

ANÁLISIS DE LA ACTUACIÓN DOCENTE EN EL NIVEL MEDIO AL ABORDAR LA CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS DADOS DOS LADOS Y UNA ALTURA

SINIÉRIZ, LILIANA^(1,2) ; QUIJANO, TRINIDAD^(1,3)

¹Universidad Nacional del Comahue. Centro Regional Universitario Bariloche

²lsineriz@gmail.com; ³trinidadquijano@gmail.com

RESUMEN

Este trabajo está enmarcado en un proyecto de investigación actualmente en desarrollo en el Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue, en el que se indagan los procesos de aprendizaje de las construcciones geométricas en la Formación de Profesores. En esta oportunidad nos centramos en la construcción con regla y compás de un triángulo dados dos lados y una altura. Presentamos el análisis de la enseñanza de una profesora de nivel medio en torno a esta situación abierta, que ha recibido una formación basada en el uso de heurísticas y métodos de resolución de problemas. Exploramos los aspectos que se reflejan en su actuación en relación a aquellos en los que estuvo centrada la enseñanza que ha recibido.

Palabras clave: construcciones geométricas, heurísticas, métodos, fases, aspectos cognitivos.

INTRODUCCIÓN

El estudio que presentamos está en el marco de un proyecto de investigación¹ desarrollado en el Centro Regional Bariloche, en el que se indagan los elementos que se ponen en juego al abordarlas construcciones geométricas en la formación de profesores de matemática.

Desde nuestro punto de vista, esta clase de problemas constituye un dominio propicio para promover la exploración, la producción de justificaciones y la apropiación de procedimientos de carácter heurístico. La integración de todas estas facetas difícilmente se ve reflejada en la enseñanza escolar, por lo que resulta de interés investigar los procesos que tienen lugar al enseñar a resolver estos problemas y utilizar esos resultados a la hora de elaborar propuestas de enseñanza para la formación docente.

En nuestro trabajo consideramos a la resolución de problemas en su doble acepción, como contenido y como metodología en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y nos valemos de los problemas de construcción para explorar situaciones de enseñanza que permitan desarrollar prácticas propias del quehacer matemático.

En esta ponencia nos centramos en una situación abierta, la construcción de un triángulo dados dos lados y una altura, y analizamos la enseñanza desarrollada por una profesora de secundaria, que ha recibido formación en métodos y elementos de resolución de problemas (RP). Vamos a explorar los aspectos que se reflejan en su actuación en relación a aquellos en los que estuvo centrada la enseñanza que ha recibido. Con este propósito, inicialmente presentamos el marco teórico que sustenta este estudio y haremos una somera descripción de la enseñanza impartida a dicha docente, para luego presentar el contexto en el que se llevó a cabo la experimentación y realizar el análisis de la actuación docente.

MARCO TEÓRICO

Examinamos la enseñanza de las construcciones geométricas atendiendo a las fases propuestas en Polya (1965); cabe señalar que en nuestro análisis dichas fases se conciben como estados por los que se pasa y a los que se puede volver durante el proceso de resolución. Centramos la atención en las sugerencias docentes que llevan a transitarlas. Las indicaciones correspondientes a la fase de *comprensión* estarían orientadas a percibir la idea global del problema, a entender cuáles son sus partes principales y realizar una formulación propia del mismo. En la *elaboración del plan* se estaría focalizando el estado de conocimientos, con vistas a seleccionar heurísticas y a reformular el problema acorde a ellas. Las intervenciones para la *ejecución del plan* llevarían a poner en marcha el esquema de solución en forma ordenada. En la *visión retrospectiva* no sólo se vuelve sobre lo hecho para revisarlo sino también se va más allá de lo que pide el problema original, por lo que en ella contemplamos tanto la revisión como la extensión del problema.

Asimismo, continuamos con la distinción de aspectos cognitivos que presentamos en trabajos anteriores, la cual resulta de extrapolar y reformular algunos resultados de Schoenfeld (1985), permitiendo diferenciar los elementos del proceso de resolución en tres grandes categorías: *contenido matemático*, *trabajo heurístico* y *gestor* (Siñeriz, 2002; Siñeriz y Puig, 2006).

