



Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Matemática

**MODELOS DE CONTENCIÓN:
FAMILIAS DE CAMINOS EN UN ÁRBOL**

Tesista:

Noemí Amalia Gudiño

Directora:

Dra. Liliana Alcón

Tesis para obtener el título de
DOCTOR DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, AREA MATEMÁTICA

Año: 2016

A mi mamá

Ati,

y a mi papá

Jesús.

Agradecimientos

A Liliana y Marisa por su apoyo y dedicación en el desarrollo de este trabajo, por estar cuando las necesité, por el aporte de su experiencia y conocimiento.

Al CONICET, por haberme provisto de una Beca de Posgrado, sin la cual este trabajo no habría sido posible.

A todos los que trabajan en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata, por acompañarme y ayudarme a desarrollar las tareas correspondientes a este trabajo.

A mis amigas Gise y Gaby, y sus respectivas familias, por hacerme sentir como una más de la familia y por tanto cariño.

A mis hermanos, David y Nancy. Por el amor incondicional que me muestran diariamente, y por hacerme reír.

A mi mamá Ati, y a mi papá Jesús. Por acompañarme y ayudarme siempre.

Contenido

1. Introducción	1
2. Preliminares	4
2.1. Grafos	4
2.2. Posets	7
2.3. Grafos de comparabilidad, posets y modelos por contención	9
3. Vértices extremos de grafos <i>CI</i>	19
3.1. Caracterización de vértices extremos	19
3.2. Grafos <i>CI</i> homogéneamente representables	26
4. Posets <i>CPT</i>: Propiedades Generales y Dimensión	27
4.1. Propiedades Generales	27
4.2. Subclases	38
4.3. Dimensión de los posets <i>CPT</i>	40
5. Posets y grafos <i>CPT</i> en la clase Split	45
5.1. Posets Split	45
5.2. Grafos <i>CPT</i> Split	51
6. Posets y grafos <i>CPT</i> en la clase <i>k</i>-tree	54
6.1. Posets 2-tree	55
6.2. Posets <i>k</i> -tree	65
6.3. Grafos CPT <i>k</i> -trees	80
7. Conclusiones y trabajo futuro	83
Bibliografía	87

Capítulo 1

Introducción

Un grafo es de comparabilidad si existe una orientación transitiva \vec{E} de sus aristas. Un grafo de comparabilidad admite, en general, distintas orientaciones transitivas de sus aristas. Cada una de estas orientaciones define un poset: una relación de orden (reflexiva, antisimétrica y transitiva) $\leq_{\vec{E}}$ en V_G de modo que

$$u \leq_{\vec{E}} v \Leftrightarrow u = v \vee \vec{uv} \in \vec{E}.$$

Dado un poset $P = (X, \leq)$, se dice que una familia de conjuntos $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ es un modelo por contención de P si existe una función $f : I \rightarrow X$ biyectiva tal que para todo i y j en I se verifica que

$$F_i \subset F_j \Leftrightarrow f(i) \leq f(j).$$

Todo poset, y en consecuencia todo grafo de comparabilidad, puede ser modelado por contención. Distintas subclases de la clase de los grafos de comparabilidad han sido caracterizadas imponiendo condiciones geométricas a los conjuntos utilizados en los modelos por contención: ellos pueden ser intervalos de la recta real, regiones angulares en el plano, d -cajas en el espacio \mathbb{R}^n , d -esferas en el espacio \mathbb{R}^n [7, 13, 23, 25]. En [13],

se ha probado que cada grafo de comparabilidad admite un modelo por contención usando subárboles de una estrella (un árbol con un único vértice con grado mayor que uno).

Los grafos que admiten un modelo por contención de intervalos de la recta real, o grafos CI , han sido ampliamente estudiados y caracterizados de diferentes maneras. Uno de los primeros trabajos sobre esta clase de grafos fue el realizado por Dushnik y Miller [6], quienes demostraron que un grafo G es CI si y solamente si G y su grafo complemento son grafos de comparabilidad.

Los grafos CI han sido generalizados de diversas maneras. Una de esas generalizaciones es la clase de grafos que admiten un modelo por contención que asigna a los vértices caminos de un árbol, o brevemente modelo CPT (Containmen of Paths in a Tree).

La mayor parte de este trabajo está dedicado al estudio de aquellos grafos de comparabilidad y de aquellos posets que admiten un modelo CPT . Spinrad en [19] y Golumbic en [12] se preguntan sobre las propiedades de la clase de grafos CPT y proponen el estudio de la misma.

Esta Tesis está organizada de la siguiente forma:

En el *Capítulo 2*, presentamos las definiciones básicas sobre grafos, posets y grafos de comparabilidad. También mostramos la relación existente entre grafos de comparabilidad, posets y modelos de contención.

En el *Capítulo 3*, caracterizamos a los vértices extremos de los grafos CI , es decir, aquellos vértices que pueden ocupar un extremo de una representación CI , usando una familia auto-complementaria de subgrafos inducidos prohibidos. Además, los grafos homogéneamente representables (todos sus vértices son vértices extremos) son caracterizados por una familia simple de subgrafos inducidos prohibidos.

En el *Capítulo 4*, presentamos una condición necesaria para que un poset sea CPT . A partir de ella describimos una familia de subposets prohibidos para la clase CPT .

También mostramos ejemplos de posets que no son CPT aun cuando satisfacen la condición necesaria. A continuación introducimos las definiciones de posets fuertemente- CPT y dualmente- CPT . En la última sección de este capítulo mostramos resultados relacionados con la dimensión de los posets CPT . Respondemos negativamente la pregunta sobre la dimensión de los grafos CPT que realizó Spinrad en [19].

En el *Capítulo 5*, demostramos que en la clase de los posets split la condición necesaria para ser un poset CPT dada en el Capítulo 4 es también suficiente. Como consecuencia obtenemos una caracterización por subposets prohibidos de los posets split CPT . Además mostramos que, en la clase de posets split, las clases de posets fuertemente- CPT y dualmente- CPT son coincidentes y las caracterizamos por subposets prohibidos. Por otra parte, caracterizamos por subgrafos inducidos prohibidos a la clase de grafos split fuertemente- CPT , la cual concide con la clase de grafos split dualmente- CPT .

En el *Capítulo 6*, estudiamos a los posets k -tree que admiten un modelo por contención de caminos en un árbol. Mostramos que en dicha clase la condición necesaria para ser poset CPT es también suficiente. Obtenemos también una caracterización por subposets prohibidos de la clase de posets k -tree CPT , de las clases k -tree fuertemente- CPT y k -tree dualmente- CPT y presentamos una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos de la clase de grafos k -tree fuertemente- CPT y k -tree dualmente- CPT . Finalmente, en el *Capítulo 7*, damos algunas conclusiones.

Capítulo 2

Preliminares

En este Capítulo presentamos las definiciones básicas, la notación y los resultados generales sobre grafos y conjuntos parcialmente ordenados que serán utilizados en el desarrollo de este trabajo. En general, las definiciones y la notación que adoptamos son consideradas estándar tanto en la Teoría de Órdenes como en la Teoría de Grafos. Como referencia se citan los libros de W. Trotter [23] y de J. Bondy y U. Murty [4].

2.1. Grafos

Un **grafo simple** G es un par $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío, cuyos elementos se llaman **vértices** de G y, $E(G)$ es un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de dos elementos de $V(G)$. Los elementos de $E(G)$ se llaman **aristas** de G . Si $e = \{x, y\}$ es una arista, se notará xy , siendo x e y los **vértices extremos de e** . Una arista e es **incidente** en un vértice x si x es un vértice extremo de e . El **grado de un vértice** es la cantidad de aristas incidentes en él. El vértice x es **adyacente** a y si xy es una arista de G ; en este caso también decimos que x e y son **vecinos** en G , y escribimos $x \sim y$.

El **vecindario abierto** de un vértice v , o $N(v)$ es el conjunto de los vértices adyacentes a v . Es decir, $N(v) = \{x \in V(G) : xv \in E(G)\}$. El **vecindario cerrado** del vértice v se define por $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Un vértice v es **universal** cuando $N[v] = V(G)$. Los vértices $x, y \in V(G)$ son **gemelos** si son adyacentes y $N(x) = N(y)$; y son **falsos gemelos** si no son adyacentes y $N(x) = N(y)$.

Diremos que dos grafos G y H son **isomorfos** si existe una biyección $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $xy \in E(G)$ si y solo si $f(x)f(y) \in E(H)$.

Un grafo H es un **subgrafo** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Si V' es un subconjunto no vacío de $V(G)$, entonces el **subgrafo de G inducido por V'** es el subgrafo H con $V(H) = V'$ y $E(H)$ igual al conjunto de aristas de G que tienen ambos extremos en V' . El subgrafo inducido por V' es denotado por $G[V']$ y también solemos decir que G tiene al grafo $G[V']$ como subgrafo inducido. Si $V' \subseteq V(G)$, $G - V'$ es el grafo que se obtiene quitando a G los vértices pertenecientes a V' y las aristas incidentes en estos vértices. En otras palabras, $G - V'$ es el subgrafo de G inducido por el conjunto $V(G) - V'$, es decir, $G - V' = G[V(G) - V']$. Si $v \in V(G)$, denotaremos por $G - v$ al subgrafo inducido por $V(G) - \{v\}$.

Un **camino** de G es una sucesión finita $[v_0, v_1, \dots, v_k]$ de vértices de G distintos entre sí tal que, para todo i , $1 \leq i \leq k$, $v_{i-1}v_i \in E(G)$. Un vértice de grado uno en un camino se llama **vértice extremo del camino**. Se dice que k es la **longitud** del camino y que éste **conecta** o **une** los vértices v_0 y v_k . Un **camino cerrado** o **ciclo** en G es una sucesión finita $[v_1, \dots, v_k, v_{k+1}]$ de vértices de G con $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$ e $i, j \in \{1, \dots, k\}$ y $v_1 = v_{k+1}$ tal que, para todo i , $1 \leq i \leq k - 1$, $v_{i-1}v_i \in E(G)$ y, además, $v_kv_1 \in E(G)$. La **longitud del ciclo** es k . Una **cuerda** de un camino o en un ciclo es una arista entre dos vértices no consecutivos.

Un grafo es **cordal** si todo ciclo en G con al menos cuatro vértices tiene una cuerda. Un grafo G se dice **conexo** si para cualquier par de vértices distintos de G existe un camino que los conecta. Una **componente conexa** de G es un subgrafo conexo

maximal de G . En este trabajo se usarán grafos conexos salvo que se diga lo contrario. Un **árbol** T es un grafo conexo sin ciclos. Una **hoja** o **vértice colgante** de T es un vértice de grado uno. Una **arista** de T es **pendiente** si uno de sus extremos es una hoja de T . Una **estrella** es un árbol de n vértices con un único vértice de grado mayor que uno, el cual recibe el nombre de **centro de la estrella**.

Un **grafo completo** de n vértices tiene todos sus vértices adyacentes entre sí. Excepto isomorfismos, existe un único grafo completo con n vértices. Tal grafo se denota por K_n . Si G es un grafo, un **completo de G** es un conjunto de vértices que induce un subgrafo completo. Un **clique de G** es un completo maximal con respecto a la inclusión. Un conjunto de vértices no adyacentes de a pares es llamado **conjunto estable**.

El **grafo complemento de G** , denotado por \bar{G} , es un grafo cuyo conjunto de vértices es $V(G)$ y tal que $xy \in E(\bar{G})$ si y solo si $xy \notin E(G)$. Observar que K es un completo de G si y solo si K es un conjunto estable de \bar{G} .

Sea \mathcal{F} una familia de grafos. Diremos que un grafo G es **\mathcal{F} -libre** si ningún subgrafo inducido de G es isomorfo a un miembro de la familia \mathcal{F} . Una clase de grafos \mathcal{A} es **\mathcal{F} -libre** si todos los grafos perteneciente a la clase lo son. En este caso, los miembros de \mathcal{F} se dicen **subgrafos inducidos prohibidos** para \mathcal{A} . Se dice que H es **subgrafo prohibido minimal** para la clase \mathcal{A} cuando H es un subgrafo prohibido para \mathcal{A} y $H - v \in \mathcal{A}$ para todo $v \in V(H)$.

Un grafo $G = (V, E)$ es un **grafo de permutación** si existen dos permutaciones σ_1, σ_2 sobre $V = \{1, 2, \dots, n\}$ tales que dos vértices x, y de V son adyacentes si y sólo si $\sigma_1(x) < \sigma_1(y)$ y $\sigma_2(y) < \sigma_2(x)$.

Un **módulo** (o **conjunto homogéneo**) en un grafo G es un conjunto $M \subseteq V(G)$ tal que para todo $x, y \in M$ y $v \in V(G) - M$, $xv \in E(G)$ si y solamente si $yv \in E(G)$. En otras palabras, los vértices de M son indistinguibles para cada vértice fuera de M .

Los conjuntos $M = \{x\}$, para $x \in V(G)$, $M = \emptyset$ y $M = V(G)$ son módulos de G y se

los llama **módulos triviales** de G . Se dice que G es un grafo **primo** si sus únicos módulos son los triviales.

2.2. Posets

Un **conjunto parcialmente ordenado** o **poset** es un par $\mathbf{P} = (X, P)$ donde X es un conjunto finito, llamado **conjunto de elementos** (o **vértices**), y P es un **orden parcial** en X , es decir, una relación binaria reflexiva, antisimétrica y transitiva definida en X . Se escribe $x \leq y$ en \mathbf{P} cuando $(x, y) \in P$; y $x < y$ en \mathbf{P} cuando $(x, y) \in P$ y $x \neq y$. Si $x < y$ o $y < x$, decimos que x e y son **comparables** en \mathbf{P} y lo denotamos $x \perp y$. Si x e y son dos elementos distintos que no son comparables en \mathbf{P} , diremos que son **incomparables** en \mathbf{P} y notaremos $x \parallel y$. El elemento x es **cubierto** por y en \mathbf{P} , denotado por $x <: y$ en \mathbf{P} , cuando $x < y$ y no existe un elemento $z \in X$ para el cual $x < z$ y $z < y$.

Un poset $\mathbf{P} = (X, P)$ con una cantidad finita de elementos puede representarse mediante un **diagrama de Hasse**: a cada elemento de X se le asigna un punto del plano de forma tal que si, $x < y$, el punto correspondiente a x está por debajo del punto correspondiente a y . Luego, dos puntos se unen con una línea si $x <: y$.

Un conjunto $C \subseteq X$ es una **cadena** en un poset \mathbf{P} si cualesquiera dos vértices de C son comparables en \mathbf{P} . Sea C una cadena de un poset \mathbf{P} tal que no existe otra cadena en \mathbf{P} que tenga a C como subconjunto propio; entonces C es una **cadena maximal** en \mathbf{P} . La **altura** de \mathbf{P} , que denotamos como $h(\mathbf{P})$, es el máximo entero h para el cual existe una cadena de h elementos en \mathbf{P} .

Si $z \in X$, su **conjunto descendente** en \mathbf{P} , denotado $D(z)$, y su **conjunto ascendente** en \mathbf{P} , denotado $U(z)$, son $\{x \in X : x < z\}$ y $\{x \in X : z < x\}$, respectivamente. Definimos $D[z] = D(z) \cup \{z\}$ y $U[z] = U(z) \cup \{z\}$. Usaremos la notación $D_{\mathbf{P}}(z)$ (o $U_{\mathbf{P}}(z)$) cuando sea necesario especificar el poset que estamos utilizando.

Decimos que z es un **elemento minimal** de \mathbf{P} cuando $D(z) = \emptyset$. Cuando $U(z) = \emptyset$ decimos que z es un **elemento maximal** de \mathbf{P} . Un elemento x es **máximo (mínimo)** en \mathbf{P} si $D[x] = X$ ($U(x) = X$). Dos elementos x e y del poset se dicen **gemelos** sin son comparables y $D(x) \cup U(x) = D(y) \cup U(y)$. Y se dicen **falsos gemelos** si son incomparables y $D(x) \cup U(x) = D(y) \cup U(y)$, lo cual ocurre si y solo si $D(x) = D(y)$ y $U(x) = U(y)$.

El **dual** de \mathbf{P} , denotado por \mathbf{P}^d , es el poset (X, P^d) de modo que P^d se define en la forma: $x < y$ en \mathbf{P}^d si y solo si $y < x$ en \mathbf{P} .

La **restricción** de P a un subconjunto Y de X se denota $P(Y)$. Llamaremos $\mathbf{P}(Y)$ al subposet $(Y, P(Y))$ de \mathbf{P} . Por simplicidad indicaremos $\mathbf{P} - Y$ para referirnos al subposet $\mathbf{P}(X - Y)$. Cuando $Y = \{y\}$, escribiremos $\mathbf{P} - y$ en lugar de $\mathbf{P} - \{y\}$.

Un orden parcial P es un **orden total** (u **orden lineal**) si para todo $x, y \in X$ se verifica que $x \leq y$ en \mathbf{P} o $y \leq x$ en \mathbf{P} . Sea $\mathbf{P} = (X, P)$ un poset; un orden lineal L sobre X es llamado **extensión lineal** de P si $P \subseteq L$, es decir, si $x \leq y$ en \mathbf{P} implica $x \leq y$ en \mathbf{L} . Es sabido que todo poset $\mathbf{P} = (P, X)$ tiene una extensión lineal [20]. Más aun, si $x \parallel y$ en \mathbf{P} entonces existen dos extensiones lineales L_1 y L_2 tales que $x < y$ en L_1 e $y < x$ en L_2 .

La **dimensión** de un poset \mathbf{P} , denotada por $dim(\mathbf{P})$, es el menor entero positivo k para el cual existen L_1, L_2, \dots, L_k extensiones lineales de P tales que $P = \bigcap_{i=1}^k L_i$.

Un poset $\mathbf{P} = (X, P)$ se dice **t-irreducible**, para algún $t \geq 2$, si $dim(\mathbf{P}) = t$, y $dim(\mathbf{P}(Y)) < t$ para todo subconjunto propio $Y \subset X$.

Diremos que el poset \mathbf{P} es **conexo** si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe una secuencia finita $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ de elementos de X tal que $x_i \perp x_{i+1}$ en \mathbf{P} para $i = 1, 2, \dots, n-1$. Salvo que se especifique lo contrario, siempre consideraremos posets conexos.

Los posets $\mathbf{P} = (X, P)$ y $\mathbf{Q} = (Y, Q)$ son **isomorfos**, y se escribe $\mathbf{P} \cong \mathbf{Q}$, si existe una biyección $f : X \rightarrow Y$ tal que $x_1 \leq x_2$ en \mathbf{P} si y solamente si $f(x_1) \leq f(x_2)$ en \mathbf{Q} .

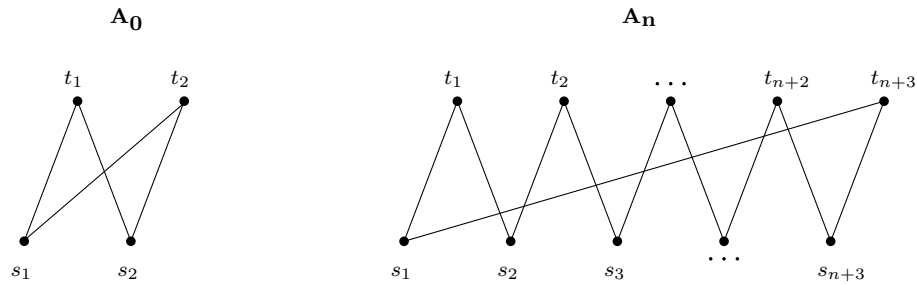


Figura 2.1: Diagrama de Hasse de la corona con cuatro elementos y de la corona con $2(\mathbf{n} + 3)$ elementos, con $n \geq 0$.

Diremos que f es un **isomorfismo** de \mathbf{P} a \mathbf{Q} .

Un poset $\mathbf{P} = (X, P)$ es **acíclico** (o **sin ciclos**) si no tiene como subposets a ninguno de los poset descritos en la Figura 2.1. Los posets de dicha figura son llamamos **coronas**. Observar que toda corona tiene al menos cuatro vértices.

Sea \mathcal{F} una familia de posets. Diremos que un poset \mathbf{P} es **\mathcal{F} -libre** si ningún subposet de \mathbf{P} es isomorfo a un miembro de la familia \mathcal{F} . Una clase de posets \mathcal{A} es **\mathcal{F} -libre** si todos los posets de la clase lo son. Como en el caso de los grafos, los miembros de la familia \mathcal{F} se dicen **subposets prohibidos** para la clase \mathcal{A} . Y son **prohibidos minimales** si removiendo cualquiera de sus vértices se obtiene un poset perteneciente a la clase \mathcal{A} .

Resulta que los posets acíclicos son los posets corona-libre.

2.3. Grafos de comparabilidad, posets y modelos por contención

El **grafo de comparabilidad** $G_{\mathbf{P}}$ de un poset \mathbf{P} es el grafo simple cuyo conjunto de vértices es $V(G_{\mathbf{P}}) = X$ y cuyo conjunto de aristas es $E(G_{\mathbf{P}}) = \{xy : x \perp y\}$. Diremos que dos posets son **asociados** si sus grafos de comparabilidad son isomorfos. En [22], Trotter et al. probaron el siguiente resultado que permite definir la **dimensión de**

un **grafo de comparabilidad** G como la dimensión de cualquier poset \mathbf{P} tal que $G = G_{\mathbf{P}}$.

