

## MODELO ELÁSTICO NO LINEAL PARA SIMULACIONES AEROELASTICAS

Nicolas G Tripp<sup>a,c</sup>, Sergio Preidikman<sup>b</sup>, Aníbal E. Mirasso<sup>a</sup>

<sup>a</sup>IMERIS, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Parque General San Martín, 5501 Mendoza, Argentina, [aemirasso@uncu.edu.ar](mailto:aemirasso@uncu.edu.ar), <http://www.fing.uncu.edu.ar>

<sup>b</sup>Departamento de Estructuras, Facultad de C. E. F. y N., Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina, [spreidikman@efn.uncor.edu](mailto:spreidikman@efn.uncor.edu), <http://www.efn.uncor.edu>

<sup>c</sup>Conicet CCT Mendoza, [ntripp@mendoza-conicet.gob.ar](mailto:ntripp@mendoza-conicet.gob.ar), <http://www.mendoza-conicet.gob.ar>

### RESUMEN

*Las turbinas eólicas modernas requieren rotores de gran diámetro, bajo peso y bajo costo. Estos requisitos generan palas más esbeltas y de menor peso específico, lo cual implica una disminución de la rigidez y permite el surgimiento de fenómenos de naturaleza dinámica y aeroelástica. Uno de los efectos dinámicos más importantes es la rigidización geométrica debida a las fuerzas centrífugas. El modelado de la rigidización geométrica o rotacional de vigas flexibles es un área de estudio y discusión permanente. Para poder representar correctamente el fenómeno de rigidización es imperativo utilizar teorías de viga geoméricamente exactas.*

*En trabajos anteriores, los autores estudiaron el comportamiento aeroservoelástico de una superficie sustentadora con un alerón extrínsecamente inteligente, inmersos en un marco rotante. En dichos trabajos se representó el comportamiento elástico de la superficie mediante un modelo elástico lineal. En el presente trabajo, se reemplaza el modelo elástico lineal por otro que incorpora no linealidades de origen geométrico, con el objetivo de capturar los efectos de rigidización debidos a la velocidad de rotación del sistema. Para incorporar los efectos no lineales se describe el campo de deformaciones en la configuración original mediante el tensor de Green-Lagrange. Para poder resolver la ecuación no lineal del movimiento, se asume que los desplazamientos elásticos se pueden representar mediante un desplazamiento estacionario de equilibrio más una pequeña perturbación. De esta forma se obtiene un modelo linealizado alrededor de un punto de equilibrio no lineal y estacionario.*

*El modelo es validado con un problema clásico de la dinámica de vigas rotando a velocidad constante. Seguidamente se estudia la respuesta de una pala correspondiente a una turbina eólica de 70m de diámetro.*

**Palabras Clave:** *Energía Eólica, Vigas rotantes, Rigidización geométrica.*

## INTRODUCCION

La creciente demanda energética mundial desafía constantemente el estado del arte de la ingeniería en general. En particular, la industria de la energía eólica demanda turbinas que sean más eficientes, de mayor tamaño y de menor costo. Estos objetivos obligan a que los fabricantes produzcan rotores con palas más esbeltas y de menor peso específico. Dicha reducción de peso implica una disminución de la rigidez de las palas y permite el surgimiento de fenómenos de naturaleza dinámica y aeroelástica.

Dentro de los fenómenos dinámicos se encuentran los de carácter centrífugo y giroscópico. Los primeros modifican la rigidez a la flexión de las palas (fenómeno de “rigidización”) mientras que los segundos producen acoplamientos entre las vibraciones ortogonales. El modelado de la rigidización geométrica o rotacional de vigas flexibles es un área de estudio y discusión permanente.

Con respecto a los efectos giroscópicos se puede decir que los mismos son de naturaleza conservativa, lineal e importantes cuando las velocidades involucradas son grandes, como sucede en los rotores de helicópteros. Para mayor referencia se sugiere consultar el trabajo de Gans [1].

En materia de la modelación de la rigidización geométrica, Simo y Vu-Quoc [2] afirman que es imperativo utilizar teorías de viga geoméricamente exactas (donde se reconoce que las fuerzas actuantes se aplican en la configuración deformada) para poder capturar correctamente el fenómeno. Si se utilizan teorías de orden lineal se encuentran ecuaciones de movimiento que predicen una pérdida espúrea de rigidez.