El *contenido matemático* implicado en estos problemas se centra en el conocimiento de ciertos conceptos, propiedades de las figuras y reglas de trabajo en el dominio, en la

¹Proyecto de Investigación titulado “Procesos de aprendizaje en torno a las construcciones geométricas en la formación de profesores de matemática”, financiado por la Secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue. Argentina. Código: 04/B189.

reformulación de conceptos como lugares geométricos y en la producción de argumentos sobre la base de estos conocimientos.

Por *trabajo heurístico* entendemos las formas de proceder que permiten avanzar o resolver el problema de manera eficaz; consideramos la clasificación de heurísticas de Puig (1996) distinguiéndolas *destrezas*, las *herramientas*, los *métodos* y las *sugerencias generales*.

Las *destrezas* son formas adecuadas de trabajo que pueden ser útiles para descubrir; las hemos dividido en tres grupos: 1. Instrumentales, referidas al uso de instrumentos de geometría y precisión en los trazados; 2. Organizativas de la información; 3. Comunicativas, relacionadas con el uso de notación.

Llamamos *herramientas* a los procedimientos que transforman el problema en otro, permiten formular un problema relacionado con el original. Por ejemplo, el examen de posibilidades, la consideración de un caso particular, entre otros.

A diferencia de éstas, las *sugerencias generales* tienen la función de señalar una dirección de trabajo sin evocar un procedimiento concreto.

Los *métodos* llevan a una transformación del problema original de forma estándar y brindan planes para resolver el problema. En la situación abierta que presentamos hay dos problemas asociados a la misma. En la resolución de uno de ellos es aplicable el “Método de los dos lugares”, que consiste en reducir el problema a la determinación de un punto, el cual se halla mediante la intersección de dos lugares geométricos (circulares o rectilíneos). En el otro problema subyace el “Método de figura auxiliar”, que requiere la construcción previa de una figura que es útil para hallar la solución.

Asimismo, el Análisis-Síntesis es un método que puede utilizarse para organizar el recorrido por las fases de elaboración y ejecución del plan, sólo queremos señalar este punto, el que retomaremos al comentar la enseñanza impartida a la docente.

El componente *gestor* se refiere a las formas en que se usa la información que se dispone, a las decisiones sobre qué hacer en un problema, a las evaluaciones locales y/o globales, al trabajo con el error y cambios de punto de vista durante el proceso de resolución.

Además, y dado que indagamos en la Formación de Profesores, vamos a atender a algunos aspectos inherentes a la enseñanza, para lo cual consideramos los conocimientos y competencias que, según Schoenfeld y Kilpatrick (2008), deberían tener los profesores para que su enseñanza se pueda considerar de calidad. Particularmente en este estudio ponemos especial atención a la *organización-gestión del aprendizaje*. Cabe señalar las diferencias entre esta categoría y el aspecto cognitivo que llamamos “gestor”. Bajo el término *gestor* asociamos las indicaciones orientadas a realizar tareas de gestión o monitoreo del proceso de resolución, en cambio en la categoría *organización-gestión del aprendizaje* se incluyen los conocimientos sobre organización y gestión que le permiten al docente interpretar las situaciones de enseñanza e involucrar a los estudiantes en el trabajo matemático.

MODELO DE ENSEÑANZA IMPARTIDO A LA PROFESORA

Haremos una macro descripción de la enseñanza impartida a la docente de secundaria con el propósito de establecer las bases sobre las cuales interpretamos su actuación.

El Modelo de Enseñanza desarrollado con la profesora fue diseñado a partir de los resultados de investigaciones anteriores en torno a los problemas de regla y compás (Siñeriz, 2002); se llevó a cabo mediante encuentros semanales de 2½ hs cada uno y se conformó de dos partes, considerando a la docente en su doble rol, como resolutora y como orientadora del trabajo en el aula.

Inicialmente la enseñanza se dirigió al uso de métodos y formas de trabajo heurístico, a través de la resolución de problemas seleccionados para tal fin. La selección se hizo de modo de

conjugar una diversidad de lugares geométricos en un número reducido de problemas, y de atender a la complejidad intrínseca de cada lugar y/o método implicado.

Se realizaron ocho encuentros destinados a la enseñanza de métodos (Análisis-Síntesis; Método de los dos Lugares; Método de la Figura Auxiliar, Método de la Figura Semejante), a la explicitación de herramientas heurísticas (consideración de casos particulares; examen de posibilidades, analogía) y sugerencias generales (buscar problemas relacionados, resolver el problema de forma diferente, analizar la solución) que ayudan a avanzar en el camino de solución o llevan a ampliar los conocimientos matemáticos.