Teorema 2.3.1. *Si \mathbf{P} y \mathbf{P}' son posets asociados entonces $\dim(\mathbf{P}) = \dim(\mathbf{P}')$*

Un grafo G es un **grafo de comparabilidad** si existe algún poset \mathbf{P} tal que $G = G_{\mathbf{P}}$. Una **orientación** $\vec{E}(G)$ (o simplemente \vec{E}) de G es la asignación a cada arista $xy \in E(G)$ de una de las dos direcciones posibles, \vec{xy} o \vec{yx} . La orientación que a cada arista de G le asigna la orientación opuesta a la dada por \vec{E} se le dice **orientación contraria** a \vec{E} . Un vértice v de G es un **sumidero** (una **fuerza**) en \vec{E} si $\vec{xv} \in \vec{E}$ ($\vec{vx} \in \vec{E}$) para todo $x \in N(v)$.

Se dice que \vec{E} es una **orientación transitiva** de G si $\vec{xy} \in \vec{E}$ e $\vec{yz} \in \vec{E}$ implican $\vec{xz} \in \vec{E}$. Es claro que si \vec{E} es una orientación transitiva entonces su orientación contraria también lo es. Por otra parte, v es un sumidero (fuente) en \vec{E} si y solo si es fuente (sumidero) en la orientación contraria a \vec{E} .

Los grafos cuyas aristas pueden ser orientadas transitivamente son exactamente los grafos de comparabilidad [9].

Dada una orientación transitiva \vec{E} de un grafo $G = (V, E)$, se denota $\mathbf{P}_{\vec{E}}$ al poset $(V, P_{\vec{E}})$ donde $x < y$ en $\mathbf{P}_{\vec{E}}$ si y solo si $\vec{xy} \in \vec{E}$. Es claro que el grafo de comparabilidad de $\mathbf{P}_{\vec{E}}$ es G , y de esta manera, las orientaciones transitivas de G están en una correspondencia biyectiva con los posets cuyos grafos de comparabilidad son isomorfos a G .

Sea \vec{E} una orientación transitiva de $G = (V, E)$. Si $xy, xw \in E$ y $yw \notin E$, la orientación de una de las aristas fuerza la orientación de la otra. Es decir, $\vec{xy}, \vec{xw} \in \vec{E}$ o $\vec{yx}, \vec{wx} \in \vec{E}$. Como consecuencia de esta observación surge la definición de la relación Γ definida sobre el conjunto de aristas de G de la siguiente forma [11]:

$$xy\Gamma zw \Leftrightarrow \begin{cases} xz \notin E & \text{e } y = w \text{ o} \\ yw \notin E & \text{y } x = z \end{cases}$$

Esta relación binaria Γ es reflexiva y simétrica, siendo su clausura transitiva una relación de equivalencia sobre las aristas de G . Las clases de esta relación se llaman **clases de implicancia**. Observar que si G es un grafo de comparabilidad y \vec{E} una orientación transitiva, la orientación de una de sus aristas nos permite conocer la orientación de las restantes aristas de la clase.

Diremos que un grafo de comparabilidad G es **UPO** (*Uniquely Partially Orderable*) si $G = G_{\mathbf{P}} \cong G_{\mathbf{Q}}$ implica que $\mathbf{P} \cong \mathbf{Q}$ o $\mathbf{P} \cong \mathbf{Q}^d$.

Proposición 2.3.2. ([11]) *Sea G un grafo de comparabilidad. G es UPO si y solo si G tiene una única clase de implicancia.*

Gallai proporcionó la siguiente caracterización de los grafos de comparabilidad por una familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales.

Teorema 2.3.3 ([8]). *Un grafo es un grafo de comparabilidad si y solamente si ninguno de sus subgrafos inducidos es isomorfo a un grafo en la Figura 2.3 o al complemento de un grafo en la Figura 2.4.*

Un **modelo por contención** $M_{\mathbf{P}}$ de un poset $\mathbf{P} = (X, P)$ asigna a cada elemento $x \in X$ un conjunto M_x de manera que $x < y$ en \mathbf{P} si y solo si M_x es subconjunto propio de M_y , es decir:

$$x < y \text{ en } \mathbf{P} \Leftrightarrow M_x \subset M_y.$$

Decimos que un modelo es **inyectivo** cuando dos elementos distintos no tienen asignado el mismo conjunto.

Notar que siempre podemos obtener un modelo por contención de un poset $\mathbf{P} = (X, P)$ asignando a cada elemento x su conjunto descendente cerrado $D[x]$.

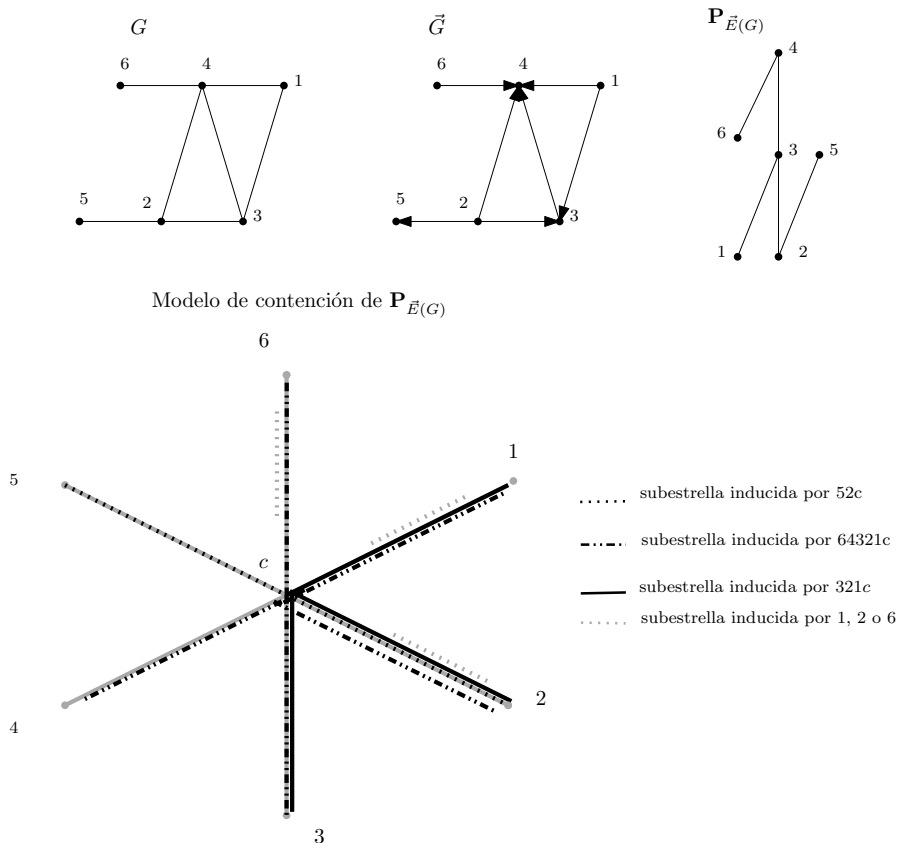


Figura 2.2: G es un grafo de comparabilidad y \mathbf{P} es un poset tal que $G = G_{\mathbf{P}}$. Entonces, G admite un modelo $(M_x)_{x=1}^6$ por contención de subestrellas de una estrella tal que $x < y$ en $\mathbf{P} \Leftrightarrow \vec{x}\vec{y} \in \vec{E}(G) \Leftrightarrow M_x \subset M_y$.

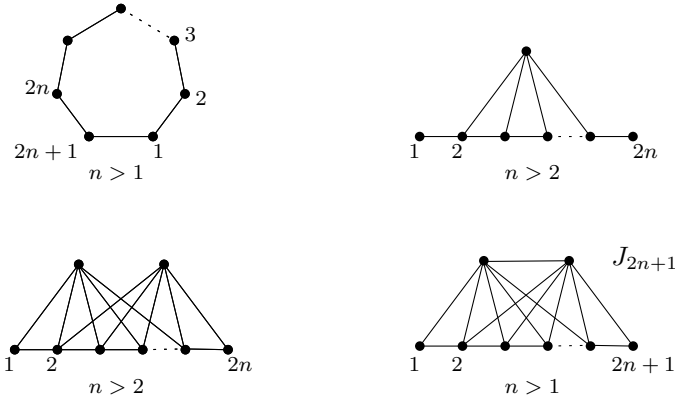


Figura 2.3: Estos grafos junto con los complementos de los grafos de la Figura 2.4 constituyen la familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales para los grafos de comparabilidad

Un **modelo por contención** M_G de un grafo G asigna a cada v\u00e9rtice $v \in V(G)$ un conjunto M_v de manera que v es adyacente a w en G si y solo si M_v es un subconjunto propio de M_w o M_w es subconjunto propio de M_v .

Observar que si $(M_x)_{x \in X}$ es un modelo por contenci\u00f3n de un poset \mathbf{P} entonces es un modelo por contenci\u00f3n del grafo de comparabilidad $G_{\mathbf{P}}$, y m\u00e1s aun, el modelo determina una orientaci\u00f3n transitiva \vec{E} de $G_{\mathbf{P}}$ tal que $\mathbf{P}_{\vec{E}} = \mathbf{P}$.

Rec\u00edprocamente, un modelo por contenci\u00f3n $(M_v)_{v \in V(G)}$ de un grafo G determina una orientaci\u00f3n transitiva \vec{E} de G y, consecuentemente, un poset $\mathbf{P}_{\vec{E}}$. Es claro que $(M_v)_{v \in V(G)}$ es tambi\u00e9n un modelo por contenci\u00f3n de este poset.

Resulta que un grafo admite un modelo por contenci\u00f3n si y solo si es de comparabilidad. M\u00e1s a\u00fan, M. Golombic y E. Scheinerman demostraron en [13] que un grafo G es de comparabilidad si y solo si G admite un modelo por contenci\u00f3n en el cual los conjuntos son subestrellas de una estrella.

En la Figura 2.2 podemos ver un el diagrama de Hasse de un poset junto con su grafo de comparabilidad orientado y un modelo por contenci\u00f3n, donde a cada elemento $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ del poset se le asigna una subestrella de una estrella con seis hojas.

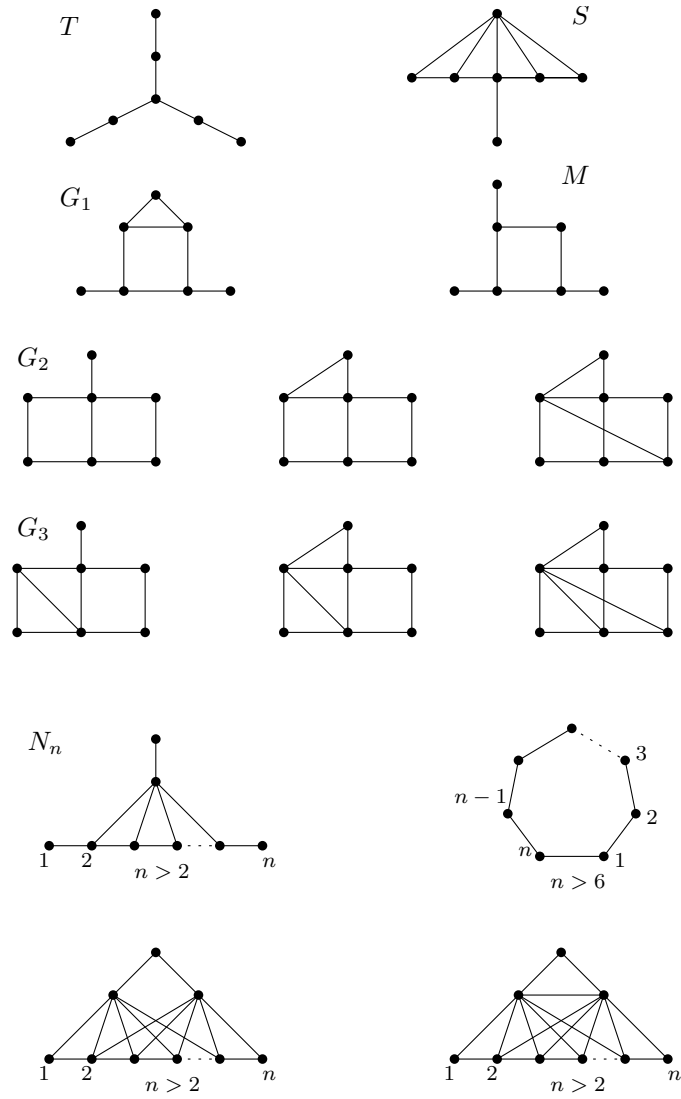


Figura 2.4: Los complementos de estos grafos juntos con los grafos de la Figura 2.3 constituyen la familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales para los grafos de comparabilidad

En [6], fue demostrado que $\dim(\mathbf{P}) \leq 2$ si y solamente si \mathbf{P} admite un modelo por contención en el cual los conjuntos son intervalos de la recta real. Por lo tanto, los posets con dimensión a lo sumo 2 también aparecen en la literatura como **ordenes de contención de intervalos**, o simplemente *CI* para abreviar. Los grafos de comparabilidad de los ordenes de contención de intervalos, o **grafos CI**, han sido caracterizados de diferentes maneras.

Teorema 2.3.4 ([6], [17]). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. G es un grafo *CI*.
2. Existe un poset \mathbf{P} con $\dim(\mathbf{P}) \leq 2$ tal que $G = G_{\mathbf{P}}$.
3. G y \overline{G} son grafos de comparabilidad.
4. G es un grafo de permutación.

Una consecuencia del teorema anterior y del Teorema 2.3.1 es la siguiente.

Observación 2.3.5. *Sean \mathbf{P} y \mathbf{P}' posets asociados. Entonces, \mathbf{P} es un poset *CI* si y solo si \mathbf{P}' es un poset *CI*. En particular, \mathbf{P} es un poset *CI* si y solo si \mathbf{P}^d es un poset *CI*.*

La caracterización de los posets de dimensión a lo sumo 2 mediante una familia de subposets prohibidos fue obtenida independientemente por Kelly y por Trotter-Moore.

Teorema 2.3.6 ([15] [21]). *Un poset es *CI* si y solo si ninguno de sus subposets es isomorfo a alguno de los posets descrito en las Figuras 2.5 y 2.6 ni a sus respectivos duales.*

Es claro, como consecuencia del Teorema 2.3.4 y el hecho de que al remover un vértice cualquiera de un poset su dimensión disminuye en a lo sumo uno [23], que los subposets

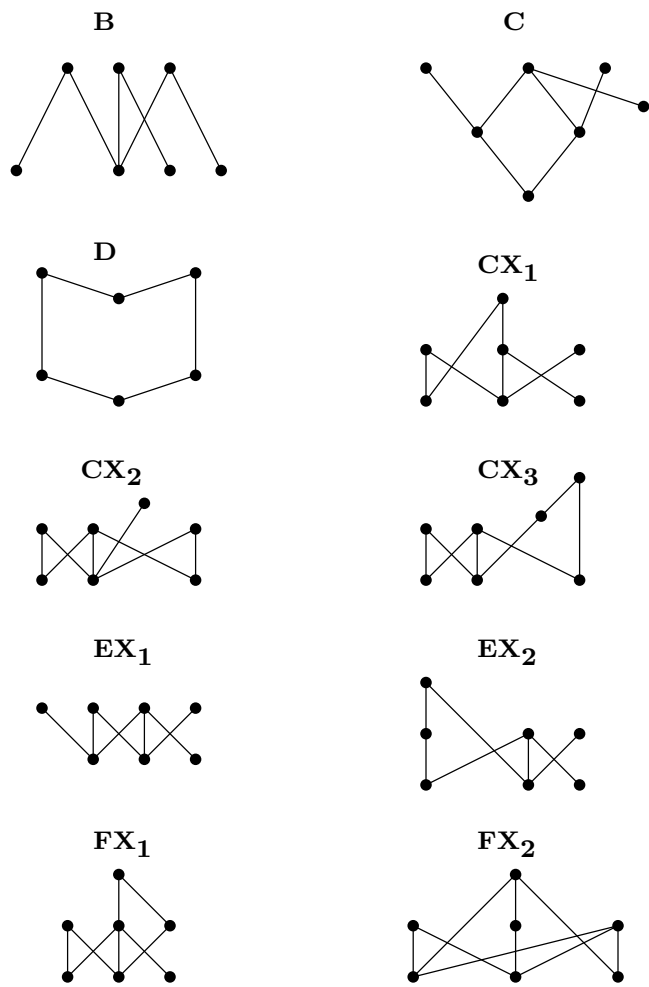


Figura 2.5: Estos posets y los posets de la Figura 2.6 junto con los correspondientes duales constituyen la familia de posets 3-irreducibles.

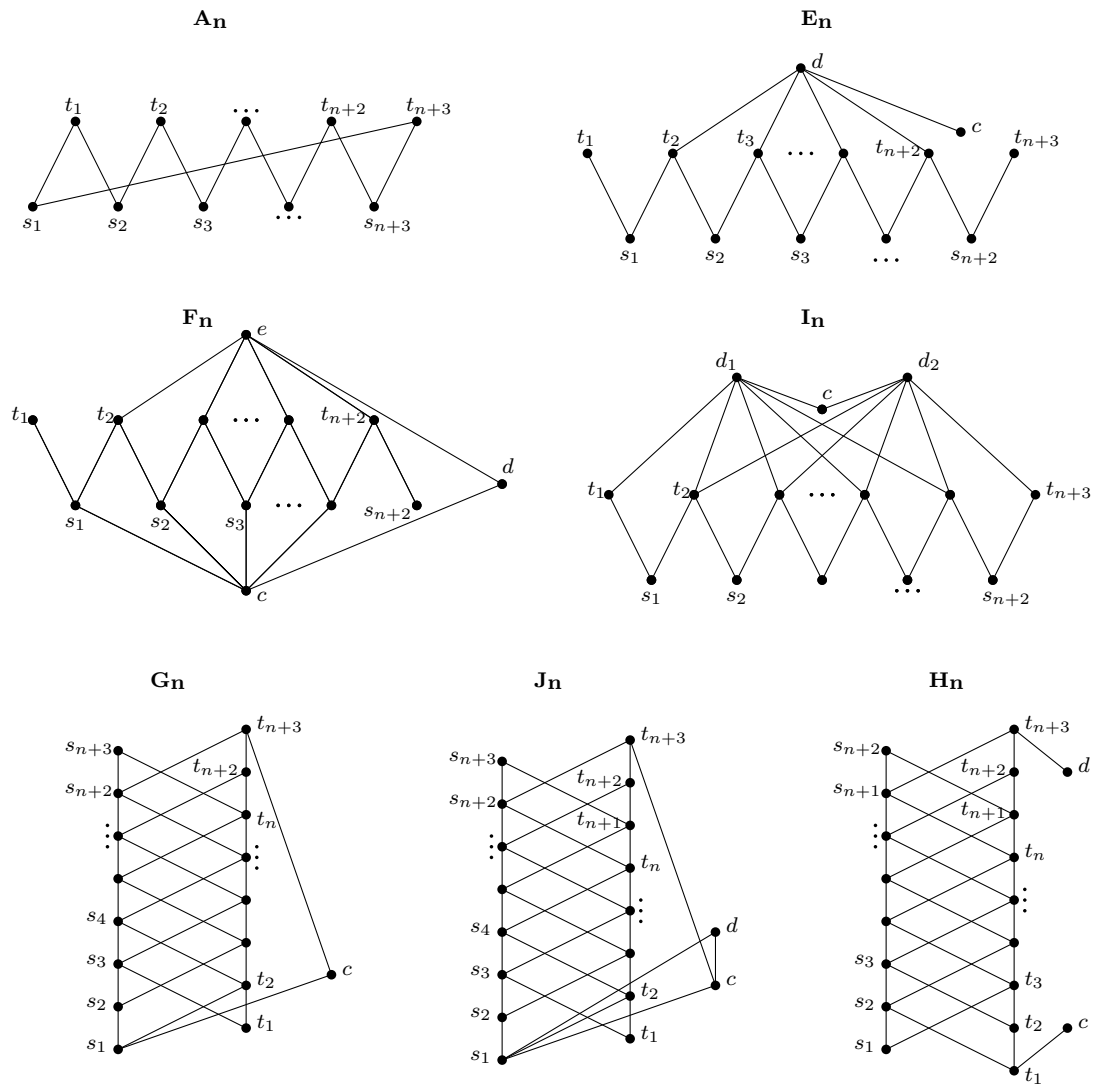


Figura 2.6: Estos posets y los posets de la Figura 2.5 junto con los correspondientes duales constituyen la familia de posets 3-irreducibles.

prohibidos para posets CI descritos en las Figuras 2.5 y 2.6 son exactamente los posets 3-irreducibles.

Un conjunto $M \subseteq X$ es un **módulo de $\mathbf{P} = (X, P)$** si M es módulo de $G_{\mathbf{P}}$. Entonces, para todo $x, y \in M$ y $v \in X - M$ se cumple que $x \perp v$ en \mathbf{P} si y solo si $y \perp v$ en \mathbf{P} . Más aun, $x < v$ en \mathbf{P} si y solo si $y < v$ en \mathbf{P} . Los módulos triviales de $G_{\mathbf{P}}$, \emptyset , X y $\{x\}$ con $x \in X$, también son los módulos triviales de \mathbf{P} . Un **poset** se dice que es **primo** (o **indescomponible**) si todos sus módulos son triviales. En caso contrario, se dice que él es **descomponible**.