Para poder encontrar las ecuaciones de movimiento de una viga rotando a velocidad uniforme existen varios abordajes pero en principio se pueden diferenciar según el tratamiento de la cinemática de la viga. Por un lado se puede encontrar la hipótesis de conservación de la longitud de arco del eje elástico de la viga (una restricción de carácter geométrico) y por el otro la utilización de campos de deformaciones no lineales. Con respecto a la hipótesis de longitud de arco se puede consultar los trabajos [3,4]. Con respecto al segundo enfoque se pueden citar los trabajos [5,6,7]. Como resultado de la adopción de estas teorías, las ecuaciones de movimiento resultantes son de carácter no lineal.

Nuevamente, existen diversas metodologías para encontrar la solución a este problema. En general, las soluciones se pueden separar en dos categorías: la solución no lineal completa [8] y la linealización alrededor de un punto de equilibrio estacionario. Con respecto a este último enfoque, Chopra y Sivaneri [5] estudiaron la estabilidad de palas de helicópteros utilizando elementos finitos. En su trabajo asumieron que el movimiento es una pequeña perturbación alrededor del estado de equilibrio y linealizaron las ecuaciones nodales. De este modo determinaron las frecuencias naturales libres de la pala, bajo efectos de la rigidización geométrica, alrededor de la posición estacionaria.

Pesheck et al [7] implementaron un esquema similar al de Chopra y Sivaneri pero lo resolvieron aplicando el método de Rayleigh-Ritz. En su estudio, los autores determinaron que al emplear expansiones modales o elementos finitos a este problema, la no linealidad produce una convergencia lenta, obligando a generar modelos con muchos grados de libertad para poder alcanzar representaciones dinámicas precisas.

En trabajos anteriores [9] los autores estudiaron el comportamiento aeroservoelástico de una superficie sustentadora con un alerón extrínsecamente inteligente, inmersos en un marco rotante. En dichos trabajos el comportamiento elástico de la superficie se representó mediante un modelo geoméricamente lineal. En el presente trabajo, se reemplaza el modelo elástico por uno geoméricamente no lineal, el cual a su vez es linealizado alrededor del punto de equilibrio estático con el objetivo de reproducir correctamente los efectos de rigidización.

El trabajo está ordenado de la siguiente forma. En primer lugar se exponen el desarrollo de las ecuaciones de movimiento del sistema junto a sus respectivas hipótesis. Luego se presentan los casos de validación y estudio. Finalmente se muestran los resultados de las simulaciones y sus conclusiones.

## METODOLOGIA

En esta sección se presentan las ecuaciones que gobiernan la dinámica estructural. Las ecuaciones se obtienen mediante el principio de Hamilton. En primer lugar se desarrollan las expresiones de la energía potencial y la energía cinética. Seguidamente se hace referencia al esquema de solución y a la integración en el tiempo.

## DEFINICIONES Y SISTEMAS COORDENADOS

El comportamiento estructural se representa mediante una viga de propiedades condensadas en el eje elástico. Se emplean las hipótesis de Euler-Bernoulli y torsión uniforme, por lo tanto el modelo tiene cuatro grados de libertad a ser: desplazamiento axial, desplazamientos transversales y giro por torsión. Las siguientes definiciones y convenciones son utilizadas en este trabajo:

$\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3$  : (sistema-N) Sistema inercial fijo en el espacio.

$\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3$  : (sistema-B) Sistema fijo a la viga que gira.  $\hat{b}_1$  Indica la dirección radial,  $\hat{b}_2$  está alineado con el eje de rotación del sistema B,  $\hat{b}_3$  es ortogonal a  $\hat{b}_1$  y  $\hat{b}_2$ .

$x, y, z$  : coordenadas en el sistema-B.

$u_0(x), v_0(x), w_0(x)$  : traslaciones del centro elástico de una sección de la viga en sistema B.

$\theta_x(x), \theta_y(x), \theta_z(x)$  : rotaciones de una sección de la viga respecto al centro elástico en sistema B.

$L, h$  : longitud de la parte elástica de la viga y excentricidad respecto al centro de rotación, respectivamente.

Las derivadas temporales se indican con un punto mientras que las derivadas espaciales se indican con un tilde. Las magnitudes vectoriales se indican con negrita. Las matrices se encierran entre corchetes.

## ENERGÍA POTENCIAL DE DEFORMACIONES

En primer lugar se condensa el campo tridimensional de desplazamientos al centro elástico de una sección de la viga. Asumiendo ángulos pequeños para las transformaciones entre el sistema deformado y el original, el campo condensado resulta (ver [10]) (1):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x) + z\theta_y(x) - y\theta_z(x) \\ v(x, z) &= v_0(x) - z\theta_x(x) \\ w(x, y) &= w_0(x) + y\theta_x(x) \end{aligned} \quad (1)$$

El campo de deformaciones en la configuración deformada es expresado en la configuración sin deformar mediante el tensor de deformaciones de Green-Lagrange (ver [8]) (2):

$$\epsilon_{ij}(x, y, z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (2)$$

siendo  $\epsilon_{ij}$  las componentes del tensor de deformaciones de Green Lagrange.