Los problemas planteados involucraron el trazado de mediatrices o bisectrices, de una paralela o perpendicular a una recta, o la construcción de un arco capaz, cuyos respectivos algoritmos de construcción se reinterpretaron desde los métodos a medida que fueron surgiendo en los distintos procedimientos de resolución.

La situación abierta que abordamos en este estudio formó parte de esta primera etapa de enseñanza y fue presentada como tal, de modo que una de las primeras tareas del resolutor fue la identificación de los problemas asociados a la misma.

El acento puesto en el uso de la “figura de análisis” a lo largo de toda la enseñanza, denota la consideración del Método de Análisis-Síntesis para organizar el proceso de resolución y como objeto de enseñanza. Desde el primer encuentro se introdujo la utilización de dicha figura y se la tomó como punto de partida para apoyar el uso de los demás métodos. De este modo, el análisis permite descubrir el método susceptible a ser utilizado y la síntesis lleva a ejecutarlo.

La segunda parte de la enseñanza estuvo más orientada al trabajo en el aula; se ofrecieron dos seminarios sobre elementos teóricos de RP que respectivamente versaron en los espacios de problemas² generados por la aplicación de los métodos estudiados y en la consideración de las fases y aspectos cognitivos como componentes del proceso de resolución de esta clase de problemas.

Además se llevaron a cabo otros dos encuentros, en los que se analizaron transcripciones de clases de escuela secundaria, provenientes de observaciones hechas en el marco de las investigaciones sobre problemas de regla y compás, donde se enseñan contenidos curriculares a partir de dichos problemas. El análisis estuvo centrado en los conocimientos y estrategias implicados, en los distintos procedimientos utilizados por los alumnos o propuestos por el docente y en los elementos del proceso de resolución a los que apuntaba la intervención.

También se discutieron algunas consignas generales que podrían utilizarse para fomentar la producción de argumentos o el uso de distintas heurísticas por parte de los estudiantes; en ellas se analizaron las condiciones para que exista solución, los métodos implicados y las posibles heurísticas a utilizar, así como algunas dificultades inherentes a su resolución.

CONTEXTO PARA LA EXPERIMENTACIÓN

El estudio se desarrolló con estudiantes de 1º año (13 y 14 años) de una escuela técnica de San Carlos de Bariloche, en el ámbito de clases de matemática. La profesora diseñó su propuesta de enseñanza sobre la base de los conocimientos impartidos y considerando las habilidades de los alumnos en cuanto al uso de instrumentos de geometría.

Durante cuatro semanas se trabajó una secuencia, cuya primera parte estuvo centrada en la presentación de las operaciones básicas (copia de ángulos y segmentos) y en la resolución de problemas para resignificar los objetos geométricos estudiados en la escuela primaria (circunferencia, mediatriz, bisectriz, recta perpendicular y recta paralela a otra) y concebirlos

²La noción de “*espacio de problemas*” es utilizada en Puig L. (1996) y hace referencia al conjunto de problemas generados por herramientas, métodos o sugerencias heurísticas y las relaciones entre ellos.

como lugares geométricos. Entenderlos como tales resulta necesario para la aplicación de los métodos en las posteriores construcciones. En la segunda parte de la secuencia se plantea la construcción de triángulos a partir de conocer lados y/o ángulos para inferir los criterios de congruencia.

Al finalizar dicha secuencia se presentan los problemas implicados en la situación abierta que abordamos en este trabajo, para la aplicación y ampliación de los conocimientos vistos en nuevas situaciones. Se los denomina “desafíos” y su tratamiento se realiza durante dos clases.

Consignas

La situación abierta “Construir un triángulo dados dos lados y una altura” fue planteada a través de dos problemas:

- I. Construir el triángulo $\triangle abc$ dados los lados \overline{bc} y \overline{ac} y la altura correspondiente al lado \overline{ab} (Figura 1).

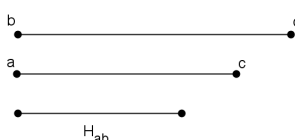


Figura 1: Datos correspondientes al Problema I

- II. Construir el triángulo $\triangle abc$ dados los lados \overline{bc} y \overline{ac} y la altura correspondiente al lado \overline{bc} (Figura 2).

