

Emilio J. Manfrotto ^a

^a Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales - Universidad Nacional de Córdoba
Sede Ciudad Universitaria, Av. Vélez Sarsfield 1611. Córdoba, Argentina.

Email: emiliomanfrotto@hotmail.com

DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE PROPIEDADES MÁSICAS DE UN VEHÍCULO AÉREO NO TRIPULADO



1. INTRODUCCIÓN

El cálculo y análisis del movimiento de un avión a partir de una condición inicial de vuelo, se realiza utilizando las ecuaciones generales de movimiento de un cuerpo en el espacio; ellas se derivan de las **Leyes de la Mecánica de Newton**, las cuales expresan que la sumatoria de las fuerzas externas es igual a la variación de la Cantidad de Movimiento y que la sumatoria de los momentos de las fuerzas externas es igual a la variación del Momento Cinético, todo ello referido a un sistema de referencia inercial (fijo en el espacio o que se mueva con una trayectoria rectilínea y velocidad constante).

Para un vehículo aéreo en vuelo, el movimiento general como cuerpo rígido queda definido por un movimiento de traslación de su Centro de Masas (CG), representado por el vector \vec{V} y por una rotación $\vec{\Omega}$ alrededor de un eje arbitrario, y de allí la necesidad de conocer con suficiente exactitud la posición de su Centro de Gravedad que también tiene un papel fundamental en la Estabilidad y Control del vehículo.

Las ecuaciones de movimiento obtenidas de las Leyes de la Mecánica de Newton contienen derivadas con respecto al tiempo de los momentos de inercia, que variarán permanentemente pues el sistema de referencia permanece paralelo al sistema inercial. Esto introduce complicación para la resolución de las ecuaciones, pues los momentos de inercia serán también una función de la posición del cuerpo en el espacio; para eliminar esta dificultad es conveniente referir las ecuaciones de movimiento en un sistema de referencia fijo al cuerpo, el cual será en general un sistema de referencia acelerado o no-inercial. Las **Ecuaciones de Euler** se desarrollan adoptando un sistema de referencia fijo al cuerpo, de manera que los momentos de inercia y centrífugos permanecen constantes.

La resolución del sistema de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un cuerpo en el espacio, bajo la acción de las fuerzas externas que actúan sobre él, se puede encarar por dos caminos diferentes, uno mediante métodos computacionales de integración numérica, utilizando por ejemplo el método de Runge-Kutta de 4° orden o recurriendo a métodos analíticos para su solución. Dada la naturaleza de las fuerzas que actúan, en especial las aerodinámicas, esta última alternativa es de difícil aplicación, excepto en algunos casos especiales en los cuales se plantean hipótesis simplificadoras, que reducen el número de ecuaciones diferenciales simultáneas y linealizan el problema.

El Departamento de Aeronáutica de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba actualmente se encuentra en fase de implementación de un Programa de Simulación de Vuelo para su Proyecto VANT, cuyo desarrollo requiere el conocimiento de las propiedades másicas; masa, posición del **Centro de Gravedad**, **momentos de inercia** I_x , I_y , I_z y **producto de inercia** I_{xz} del mencionado vehículo.

En el caso de emplearse como sistema de referencia los Ejes Principales de Inercia del cuerpo, serán necesarias las propiedades másicas de las ecuaciones correspondientes, es decir, los **Momentos de Inercia Principales**. Los mismos se obtienen a partir de I_x , I_y , I_z e I_{xz} .

2. METODOLOGÍA

2.1. CENTRO DE GRAVEDAD, TÉCNICA EXPERIMENTAL PARA SU RELEVAMIENTO LONGITUDINAL, VERTICAL y TRANSVERSAL

El **Método de las Inclinaciones Sucesivas** trata la determinación de las coordenadas del Centro de Gravedad del avión según los ejes “X” (longitudinal) y “Z” (vertical). Mediante el mismo procedimiento puede calcularse la coordenada “Y” del CG. Sin embargo, en este estudio se calcula el Y_{CG} planteando una ecuación de momentos para lo cual será necesaria la nivelación del avión.

El Método de las Inclinaciones Sucesivas se fundamenta en la determinación de la Ley de variación de la fuerza que actúa sobre un punto de suspensión del elemento en función del ángulo de inclinación, cuando al mismo se lo hace rotar alrededor de un punto fijo. El procedimiento sigue en líneas generales el Método de la Referencia [1], utilizado en aviones. Esta determinación es relativamente simple y precisa, y consiste en medir la fuerza en un único punto de apoyo o suspensión para sucesivos pequeños ángulos de inclinación (del orden de 3°) del elemento a efectos de relevar la variación de esa fuerza en función de la tangente del ángulo de inclinación para un rango de ángulos comprendido entre

5° y 15°. Encontrada la variación, la pendiente de la función determinada experimentalmente permite calcular las dos coordenadas según los ejes “X” y “Z” del Centro de Gravedad del cuerpo analizado.

