presentismo.

Remarcamos que el horizonte 1) no depende del sistema de coordenadas elegido para describir al agujero negro (Capítulo 2), 2) es una superficie nula absoluta en el sentido de que es una propiedad intrínseca y no dependiente del sistema de referencia, y 3) es no-singular (o ‘bien comportada’, i.e. el espacio-tiempo es regular en el horizonte).

Se pueden considerar agujeros negros más complejos, como por ejemplo agujeros negros de Kerr, Reissner-Nordström, o Kerr-Newman. En todos éstos el horizonte externo de eventos es una superficie nula; las consideraciones arriba expuestas siguen siendo válidas. Los agujeros negros rotantes introducen problemas adicionales a la tesis del presentismo, relacionados con la existencia de horizontes de Cauchy y curvas temporales cerradas, pero no discutiremos estas cuestiones

<sup>5</sup> Esto nunca puede ocurrir en el espacio-tiempo de Minkowski ya que los fotones sólo pueden existir en las superficies nulas. El horizonte de eventos, una superficie nula, puede ser cruzado por partículas masivas

aquí. Más bien, nos concentraremos en las implicaciones de la existencia de superficies nulas, que pueden ser cruzadas por partículas masivas u observadores, para el presentismo.

#### 8.4 IMPLICACIONES ONTOLÓGICAS

En un mundo descrito por la Relatividad Especial, la única forma de cruzar una superficie nula es moviéndose a una velocidad mayor que la velocidad de la luz. Como hemos visto, este no es el caso para un universo que contiene agujeros negros. A continuación, exponemos un argumento contra el presentismo.

Argumento A1:

- P1: Existen agujeros negros en el universo.
- P2: Los agujeros negros se describen correctamente mediante la teoría de la Relatividad General.
- P3: Los agujeros negros poseen superficies cerradas nulas (horizontes).
- Luego, existen superficies cerradas nulas en el universo.

Argumento A2:

- P4: Todos los eventos en una superficie cerrada nula son simultáneos con cualquier evento en la misma superficie.
- P4i: Todos los eventos en una superficie cerrada nula son simultáneos con el nacimiento del agujero negro.
- P5: Algunos eventos distantes son simultáneos con el nacimiento del agujero negro, pero no con otros eventos relacionados con el agujero negro.
- Luego, existen eventos que son simultáneos en un sistema de referencia, pero no en otro.

La simultaneidad depende del sistema de referencia. Dado que lo que existe no puede depender del sistema de referencia, concluimos que existen eventos no simultáneos. Luego, el presentismo es falso.

Veamos cuáles de las hipótesis de nuestro argumento están abiertas a la crítica del presentista.

Un presentista irreductible podría rechazar completamente P1. Aunque hay evidencia astronómica significativa que apoya la existencia de agujeros negros (e.g. [Camenzind 2007](#), [Paredes 2009](#), [Romero & Vila 2014](#)), la naturaleza particular de este tipo de objetos deja lugar a algunas especulaciones tales como *gravastars*, y otros objetos exóticos compactos. El precio por rechazar P1, sin embargo, es muy alto: los agujeros negros son componentes básicos de la mayor parte de los mecanismos que explican eventos extremos en astrofísica, desde cuasares a los denominados *gamma-ray bursts*, desde la formación de galaxias

hasta la producción de jets en sistemas binarios. El presentista que rechaza los agujeros negros debería reformular la astrofísica de altas energías actual en términos de nuevos mecanismos. De todos modos, P1 es susceptible de validación empírica a través de imágenes directas de la “sombra” del agujero negro supermasivo en el centro de la Vía Láctea a través de técnicas sub-milimétricas en la próxima década (e.g. Falcke et al. 2011). Mientras tanto, la evidencia a favor de la existencia de los agujeros negros es abrumadora, y muy pocos científicos los rechazarían sólo en base a consideraciones metafísicas.

El presentista podría, en cambio, rechazar P2. Después de todo, sabemos que la Relatividad General no es válida a escalas de Planck. ¿Por qué podría proveer una descripción correcta de los agujeros negros? La razón es que el horizonte de un agujero negro está bastante lejos de la región donde la teoría falla (la singularidad). La distancia, en el caso de un agujero negro de Schwarzschild, es  $r_s$ . Para un agujero negro de 10 masas solares, como el que se supone forma parte del sistema binario Cygnus X-1, el radio de Schwarzschild es de 30 km; y para el agujero negro en el centro de la galaxia, el radio de Schwarzschild es de alrededor de 12 millones de km. Cualquier teoría de la gravitación debería proveer los mismos resultados que la Relatividad General a tales distancias.

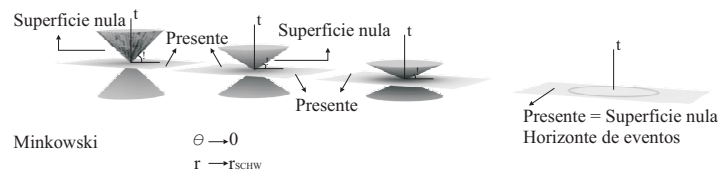


Figura 84: Ángulos de apertura de los conos de luz a diferentes distancias del horizonte del agujero negro de Schwarzschild. En el horizonte la superficie nula coincide con el hiperplano del presente.

No hay mucho para hacer con P4, dado que sigue de la condición que define una superficie nula<sup>6</sup>:  $ds = 0$ ; en forma similar, P4i sólo especifica uno de los eventos en la superficie nula. El presentista podría negarse a identificar ‘el presente’ con una superficie nula. Después de todo, en el espacio-tiempo de Minkowski o incluso en un espacio-tiempo pseudo-Riemanniano globalmente orientable en el tiempo, el presente suele tomarse como el hiperplano perpendicular al tiempo local. Pero en espacio-tiempos con agujeros negros, el horizonte no es sólo una superficie nula, sino también una superficie localmente normal a la dirección del tiempo. Esto puede apreciarse en la Figura 84, donde el ángulo  $\theta$  es el ángulo entre la superficie nula y el hiperplano del presente. En el espacio-tiempo de Minkowski dicho ángulo es  $45^\circ$  cuando la velocidad de la luz se mide en unidades naturales ( $c = 1$ ). En este espacio-tiempo, el plano del presente no coincide con la superficie nula. Sin embargo, cerca del horizonte de eventos del agujero negro, la situación cambia, como se observa de la Ec. 8.4. A medida que nos acercamos al horizonte,  $\theta$  tiende a cero, i.e. la superficie nula

<sup>6</sup>  $ds = cd\tau = 0 \rightarrow d\tau = 0$ , donde  $d\tau$  es la separación temporal propia.

coincide con el plano del presente. En el horizonte, ambas superficies coinciden exactamente:  $\theta \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow r_S$ . El presentista que rechace la identificación del presente con una superficie cerrada nula en el horizonte de eventos debería abandonar su creencia acaso más estimada: la identificación del ‘presente’ con hipersuperficies que son normales a la dirección temporal local.

El resultado obtenido no es una consecuencia de la elección particular de coordenadas sino de una propiedad intrínseca de los agujeros negros. Esta afirmación puede probarse como sigue: las simetrías del espacio-tiempo de Schwarzschild implican la existencia de una función radial preferencial,  $r$ , que sirve como un parámetro afín a lo largo de ambas direcciones nulas. El gradiente de esta función,  $r_{\alpha} = \nabla_{\alpha} r$ , satisface ( $c = G = 1$ ):

$$r^{\alpha} r_{\alpha} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (8.5)$$

Luego,  $r^{\alpha}$  es tipo espacio para  $r > 2M$ , nulo para  $r = 2M$ , y tipo tiempo para  $r < 2M$ . La superficie 3-dimensional dada por  $r = 2M$  es el horizonte H del agujero negro en el espacio-tiempo de Schwarzschild. De la Ec. 8.5 se sigue que  $r^{\alpha} r_{\alpha} = 0$  sobre H, y luego H es una superficie nula<sup>7</sup>.

La premisa P5, acaso, es la más prometedora para la defensa del presentista. Podría argumentarse que los eventos en el horizonte no son simultáneos con cualquier evento en el universo externo. Éstos están, en un sentido preciso, extirpados del universo, y luego no pueden ser simultáneos con cualquier evento distante. A continuación ofrecemos un contraejemplo.

Los denominados *long gamma-ray bursts* se piensan son el resultado de la implosión de una estrella muy masiva que rota rápidamente. El núcleo de la estrella se convierte en un agujero negro, que acreta material del remanente estelar. Ésto produce un crecimiento en la masa del agujero negro y la eyección de materia de la región magnetizada central en forma de jets relativistas (e.g. Woosley 1993). Aproximadamente, uno de estos eventos ocurre en el universo por día. Se detectan con

<sup>7</sup> Un caso interesante es el espacio-tiempo de Schwarzschild en las coordenadas de Painlevé-Gullstrand. En estas coordenadas el intervalo se escribe como:

$$ds^2 = dT^2 - \left(dr + \sqrt{\frac{2M}{r}} dT\right)^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (8.6)$$

con

$$T = t + 4M \left( \sqrt{\frac{2M}{r}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{2M}{r}} - 1}{\sqrt{\frac{2M}{r}} + 1} \right| \right). \quad (8.7)$$

Si el presentista elige identificar el presente con las superficies  $T = \text{constante}$ , de la Ec. 8.6:  $ds^2 = -dr^2 - r^2 d\Omega^2$ . Debe notarse que para  $r = 2M$  éste es el horizonte de eventos que, además, es una superficie nula. Luego, con dicha elección, el presentista está considerando que el horizonte de eventos es la hipersuperficie del presente, para todos los valores de  $T$ . Esta elección de coordenadas muestra claramente que la estrategia usual del presentista para definir el presente en Relatividad General contradice su posición si el espacio-tiempo permite los agujeros negros.



satélites tales como *Swift* (e.g. Piran & Fan 2007), con duraciones de algunas décimas de segundos. Este es el tiempo que le lleva al agujero negro “tragar” la estrella colapsada. Antes de estos 10 segundos, el agujero negro no existía para el observador distante O1. Luego, existe un agujero negro en el universo que se extenderá mucho más que la vida humana. Consideremos ahora un observador O2 en colapso con la estrella. En cierto instante, ésta cruzará la superficie nula del horizonte. Ésto ocurrirá dentro de los 10 segundos que el colapso dura para O1. Pero para O2 todos los fotones que cruzan el horizonte son simultáneos, incluso aquellos que dejaron a O1 mucho después de los 10 segundos y cruzaron el horizonte luego de haber recorrido un largo trayecto. Por ejemplo, fotones que hayan dejado el planeta de O1 un millón de años después del *gamma-ray burst*, pueden cruzar el horizonte, y luego interactuar con O2. Entonces, la formación del agujero negro es simultánea con eventos en O1 y O2, pero estos mismos eventos de O2 son simultáneos con eventos en el futuro distante de O1. Esta situación se ilustra en la Fig. 85.

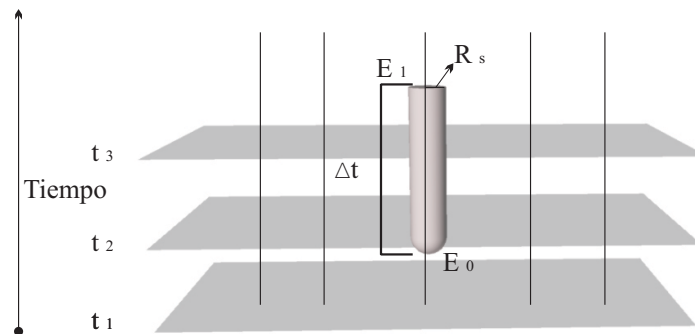


Figura 85: Foliación de un espacio-tiempo temporalmente orientable con un agujero negro. El período de tiempo desde el nacimiento del agujero negro al evento  $E_1$  es  $\Delta t$ .

Podría objetarse que O2 nunca alcanza el horizonte, dado que el proceso de acercamiento le lleva un tiempo infinito para un sistema de referencia lejano tal como O1. Esto es, sin embargo, un efecto de la elección del sistema de coordenadas y de la aproximación de partícula de prueba (ver, por ejemplo Hoyng 2006, p.116). Si el proceso se representa en coordenadas de Eddington-Finkelstein, la estrella desaparece en un tiempo finito (los *gamma-ray burst* son eventos bastante cortos). Procesos de acreción/ejección, muy bien documentados en núcleos galácticos activos y microcuasares (e.g. Mirabel et al. 1998) también muestran que el tiempo para alcanzar el horizonte de eventos es finito en la región asintóticamente plana del espacio-tiempo.

Nuestra conclusión es que el presentismo, provee una imagen defectuosa del substrato ontológico del mundo.

## 8.5 COMENTARIOS FINALES

¿Qué tipo de visión ontológica es compatible con la astrofísica de agujeros negros? Sugerimos una en la cual lo que llamamos ‘presente’



tenga un carácter local en vez de global. La separación entre el tiempo local y global que ocurre en los agujeros negros, como hemos visto, pone en jaque la posición del presentista. No hay forma de re-identificar el presente para devolverle un significado global en un universo con agujeros negros.

La ontología intuitiva adoptada por la mayor parte de los astrofísicos es aquella en la que hay cosas, y estas cosas cambian en relación entre ellas. Se puede especular que el espacio-tiempo es una propiedad emergente del sistema de todas las cosas (e.g. [Bunge 1977](#), [Perez Bergliaffa et al. 1998](#)). La formulación exacta de tal teoría ontológica que abarque una visión relativista del mundo, teniendo en cuenta las peculiaridades de los efectos no-locales en mecánica cuántica, es un problema abierto. Un problema que reclama tanto la atención de filósofos como de científicos (ver [Romero 2015a](#) para una discusión en esta dirección).



## MIMICKERS

## 9.1 INTRODUCCIÓN

Aunque hay evidencia astronómica significativa que apoya la existencia de los agujeros negros (Camenzind 2007, Paredes 2009, Romero & Vila 2014), hasta el momento no se ha probado en forma incontrovertible que los objetos compactos asociados a eventos astrofísicos extremos sean agujeros negros. La propiedad básica que define a un agujero negro es la existencia de un horizonte de eventos (ver Cap. 2). Siendo el horizonte de eventos una superficie de infinito corrimiento al rojo, es imposible la validación empírica de los mismos mediante observaciones electromagnéticas [Abramowicz et al., 2002].

Desde el punto de vista teórico, la existencia de horizontes de eventos parecería violar la evolución unitaria requerida por la Mecánica Cuántica<sup>1</sup>. Esta afirmación puede ilustrarse con los siguientes dos ejemplos:

1. Supongamos se tiene un agujero negro de masa  $M$  y un sistema cuántico en un estado puro. Al estado total del sistema lo llamamos  $S1$ . Dejamos que el sistema evolucione solo, esto es, no se hace trabajo sobre el mismo; el sistema cuántico cae al agujero negro. La masa del agujero negro pasa de  $M$  a  $M + \delta M$ . Luego de un tiempo suficiente, por evaporación, la masa del agujero negro es nuevamente  $M$ . El sistema pasó a un estado  $S2$  en el cual el resultado es exactamente el mismo agujero de masa  $M$  y un fotón térmico. El fotón térmico, sin embargo, no es un estado puro: la radiación térmica es una mezcla de estados. Luego, hay un proceso natural que transforma un estado puro en otro que no lo es, sin trabajo externo. La unitariedad de la evolución se viola.
2. Supongamos se tiene un gas de estados puros que colapsa y forma un agujero negro. Si éste se deja evaporar, luego de un tiempo considerable, se obtiene un gas de partículas térmicas (estados mixtos). Entonces, existen procesos que sólo dependen de la teoría de la gravitación y la teoría de campos en espacio-tiempo curvo que, sin trabajo externo, transforman un sistema puro en uno mixto, violando la evolución unitaria de la Mecánica Cuántica.