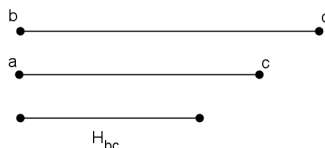


Figura 2: Datos correspondientes al Problema II

OBTENCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Los datos de esta actuación provienen de grabaciones en audio, de la observación y registro de clases y de las respuestas que dio la profesora a cuestiones que se fueron planteando al analizar los registros en forma conjunta. Asimismo, el cuaderno de ruta elaborado por la docente ha permitido complementar la información de su proceso de enseñanza.

Para realizar el análisis, y de acuerdo al marco teórico de referencia, hemos desglosado el desarrollo de la enseñanza en episodios, en extractos de interrelaciones de docente y estudiantes descriptibles según la fase y el aspecto cognitivo al que refieren, o según se relacionen con contenidos para la enseñanza.

En Siñeriz y Guillén (2013) se presentan las categorías de análisis que hemos descrito en el marco teórico y se detalla cómo las mismas se reflejan en la actuación de dos formadoras de profesores al abordar la construcción de un triángulo dados sus lados.

Respecto a la Organización-Gestión de la enseñanza

Las observaciones relacionadas a la organización-gestión de la enseñanza van más allá del análisis por fases, formando parte de una categoría que es transversal a las mismas; es por esta razón que hemos decidido presentarlas en forma independiente.

En esta categoría señalamos la manera en que la docente organiza los contenidos y sus representaciones así como las interrelaciones que promueve en el aula. Se incluye todo lo que hace para facilitar la producción de conocimientos y la manera en que lo hace, incluyendo las normas sociomatemáticas que caracterizan el trabajo en clase.

Se perciben tres grandes momentos en el tratamiento de estos problemas: presentación del problema, trabajo en grupos y puesta en común. Tanto el primero como el último son breves, siendo el trabajo en grupos el momento predominante en ambas clases.

El grupo de alumnos es dividido de manera tal que algunos abordaron el problema I y otros el problema II.

El uso de hojas blancas durante todo el tratamiento de los problemas es un recurso para evitar que el cuadriculado de la hoja se tome como referencia, debiéndose analizar, a partir de los datos e instrumentos habilitados, las propiedades de los objetos geométricos para efectivizar la construcción.

Otro recurso que surge durante el trabajo en grupos es el uso de la hoja de calcar en la resolución del problema II. Las orientaciones docentes llevan a copiar el segmento altura en la hoja de calcar, lo que permite deslizarla sobre el lado correspondiente y aproximar su ubicación.

En relación a las normas socio matemáticas, se solicita explicitar el proceso de resolución en forma permanente y en todos los grupos, permitiendo el uso de un lenguaje informal. Asimismo se aceptan aproximaciones no precisas en los primeros abordajes del problema, aunque se lleva luego a la reflexión sobre la adecuación de estas aproximaciones. A diferencia de esto, se descartan aquellas soluciones “a ojo”, que no están basadas en una determinada racionalidad.

Respecto a las fases y aspectos cognitivos

-Hay pocas indicaciones en relación a la *fase de comprensión*, se dieron al plantear el problema y durante el trabajo en grupos. Las mismas tienen que ver con el contenido y las destrezas.

En cuanto al *contenido*, se atiende a las reglas de trabajo en el dominio, en particular, se establece lo dado, es decir, la profesora dibuja en el pizarrón los segmentos correspondientes a los datos de ambos problemas y además recuerda la definición de altura de un triángulo.

Se utiliza notación simbólica para designar a dichos segmentos, lo cual está en la línea de las *destrezas comunicativas*.

En cuanto a las *destrezas organizativas*, la docente dibuja mano alzada los respectivos triángulos para identificar lo dado remarcando los datos con tizas de colores, llamándolos “figuras de análisis”. Se trata de dibujos que permiten visualizar la información dada en el enunciado, que son útiles para entender qué es lo dado y qué es lo buscado. Esta acepción dada a la figura de análisis cambia sustancialmente respecto a la establecida en el modelo de enseñanza impartido a la profesora. En éste, dicha figura queda plasmada en un dibujo a mano alzada de la incógnita, que resulta de dar el problema por resuelto y marcar en ella los datos, en vías de diseñar un plan e intentar descubrir a partir de ella los antecedentes que hacen falta para determinarla; su nombre responde al hecho de que dicha figura permite “hacer análisis”. Una cuestión que hay que considerar al trabajar con esta figura es su naturaleza genérica, es decir, la figura de análisis es un representante del conjunto de objetos geométricos que cumplen con las condiciones del problema y es a partir de hacer caso omiso a su forma y dimensiones que se descubren las relaciones esenciales entre la incógnita y los datos. En la clase, la docente evita trabajar esta naturaleza genérica de dicha figura haciendo depender su forma del tamaño de los datos. Por tanto, el uso que se le da a esta figura en clase correspondería a una destreza organizativa, con lo cual la docente cambia el sentido otorgado a la figura de análisis en su formación previa.