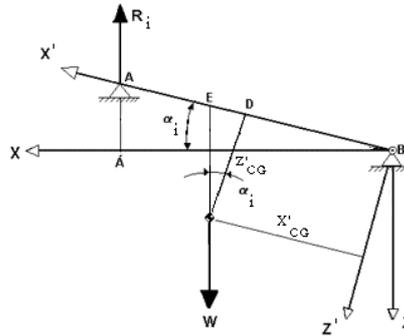


Figura 1. Sistema de referencia para el Método de las Inclinaciones Sucesivas.

2.2. PROCEDIMIENTOS EXPERIMENTALES TÍPICOS PARA DETERMINAR MOMENTOS DE INERCIA

En este Capítulo se trata la Determinación Experimental de los Momentos de Inercia de un VANT mediante la aplicación del Método del Péndulo, y se desarrollan los conceptos básicos referidos al Movimiento Armónico Simple, el Péndulo Compuesto y el Péndulo Bifilar. Posteriormente, se hace referencia a los efectos de la masa de aire en la que el avión se encuentra inmerso durante los experimentos, y el procedimiento para evaluar estos efectos, denominado **Momento de Inercia Adicional**.

El **Momento de Inercia Virtual** de un avión, alrededor de cualquier eje de oscilación, está compuesto de tres partes distintas; el de la estructura, el del aire dentro de la estructura y el de la masa aparente adicional de aire externo influenciada por el movimiento del avión, que se manifiesta como una **reducción en el tiempo de oscilación**. El **Momento de Inercia Verdadero** consiste solamente en el momento de inercia de la estructura y el del aire atrapado en su interior, y puede obtenerse como diferencia entre el Momento de Inercia Virtual y el Momento de Inercia Adicional (Ver ecuación [1.2]).

El Momento de Inercia Adicional es obtenido mediante la aplicación de los resultados experimentales efectuados con placas de distinto alargamiento, que se detallan en el (Capítulo 5).

Es decir:

$$I_{Virt} = \underbrace{I_E + I_{Aire}}_{I_{Verdadero}} + I_A \quad (1.1)$$

Al despejar:

$$I_{Verdadero} = I_{Virt} - I_A \quad (1.2)$$

Para obtener valores precisos de los Momentos de Inercia, en el NACA se desarrollaron aparatos y procedimientos para adaptar en aviones y métodos de péndulo para determinación de momentos de inercia utilizados en pequeños cuerpos. La aplicación de estos métodos en aviones presenta dos dificultades importantes. La primera consiste en el desarrollo de un sistema de suspensión que permita oscilar al cuerpo suspendido únicamente alrededor de un eje concreto, y perfectamente definido. La segunda dificultad consiste en el efecto del medio en que el experimento se lleva a cabo, un efecto difícil de determinar a causa de la forma irregular del avión.

El propósito de este Capítulo es presentar una discusión referida a la determinación de los Momentos de Inercia de un Avión por el Método del Péndulo, con particular referencia al efecto del aire ambiental y siguiendo en líneas generales el desarrollo dado en el Report NACA n° 467 de Hartley A. Soulé y Marvel P. Miller (Referencia [2]).

2.3. ECUACIONES BASICAS

Para un péndulo oscilante no amortiguado con pequeña amplitud en el vacío, la ecuación de movimiento es:

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \cdot \theta = 0 \quad (1.3)$$

Donde:

I , es el momento de inercia alrededor del eje de oscilación.

b , es una constante dependiente de las dimensiones y del peso del péndulo.

θ , es el desplazamiento angular del péndulo.

De la solución de esta ecuación, se obtiene el Período de oscilación:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{b/I}} \quad (1.4)$$

Por lo tanto:

$$I = \frac{T^2 \cdot b}{4 \cdot \pi^2} \quad (1.5)$$

Para momentos de inercia según el eje vertical “Z” se utiliza el “Péndulo de Torsión Tipo Bifilar”, en tanto que para los ejes restantes se hace uso del “Péndulo Tipo Compuesto”, como se muestra en las Figuras 2 y 3, respectivamente.

Para un **Péndulo de Torsión Bifilar** la constante “b” es:

$$b = \frac{W \cdot A^2}{4 \cdot l} \quad (1.6)$$

Consecuentemente el momento de inercia resulta:

$$I = \frac{T^2 \cdot W \cdot A^2}{16 \cdot \pi^2 \cdot l} \quad (1.7)$$

Siendo:

W , el peso del péndulo.

A , la distancia entre los filamentos verticales.

l , la longitud de los filamentos.