Se asumen las siguientes hipótesis para condensar el campo de deformaciones:

- Los desplazamientos axiales son despreciables frente a los transversales.
- Los ángulos son pequeños por lo tanto el producto entre éstos y sus derivadas es despreciable.
- El giro de la sección se puede aproximar con (3):

$$\theta_y(x) = -\frac{dw_0(x)}{dx}, \quad \theta_z(x) = \frac{dv_0(x)}{dx} \quad (3)$$

- Únicamente se consideran las no linealidades de origen axial ya que son las responsables del acoplamiento axial-transversal (ver [7]).

Reemplazando el campo de desplazamientos condensado (1) en el campo de deformaciones completo (2) se obtiene el campo de deformaciones condensado (4).

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx}(x, y, z) &= \epsilon_0(x) + \frac{1}{2}[\theta_z^2(x) + \theta_y^2(x)] + z \kappa_{yy}(x) - y \kappa_{zz}(x) \\ \epsilon_{xy}(x, z) &= -\frac{1}{2} z \psi(x) \\ \epsilon_{xz}(x, y) &= \frac{1}{2} y \psi(x)\end{aligned}\quad (4)$$

donde :

$$\epsilon_0(x) = \frac{du_0(x)}{dx}; \kappa_{yy}(x) = -\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}; \kappa_{zz}(x) = \frac{d^2 v_0(x)}{dx^2}; \psi(x) = \frac{d\theta_x(x)}{dx}$$

La energía potencial elástica de la viga es (5):

$$U = \frac{1}{2} \int S_{ij} \epsilon_{ij} dVol = \frac{1}{2} \int (S_{xx} \epsilon_{xx} + 2S_{xy} \epsilon_{xy} + 2S_{xz} \epsilon_{xz}) dVol \quad (5)$$

siendo  $U$  la energía potencial y  $S_{ij}$  las componentes del segundo tensor de tensiones de Piola Kirchoff. Reemplazando (4) en (5) e integrando en el área de la sección se obtiene (6):

$$U = \frac{1}{2} \int [N_x [\epsilon_0 + \frac{1}{2}(\theta_z^2 + \theta_y^2)] + M_y \kappa_{yy} - M_z \kappa_{zz} + T_x \psi] dx \quad (6)$$

donde  $N_x, M_y, M_z, T_x$  son las fuerzas internas de la viga definidas por (7).

$$N_x = \int_A S_{xx} dA; M_y = \int_A S_{xx} z dA; M_z = \int_A S_{xx} y dA; T_x = \int_A (-S_{xy} z + S_{xz} y) dA \quad (7)$$

Asumiendo un modelo constitutivo lineal, las componentes del tensor de tensiones se relacionan con las componentes del tensor de deformaciones según las relaciones (8):

$$S_{xx} = E \epsilon_{xx}, S_{xy} = G \gamma_{xy}, S_{xz} = G \gamma_{xz} \quad (8)$$

donde  $E$  y  $G$  son el módulo elástico y de corte respectivamente.

Reemplazando (8) en (7) y sin considerar momentos estáticos elásticos se obtiene:

$$\begin{aligned}N_x &= EA[\epsilon_0 + \frac{1}{2}(\theta_z^2 + \theta_y^2)] \\ M_y &= EJ_{yy} \kappa_{yy} - EJ_{yz} \kappa_{zz} \\ M_z &= EJ_{yz} \kappa_{yy} - EJ_{zz} \kappa_{zz} \\ T_x &= GJ \psi \\ EA &= \int_A E dA, GJ = \int_A G(y^2 + z^2) dA \\ EJ_{yy} &= \int_A E z^2 dA, EJ_{zz} = \int_A E y^2 dA, EJ_{yz} = \int_A E y z dA\end{aligned}\quad (9)$$

## ENERGÍA CINÉTICA

La posición absoluta de un punto en una sección de la viga en el sistema B es:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u} \quad (10)$$

donde  $\mathbf{r}_0$  es el vector posición sin deformar y  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamiento elástico.

La velocidad absoluta descrita en el sistema rotante, sin traslación del origen, es (11):

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} + [\boldsymbol{\Omega}] \cdot \mathbf{r} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{u}) \quad (11)$$

donde:

$$[\boldsymbol{\Omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \omega_y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se asume que la velocidad angular es constante y está orientada en la dirección de  $\hat{\mathbf{b}}_2$ .