Hay varias soluciones posibles a este problema: hay quienes proponen que la Relatividad General deja de ser válida en el horizonte

<sup>1</sup> La mecánica cuántica predice la evolución unitaria del cualquier sistema puro sobre el que el Hamiltoniano  $H$  es constante, o sea sobre el que no hay interacción externa. Esto significa que un estado puro permanece puro.

de eventos. Suponen que en el horizonte hay un campo cuántico con enormes fluctuaciones de vacío que destruyen lo que cae al agujero negro haciendo trabajo sobre el sistema cuántico y destruyendo la unitariedad. A esa superficie caótica y violenta de estados cuánticos de muy alta energía la denominan *firewall* [Almheiri et al., 2013]. Una de las falencias más graves de esta propuesta es la violación del Principio de Equivalencia, principio que está bien probado precisamente al nivel de curvatura del horizonte de eventos. Por otro lado, para agujeros negros supermasivos no se tiene siquiera campo fuerte.

Una posible solución al problema, acaso la más económica, es pensar que no existen los horizontes de eventos, *ergo*, no existen los agujeros negros. De esta forma, tanto la Relatividad General como la Mecánica Cuántica permanecen intactas. Los agujeros negros, pues, podrían reemplazarse por objetos astrofísicos que se comportan como agujero negro para cualquier observación astronómica posible, pero que no lo son. Denominaremos esta clase de objetos *mimickers*.

Entre los objetos exóticos que se han propuesto para “reemplazar” a los agujeros negros se incluyen las estrellas de bosones<sup>2</sup>, que consisten en sistemas autogravitantes de bosones y campos escalares [Liebling & Palenzuela, 2012], *superspinars*: objetos cuyo momento angular excede el de Kerr, con algún tipo de materia que reemplace la singularidad anillo interior [Gimon & Hořava, 2009]; *quark stars* o estrellas extrañas, objetos hipotéticos con una ecuación de estado de gran rigidez que permite que la materia exista en un régimen hiperdenso.

Otro tipo diferente de objeto hipotético son las *Gravitational Vacuum Stars* o *gravastars* [Mazur & Mottola, 2001]. Se construyen en forma matemática como objetos compactos cuyo interior es de de Sitter y su geometría exterior es Schwarzschild para una masa total arbitraria  $M$ . Estas regiones están separadas por una capa de material pequeña y de anchura finita cuya ecuación de estado es de la forma  $P = +\rho c^2$  que reemplaza tanto los horizontes clásicos de de Sitter como de Schwarzschild. La región interior tiene una ecuación de estado de la forma  $P = -\rho c^2$  de manera tal que las condiciones de energía se violan y los teoremas de singularidades no se aplican. La solución, pues, no posee singularidades ni horizontes de eventos. Trabajos teóricos recientes, sin embargo, han mostrado que *gravastars* como otros modelos alternativos a los agujeros negros no son estables si rotan [Cardoso et al., 2008]. Además, como mostraron Cattoen et al. 2005, para que estrellas compactas estáticas sean estables se requiere de un tensor de energía-impulso anisotrópico.

Un modelo dinámico de mimicker fue propuesto por Barceló et al. 2008: las *dark stars* son objetos en un estado continuo de colapso que, sin embargo, nunca desarrollan un horizonte de eventos; se evita la aparición de un horizonte invocando efectos cuánticos.

Otra posibilidad es explorar el colapso gravitacional de materia con una ecuación de estado tal que se tenga una transición suave desde un estado politrópico a uno de rigidez infinita lo que permitiría un rebote. Una ecuación de estado de este tipo fue propuesta por Mbonye

<sup>2</sup> Las partículas en estos objetos no obedecen el Principio de Exclusión Pauli, y por ello pueden ser muy compactas.

& Kazanas 2005 para describir el interior de un agujero negro regular. Como se mostró en el Cap.3, dicha solución es termodinámicamente y dinámicamente inestable.

En este capítulo proponemos un modelo de *mimicker* que consiste en un sistema que colapsa y rebota (*bouncing system*) cuya ecuación de estado para la materia está descrita por la ecuación de Mbonye & Kazanas 2005. Dado que el rebote se producirá muy cerca del correspondiente radio de Schwarzschild del sistema, donde el corrimiento al rojo es muy grande, el rebote resultaría inobservable.

En la próxima sección se procederá a detallar las características del modelo de *mimicker*.

## 9.2 MODELO DE MIMICKER

### 9.2.1 Ecuación de estado

Consideramos sólo la evolución dinámica del núcleo del sistema en los últimos estadios del colapso gravitacional.

Suponemos que la ecuación de estado del fluido tiene la forma [Mbonye & Kazanas, 2005]:

$$p(\rho) = \left[ \alpha - (\alpha + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^2 \right] \left( \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \rho, \quad (9.1)$$

donde  $p$  es la presión,  $\alpha = 2,2135$ , y  $\rho_{\max}$  denota la densidad máxima cuando se produce el rebote. La ecuación de estado 9.1 describe el comportamiento de la materia que cambia en forma suave de normal a un núcleo de “fluido exótico”, de forma tal que  $p_r = -\rho$  cuando  $r \rightarrow 0$ . Hacia afuera de la región central, para densidades bajas y donde la materia es normal, la ecuación de estado se reduce a la de una polítropa (ver Cap. 3). Elegimos  $\rho_{\max} = 0,2 \times 10^{18} \text{ g/cm}^3$ , valor mucho más alto que las densidades obtenidas en el *Large Hadron Collider*. A tales densidades la materia podría tener un comportamiento repulsivo tal como el descrito por la ecuación de estado de Mbonye & Kazanas 2005 ( $p = -\rho$ , que viola las condiciones de energía).

La densidad del fluido  $\rho$ , es tanto una función de la coordenada radial  $r$  como de la coordenada temporal  $t$ . La forma particular de esta función será determinada una vez que se resuelvan las ecuaciones de Einstein y las ecuaciones hidrodinámicas para el fluido en forma acoplada.

El problema de la evolución del campo gravitacional en Relatividad General puede plantearse en términos de un problema tradicional de valores iniciales o problema de Cauchy. La formulación del problema de Cauchy en Relatividad General involucra una descomposición del espacio-tiempo 4-dimensional en un espacio 3-dimensional más una dimensión temporal. Esta separación induce una descomposición  $3 + 1$  de las ecuaciones de Einstein que presentaremos a continuación.

## 9.2.2 Formalismo 3 + 1 en Relatividad General

Dado un espacio-tiempo asintóticamente plano  $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ , consideramos una foliación 3 + 1 del mismo en hipersuperficies tipo espacio  $\Sigma_t$ . Si se introduce un sistema de coordenadas  $(x^i)$  en cada hipersuperficie, el elemento de línea puede escribirse como:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt) (dx^j + \beta^j dt), \quad (9.2)$$

donde  $N$  es la función *lapse*,  $\beta^i$  es el *shift vector*, y  $\gamma_{ij}$  es la 3-métrica inducida por la métrica del espacio-tiempo  $g_{\alpha\beta}$  en cada hipersuperficie  $\Sigma_t$ :

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (9.3)$$

Aquí  $n_\alpha = -N\nabla_\alpha t$  es el vector normal unitario a  $\Sigma_t$ , donde  $\nabla_\alpha$  es la derivada covariante asociada a la métrica del espacio-tiempo  $g_{\alpha\beta}$ . El tensor de energía-momento se descompone como:

$$T^{\alpha\beta} = E n^\alpha n^\beta + n^\alpha J^\beta + J^\alpha n^\beta + S^{\alpha\beta}, \quad (9.4)$$

donde  $E = T_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta$ ,  $J_\alpha = -\gamma_\alpha^\mu T_{\mu\nu} n^\nu$ , y  $S_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu T_{\mu\nu}$  son la densidad de energía, la densidad de momento, y el tensor de esfuerzo medido por un observador cuya cuadri-velocidad es  $n^\alpha$  (los denominados observadores Eulerianos  $O_e$ ).

La evolución de la 3-métrica  $\gamma_{ij}$  viene dado por la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_{ij} - \mathcal{L}_\beta \gamma_{ij} = -2NK_{ij}, \quad (9.5)$$

donde  $\mathcal{L}$  es la derivada de Lie y  $K_{ij}$  es la curvatura extrínseca de  $\Sigma_t$ . La ecuación de evolución para  $K_{ij}$  es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K_{ij} - \mathcal{L}_\beta K_{ij} &= -D_i D_j \\ &+ N \{ R_{ij} - 2K_{ik} K^{kj} + K K_j^k + 4\pi [(S - E) \gamma_{ij} - 2S_{ij}] \}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

donde  $D_i$  es la derivada covariante asociada a la 3-métrica  $\gamma_{ij}$ ,  $R_{ij}$  es el tensor de Ricci asociado a esta 3-métrica,  $K = K_i^i$  es la traza de la curvatura extrínseca, y  $S = S_i^i$ . En la formulación 3 + 1, el conjunto completo de ecuaciones de Einstein es equivalente a las Ecs. 9.5 y 9.6. junto con la restricción Hamiltoniana:

$$R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi E, \quad (9.7)$$

y la restricción de momento

$$D_j K_i^j - D_i K = 8\pi J_i, \quad (9.8)$$

donde  $R = R_i^i$  es el escalar de Ricci tridimensional.

Se introduce una estructura adicional en la hipersuperficies  $\Sigma_t$ , la llamada métrica de fondo  $f$ . La signatura de  $f$  es  $(+, +, +)$ , i.e.  $f$  es una métrica Riemanniana tal como  $\gamma$ . Además, se pide que

$$\mathcal{L}_t f_{ij} = \partial_t f_{ij} = 0, \quad (9.9)$$

y coincide con  $\gamma_{ij}$  en el infinito espacial. Se define  $\gamma = \det \gamma_{ij}$  y  $f = \det f_{ij}$ .

Para poder expresar las ecuaciones de Einstein en una descomposición 3 + 1 conforme, se define la métrica conforme  $\tilde{\gamma}$ , tal que

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \psi^{-4} \gamma_{ij}, \quad (9.10)$$

siendo  $\psi$  un campo tensorial sobre  $\Sigma_t$ .

Las cuatro ecuaciones provenientes de las restricciones impuestas (ver Apéndice C), junto con la condición de *maximal slicing*  $K = 0$ , resulta en dos ecuaciones escalares para la función *lapse* y el factor conforme, y una ecuación vectorial elíptica para el *shift vector*.

La ecuación para la función *lapse*  $N$  viene dada por:

$$\Delta N = \psi^4 N [4\pi (E + S) + \tilde{A}_{kl} A^{kl}] - h^{kl} D_k D_l N - 2\tilde{D}_k \Phi \tilde{D}^k N, \quad (9.11)$$

donde  $D_i$  es la derivada covariante asociada con la métrica plana  $f_{ij}$ , y su componente contravariante está definida como  $D^i = f^{ij} D_j$ ,  $\Delta = f^{ij} D_i D_j$ , y su componente contravariante es  $\tilde{D}^i = \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_j$  (con la métrica conforme inversa definida como  $\tilde{\gamma}_{ik} \tilde{\gamma}^{kj} = \delta_i^j$ ). La cantidad  $\Phi$  se define como  $\Phi = \ln \psi$ . La *traceless part* de la curvatura extrínseca conforme  $A^{ij}$  se define como:

$$A^{ij} = \psi^4 \left( K^{ij} - \frac{1}{3} \gamma^{ij} K \right), \quad (9.12)$$

donde el campo tensorial  $\tilde{A}_{ij}$  se define como:

$$\tilde{A}^{ij} = \tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}^{jl} A_{kl} = \psi^{-4} \left( K^{ij} - \frac{1}{3} \gamma^{ij} K \right). \quad (9.13)$$

El campo tensorial  $h^{ij}$  en el miembro derecho de la Ec. 9.11 es la desviación de la métrica conforme inversa respecto de la métrica inversa plana:

$$h^{ij} = \tilde{\gamma}^{ij} - f^{ij}. \quad (9.14)$$

Luego de que se realiza la descomposición conforme 3 + 1, es necesario hacer una elección de *gauge* para poder reformular las ecuaciones de Einstein como un sistema de ecuaciones diferenciales. Para nuestro problema particular, se elige el *gauge* de Dirac dado por la condición:

$$D_j h^{ij} = 0. \quad (9.15)$$

El factor conforme  $\psi$  (o en forma equivalente  $Q = \psi^2 N$ ) se determina a partir de:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= -h^{kl} D_k D_l Q + \psi^6 \left[ N \left( 4\pi S + \frac{3}{4} \tilde{A}_{kl} A^{kl} \right) \right] \\ &+ 2\psi^2 \left[ N \left( \frac{\tilde{R}_*}{8} + \tilde{D}_k \Phi \tilde{D}^k \Phi \right) + \tilde{D}_k \Phi \tilde{D}^k N \right], \end{aligned} \quad (9.16)$$

donde

$$\tilde{R}_* = \frac{1}{4} \tilde{\gamma}^{kl} D_k h^{mn} D_l \tilde{\gamma}_{mn} - \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{kl} D_k h^{mn} D_n \tilde{\gamma}_{ml}. \quad (9.17)$$

La ecuación elíptica para el *shift vector* es:

$$\begin{aligned} \Delta\beta^i + \frac{1}{3}D^i(D_j\beta^j) &= 16\pi N\psi^4 J^i + 2A^{ij}D_j N - 12NA^{ij}D_j\Phi \\ &\quad - 2N\Delta_{kl}^i A^{kl} \\ &\quad - h^{kl}D_k D_l \beta^i - \frac{1}{3}h^{ik}D_k D_l \beta^l, \end{aligned} \quad (9.18)$$

donde

$$\Delta_{ij}^k = \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{kl}(D_i\tilde{\gamma}_{lj} + D_j\tilde{\gamma}_{il} - D_l\tilde{\gamma}_{ij}). \quad (9.19)$$

La ecuación para  $h^{ij}$  es de tipo Poisson y es de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{N^2}{\psi^4}\Delta h^{ij} &= \mathcal{L}_\beta \mathcal{L}_\beta h^{ij} + \frac{4}{3}D_k\beta^k \mathcal{L}_\beta h^{ij} \\ &\quad + \frac{N}{\psi^6}D_k Q (D^i h^{jk} + D^j h^{ik} - D^k h^{ij}) - 2NS^{ij} \\ &\quad - \frac{2}{3}D_k\beta^k (L\beta)^{ij} + 2(\mathcal{L}_\beta N) A^{ij} \\ &\quad + \frac{2}{3}\left[\mathcal{L}_\beta (D_k\beta^k) + \frac{2}{3}(D^k\beta^k)^2\right] h^{ij} \\ &\quad - \mathcal{L}_\beta (L\beta)^{ij}, \end{aligned} \quad (9.20)$$

donde  $(L\beta)^{ij}$  denota el operador de Killing conforme asociado con la métrica plana que actúa sobre el *shift vector*  $\beta^i$ :

$$(L\beta)^{ij} = D^i\beta^j + D^j\beta^i - \frac{2}{3}D_k\beta^k f^{ij}. \quad (9.21)$$

El tensor  $S^{ij}$  viene dado por:

$$S^{ij} = \psi^{-4} (S_1^{ij} + S_2^{ij} - S_3^{ij}) \quad (9.22)$$

donde

$$\begin{aligned} S_1^{ij} &= N(\tilde{R}_*^{ij} + 8\tilde{D}^i\Phi\tilde{D}^j\Phi) + 4(\tilde{D}^i\Phi\tilde{D}^j N + \tilde{D}^j\Phi\tilde{D}^i N) \\ &\quad - \frac{1}{3}[N([\tilde{R}_* + 8\tilde{D}_k\Phi\tilde{D}^k\Phi]\tilde{\gamma}^{ij}) + 8\tilde{D}_k\Phi\tilde{D}^k N\tilde{\gamma}^{ij}] \end{aligned} \quad (9.23)$$

$$S_2^{ij} = 2N\left[\tilde{\gamma}_{kl}A^{ik}A^{jl} - 4\pi\left(\psi^4 S^{ij} - \frac{1}{3}S\tilde{\gamma}^{ij}\right)\right], \quad (9.24)$$

$$\begin{aligned} \psi^6 S_3^{ij} &= \tilde{\gamma}^{ik}\tilde{\gamma}^{jl}D_k D_l Q + \frac{1}{2}(h^{ik}D_k h^{lj} + h^{kj}D_k h^{il} - h^{kl}D_k h^{ij})D_l Q \\ &\quad - \frac{1}{3}(\tilde{\gamma}^{kl}D_k D_l Q\tilde{\gamma}^{ij}), \end{aligned} \quad (9.25)$$

con

$$\begin{aligned} 2\tilde{R}_*^{ij} &= h^{kl}D_k D_l h^{ij} - D_l h^{ik}D_k h^{jl} - \tilde{\gamma}_{kl}\tilde{\gamma}^{mn}D_{mn}h^{ik}D_n h^{jl} \\ &\quad + \tilde{\gamma}_{nl}D_k h^{mn}(\tilde{\gamma}^{ik}D_m h^{jl} + \tilde{\gamma}^{jk}D_m h^{il}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{ik}\tilde{\gamma}^{jl}D_k h^{mn}D_l \tilde{\gamma}_{mn}. \end{aligned} \quad (9.26)$$



En resumen, en el formalismo  $3 + 1$ , en el *gauge* de Dirac, y con la condición de *maximal slicing*, resolver las ecuaciones de Einstein es equivalente a resolver las ecuaciones elípticas escalares 9.11 y 9.16 para  $N$  y  $\psi$ , respectivamente, la ecuación vectorial tipo Poisson 9.18 para  $\beta^i$  y la ecuación tensorial elíptica 9.20 para  $h^{ij}$ .