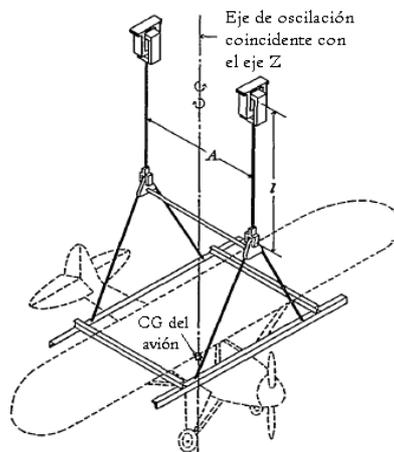


Figura 2.- Figura esquemática de un avión y su soporte para la determinación del momento de inercia alrededor del eje Z por el método del péndulo de torsión bifilar. Fuente: Reporte NACA nº 467.

Para un **Péndulo Compuesto** la constante “b” es:

$$b = W \cdot L$$

Y el momento de inercia se determina con la siguiente expresión:

$$I = \frac{T^2 \cdot W \cdot L}{4 \cdot \pi^2} \quad (1.8)$$

Donde L es la distancia entre el CG del sistema oscilante y el eje de oscilación. Cuando se utiliza el péndulo compuesto, el momento de inercia alrededor de un eje que pasa a través del CG del sistema oscilante es dado (según Teorema de Steiner) por la ecuación:

$$I_{CG} = \frac{T^2 \cdot W \cdot L}{4 \cdot \pi^2} - M \cdot L^2 \quad (1.9)$$

Donde M es la masa del sistema oscilante (o péndulo).

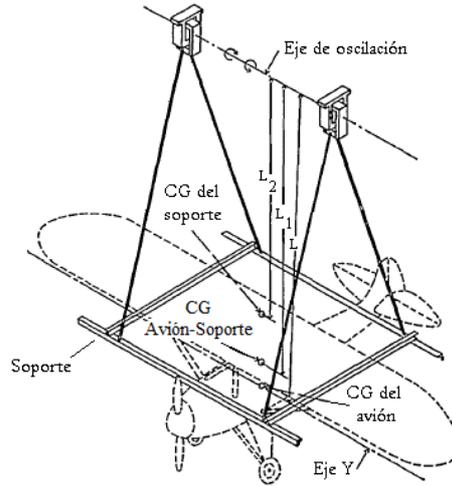


Figura 3.- Figura esquemática de un avión y su soporte para la determinación del momento de inercia alrededor del eje Y por el método del péndulo compuesto. Fuente: Reporte NACA nº 467.

2.4. FLOTABILIDAD Y AIRE ATRAPADO

El peso W en las ecuaciones (1.7) y (1.9) es igual al peso verdadero del péndulo solo cuando el movimiento oscilatorio es realizado en el vacío. En el caso práctico donde el péndulo se encuentra sumergido en un medio fluido, el aire, W es igual al peso virtual; es decir, el peso verdadero menos la flotabilidad (empuje de Arquímedes) de la estructura:

El total de volumen encerrado dentro del recubrimiento externo del avión, con la excepción del volumen tomado totalmente por la estructura, es llenado con aire de la misma densidad que el aire de alrededor. Si se hace un diagrama esquemático de cuerpo libre de un sistema material que encierra un volumen de aire (burbuja), similar al caso del avión/soporte o soporte solo, se tiene:

$$\underbrace{N}_W + \underbrace{E_{Arq\ sólido} + E_{Arq\ burbuja}}_{V \cdot \rho \cdot g} = \underbrace{P_{sólido} + P_{burbuja}}_{M \cdot g} \quad (1.10)$$

Es decir:
$$W + V \cdot \rho \cdot g = M \cdot g \quad (1.11)$$

Dividiendo ambos miembros por g y acomodando, se tiene:

$$M = \frac{W}{g} + V \cdot \rho \quad (1.12)$$

Debe señalarse que **los valores de I, W, M y V son los valores correspondientes al “sistema material que oscila”**, ya sea que se haga oscilar el soporte solo, o el conjunto avión y soporte.

2.5. AVION Y MECANISMOS DE SOPORTE

Anteriormente se plantearon las ecuaciones para un sistema material pendulante o péndulo. Como nos interesan los momentos de inercia virtuales “del avión”, y dicho péndulo está formado por “el avión y su soporte”, se deberán realizar dos mediciones:

1°.- La primera se debe realizar para un péndulo conformado por “el avión y su soporte”;

2°.- La segunda se debe realizar para un péndulo conformado “solo por el soporte”.

De esta manera, el momento de inercia virtual “del avión” se obtiene de la diferencia entre los resultados del conjunto “avión/soporte” y “el soporte solo”.