- Las indicaciones correspondientes a esta *fase de elaboración del plan* se dieron en dos instancias durante el trabajo en grupos, la primera de ellas en uno de los grupos de trabajo y la segunda a toda la clase. Las mismas tienen que ver con sugerencias generales y herramientas heurísticas respectivamente.

Las *sugerencias generales* se centraron en la consideración de un problema ya resuelto (construcción de un triángulo dados dos lados) y de conocimientos anteriores respecto a la cantidad de datos necesarios para construir un triángulo. Esta última indicación tendría como finalidad atender a todos los datos del problema ya que la altura, en general, no era tenida en cuenta en las distintas resoluciones.

Respecto a las *herramientas heurísticas*, se propone la consideración de parte de los datos para comenzar la construcción. En cada uno de los problemas se sugiere inicialmente fijar la altura, quedando determinado uno de los vértices de la incógnita, acompañando estas indicaciones con el dibujo correspondiente.

Como se puede observar, esta fase casi no tiene entidad en el desarrollo de clase.

- La *fase de ejecución del plan* es la que predomina en el desarrollo de las clases. Las indicaciones que se dan en ella están incluidas tanto en el momento del trabajo en grupos como durante la puesta en común e involucran a distintos aspectos cognitivos: contenido, sugerencias generales, destrezas, métodos y gestor.

En cuanto al *contenido*, la profesora establece las reglas de trabajo en el dominio, esto es, las construcciones se realizan en hoja blanca, la regla se utiliza para trazar rectas o segmentos y no para medir, etc. Hace hincapié en el uso del algoritmo para copiar segmentos y además recuerda la condición de perpendicularidad de la altura respecto al lado.

Respecto a las *sugerencias generales* en esta fase, nuevamente las indicaciones se refieren a la consideración de problemas ya resueltos. Particularmente, alude a la construcción de un triángulo dado dos lados, donde hay infinitas soluciones, y establece las diferencias con estos problemas, al tener un dato más (la altura).

Se observan intervenciones relacionadas con las *destrezas comunicativas*, las cuales se dirigen al uso de notación durante la construcción para poder comprender el procedimiento seguido.

En relación a los *métodos heurísticos*, en el problema I es aplicable el método de la figura auxiliar, si bien no hubo indicaciones al respecto. Cualquiera de los dos triángulos rectángulos que tienen por cateto la altura y como hipotenusa uno de los lados dados, podría haber sido utilizado a tal fin y a partir del mismo se podría hallar la incógnita sin mayores dificultades (Figura 3).

En el problema II el método que subyace en la resolución es el de los dos lugares, tal como se deja traslucir en una de las indicaciones dada a un grupo de alumnos que comenzaron la construcción de este problema fijando el lado \overline{bc} . En esta ocasión la profesora alude a los lugares geométricos implicados, señalando que el tercer vértice se encuentra en una circunferencia, cuyo radio es el lado restante, y en una recta paralela al lado \overline{bc} a una distancia $H_{\overline{bc}}$. Si bien no se hace un uso explícito del método de los dos lugares, las intervenciones se orientan a hallar el tercer vértice como la intersección de una circunferencia y una recta (Figura 4).