La energía cinética de la viga se expresa usando notación de Meirovitch [11] como se muestra en (12).

$$T = \frac{1}{2} \int_{\text{viga}} (\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v}) dm = T_2 + T_1 + T_0$$

donde:  
 $m$ : masa de la viga  
 $\rho$ : densidad lineal de la viga

$$T_2 = \frac{1}{2} \iint \mathbf{u}^T \cdot \dot{\mathbf{u}} \rho dA dx \quad (12)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \iint [2(\mathbf{r}_0 + \mathbf{u})^T \cdot \Omega \cdot \dot{\mathbf{u}}] \rho dA dx$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \iint [(\mathbf{r}_0 + \mathbf{u})^T \cdot \Omega^T \cdot \Omega \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{u})] \rho dA dx$$

Se desprecia el producto de velocidad angular y deflexiones [1].

Al igual que en el apartado anterior se utiliza el campo de desplazamientos elásticos condensado.

Despreciando la inercia rotacional se arriba a la expresión (13):

$$T = T_2 + T_0 = \frac{1}{2} \int (\underline{\mathbf{u}}_0^T \cdot [m] \cdot \underline{\mathbf{u}}_0 dx + \omega_y^2 \bar{I}_{polar} + 2\omega_y^2 \mathbf{f}_c^T \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0^T \cdot \omega_y^2 [k_c] \cdot \mathbf{u}_0) dx \quad (13)$$

donde:

$$\underline{\mathbf{u}}_0^T = (\dot{u}_0 \quad \dot{v}_0 \quad \dot{w}_0 \quad \dot{\theta}_x)$$

$$\underline{\mathbf{u}}_0^T = (u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z)$$

$$[m] = \begin{bmatrix} \bar{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{m} & 0 & \bar{S}_y \\ 0 & 0 & \bar{m} & -\bar{S}_z \\ 0 & \bar{S}_y - \bar{S}_z & \bar{I}_{yy} + \bar{I}_{zz} & \end{bmatrix}, \mathbf{f}_c = \begin{pmatrix} (x+h)\bar{m} \\ 0 \\ \bar{S}_y \\ \bar{I}_{yz} \\ (x+h)\bar{S}_y \\ -(x+h)\bar{S}_z \end{pmatrix}, [k_c] = \begin{bmatrix} \bar{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{S}_z \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S}_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m} & -\bar{S}_z & 0 & 0 \\ 0 & \bar{S}_y - \bar{S}_z & \bar{I}_{zz} & \bar{I}_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{I}_{yy} & -\bar{I}_{yz} \\ \bar{S}_z & 0 & 0 & 0 & -\bar{I}_{yz} & \bar{I}_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\bar{m} = \int \rho dA; \bar{S}_z = \int y \rho dA; \bar{S}_y = \int z \rho dA; \bar{I}_{yz} = \int y z \rho dA; \bar{I}_{yy} = \int z^2 \rho dA; \bar{I}_{zz} = \int y^2 \rho dA$$

## ECUACIONES DE MOVIMIENTO POR HAMILTON

Como referencia sobre el planteo variacional de principios de la mecánica se puede citar [12]. El principio de Hamilton se basa en el principio de mínima "acción". Para el caso particular de Hamilton el principio se expresa de la siguiente forma (14):

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - (\delta U + \delta W_{nc})) dt = 0 \quad (14)$$

En el principio de Hamilton, se exige que las configuraciones en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  sean conocidas, por lo tanto las variaciones se anulan en los extremos de integración.

La variación de la energía potencial resulta (15):

$$\delta U = \int [N_x \delta u_0' + N_x v_0' \delta v_0' + N_x w_0' \delta w_0' + (-M_z) \delta v_0' + (-M_y) \delta w_0'' + T_x \delta \theta_x'] dx \quad (15)$$