Proposición 2.3.7 ([23]). *Sea \mathbf{P} un poset t -irreducible para algún $t \geq 2$. Entonces \mathbf{P} es primo.*

El siguiente teorema dice que si un poset es primo su grafo de comparabilidad es UPO .

Teorema 2.3.8 ([8]). *Sea \mathbf{P} un poset primo. Si \mathbf{P}' es un poset asociado a \mathbf{P} entonces $\mathbf{P}' = \mathbf{P}$ o $\mathbf{P}' = \mathbf{P}^d$.*

Corolario 2.3.9. *Sea \mathbf{S} un subposet de un poset \mathbf{P} y sea \mathbf{P}' un poset asociado a \mathbf{P} . Se cumple que,*

1. *Si \mathbf{P} es primo entonces \mathbf{S} o \mathbf{S}^d es un subposet de \mathbf{P}' .*
2. *Si \mathbf{S} es primo entonces \mathbf{S} o \mathbf{S}^d es un subposet de \mathbf{P}' .*

Capítulo 3

Vértices extremos de grafos *CI*

En este Capítulo, describimos los vértices extremos de los grafos que admiten un modelo por contención de intervalos, es decir los grafos *CI*, usando una familia auto-complementaria de subgrafos inducidos prohibidos. Además, caracterizamos a los grafos *CI* homogéneamente representables (todos sus vértices son vértices extremos) por subgrafos inducidos prohibidos.

3.1. Caracterización de vértices extremos

Recordemos que un grafo G es un grafo *CI* si existe una colección de intervalos $(I_v)_{v \in V(G)}$ de la recta real, a la cual llamaremos modelo o representación *CI* de G satisfaciendo que

$$uv \in E \Leftrightarrow I_u \subset I_v \text{ o } I_v \subset I_u.$$

Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que los intervalos de un modelo *CI* son cerrados, tienen longitud positiva y dos intervalos distintos no tienen un extremo común [11, 19, 23].

En adelante llamaremos l_v y r_v a los extremos izquierdo y derecho del intervalo I_v , respectivamente. Un vértice $z \in V(G)$ se dice **vértice extremo de la representación** si $l_z < l_v$ para todo $v \in V - \{z\}$ o $r_z < r_v$ para todo $v \in V - \{z\}$.

Un vértice se dice **vértice extremo de G** si es vértice extremo de alguna representación CI de G ; y se dice **sumidero de G (fuente de G)** si es sumidero (fuente) en alguna orientación transitiva de G .

Observar que un vértice es una fuente de G si y solo si es un sumidero de G .

Olariu y Gimbel, casi simultáneamente, obtuvieron una caracterización de los vértices sumideros en términos de subgrafos inducidos prohibidos, la cual citamos a continuación.

Teorema 3.1.1. ([10, 16]) *Sea G un grafo de comparabilidad. Un vértice v de G es un sumidero si y solamente si G no contiene a ninguno de los siguientes grafos: \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D}_{2k+1} con $k \geq 2$, $\bar{\mathbf{E}}_n$ con $n \geq 3$, como subgrafo inducido con v como vértice destacado ver Figura 3.1.*

Cada representación CI de G induce naturalmente una orientación transitiva de las aristas: la arista vw se orienta de v hacia w si I_v es un subintervalo propio de I_w , y de w hacia v en caso contrario. Es claro que el intervalo correspondiente a un vértice extremo z de la representación no puede estar contenido en otro. Luego toda arista incidente en z estará orientada hacia z . Resulta que un vértice extremo de G es necesariamente un sumidero de G .

Por otro lado, notemos que si $(I_v)_{v \in V}$ es un modelo CI de G con $I_v = [l_v, r_v]$ y a es un punto de la recta a la derecha de todos estos intervalos, i.e., $r_v < a$ para todo $v \in V$, entonces los intervalos $I'_v = [l_v, a + r_v]$ también constituyen un modelo CI de G . Además, si invertimos el orden de los extremos derechos de estos intervalos considerando el intervalo $I''_v = [l_v, 2a - r_v]$ (podemos suponer todos los extremos positivos) para cada vértice v , entonces $(I''_v)_{v \in V}$ es un modelo CI del complemento

de G .

Lo expuesto anteriormente prueba el siguiente lema:

Lema 3.1.2. *Sea G un grafo CI. Un vértice extremo de G es necesariamente un sumidero de G y de \overline{G} .*

Veremos, como corolario del Teorema 3.1.4, que la implicación recíproca al lema anterior también es cierta. En la demostración de dicho teorema usaremos el lema a continuación.

Dado un modelo CI de un grafo G , el **conjunto derecho** R_v de un vértice v de G es $\{w \in V(G) : l_w < r_v < r_w\}$; y el **conjunto izquierdo** L_v es $\{w \in V(G) : l_w < l_v < r_w\}$. Claramente, si $w \in R_v \cap L_v$ entonces $I_v \subset I_w$, y, consecuentemente, w es adyacente a v .

Lema 3.1.3. *Sea $(I_{v_i})_{0 \leq i \leq k}$ un modelo CI de un camino sin cuerdas $P = [v_0 v_1 \dots v_k]$ con $k \geq 2$. Si $I_{v_1} \subset I_{v_0}$ entonces se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones:*

- (i) $v_2 \in R_{v_0}$ y $r_{v_0} < r_{v_i}$ para $2 \leq i \leq k$.
- (ii) $v_2 \in L_{v_0}$ y $l_{v_i} < l_{v_0}$ para $2 \leq i \leq k$.

Demostración: Procederemos por inducción sobre k . La proposición es obviamente cierta cuando $k = 2$. Sea $k > 2$ y asumamos que $I_{v_1} \subset I_{v_0}$. Como v_2 es adyacente a v_1 y no es adyacente a v_0 , tenemos que $v_2 \in R_{v_0} - L_{v_0}$ o $v_2 \in L_{v_0} - R_{v_0}$. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $v_2 \in R_{v_0}$. Por hipótesis inductiva resulta $r_{v_0} < r_{v_i}$ para $2 \leq i \leq k - 1$. Para completar la demostración, mostraremos que $r_{v_0} < r_{v_k}$.

Dado que v_k es adyacente a v_{k-1} , se tiene que $I_{v_{k-1}} \subset I_{v_k}$ o $I_{v_k} \subset I_{v_{k-1}}$. En el primer caso, es claro que $r_{v_0} < r_{v_{k-1}} < r_{v_k}$. Por lo tanto, asumamos que $I_{v_k} \subset I_{v_{k-1}}$; y, con el objetivo de llegar a una contradicción, supongamos que $r_{v_k} < r_{v_0}$.

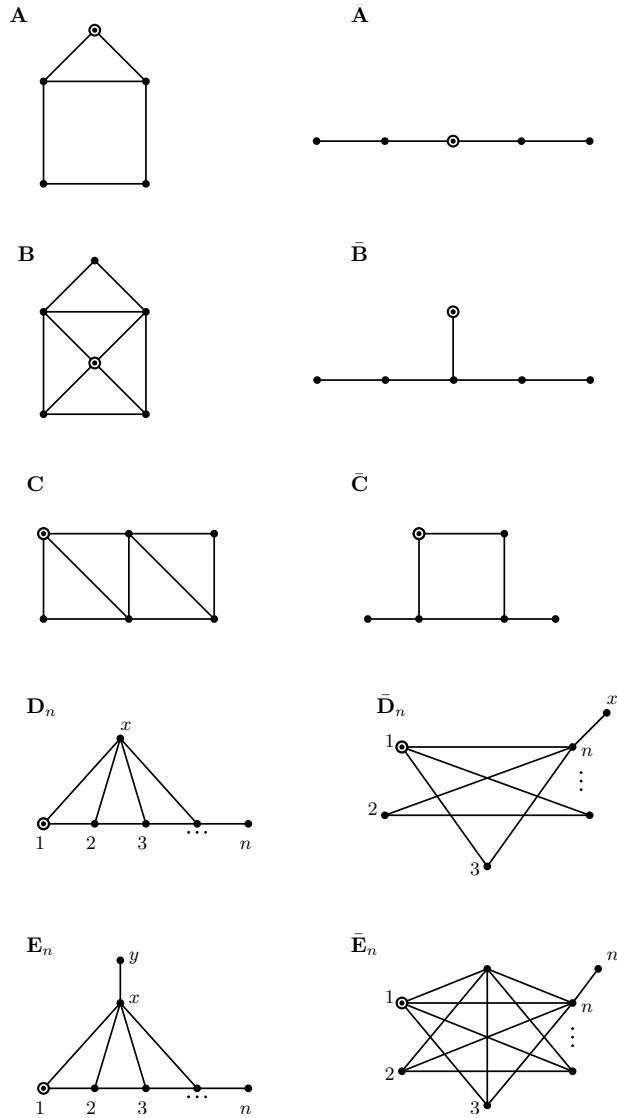


Figura 3.1: Cada v3rtice destacado en los grafos \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D}_{2k+1} con $k \geq 2$, $\bar{\mathbf{E}}_n$ con $k \geq 3$, no puede ser sumidero de un grafo de comparabilidad. Cada v3rtice destacado en los grafos \mathbf{A} , $\bar{\mathbf{A}}$, \mathbf{B} , $\bar{\mathbf{B}}$, \mathbf{C} , $\bar{\mathbf{C}}$, \mathbf{D}_{2k+1} , $\bar{\mathbf{D}}_{2k+1}$, \mathbf{E}_3 , \mathbf{E}_{2k} , $\bar{\mathbf{E}}_{2k}$, para con $k \geq 2$, no puede ser v3rtice extremo de un grafo CI .

Debido a que $r_{v_0} < r_{v_{k-1}}$ y v_{k-1} no es adyacente a v_0 , obtenemos que $l_{v_0} < l_{v_{k-1}}$. Por lo tanto, $l_{v_0} < l_{v_{k-1}} < l_{v_k}$, y entonces $I_{v_k} \subset I_{v_0}$, lo cual contradice el hecho de que v_k y v_0 no son adyacentes. \square

Teorema 3.1.4. *Sea $G = (V, E)$ un grafo CI . Un vértice z es un vértice extremo de G si y solo si G no contiene a ninguno de los grafos $\mathbf{A}, \overline{\mathbf{A}}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{B}}, \mathbf{C}, \overline{\mathbf{C}}, \mathbf{D}_{2k+1}, \overline{\mathbf{D}}_{2k+1}, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_{2k}, \overline{\mathbf{E}}_{2k}$, para $k \geq 2$, como subgrafo inducido, con z como vértice destacado de la Figura 3.1.*

Demostración: La implicación directa es consecuencia del Lema 3.1.2 y del Teorema 3.1.1. Observar que $\overline{\mathbf{E}}_3 = \mathbf{E}_3$ y que \mathbf{D}_n es subgrafo inducido de \mathbf{E}_n .

Para demostrar la proposición recíproca, consideremos el grafo G' que se obtiene agregando a G un vértice pendiente z' adyacente a z .

Observar primero que, por el Teorema 3.1.1, el vértice z es un sumidero de G . Luego existe una orientación transitiva \vec{E} de G en la cual todas las aristas incidentes en z están orientadas hacia z . La orientación transitiva \vec{E}' de G' que se obtiene agregando $z'z$ a \vec{E} prueba que G' es de comparabilidad y que z es un sumidero de G' . Probaremos a continuación que G' es CI .

Asumamos, con el objetivo de obtener una contradicción, que G' no es CI . Luego, G' contiene un subgrafo inducido H el cual es un grafo en la Figura 2.4, o bien el complemento de un grafo de la Figura 2.3; más aun, H debe contener a z' , por lo que H debe tener un vértice de grado uno y z es el único vecino de ese vértice.

Una inspección de esas figuras revela que H tiene que ser uno de los grafos T, S, M, G_1, G_2, G_3 o N_n para algún $n \geq 4$, en la Figura 2.4; o el complemento del grafo J_{2k+1} para algún $k \geq 2$ en la Figura 2.3. En el siguiente párrafo mostraremos que cada caso implica una contradicción, y que por lo tanto G' es un grafo CI .

- Si H es alguno de los grafos S, G_1, G_2 o G_3 , entonces G contiene al grafo $\overline{\mathbf{A}}$ en

la Figura 3.1 con z como el vértice señalado.

- Si H es el grafo T , entonces G contiene el grafo $\overline{\mathbf{B}}$ en la Figura 3.1 con z como el vértice señalado.
- Si H es el grafo M , entonces tenemos que considerar dos casos dependiendo de cual vértice de grado uno es z' : su vecino z es adyacente a dos vértices con grado 3, o su vecino z es adyacente a un vértice con grado 3 y otro con grado 2. En el primer caso, G contiene el grafo $\overline{\mathbf{A}}$ en la Figura 3.1 con z como vértice marcado; y, en el último, G contiene al grafo $\overline{\mathbf{C}}$ en Figura 3.1 con z como el vértice señalado.
- Si H es el grafo N_4 , entonces G contiene al grafo \mathbf{E}_3 en Figura 3.1 con z como el vértice marcado.
- Si H es el grafo N_n para algún $n > 4$, entonces, nuevamente, consideramos dos casos dependiendo de cuál vértice de grado uno es z' . Si z' es el vértice etiquetado 1 (o n) entonces G contiene el grafo \mathbf{E}_{n-1} y \mathbf{D}_{n-1} en Figura 3.1 con z como el vértice señalado. Notar que \mathbf{E}_{n-1} es prohibido cuando n es impar y \mathbf{D}_{n-1} es prohibido cuando n es par. Si z' no es el vértice etiquetado 1 ni el vértice etiquetado n , entonces G contiene el grafo $\overline{\mathbf{A}}$ en la Figura 3.1 con z como el vértice señalado.

Por lo tanto, hemos probado que G' es CI .

Sea $(I_w)_{w \in V(G')}$ un modelo CI de G' compatible con \vec{E}' , es decir,

$$u\vec{v} \in \vec{E}' \text{ implica } I_u \subset I_v.$$

Claramente, si I_z es un intervalo extremo de esta representación entonces z es un vértice extremo de G y el teorema está probado. Asumamos entonces que z no es

extremo en la representación $(I_w)_{w \in V(G')}$. Resulta que el conjunto izquierdo L_z y el conjunto derecho R_z de z son no vacíos. El hecho que z es el único vecino de z' implica que $L_z \cap R_z = \emptyset$.

Sea x un vértice de L_z minimizando la distancia a z en G' . Sea $P_{zx} = [v_0 = z, v_1, v_2, \dots, v_k = x]$ un camino de mínima longitud uniendo z con x . Como z es un sumidero, tenemos que $\overrightarrow{v_1 z} \in \overrightarrow{E'}$, lo cual implica que $I_{v_1} \subset I_z$. Resulta, por el Lema 3.1.3, que $v_2 \in R_z$ y $r_z < r_{v_i}$ para todo i , o $v_2 \in L_z$ y $l_{v_i} < l_z$ para todo i mayor que 0.

Como $v_k = x \in L_z$ debe ser $v_2 \in L_z$ y $l_{v_i} < l_z$ para todo i . Como x fue elegido minimizando la distancia a z debe ser $v_2 = v_k = x$ y así probamos la existencia de un camino de la forma $[z, v_1, x]$. Análogamente, existen los vértices v'_1 , e $y \in R_z$ induciendo el camino $[z, v'_1, y]$.

La prueba será completada mostrando que la concatenación de ambos caminos induce el grafo $\overline{\mathbf{A}}$ con z como el vértice marcado.

Claramente, x e y no son adyacentes. Afirmamos que x no es adyacente a v'_1 . De hecho, si x fuera adyacente a v'_1 , se obtiene que $r_{v'_1} < r_x$; por otro lado, ya que z' tiene grado uno e $I_{z'} \subset I_z$, se sigue que $r_x < r_{z'}$ y $l_{z'} < l_y$. Por lo tanto,

$$l_{z'} < l_y < l_{v'_1} < r_{v'_1} < r_x < r_{z'}$$

lo cual implica $I_{v'_1} \subset I_{z'}$, contrario al hecho de que z' es adyacente únicamente a z .

Análogamente, y no es adyacente a v_1 . □

Como consecuencia de los Teoremas 3.1.1 y 3.1.4, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.5. *Sea G un grafo CI. Un vértice z es un vértice extremo de G si y solo si z es un sumidero de G y \overline{G} .*

3.2. Grafos CI homogéneamente representables

Un grafo CI G es **homogéneamente representable** si cada uno de sus vértices es un vértice extremo.

Teorema 3.2.1. *Sea G un grafo CI . Entonces G es homogéneamente representable si y solo si no contiene a los grafos \mathbf{A} , $\overline{\mathbf{A}}$, \mathbf{C} , $\overline{\mathbf{C}}$, \mathbf{E}_3 , descritos en la Figura 3.1, como subgrafos inducido.*

Demostración: Es una consecuencia directa del Teorema 3.1.4 y el hecho que: \mathbf{A} es un subgrafo inducido de \mathbf{B} y de \mathbf{D}_{2k+1} , para $k \geq 2$; y \mathbf{E}_3 es un subgrafo inducido de \mathbf{E}_{2k} , para $k \geq 2$. \square

En el teorema previo, la condición ' G es un grafo CI ' puede ser relajada agregando C_5 (el ciclo sin cuerdas con 5 vértices) a la familia de subgrafos prohibidos.

Teorema 3.2.2. *Un grafo G es CI homogéneamente representable si y solo si G no contiene a los grafos C_5 , \mathbf{A} , $\overline{\mathbf{A}}$, \mathbf{C} , $\overline{\mathbf{C}}$, \mathbf{E}_3 , descrito en la Figura 3.1, como subgrafos inducido.*

Demostración: Si cada vértice de G es extremo entonces, por el Teorema 3.1.4, G no contiene a ninguno de los grafos de la Figura 3.1; en particular no contiene a \mathbf{A} , $\overline{\mathbf{A}}$, \mathbf{C} , $\overline{\mathbf{C}}$ ni \mathbf{E}_3 . Además, C_5 es un prohibido de los grafos de comparabilidad, por lo que G no lo contiene.

Recíprocamente sea G un grafo que no contiene a C_5 , \mathbf{A} , $\overline{\mathbf{A}}$, \mathbf{C} , $\overline{\mathbf{C}}$ ni \mathbf{E}_3 como subgrafos inducidos. Recordemos que un grafo cualquiera H es CI si y solo si ninguno de los grafos de las Figuras 2.3 y 2.4 ni los complementos de dichos grafos es subgrafo inducido de H . Cada uno de estos prohibidos tiene como subgrafo inducido a C_5 , \mathbf{A} , $\overline{\mathbf{A}}$, \mathbf{C} , $\overline{\mathbf{C}}$ o \mathbf{E}_3 . Por lo tanto, podemos asegurar que G es CI ; y por el Teorema 3.2.1 él es homogéneamente representable. \square

Capítulo 4

Posets *CPT*: Propiedades Generales y Dimensión

En la Primera sección de este Capítulo, presentamos una condición necesaria para que un poset sea *CPT*. A partir de ella describimos una familia de subposets prohibidos para la clase *CPT*. También mostramos diferentes ejemplos de posets que no son *CPT* aún cuando satisfacen la condición necesaria. Introducimos las definiciones de posets fuertemente-*CPT* y dualmente-*CPT*. En la tercera sección, demostramos que en la clase de posets *CPT* la dimensión y la dimensión de intervalos no están acotadas superiormente. Sin embargo, la dimensión de un poset *CPT* \mathbf{P} cualquiera está acotada superiormente por la cantidad de hojas del árbol huésped de cualquier modelo *CPT* de \mathbf{P} .

4.1. Propiedades Generales

Definición 4.1.1. *Un poset $\mathbf{P} = (X, P)$ es un orden de contención de caminos en un árbol o poset *CPT* si admite un modelo por contención $M_{\mathbf{P}} = (W_x)_{x \in X}$ tal que cada W_x es el conjunto de vértices de un camino de un árbol.*

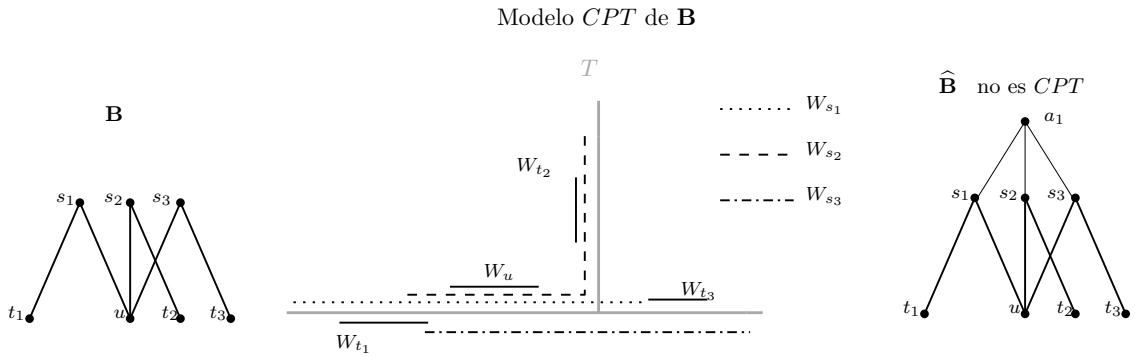


Figura 4.1: El poset \mathbf{B} admite un modelo *CPT*, pero el poset $\widehat{\mathbf{B}}$ no es *CPT*.