Es decir que, desarrollando, la ecuación cuando el sistema material se utiliza convertido en péndulo de torsión bifilar es:

$$I_V = \frac{T_1^2 \cdot W_1 \cdot A^2}{\underbrace{16 \cdot \pi^2 \cdot \ell}_{I_{V \text{ Avión/Soporte}}} } - \frac{T_2^2 \cdot W_2 \cdot A^2}{\underbrace{16 \cdot \pi^2 \cdot \ell}_{I_{V \text{ Soporte}}}} \quad (1.13)$$

Y para el péndulo compuesto:

$$I_V = \frac{T_1^2 \cdot W_1 \cdot L_1}{\underbrace{4 \cdot \pi^2}_{\text{Momento de Inercia Virtual Avión/Soporte}}} - \frac{T_2^2 \cdot W_2 \cdot L_2}{\underbrace{4 \cdot \pi^2}_{\text{Momento de Inercia Virtual del Soporte}}} - \underbrace{\left(\frac{W}{g} + V \cdot \rho + M_A \right)}_{\text{Término de Steiner o Eje Paralelo (Avión)}} \cdot L^2 \quad (1.14)$$

La ec. (1.14) tiene dos incógnitas (I_V y M_A), por lo que para solucionarla se deberá obtener primero M_A y luego I_V . Otra opción para resolver (1.14) es plantear dos ecuaciones para dos longitudes de péndulo distintas.

Cabe recordar que los subíndices 1 y 2 se refieren al conjunto “avión/soporte” y “soporte solo”, respectivamente.

2.6. ELIPSOIDE DE INERCIA

Se ha observado en la práctica que los ejes principales del elipsoide casi coinciden con los ejes cuerpo del avión. Sin embargo, para cada avión, es bueno determinar la posición de los ejes principales del elipsoide con respecto a los ejes cuerpo y, si hay un desplazamiento apreciable entre ellos, calcular los momentos de inercia en torno a los ejes principales.

Como el avión es simétrico respecto al plano XZ, el eje “Y cuerpo” coincide con el eje principal Y_1 y solo es necesario determinar la posición de los ejes principales en el plano XZ. La orientación de los ejes principales en el plano XZ se encuentra mediante la determinación del momento de inercia respecto a un tercer eje I_{X_1} en este plano en un ángulo κ conocido (arbitrario) de los ejes cuerpo. Con

estos datos, y en base a lo visto en el Capítulo 2.9 a 2.13 de la referencia [3], el producto de inercia I_{xz} puede ser calculado por la fórmula:

$$I_{xz} = \frac{I_X \cdot \cos^2(\kappa) + I_Z \cdot \sin^2(\kappa) - I_{X_1}}{\sin(2 \cdot \kappa)} \quad (1.15)$$

Dónde:

I_X , es el momento de inercia alrededor del eje X cuerpo.

I_Z , es el momento de inercia alrededor del eje Z cuerpo.

I_{X_1} , es el momento de inercia respecto de un tercer eje arbitrario (el eje X_1) en el plano XZ.

κ , es el ángulo entre el eje X cuerpo y el eje arbitrario X_1 (en el plano de simetría XZ).

El ángulo κ_o entre el eje X cuerpo y el eje principal X puede ser obtenido como:

$$\kappa_o = \frac{1}{2} \cdot \text{tg}^{-1} \left(\frac{2 \cdot I_{xz}}{I_z - I_x} \right) \quad (1.16)$$

La dirección del restante eje principal Z es: $\kappa_o + 90^\circ$.

Los momentos de inercia principales se encuentran sustituyendo las direcciones de los ejes principales en la ecuación (1.17).

$$I_e = \alpha^2 \cdot I_x + \beta^2 \cdot I_y + \gamma^2 I_z - 2\alpha\beta \cdot I_{xy} - 2\alpha\gamma \cdot I_{xz} - 2\beta\gamma \cdot I_{yz} \quad (1.17)$$

2.7. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DEL EFECTO DE MASA ADICIONAL DE PLACAS

A continuación se revisa brevemente la teoría como una introducción a los trabajos experimentales. Mediciones numéricas del efecto de masa adicional se obtienen a partir de una consideración del impulso impartido al aire por las placas móviles. Para una placa plana delgada de envergadura infinita en movimiento en un fluido perfecto a velocidad constante a lo largo de la normal a su superficie, el impulso impartido al aire por unidad de envergadura está dado por la teoría aerodinámica como:

$$\frac{\rho \cdot c^2 \cdot \pi \cdot V}{4} \quad (1.18)$$

Para placas de envergadura finita, esta expresión debe ser corregida por medio de la introducción de coeficientes cuyos valores dependen de las dimensiones de la placa. La masa adicional para una placa de envergadura b se determina a partir de la ecuación de cantidad de movimiento:

$$m_a \cdot V = \frac{k \cdot \pi \cdot \rho \cdot c^2 \cdot b \cdot V}{4}$$

De modo que

$$m_a = \frac{k \cdot \pi \cdot \rho \cdot c^2 \cdot b}{4} \quad (1.19)$$

Donde k es el coeficiente de masa adicional.