Mientras que la variación de la energía cinética es (16):

$$\delta T = \int [\delta u_0 [-\bar{m} \ddot{u}_0 + \omega_y^2 \bar{m} u_0 + \omega_y^2 (x+h) \bar{m} + \omega_y^2 \bar{S}_z v_0']] dx + \dots$$

$$\dots + \int [\delta v_0 [-\bar{m} \ddot{v}_0 + \bar{S}_y \ddot{\theta}_x] + \omega_y^2 \bar{S}_y \theta_x] + \delta v_0' [-\omega_y^2 (x+h) \bar{S}_z + \omega_y^2 (\bar{S}_z u_0 + \bar{I}_{yz} w_0' + \bar{I}_{zz} v_0')] dx + \dots$$

$$\dots + \int [\delta w_0 [-\bar{m} \ddot{w}_0 - \bar{S}_z \ddot{\theta}_x] + \omega_y^2 \bar{S}_y + \omega_y^2 (\bar{m} w_0 - \bar{S}_z \theta_x)] + \delta w_0' [-\omega_y^2 (x+h) \bar{S}_y + \omega_y^2 (\bar{I}_{yy} w_0' + \bar{I}_{yz} v_0')] dx + \dots$$

$$\dots + \int [\delta \theta_x [-\bar{S}_y \ddot{v}_0 - \bar{S}_z \ddot{w}_0 + (\bar{I}_{yy} + \bar{I}_{zz}) \ddot{\theta}_x] + \omega_y^2 \bar{I}_{yz} + \omega_y^2 (\bar{S}_y v_0 - \bar{S}_z w_0 + \bar{I}_{zz} \theta_x)] dx$$

(16)

## PROYECCIÓN EN FUNCIONES DE FORMA Y COORDENADAS GENERALIZADAS

Para poder resolver la ecuación (14) se expresan los grados de libertad mediante funciones de forma y coordenadas generalizadas (17):

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \boldsymbol{\varphi}_u(x)^T \cdot \mathbf{q}_u(t) \\ v_0(x, t) &= \boldsymbol{\varphi}_v(x)^T \cdot \mathbf{q}_v(t) \\ w_0(x, t) &= \boldsymbol{\varphi}_w(x)^T \cdot \mathbf{q}_w(t) \\ \theta_x(x, t) &= \boldsymbol{\varphi}_t(x)^T \cdot \mathbf{q}_t(t) \end{aligned} \quad (17)$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}_i(x)$  son vectores de las funciones de forma y  $\mathbf{q}_i(t)$  son vectores de coordenadas generalizadas.

Reemplazando (15)(16)(17) en (14) y considerando que las variaciones son independientes se encuentra un sistema de ecuaciones no lineal para el movimiento de la viga (18):

$$[M] \cdot \ddot{\mathbf{q}} + ([K_e] + [K_g(\mathbf{q})] - \omega_y^2 [K_c]) \cdot \mathbf{q} = \omega_y^2 \mathbf{F}_c \quad (18)$$

siendo:

$$\Phi_{ij} = \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_j^T$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \int \bar{m} \Phi_{uu} dx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int \bar{m} \Phi_{ww} dx & 0 & \int \bar{S}_y \Phi_{vt} dx \\ 0 & 0 & \int \bar{m} \Phi_{ww} dx & -\int \bar{S}_z \Phi_{wt} dx \\ 0 & \int \bar{S}_y \Phi_{tv} dx & -\int \bar{S}_z \Phi_{tw} dx & \int (\bar{I}_{yy} + \bar{I}_{zz}) \Phi_{tt} dx \end{bmatrix}$$

$$[K_c] = \begin{bmatrix} \int \bar{m} \Phi_{uu} dx & \int \bar{S}_z \boldsymbol{\varphi}_u \boldsymbol{\varphi}_v^T dx & 0 & 0 \\ \int \bar{S}_z \boldsymbol{\varphi}_v \boldsymbol{\varphi}_u^T dx & \int \bar{I}_{zz} \Phi_{vv}' dx & \int \bar{I}_{yz} \Phi_{vw}' dx & \int \bar{S}_y \Phi_{vt} dx \\ 0 & \int \bar{I}_{yz} \Phi_{vw}' dx & \int (\bar{m} \Phi_{ww} + \bar{I}_{yy} \Phi_{ww}') dx & -\int \bar{S}_z \Phi_{wt} dx \\ 0 & \int \bar{S}_y \Phi_{tv} dx & -\int \bar{S}_z \Phi_{tw} dx & \int \bar{I}_{zz} \Phi_{tt} dx \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_c = \begin{pmatrix} \int (x+h) \bar{m} \boldsymbol{\varphi}_u dx \\ -\int \bar{S}_z (x+h) \boldsymbol{\varphi}_v' dx \\ -\int \bar{S}_y [(x+h) \boldsymbol{\varphi}_w' - \boldsymbol{\varphi}_w] dx \\ \int \bar{I}_{yz} \boldsymbol{\varphi}_t dx \end{pmatrix}$$