El árbol utilizado como soporte de los caminos se llama **árbol huésped** del modelo. Con el objetivo de simplificar la notación, de ahora en adelante identificaremos los caminos con sus conjuntos de vértices. Es decir, también nos referiremos a los conjuntos W_x como si fuesen caminos. Consecuentemente, podremos decir que un camino W está contenido en un camino W' o que un camino W es un subconjunto propio de un camino W' ; y escribir, por ejemplo, sean W y W' caminos tales que $W \subseteq W'$ o tales que $W \subset W'$.

En la Figura 4.1 podemos ver el diagrama de Hasse del poset 3-irreducible $\mathbf{B} = (X, B)$ donde $X = \{s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3\}$, junto con un modelo *CPT* del mismo. A cada elemento del conjunto X se le asigna un camino en el árbol T de forma que un elemento es menor que otro en el poset \mathbf{B} si y solo si el camino correspondiente al primer elemento es un subconjunto (subcamino) propio del camino correspondiente al segundo.

A modo de ejemplo, observar que $W_{t_1} \subset W_{s_1}$, pero $W_{t_1} \not\subset W_{s_2}$, y $W_{t_1} \not\subset W_{s_3}$, ya que $t_1 < s_1$, $t_1 \parallel s_2$ y $t_1 \parallel s_3$ en \mathbf{B} .

El poset $\widehat{\mathbf{B}}$, cuyo diagrama de Hasse podemos ver en la misma figura, no admite un modelo *CPT*. En efecto, si $\widehat{\mathbf{B}}$ admitiese un modelo *CPT* $(P_x)_{x \in X \cup \{a_1\}}$, entonces tendríamos $P_x \subset P_{a_1}$ para cada elemento $x \in D(a_1) = X$. Luego, como P_{a_1} es un camino, claramente tendríamos un modelo *CI* de \mathbf{B} , lo cual contradice el hecho de

que \mathbf{B} no es un poset CI (ver Teorema 2.3.6 y la Figura 2.5).

En el siguiente lema mostramos una condición necesaria para que un poset sea CPT .

Lema 4.1.2. *Si \mathbf{P} es un poset CPT entonces para todo elemento z de \mathbf{P} el subposet inducido por el conjunto descendente cerrado de z $\mathbf{P}(D[z])$ es un poset CI .*

Demostración: Sea $(W_x)_{x \in X}$ un modelo CPT de \mathbf{P} . Como $x \in D(z)$ implica $W_x \subset W_z$, tenemos que cada W_x con $x \in D[z]$ es un subintervalo de W_z . Por lo tanto, $(W_x)_{x \in D[z]}$ es un modelo por contención de intervalos de $\mathbf{P}(D[z])$. \square

Recordemos que un elemento máximo en un poset es un elemento mayor que todo otro elemento del poset y que los posets 3-irreducibles descritos en las Figuras 2.5 y 2.6 caracterizan por subposets prohibidos a los posets CI .

Definición 4.1.3. *Dado un poset \mathbf{P} , indicaremos mediante $\widehat{\mathbf{P}}$ al poset que se obtiene agregando a \mathbf{P} un elemento máximo. Llamaremos $\mathbf{Top}_{3\text{-irred}}$ al conjunto $\{\widehat{\mathbf{P}} : \mathbf{P} \text{ poset } 3\text{-irreducible}\}$.*

Una consecuencia del Lema 4.1.2 es que cada poset en la clase $\mathbf{Top}_{3\text{-irred}}$ es un ejemplo de poset que no es CPT . En lo que sigue mostraremos cuáles de ellos son minimales.

Lema 4.1.4. *Todo poset de la clase $\mathbf{Top}_{3\text{-irred}}$ distinto de $\widehat{\mathbf{I}}_n$, para todo $n \geq 0$, es un poset prohibido minimal para la clase CPT .*

Demostración:

Sea $\mathbf{P} = (X, P)$ un poset 3-irreducible (ver Figuras 2.5 y 2.6) y llamemos u al elemento máximo de $\widehat{\mathbf{P}}$. Por el Lema 4.1.2, el poset $\widehat{\mathbf{P}}$ no es CPT . Veamos que es minimal.

Sea x es un elemento de X . Un modelo CPT de $\widehat{\mathbf{P}} - x$ se obtiene considerando un modelo CI de $\mathbf{P} - x$ y agregando un camino W_u correspondiente al vértice máximo u que contenga todos los caminos del modelo CI .

Veremos a continuación que $\widehat{\mathbf{P}} - u = \mathbf{P}$ es CPT si $\mathbf{P} \neq \mathbf{I}_n$.

Primero, consideremos el caso en que \mathbf{P} tiene un elemento maximal x tal que su conjunto descendente es una cadena. Observar que en tal caso \mathbf{P} debe ser alguno de los siguientes posets: \mathbf{B}^d , \mathbf{C} , \mathbf{C}^d , \mathbf{CX}_1 , \mathbf{CX}_1^d , \mathbf{CX}_2 , \mathbf{EX}_1 , \mathbf{EX}_1^d , $\mathbf{EX}_2 \cong \mathbf{EX}_2^d$, \mathbf{FX}_1^d , \mathbf{E}_n , \mathbf{E}_n^d , $\mathbf{F}_n \cong \mathbf{F}_n^d$ o $\mathbf{H}_n \cong \mathbf{H}_n^d$, con $n \geq 0$.

Por ser \mathbf{P} un poset 3-irreducible tenemos que $\mathbf{P} - x$ es *CI*. Sea M un modelo *CI* de $\mathbf{P} - x$ sobre un camino huésped P . Sea $x' \in X$ tal que $x' < x$. Consideremos $W_{x'}$ el camino del modelo M correspondiente a x' . Llamemos q al vértice de P extremo de $W_{x'}$. Sea T el árbol que se obtiene agregando a P un vértice pendiente q' adyacente a q y llamemos W_x al camino de T que se obtiene agregando el vértice q' al camino $W_{x'}$. Agregando al modelo M el camino W_x se obtiene un modelo *CPT* de \mathbf{P} sobre el árbol T .

En caso contrario, si \mathbf{P} no es ninguno de los posets citados anteriormente, y no siendo ninguno de los posets \mathbf{I}_n , $n \geq 0$, se tiene que \mathbf{Q} debe ser alguno de los siguientes posets: \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{D}^d , \mathbf{CX}_2^d , \mathbf{CX}_3 , \mathbf{CX}_3^d , \mathbf{FX}_1 , \mathbf{FX}_2 , \mathbf{FX}_2^d , $\mathbf{A}_n \cong \mathbf{A}_n^d$, \mathbf{I}_n^d , $\mathbf{G}_n \cong \mathbf{G}_n^d$ o $\mathbf{J}_n \cong \mathbf{J}_n^d$, con $n \geq 0$. En las Figuras 4.2 y 4.3 exponemos un modelos *CPT* para cada uno de estos posets. Chequear la exactitud de estos modelos es una tarea que requiere tiempo pero es sencilla. \square

Veremos a continuación que los posets $\mathbf{Top}_3\text{-irred}$ permiten caracterizar a los posets *CPT* dentro de cualquier clase de posets en la cual la condición necesaria para ser *CPT* sea también suficiente.

Teorema 4.1.5. *Sea \mathcal{A} una clase de posets donde la condición necesaria para ser *CPT* establecida por el Lema 4.1.2 es también suficiente.*

*Un poset $\mathbf{P} \in \mathcal{A}$ es *CPT* si y solamente si \mathbf{P} es $\mathbf{Top}_3\text{-irred}$ -libre.*

Demostración: Sea $\mathbf{P} \in \mathcal{A}$. Si \mathbf{P} es *CPT* entonces cumple con la condición necesaria para ser *CPT*. Luego, el conjunto descendente de cada vértice es *CI*. Resulta que \mathbf{P}

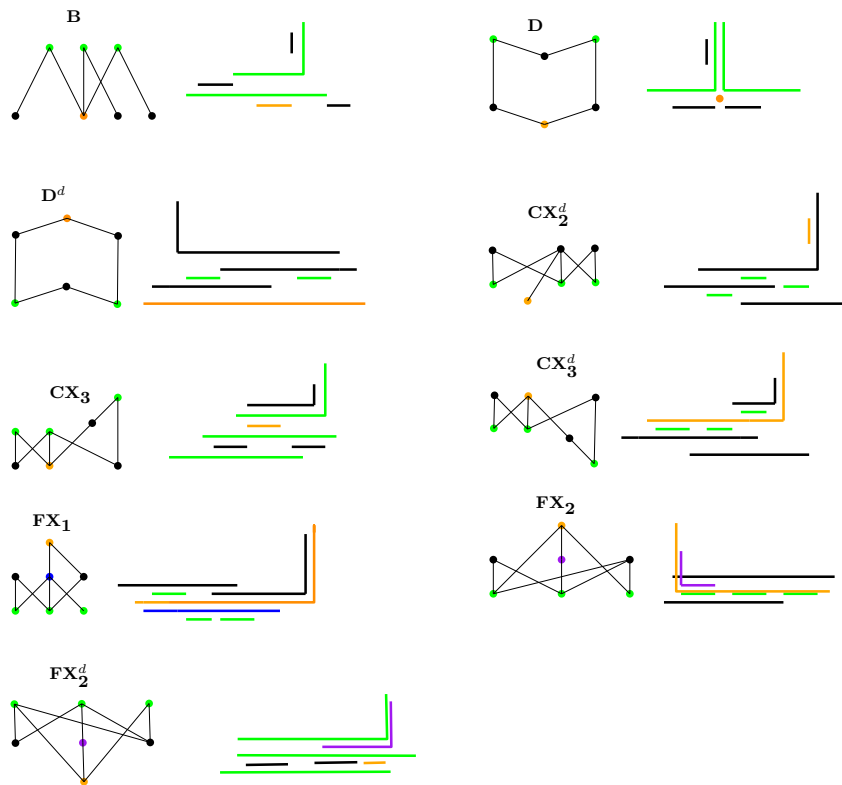


Figura 4.2: Representación de los modelos *CPT* de los posets 3-irreducibles **B**, **D**, D^d , CX_2^d , CX_3 , CX_3^d , FX_1 , FX_2 y FX_2^d .

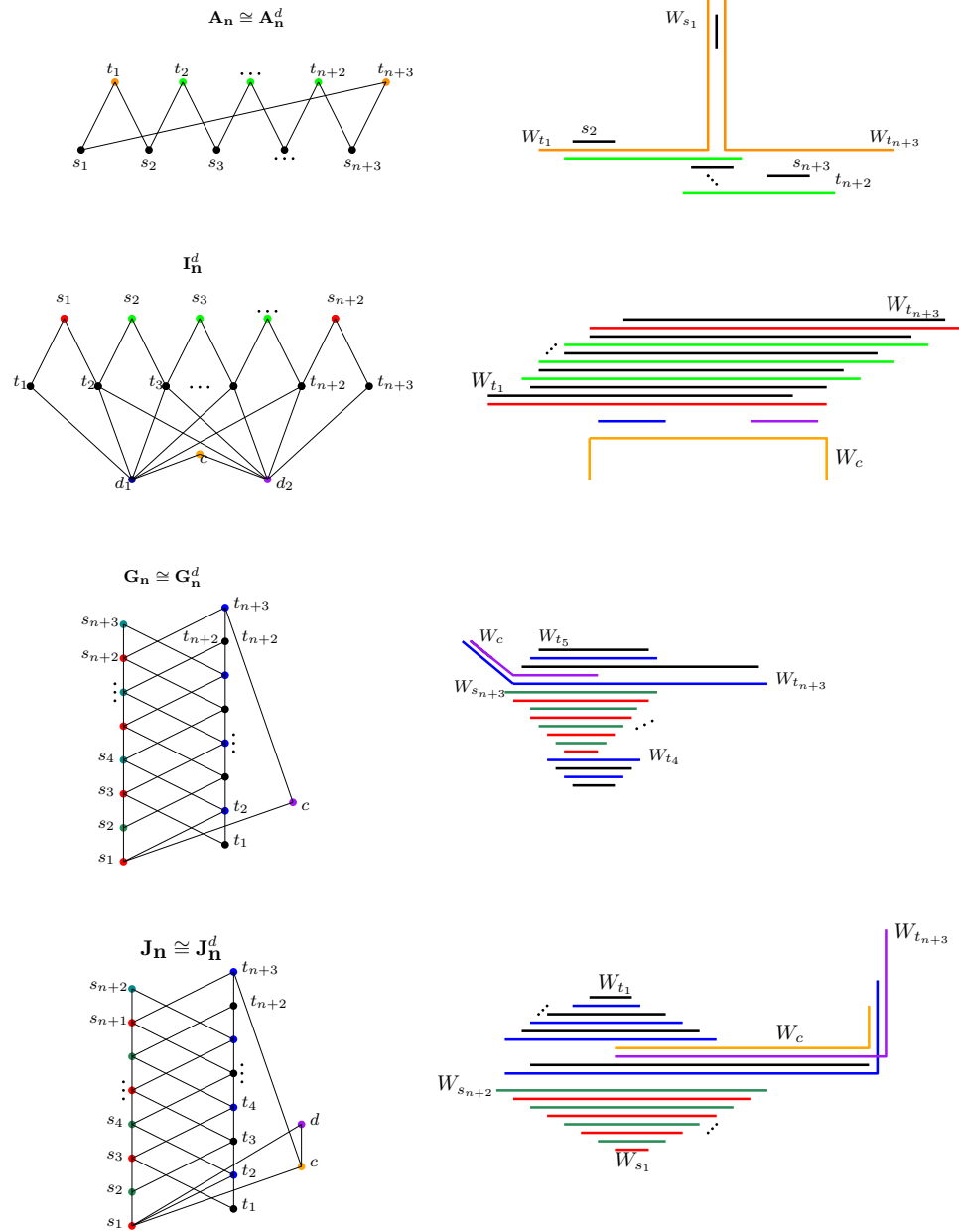


Figura 4.3: Representación de los modelos *CPT* de los posets 3-irreducibles $\mathbf{A}_n \cong \mathbf{A}_n^d$, \mathbf{I}_n^d , $\mathbf{G}_n \cong \mathbf{G}_n^d$ y $\mathbf{J}_n \cong \mathbf{J}_n^d$, con $n \geq 0$.

es $\mathbf{Top}_3\text{-irred}$ -libre.

Recíprocamente, si \mathbf{P} es $\mathbf{Top}_3\text{-irred}$ -libre entonces el conjunto descendente de cada vértice debe ser CI , es decir \mathbf{P} satisface la condición necesaria para ser CPT . Como en la clase \mathcal{A} la condición necesaria es también suficiente, tenemos que \mathbf{P} es CPT . \square

Si se desea obtener una caracterización mediante una familia de prohibidos minimales, basta reemplazar en el teorema anterior la familia $\mathbf{Top}_3\text{-irred}$ por la familia $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ que se obtiene eliminando de $\mathbf{Top}_3\text{-irred}$ los posets $\widehat{\mathbf{I}}_n$ para todo $n \geq 0$ y los posets que no pueden ser subposets de un miembro de la clase \mathcal{A} .

El Teorema 4.1.5 se usará para la caracterización por subposets prohibidos de dos clases especiales de posets en los Capítulos 5 y 6.

A continuación mostraremos otros ejemplos particulares de posets CPT y de posets que no son CPT . Utilizaremos las siguientes observaciones cuyas demostraciones son inmediatas.

Observación 4.1.6. *Si en un modelo CPT dos caminos W_x y W_y son iguales, entonces los vértices x e y son falsos gemelos. Luego, la propiedad de ser un poset CPT es invariante bajo la operación de adición de falsos gemelos.*

Observación 4.1.7. *Dados tres intervalos de una recta, existen dos de ellos tales que si I es un intervalo que contiene a ambos entonces I también contiene al restante tercer intervalo.*

Observación 4.1.8. *Sea $(W_i)_{1 \leq i \leq n}$ un modelo CI de un poset \mathbf{P} cuyo grafo de comparabilidad es un camino sin cuerdas $[v_1, v_2, \dots, v_n]$, siendo W_i el intervalo correspondiente a v_i . Si $v_2 < v_1$ en \mathbf{P} entonces :*

1. *de izquierda a derecha (o de derecha a izquierda) los intervalos correspondiente a los vértices maximales aparecen en orden W_1, W_3, W_5, \dots y los intervalos correspondiente a los vértices minimales aparecen en orden W_2, W_4, W_6, \dots*

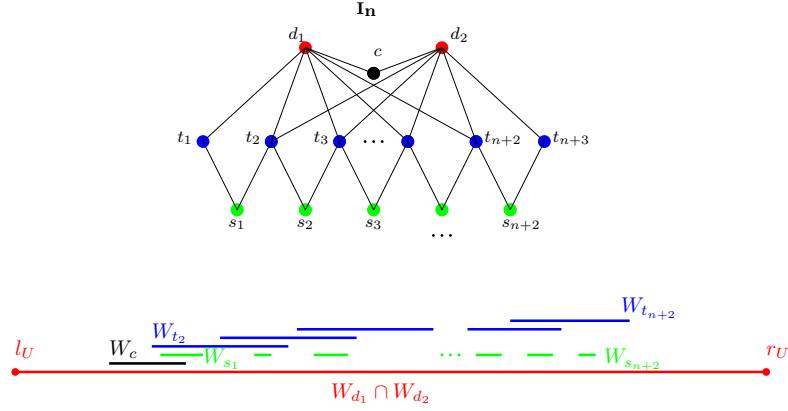


Figura 4.4: Poset 3-irreducible \mathbf{I}_n y un esquema de un modelo CPT que usaremos para probar que \mathbf{I}_n no es CPT para $n \geq 0$, Lema 4.1.9.

2. No hay dos intervalos iguales, salvo que $n = 3$ en cuyo caso puede ser $W_1 = W_3$.

Lema 4.1.9. Sea $n \geq 0$. El poset 3-irreducible \mathbf{I}_n descrito en la Figura 4.4 no es CPT .

Demostración:

Supongamos que existe un modelo CPT $(W_x)_{x \in X}$ de \mathbf{I}_n , donde X es el conjunto de vértices del poset nombrados como se indica en la Figura 4.4. Sea A el conjunto de vértices $D(d_1) \cap D(d_2)$. Es claro que el subposet $\mathbf{I}_n(A)$ es CI y un modelo del mismo está contenido en el camino $U = W_{d_1} \cap W_{d_2}$. En particular los caminos W_{t_2} , $W_{t_{n+2}}$ y W_c están contenidos en U . Representando a U como un intervalo horizontal con extremos derecho e izquierdo r_U y l_U , respectivamente; llamaremos r_v y l_v a los extremos derecho e izquierdo respectivamente del camino W_v con $v \in A$. Sin pérdida de generalidad asumamos que l_{t_2} está más cercano a l_U que el extremo $l_{t_{n+2}}$, ver figura 4.4.

Por la Observación 4.1.8 y el hecho que ningún camino W_v con $v \in A - \{c\}$ puede contener o estar contenido en W_c , resulta que l_c está entre l_U y l_{t_2} o r_c está entre $r_{t_{n+2}}$ y r_U . Por simetría, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que l_c está entre l_U y l_{t_2} y de esa forma r_c debe estar entre l_c y r_{s_1} .

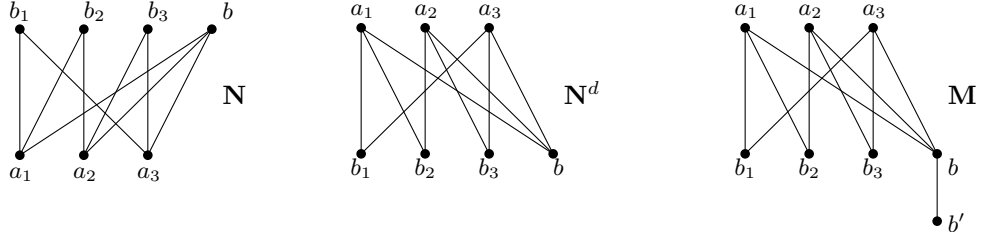


Figura 4.5: El poset \mathbf{N} no es CPT . Su dual \mathbf{N}^d admite un modelo CPT . El poset \mathbf{M} obtenido a partir de \mathbf{N}^d por la adición de b' no es CPT . Notar que b y b' son gemelos.

Por otra parte, el camino W_{t_1} debe estar contenido en W_{d_1} , debe contener a W_{s_1} y no estar contenido en U , por lo que l_U debe ser un punto interior del camino W_{t_1} y de esa forma W_c resulta estar contenido en W_{t_1} , contradiciendo el hecho que c y t_1 son incomparables. \square

Lema 4.1.10. *El poset \mathbf{N}^d representado en la Figura 4.5 es CPT . En todo modelo CPT de \mathbf{N}^d , el vértice b es representado por un camino formado por un vértice.*

Demostración: En la Figura 4.6, hay un modelo CPT de \mathbf{N}^d , lo que nos permite afirmar él es un poset CPT .

Sea T el árbol huésped de algún modelo CPT $(W_x)_{x \in X}$ de \mathbf{N}^d siendo $X = \{a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3\}$.

Por la Observación 4.1.6, dos vértices distintos no pueden ser asignados en un mismo camino de T . Sea $W_{a_1} : [q_1, q_2, \dots, q_k]$ el camino que representa al vértice a_1 , donde los q_i son vértices de T . Ya que $b_1 < a_1$, $b_2 < a_1$ y $b < a_1$ en \mathbf{N}^d , se sigue que W_{b_1} , W_{b_2} y W_b son subcaminos de W_{a_1} . Para $1 \leq i \leq j \leq k$, denotamos $[q_i, q_j]$ al subcamino de W_{a_1} con vértices $q_i, q_{i+1}, \dots, q_{j-1}, q_j$.