Para resolver el sistema de ecuaciones aquí planteado para nuestro problema particular, utilizamos la librería LORENE C++, los códigos numéricos LORENE-rotstar-dirac y CoCoNuT que detallaremos en la próxima sección.

## 9.3 ESTUDIOS NUMÉRICOS

### 9.3.1 LORENE y CoCoNuT

LORENE (*Langage Objet pour la RELativité NumériquE*) es un conjunto de clases de C++ para resolver varios problemas numéricos en relatividad numérica, y en forma más general, en astrofísica computacional; LORENE provee de herramientas para resolver ecuaciones diferenciales parciales por medio de métodos espectrales multi-dominio.

LORENE es un software libre bajo la Licencia Pública General GNU. Ha sido desarrollado en el Observatorio de Paris en Meudon, en el laboratorio LUTH esencialmente por Ericourgoulhon, Philippe Grandclément, Jean-Alain Marck, Jérôme Novak y Keisuke Taniguchi (para más detalles consultar [www.lorene.obspm.fr](http://www.lorene.obspm.fr)).

El código numérico LORENE-rotstar-dirac [Lin & Novak, 2006] encuentra soluciones estacionarias axisimétricas de las ecuaciones de campo de Einstein para estrellas en rotación rápida. Dicho código ha sido construido a partir de la librería LORENE C++. El código resuelve las ecuaciones no lineales elípticas descritas en la sección anterior por medio de métodos espectrales multi-dominio en coordenadas esféricas.

El código LORENE-rotstar-dirac ha sido empleado en el presente trabajo para generar los datos iniciales correspondientes a una estrella no rotante inestable para la simulación hidrodinámica en Relatividad General del colapso de dicho objeto. Para esto último se utiliza el código CoCoNuT.

CoCoNuT es un código hidrodinámico en Relatividad General con evolución dinámica espacio-temporal. El objetivo principal de este código numérico es estudiar distintos escenarios astrofísicos en el que la Relatividad General tiene un rol importante, tal como el colapso de estrellas de rotación rápida y la evolución de estrellas de neutrones aisladas.

Las características principales del CoCoNuT son:

- Utilización de la descomposición  $3 + 1$  de las ecuaciones de Einstein en coordenadas polares esféricas.
- Esquemas tipo Godunov: utilización de métodos conservativos (*Riemann solvers* aproximados) que permiten una alta precisión

en la preservación de cantidades globales como masa y momento, y el correcto tratamiento de las discontinuidades durante la evolución.

- Evolución de la métrica CFC: para la evolución de la métrica se utiliza la aproximación *conformally flatness condition*. Se ha probado que esta aproximación es muy buena en las situaciones de colapso con un acuerdo extraordinario con simulaciones en Relatividad General.
- *Mariage des Maillages*: el sistema de ecuaciones CFC consiste en un conjunto de ecuaciones elípticas no-lineales que se resuelven mediante métodos espectrales por medio de la librería LORENE. La interface entre la malla espectral para la métrica y la malla de diferencias finitas para la parte hidrodinámica se lleva a cabo mediante la técnica *Mariage des Maillages* (casamiento de mallas).
- Microfísica: distintas ecuaciones de estado pueden utilizarse durante la evolución; desde simples expresiones analíticas (politrópica, gas ideal, ecuación de estado híbrida) hasta ecuaciones de estado microfísicas en forma tabulada. Un esquema de *deleptonization* parametrizada permite un tratamiento simplificado de los neutrinos durante el colapso.

El código no es de dominio público. Para más información se puede consultar el sitio web <http://www.uv.es/coconut/>.

A continuación describimos cómo se han obtenido los datos iniciales para la simulación del colapso.

### 9.3.2 Datos iniciales para calcular el colapso

La generación de los datos iniciales se realiza mediante el código LORENE-rotstar-dirac. Para correr este código el *input* que hemos proporcionado es:

1. Velocidad angular  $\Omega = 0$  (suponemos que el objeto a colapsar no está rotando).
2. El valor de la entalpía central, definida como:

$$H = \int \frac{dp}{e + p}, \quad (9.27)$$

donde  $e$  es la densidad de energía, y  $p$  la presión. El valor de la entalpía central elegido es  $H = 0,5c^2$ .

3. Rango de variación de la densidad. Tomamos como límite inferior para la densidad  $\rho_{\text{inf}} = 1,7 \times 10^9 \text{ g/cm}^3$ , y como límite superior  $\rho_{\text{sup}} = 10^{17} \text{ g/cm}^3$ . Debe notarse que para este rango de densidades, la ecuación de estado 9.1 se comporta como una politropa de índice politrópico 2.

4. Densidad total de energía  $\epsilon$ . Ésta ha sido calculada para la ecuación de estado 9.1 a partir de la relación:

$$\epsilon = -p + \mu n, \quad (9.28)$$

siendo  $p$  la presión,  $n$  la densidad bariónica, y  $\mu$  el potencial químico dado por:

$$\mu = \frac{1}{n} \frac{dp}{dn} = 2 \left( \frac{n}{n_{\max}} \right) \left[ \alpha - \frac{2}{3}(\alpha + 1) \left( \frac{n}{n_{\max}} \right)^2 \right] + C, \quad (9.29)$$

Si se toma para la constante  $C = 1$ , la expresión para la densidad de energía es:

$$\epsilon = \frac{n^2}{n_{\max}} \left[ \alpha - \frac{1}{3}(\alpha + 1) \left( \frac{n}{n_{\max}} \right)^2 \right] + \mu_0 n, \quad (9.30)$$

donde  $\mu_0 = 5,01 \times 10^{-14} \text{ g cm}^2/\text{s}^2$ .

5. Ecuación de estado, dada por la fórmula 9.1, en unidades de  $\text{dyn}/\text{cm}^2$ . Además, al igual que para la densidad de energía total  $\epsilon$ , la presión debe estar en función de la densidad bariónica:

$$p(\rho) = \left[ \alpha - (\alpha + 1) \left( \frac{n}{n_{\max}} \right)^2 \right] \left( \frac{n}{n_{\max}} \right) n, \quad (9.31)$$

La densidad bariónica debe expresarse en unidades de  $1/\text{cm}^3$ . Para pasar de un valor de densidad  $\rho$  en  $\text{g}/\text{cm}^3$  a  $1/\text{cm}^3$  se divide  $\rho$  por la unidad de masa atómica  $m_u = 1,67 \times 10^{-24} \text{ g}/\text{cm}^3$ .

Se ha elegido para la densidad máxima  $\rho_{\max} = 0,2 \times 10^{18} \text{ gr}/\text{cm}^3$ , que se corresponde con un valor para la densidad máxima bariónica de  $n_{\max} = 1,2 \times 10^{41} \text{ } 1/\text{cm}^3$ .

LORENE-rotstar-dirac calcula, entre otras cosas, la función *lapse*  $N$ , el factor conforme o  $Q$ , el tensor  $h^{ij}$ , el *shift vector*  $\beta^i$ , la masa gravitacional  $M_G$  y el radio circunferencial ecuatorial  $R_{\text{eq}}$  (ver [Lin & Novak 2006](#)). El *output* generado por el código se guarda automáticamente en un archivo de nombre 'resu.dat'. Es precisamente este archivo el que CoCoNuT tomará como *input*.

Para el conjunto de valores especificados arriba, la masa gravitacional y radio circunferencial ecuatorial obtenidos mediante el código LORENE-rotstar-dirac son:

$$M_G = 0,42M_{\odot}, \quad (9.32)$$

$$R_{\text{eq}} = 2,92 \text{ km}. \quad (9.33)$$

Una vez adquiridos los datos iniciales, se procedió a correr el código CoCoNuT. En lo que sigue, se describen los resultados obtenidos.

### 9.3.3 Resultados

Realizamos dos corridas sucesivas del código CoCoNuT. En la primera corrida tomamos la salida de LORENE-rotstar-dirac como datos

iniciales; el código se detuvo cuando la presión en función de la densidad comienza a disminuir, esto es, cuando la velocidad del sonido se vuelve imaginaria. Es precisamente a partir de este punto donde las ondas sonoras dejan de propagarse debido al comportamiento exótico de la materia: una variación en la presión causa una expansión en vez de una compresión. Procedemos, luego, a realizar una segunda corrida del código. Esta vez se toman como datos iniciales la salida de la primera corrida de CoCoNuT. Además, cambiamos el signo de la velocidad radial del fluido.

Mostramos en las Figs. 86, 87, y 88 los resultados de las corridas sucesivas. En la Fig. 86 graficamos la densidad central en función del tiempo (tiempo para un observador en el infinito). En la primera corrida (línea roja) la densidad central comienza a crecer hasta que llega a un máximo. Es en este punto donde se detiene la simulación. Al comenzar la segunda corrida (línea negra) la densidad central disminuye. Para  $t > 0,15$  ms, la densidad central aumenta en forma abrupta pero suave hasta llegar nuevamente al valor donde la velocidad del sonido se vuelve imaginaria, y el código se detiene.

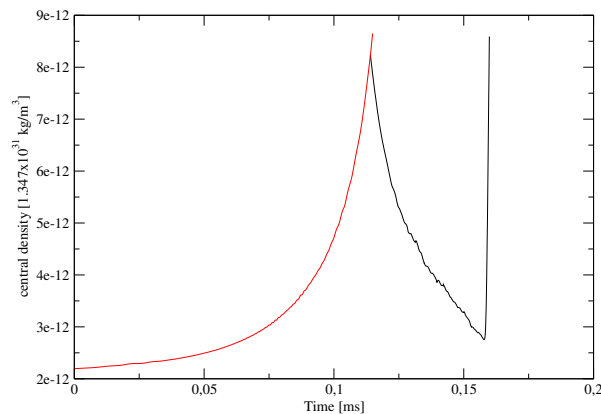


Figura 86: Densidad central en función del tiempo. La línea roja indica los resultados de la primera corrida, y la línea negra los resultados de la segunda corrida.

El gráfico del factor conforme en función del tiempo se muestra en la Fig. 87. Al comienzo de la primera corrida ( $t = 0$ ), el factor conforme vale aproximadamente 1.35 ( $\phi = 1$  corresponde al espacio-tiempo de Minkowski). A medida que el tiempo aumenta, el factor conforme también lo hace hasta que la simulación se detiene ( $\phi \approx 2$  y  $t = 0,04$ ). Durante la segunda corrida, el factor conforme disminuye, llega a un valor mínimo, y luego comienza a crecer hasta que se detiene el código. Debe notarse que los valores del factor conforme en los puntos donde se detiene la primera y segunda corrida son distintos. Ésto indica una asimetría en el rebote, como era de esperar, debida a la existencia de una dirección preferencial de acción para la gravitación a gran escala.

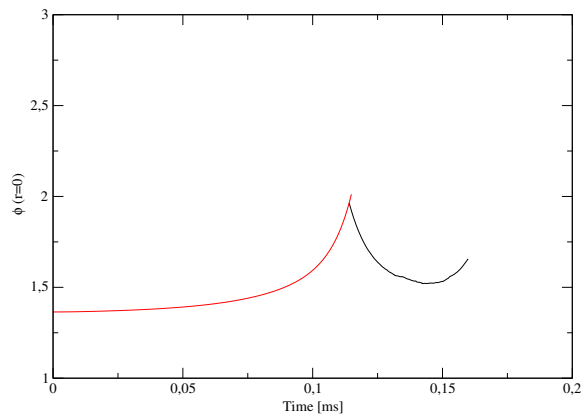


Figura 87: Factor conforme en función del tiempo. La línea roja indica los resultados de la primera corrida, y la línea negra los resultados de la segunda corrida.

Por último, la Fig. 88 muestra el gráfico del *lapse*  $N$  en función del tiempo. Durante la primera corrida  $N$  decrece<sup>3</sup> hasta aproximadamente  $N \approx 0,15$  cuando se detiene la simulación. En la segunda corrida  $N$  crece hasta llegar a un valor máximo, comienza nuevamente a disminuir hasta que se interrumpe el código. Al igual que para el factor conforme, los valores del *lapse* son distintos para los dos puntos del rebote.

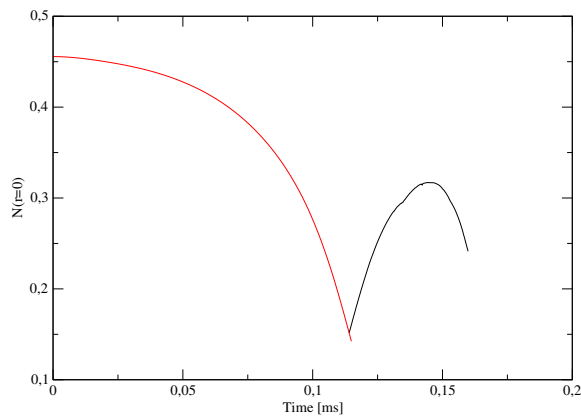


Figura 88: Función *lapse* en función del tiempo. La línea roja indica los resultados de la primera corrida, y la línea negra los resultados de la segunda corrida.

El programa CoCoNuT computa también si se forman horizontes aparentes. En todas las corridas realizadas, no hubo formación alguna de horizontes aparentes.

<sup>3</sup> Cuanto más grande es el valor del *lapse*  $N$ , más se aproxima el espacio-tiempo a un espacio-tiempo Minkowskiano.

## 9.4 DISCUSIÓN Y TRABAJOS FUTUROS

Los resultados descriptos en la sección anterior nos permiten inferir el comportamiento y posible evolución del sistema.

Durante la primera corrida el sistema colapsa bajo la acción del campo gravitacional; la densidad central aumenta y los valores que toman el factor conforme y el *lapse* indican que la curvatura del espacio-tiempo se vuelve cada vez más importante. Esto sucede hasta que para un dado valor de la densidad, el fluido alcanza una rigidez infinita y ya no hay propagación de ondas sonoras. Aquí es donde se produce el *bounce* o rebote. La simulación se detiene y procedemos a realizar una segunda corrida del código tomando como datos iniciales la salida de la primera corrida e invirtiendo el signo de la velocidad radial del fluido.

El sistema, ahora, comienza a expandirse (la densidad central disminuye, y la curvatura se vuelve menos fuerte). Esta expansión, sin embargo, no es indefinida. Notamos que antes que la densidad central empiece a aumentar nuevamente, el factor conforme y el *lapse* ya han cambiado su comportamiento. Luego, la acción del campo gravitacional hace colapsar el sistema hasta que se alcanzan densidades tales que nuevamente se produce el rebote.