De manera similar, el momento adicional de inercia para una rotación sobre la cuerda, en la semienvvergadura, de una placa de envergadura b se determina a partir de la ecuación de momento angular (o momento cinético):

$$I_a \cdot \omega = m_a \cdot \frac{b^2}{12} \cdot \omega = \frac{k' \cdot \pi \cdot \rho \cdot c^2 \cdot b^3}{48} \cdot \omega$$

De modo que

$$I_a = \frac{k' \cdot \pi \cdot \rho \cdot c^2 \cdot b^3}{48} \quad (1.20)$$

Donde k' es el coeficiente de momento adicional de inercia.

Los coeficientes k y k' son funciones de la relación envergadura-cuerda b/c.

Para la rotación alrededor de un eje en el plano de la placa y paralelo a la cuerda, a una distancia "l" de la semienvvergadura, la ecuación (1.20) se convierte en:

$$I_{al} = I_a + m_a \cdot l^2 = \frac{k'_{b/c} \cdot \pi \cdot \rho \cdot c^2 \cdot b^3}{48} + \frac{k \cdot \pi \cdot \rho \cdot c^2 \cdot b \cdot l^2}{4} \quad (1.21)$$

Asimismo, para rotación alrededor de un eje en el plano de la placa y paralela a la envergadura, a una distancia “l” de mitad de cuerda, el momento adicional de inercia alrededor del eje de rotación es:

$$I_{al} = I_a + m_a \cdot l^2 = \frac{k'_{c/b} \cdot \pi \cdot \rho \cdot b^2 \cdot c^3}{48} + \frac{k \cdot \pi \cdot \rho \cdot c^2 \cdot b \cdot l^2}{4} \quad (1.22)$$

Donde k' es el coeficiente del momento de inercia adicional que se aplica a la relación c/b. Donde c/b es suficientemente pequeña, el primer término de esta expresión puede despreciarse de modo que la ecuación (1.22) se puede aproximar como:

$$I_{al} = m_a \cdot l^2 = \frac{k \cdot \pi \cdot \rho \cdot c^2 \cdot b \cdot l^2}{4} \quad (1.23)$$

Los valores “experimentales” de los coeficientes k y k' se obtienen a partir de la determinación de m_a e I_a, que generalmente se obtienen mediante el balanceo de placas planas en un medio fluido. Los valores de los coeficientes k y k' utilizados en esta determinación se obtienen de los gráficos experimentales presentados en la referencia [2], los mismos pueden verse en las Figuras 4 y 5.

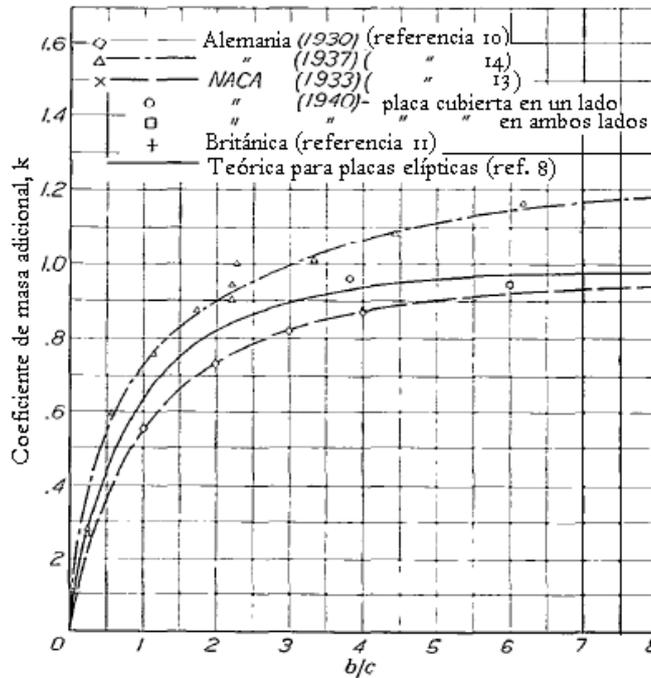


Figura 4.- Coeficiente de masa adicional para placas rectangulares y elípticas.