De acuerdo a las relaciones que satisfacen los elementos de \mathbf{N}^d se cumple que $W_b \subseteq W_{a_1} \cap W_{a_2} \cap W_{a_3}$ y $W_{b_1} \subset W_{a_1} \cap W_{a_3}$ pero $W_{b_1} \not\subset W_{a_2}$. Además, $W_{b_2} \subset W_{a_1} \cap W_{a_2}$ pero W_{b_2} no está contenido en W_{a_3} . Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $i_{b_1} \leq j_{b_1} < j_b < j_{b_2}$ y $i_{b_1} < i_b < i_{b_2} \leq j_{b_2}$.

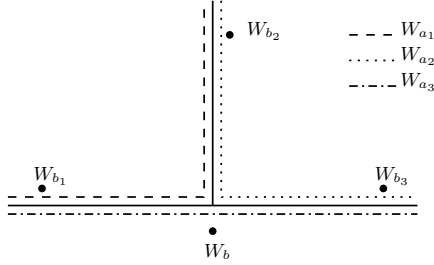


Figura 4.6: Un modelo CPT de \mathbf{N}^d . Los vértices b_1 , b_2 , b_3 y b son representados por caminos con un vértice.

Ya que W_{b_3} no está contenido en W_{a_1} existe un vértice h de T que pertenece a $(W_{a_3} \cap W_{a_2}) - W_{a_1}$. Sea q_{i_h} el vértice de W_{a_1} más cercano a h en T . Ya que h es un vértice de W_{a_3} , y W_{b_1} y W_b están contenidos en W_{a_3} , entonces $i_h \leq i_{b_1}$ o $i_h \geq j_b$. Si $i_h \leq i_{b_1}$, ya que h es un vértice de W_{a_2} y W_{b_2} están contenidos en W_{a_2} , tenemos que W_{b_1} está contenido en W_{a_2} , lo cual contradice que b_1 y a_2 son incomparables en \mathbf{N}^d . Por lo tanto, $j_b \leq i_h$. Análogamente, debido a que h es un vértice de W_{a_2} , y W_{b_2} y W_b está contenido en W_{a_2} , entonces $i_h \leq i_b$ o $i_h \geq j_{b_2}$. Si $i_h \geq j_{b_2}$, ya que h es un vértice de W_{a_3} y W_{b_1} está contenido en W_{a_3} , tenemos que W_{b_2} está contenido en W_{a_3} , lo cual contradice que a_3 y b_2 son incomparables in \mathbf{N}^d . Por lo tanto, $i_h \leq i_b$. Concluimos que $i_b = j_b = i_h$, por lo que W_b es un camino formado por un único vértice. \square

Lema 4.1.11. Sean \mathbf{N} y \mathbf{M} los posets representados en la Figura 4.5. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. El poset \mathbf{N} satisface la condición necesaria para ser CPT establecida en el Lema 4.1.2, pero \mathbf{N} no es CPT .
2. El poset \mathbf{N}^d es CPT , pero el poset \mathbf{M} que se obtiene agregando a \mathbf{N}^d el vértice b' gemelo de b no es CPT .

Demostración: Es claro que \mathbf{N} satisface la condición necesaria. Asumamos, con el fin de llegar a una contradicción, que el poset \mathbf{N} admite un modelo CPT $(W_x)_{x \in X}$,

donde X es el conjunto de vértices de \mathbf{N} . Como $a_1 < b$, $a_2 < b$ y $a_3 < b$ en \mathbf{N} , tenemos que W_{a_1} , W_{a_2} y W_{a_3} son intervalos de W_b . Así, por la Observación 4.1.7, dos de ellos, asumamos sin pérdida de generalidad que son W_{a_1} y W_{a_2} , satisfacen que todo subcamino de W_b que contiene a W_{a_1} y W_{a_2} también contiene a W_{a_3} . Ya que $W_{b_2} \cap W_b$ es un subcamino de W_b que contiene a W_{a_1} y W_{a_2} , tenemos que $W_{a_3} \subseteq W_{b_2} \cap W_b$, por lo que $W_{a_3} \subseteq W_{b_2}$. Por otra parte, es claro que $W_{a_3} \neq W_{b_2}$, y así $W_{a_3} \subset W_{b_2}$, lo que contradice el hecho que a_3 y b_2 son incomparables en \mathbf{N} .

El segundo enunciado es una consecuencia directa del Lema 4.1.10 y de que, en cualquier modelo CPT de \mathbf{M} , el camino correspondiente a b' debe ser un subcamino propio del camino correspondiente a b . \square

Corolario 4.1.12. *La condición necesaria para ser CPT dada por el Lemma 4.1.2 no es suficiente. La propiedad de ser un poset CPT se puede perder al agregar vértices gemelos. El hecho de que un poset sea CPT no implica que su dual también lo sea.*

El siguiente lema será utilizado para la demostración de los Teoremas 6.1.8 y 6.2.8 en el Capítulo 6.

Lema 4.1.13. *Sea $\mathbf{P} = (X, P)$ un poset CPT y sin falsos gemelos. Si \mathbf{P} admite un modelo CPT en el cual ningún camino se reduce a un vértice, entonces \mathbf{P} admite un modelo CPT en el que ningún camino se reduce a un vértice y, además, no hay dos caminos del modelo con algún extremo coincidente.*

Demostración: Sea $M = (W_x)_{x \in X}$ un modelo CPT en un árbol huésped T , en el que todo camino del modelo tiene al menos dos vértices de T . Procederemos recursivamente disminuyendo la cantidad de caminos con extremos coincidentes. Si no hay tales caminos, la demostración es obvia. Observar que, como el poset no tiene vértices falsos gemelos, por la Observación 4.1.6 no hay dos caminos iguales. Luego dos caminos solo pueden compartir uno de sus extremos.

Dado un vértice $q \in V(T)$, sea W_v un camino de menor longitud entre los que comparten extremo q . Sean q_1, q_2, \dots, q_k los vecinos de q en T . Como ningún camino se reduce a un único vértice, tenemos que W_v debe contener algún otro vértice q_i , digamos q_1 . Para obtener el nuevo modelo, procedemos subdividiendo la arista qq_1 de T mediante el agregado de un vértice q'_1 y haciendo la misma subdivisión en todos los caminos de M que contienen a esa arista; reemplazando el camino W_v por el camino W'_v que se obtiene removiéndole a W_v el vértice extremo q (en este caso el nuevo extremo de W'_v resulta ser q'_1 y W'_v no se reduce a un vértice); los demás caminos de M no se modifican.

Como el único camino del nuevo modelo que contiene al vértice q'_1 es W'_v , es claro que el número de caminos con extremos coincidentes ha disminuido. Veamos que la relación de contención entre los caminos no se ha modificado. Efectivamente, los únicos cambios que podrían ocurrir son: que W'_v quede propiamente contenido en un camino en el cual W_v no lo estaba, lo cual claramente no es posible; o que W'_v deje de contener propiamente un camino W_x que W_v contenía. Esto tampoco puede ocurrir pues en tal caso q debió ser también vértice extremo de W_x y tener menor longitud que W_v , contradiciendo su elección.

□

4.2. Subclases

Debido a que todo poset y su dual son asociados, el Lema 4.1.12 muestra que la propiedad fuerte de los poset CI enfatizada en la Observación 2.3.5 no es cierta para los posets CPT , es decir, el hecho que un poset \mathbf{P}' esté asociado con un poset CPT \mathbf{P} no implica que \mathbf{P}' sea CPT . Más aún, el hecho que \mathbf{P} sea CPT no implica que \mathbf{P}^d sea CPT . Esto motiva las siguientes definiciones:

Definición 4.2.1. *Un poset \mathbf{P} es **dualmente-CPT** si \mathbf{P} y \mathbf{P}^d son CPT.*

Definición 4.2.2. *Un poset \mathbf{P} es **fuertemente-CPT** si \mathbf{P} es CPT y todo otro poset asociado con \mathbf{P} también es CPT.*

Indicaremos *dually-CPT* (*fuertemente-CPT*) a la clase de posets *dually-CPT* (*fuertemente-CPT*). Es claro que

$$CI \subseteq \text{fuertemente-CPT} \subseteq \text{dualmente-CPT} \subseteq CPT. \quad (1)$$

Notar que la última inclusión en (1) es estricta: el poset \mathbf{N}^d en el Lema 4.1.11 es CPT pero no es *dualmente-CPT*.

Consideremos el poset \mathbf{B} cuyo diagrama de Hasse está representado en la Figura 4.1. \mathbf{B} es CPT, pero no es CI (observar que \mathbf{B} es uno de los posets 3-irreducibles representados en la figura 2.3). El grafo de comparabilidad de \mathbf{B} es un árbol, luego la clase de posets cuyos grafos de comparabilidad son un árbol no está contenida en la clase de posets CI. El siguiente teorema muestra que tales posets son fuertemente-CPT y, consecuentemente, la primera inclusión en (1) es estricta.

Teorema 4.2.3. *Todo poset cuyo grafo de comparabilidad es un árbol es fuertemente-CPT.*

Demostración: Sea \mathbf{P} un poset tal que su grafo de comparabilidad $G_{\mathbf{P}}$ es un árbol. Notar que \mathbf{P} tiene altura dos, por lo cual todo vértice de \mathbf{P} es un elemento minimal o un elemento maximal. Se construirá inductivamente un modelo CPT inyectivo de \mathbf{P} en el cual cada vértice minimal está representado por un camino con un único vértice. Sean v_0 una hoja de $G_{\mathbf{P}}$ y $(W_v)_{v \in V - \{v_0\}}$ un modelo inyectivo CPT de $G_{\mathbf{P}} - v_0$ sobre un árbol huésped T . Llamemos v_1 al único vértice de \mathbf{P} comparable con v_0 . Tenemos dos casos a considerar:

Si v_0 es minimal en \mathbf{P} entonces v_1 es maximal, luego W_{v_1} no está contenido en ningún otro camino del modelo. Sea $q \in V(T)$ un vértice extremo de W_{v_1} . Procedemos

adicionando a T un nuevo vértice q' adyacente a q , reemplazando W_{v_1} por $W_{v_1} \cup \{q'\}$, haciendo $W_{v_0} = \{q'\}$ y tomando los restantes caminos sin cambios.

Si v_0 es maximal en \mathbf{P} entonces v_1 es minimal, por lo que W_{v_1} es un camino con un único vértice en T , digamos $W_{v_1} = \{q\}$, donde $q \in V(T)$. En este caso, procedemos agregando a T un nuevo vértice q' adyacente a q , haciendo $W_{v_0} = \{q, q'\}$ y tomando los restantes caminos sin cambios. \square

Determinar si la inclusión central en (1) es estricta o no permanece como un problema abierto.

Problema abierto 4.2.4. *¿Existe un poset dualmente-CPT que no sea fuertemente-CPT?*

Notar que la propiedad de ser fuertemente-CPT no es necesariamente hereditaria por subposets, podría suceder que un subposet \mathbf{P}' de \mathbf{P} admita más posets asociados que el mismo \mathbf{P} . Sin embargo no sabemos si este es el caso para los posets que son fuertemente-CPT.

Problema abierto 4.2.5. *¿La propiedad de ser fuertemente-CPT es hereditaria por subposets?*

Claramente, una respuesta negativa para el Problema 4.2.4 implica una respuesta positiva al Problema 4.2.5. En los dos capítulos siguientes, resolvemos ambos problemas para la clase de posets split y la clase de posets k -tree.

4.3. Dimensión de los posets CPT

Los posets que admiten un modelo por contención de intervalos en una recta, llamados posets CI , son exactamente los posets con dimensión a lo sumo dos. Una pregunta natural que plantea J. Spinrad en [19] es si la dimensión de los posets que admiten

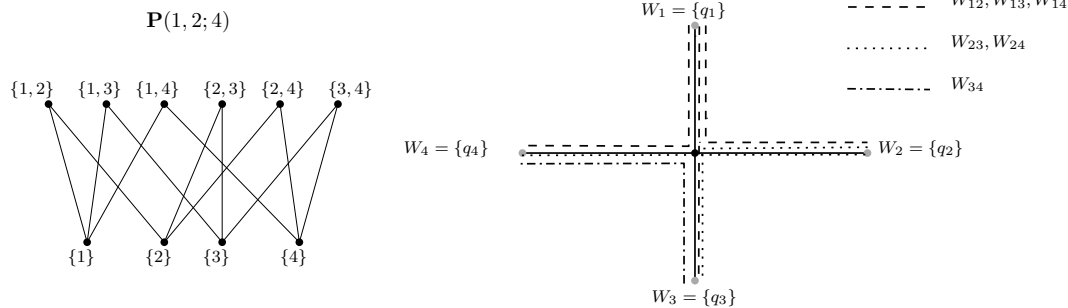


Figura 4.7: Diagrama de Hasse del poset $\mathbf{P}(1, 2; 4)$ y un modelo CPT del mismo.

un modelo por contención de caminos en un árbol, o sea la dimensión de los posets CPT , también está acotada superiormente por alguna constante. En esta sección, mediante el Teorema 4.3.1, responderemos negativamente a esta pregunta. También consideraremos el problema de determinar la existencia de una cota superior para la dimensión de intervalos de los posets CPT .

Siguiendo la notación de [23], para k y n enteros positivos, $\mathbf{P}(1, k; n)$ indica el poset cuyos elementos son los subconjuntos con exactamente un elemento y los subconjuntos con exactamente k elementos de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, ordenados por inclusión.

Los posets $\mathbf{P}(1, n - 1; n)$ (también conocidos como *posets de Hiraguchi*) son ejemplos estándar de posets con dimensión tan grande como se quiera eligiendo n adecuadamente. De hecho $\dim(\mathbf{P}(1, n - 1; n)) = n$ [23]. Es de destacar que estos posets no pueden ser utilizados para responder la pregunta de Spinrad, pues ellos no son posets CPT . Efectivamente, si $n \geq 4$, el poset \mathbf{N} representado en la Figura 4.5 es un subposet de $\mathbf{P}(1, n - 1; n)$, luego, por el Lema 4.1.11, $\mathbf{P}(1, n - 1; n)$ no es CPT .

En la prueba del Teorema 4.3.1 usamos que los posets $\mathbf{P}(1, 2; n)$ son CPT . Como ejemplo, en la Figura 4.7 representamos al poset $\mathbf{P}(1, 2; 4)$ junto con un modelo CPT del mismo donde el árbol huésped es una estrella con cuatro hojas.

Teorema 4.3.1. *Para todo entero positivo d , existe un poset CPT \mathbf{P} con $\dim(\mathbf{P}) > d$.*

Demostración: Primero demostraremos que, para cada $n \geq 1$, el poset $\mathbf{P}(1, 2; n)$

es *CPT*. Sea T una estrella con centro q y hojas q_1, q_2, \dots, q_n . Cada subconjunto formado por un elemento $\{i\}$ está representado por el camino $W_i = \{q_i\}$ de T , y cada subconjunto de 2 elementos $\{i, j\}$ está representado por el camino $W_{ij} = \{q_i, q, q_j\}$. Usando el hecho de que $\dim(\mathbf{P}(1, 2; n)) > \log_2 \log_2 n$ para $n \geq 3$ [23], queda probado el teorema. \square

Un poset $\mathbf{Q} = (X, Q)$ se dice un **orden de intervalos** si existe una función F asignando a cada elemento $x \in X$ un intervalo cerrado no degenerado $F(x) = [a_x, b_x]$, con $a_x < b_x$, de la recta real \mathbb{R} tal que $x < y$ en \mathbf{Q} si y solo si $b_x < a_y$ en \mathbb{R} . Todo poset es subposet de algún orden de intervalos. La **dimensión de intervalos** de un poset \mathbf{P} , denotada por $\text{Idim}(\mathbf{P})$, es el menor entero positivo k para el cual existen k extensiones Q_1, Q_2, \dots, Q_k de \mathbf{P} tales que se satisfacen las siguientes condiciones: 1.) $P = \bigcap_{i=1}^k Q_i$ y 2.) (X, Q_i) es un orden de intervalos para $i = 1, 2, \dots, k$.

Ya que los ordenes lineales son ordenes de intervalos, se tiene que $\text{Idim}(\mathbf{P}) \leq \dim(\mathbf{P})$ para cada poset \mathbf{P} .

La diferencia entre ambas dimensiones puede ser grande; sin embargo, si \mathbf{P} es un poset cuya altura es dos entonces esa diferencia es a lo sumo uno [24]. Luego, dado que los posets $\mathbf{P}(1, 2; n)$ usados en la demostración del Teorema 4.3.1 tienen altura dos, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.3.2. *Para todo entero positivo d , existe un poset *CPT* \mathbf{P} satisfaciendo que $\text{Idim}(\mathbf{P}) > d$.*

W. Trotter y J. Moore probaron el siguiente resultado que usaremos en la demostración del Teorema 4.3.4. Recordemos que un vértice x de un grafo conexo G es **vértice de corte** si $G - x$ es inconexo.

Teorema 4.3.3 ([23]). *Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo con dos o más vértices. Sea $\mathbf{S} = (X, S)$ el poset donde X es el conjunto de todos los subgrafos inducidos de G y*

$H_1 \leq H_2$ en P si y solo si H_1 es subgrafo inducido de H_2 . Entonces la dimensión de \mathbf{S} es igual a la cantidad de vértices de G que no son vértices de corte de G .

Teorema 4.3.4. *Si un poset \mathbf{P} admite un modelo CPT en un árbol huésped T con k hojas entonces $\dim(\mathbf{P}) \leq k$.*

Demostración: Sea \mathbf{Q} el poset formado por los subgrafos conexos del árbol T ordenados por inclusión de vértices, es decir por la condición de ser subgrafo inducido. Por el Teorema 4.3.3 y el hecho que las k hojas de T son exactamente los vértices que no son de corte, tenemos que $\dim(\mathbf{Q}) = k$. Como \mathbf{P} es subposet de \mathbf{Q} , resulta que $\dim(\mathbf{P}) \leq \dim(\mathbf{Q}) = k$. \square

El siguiente lema muestra que los posets usados en el Teorema 4.3.1 no son dualmente- CPT , por lo tanto el siguiente problema permanece irresuelto:

Problema abierto 4.3.5. *Determinar si la dimensión de los posets dualmente- CPT está acotada superiormente por una constante. La misma pregunta para los posets fuertemente- CPT .*

Lema 4.3.6. *Para todo $n \geq 4$, el poset dual de $\mathbf{P}(1, 2; n)$, representado en la Figura 4.8, no es CPT .*

Demostración: Observar que $\mathbf{P}(1, 2; 4)$ es un subposet de $\mathbf{P}(1, 2; n)$ para $n \geq 4$. Por lo tanto, es suficiente probar que $\mathbf{H} = \mathbf{P}(1, 2; 4)^d$ no es CPT . Supongamos lo contrario y tomemos un modelo CPT de \mathbf{H} . Para cada vértice $\{i\}$ o $\{i, j\}$ de \mathbf{H} , sean W_i , respectivamente W_{ij} , los correspondientes caminos en un árbol T . El camino W_1 contiene a los caminos W_{12} , W_{13} y W_{14} , ver Figura 4.9. Notar que de a pares estos caminos tienen diferentes puntos extremos izquierdos y diferentes puntos extremos derechos. Por la simetría de \mathbf{H} , podemos asumir sin pérdida de generalidad que el punto extremo izquierdo de W_{12} es el más cercano al punto extremo izquierdo de W_1

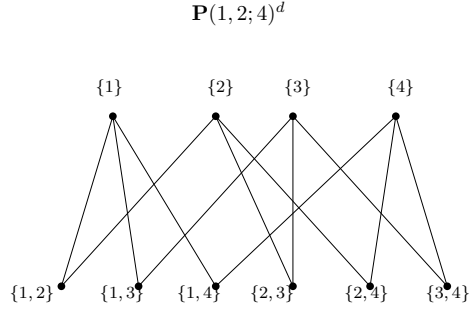


Figura 4.8: Poset $\mathbf{P}(1, 2; 4)^d$.

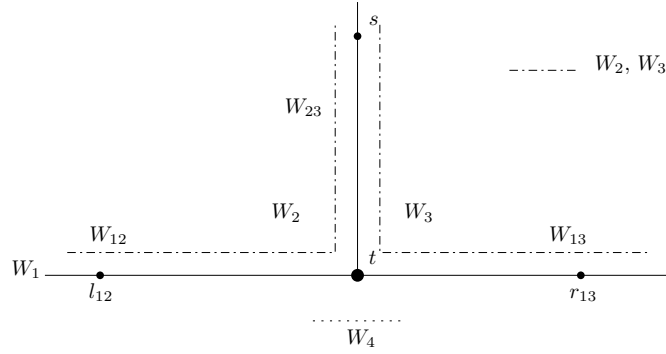


Figura 4.9: El poset $\mathbf{P}(1, 2; 4)^d$ no es *CPT*.

y que el punto extremo derecho de W_{13} es el más cercano al punto extremo derecho de W_1 .