Estamos, pues, en presencia de un sistema oscilante: colapsa, rebota, se expande, vuelve a colapsar, así continua en forma indefinida el ciclo. Esperamos, sin embargo, que las amplitudes de las oscilaciones vayan disminuyendo debido a las pérdidas energéticas (en las Figs. 86, 87, y 88 se observa que los valores de la densidad central, factor conforme, y *lapse* son distintos en los dos rebotes).

Debido al altísimo corrimiento al rojo, un observador lejano jamás podrá detectar las oscilaciones del sistema. Vemos, luego, que toda la fenomenología asociada a los agujeros negros podría reproducirse mediante el modelo aquí propuesto de *mimicker*.

Los trabajos a futuro incluyen la realización de corridas adicionales para poder así calcular la amplitud de oscilación del sistema, como la localización de los rebotes. Ésto nos permitirá tener una caracterización más precisa de las propiedades del *mimicker*. Todos estos resultados serán objeto de una publicación futura.

## CONCLUSIONES

---

Los agujeros negros desempeñan un papel capital tanto a escala local como global en el universo; es en estos objetos donde la gravitación se manifiesta en su forma más extrema. El completo colapso gravitacional que lleva a la formación de un agujero negro implica un crecimiento brutal en la entropía que está relacionado con la pérdida de toda la estructura del sistema original (e.g. una estrella). Los agujeros negros son, pues, los reservorios más importantes de entropía en el universo. Por otro lado, son en extremo simples: a lo sumo bastan 3 parámetros: masa  $M$ , carga  $Q$ , y momento angular  $a$ , para caracterizarlos completamente. Los agujeros negros son, además, ingredientes esenciales en los mecanismos astrofísicos que dan lugar a los fenómenos más extraordinarios del cosmos (muerte de estrellas, AGNs, microcuasares, GRBs, disrupción de estrellas, producción de rayos X y gamma, etc...), y claves para la determinación de la naturaleza del espacio-tiempo y la irreversibilidad observada de los procesos físicos.

Es esta tesis nos hemos propuesto investigar las implicaciones de los agujeros negros para una serie de situaciones tanto astrofísicas como relacionadas con la física fundamental, comenzando con el estudio de interiores de agujeros negros no singulares. Nótese que las singularidades no son objetos físicos en el espacio-tiempo sino características patológicas de algunas soluciones de las ecuaciones fundamentales de la teoría de la gravitación, en particular de la teoría de la Relatividad General. Hemos estudiado una propuesta concreta para eliminar estos defectos en la teoría por medio de una ecuación de estado que para valores muy altos de la densidad presenta un carácter repulsivo y viola las condiciones de energía. Hemos mostrado mediante un estudio de termodinámico y dinámico, que la solución es inestable, por lo cual concluimos que son necesarias modificaciones más radicales no sólo en la descripción de la materia sino, acaso, en la propia teoría de la gravitación.

Este resultado nos llevó a indagar acerca de la compatibilidad de los agujeros negros astrofísicos (acretantes) en gravedad modificada con las observaciones en rayos X existentes. En particular, estudiamos soluciones de agujeros negros en teorías modificadas de la gravitación  $f(R)$ . En estas teorías, la densidad Lagrangiana gravitacional de la acción de Hilbert-Einstein, se generaliza a una función arbitraria del escalar de Ricci. Obtuvimos las distribuciones espectrales de energía de discos de acreción en torno a agujeros negros de  $f(R)$ -Schwarzschild y  $f(R)$ -Kerr con escalar de Ricci constante, y comparamos con los datos observacionales más recientes del candidato a agujero negro Cygnus X-1. Este análisis permitió restringir severamente el rango de parámetros posibles para algunas de estas teorías.

Hemos extendido el estudio de discos de acreción a sistemas binarios de agujeros negros supermasivos. Nos hemos focalizado en un

tipo particular de sistema binario acretante, donde el agujero negro menos masivo puede abrir un gap en el disco de acreción del sistema. Hemos mostrado que en presencia de un jet relativista, la distribución espectral de energía en rayos gamma tendría una impronta única; ésto se debe a las interacciones Compton externa entre fotones provenientes del disco perturbado y los electrones relativistas en la base del jet. Ofrecemos, pues, un nuevo criterio para apoyar la identificación de candidatos de sistemas binarios de agujeros negros supermasivos.

Los agujeros negros tanto en Relatividad General como en gravedad  $f(R)$  presentan horizontes de eventos, que cuando son analizados en el contexto de la teoría de campos cuánticos en espacio-tiempo curvo arrojan el resultado de que el espacio-tiempo mismo debe tener asociada una entropía. Propusimos, pues, evaluar diferentes estimadores clásicos, basados en el tensor de Weyl, para la entropía gravitacional. Ésto nos llevó a la conclusión de que el mejor estimador es el de Weyl-Kretschmann. En todos los espacios-tiempos evaluados (agujeros negros de Reissner-Nordström, un modelo particular de agujero negro regular, agujeros negros de Kerr y Kerr-Newman) el estimador de Weyl-Kretschmann no sólo reproduce la entropía de Bekenstein-Hawking sobre el horizonte de eventos, sino que es independiente de la foliación particular del espacio-tiempo y puede aplicarse, inclusive, a espacio-tiempos con violación cronológica.

Un problema íntimamente relacionado con la entropía es el de la dirección del tiempo. En esta tesis investigamos sobre el rol de los agujeros negros cosmológicos en este problema. Llegamos a la conclusión de que el acoplamiento entre condiciones cosmológicas globales y procesos gravitacionales relacionados con el apantallamiento de corrientes por agujeros negros más grandes a medida que el tiempo cósmico se incrementa, da lugar a una dirección privilegiada para la ocurrencia de procesos locales de naturaleza electromagnética. Mostramos, además, que la irreversibilidad de los procesos locales aún existiría en el caso de un universo en colapso que contenga agujeros negros.

Si los procesos físicos tienen una dirección preferencial, es razonable preguntarse por el estatus ontológico del tiempo mismo. Nuevamente, estudiando el comportamiento de sistemas físicos sobre el horizonte de eventos, considerando una superficie nula, demostramos que la doctrina llamada "presentismo" es incompatible con el conocimiento astrofísico actual. Sugerimos, luego, que una ontología compatible con una visión relativista del mundo tendría que ser aquella en que lo que llamamos 'presente' tenga un carácter local en vez de global. Nuestro trabajo, además, ha puesto en evidencia la necesidad, tanto para la investigación científica como filosófica, de una ontología que comprenda la visión del conocimiento físico actual, incluyendo las peculiaridades de los efectos no-locales en Mecánica Cuántica.

Otro problema grave que enfrenta la física contemporánea es la incompatibilidad entre la existencia de horizontes de eventos y la evolución unitaria de los sistemas cerrados en Mecánica Cuántica. Al respecto, propusimos e investigamos una solución sencilla que consiste en reemplazar a los agujeros negros por objetos muy com-



pactos dinámicos, no estacionarios, y sin horizonte de eventos, que hemos denominado *mimickers*. Esto elimina la incompatibilidad entre la Relatividad General y la Mecánica Cuántica al nivel del horizonte, desplazándola sólo a escalas de Planck, donde el tratamiento basado en la hipótesis del continuo deja de valer y nuevas descripciones de la emergencia del espacio-tiempo deben buscarse (ver por ejemplo [Romero 2015a](#)). Los resultados preliminares del modelo de *mimicker* parecen mostrar que sin introducir cambios en la teoría de la Relatividad General, es posible para un tipo particular de tensor de energía-momento, evitar el completo colapso gravitacional, y la formación de horizonte de eventos y la aparición de singularidades.

Esta tesis presenta, pues, un panorama actual de los agujeros negros y su papel en nuestra imagen del mundo, panorama que abre, a su vez, nuevas preguntas: ¿qué efectos tiene sobre un agujero negro la dinámica del universo?, ¿son éstos efectos observables?, ¿cómo podrían afectar los agujeros negros la evolución del universo?, ¿existen soluciones de agujeros negros cosmológicos en teorías alternativas de la gravitación?, ¿en qué se diferencian con las soluciones conocidas en Relatividad General?, ¿siguen siendo válidas las leyes de la termodinámica de agujeros negros en teorías alternativas de la gravitación?, y muchas otras. A estas preguntas subyace una esencia común, el intento por vislumbrar la naturaleza del tiempo. Es esta íntima pregunta, que siempre ha reclamado desde el fondo de la memoria, desde mi infancia, ... hasta aquí.



## INTEGRALES IMPROPIAS

### A.1 DEFINICION DE INTEGRAL IMPROPIA

Sea  $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^p$  un dominio no compacto, y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  integrable en cada dominio compacto mesurable  $D \subset \Omega$ . Se dice que  $f$  es *integrable impropriamente* en  $\Omega$  si y sólo si para cada secuencia creciente mesurable de dominios compactos,  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , que es *exhausting*<sup>1</sup>  $\Omega$ , la secuencia:

$$\sum_n = \left( \int_{D_n} f \, d\mu \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

es convergente. En dicho caso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu,$$

y se denomina *integral impropia de  $f$  en  $D$* . En forma alternativa, se dice que la integral de  $f$  en  $\Omega$  es *convergente* [Predoi & Balan, 2005].

### A.2 PRUEBA DE INTEGRAL IMPROPIA

A continuación se mostrará que la integral presentada en el Capítulo 4, Sección 4.5, dada por:

$$I = \iint_D \frac{1}{h_i(r)} \, d\theta \, dr = \iint_D \frac{1}{\gamma_i(r_* - r)} \quad \gamma_i \in \mathfrak{R}^+, \quad (\text{A.1})$$

donde

$$D = \{(r, \theta) \in \mathfrak{R}^2 / r_- \leq r \leq r_* \wedge \theta_{*1} \leq \theta \leq \theta_{*2}\}, \quad (\text{A.2})$$

es divergente.

Dado que  $h_i(r)$  no depende de la coordenada  $\theta$ , se puede simplemente integrar A.1 en esta coordenada:

$$\int_R \frac{\theta_{*2} - \theta_{*1}}{\gamma_i(r_* - r)} \, dr, \quad (\text{A.3})$$

donde,

$$R = \{r \in \mathfrak{R} / r_- \leq r < r_*\}. \quad (\text{A.4})$$

La función  $1/\gamma_i(r_* - r)$  diverge en  $r = r_*$ . Se define una subsecuencia de subregiones cerradas  $R_n$  donde la última integral está bien definida:

$$R_n = \{r \in \mathfrak{R} / r_- \leq r < r_* - (1/n)\}, \quad (\text{A.5})$$

<sup>1</sup> Sea  $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^p$  un dominio no compacto para el cual cada parte acotada de la frontera es despreciable. Se dice que la secuencia  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de dominios compactos mesurables es *exhausting*  $\Omega$  si y sólo si para cada compacto  $K \subset \Omega$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $K \subset D_n$  para todo  $n \geq n_0$ .

con  $n \in \mathbb{N}$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n \rightarrow R. \quad (\text{A.6})$$

Se integra la función  $1 = 1/h_i(r)$  sobre el dominio  $R_n$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_{R_n} \frac{dr}{h_i(r)} &= \int_{R_n} \frac{dr}{\gamma_i (r_* - r)} = \frac{-1}{\gamma_i} \ln(r_* - r) \Big|_{r_-}^{r_* - (1/n)} \\ &= \frac{-1}{\gamma_i} [\ln(r_* - r_* + (1/n)) - \ln(r_* - r_-)]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

El límite de la última ecuación cuando  $n \rightarrow \infty$  no existe. Luego, la integral dada por la fórmula [A.1](#) es divergente.

## CONDICIONES DE ENERGÍA

---

Las condiciones de energía satisfechas para un cierto tipo de materia se formulan en términos del tensor de energía momento  $T_{ab}$ . Para poder visualizar las condiciones de energías, es útil ver la forma que éstas toman para un fluido perfecto caracterizado por un tensor de energía momento de la forma:

$$T_{ab} = (P + \rho) u_a u_b + P g_{ab}. \quad (\text{B.1})$$

- Condición de energía débil (*weak energy condition*) es:

$$T_{ab} t^a t^b \geq 0, \quad (\text{B.2})$$

para todos los vectores tipo tiempo  $t^a$ .

Para el fluido dado por la ecuación B.1, esta condición toma la forma:

$$\rho \geq 0, \text{ y } \rho + P \geq 0. \quad (\text{B.3})$$

- La condición de energía dominante (*dominant energy condition*) consiste en la condición de energía débil y del requerimiento extra que  $T^{ab} t_a$  sea un vector tipo nulo o tiempo (i.e.,  $T_{ab} T_c^b t^a t^c \leq 0$ ) para cualquier vector tipo tiempo  $t^a$ . Para el fluido B.1 la condición de energía dominante tiene la forma:

$$\rho \geq |P|, \quad (\text{B.4})$$

(i.e., la velocidad del flujo de energía no excede la velocidad de la luz).

- La condición de energía nula (*null energy condition*) consiste en:

$$T^{ab} l^a l^b \geq 0, \quad (\text{B.5})$$

para todo vector nulo  $l^a$ ; para un fluido perfecto esto significa que

$$\rho + P \geq 0. \quad (\text{B.6})$$

Violaciones de la condición de energía nula se estudian en el contexto de agujeros de gusano macroscópicos atravesables y en cosmología si la expansión del universo es super acelerada ( $\dot{H} > 0$ , donde  $H$  es el parámetro de Hubble).

- La condición de energía nula dominante (*null dominant energy condition*) consiste en:

$$T_{ab} l^a l^b \geq 0, \quad (\text{B.7})$$

y,

$$T^{ab}l_b, \quad (\text{B.8})$$

es nulo o tipo tiempo para cualquier vector tipo nulo  $l^a$ . La condición de energía nula dominante se asemeja a la condición de energía dominante pero aquí  $l^a$  es nulo en vez de tipo tiempo. Para el fluido perfecto, la condición de energía nula dominante es:

$$\rho \geq |P| \quad \text{o} \quad \rho = -P. \quad (\text{B.9})$$

- La condición de energía fuerte (*strong energy condition*) consiste en:

$$\left( T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) t^a t^b \geq 0, \quad (\text{B.10})$$

para cualquier vector tipo tiempo  $t^a$ ; para el fluido perfecto:

$$\rho + P \geq 0, \quad \text{y} \quad \rho + 3P \geq 0. \quad (\text{B.11})$$

Esta condición asegura que la gravedad es siempre atractiva y es violada por una constante cosmológica positiva (que satisface  $P^\wedge = -\rho^\wedge$ ), durante el período de inflación, o en una era cosmológica dominada por un campo de energía oscuro con  $P < -\rho/3$ .

Cuando se estudia la evolución en el tiempo de cualquier sistema físico lo primero que necesita hacerse es formular dicha evolución como un problema de valores iniciales o problema de *Cauchy*: dadas condiciones iniciales y de contorno adecuadas, las ecuaciones fundamentales deben predecir la evolución futura (o pasada) del sistema.

Cuando se intenta escribir las ecuaciones de Einstein como un problema de Cauchy se encuentra con el siguiente problema: las ecuaciones están escritas de tal manera que el espacio y el tiempo se tratan de igual manera, lo cual hace difícil ver la evolución del campo gravitacional en función del tiempo. Luego, lo primero que necesita hacerse es reescribir las ecuaciones de Einstein de tal forma de separar en forma clara el rol del espacio y del tiempo. La formulación de la Relatividad General que resulta de esta separación es conocida como formalismo 3 + 1 en Relatividad General.