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \int EA \Phi_{uu}' dx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int EJ_{zz} \Phi_{vv}'' dx & \int EJ_{yz} \Phi_{vw}'' dx & 0 \\ 0 & \int EJ_{yz} \Phi_{vw}'' dx & \int EJ_{yy} \Phi_{ww}'' dx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \int GJ \Phi_{tt}' dx \end{bmatrix}$$

$$[K_g(\mathbf{q})] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \int EA v_0' \Phi_{uv}' dx & \int EA w_0' \Phi_{uw}' dx & 0 \\ \int EA v_0' \Phi_{uv}' dx & \int EA (u_0'^2 + v_0'^2 + w_0'^2) \Phi_{vv}' dx & 0 & 0 \\ \int EA w_0' \Phi_{uw}' dx & 0 & \int EA (u_0'^2 + v_0'^2 + w_0'^2) \Phi_{ww}' dx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Se asume que el desplazamiento es una pequeña perturbación alrededor de un punto de equilibrio estático sin cargas exteriores.

En primer lugar se resuelven las ecuaciones del movimiento bajo la condición estática, las cuales se muestran a continuación (19) :

$$([K_e] + [K_g]^e - \omega_y^2 [K_c]) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{q}_u^e \\ \mathbf{q}_v^e \\ \mathbf{q}_w^e \\ \mathbf{q}_t^e \end{pmatrix} = \omega_y^2 \mathbf{F}_c \quad (19)$$

El supraíndice <sup>e</sup> indica “evaluado en la condición de equilibrio”.

Para resolver la ecuación no lineal se considera un esquema incremental iterativo (ver [8]).

Se define el estado próximo como un incremento respecto al estado actual (20):

$$\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{q}^k + \Delta \mathbf{q} \quad (20)$$

donde:

$\mathbf{q}^{k+1}$ : es la configuración en la iteración k+1

$\mathbf{q}^k$ : es la configuración en la iteración k

$\Delta \mathbf{q}$ : es el incremento de la configuración

Reemplazando en la ecuación (19) se encuentra el sistema a resolver iterativamente (20):

$$([K_e] + [K_{Tg}(\mathbf{q}^k)] - \omega_y^2 [K_c]) \cdot \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{q}_u \\ \Delta \mathbf{q}_v \\ \Delta \mathbf{q}_w \\ \Delta \mathbf{q}_t \end{pmatrix} = \lambda^{(k+1)} \omega_y^2 \mathbf{F}_c - ([K_e] + [K_g(\mathbf{q}^k)] - \omega_y^2 [K_c]) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{q}_u^k \\ \mathbf{q}_v^k \\ \mathbf{q}_w^k \\ \mathbf{q}_t^k \end{pmatrix} \quad (20)$$

siendo:

$\lambda^{(k+1)}$ : factor de carga

$$[K_{Tg}(\mathbf{q}^k)] = \begin{bmatrix} 0 & ktg_{uv} & ktg_{uw} & 0 \\ ktg_{uv}^T & ktg_{vv} & ktg_{vw} & 0 \\ ktg_{uw}^T & ktg_{vw}^T & ktg_{ww} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ktg_{uv} = \int EA v_0'^k \Phi_{uv}' dx$$

$$ktg_{uw} = \int EA w_0'^k \Phi_{uw}' dx$$

$$ktg_{vv} = \int EA (u_0'^k + \frac{3}{2}(v_0'^k)^2 + \frac{1}{2}(w_0'^k)^2) \Phi_{vv}' dx$$

$$ktg_{ww} = \int EA (u_0'^k + \frac{1}{2}(v_0'^k)^2 + \frac{3}{2}(w_0'^k)^2) \Phi_{ww}' dx$$

$$ktg_{vw} = \int EA w_0'^k v_0'^k \Phi_{vw}' dx$$

Conociendo el punto de equilibrio, se procede a determinar las ecuaciones de la dinámica de las pequeñas perturbaciones alrededor del mismo. Por lo tanto, las coordenadas generalizadas se pueden expresar de la siguiente forma (21):

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^e + \mathbf{q}^p$$

siendo:

$\mathbf{q}^e$ : la configuración de equilibrio (21)

$\mathbf{q}^p$ : la pequeña perturbación

Finalmente, reemplazando (21) en el sistema de ecuaciones no lineal (18) junto con el equilibrio estático (20) se encuentran las ecuaciones linealizadas de la dinámica de las perturbaciones (22):

$$[M] \cdot \begin{pmatrix} \ddot{q}_u^p \\ \ddot{q}_v^p \\ \ddot{q}_w^p \\ \ddot{q}_t^p \end{pmatrix} + ([K_e] - \omega_y^2 [K_c] + [K_{Tg}(q^e)]) \cdot \begin{pmatrix} q_u^p \\ q_v^p \\ q_w^p \\ q_t^p \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (22)$$

## INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Con el objetivo de implementar el presente modelo en un código aeroelástico, se eligió un esquema de integración apto capaz de capturar acoplamientos fluido-estructura. En este esquema las ecuaciones de movimiento son integradas de forma iterativa e interactiva en el dominio del tiempo utilizando un algoritmo de integración multipaso. La descripción del mismo se puede ver en [13]

## VALIDACIÓN DEL MODELO

Wright et al [3] analizaron el caso de las vibraciones transversales, fuera del plano de rotación, de una viga uniforme rotando alrededor a velocidad constante. Su trabajo se ha constituido en una referencia para validación de modelos con acoplamientos no lineales axial-flexión. Por lo tanto, en primer lugar, se reprodujeron las condiciones del trabajo de Wright con el modelo aquí presentado para validar la captura de la rigidización geométrica. En segundo lugar se analizó la respuesta tridimensional de una pala típica de una turbina eólica de 1.5MW rotando alrededor del eje transversal a velocidad constante [14].

## VIGA PLANA UNIFORME BAJO ROTACIÓN CONSTANTE

El problema modelado consiste en una viga plana que vibra en el plano definido por el eje axial y el eje de rotación. La viga posee propiedades uniformes y rota a una velocidad constante. Los parámetros de la viga son los siguientes:

$$L=9\text{ m}, \bar{m}=10\text{ kg/m}, EA=2.23 \times 10^8\text{ N}, EI=3.99 \times 10^5\text{ Nm}^2, h=0.5\text{ m}$$

Se realizaron pruebas de convergencia respecto a la cantidad de modos utilizados para representar los desplazamientos axial y transversales, tanto en reposo como en movimiento. En base a los resultados se decidió utilizar 6 funciones de forma para representar el desplazamiento axial y 9 funciones de forma para el transversal. Se consiguió una buena correlación (0.2% error relativo máximo) comparando con los resultados presentados en Pesheck et al [7]. En la **Tabla 1** se muestran los resultados obtenidos para la discretización elegida.

**Tabla 1.** Resultados para 6 modos axiales y 9 modos transversales.

$\Omega$ [rad/s]	0	30
Axial 1 [rad/s]	824,19	823,65
Axial 2 [rad/s]	2472,6	2472,4
Flexion 1 [rad/s]	8,67	34,06
Flexion 2 [rad/s]	54,34	96,02
Flexion 3 [rad/s]	152,15	200,66
Flexion 4 [rad/s]	298,15	351,62

A continuación, en la **Figura 1**, se muestra el efecto de rigidización de la flexión. En la figura se presentan las primeras tres frecuencias de los modos transversales. Se puede observar que el efecto de la rigidización previene un cruce entre la frecuencia de rotación y la frecuencia más baja.

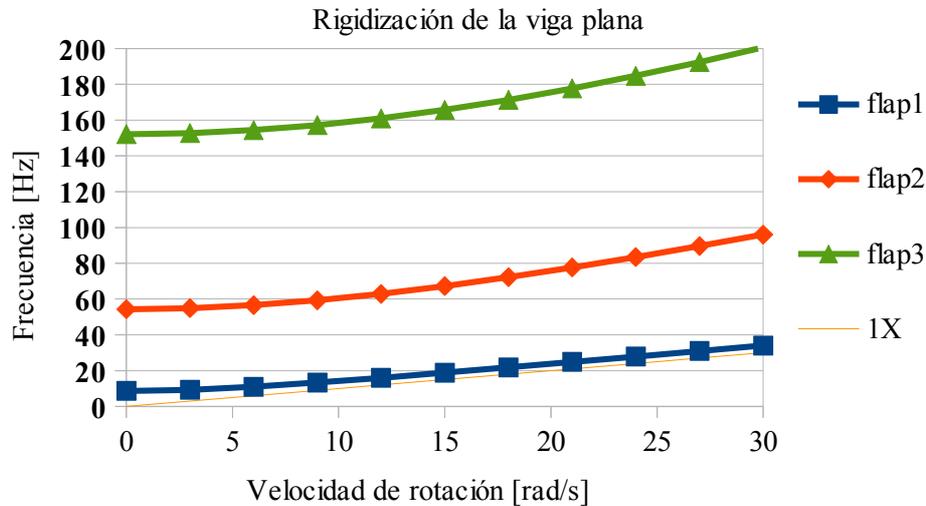


Figura 1. Rigidización de los modos transversales. 1X es la frecuencia de rotación.