Notar que $W_{12} \subset W_2$, $W_{12} \not\subset W_3$, $W_{13} \subseteq W_3$, $W_{13} \not\subset W_2$, y por el vértice $\{2, 3\}$, $W_2 \cap W_3 \not\subset W_1$. Por lo tanto, existe un vértice t en el árbol huésped T entre el vértice extremo derecho r_{12} de W_{12} y el vértice extremo izquierdo l_{13} de W_{13} ; y existe un vértice s de T adyacente a t tal que el camino W_2 contiene a r_{12} , t y s ; mientras el camino W_3 contiene a l_{13} , t y s . Ver Figura 4.9.

Ya que $W_{14} \subset W_1$, $W_{14} \not\subset W_2$ y $W_{14} \not\subset W_3$, tenemos que el vértice extremo izquierdo de W_{14} está entre l_{12} y t ; mientras el vértice extremo derecho de W_{14} está entre t y r_{13} ; lo cual contradice la existencia del camino W_4 . \square

Capítulo 5

Posets y grafos *CPT* en la clase Split

En este Capítulo demostramos que, en la clase de los posets split, la condición necesaria para ser un poset *CPT* dada en el Lema 4.1.2 es también suficiente. Como consecuencia obtenemos una caracterización por subposets prohibidos de los posets split *CPT*. Mostramos que un poset es split fuertemente-*CPT* si y solo si es dualmente-*CPT*; y los caracterizamos por subposets prohibidos. Obtenemos paralelamente una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos de la clase de grafos split fuertemente-*CPT*, la cual coincide con la clase de grafos split dualmente-*CPT*.

5.1. Posets Split

Un grafo cuyo conjunto de vértices puede ser particionado en un clique y un conjunto estable es llamado **split**. La clase de grafos split es exactamente la clase de grafos $\{2K_2, C_4, C_5\}$ -libre [5]; por lo tanto un grafo es split y de comparabilidad si y solamente si ninguno de sus subgrafos inducidos es isomorfo a un grafo en la Figura 5.1.

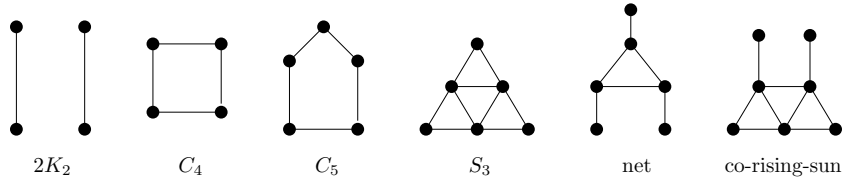


Figura 5.1: Subgrafos inducidos prohibidos para los grafos de comparabilidad split.

Definición 5.1.1. *Un poset cuyo grafo de comparabilidad es split es llamado **poset split**.*

Los posets split han sido estudiados, por ejemplo, en [14]. En la Figura 5.2 se ofrecen varios ejemplos de posets split.

Observación 5.1.2. *Un poset \mathbf{P} es split si y solo si su diagrama de Hasse consiste en una cadena maximal $x_1 < x_2 < \dots < x_k < y_1 < y_2 < \dots < y_m$, llamada **cadena principal** de \mathbf{P} , y cualquier otro vértice z de \mathbf{P} satisface una de las siguientes condiciones:*

- *z tiene un único vecino, este vecino es alguno de los vértices y_j en la cadena principal de \mathbf{P} , y $z < y_j$. Observar que en este caso z es minimal y está cubierto únicamente por y_j .*
- *z tiene un único vecino, este vecino es alguno de los vértices x_i en la cadena principal de \mathbf{P} , y $x_i < z$. Observar que en este caso z es maximal y cubre únicamente a x_i .*
- *z tiene exactamente dos vecinos, ellos son x_i e y_j en la cadena principal de \mathbf{P} , y $x_i < z < y_j$.*

El vértice y_m de la cadena principal es llamado **vértice cima** del poset.

En lo que sigue, los posets split que son *CPT*, *dualmente-CPT* o *fuertemente-CPT* serán caracterizados por subposets prohibidos.

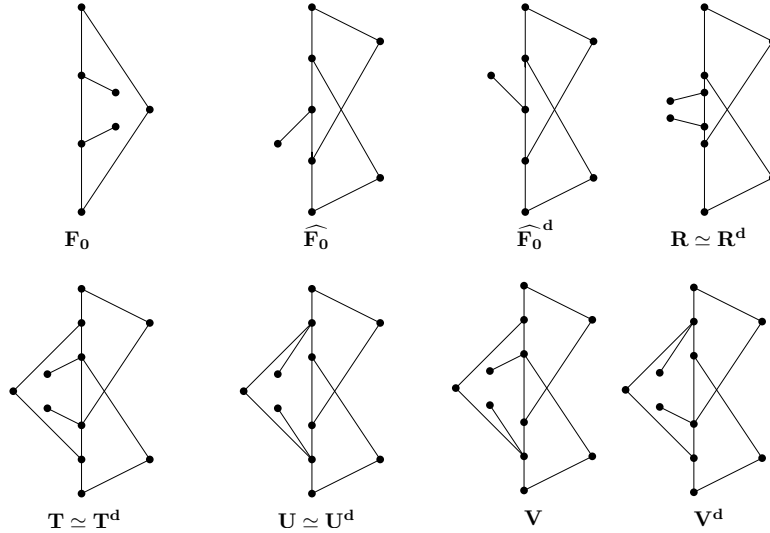


Figura 5.2: Ejemplos de posets split. \mathbf{F}_0 no es *CI* [23], pero \mathbf{F}_0 es *CPT*. $\widehat{\mathbf{F}}_0$ no es *CPT*, pero $\widehat{\mathbf{F}}_0^d$ es *CPT*. Los posets \mathbf{R} , \mathbf{T} , \mathbf{U} y \mathbf{V} tienen a $\widehat{\mathbf{F}}_0$ como subposet, luego no son *CPT*. Observar que los posets \mathbf{R} , \mathbf{T} , \mathbf{U} y \mathbf{V} también tienen a $\widehat{\mathbf{F}}_0^d$ como subposet.

Teorema 5.1.3. *Sea \mathbf{P} un poset split. \mathbf{P} es *CPT* si y solo si $\mathbf{P}(D[y])$ es *CI*, donde y es el vértice cima de \mathbf{P} .*

Demostración: Por el Lema 4.1.2, si \mathbf{P} es *CPT* entonces $\mathbf{P}(D[x])$ es *CI* para todo elemento x de \mathbf{P} , en particular esto vale para el elemento y .

Recíprocamente sea \mathbf{P} un poset split tal que $\mathbf{P}(D[y])$ es *CI*, siendo y el vértice cima. Denotamos por Z el conjunto de los vértices de \mathbf{P} que no están en $D[y]$. Por la Observación 5.1.2, si $z \in Z$ entonces z es maximal y existe un único vértice x_z en la cadena principal adyacente a z ; más aun, $x_z <: z$ en \mathbf{P} . Observar que distintos elementos z y z' de Z pueden ser adyacentes a un mismo vértice de la cadena principal, es decir, puede ocurrir $x_z = x_{z'}$.

Sea $(W_v)_{v \in D[y]}$ un modelo *CI* de $\mathbf{P}(D[y])$. Llamemos P al camino huésped de este modelo. Por cada vértice $z \in Z$ agregamos a P un vértice pendiente q_z adyacente a un extremo del camino W_{x_z} . Llamemos T al árbol resultante de este proceso.

Obtenemos un modelo CPT de \mathbf{P} con árbol huésped T agregando a la familia de caminos $(W_v)_{v \in D[y]}$ los caminos $W_{x_z} \cup \{q_z\}$ con $z \in Z$. \square

El Teorema 5.1.3 muestra que en la clase de los posets split la condición necesaria para ser CPT dada en el Lema 4.1.2 es también suficiente. Luego, el Teorema 4.1.5 y el siguiente lema completan la demostración del Teorema 5.1.5 que brinda una caracterización por subposets prohibidos para la clase de posets split CPT .

Lema 5.1.4. *El único poset 3-irreducible que puede ser subposet de un poset split es el poset \mathbf{F}_0 descrito en la Figura 5.2.*

Demostración: Los posets 3-irreducibles son los posets descritos en las Figuras 2.5 y 2.6 y sus respectivos duales. Sea \mathbf{H} un poset 3-irreducible, subposet de un poset split.

Como los grafos split son cordales, es decir, no tienen ciclos sin cuerdas inducidos, entonces los posets split son acíclicos. Resulta que \mathbf{H} no es ninguno de los posets \mathbf{D} , \mathbf{CX}_1 , \mathbf{CX}_2 , \mathbf{CX}_3 , \mathbf{EX}_1 , \mathbf{EX}_2 , \mathbf{FX}_1 , \mathbf{FX}_2 , \mathbf{A}_n , \mathbf{I}_n , \mathbf{G}_n , \mathbf{J}_n , \mathbf{H}_n con $n \geq 0$ ni sus respectivos duales.

Luego \mathbf{H} debe ser alguno de los posets \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{E}_n o \mathbf{F}_n , con $n \geq 0$. Es fácil verificar que el grafo de comparabilidad de cada uno de estos posets, salvo en el caso de \mathbf{F}_0 , tiene un K_2 como subgrafo inducido, y por ende no es split (recordar que los grafos split son los grafos $\{2K_2, C_4, C_5\}$ -libre). \square

Observar que el dual del poset \mathbf{F}_0 es el mismo poset \mathbf{F}_0 . El poset $\widehat{\mathbf{F}}_0$ que se obtiene agregando a \mathbf{F}_0 un elemento máximo (ver Definición 4.1.3) se describe en la Figura 5.2.

Teorema 5.1.5. *Sea \mathbf{P} un poset split. \mathbf{P} es CPT si y solo si \mathbf{P} no contiene el poset $\widehat{\mathbf{F}}_0$ (representado en la Figura 5.2 como subposet).*

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del teorema previo.

Corolario 5.1.6. *Los posets split \mathbf{R} , \mathbf{T} , \mathbf{U} y \mathbf{V} representados en la Figura 5.2 no son posets CPT.*

Demostración: Cada uno de ellos tiene como subposet a $\widehat{\mathbf{F}}_0$. □

El segundo ítem del Corolario 2.3.9 no es aplicable al poset $\widehat{\mathbf{F}}_0$ por cuanto este poset no es primo (\mathbf{F}_0 es un módulo no trivial), aunque la propiedad descrita por dicho corolario puede establecerse para $\widehat{\mathbf{F}}_0$ de la siguiente manera.

Lema 5.1.7. *Sean \mathbf{P} y \mathbf{P}' posets asociados. Si $\widehat{\mathbf{F}}_0$ (Figura 5.2) es un subposet de \mathbf{P} entonces $\widehat{\mathbf{F}}_0$ o $\widehat{\mathbf{F}}_0^d$ es subposet de \mathbf{P}' .*

Demostración: Los módulos no triviales de $\widehat{\mathbf{F}}_0$ son: su vértice cima, que llamaremos y , y los vértices del subposet \mathbf{F}_0 . Al conjunto de vértices de \mathbf{F}_0 lo denotaremos por X .

Como \mathbf{P} y \mathbf{P}' son asociados (tienen el mismo grafo de comparabilidad) podemos determinar el vértice y' y el conjunto X' de vértices de \mathbf{P}' correspondientes al vértice y y al conjunto X , respectivamente.

Ya que \mathbf{F}_0 es primo por el segundo ítem del Corolario 2.3.9 y porque $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_0^d$, tenemos que el subposet de \mathbf{P}' inducido por los vértices de X' es \mathbf{F}_0 .

Observar que, en \mathbf{P}' , el vértice y' debe ser mayor que todos los vértices de X' o debe ser menor que todos ellos, luego en \mathbf{P}' tenemos el subposet $\widehat{\mathbf{F}}_0$ o el subposet $\widehat{\mathbf{F}}_0^d$ (pues $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_0^d$). □

Teorema 5.1.8. *Sea \mathbf{P} un poset split. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) \mathbf{P} es fuertemente-CPT.

ii) \mathbf{P} es dualmente-CPT.

iii) \mathbf{P} no contiene a $\widehat{\mathbf{F}}_0$ ni a $\widehat{\mathbf{F}}_0^d$ como subposets.

Demostración: La implicación *i)* entonces *ii)* es cierta incluso para posets que no son split, y *ii)* implica *iii)* es consecuencia del Teorema 5.1.5.

Sea \mathbf{P} un poset split que satisface *iii)*. Por el Teorema 5.1.5, \mathbf{P} es *CPT*. Asumamos, con el objetivo de llegar a una contradicción, que \mathbf{P} no es fuertemente-*CPT*. Sea \mathbf{P}' un poset no *CPT* asociado a \mathbf{P} . Por el Teorema 5.1.5, \mathbf{P}' contiene al poset $\widehat{\mathbf{F}}_0$ como subposet; luego, por el Lema 5.1.7, \mathbf{P} contiene a $\widehat{\mathbf{F}}_0$ o $\widehat{\mathbf{F}}_0^d$ como subposet, lo que contradice nuestra asunción. \square

Observar que, por el Lema 5.1.7, si un poset \mathbf{P} tiene a $\widehat{\mathbf{F}}_0$ como subposet, entonces todo poset asociado a \mathbf{P} tiene a $\widehat{\mathbf{F}}_0$ o a $\widehat{\mathbf{F}}_0^d$ como subposet. Nos interesaría mejorar ese resultado caracterizando los posets tales que si ellos tienen a $\widehat{\mathbf{F}}_0$ como subposet entonces cada uno de sus asociados tienen a $\widehat{\mathbf{F}}_0$ como subposet. El siguiente resultado, que será utilizado en la próxima sección en la caracterización de los grafos split que son *CPT*, muestra ejemplos de tales posets.

Lema 5.1.9. *Sea \mathbf{P} alguno de los posets \mathbf{R} , \mathbf{T} , \mathbf{U} o \mathbf{V} descritos en la Figura 5.2. Si \mathbf{P}' es un poset asociado a \mathbf{P} entonces \mathbf{P}' tiene a $\widehat{\mathbf{F}}_0$ como subposet.*

Demostración: Podemos ver que el grafo de comparabilidad de \mathbf{P} (se describe en la Figura 5.1 para los distintos \mathbf{P}) tiene una única clase de implicancia. Luego, por la Proposición 2.3.2, \mathbf{P} tiene a su dual como único poset asociado. Por lo tanto, podemos asumir $\mathbf{P}' = \mathbf{P}^d$.

Por otra parte, es fácil ver en la Figura 5.2 que \mathbf{P} tiene a $\widehat{\mathbf{F}}_0$ y a $\widehat{\mathbf{F}}_0^d$ como subposets. Luego, \mathbf{P}^d tiene a $\widehat{\mathbf{F}}_0$ como subposet y la demostración está completa. \square

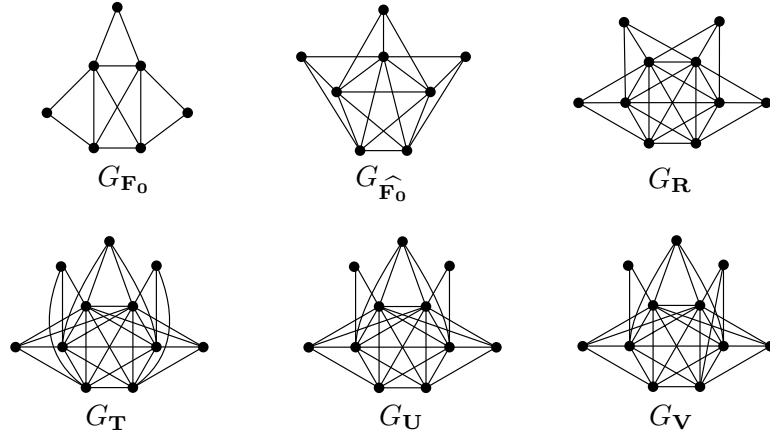


Figura 5.3: Los grafos de comparabilidad de los posets \mathbf{F}_0 , $\widehat{\mathbf{F}_0}$, \mathbf{R} y \mathbf{T} , \mathbf{U} , \mathbf{V} en la Figura 5.2.

5.2. Grafos *CPT* Split

Los grafos de comparabilidad de los posets *CPT* son llamados **grafos *CPT*** o **grafos de contención de caminos en un árbol**.

Claramente, un grafo $G = (V, E)$ es *CPT* si y solo si existe una orientación transitiva \vec{E} de G , un árbol T y una familia $(W_v)_{v \in V}$ de caminos de T satisfaciendo que

$$\vec{uv} \in \vec{E} \Leftrightarrow W_u \subset W_v.$$

Los **grafos fuertemente-*CPT*** y **dualmente-*CPT*** son los grafos de comparabilidad de los posets fuertemente-*CPT* y dualmente-*CPT*, respectivamente.

No todo grafo split es de comparabilidad. Los grafos split de comparabilidad están caracterizados por subgrafos prohibidos (ver Figura 5.1). Por otra parte, no todo grafo split de comparabilidad admite un modelo *CI*. Por comparación de la familia de subgrafos inducidos prohibidos para grafos split y para grafos *CI*, puede establecerse que un grafo split es *CI* si y solo si no contiene a $G_{\mathbf{F}_0}$ en la Figura 5.3 como subgrafo inducido.

En el siguiente Teorema presentamos una caracterización de los grafos split que son

dualmente-*CPT* y probamos que son exactamente los grafos split que son fuertemente-*CPT*.

Teorema 5.2.1. *Sea G un grafo de comparabilidad split. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) G es fuertemente- CPT .*
- ii) G es dualmente- CPT .*
- iii) G no contiene a $G_{\widehat{\mathbf{F}_0}}$ en la Figura 5.3 como subgrafo inducido.*

Demostración: La equivalencia de *i)* y *ii)* es consecuencia directa del Teorema 5.1.8. Para probar *ii)* implica *iii)*, sea G un grafo dualmente-*CPT*. Entonces existe un poset \mathbf{P} dualmente-*CPT* tal que $G = G_{\mathbf{P}}$. Asumamos, para llegar a una contradicción, que G tiene como subgrafo inducido a $G_{\widehat{\mathbf{F}_0}}$. Entonces \mathbf{P} tiene un subposet \mathbf{P}' asociado a $\widehat{\mathbf{F}_0}$. Por el Lema 5.1.7, debe ser $\mathbf{P}' = \widehat{\mathbf{F}_0}$ o $\mathbf{P}' = \widehat{\mathbf{F}_0}^d$. En cualquier caso se contradice el Teorema 5.1.8, pues \mathbf{P} es dualmente-*CPT*.

Para demostrar *iii)* implica *i)*, con el objetivo de llegar a una contradicción, supongamos que G no es fuertemente-*CPT*. Entonces existe un poset \mathbf{P} que no es *CPT* tal que $G = G_{\mathbf{P}}$. Por el Teorema 5.1.8, \mathbf{P} tiene a $\widehat{\mathbf{F}_0}$ o a $\widehat{\mathbf{F}_0}^d$ como subposet. Luego $G_{\mathbf{P}}$ tiene a $G_{\widehat{\mathbf{F}_0}}$ como subgrafo, contradiciendo *iii)*. \square

Notar que aunque el Teorema 5.1.5 provee una caracterización por subposets prohibidos de los posets split que son *CPT*, la misma no es suficiente para obtener una caracterización por subgrafos prohibidos de los grafos split que son *CPT*. El grafo $G_{\widehat{\mathbf{F}_0}}$ es un grafo split *CPT* aunque el poset $\widehat{\mathbf{F}_0}$ es un subposet prohibido para los posets split *CPT*.

En otras palabras, para que $G_{\mathbf{P}}$ sea un grafo no *CPT* es necesario que \mathbf{P} sea un poset no *CPT* y que además todo poset \mathbf{P}' asociado a \mathbf{P} también sea un poset no *CPT*.

El Lema 5.1.9 implica que los grafos $G_{\mathbf{R}}$, $G_{\mathbf{T}}$, $G_{\mathbf{U}}$ y $G_{\mathbf{V}}$ descritos en la Figura 5.3 no son grafos *CPT*. En particular son subgrafos inducidos prohibidos de la clase de grafos split *CPT*. Conjeturamos que son los únicos.

Conjetura 5.2.2. *Un grafo split G es *CPT* si y solamente si G no tiene a $G_{\mathbf{R}}$, ni a $G_{\mathbf{T}}$, ni a $G_{\mathbf{U}}$, ni a $G_{\mathbf{V}}$ en la figura 5.3 como subgrafo inducido.*

Capítulo 6

Posets y grafos *CPT* en la clase *k-tree*

En este capítulo estudiamos a los posets *k-tree* que admiten un modelo por contención de caminos en un árbol. Mostramos que en dicha clase la condición necesaria para ser poset *CPT*, el Lema 4.1.2, es también suficiente. En la Sección 6.1, consideraremos el caso de los posets 2-tree. Luego en la Sección 6.2, generalizaremos los resultados a posets *k-tree* para un entero positivo k cualquiera. El objetivo de introducir una primera sección atendiendo el caso particular de los posets 2-tree es facilitar el entendimiento del caso general. El lector que así lo prefiriera puede comenzar directamente con la Sección 6.2. En esta sección, obtenemos también caracterizaciones por subposets prohibidos de las clases de posets *k-tree CPT*, *k-tree fuertemente-CPT* y *k-tree dualmente-CPT*. En la última sección presentamos sendas caracterizaciones por subgrafos inducidos prohibidos de las clases de grafos *k-tree fuertemente-CPT* y *k-tree dualmente-CPT*.