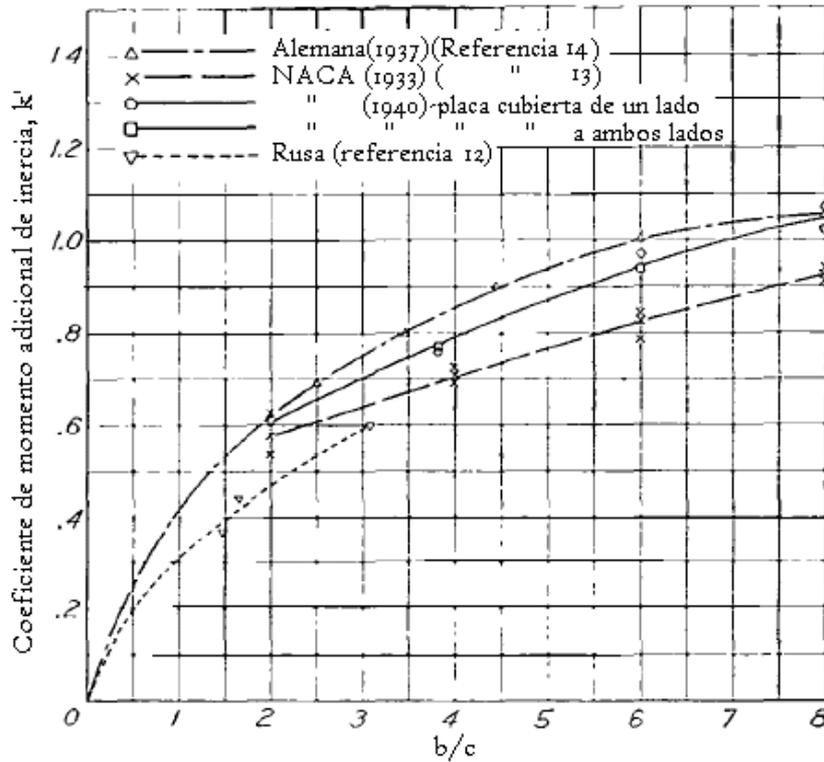


Figura 5.- Coeficiente de momento adicional de inercia para placas rectangulares.

2.8. MASA ADICIONAL DE UN AVION

A seguir, se determinará la Masa Adicional de un avión según el **eje cuerpo X**. Para este caso, se puede considerar que la contribución está dada por el aporte del fuselaje y del empenaje vertical; donde se ha considerado que las proyecciones, en el plano XZ, del ala y del empenaje horizontal están contempladas dentro de la proyección del fuselaje.

El fuselaje con su eje característico aproximadamente coincidente con el eje cuerpo X, una longitud b_f y “altura” c_f , contribuye en una cantidad:

$$\frac{k_f \cdot \rho \cdot c_f^2 \cdot \pi \cdot b_f}{4} \quad (1.24)$$

En el caso de variación de sección del fuselaje, se puede dividir el fuselaje en secciones y sumar el aporte de cada una de estas.

El empenaje vertical contribuye en la cantidad dada por:

$$\frac{k_{ev} \cdot \rho \cdot c_{ev}^2 \cdot \pi \cdot b_{ev}}{4} \quad (1.25)$$

De esta manera, la masa adicional del avión, balanceado alrededor del eje cuerpo X, resulta de la suma de (1.24) y (1.25).

Para la determinación de la Masa Adicional de un avión según el **eje cuerpo Y** se procede de forma similar. Mientras que, para el **eje cuerpo Z** no hace falta determinar la respectiva Masa Adicional, ya que se utiliza un péndulo bifilar.

2.9. MOMENTO DE INERCIA ADICIONAL DE UN AVION

En la aplicación de las expresiones generales para los momentos de inercia adicionales de placas planas (Ecuaciones (1.21) y (1.22)) para el avión, las partes principales del avión se consideran en forma independiente sobre la base de su área proyectada en los planos XY, XZ e YZ. Así, en la determinación

del Momento de Inercia Adicional del Avión alrededor del **eje cuerpo X**, se puede considerar que la contribución está dada por el aporte del ala, del empenaje horizontal, del empenaje vertical y del fuselaje.

El ala contiene en su plano de simetría el eje cuerpo X, y siendo c_a su cuerda media y b_a su envergadura, contribuye en una cantidad:

$$C_{\lambda_a} \cdot \frac{k'_{b/c} \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_a^2 \cdot b_a^3}{48} \quad (1.26)$$

donde C_{λ_a} es el coeficiente de corrección por ahusamiento del ala (Referencia [2]).

El empenaje horizontal también contiene en su plano de simetría el eje cuerpo X, y siendo c_{eh} su cuerda media y b_{eh} su envergadura, contribuye en una cantidad:

$$C_{\lambda_{eh}} \cdot \frac{k'_{b/c} \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_{eh}^2 \cdot b_{eh}^3}{48} \quad (1.27)$$

Aquí, $C_{\lambda_{eh}}$ es el coeficiente de corrección por ahusamiento del empenaje horizontal (Referencia [2]).

El empenaje vertical contribuye en la cantidad dada por:

$$\frac{k'_{b/c} \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_{ev}^2 \cdot b_{ev}^3}{48} + \frac{k \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_{ev}^2 \cdot b_{ev} \cdot l^2}{4} \quad (1.28)$$

Donde l es la distancia, en el plano XZ, del eje cuerpo X al CG del empenaje vertical.