Suponemos un espacio-tiempo globalmente hiperbólico dotado de una métrica  $g_{\alpha\beta}$ . Consideramos ahora una foliación específica, y tomamos dos hipersuperficies adyacentes  $\Sigma_t$  y  $\Sigma_{t+dt}$ . La geometría de la región del espacio-tiempo contenida entre estas dos hipersuperficies puede determinarse a partir de los tres siguientes ingredientes básicos:

- La 3-métrica  $\gamma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) que mide la distancia propia sobre la hipersuperficie:

$$dt^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (C.1)$$

- El lapso de tiempo propio  $d\tau$  entre dos hipersuperficies medida por aquellos observadores moviéndose a lo largo de la dirección normal a las hipersuperficies (los denominados observadores *normales* o *Eulerianos*):

$$d\tau = N(t, x^i) dt. \quad (C.2)$$

Aquí  $N$  es conocida como la función *lapse*.

- La velocidad relativa  $\beta^i$  entre observadores Eulerianos y las líneas de coordenadas espaciales constantes:

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^j) dt. \quad (C.3)$$

El 3-vector  $\beta^i$  es conocido como *shift vector*.

La función *lapse*  $N$  y el *shift vector*  $\beta^i$  son funciones que se pueden especificar libremente (no son únicas) llevando la información sobre el sistema de coordenadas elegido; se denominan funciones de *gauge*.

En términos de  $\{N, \beta^i, \gamma_{ij}\}$ , el elemento de línea puede escribirse como:

$$ds^2 = (-N^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (C.4)$$

donde  $\beta_i = \gamma_{ij}\beta^j$ .

Si se considera el vector unitario  $n^\mu$  normal a las hipersuperficies espaciales, en el sistema de coordenadas introducido, este vector posee componentes dadas por:

$$n^\mu = (1/N, -\beta^i/N), \quad (\text{C.5})$$

$$n_\mu = (-N, 0). \quad (\text{C.6})$$

Este vector normal corresponde por definición a la 4-velocidad de los observadores Eulerianos.

Es necesario distinguir entre la curvatura intrínseca de las hipersuperficies espaciales, que proviene de su geometría interna, y la curvatura extrínseca asociada con la forma en que estas hipersuperficies están inmersas en el espacio-tiempo cuadridimensional. La curvatura intrínseca está dada por el tensor de Riemann 3-dimensional definido en términos de la 3-métrica  $\gamma_{ij}$ . La curvatura extrínseca, por otro lado, está definida en términos de lo que le ocurre al vector normal  $\vec{n}$  a medida que es transportado en forma paralela de un punto de la hipersuperficie a otro. En general se encuentra que si este vector se transporta en forma paralela a un punto cercano, el nuevo vector dejará de ser normal a la hipersuperficie. El tensor de *curvatura extrínseca*  $K_{\alpha\beta}$  es una medida del cambio del vector normal bajo transporte paralelo.

Para poder definir la curvatura extrínseca, introducimos el operador proyección  $P_\alpha^\beta$  en las hipersuperficies espaciales:

$$P_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha + n^\alpha n_\beta, \quad (\text{C.7})$$

siendo  $P_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}$ . Usando este operador de proyección, el tensor de curvatura extrínseca se define como:

$$K_{\mu\nu} = -P_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu = -(\nabla_\mu n_\nu + n_\mu n^\alpha \nabla_\alpha n_\nu). \quad (\text{C.8})$$

De la definición anterior se observa que  $K_{\mu\nu}$  es un tensor puramente espacial, esto es,  $n^\mu K_{\mu\nu} = n^\nu K_{\mu\nu} = 0$ . Además, este tensor resulta simétrico:

$$K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}. \quad (\text{C.9})$$

De la definición anterior, puede mostrarse que la curvatura extrínseca  $K_{\mu\nu}$  puede escribirse en una forma completamente equivalente como la derivada de Lie de la métrica espacial a lo largo de la dirección normal:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{\mu\nu}. \quad (\text{C.10})$$

Esto puede verse fácilmente de la definición de la derivada de Lie:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{\mu\nu} &= n^\alpha \nabla_\alpha \gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\alpha} \nabla_\nu n^\alpha + \gamma_{\nu\alpha} \nabla_\mu n^\alpha \\ &= n^\alpha \nabla_\alpha (n_\mu n_\nu) + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu n^\alpha + g_{\nu\alpha} \nabla_\mu n^\alpha \\ &= n^\alpha n_\mu \nabla_\alpha n_\nu + n^\alpha n_\nu \nabla_\alpha n_\mu + \nabla_\nu n_\mu + \nabla_\mu n_\nu \\ &= (\gamma_\mu^\alpha - g_\mu^\alpha) \nabla_\alpha n_\nu + (\gamma_\nu^\alpha - g_\nu^\alpha) \nabla_\alpha n_\mu \\ &\quad + \nabla_\nu n_\mu + \nabla_\mu n_\nu \\ &= \gamma_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu + \gamma_\nu^\alpha \nabla_\alpha n_\mu = -2K_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$



donde se ha hecho uso de que la derivada covariante de  $g_{\mu\nu}$  es cero y también que  $n^\alpha \nabla_\mu n_\alpha = 0$ .

Dado que  $\vec{n}$  es normal a la hipersuperficie, para cualquier función escalar  $\phi$  se tiene que:

$$\mathcal{L}_{\vec{n}}\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi}\mathcal{L}_{\phi\vec{n}}\gamma_{\mu\nu}. \quad (\text{C.12})$$

En particular, si se toma como función escalar la función *lapse*, se encuentra:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2N}\mathcal{L}_{N\vec{n}}\gamma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2N}\left(\mathcal{L}_{\vec{t}} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}\right)\gamma_{\mu\nu}, \quad (\text{C.13})$$

lo que implica

$$\left(\mathcal{L}_{\vec{t}} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}\right)\gamma_{\mu\nu} = -2NK_{\mu\nu}. \quad (\text{C.14})$$

Teniendo en cuenta sólo las componente espaciales, y sabiendo que en el sistema coordenadas adaptado se tiene  $\mathcal{L}_{\vec{t}} = \partial_t$ , encontramos:

$$\partial_t\gamma_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}\gamma_{ij} = -2NK_{ij}, \quad (\text{C.15})$$

que puede reescribirse como:

$$\partial_t\gamma_{ij} = -2NK_{ij} + D_i\beta_j + D_j\beta_i, \quad (\text{C.16})$$

donde  $D_i$  representa la derivada covariante 3-dimensional asociada a la 3-métrica  $\gamma_{ij}$ . La Ec. C.16 es la ecuación de evolución de la métrica espacial  $\gamma_{ij}$ , que ha sido derivada sólo a partir de conceptos geométricos. Para poder cerrar el sistema es necesario una ecuación de evolución para  $K_{ij}$  que se obtendrá a partir de las ecuaciones de Einstein.

Para poder reescribir las ecuaciones de Einstein en el formalismo 3 + 1, primero, expresaremos el tensor de Riemann 4-dimensional  $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$  en términos del tensor de Riemann 3-dimensional de la propia hipersuperficie  ${}^3R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ , y la curvatura extrínseca  $K_{\mu\nu}$ . La proyección del tensor de Riemann en las hipersuperficies espaciales viene dada por la ecuación de *Gauss-Codazzi*:

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma} = {}^3R_{\beta\mu\nu}^\alpha + K_{\alpha\mu}K_{\beta\nu} - K_{\alpha\nu}K_{\beta\mu}. \quad (\text{C.17})$$

En forma similar, la proyección sobre las hipersuperficies del tensor de Riemann contraído con el vector normal resulta en las ecuaciones de *Codazzi-Mainardi*:

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda n^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} = D_\beta K_{\alpha\mu} - D_\alpha K_{\beta\mu}. \quad (\text{C.18})$$

A partir de la ecuación de Gauss- Codazzi C.17 es posible derivar la restricción de energía o también llamada restricción *Hamiltoniana* [Alcubierre, 2008]:

$${}^3R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = 16\pi\rho, \quad (\text{C.19})$$

donde hemos definido la cantidad  $\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$  que corresponde a la densidad local de energía medida por un observador Euleriano. De

la misma forma, a partir de las ecuaciones de Codazzi-Mainardi se puede obtener la restricción de momento [[Alcubierre, 2008](#)]:

$$D_\mu (K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu}K) = 8\pi j^\alpha, \quad (\text{C.20})$$

siendo  $j^\alpha = -P^{\alpha\mu}n^\nu T_{\mu\nu}$  la densidad de momento medida por un observador Euleriano.

Es importante notar que las restricciones no sólo no involucran derivadas temporales, sino que son completamente independientes de las funciones de gauge  $N$  y  $\beta^i$ . Ésto indica que las restricciones son relaciones referidas únicamente a una dada hipersuperficie.

La existencia de restricciones implica que en la formulación 3 + 1 no es posible especificar en forma arbitraria 12 cantidades dinámicas  $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$  como condiciones iniciales. Las condiciones iniciales deben satisfacer las restricciones, de lo contrario no se estarán resolviendo las ecuaciones de Einstein.

Las restricciones Hamiltoniana y de momento sólo proveen de 4 de las 10 ecuaciones independientes de Einstein y, como se ha visto, éstas no corresponden a la evolución del campo gravitacional, sino que son relaciones entre las variables dinámicas que deben satisfacerse para todo tiempo. La evolución del campo gravitacional está contenida en las 6 ecuaciones restantes.

Para poder encontrar estas ecuaciones se proyecta sobre las hipersuperficies el tensor de Riemann contraído dos veces con el vector normal. Ésto dará las 6 componentes independientes restantes del Riemann. Luego de ciertas manipulaciones algebraicas (ver [Alcubierre 2008](#)) se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j N \\ & + N [{}^3R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k] + 4\pi N [\gamma_{ij} (S - \rho) - 2S_{ij}]. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Este conjunto de ecuaciones provee la evolución dinámica de las 6 componentes de la curvatura extrínseca  $K_{ij}$ .

## PUBLICACIONES

## D.1 TRABAJOS CIENTÍFICOS PUBLICADOS EN REVISTAS INTERNACIONALES CON REFERATO

1. *Time and irreversibility in an accelerating universe.*  
Gustavo E. Romero and Daniela Pérez.  
*Int. J. Modern Phys. D* **20**, 2831-2838, 2011.
2. *Gravitational entropy of black holes and wormholes.*  
Gustavo E. Romero, Romain Thomas, Daniela Pérez.  
*Int. J. Theoret. Phys.* **51**, 925-942, 2012.
3. *New Remarks on the Cosmological Argument*  
Gustavo E. Romero, Daniela Pérez.  
*Int. J. Phil. Relig.* **72**, 103-113, 2012.
4. *Accretion disks around black holes in modified gravity.*  
Daniela Pérez, Gustavo E. Romero, Santiago E. Perez Bergliaffa.  
*Astronomy & Astrophysics* **551**, A4, 15 pp., 2013.
5. *An analysis of a regular black hole interior.*  
Daniela Pérez, Gustavo E. Romero, Santiago E. Perez Bergliaffa.  
*Int. J. Theoret. Phys.* **53**, 734-753, 2013.
6. *Presentism meets Black Holes.*  
Gustavo E. Romero, Daniela Pérez.  
*Euro. Jnl. Phil. Sci.* **4**, 293-308, 2014
7. *Gravitational entropy of Kerr black holes.*  
Daniela Pérez, Gustavo E. Romero.  
*General Relativity and Gravitation* **46**, 1774, 2014.
8. *High-energy signatures of binary systems of supermassive black holes.*  
Gustavo E. Romero, Gabriela, S. Vila, Daniela Pérez.  
*Astronomy & Astrophysics* **588**, A125, 12 pp., 2016

## D.2 ARTÍCULOS COMPLETOS EN LIBROS Y ACTAS DE CIRCULACIÓN INTERNACIONAL, CON ARBITRAJE FORMAL O INFORMAL

1. *An analysis of a regular of black hole interior.*  
Daniela Pérez, Gustavo E. Romero, Camila A. Correa, Santiago E. Perez Bergliaffa.  
*Int. J. of Modern Phys. (CS)* **3**, 396-407, 2011.
2. *All times are now: black holes and presentism.*  
Gustavo E. Romero, Daniela Pérez.

- Gravitation, Relativistic Astrophysics, and Cosmology*, eds: F.T. Falciano and L.J. Pellizza, Editora Livraria da Física, pp. 301-306, 2013.
3. *Radiation from black hole accretion in  $f(R)$  gravity.*  
Daniela Pérez, Gustavo E. Romero.  
*High Energy Gamma-Ray Astronomy*, eds: F. Aharonian, W. Hofmann, F. Rieger, AIP Conference Proceedings, **1505**, pp. 434-437, 2012.
  4. *High-energy signatures of binary supermassive black holes.*  
Gabriela S. Vila, Daniela Pérez, G. E. Romero.  
In: *The Innermost Regions of Relativistic Jets and Their Magnetic Fields*. Edited by José L. Gómez, EPJ Web of Conferences, Volume 61, id.08005, 2013.
  5. *Supermassive black hole binaries at high energies.*  
Gustavo E. Romero, Daniela Pérez, Gabriela S. Vila.  
*4th High Energy Phenomena in Relativistic Outflows (HEPRO IV)*.  
International Journal of Modern Physics: Conference Series, Volume 28, id. 1460183, 2014.
  6. *Radiation from black hole accretion in  $f(R)$  gravity.*  
Daniela Pérez, Gustavo E. Romero, Santiago E. Perez Bergliaffa.  
*Proceedings of the MG13 Meeting on General Relativity (in 3 Volumes)*, ROSQUIST KJELL ET AL. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. ISBN 9789814623995, pp. 1370-1372, 2015.
  7. *Gravitational entropy of a Kerr black hole.*  
Daniela Pérez, Gustavo E. Romero.  
*Proceedings of GRACo 2*, eds. Gabriela Vila, Florencia Vieyro y Júlio Fabris. En prensa, 2015.
  8. *Black hole mimickers.*  
Daniela Pérez, Gustavo E. Romero, Jerome Novak, Federico G. Lopez Armengol, Ericourgoulhon  
*Proceedings of 28th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics*.  
Formato electrónico <https://indico.cern.ch/event/336103/contributions/786749/>
- D.3 TRABAJOS CIENTÍFICOS PUBLICADOS EN REVISTAS NACIONALES CON REFERATO
1. *An analysis of the Kalam Cosmological Argument.*  
Daniela Pérez, Gustavo E. Romero.  
Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía (BAAA), **52**, 221-224, 2010.
  2. *Thermodynamics of regular black hole interiors.*  
Camila A. Correa, Gustavo E. Romero, Daniela Pérez, Santiago E. Perez Bergliaffa.

Boletín de la Asociación Argetina de Astronomía (BAAA), 53,  
231-234, 2011.

3. *Black holes and accretion in strong  $f(R)$  gravity.*  
Daniela Pérez, Gustavo E. Romero, S. E. Perez Bergliaffa.  
Boletín de la Asociación Argetina de Astronomía (BAAA) 55,  
487-490, 2012.