Dado un entero positivo k , un grafo G es ***k-tree*** si puede ser construido de manera recursiva comenzando con un completo formado por k vértices y luego, en cada paso, adicionando un vértice con exactamente k vecinos los cuales inducen un completo [5].

Observar que los grafos 1-tree son los árboles, es decir los grafos conexos sin ciclos. Los grafos k -tree son grafos cordales. Si G es un grafo k -tree que no se reduce a un completo de tamaño k , entonces todos los cliques de G tienen tamaño $k + 1$ y sus conjuntos separadores minimales son completos de tamaño k [5].

Definición 6.0.3. *Un poset \mathbf{P} es k -tree si su grafo de comparabilidad $G_{\mathbf{P}}$ es un grafo k -tree.*

Observación 6.0.4. *Si \mathbf{P} es k -tree entonces $k \leq h(\mathbf{P}) \leq k+1$. Más aun, si $h(\mathbf{P}) = k$, entonces \mathbf{P} es una cadena.*

6.1. Posets 2-tree

Así como los grafos 2-tree pueden ser construidos mediante un proceso recursivo, los posets 2-tree también se construyen usando un proceso recursivo, el cual describimos a continuación.

Proceso constructivo 6.1.1. *Sea $\mathbf{P}' = (X', P')$ un poset. Dados dos elementos c y a de X' , tales que $c < a$ en \mathbf{P}' y tales que satisfacen una y solo una de las siguientes condiciones*

$$(i) X' = \{a, c\},$$

$$(m) X' \neq \{a, c\} \text{ y } D_{\mathbf{P}'}(c) = \emptyset \text{ y } U_{\mathbf{P}'}(a) = \emptyset,$$

$$(u) X' \neq \{a, c\} \text{ y } D_{\mathbf{P}'}(a) = \{c\},$$

$$(d) X' \neq \{a, c\} \text{ y } U_{\mathbf{P}'}(c) = \{a\};$$

se define un nuevo poset $\mathbf{P} = (X, P)$ en la forma

$$X = X' \cup \{z\} \text{ con } z \notin X';$$

y P la relación que se escribe de la siguiente manera, dependiendo de la situación de los elementos a y c , a saber:

$$P = \begin{cases} P' \cup \{(z, z), (c, z), (a, z)\} & \text{si } (\mathbf{i}) \\ P' \cup \{(z, z), (c, z), (z, a)\} & \text{si } (\mathbf{m}) \\ P' \cup \{(z, z), (c, z), (a, z)\} & \text{si } (\mathbf{u}) \\ P' \cup \{(z, z), (z, a), (z, c)\} & \text{si } (\mathbf{d}) \end{cases}$$

Es fácil ver que P extiende a P' , está bien definida y es una relación reflexiva, anti-simétrica y transitiva, por lo cual (X', P') es subposet de (X, P) .

Lema 6.1.2. *Un poset \mathbf{P} es 2-tree si y solo si \mathbf{P} se obtiene a partir de una cadena de 2 elementos aplicando una cantidad finita de veces el Proceso constructivo 6.1.1.*

Demostración: Si $\mathbf{P} = (X, P)$ es un poset 2-tree, demostraremos por inducción sobre la cantidad de elementos en X que \mathbf{P} se obtiene, a partir de una cadena de 2 elementos, usando el Proceso constructivo 6.1.1.

Si $|X| = 2$ o 3 entonces \mathbf{P} es una cadena de dos o tres elementos, respectivamente, y la prueba es trivial.

Si $|X| > 3$, como $G_{\mathbf{P}}$ es 2-tree existe un vértice $z \in X$ y un clique $\{x, y, u\}$ tal que $N(z) = \{x, y\}$, $u \neq z$ y $G' = G_{\mathbf{P}} - \{z\}$ es 2-tree. Sea $\mathbf{P}' = (X - \{z\}, P(X - \{z\}))$. Es claro que \mathbf{P}' es subposet de \mathbf{P} y $G_{\mathbf{P}'} = G'$, entonces se tiene que \mathbf{P}' se puede construir usando el Proceso constructivo 6.1.1.

Como x, y y u forman una cadena maximal en \mathbf{P} , basta considerar los siguientes casos:

Caso I) Asumimos que $x < u < y$ en \mathbf{P} , entonces $D_{\mathbf{P}'}(x) = \emptyset$ y $U_{\mathbf{P}'}(y) = \emptyset$. Como $N(z) = \{x, y\}$ en $G_{\mathbf{P}}$, z debe ser comparable con x y con y pero no con u , implicando que $x < z < y$ en \mathbf{P} . Por lo tanto, tomando $c = x$ y $a = y$, el poset \mathbf{P} se obtiene a partir \mathbf{P}' , usando el Proceso 6.1.1, agregando z según (\mathbf{m}) .

Caso II) Si $x < y < u$ en \mathbf{P} , ya que z es comparable con x y con y pero no con u , tenemos que $x < y < z$ en \mathbf{P} . Veremos que $D_{\mathbf{P}'}(y) = \{x\}$. Con el objetivo de llegar a una contradicción, supongamos que existe un elemento $h \neq x$ en $D_{\mathbf{P}'}(y)$. Si h fuese comparable con x se tendría una cadena de longitud 4 formada por $\{h, x, y, z\}$; luego x y h deben ser incomparables, pero entonces en $G_{\mathbf{P}}$ hay un ciclo inducido por los vértices $\{u, h, z, x\}$, lo cual contradice el hecho que $G_{\mathbf{P}}$ es cordal. Luego, tomando $c = x$ y $a = y$, se obtiene el poset \mathbf{P} a partir de \mathbf{P}' , usando el Proceso 6.1.1, agregando z según **(u)**.

Caso III) Si $u < x < y$ en \mathbf{P} , entonces, de forma análoga al caso anterior, el poset \mathbf{P} se obtiene a partir de \mathbf{P}' , usando el Proceso 6.1.1, agregando z según **(d)**.

Para probar la implicación recíproca basta observar que en cada paso del proceso 6.1.1 el vértice z que se agrega es comparable solamente con los elementos a y c , los cuales a su vez son comparables. Luego en el grafo de comparabilidad $G_{\mathbf{P}}$ el elemento z es adyacente a los vértices a y c , los cuales forman completo de tamaño 2. \square

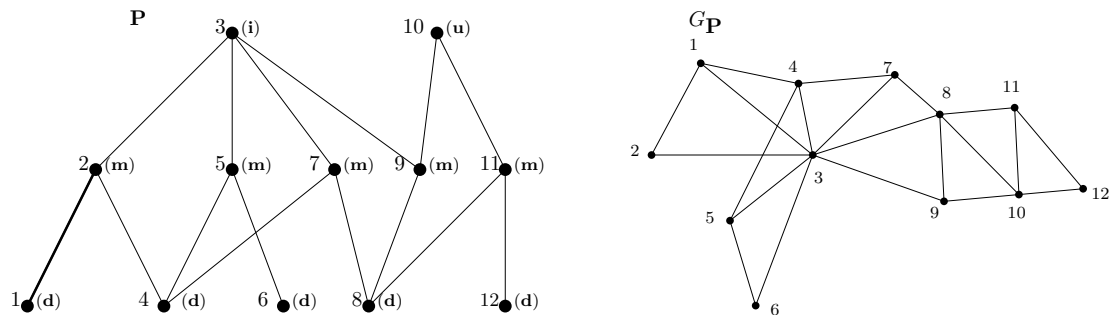


Figura 6.1: Diagrama de Hasse de un poset construido de acuerdo al Proceso constructivo 6.1.1. Los vértices están enumerados siguiendo el orden en que aparecen en el proceso iniciado por la cadena cuyo conjunto de elementos es $\{1, 2\}$. Además, están etiquetados con **(i)**, **(m)**, **(d)** o **(u)** según cómo hayan sido agregados.

En la Figura 6.1 podemos ver el diagrama de Hasse de un poset construido de acuerdo al Proceso 6.1.1, cuyo conjunto de elementos es $\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 12\}$. Por el Lema

6.1.2, dicho poset es 2-tree. En la misma Figura se observa su grafo de comparabilidad. Resulta del Lema anterior que los vértices de un poset 2-tree $\mathbf{P} = (X, P)$ pueden ser totalmente ordenados z_1, z_2, \dots, z_n y etiquetados con (\mathbf{i}) , (\mathbf{m}) , (\mathbf{u}) o (\mathbf{d}) , según el proceso constructivo descrito anteriormente; siendo $z_1 < z_2$ los elementos de la cadena inicial y z_n el último elemento agregado. Los vértices z_1 y z_2 se etiquetan con (\mathbf{d}) y (\mathbf{m}) , respectivamente.

Definición 6.1.3. *Un orden de los elementos de un poset 2-tree \mathbf{P} obtenido según el Proceso Constructivo 6.1.1 será llamado **orden constructivo** de \mathbf{P} .*

Los lemas que demostramos a continuación son necesarios para probar el resultado principal de esta sección, el Teorema 6.1.8. En este teorema probamos que la condición necesaria para ser poset *CPT* del Lema 4.1.2 es también suficiente para la clase de posets 2-tree.

Lema 6.1.4. *Si z_1, z_2, \dots, z_n es un orden constructivo de \mathbf{P} , entonces*

- (i) z_3 es el único elemento con etiqueta (\mathbf{i}) y además $z_1 < z_2 < z_3$ y z_3 es maximal.*
- (ii) Si $j > 3$ entonces un elemento z_j es maximal en \mathbf{P} si y solo tiene etiqueta (\mathbf{u}) .*
- (iii) Un elemento z_j es minimal en \mathbf{P} si y solo si tiene etiqueta (\mathbf{d}) .*
- (iv) Si z_j tiene etiqueta (\mathbf{d}) y $j > 3$, entonces existe un único $i < j$ tal que z_i es maximal en \mathbf{P} .*
- (v) Si z_j tiene etiqueta (\mathbf{m}) y $j > 3$, entonces existe un único $i < j$ tal que z_i es maximal en \mathbf{P} .*

Demostración: Los items (i) , (iv) y (v) son inmediatos a partir de las condiciones del proceso constructivo.

Para probar (ii) observar que si z es un maximal entonces, en el proceso de construcción recursivo, él no pudo ser agregado con etiqueta (\mathbf{m}) o (\mathbf{d}) , ya que en estos casos $U(z) \neq \emptyset$. Por este motivo podemos asegurar que z fue agregado con etiqueta (\mathbf{u}) .

Recíprocamente, si en un paso de la construcción de \mathbf{P} el elemento z es agregado con etiqueta (\mathbf{u}) entonces z forma parte de la cadena $c < a < z$. Luego, por la Observación 6.0.4, $U(z) = \emptyset$. De manera similar se prueba (iii). \square

A continuación vamos a demostrar que si \mathbf{P} es un poset 2-tree entonces puede ser construido de forma tal que si z_r es el último maximal en ser agregado, entonces todo elemento que se agregó después que z_r pertenece a su conjunto descendente.

Lema 6.1.5. *Sea $\mathbf{P} = (X, P)$ un poset 2-tree. Existe un orden constructivo z_1, z_2, \dots, z_n de $\mathbf{P} = (X, P)$ tal que si $r = \max\{i : z_i \text{ es maximal en } \mathbf{P}\}$ entonces $z_i \in D[z_r]$ para todo $i \geq r$.*

Demostración: La demostración será por inducción sobre la cantidad de elementos de \mathbf{P} . Es fácil ver que el Lema es cierto si $|X| \leq 3$

Sea z_1, z_2, \dots, z_n un orden constructivo con $n > 3$. Si z_n es maximal el resultado es trivial.

Supongamos que z_n no es un elemento maximal. Llamemos a y c a los dos únicos elementos de \mathbf{P} comparables con z_n .

Como $\mathbf{P} - \{z_n\}$ es un poset 2-tree, por hipótesis inductiva existe un orden constructivo $z'_1, z'_2, \dots, z'_{n-1}$ de $\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \{z_n\}$ tal que si z'_r es el maximal que fue agregado último entonces $z'_i \in D(z'_r)$ para todo $i > r$. Observar que el conjunto ascendente y el conjunto descendente de cada elemento es independiente del orden constructivo. Indicaremos, respectivamente, mediante $D_{\mathbf{P}'}(x)$ y $U_{\mathbf{P}'}(x)$ a los conjuntos descendente y ascendente del elemento x en $\mathbf{P} - \{z_n\}$. Sean j_a y j_c tales que $a = z'_{j_a}$ y $c = z'_{j_c}$.

Si $z_n \in D(z'_r)$ basta agregar z_n en un último paso y el Lema es cierto.

Si $z_n \notin D(z'_r)$ y no es ni maximal ni minimal de \mathbf{P} entonces debe ocurrir que $D(c) = U(a) = \emptyset$, luego $D_{\mathbf{P}'}(z'_{j_c}) = U_{\mathbf{P}'}(z'_{j_a}) = \emptyset$. Dado que $z_n \notin D(z'_r)$ y $z_n \in D(z'_{j_a})$, debe ser $j_a < r$. Por otra parte, si $j_c > r$ entonces $j_c > 3$ y $z'_{j_c} < z'_r$; luego, por Lema 6.1.4

(iv), debe ser $z'_r = z'_{j_a}$, lo cual contradice la asunción $z_n \notin D(z'_r)$ ya que $z_n \in D(z'_{j_a})$. Resulta entonces que $j_c < r$, y así z_n puede ser agregado inmediatamente antes que z'_r , obteniendo un orden constructivo de \mathbf{P} como se deseaba.

Finalmente, si $z_n \notin D(z'_r)$ y z_n es minimal, es decir tiene etiqueta (\mathbf{d}) , entonces $z_n < c < a$ en \mathbf{P} y $U(c) = \{a\}$. Por lo tanto $z'_{j_c} < z'_{j_a}$ y $U_{\mathbf{P}'}(z'_{j_c}) = \{z'_{j_a}\}$. Como $z_n \notin D(z'_r)$, pero a la vez $z_n \in D(z'_{j_a})$, debe ser $j_a < r$ y además $j_c < r$. En efecto, si $j_c > r$ entonces $z'_{j_c} < z'_r$, y por ende $z_n \in D(z'_r)$. Por lo tanto z_n puede ser agregado inmediatamente antes que z'_r , obteniendo un orden constructivo de \mathbf{P} que satisface lo pedido. \square

Definición 6.1.6. *Un orden de los elementos de un poset \mathbf{P} en las condiciones del Lema 6.1.5 será llamado **buen orden constructivo** de \mathbf{P} .*

Lema 6.1.7. *Sea $z_1, z_2, \dots, z_{r-1}, z_r, z_{r+1}, \dots, z_n$, con $r \geq 3$, un buen orden constructivo de un poset 2-tree \mathbf{P} , donde z_r satisface las condiciones del Lema anterior. Entonces,*

- $\{z_1, z_2, \dots, z_{r-1}\} \cap D(z_r) = \{z_{j_1}, z_{j_2}\}$, con $z_{j_1} < z_{j_2} < z_r$ en \mathbf{P} .
- Si $z_h \in \{z_1, z_2, \dots, z_{r-1}\} - \{z_{j_1}, z_{j_2}\}$ y $j > r$ entonces $z_h \parallel z_j$.

Demostración: El primer item es trivial, los elementos z_{j_1} y z_{j_2} son los elementos a y c en el caso (\mathbf{u}) del proceso constructivo.

Para probar el segundo item, y con el objetivo de llegar a una contradicción, asumimos que $z_h \perp z_j$ en \mathbf{P} .

Si z_h es maximal en \mathbf{P} ya que z_j debe ser comparable con z_h , z_j debe tener etiqueta (\mathbf{m}) o (\mathbf{d}) . Entonces los maximales z_h y z_r son comparables con z_j siendo $h < j$ y $r < j$. Luego, ya que $j > 3$, por la parte (v) o (iv) del Lema 6.1.4, respectivamente tenemos una contradicción.

Si z_h tiene etiqueta (\mathbf{m}) , como z_j se supone comparable con z_h y no puede ser maximal por definición de z_r , entonces z_j debe ser un elemento minimal de \mathbf{P} . Si asumimos que $h > 3$, por (v) del Lema 6.1.4 existe un único $k < h$ tal que $z_h < z_k$ y z_k es maximal. Entonces $z_j < z_h < z_k$ en \mathbf{P} , lo que contradice (iv) del Lema 6.1.4. Si $h \leq 3$, se cumple que $h = 2$ y $z_2 < z_3$ en \mathbf{P} ; si $z_3 \neq z_r$, esto último implica que $z_j < z_3$ lo que contradice (iv) del Lema 6.1.4. Y si $z_3 = z_r$ entonces $z_h = z_2 \in D(z_r)$, lo que contradice nuestra asunción sobre el elemento z_h .

Si z_h es minimal de \mathbf{P} , se tendría entonces que $z_h < z_j < z_r$. Esto último es una contradicción. Por lo tanto, concluimos que $z_h \parallel z_j$ en \mathbf{P} .

□

Teorema 6.1.8. *Sea $\mathbf{P} = (X, P)$ un poset 2-tree. \mathbf{P} admite un modelo CPT si y solo si $D[z]$ es CI para todo z maximal de \mathbf{P} .*

Demostración: La implicación directa vale en general como lo demuestra el Lema 4.1.2.

Para demostrar la proposición recíproca, primero asumamos que \mathbf{P} no tiene falsos gemelos. Probaremos que si tenemos un poset $\mathbf{P} = (X, P)$ sin falsos gemelos y 2-tree tal que $\mathbf{P}(D[z])$ es CI para todo z elemento maximal de \mathbf{P} , entonces \mathbf{P} admite un modelo CPT en el cual ningún camino se reduce a un vértice y ningún par de caminos tiene un extremo coincidente. Procederemos por inducción sobre $|X|$.

Si $|X| = 2$ o 3 entonces \mathbf{P} es una cadena y la demostración es trivial.

Sea $|X| = n > 3$. Por el Lema 6.1.5 existe un buen orden constructivo de \mathbf{P} $z_1, z_2, \dots, z_r, z_{r+1}, \dots, z_n$. Sea z_r el maximal que fue agregado último en este proceso constructivo. Luego $z_i \in D[z_r]$ para todo $i \geq r + 1$.

Llamemos \mathbf{P}' al subposet $\mathbf{P}(X')$ donde $X' = \{z_1, z_2, \dots, z_{r-1}\}$. Como \mathbf{P}' es 2-tree, entonces, por hipótesis inductiva, existe un modelo CPT $R_{\mathbf{P}'} = (W'_{z_i})_{z_i \in X'}$ sobre un

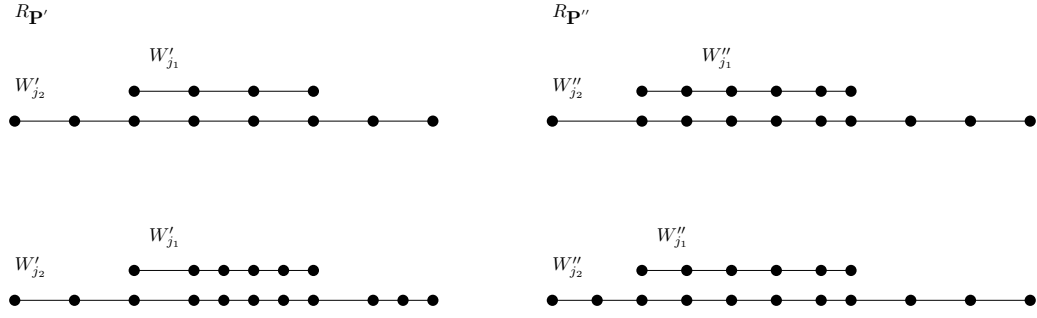


Figura 6.2: En la parte superior, a derecha e izquierda, vemos a los caminos que representan los elementos j_1 y j_2 en los modelos $R_{\mathbf{P}'}$ y $R_{\mathbf{P}''}$, respectivamente. En la parte inferior, vemos el resultado de subdividir aristas en los modelos $R_{\mathbf{P}'}$ y $R_{\mathbf{P}''}$ para lograr que en ambos modelos: W_{j_1}' y W_{j_1}'' tengan la misma longitud, W_{j_2}' y W_{j_2}'' tengan igual longitud, y la posición relativa de W_{j_1}' dentro de W_{j_2}' sea igual a la posición relativa de W_{j_1}'' dentro de W_{j_2}'' .

árbol huésped T' , en el cual ningún camino se reduce a un punto y ningún par de caminos tiene un extremo coincidente.

Por otro lado, sea $X'' = D_{\mathbf{P}}[z_r]$. Por hipótesis $\mathbf{P}'' = \mathbf{P}(X'')$ es *CI*. Luego es posible obtener un modelo *CI* $R_{\mathbf{P}''} = (W_{z_i}'')_{z_i \in D[z_r]}$, donde ningún camino se reduce a un vértice y ningún par de caminos tiene un extremo coincidente [6].

En lo que sigue, acomodaremos los modelos $R_{\mathbf{P}'}$ y $R_{\mathbf{P}''}$ de manera tal que su superposición nos permita obtener un modelo *CPT* de \mathbf{P} .

Por el primer ítem del Lema 6.1.7, se tiene que $X' \cap X'' = \{z_{j_1}, z_{j_2}\}$ con $j_1, j_2 < r$ y $z_{j_1} < z_{j_2} < z_r$ en \mathbf{P} . Luego los vértices z_{j_i} están representados tanto en el modelo $R_{\mathbf{P}'}$ como en $R_{\mathbf{P}''}$.