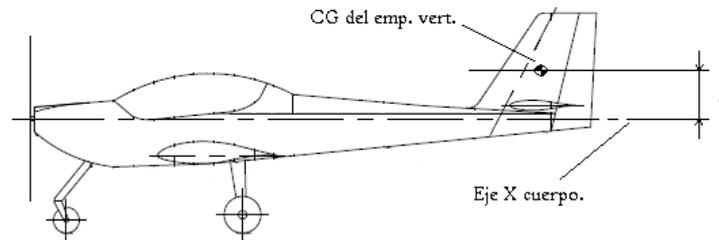


Figura 6.- Distancia “l”, a considerar en el aporte del empenaje vertical.

El fuselaje con su eje característico aproximadamente coincidente con el eje cuerpo X, una longitud b_f y “altura” c_f , contribuye en una cantidad:

$$\frac{k'_{c/b} \cdot \pi \cdot \rho \cdot b_f^2 \cdot c_f^3}{48} \quad (1.29)$$

De esta manera, el momento de inercia adicional del avión, alrededor del eje cuerpo X, resulta de la suma de (1.26), (1.27), (1.28) y (1.29).

De la misma forma, se aplica un tratamiento similar al **eje cuerpo Y** y al **eje cuerpo Z**.

2.10. INCERTIDUMBRE EN LOS RESULTADOS

La forma de definir y expresar la incertidumbre que se va a exponer no es la única. Lo que sí está generalmente asumido es que un método de expresar la incertidumbre es mejor que ninguno, *siempre y cuando se especifique la técnica empleada*.

En la mayor parte de los experimentos, las magnitudes medidas se utilizan para calcular otras variables. Los resultados finales tendrán un grado de fiabilidad que depende de la incertidumbre de las medidas y de los cálculos realizados. El proceso de cálculo de la incertidumbre del resultado es lo que se llama propagación.

Supóngase un resultado R que va a ser calculado a partir de una serie de variables x_i :

$$R = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.30)$$

Diferenciando, se tiene:

$$dR = \frac{\partial R}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial R}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial R}{\partial x_n} \cdot dx_n \quad (1.31)$$

Donde se observa cual es la influencia de las variaciones de una variable en el resultado. Según Kline & McClintock (1953), una forma posible de combinar las incertidumbres es:

$$\Delta(R) = \left| \frac{\partial R}{\partial x_1} \cdot \Delta(x_1) \right| + \left| \frac{\partial R}{\partial x_2} \cdot \Delta(x_2) \right| + \dots + \left| \frac{\partial R}{\partial x_n} \cdot \Delta(x_n) \right| \quad (1.32)$$

y esta es la forma que se utiliza en el presente trabajo para analizar la incertidumbre de los resultados obtenidos, donde $\Delta(\dots)$ indica incertidumbre.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente Tabla 1. Se informan los valores de incertidumbre obtenidos según el respectivo método utilizado. En la Figura 7 se presenta la posición del CG del VANT aDAX-M2, referencia [6]. Es importante aclarar que la posición X_{CG} obtenida se presenta bastante atrasada en comparación con valores convencionales; esto se debe a que el modelo aDAX-M2 presenta una variación respecto del modelo original, teniendo el tren de aterrizaje en una posición más atrasada.

Por otro lado, pueden verse las filmaciones de ensayos realizados al avión aDAX-M2 en los siguientes enlaces web:

- Momento de Inercia I_x : <http://www.youtube.com/watch?v=xtgGhst5xXM>
- Momento de Inercia I_y : <http://www.youtube.com/watch?v=dgKYreBsqqQ>
- Momento de Inercia I_z : <http://www.youtube.com/watch?v=Ws2p0Je7qh4>

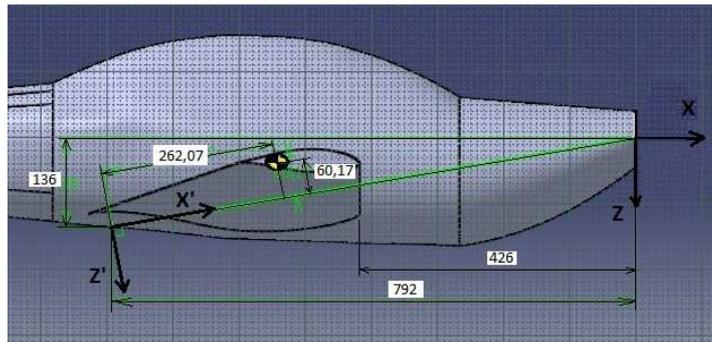


Figura 7.- Posición del CG del avión aDAX-M2, en mm.

Tabla 1. Propiedades másicas del VANT aDAX-M2.