## BIBLIOGRAFÍA

---

- Abraham, Z. & Romero, G. E. 1999, Beaming and precession in the inner jet of 3C 273, *Astron. Astroph.*, 344, 61
- Abramowicz, M. A., Kluźniak, W., & Lasota, J.-P. 2002, No observational proof of the black-hole event-horizon, *Astron. Astroph.*, 396, L31
- Actis, M., Agnetta, G., Aharonian, F., et al. 2011, Design concepts for the Cherenkov Telescope Array CTA: an advanced facility for ground-based high-energy gamma-ray astronomy, *Experimental Astronomy*, 32, 193
- Alcubierre, M. 2008, *Introduction to 3+1 Numerical Relativity* (Oxford University Press)
- Almheiri, A., Marolf, D., Polchinski, J., & Sully, J. 2013, Black holes: complementarity or firewalls?, *Journal of High Energy Physics*, 2, 62
- Arbuzova, E. V., Dolgov, A. D., & Reverberi, L. 2012, Cosmological evolution in  $R^2$  gravity, *J. Cosm. Astropart. Phys.*, 2, 49
- Artymowicz, P. 1998, in *Theory of Black Hole Accretion Disks*, ed. M. A. Abramowicz, G. Björnsson, & J. E. Pringle, 202–218
- Baade, W. & Zwicky, F. 1934, On Super-novae, *Proceedings of the National Academy of Science*, 20, 254
- Barceló, C., Liberati, S., Sonogo, S., & Visser, M. 2008, Fate of gravitational collapse in semiclassical gravity, *Phys. Rev. D*, 77, 044032
- Bardeen, J. M. 1968, in *Proceedings of the 5th International Conference on General Relativity and Gravitation*, ed. V. Fock, 174
- Bardeen, J. M., Carter, B., & Hawking, S. W. 1973, The four laws of black hole mechanics, *Communications in Mathematical Physics*, 31, 161
- Bardeen, J. M. & Press, W. H. 1973, Radiation fields in the Schwarzschild background, *Journal of Mathematical Physics*, 14, 7
- Baumgarte, T. W. & Shapiro, S. L. 2010, *Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer* (Cambridge University Press)
- Becker, P. A. & Kafatos, M. 1995, Implications of Gamma-Ray Transparency Constraints in Blazars: Minimum Distances and Gamma-Ray Collimation, *Astrophys. J.*, 453, 83
- Begelman, M. C., Blandford, R. D., & Rees, M. J. 1980, Massive black hole binaries in active galactic nuclei, *Nature*, 287, 307

- Bekenstein, J. D. 1972, Black holes and the second law., *Nuovo Cimento Lettere*, 4, 737
- Bekenstein, J. D. 1973, Black Holes and Entropy, *Phys. Rev. D*, 7, 2333
- Bekenstein, J. D. 1974, Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics, *Phys. Rev. D*, 9, 3292
- Bigelow, J. 1996, *Presentism and Properties* (Blackwell)
- Birkhoff, G. D. & Langer, R. E. 1923, *Relativity and modern physics* (Harvard University Press)
- Bisnovatyi-Kogan, G. S. & Blinnikov, S. I. 1977, Disk accretion onto a black hole at subcritical luminosity, *Astron. Astroph.*, 59, 111
- Biswas, T., Cembranos, J. A. R., & Kapusta, J. I. 2010a, Thermal Duality and Hagedorn Transition from p-adic Strings, *Physical Review Letters*, 104, 021601
- Biswas, T., Cembranos, J. A. R., & Kapusta, J. I. 2010b, Thermodynamics and cosmological constant of non-local field theories from p-adic strings, *Journal of High Energy Physics*, 10, 48
- Blumenthal, G. R. & Gould, R. J. 1970, Bremsstrahlung, Synchrotron Radiation, and Compton Scattering of High-Energy Electrons Traversing Dilute Gases, *Reviews of Modern Physics*, 42, 237
- Bode, T., Haas, R., Bogdanović, T., Laguna, P., & Shoemaker, D. 2010, Relativistic mergers of supermassive black holes and their electromagnetic signatures, *Astrophys. J.*, 715, 1117
- Bogdanović, T., Smith, B. D., Sigurdsson, S., & Eracleous, M. 2008, Modeling of Emission Signatures of Massive Black Hole Binaries. I. Methods, *Astrophys. J. Suppl. S.*, 174, 455
- Bolton, C. T. 1972, Dimensions of the Binary System HDE 226868 = Cygnus X-1, *Nature*, 240, 124
- Bolton, J. G. 1948, Discrete Sources of Galactic Radio Frequency Noise, *Nature*, 162, 141
- Bolton, J. G. & Stanley, G. J. 1948, Variable Source of Radio Frequency Radiation in the Constellation of Cygnus, *Nature*, 161, 312
- Bolton, J. G., Stanley, G. J., & Slee, O. B. 1949, Positions of Three Discrete Sources of Galactic Radio-Frequency Radiation, *Nature*, 164, 101
- Bonilla, M. A. G. & Senovilla, J. M. M. 1997, Some Properties of the Bel and Bel-Robinson Tensors, *General Relativity and Gravitation*, 29, 91
- Boroson, T. A. & Lauer, T. R. 2009, A candidate sub-parsec supermassive binary black hole system, *Nature*, 458, 53



- Bowyer, S., Byram, E. T., Chubb, T. A., & Friedman, H. 1965, Cosmic X-ray Sources, *Science*, 147, 394
- Boyer, R. H. & Lindquist, R. W. 1967, Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric, *Journal of Mathematical Physics*, 8, 265
- Brandenberger, R., Mukhanov, V., & Sornborger, A. 1993, Cosmological theory without singularities, *Phys. Rev. D*, 48, 1629
- Bretón, N., Feinstein, A., & Ibáñez, J. 1993, The Bel-Robinson tensor for the collision of gravitational plane waves, *General Relativity and Gravitation*, 25, 267
- Bronnikov, K. A., Dehnen, H., & Melnikov, V. N. 2007, Regular black holes and black universes, *General Relativity and Gravitation*, 39, 973
- Bronnikov, K. A. & Fabris, J. C. 2006, Regular Phantom Black Holes, *Physical Review Letters*, 96, 251101
- Bunge, M. 1977, *Treatise of Basic Philosophy. Ontology I: The Furniture of the World* (Reidel)
- Camenzind, M. 2007, *Compact objects in astrophysics : white dwarfs, neutron stars, and black holes* (Springer-Verlag)
- Capozziello, S. & Fang, L. Z. 2002, Curvature Quintessence, *International Journal of Modern Physics D*, 11, 483
- Capozziello, S. & Faraoni, V. 2011, *Beyond Einstein Gravity* (Springer)
- Caproni, A., Abraham, Z., & Monteiro, H. 2013, Parsec-scale jet precession in BL Lacertae (2200+420), *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 428, 280
- Cardoso, V., Pani, P., Cadoni, M., & Cavaglià, M. 2008, Ergoregion instability of ultracompact astrophysical objects, *Phys. Rev. D*, 77, 124044
- Carr, B. J., Kohri, K., Sendouda, Y., & Yokoyama, J. 2010, New cosmological constraints on primordial black holes, *Phys. Rev. D*, 81, 104019
- Carter, B. 1968, Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields, *Physical Review*, 174, 1559
- Carter, B. 1971, Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom, *Phys. Rev. Lett.*, 26, 331
- Carter, B. 1973, in *Black Holes (Les Astres Occlus)*, ed. C. Dewitt & B. S. Dewitt, 57–214
- Cattoen, C., Faber, T., & Visser, M. 2005, Gravastars must have anisotropic pressures, *Classical and Quantum Gravity*, 22, 4189
- Cembranos, J. A. R., de la Cruz-Dombriz, A., & Jimeno Romero, P. 2011, Kerr-Newman black holes in  $f(R)$  theories, *ArXiv e-prints*

- Chandrasekhar, S. 1931, The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs, *Astrophys. J.*, 74, 81
- Chandrasekhar, S. 1939, Colloque International d' Astrophysics XIII. In *Novae and White Dwarfs*, eds. Herman and Cie
- Chisholm, R. 1990, *Events Without Time: An Essay On Ontology*, *Noûs*, 24, 413
- Christodoulou, D. 1970, Reversible and Irreversible Transformations in Black-Hole Physics, *Physical Review Letters*, 25, 1596
- Clarke, C. J. S. 1977, in *Foundation of Space-Time Theories*, ed. J. S. Earman, C. N. Glymour, & J. J. Stachel, 94–108
- Clarke, C. J. S. 1993, *The analysis of space-time singularities* (Cambridge University Press)
- Clifton, T., Ellis, G. F. R., & Tavakol, R. 2013, A gravitational entropy proposal, *Classical and Quantum Gravity*, 30, 125009
- Colpi, M. & Dotti, M. 2009, Massive Binary Black Holes in the Cosmic Landscape, ArXiv e-prints
- Cooney, A., Dedeo, S., & Psaltis, D. 2010, Neutron stars in  $f(R)$  gravity with perturbative constraints, *Phys. Rev. D*, 82, 064033
- Courant, R. 1961, *Differential and Integral Calculus* (Blackie & Son)
- Craig, W. L. 2001, *Time and the Metaphysics of Relativity* (Kluwer)
- Crisp, T. 2003, *The Oxford Handbook of Methaphysics* (Oxford University Press)
- Crisp, T. 2007, *Presentism, Eternalism and Relativity Physics* (Routledge)
- de Felice, A. & Tsujikawa, S. 2010,  $f(R)$  Theories, *Living Reviews in Relativity*, 13, 3
- de La Cruz-Dombriz, A., Dobado, A., & Maroto, A. L. 2009, Black holes in  $f(R)$  theories, *Phys. Rev. D*, 80, 124011
- Dermer, C. D., Finke, J. D., Krug, H., & Böttcher, M. 2009, Gamma-Ray Studies of Blazars: Synchro-Compton Analysis of Flat Spectrum Radio Quasars, *Astrophys. J.*, 692, 32
- Dermer, C. D. & Schlickeiser, R. 1993, Model for the High-Energy Emission from Blazars, *Astrophys. J.*, 416, 458
- Dolev, Y. 2006, *How to Square a Non-localized Present with Special Relativity* (Elsevier)
- Doran, C. 2000, New form of the Kerr solution, *Phys. Rev. D*, 61, 067503
- Dorato, M. 2006, *The Irrelevance of the Presentist/Eternalist Debate for the Ontology of Minkowski Spacetime* (Elsevier)

- D’Orazio, D. J., Haiman, Z., & MacFadyen, A. 2013, Accretion into the central cavity of a circumbinary disc, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 436, 2997
- Dotti, M., Colpi, M., Haardt, F., & Mayer, L. 2007, Supermassive black hole binaries in gaseous and stellar circumnuclear discs: orbital dynamics and gas accretion, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 379, 956
- Dotti, M., Sesana, A., & Decarli, R. 2012, Massive Black Hole Binaries: Dynamical Evolution and Observational Signatures, *Advances in Astronomy*, 2012
- Dove, J. B., Wilms, J., Maisack, M., & Begelman, M. C. 1997, Self-Consistent Thermal Accretion Disk Corona Models for Compact Objects, *Astrophys. J.*, 487, 759
- Droste, J. 1916a, *Het zwaartekrachtstsveld van een of meer Lichamen volgens de theorie van Einstein*, Leiden: E.J. Brill
- Droste, J. 1916b, *The field of a single centre in Einstein’s Theory of Gravitation, and the motion of a particle in that field*, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 19, 197
- Dymnikova, I. 1992, Vacuum nonsingular black hole, *General Relativity and Gravitation*, 24, 235
- Dymnikova, I. 2003, Spherically Symmetric Space Time with Regular de Sitter Center, *International Journal of Modern Physics D*, 12, 1015
- Dymnikova, I. & Korpusik, M. 2011, Thermodynamics of Regular Cosmological Black Holes with the de Sitter Interior, *Entropy*, 13, 1967
- Eardley, D. M. 1974, Death of White Holes in the Early Universe, *Physical Review Letters*, 33, 442
- Earman, J. 1995, *Bangs, Crunches, Whimpers, and Shrieks - Singularities and Acausalities in Relativistic Spacetimes* (Oxford University Press)
- Eddington, A. S. 1923, *The mathematical theory of relativity* (Cambridge University Press)
- Einstein, A. 1907, Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen, *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, 4, 411
- Einstein, A. 1915, Die Feldgleichungen der Gravitation, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 844
- Eisenstaedt, J. 2006, *The Curious History of Relativity: How Einstein’s Theory of Gravity Was Lost and Found Again* (Princeton University Press)

- Ellis, G. F. R. 2006, *Physics in the real universe: time and spacetime, General Relativity and Gravitation*, 38, 1797
- Ellis, G. F. R., Maartens, R., & MacCallum, M. A. H. 2012, *Relativistic Cosmology* (Cambridge University Press)
- Ellis, G. F. R. & Rothman, T. 2010, *Time and Spacetime: The Crystallizing Block Universe*, *International Journal of Theoretical Physics*, 49, 988
- Fabbiano, G., Wang, J., Elvis, M., & Risaliti, G. 2011, *A close nuclear black-hole pair in the spiral galaxy NGC3393*, *Nature*, 477, 431
- Falcke, H., Markoff, S., Bower, G. C., et al. 2011, in *IAU Symposium, Vol. 275, IAU Symposium*, ed. G. E. Romero, R. A. Sunyaev, & T. Belloni, 68–76
- Finkelstein, D. 1958, *Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle*, *Physical Review*, 110, 965
- Flamm, L. 1916, *Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie*, *Physikalische Zeitschrift*, 17, 448
- Frank, J., King, A., & Raine, D. J. 2002, *Accretion Power in Astrophysics: Third Edition* (Cambridge University Press)
- Frolov, V. P. 1974, *Motion of charged radiation shells in general relativity and Friedman states.*, *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*, 66, 813
- Frolov, V. P., Markov, M. A., & Mukhanov, V. F. 1989, *Through a black hole into a new universe?*, *Physics Letters B*, 216, 272
- Frolov, V. P., Markov, M. A., & Mukhanov, V. F. 1990, *Black holes as possible sources of closed and semiclosed worlds*, *Phys. Rev. D*, 41, 383
- Fronsdal, C. 1959, *Completion and Embedding of the Schwarzschild Solution*, *Physical Review*, 116, 778
- Gao, C., Chen, X., Faraoni, V., & Shen, Y.-G. 2008, *Does the mass of a black hole decrease due to the accretion of phantom energy?*, *Phys. Rev. D*, 78, 024008
- Giacconi, R., Gursky, H., Paolini, F. R., & Rossi, B. B. 1962, *Evidence for x Rays From Sources Outside the Solar System*, *Phys. Rev. Lett.*, 9, 439
- Gibbons, G. W. & Hawking, S. W. 1977, *Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation*, *Phys. Rev. D*, 15, 2738
- Gierlinski, M., Zdziarski, A. A., Done, C., et al. 1997, *Simultaneous X-ray and gamma-ray observations of CYG X-1 in the hard state by GINGA and OSSE*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 288, 958

- Simon, E. G. & Hořava, P. 2009, Astrophysical violations of the Kerr bound as a possible signature of string theory, *Physics Letters B*, 672, 299
- Gliner, E. B. 1966, Algebraic Properties of the Energy-momentum Tensor and Vacuum-like States of Matter, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 22, 378
- Gold, R., Paschalidis, V., Etienne, Z. B., Shapiro, S. L., & Pfeiffer, H. P. 2014a, Accretion disks around binary black holes of unequal mass: General relativistic magnetohydrodynamic simulations near decoupling, *Phys. Rev. D*, 89, 064060
- Gold, R., Paschalidis, V., Ruiz, M., et al. 2014b, Accretion disks around binary black holes of unequal mass: General relativistic MHD simulations of postdecoupling and merger, *Phys. Rev. D*, 90, 104030
- Gold, T. 1962, The Arrow of Time, *American Journal of Physics*, 30, 403
- Gold, T. 1968, Rotating Neutron Stars as the Origin of the Pulsating Radio Sources, *Nature*, 218, 731
- Gou, L., McClintock, J. E., Reid, M. J., et al. 2011, The Extreme Spin of the Black Hole in Cygnus X-1, *Astrophys. J.*, 742, 85
- Gould, A. & Rix, H.-W. 2000, Binary Black Hole Mergers from Planet-like Migrations, *Astrophys. J. Lett.*, 532, L29
- Grünbaum, A. 1973, *Philosophical Problems of Space and Time* (Reidel)
- Gullstrand, A. 1922, Allgemeine Lösung des statischen Einkörperproblems in der Einsteinschen Gravitationstheorie, *Arkiv. Mat. Astron. Fys.*, 16, 1
- Gültekin, K. & Miller, J. M. 2012, Observable Consequences of Merger-driven Gaps and Holes in Black Hole Accretion Disks, *Astrophys. J.*, 761, 90
- Guseinov, O. K. & Zel'dovich, Y. B. 1966, Collapsed Stars in Binary Systems, *Astronomicheskii Zhurnal*, 43, 313
- Habib Mazharimousavi, S., Halilsoy, M., & Tahamtan, T. 2012, Solutions for  $f(R)$  gravity coupled with electromagnetic field, *European Physical Journal C*, 72, 1851
- Harko, T., Kovács, Z., & Lobo, F. S. N. 2009, Thin accretion disks in stationary axisymmetric wormhole spacetimes, *Phys. Rev. D*, 79, 064001
- Harrington, J. 2008, Special Relativity and The Future: A Defense of the Point-Present, *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics*, 79, 82