### PALA DE TURBINA EÓLICA BAJO ROTACIÓN CONSTANTE

En este caso, se simuló el comportamiento de una típica pala de turbina eólica de gran tamaño rotando a velocidad constante. Las propiedades se obtuvieron de [14]. Se eligieron 6 modos para el desplazamiento axial y la torsión y 9 para los modos transversales. Se determinaron las frecuencias de vibración de los primeros 3 modos a distintas velocidades de rotación. Los resultados se muestran en la **Tabla 2**.

Tabla 2: Frecuencias naturales para distintas velocidades de rotación ( $w$ )

$w$ [rad/s]	Frecuencias del modelo [rad/s]			Frecuencias de referencia [rad/s]		
	modo1	modo2	modo3	modo1	modo2	modo3
0	7,77	11,82	23,15	7,74	11,76	23,15
2	8,2	11,91	23,64	8,16	11,84	23,49
4	9,32	12,15	25,02	9,32	12,1	24,85
6	10,86	12,55	27,09	10,89	12,53	26,96
8	12,48	13,16	29,57	12,46	13,33	29,64
10	14,58	13,4	32,22	13,35	15,02	32,71

Nuevamente se observa una buena correlación con el trabajo de referencia hasta rotaciones de 8 rad/s. Para velocidades superiores, las deflexiones transversales dejan de ser pequeñas y se escapan de las hipótesis del modelo. Para velocidades superiores a 10 rad/s no se alcanza la convergencia de la ecuación incremental iterativa.

### CONCLUSIONES:

Se desarrolló un modelo de dinámica estructural de vigas que rotan apto para simulaciones aeroelásticas. El modelo logra capturar el efecto de rigidización geométrica mediante la descripción del campo de deformaciones en la configuración original mediante el tensor de Green-Lagrange. Para poder resolver las ecuaciones no lineales se asumió que los desplazamientos elásticos pueden representarse como pequeñas perturbaciones alrededor de un punto de equilibrio estacionario. Dicho punto de equilibrio se determinó mediante un esquema incremental iterativo. El modelo se correlaciona bien con un problema clásico de la dinámica de vigas rotando a velocidad constante. Se simuló la respuesta de una pala típica de turbina eólica de 70m de diámetro rotando a velocidad constante. En este caso se obtuvieron modos tridimensionales que concuerdan con datos publicados por

otros autores, demostrando la eficacia del modelo para representar vigas con desplazamientos transversales y torsión. Se observó que para grandes deflexiones transversales, el modelo no logra representar el comportamiento de la viga, lo cual se corresponde con las hipótesis adoptadas.

## REFERENCIAS

1. H. Gans: “Structural optimization including centrifugal and coriolis effects”; 1988, University of Michigan
2. J. Simo y L. Vu-Quoc: The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures; Journal of Sound and Vibration, 1987, Vol 119, pp 487-508
3. A. Wright et al: Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams; ASME Journal of Applied Mechanics, 1982, Vol 49, pp 197-202
4. C. Gebhardt: “Desarrollo de simulaciones numéricas del comportamiento aeroelástico de grandes turbinas eólicas de eje horizontal”; 2011, Universidad Nacional de Córdoba
5. I. Chopra y N. Sivaneri: Aeroelastic stability of rotor blades using finite element analysis; Nasa Contractor Report 166389, 1982
6. O. Bauchau y C. Hong: Nonlinear composite beam theory; Journal of Applied Mechanics, 1988, Vol 55, pp 156-163
7. E. Pesheck et al: Modal reduction of a nonlinear rotating beam through nonlinear normal modes; Journal of Vibration and Acoustics, 2002, Vol 124, pp 229-236
8. K. Bathe: “Finite Element Procedures”, 1996, Prentice Hall
9. N. Tripp et al: Simulation of a lifting surface with a flexible piezoelectric actuator in a rotating environment; Mecánica Computacional, 2013, Vol 32, pp 1519-1537
10. L. Andersen y S. Nielsen: “Elastic Beams in Three Dimensions ”; 2008, Aalborg University
11. Meirovitch: “Computational Methods In Structural Dynamics”; 1980, Sijthoff & Noordhoff
12. C. Lanczos: “The Variational Principles of Mechanics”; 1952, Toronto University Press
13. S. Preidikman: “Numerical Simulations of Interactions among Aerodynamics, Structural Dynamics and Control Systems ”; 1998, Virginia Polytechnic Institute and State University
14. G. Bir: Structural Dynamics Verification of Rotorcraft Comprehensive Analysis System (RCAS); National Energy Renewable Laboratory, 2005, NREL/TP-500-35328