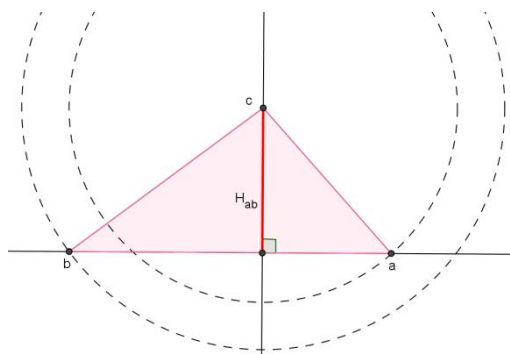


Figura 3: Resolución del problema I. Método de la Figura Auxiliar

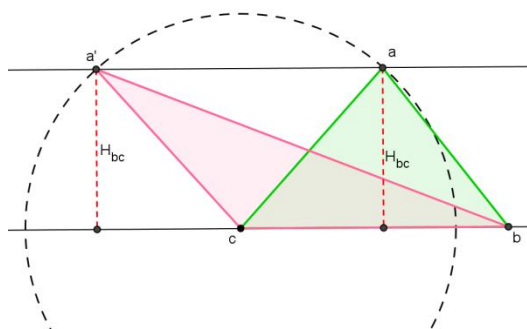


Figura 4: Resolución del problema II. Método de los dos Lugares

Las indicaciones relacionadas con las tareas de gestión son variadas y, en general, responden a la evaluación de la pertinencia de las soluciones obtenidas en cada problema. Si bien a nivel teórico ubicamos la revisión de la solución en la fase de visión retrospectiva, la docente realiza las intervenciones en este sentido durante la fase de ejecución. Por un lado, revisa la manera en que fueron obtenidas las soluciones, es decir, si se hallaron de manera aproximada o no. En el caso de ser aproximada, la docente emplea diferentes recursos para hacer notar esto a los estudiantes, ya sea recurriendo al uso del compás o a la medida para poner de manifiesto que algún elemento no coincide con los datos. Por otro lado, realiza indicaciones que tienen que ver con el control de errores en los procedimientos, tanto al imponer condiciones (por ejemplo, considerar la altura en la mitad del lado), como al cambiar condiciones (por ejemplo, la altura se toma como lado).

Para el momento de la puesta en común de los problemas la profesora elige tres grupos para que presenten su procedimiento, uno de ellos para resolver el problema I y dos para resolver el problema II, explicitando que el criterio de selección responde a mostrar la variedad de resoluciones surgidas en clase. Las intervenciones se dirigen a reforzar la explicación de los estudiantes ya precisar el lenguaje utilizado al presentar los procedimientos.

REFLEXIONES FINALES

Consideramos que esta situación abierta ha sido apropiada para mostrar la forma que adoptan los elementos teóricos en la actuación de una profesora que recibió una formación en el campo de resolución de problemas y que desarrolla su práctica en la escuela media.

El análisis realizado pone de manifiesto cómo la docente ha reinterpretado las formas de trabajo heurístico que se le han enseñado, en un ámbito en el que por lo general las intenciones de enseñanza giran en torno a los conceptos, y los problemas son utilizados para

darles sentido. En este contexto, la situación abierta se presenta ya desglosada en los dos problemas que la conforman, por lo que no se requiere hacer un análisis previo de los datos. Las orientaciones se centraron en definiciones y propiedades de los conceptos implicados, y en ciertas destrezas, tales como el uso de notación y la realización de un dibujo para visualizar la información dada en el enunciado. El trabajo hacia adelante, tomando parte de los datos (la altura), parece ser el elemento que organiza el proceso de resolución, a diferencia de cómo fue estructurada la enseñanza impartida a la docente, donde el Análisis- Síntesis ha sido el método que organiza de dicho proceso.

Creemos que estudios de esta naturaleza pueden ser útiles para mostrar las competencias que se ponen en juego al abordar las construcciones geométricas y nos sugieren pautas a considerar al organizar planes de enseñanza para la formación de profesores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas: México. [Versión original 1945. *How to solve it*. Princeton University Press, Princeton NJ].

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Madrid: Síntesis.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic press.

Schoenfeld, A. H. & Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Siñeriz, L. (2002). La enseñanza de resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 5(1), 79-101.

Siñeriz, L. & Guillén, G. (2013). *Explorando la actuación docente en la Formación de Profesores al abordar la construcción de un triángulo dados sus lados*. Actas del VI Congreso Nacional y IV Internacional de Investigación Educativa, la investigación educativa en el contexto latinoamericano. Facultad de Cs de la Educación de la UNComahue. Cipolletti.

Siñeriz, L., & Puig, L. (2006). Un modelo de competencia para la resolución de problemas de construcción con regla y compás. En J. Aymerich y S. Macario Vives (Eds.), *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 323-331). Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.