- Harrington, J. 2009, What "Becomes" in Temporal Becoming?, *American Philosophical Quarterly*, 46, 249
- Hawking, S. W. 1968, Gravitational Radiation in an Expanding Universe, *Journal of Mathematical Physics*, 9, 598
- Hawking, S. W. 1971, Gravitational Radiation from Colliding Black Holes, *Physical Review Letters*, 26, 1344
- Hawking, S. W. 1972, Black holes in general relativity, *Communications in Mathematical Physics*, 25, 152
- Hawking, S. W. 1974, Black hole explosions?, *Nature*, 248, 30
- Hawking, S. W. 1975, Particle creation by black holes, *Communications in Mathematical Physics*, 43, 199
- Hawking, S. W. 1985, Arrow of time in cosmology, *Phys. Rev. D*, 32, 2489
- Hawking, S. W. & Ellis, G. F. R. 1968, The Cosmic Black-Body Radiation and the Existence of Singularities in Our Universe, *Astrophys. J.*, 152, 25
- Hawking, S. W. & Ellis, G. F. R. 1973, *The large-scale structure of space-time.* (Cambridge University Press)
- Hawking, S. W. & Penrose, R. 1970, The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology, *Royal Society of London Proceedings Series A*, 314, 529
- Hayasaki, K., Mineshige, S., & Sudou, H. 2007, Binary Black Hole Accretion Flows in Merged Galactic Nuclei, *Publ. Astron. Soc. Japan*, 59, 427
- Hayasaki, K., Saito, H., & Mineshige, S. 2013, Binary Black Hole Accretion Flows From a Misaligned Circumbinary Disk, *Publ. Astron. Soc. Japan*, 65, 86
- Hayward, S. A. 1994, Quasilocal gravitational energy, *Phys. Rev. D*, 49, 831
- Hazard, C., Mackey, M. B., & Shimmins, A. J. 1963, Investigation of the Radio Source 3C 273 By The Method of Lunar Occultations, *Nature*, 197, 1037
- He, P. & Fang, L.-Z. 2002, Constraints on Primordial Black Holes and Primordial Density Perturbations from the Epoch of Reionization, *Astrophys. J. Lett.*, 568, L1
- Hendi, S. H. & Momeni, D. 2011, Black-hole solutions in  $F(R)$  gravity with conformal anomaly, *European Physical Journal C*, 71, 1823
- Hendi, S. H., Panah, B. E., & Mousavi, S. M. 2012, Some exact solutions of  $F(R)$  gravity with charged (a)dS black hole interpretation, *General Relativity and Gravitation*, 44, 835

- Hernandez, Jr., W. C. & Misner, C. W. 1966, Observer Time as a Coordinate in Relativistic Spherical Hydrodynamics, *Astrophys. J.*, 143, 452
- Hewish, A., Bell, S. J., Pilkington, J. D. H., Scott, P. F., & Collins, R. A. 1968, Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source, *Nature*, 217, 709
- Hey, J. S., Parsons, S. J., & Phillips, J. W. 1946, Fluctuations in Cosmic Radiation at Radio-Frequencies, *Nature*, 158, 234
- Hilbert, D. 1917, Die Grundlagen der Physik: zweite Mitteilung, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse, 55
- Hillebrandt, W. & Steinmetz, K. O. 1976, Anisotropic neutron star models - Stability against radial and nonradial pulsations, *Astron. Astroph.*, 53, 283
- Hinchliff, M. 2000, A Defense of Presentism in a Relativistic Setting, *Philosophy of Science (Proceedings)*, 67, S575
- Hobson, M. P., Efstathiou, G. P., & Lasenby, A. N. 2006, *General Relativity* (Cambridge University Press), 590
- Horvat, D., Ilijić, S., & Marunović, A. 2011, Radial stability analysis of the continuous pressure gravastar, *Classical and Quantum Gravity*, 28, 195008
- Hoyng, P. 2006, *Relativistic astrophysics and cosmology : a primer* (Springer)
- Israel, W. 1967, Event Horizons in Static Vacuum Space-Times, *Physical Review*, 164, 1776
- Israel, W. 1968, Event horizons in static electrovac space-times, *Communications in Mathematical Physics*, 8, 245
- Israel, W. 1986, Third law of black-hole dynamics - A formulation and proof, *Physical Review Letters*, 57, 397
- Israel, W. 1987, *Dark stars: the evolution of an idea.* (Cambridge University Press), 199–276
- Kaastra, J. S. & Roos, N. 1992, Massive Binary Black-Holes and Wiggling Jets, *Astron. Astroph.*, 254, 96
- Katz, J. I. 1997, A Precessing Disk in OJ 287?, *Astrophys. J.*, 478, 527
- Kerr, R. P. 1963a, in *Quasistellar sources and gravitational collapse. Proceedings of the First Texas Symposium on Relativistic Astrophysics*, ed. I. Robinson, A. Schild, and E. L. Schucking, 99–102
- Kerr, R. P. 1963b, Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics, *Phys. Rev. Lett.*, 11, 237

- Khangulyan, D., Aharonian, F. A., & Kelner, S. R. 2014, Simple Analytical Approximations for Treatment of Inverse Compton Scattering of Relativistic Electrons in the Blackbody Radiation Field, *Astrophys. J.*, 783, 100
- Kocsis, B., Haiman, Z., & Loeb, A. 2012a, Gas pile-up, gap overflow and Type 1.5 migration in circumbinary discs: application to supermassive black hole binaries, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 427, 2680
- Kocsis, B., Haiman, Z., & Loeb, A. 2012b, Gas pile-up, gap overflow and Type 1.5 migration in circumbinary discs: general theory, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 427, 2660
- Komossa, S. 2006, Observational evidence for binary black holes and active double nuclei, *Memor. Soc. Astronom. Ital.*, 77, 733
- Komossa, S., Burwitz, V., Hasinger, G., et al. 2003, Discovery of a Binary Active Galactic Nucleus in the Ultraluminous Infrared Galaxy NGC 6240 Using Chandra, *Astrophys. J. Lett.*, 582, L15
- Krishnasamy, I. 1985, Quasilocal energy and the Bel-Robinson tensor, *General Relativity and Gravitation*, 17, 621
- Kruskal, M. D. 1960, Maximal Extension of Schwarzschild Metric, *Physical Review*, 119, 1743
- Kun, E., Gabányi, K. É., Karouzos, M., Britzen, S., & Gergely, L. Á. 2014, A spinning supermassive black hole binary revealed by VLBI data on the jet of S5 1928+738, *ArXiv e-prints*
- Lanczos, C. 1922, Ein vereinfachendes Koordinatensystem für die Einsteinschen Gravitationsgleichungen, *Physikalische Zeitschrift*, 23, 537
- Lemaître, G. 1933, L'Univers en expansion, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 53, 51
- Lemos, J. P. S. & Zanchin, V. T. 2011, Regular black holes: Electrically charged solutions, Reissner-Nordström outside a de Sitter core, *Phys. Rev. D*, 83, 124005
- Li, M., Li, X.-D., Wang, S., & Wang, Y. 2011, Dark Energy, *Communications in Theoretical Physics*, 56, 525
- Liebling, S. L. & Palenzuela, C. 2012, Dynamical Boson Stars, *Living Reviews in Relativity*, 15, 6
- Lin, D. N. C. & Papaloizou, J. 1986a, On the tidal interaction between protoplanets and the primordial solar nebula. II - Self-consistent nonlinear interaction, *Astrophys. J.*, 307, 395
- Lin, D. N. C. & Papaloizou, J. 1986b, On the tidal interaction between protoplanets and the protoplanetary disk. III - Orbital migration of protoplanets, *Astrophys. J.*, 309, 846



- Lin, L.-M. & Novak, J. 2006, Rotating star initial data for a constrained scheme in numerical relativity, *Classical and Quantum Gravity*, 23, 4545
- Lister, M. L., Aller, H. D., Aller, M. F., et al. 2009, MOJAVE: Monitoring of Jets in Active Galactic Nuclei with VLBA Experiments. V. Multi-Epoch VLBA Images, *Astron. J.*, 137, 3718
- Liu, F. K. & Chen, X. 2007, Evolution of Supermassive Black Hole Binaries and Acceleration of Jet Precession in Galactic Nuclei, *Astrophys. J.*, 671, 1272
- Liu, Y. T. & Shapiro, S. L. 2010, Accretion disks around binary black holes: A quasistationary model, *Phys. Rev. D*, 82, 123011
- Lobanov, A. P. & Roland, J. 2005, A supermassive binary black hole in the quasar 3C 345, *Astron. Astroph.*, 431, 831
- Lynden-Bell, D. 1969, Galactic Nuclei as Collapsed Old Quasars, *Nature*, 223, 690
- Magnano, G., Ferraris, M., & Francaviglia, M. 1987, Nonlinear gravitational Lagrangians., *General Relativity and Gravitation*, 19, 465
- Markosian, N. 2004, *A Defense of Presentism* (Oxford University Press)
- Markov, M. A. 1982, Limiting density of matter as a universal law of nature, *ZhETF Pisma Redaktsiiu*, 36, 214
- Marscher, A. P. & Gear, W. K. 1985, Models for high-frequency radio outbursts in extragalactic sources, with application to the early 1983 millimeter-to-infrared flare of 3C 273, *Astrophys. J.*, 298, 114
- Maxwell, N. 1985, Are Probabilism and Special Relativity Incompatible?, *Philosophy of Science*, 23, 23
- Mazur, P. O. & Mottola, E. 2001, Gravitational Condensate Stars: An Alternative to Black Holes, *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints*
- Mbonye, M. R., Battista, N., & Farr, B. 2012, Time Evolution of a Nonsingular Primordial Black Hole, *International Journal of Modern Physics D*, 21, 50027
- Mbonye, M. R. & Kazanas, D. 2005, Nonsingular black hole model as a possible end product of gravitational collapse, *Phys. Rev. D*, 72, 024016
- McVittie, G. C. 1933, The mass-particle in an expanding universe, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 93, 325
- Merricks, T. 1999, Parts and Presentism, *Noûs*, 33, 421
- Minkowski, H. 1907, Das Relativitätsprinzip, *Math. Ges. Goett.*, 60, 3
- Minkowski, H. 1908, Raum und Zeit, 80th Versammlung Deutscher Naturforscher

- Minkowski, H. 1909, *Raum und Zeit*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 18, p. 75-88, 18, 75
- Mirabel, I. F., Dhawan, V., Chaty, S., et al. 1998, Accretion instabilities and jet formation in GRS 1915+105, *Astron. Astroph.*, 330, L9
- Misner, C. W. & Sharp, D. H. 1964, Relativistic Equations for Adiabatic, Spherically Symmetric Gravitational Collapse, *Physical Review*, 136, 571
- Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. 1973, *Gravitation* (W.H. Freeman and Co.)
- Moon, T., Myung, Y. S., & Son, E. J. 2011a,  $f(R)$  black holes, *General Relativity and Gravitation*, 43, 3079
- Moon, T., Myung, Y. S., & Son, E. J. 2011b, Stability analysis of  $f(R)$ -AdS black holes, *European Physical Journal C*, 71, 1777
- Morris, M. S. & Thorne, K. S. 1988, Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity, *American Journal of Physics*, 56, 395
- Morse, M. & Feshbach, M. 1953, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill Science)
- Motohashi, H. & Nishizawa, A. 2012, Reheating after  $f(R)$  inflation, *Phys. Rev. D*, 86, 083514
- Mozersky, M. J. 2011, *Presentism* (Oxford University Press)
- Myung, Y. S. 2011, Instability of a rotating black hole in a limited form of  $f(R)$  gravity, *Phys. Rev. D*, 84, 024048
- Myung, Y. S., Moon, T., & Son, E. J. 2011, Stability of  $f(R)$  black holes, *Phys. Rev. D*, 83, 124009
- Narayan, R., Mahadevan, R., & Quataert, E. 1998, in *Theory of Black Hole Accretion Disks*, ed. M. A. Abramowicz, G. Björnsson, & J. E. Pringle, 148–182
- Ne'eman, Y. 1965, Expansion as an Energy Source in Quasi-Stellar Radio Sources., *Astrophys. J.*, 141, 1303
- Newman, E. T., Couch, E., Chinnapared, K., et al. 1965, Metric of a Rotating, Charged Mass, *Journal of Mathematical Physics*, 6, 918
- Nolan, B. C. 1998, A point mass in an isotropic universe: Existence, uniqueness, and basic properties, *Phys. Rev. D*, 58, 064006
- Norton, J. D. 2013, in *Workshop on Cosmology and Time*. Penn State University.
- Novello, M. & Bergliaffa, S. E. P. 2008, Bouncing cosmologies, *Phys. Rep.*, 463, 127

- Novikov, I. D. 1963, On the Evolution of a Semiclosed World, *Astron. Zh.*, 40, 772
- Novikov, I. D. 1964, Obituary: R- i T-oblasti v prostranstve-vremeni so sfericheski simmetrichnym prostranstvom = R- and T- regions in the space-time with the spherical symmetrical space, *Soobshcheniya Gosudarstvennogo Astronomicheskogo Instituta*, 132, 3
- Novikov, I. D. 1966, The Replacement of Relativistic Gravitational Contraction by Expansion, and the Physical Singularities during Contraction., *Astronomicheskii Zhurnal*, 43, 911
- Novikov, I. D. & Thorne, K. S. 1973, in *Black Holes (Les Astres Occlus)*, ed. C. Dewitt & B. S. Dewitt, 343–450
- Oppenheimer, J. R. & Snyder, H. 1939, On Continued Gravitational Contraction, *Physical Review*, 56, 455
- Oppenheimer, J. R. & Volkoff, G. M. 1939, On Massive Neutron Cores, *Phys. Rev.*, 55, 374
- Orosz, J. A., McClintock, J. E., Aufdenberg, J. P., et al. 2011, The Mass of the Black Hole in Cygnus X-1, *Astrophys. J.*, 742, 84
- Pacini, F. 1967, Energy Emission from a Neutron Star, *Nature*, 216, 567
- Page, D. N. & Thorne, K. S. 1974, Disk-Accretion onto a Black Hole. Time-Averaged Structure of Accretion Disk, *Astrophys. J.*, 191, 499
- Painleve, P. 1922, *Le Mecanique Classique et la Theorie de la Relativite.*, *L'Astronomie*, 36, 6
- Papaloizou, J. & Lin, D. N. C. 1984, On the tidal interaction between protoplanets and the primordial solar nebula. I - Linear calculation of the role of angular momentum exchange, *Astrophys. J.*, 285, 818
- Paredes, J. M. 2009, *Black Holes in the Galaxy, Compact Objects and their Emission*, *Argentinian Astronomical Society Book Series*, eds. G. E. Romero & P. Benaglia
- Penrose, R. 1965a, Gravitational Collapse and Space-Time Singularities, *Phys. Rev. Lett.*, 14, 57
- Penrose, R. 1965b, Zero Rest-Mass Fields Including Gravitation: Asymptotic Behaviour, *Royal Society of London Proceedings Series A*, 284, 159
- Penrose, R. 1969, Gravitational Collapse: the Role of General Relativity, *Nuovo Cimento Rivista Serie*, 1, 252
- Penrose, R. 1979, in *General Relativity: An Einstein centenary survey*, ed. S. W. Hawking & W. Israel, 581–638
- Penrose, R. & Floyd, R. M. 1971, Extraction of Rotational Energy from a Black Hole, *Nature Physical Science*, 229, 177