Centro de Gravedad		
	Valor	Incertidumbre (Δ)
	[mm]	[mm]
X_{CG}	-543,89 (37,89 %cam)	$\pm 2,36$
Y_{CG}	15,22 (4,89 %cam)	$\pm 1,83$
Z_{CG}	32,34 (10,39 %cam)	$\pm 4,03$
Momentos de Inercia (Ejes Cuerpo)		
	Valor	Incertidumbre (Δ)
	[Kg.m²]	[Kg.m²]
I_x	3,299	$\pm 0,145$
I_y	2,727	$\pm 0,134$
I_z	7,582	$\pm 0,097$
Momentos de Inercia Principales		
	Valor	Incertidumbre (Δ)
	[Kg.m²]	[Kg.m²]
I_{x1}	3,248	$\pm 0,177$
I_{y1}	2,727	$\pm 0,134$
I_{z1}	7,433	$\pm 0,176$
Radios de Inercia		
	Valor	Incertidumbre (Δ)
	[m]	[m]
R_{ix}	0,531	$\pm 0,012$
R_{iy}	0,483	$\pm 0,012$
R_{iz}	0,805	$\pm 0,005$
R_{ix1}	0,527	$\pm 0,014$
R_{iy1}	0,483	$\pm 0,012$
R_{iz1}	0,797	$\pm 0,010$

4. CONCLUSIONES

El diseño, construcción y puesta a punto de dispositivos y un procedimiento destinado a obtener experimentalmente las propiedades másicas de un VANT basado en la técnica del péndulo ha sido presentado. Su aplicación al VANT aDAX-M2 ha permitido determinar sus propiedades másicas, dentro de los niveles de incertidumbre experimental informados, para su utilización en el Programa de Simulación de Vuelo del Proyecto VANT aDAX de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba.

La técnica experimental es completamente general, y puede aplicarse a cualquier vehículo aéreo de dimensiones similares al ensayado.

5. REFERENCIAS

1. Cassetti, M. "Nuevo Método para el Relevamiento de las Coordenadas del Centro de Gravedad de un Avión" - Traducción: Rubén Sánchez, Centro de Ensayos en Vuelo - FMA - Fuerza Aérea Argentina - Septiembre de 1971.
2. Soulé Hartley A., and Miller, Marbel P.: The Experimental Determination of the Moments of Inertia of Airplanes. Rep. No. 467, NACA, 1933.

3. Manfrotto, E. “Determinación Experimental de Propiedades Máficas de un Vehículo Aéreo No Tripulado”. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Universidad Nacional de Córdoba. Argentina, Julio de 2013.
4. Flight Dynamics of an Anmanned Aerial Vehicle, Eric J. Watkiss. Naval Postgraduate School.
5. Física, Raymond A. Serway, 2º Edición. Ed. McGRAW-HILL, 1995.
6. Tesis: Representación Asistida del VANT aDAX, Cristian Penizzotto. FCEFN, UNC.
7. Mecánica Analítica, E. Rougier y J. Sánchez. Ed. CEICIN.
8. XIV Olimpiada Iberoamericana de Física - Prueba Experimental – El Péndulo Bifilar.
9. William Gracey, The Adittional-Mass Effect of Plates as determined by Experiments. Report NACA N° 707, 1941.
10. Green George: Researches on the Vibration of Pendulum in Fluid Media. Trans. Roy. Soc. Edinburgh, vol. 13, 1836, pp. 54-62.
11. Munk Max M.: Some Tables of the Factor of Apparent Additional Mass. T. N. N° 197, NACA, 1924.
12. Munk Max M.: Fluid Mechanics, Pt. II, vol. I, div. C of Aerodynamic Theory, W. F. Durand, ed., Julius Springer (Berlin), 1934, pp. 224-304.
13. Pabst Wilhelm: Theory of the Landing Impact of Seaplanes. T. M. 580, NACA, 1930.
14. Gates S. B.: The Determinations of the Moments of Inertia of Airplanes. R. & M. No. 1415, British A. R. C., 1932.
15. Vedrov, V. S.: Additional Mass Effect on Flat Plates. Technika Vosdushnogo Flota, No. 4, 1932, pp. 356-361.
16. Pleines, W.: Der Einfluss der mitschwingenden Luftmassen bei Pendelshwingungsversuchen mit Flugzeugen. Jahrb. 1937 der deutschen Luftfahrtforschung. R. Oldenbourg (Munich), S. I 595-I 602.
17. Casseti, M. “Nuevo Método para el Relevamiento de las Coordenadas del Centro de Gravedad de un Avión” - Traducción: Rubén Sánchez, Centro de Ensayos en Vuelo - FMA - Fuerza Aérea Argentina - Septiembre de 1971.
18. Ibarrola, E. L., Soria, A. L. “Pesaje y determinación del CG del motor Astazou XVI G “Informe Técnico 80/98 Gerencia de Experimental - Dirección de Servicios Técnicos LMAASA.
19. Herting, R.R., “Mecánica Teórica”, Editorial “El Ateneo”, Buenos Aires, 1976.
20. El Avión. Calidad del Equilibrio, Control y Estabilidad Dinámica. J. A. Sirena. Ed. Universitas, 2000.
21. Introducción a las Mediciones de Laboratorio, Maiztegui y Gleiser. Ed. Guayqui, 1978.