- Perez Bergliaffa, S. E., Romero, G. E., & Vucetich, H. 1998, Toward an axiomatic pregeometry of space-time, *International Journal of Theoretical Physics*, 37, 2281
- Perez Bergliaffa, S. E. & Yves de Oliveira, E. 2011, Static and spherically symmetric black holes in  $f(R)$  theories, *Phys. Rev. D*, 84, 084006
- Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., et al. 1999, Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae, *Astrophys. J.*, 517, 565
- Piran, T. & Fan, Y.-Z. 2007, Gamma-ray burst theory after Swift, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 365, 1151
- Planck Collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., et al. 2014, Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters, *Astron. Astroph.*, 571, A16
- Plebanski, J. & Krasinski, A. 2006, *An Introduction to General Relativity and Cosmology* (Cambridge University Press)
- Poincaré, H. 1902, *La Science et l'Hypothèse* (Flammarion)
- Poisson, E. & Israel, W. 1988, Structure of the black hole nucleus, *Classical and Quantum Gravity*, 5, L201
- Poisson, E. & Israel, W. 1990, Internal structure of black holes, *Phys. Rev. D*, 41, 1796
- Poutanen, J. 1998, in *Theory of Black Hole Accretion Disks*, ed. M. A. Abramowicz, G. Björnsson, & J. E. Pringle, 100–122
- Predoi, M. & Balan, T. 2005, *Mathematical analysis Vol II. Integral Calculus* (Editura Universitaria)
- Psaltis, D., Perrodin, D., Dienes, K. R., & Mocioiu, I. 2008a, Kerr Black Holes Are Not Unique to General Relativity, *Physical Review Letters*, 100, 091101
- Psaltis, D., Perrodin, D., Dienes, K. R., & Mocioiu, I. 2008b, Publisher's Note: Kerr Black Holes Are Not Unique to General Relativity [*Phys. Rev. Lett.* 100, 091101 (2008)], *Physical Review Letters*, 100, 119902
- Pun, C. S. J., Kovács, Z., & Harko, T. 2008, Thin accretion disks in  $f(R)$  modified gravity models, *Phys. Rev. D*, 78, 024043
- Putnam, H. 1967, Time and Physical Geometry, *Journal of Philosophy*, 64, 240
- Rafikov, R. R. 2013, Structure and Evolution of Circumbinary Disks around Supermassive Black Hole Binaries, *Astrophys. J.*, 774, 144
- Raychaudhuri, A. 1955, Relativistic Cosmology. I, *Physical Review*, 98, 1123

- Rea, M. C. 2003, *Presentism and the Space-Time Manifold* (Oxford University Press)
- Rees, M. J. 1984, *Black Hole Models for Active Galactic Nuclei*, *Annual Rev. of Astron. and Astroph.*, 22, 471
- Reid, M. J., McClintock, J. E., Narayan, R., et al. 2011, *The Trigonometric Parallax of Cygnus X-1*, *Astrophys. J.*, 742, 83
- Reynosó, M. M., Medina, M. C., & Romero, G. E. 2011, *A leptohadronic model for high-energy emission from FR I radiogalaxies*, *Astron. Astroph.*, 531, A30
- Reynosó, M. M., Romero, G. E., & Medina, M. C. 2012, *A two-component model for the high-energy variability of blazars. Application to PKS 2155-304*, *Astron. Astroph.*, 545, A125
- Rezzolla, L., Zanotti, O., & Font, J. A. 2003, *Dynamics of thick discs around Schwarzschild-de Sitter black holes*, *Astron. Astroph.*, 412, 603
- Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., et al. 1998, *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, *Astron. J.*, 116, 1009
- Rietdijk, C. W. 1966, *A Rigorous Proof of Determinism Derived from this Special Theory of Relativity*, *Philosophical Papers*, 33, 341
- Robinson, D. C. 1975, *Uniqueness of the Kerr black hole*, *Physical Review Letters*, 34, 905
- Roedig, C., Sesana, A., Dotti, M., et al. 2012, *Evolution of binary black holes in self gravitating discs. Dissecting the torques*, *Astron. Astroph.*, 545, A127
- Romero, G. E. 1995, *Fine-Scale Structure in Relativistic Jets and Rapid Variability in Blazars*, *Astrophys. Space Sci.*, 234, 49
- Romero, G. E. 2013a, *Adversus singularitates: The ontology of space-time singularities*, *Foundations of Science*, 18, 297
- Romero, G. E. 2013b, *The ontology of General Relativity, Gravitation and Cosmology*. Cambridge University Press
- Romero, G. E. 2014, *Philosophical Issues of Black Holes* (Nova Science Publisher)
- Romero, G. E. 2015a, *On the ontology of spacetime*, ArXiv e-prints
- Romero, G. E. 2015b, *Present time*, *Foundations of Science*, 20, 135
- Romero, G. E., Cellone, S. A., & Combi, J. A. 1999, *Optical microvariability of southern AGNs*, *Astron. Astroph. Suppl.*, 135, 477
- Romero, G. E., Cellone, S. A., Combi, J. A., & Andruchow, I. 2002, *Optical microvariability of EGRET blazars*, *Astron. Astroph.*, 390, 431

- Romero, G. E., Chajet, L., Abraham, Z., & Fan, J. H. 2000, Beaming and precession in the inner jet of 3C 273 — II. The central engine, *Astron. Astroph.*, 360, 57
- Romero, G. E., Combi, J. A., Benaglia, P., et al. 1997, Search for intraday radio variability in EGRET blazars., *Astron. Astroph.*, 326, 77
- Romero, G. E., Combi, J. A., & Vucetich, H. 1995, Rapid Variability in the Southern Blazar PKS 0521-365, *Astrophys. Space Sci.*, 225, 183
- Romero, G. E., Fan, J.-H., & Nuza, S. E. 2003, The Binary Black Hole Scenario for the BL Lacertae Object AO $\gamma$ 0235+16, *Chinese J. Astron. Astrophys.*, 3, 513
- Romero, G. E. & Pérez, D. 2011, Time and Irreversibility in AN Accelerating Universe, *International Journal of Modern Physics D*, 20, 2831
- Romero, G. E., Vieyro, F. L., & Chaty, S. 2014, Coronal origin of the polarization of the high-energy emission of Cygnus X-1, *Astron. Astroph.*, 562, L7
- Romero, G. E. & Vila, G. S. 2008, The proton low-mass microquasar: high-energy emission, *Astron. Astroph.*, 485, 623
- Romero, G. E. & Vila, G. S., eds. 2014, *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, Vol. 876, Introduction to Black Hole Astrophysics
- Roos, N., Kaastra, J. S., & Hummel, C. A. 1993, A massive binary black hole in 1928 + 738?, *Astrophys. J.*, 409, 130
- Rudjord, O., Gron, O., & Hervik, S. R. 2008, The Weyl curvature conjecture and black hole entropy, *Physica Scripta*, 77, 055901
- Sakharov, A. D. 1966, The Initial Stage of an Expanding Universe and the Appearance of a Nonuniform Distribution of Matter, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 22, 241
- Salpeter, E. E. 1964, Accretion of Interstellar Matter by Massive Objects., *Astrophys. J.*, 140, 796
- Sandage, A., Osmer, P., Giacconi, R., et al. 1966, On the optical identification of SCO X-1, *Astrophys. J.*, 146, 316
- Saridakis, E. N., González-Díaz, P. F., & Sigüenza, C. L. 2009, Unified dark energy thermodynamics: varying  $w$  and the -1-crossing, *Classical and Quantum Gravity*, 26, 165003
- Saunders, S. 2002, *How Relativity Contradicts Presentism* (Cambridge University Press)
- Savitt, S. S. 2006, *Presentism and Eternalism in Perspective* (Elsevier)
- Schmidt, M. 1963, 3C 273 : A Star-Like Object with Large Red-Shift, *Nature*, 197, 1040

- Schwarzschild, K. 1916a, Über das Gravitationsfeld eines Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), 424
- Schwarzschild, K. 1916b, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), 189
- Sciama, D. W. 1973, Retarded potentials and the expansion of the universe (Cornell University Press)
- Senovilla, J. M. M. & Garfinkle, D. 2014, The 1965 Penrose singularity theorem, ArXiv e-prints
- Sesana, A. 2013, Gravitational wave emission from binary supermassive black holes, ArXiv e-prints
- Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A. 1973, Black holes in binary systems. Observational appearance, *Astron. Astroph.*, 24, 337
- Shen, Y. & Loeb, A. 2010, Identifying Supermassive Black Hole Binaries with Broad Emission Line Diagnosis, *Astrophys. J.*, 725, 249
- Shklovsky, I. S. 1967, On the Nature of the Source of X-Ray Emission of SCO XR-1., *Astrophys. J. Lett.*, 148, L1
- Sillanpaa, A., Haarala, S., Valtonen, M. J., Sundelius, B., & Byrd, G. G. 1988, OJ 287 - Binary pair of supermassive black holes, *Astrophys. J.*, 325, 628
- Sillanpaa, A., Takalo, L. O., Pursimo, T., et al. 1996, Confirmation of the 12-year optical outburst cycle in blazar OJ 287., *Astron. Astroph.*, 305, L17
- Silva, R., Gonçalves, R. S., Alcaniz, J. S., & Silva, H. H. B. 2012, Thermodynamics and dark energy, *Astron. Astroph.*, 537, A11
- Smart, J. J. C. 1963, *Philosophy and Scientific Realism* (Routledge)
- Sotiriou, T. P. & Faraoni, V. 2010,  $f(R)$  theories of gravity, *Reviews of Modern Physics*, 82, 451
- Starobinsky, A. A. 1980, A new type of isotropic cosmological models without singularity, *Physics Letters B*, 91, 99
- Stein, H. 1968, On Einstein-Minkowski Space-Time, *Journal of Philosophy*, 65, 5
- Stein, H. 1991, On Relativity Theory and Openness of the Future, *Philosophy of Science*, 58, 147
- Stirling, A. M., Cawthorne, T. V., Stevens, J. A., et al. 2003, Discovery of a precessing jet nozzle in BL Lacertae, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 341, 405

- Stirling, A. M., Spencer, R. E., de la Force, C. J., et al. 2001, A relativistic jet from Cygnus X-1 in the low/hard X-ray state, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 327, 1273
- Stuchlík, Z. & Hledík, S. 1999, Some properties of the Schwarzschild-de Sitter and Schwarzschild-anti-de Sitter spacetimes, *Phys. Rev. D*, 60, 044006
- Stuchlík, Z. & Slaný, P. 2004, Equatorial circular orbits in the Kerr de Sitter spacetimes, *Phys. Rev. D*, 69, 064001
- Syer, D. & Clarke, C. J. 1995, Satellites in discs: regulating the accretion luminosity, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 277, 758
- Syer, D., Clarke, C. J., & Rees, M. J. 1991, Star-disc interactions near a massive black hole, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 250, 505
- Synge, J. L. 1950, The gravitational field of a particle, *Proc. Roy. Irish. Acad.*, A53, 83
- Szekeres, G. 1960, On the singularities of a Riemannian manifold, *Publicationes Mathematicae Debrecen* 7, 285 (1960), 7, 285
- Takeuchi, T., Miyama, S. M., & Lin, D. N. C. 1996, Gap Formation in Protoplanetary Disks, *Astrophys. J.*, 460, 832
- Tanaka, T., Menou, K., & Haiman, Z. 2012, Electromagnetic counterparts of supermassive black hole binaries resolved by pulsar timing arrays, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 420, 705
- Teukolsky, S. A. 2014, The Kerr Metric, ArXiv e-prints
- Thorne, K. S. & Price, R. H. 1975, Cygnus X-1 - an interpretation of the spectrum and its variability, *Astrophys. J. Lett.*, 195, L101
- Tolman, R. C. 1934, Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models, *Proceedings of the National Academy of Science*, 20, 169
- Torres, D. F. & Reimer, A. 2011, Hadronic beam models for quasars and microquasars, *Astron. Astroph.*, 528, L2
- Tsalmantza, P., Decarli, R., Dotti, M., & Hogg, D. W. 2011, A Systematic Search for Massive Black Hole Binaries in the Sloan Digital Sky Survey Spectroscopic Sample, *Astrophys. J.*, 738, 20
- Unruh, W. G. 1976, Notes on black-hole evaporation, *Phys. Rev. D*, 14, 870
- Valtaoja, E., Teräsanta, H., Tornikoski, M., et al. 2000, Radio Monitoring of OJ 287 and Binary Black Hole Models for Periodic Outbursts, *Astrophys. J.*, 531, 744
- Vila, G. S., Romero, G. E., & Casco, N. A. 2012, An inhomogeneous lepto-hadronic model for the radiation of relativistic jets. Application to XTE J1118+480, *Astron. Astroph.*, 538, A97



- Villata, M. & Raiteri, C. M. 1999, Helical jets in blazars. I. The case of MKN 501, *Astron. Astroph.*, 347, 30
- Visser, M. 1996, *Lorentzian Wormholes* (AIP Press)
- Volonteri, M. 2010, Formation of supermassive black holes, *Astron. Astroph. Rev.*, 18, 279
- Wald, R. M. 1984, *General relativity* (University of Chicago Press)
- Webster, B. L. & Murdin, P. 1972, Cygnus X-1-a Spectroscopic Binary with a Heavy Companion?, *Nature*, 235, 37
- Weinberg, S. 1989, The cosmological constant problem, *Reviews of Modern Physics*, 61, 1
- Weyl, H. 1917, *Zur Gravitationstheorie*, *Annalen der Physik*, 359, 117
- Weyl, H. 1961, *Raum, Zeit, Materie* (Springer)
- Wheeler, J. A. 1968, Our universe: the known and the unknown., *American Scientist*, 56, 1
- Wheeler, J. A. & Feynman, R. P. 1945, Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation, *Reviews of Modern Physics*, 17, 157
- Wheeler, J. A. & Feynman, R. P. 1949, Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action, *Reviews of Modern Physics*, 21, 425
- Will, C. M. 2006, The Confrontation between General Relativity and Experiment, *Living Reviews in Relativity*, 9, 3
- Wilson, A. S. & Colbert, E. J. M. 1995, The difference between radio-loud and radio-quiet active galaxies, *Astrophys. J.*, 438, 62
- Woo, J.-H., Cho, H., Husemann, B., et al. 2014, A sub-kpc-scale binary active galactic nucleus with double narrow-line regions, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 437, 32
- Woosley, S. E. 1993, in *Bulletin of the American Astronomical Society*, Vol. 25, American Astronomical Society Meeting Abstracts #182, 894
- Zanotti, O., Rezzolla, L., Del Zanna, L., & Palenzuela, C. 2010, Electromagnetic counterparts of recoiling black holes: general relativistic simulations of non-Keplerian discs, *Astron. Astroph.*, 523, A8
- Zeldovich, I. B., Novikov, I. D., & Starobinskii, A. A. 1974, Quantum effects in white holes, *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*, 66, 1897
- Zel'dovich, Y. B. 1964, The Fate of a Star and the Evolution of Gravitational Energy Upon Accretion, *Soviet Physics Doklady*, 9, 195
- Zel'dovich, Y. B. 1968, Special Issue: the Cosmological Constant and the Theory of Elementary Particles, *Soviet Physics Uspekhi*, 11, 381

- Zel'dovich, Y. B. 1971, Generation of Waves by a Rotating Body, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 14, 180
- Zel'dovich, Y. B. & Starobinskij, A. A. 1971, Creation of particles and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field., *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*, 61, 2161
- Zettl, A. 2005, *Sturm-Liouville Theory* (American Mathematical Society)
- Zhou, H., Wang, T., Zhang, X., Dong, X., & Li, C. 2004, Obscured Binary Quasar Cores in SDSS J104807.74+005543.5?, *Astrophys. J. Lett.*, 604, L33
- Zimmerman, D. 1996, Persistence and Presentism, *Philosophical Papers*, 35
- Zimmerman, D. 2011, *Presentism and the Space-Time Manifold* (Oxford University Press)