En ambos modelos cada camino tienen al menos dos vértices, por lo que es posible subdividir una arista para aumentar la longitud de un camino cualquiera. Es claro que subdividiendo aristas donde sea necesario, en el modelo $R_{\mathbf{P}'}$ o en el modelo de $R_{\mathbf{P}''}$, se puede lograr que W_{j_1}' y W_{j_1}'' tengan la misma longitud, que W_{j_2}' y W_{j_2}'' tengan igual longitud, y que la posición relativa de W_{j_1}' dentro de W_{j_2}' sea igual a la posición relativa de W_{j_1}'' dentro de W_{j_2}'' (ver Figura 6.2).

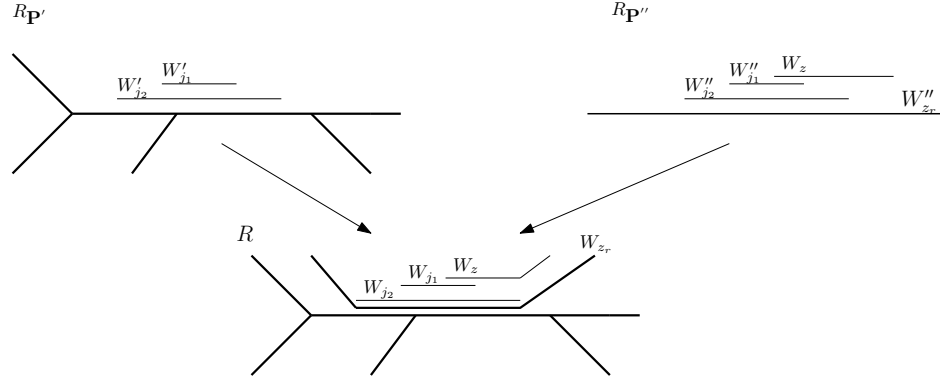


Figura 6.3: Modelo R que resulta de superponer convenientemente los modelos $R_{\mathbf{P}'}$ y $R_{\mathbf{P}''}$.

Sea R el modelo por contención de caminos que se obtiene uniendo los modelos R' y R'' , de forma que $W'_{z_{j_1}}$ se identifica con $W''_{z_{j_1}}$ y $W'_{z_{j_2}}$ se identifica con $W''_{z_{j_2}}$. Y la parte de W''_{z_r} que no está cubierta por $W''_{z_{j_2}}$ se representa en T' agregando 2 nuevas ramas en cada uno de los extremos. Luego, $W''_{z_r} \cap T' = W'_{j_2} = W''_{j_2}$, como se muestra en la Figura 6.3.

En el modelo R llamamos W_z al camino correspondiente al elemento z . Es claro que $W_{z_i} = W'_{z_i}$ si $i < r$ y $W_{z_i} = W''_{z_i}$ si $i \geq r$.

A continuación probaremos que R es un modelo CPT de \mathbf{P} .

Primero veamos que si $z_i < z_j$ en \mathbf{P} entonces $W_{z_i} \subset W_{z_j}$.

Si $z_i, z_j \in X'$ o $z_i, z_j \in X''$ entonces $z_i < z_j$ en \mathbf{P}' o \mathbf{P}'' , respectivamente, lo cual implica que $W'_{z_i} \subset W'_{z_j}$ o $W''_{z_i} \subset W''_{z_j}$. Por lo tanto $W_{z_i} \subset W_{z_j}$.

Si $z_i \in X'$ y $z_j \in X''$, entonces $z_i < z_j < z_r$ en \mathbf{P} ; luego $z_i \in X' \cap X'' = \{z_{j_1}, z_{j_2}\}$. Por lo tanto, $z_i < z_j$ en \mathbf{P}'' y como vimos previamente se tiene que $W_{z_i} \subset W_{z_j}$.

Si $z_i \in X''$ y $z_j \in X'$, entonces probaremos que $z_j \in X'' \cap X'$. En efecto, si $z_j \notin X''$ entonces por el Lema 6.1.7 se tiene que $z_i \parallel z_j$ lo cual contradice nuestra asunción.

Por lo tanto $z_j \in X' \cap X''$, y así se tiene que $z_i < z_j$ en \mathbf{P}'' .

Ahora resta probar que si W_{z_i} y W_{z_j} son caminos pertenecientes a R tales que $W_{z_i} \subset W_{z_j}$ entonces $z_i < z_j$ en \mathbf{P} .

Es claro que si ambos caminos pertenecen a $R_{\mathbf{P}'}$ entonces $z_i < z_j$ en \mathbf{P}' , lo que implica que $z_i < z_j$ en \mathbf{P} . Análogamente se prueba que si ambos caminos pertenecen a $R_{\mathbf{P}''}$ entonces $z_i < z_j$ en \mathbf{P} .

Si $W_{z_i} \in R_{\mathbf{P}'}$, $W_{z_j} \in R_{\mathbf{P}''}$ y $W_{z_i} \subset W_{z_j}$, como también sabemos que $W_{z_j} \subset W_{z_r}$, se concluye que $W_{z_i} \subset W_{z_r}$. Esto a su vez implica que $W_{z_i} \subseteq W_{z_{j_2}}$. Estos dos últimos conjuntos pertenecen a $R_{\mathbf{P}'}$, entonces la inclusión implica $z_i \leq z_{j_2}$. Además $W_{z_{j_2}}$ y W_r están en $R_{\mathbf{P}''}$, por lo que $W_{z_{j_2}} \subset W_{z_r}$, entonces $z_{j_2} < z_r$. Por transitividad $z_i < z_r$. Por lo tanto $z_i \in X''$ y $W_{z_i} \in R_{\mathbf{P}''}$, además sabemos que $W_{z_j} \subset R_{\mathbf{P}''}$. Por ende $W_{z_i} \subset W_{z_j}$ implica que $z_i < z_j$.

Si $W_{z_i} \in R_{\mathbf{P}''}$ y $W_{z_j} \in R_{\mathbf{P}'}$, consideramos dos casos: $z_j \in X' \cap X''$ o no.

Si $z_j \in X' \cap X''$, entonces $W_{z_j} \in R_{\mathbf{P}''}$. Así, se tiene que $z_i < z_j$ en \mathbf{P}'' .

Consideremos el caso $z_j \notin X' \cap X''$, si $z_i \in X'$, entonces W_{z_i} también está en $R_{\mathbf{P}'}$. Entonces $W_{z_i} \subset W_{z_j}$ en $R_{\mathbf{P}'}$ implica $z_i < z_j$. Si $z_i \notin X'$ entonces $z_i = z_r$ o $i > r$. Si $z_i = z_r$, es absurdo porque todos los vértices de W_{z_r} no están en el árbol huésped de $R_{\mathbf{P}'}$ (lo más que llegan a compartir es $W_{z_{j_2}}$).

Si $z_i \neq z_r$, con $i > r$, $W_{z_i} \subseteq W_{z_j}$ implica $W_{z_i} \subseteq W_{z_{j_2}}$. Entonces $W_{z_i} \subset W_{z_{j_2}} \subset W_{z_r}$ en $R_{\mathbf{P}''}$ implica $z_i < z_{j_2} < z_r$. Entonces z_i es un minimal con etiqueta **(d)**. Por lo tanto, cuando z_i fue agregado solo miraba a z_{j_2} y z_r y, por etiqueta **(d)**, $U(z_{j_2}) = z_r$ (en ese estadio de la construcción). Entonces, en ese momento z_{j_2} se relacionaba con un único maximal que es z_r . Si z_r es el único maximal, entonces $X'' = X$, y $W_{z_i}, W_{z_j} \in R_{\mathbf{P}''}$. Si z_r no fuera el único maximal, por construcción, al momento de ser agregado, z_{j_1} y z_{j_2} estaba en una cadena junto a otro maximal z_k . Eso es absurdo porque contradice la etiqueta **(d)** de z_i .

Concluimos que R es un modelo *CPT* del poset \mathbf{P} en el cual todos los caminos tienen longitud mayor o igual a uno.

Podría ocurrir que existan caminos que tengan un extremo coincidente en R . Como asumimos que \mathbf{P} no tiene falsos gemelos, por Lema 4.1.13 podemos asegurar que existe

un modelo *CPT* de \mathbf{P} en el cual ningún par de caminos tiene un extremo coincidente. Si \mathbf{P} tiene falsos gemelos, por cada clase de equivalencia de falsos gemelos podemos dejar un representante. Así, por lo demostrado previamente, tenemos un nuevo poset *CPT* \mathbf{P}_1 , el cual es 2-tree y no tiene falsos gemelos. Luego, por la Observación 4.1.6, \mathbf{P} es *CPT*. \square

6.2. Posets *k*-tree

En esta sección generalizaremos los resultados demostrados para los posets 2-tree. Primero veremos, que así como los grafos *k*-tree se construyen recursivamente, los posets *k*-tree también admiten una construcción recursiva.

Proceso constructivo 6.2.1. *Sea $\mathbf{P}' = (X', P')$ un poset y $c < a$ elementos tales que se satisface una y solo una de las siguientes condiciones:*

(i) \mathbf{P}' es un cadena de k elementos y $X' = D_{\mathbf{P}'}[a]$.

(m) $X' \neq D_{\mathbf{P}'}[a]$, $U_{\mathbf{P}'}[a]$ y $D_{\mathbf{P}'}[c]$ inducen una cadena y $|U[a]| + |D[c]| = k$.

(u) $X' \neq D_{\mathbf{P}'}[a]$, y además $D_{\mathbf{P}'}(c) = \emptyset$, $D_{\mathbf{P}'}[a]$ induce una cadena y $|D_{\mathbf{P}'}[a]| = k$.

.

(d) $X' \neq U_{\mathbf{P}'}[c]$, y además $U_{\mathbf{P}'}(a) = \emptyset$, $U_{\mathbf{P}'}[c]$ induce una cadena y $|U_{\mathbf{P}'}[c]| = k$.

se define un nuevo poset $\mathbf{P} = (X, P)$ en la forma

$$X = X' \cup \{z\} \text{ con } z \notin X';$$

y P la relación que se escribe de la siguiente manera, dependiendo de la situación de los elementos a y c , a saber:

$$P = \begin{cases} P' \cup \{(z, z)\} \cup \{(x, z) : x \in X'\} & \text{si } (\mathbf{i}) \\ P' \cup \{(z, z)\} \cup \{(x, z) : x \in D_{\mathbf{P}'}[c]\} \cup \{(z, x) : x \in U_{\mathbf{P}'}[a]\} & \text{si } (\mathbf{m}) \\ P' \cup \{(z, z)\} \cup \{(x, z) : x \in D_{\mathbf{P}'}[a]\} & \text{si } (\mathbf{u}) \\ P' \cup \{(z, z)\} \cup \{(z, x) : x \in U_{\mathbf{P}'}[c]\} & \text{si } (\mathbf{d}) \end{cases}$$

Es fácil ver que P está bien definida y es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, por lo que (X', P') es subposet de (X, P) .

Lema 6.2.2. *Un poset \mathbf{P} es k -tree si y solo si \mathbf{P} puede obtenerse a partir de una cadena de k elementos aplicando una cantidad finita de veces el Proceso constructivo 6.2.1.*

Demostración: Sea $\mathbf{P} = (X, P)$ un poset k -tree. Demostraremos por inducción sobre $|X|$ que \mathbf{P} puede ser construido usando el Proceso constructivo 6.2.1.

Si $|X| = k$ o $k + 1$ el grafo $G_{\mathbf{P}}$ es completo y entonces es k -tree; luego \mathbf{P} se puede construir usando el Proceso constructivo 6.2.1, pues es una cadena de k o $k + 1$ elementos, respectivamente.

Si $|X| > k + 1$, como $G_{\mathbf{P}}$ es k -tree, existe un vértice $z \in X$ y un clique $\{z_1, z_2, \dots, z_k, u\}$ tal que $N(z) = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$, $z \neq u$ y $G' = G_{\mathbf{P}} - \{z\}$ es k -tree. Si $\mathbf{P}' = (X - \{z\}, P(X - \{z\}))$, entonces \mathbf{P}' se obtiene usando el proceso 6.2.1 y $G_{\mathbf{P}'} = G'$. Para demostrar que \mathbf{P} puede ser construido usando el proceso 6.2.1 basta considerar los siguientes tres casos:

Caso I) Si u es maximal en \mathbf{P}' , entonces él es último en la cadena inducida por $\{z_1, z_2, \dots, z_k, u\}$. Como z es comparable con z_1, z_2, \dots, z_k pero no con u , entonces debe ser $z_i < z$ en \mathbf{P} para $1 \leq i \leq k$. Esto implica que z es maximal en \mathbf{P} . Sea $a \in \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ tal que $a < u$ y sea c el primer elemento de la cadena inducida por $D_{\mathbf{P}'}[a]$. En lo que sigue demostraremos que $D_{\mathbf{P}'}[a]$ induce una cadena y $|D_{\mathbf{P}'}[a]| = k$. Para demostrar que $D_{\mathbf{P}'}[a]$ induce una cadena, asumamos lo contrario. Luego debe

existir elementos h y z_{j_0} en $D_{\mathbf{P}'}(a)$ tales que $h \parallel z_{j_0}$, pero entonces en $G_{\mathbf{P}}$ hay un ciclo inducido por el conjunto de vértices $\{u, z, h, z_{j_0}\}$, lo cual contradice el hecho que $G_{\mathbf{P}}$ es cordal. Si $|D_{\mathbf{P}'}[a]| > k$, entonces $|D_{\mathbf{P}'}[u]| > k + 1$, luego en \mathbf{P}' hay una cadena de longitud $k + 2$ lo que contradice que \mathbf{P}' es k -tree. Así podemos afirmar que $|D_{\mathbf{P}'}[a]| = k$ y que $D_{\mathbf{P}'}[a]$ induce una cadena. Luego a y c satisfacen la condición **(u)** del Proceso constructivo 6.2.1. Es decir, \mathbf{P} se obtiene a partir \mathbf{P}' agregando z según **(u)**.

Caso II) Si u es minimal en \mathbf{P} la demostración es análoga al **Caso I)**, resultando que z se agrega usando **(d)**.

Caso III) Finalmente, supongamos que existen $a, c \in \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ tales que $c < u < a$ en \mathbf{P}' . Probaremos que z puede agregarse usando **(m)**.

Como z es comparable con c y a pero no con u , se deduce que $c < z < a$ en \mathbf{P} . Los conjuntos $D_{\mathbf{P}'}[c]$ y $U_{\mathbf{P}'}[a]$ inducen una cadena cada uno, pues si alguno de estos conjuntos no indujera una cadena, entonces el elemento z sería comparable en \mathbf{P}' con al menos $k + 1$ elementos, lo cual es absurdo. Luego la cadena inducida por los elementos de $D_{\mathbf{P}'}[c] \cup U_{\mathbf{P}'}[a]$ es de tamaño k . Por lo tanto, el poset \mathbf{P} se obtiene a partir \mathbf{P}' agregando z según **(m)**.

Para probar la implicación recíproca basta observar que el vértice z que se agrega en cada paso es comparable solo con los elementos de una cadena de tamaño k , siendo entonces z adyacente solamente a los k vértices de un completo en el grafo de comparabilidad. \square

Resulta del Lema anterior que los elementos de un poset k -tree $\mathbf{P} = (X, P)$ pueden ser totalmente ordenados z_1, z_2, \dots, z_n y etiquetados con **(i)** **(m)**, **(u)** o **(d)**, según el proceso constructivo descrito anteriormente. Establecemos que z_1, z_2, \dots, z_k son los elementos de la cadena inicial, con $z_1 < z_2 < \dots < z_k$ en \mathbf{P} . Llamamos z_n al último elemento agregado. El elemento z_1 se etiqueta con **(d)** y los restantes elementos de la

cadena inicial z_2, z_3, \dots, z_k son etiquetados con (\mathbf{m}) .

Definición 6.2.3. *Un orden de los elementos de un poset k -tree \mathbf{P} obtenido según el Proceso Constructivo 6.2.1 será llamado **orden constructivo** de \mathbf{P} .*

Los lemas que demostramos a continuación son necesarios para probar el resultado principal de esta sección, el Teorema 6.2.8. En este teorema probamos que la condición necesaria para ser poset CPT , Lema 4.1.2, es también suficiente para la clase de posets k -tree.

Lema 6.2.4. *Si $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_n$ es un orden de los elementos de un poset \mathbf{P} según el proceso de construcción, entonces*

- (i) z_{k+1} es el único elemento maximal de \mathbf{P} con etiqueta (\mathbf{i}) .
- (ii) Si $j > k + 1$ entonces un elemento z_j es maximal de \mathbf{P} si y solo si tiene etiqueta (\mathbf{u}) .
- (iii) Un elemento z_j es minimal de \mathbf{P} si y solo si tiene etiqueta (\mathbf{d}) .
- (iv) Si z_j tiene etiqueta (\mathbf{d}) y $j > 1$, entonces existe un único $i < j$ tal que z_i es maximal y $z_j < z_i$ en \mathbf{P} .
- (v) Si z_j tiene etiqueta (\mathbf{m}) y $j > k + 1$, entonces existe un único $i < j$ tal que z_i es maximal y $z_j < z_i$ en \mathbf{P} .

Demostración:

Los items (i) , (iv) y (v) son inmediatos a partir de las condiciones del proceso constructivo.

Para probar (ii) observar que si z es un maximal entonces, en el proceso de construcción recursivo, él no pudo ser agregado con etiqueta (\mathbf{m}) o (\mathbf{d}) , ya que en estos casos $U(z) \neq \emptyset$. Por este motivo podemos asegurar que z fue agregado con etiqueta (\mathbf{u}) . Recíprocamente, si en un paso de la construcción de \mathbf{P} el elemento z es agregado con etiqueta (\mathbf{u}) entonces z es el eslabon superior de una cadena formada por $k + 1$ elementos. Luego, por la Observación 6.0.4, $U(z) = \emptyset$.

De manera similar se prueba (iii). □

A continuación demostraremos que un poset k -tree \mathbf{P} puede ser construido de forma tal que si z_r es el último maximal en ser agregado, entonces todo elemento agregado después que z_r pertenece a su conjunto descendente.

Lema 6.2.5. *Sea $\mathbf{P} = (X, P)$ un poset k -tree. Existe un orden de construcción, z_1, z_2, \dots, z_n , de $\mathbf{P} = (X, P)$ tal que si $r = \max \{i : z_i \text{ es maximal en } \mathbf{P}\}$, entonces $z_i \in D[z_r]$ para todo $i \geq r$.*

Demostración: La demostración será por inducción sobre la cantidad de vértices de \mathbf{P} . Es fácil ver que el Lema es cierto si $|X| = k$.

Sea z_1, z_2, \dots, z_n un orden de construcción de \mathbf{P} con $n > k$. Si z_n es maximal el resultado es trivial.

Asumamos que z_n no es un elemento maximal entonces, por (i) y (ii) del Lema 6.2.4, tiene etiqueta **(m)** o **(d)**. En cualquier caso z_n es comparable solo con k elementos de X los cuales inducen una cadena en \mathbf{P} .

Sea $z'_1, z'_2, \dots, z'_{n-1}$, un orden constructivo de $\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \{z_n\}$ tal que si z'_r es el maximal que fue agregado último entonces $z'_i \in D(z'_r)$ para todo $i > r$.

Si $z_n \in D(z'_r)$ basta agregar z_n en un último paso y el Lema es cierto.

Si $z_n \notin D(z'_r)$ y tiene etiqueta **(m)** entonces, según el proceso de construcción, existen c y a tales que $c <: z_n <: a$ en \mathbf{P} , los conjuntos $D[c]$ y $U[a]$ inducen una cadena y $|D[c]| + |U[a]| = k$. Sean j_a y j_c los subíndices de a y c en el orden de construcción de \mathbf{P}' , es decir, $a = z'_{j_a}$ y $c = z'_{j_c}$. Debido a que z'_r es el último maximal en \mathbf{P}' se tiene que $j_a < r$. En efecto, si $r = j_a$ estamos en el caso anterior y si $r < j_a$ entonces $z'_{j_a} < z'_r$ en \mathbf{P} lo cual implica que $z_n \in D(z'_r)$ y esto es una contradicción. También se cumple que $j_c < r$. Para demostrarlo, asumamos que $r < j_c$, lo cual implica que $z'_{j_c} < z'_r$ en \mathbf{P} . Si z'_{j_a} es maximal, entonces $z'_{j_c} < z'_{j_a}$ con $j_a < r$, lo que contradice (v) del Lema

6.2.4. Si z'_{j_a} no es maximal, entonces existe un único $j_0 < j_a$ tal que $z'_{j_a} < z'_{j_0}$ y z'_{j_0} es maximal en \mathbf{P} . Como $z_n < z'_{j_a}$ entonces $r \neq j_0$. Además, $z'_{j_c} < z'_{j_a} < z'_{j_0}$ y $z'_{j_c} < z'_r$ lo que contradice (iv) o (v) del Lema 6.2.4.

Concluimos que $j_a < r$ y $j_c < r$, por lo cual z_n puede ser agregado inmediatamente antes que z'_r .

Finalmente, si $z_n \notin D(z'_r)$ y tiene etiqueta (\mathbf{d}) , entonces existen dos elementos c y a tales que $c < a$ en \mathbf{P} , $U(a) = \emptyset$, $U[c]$ induce una cadena, $|U[c]| = k$ y $z_n < c < a$ en \mathbf{P} . Nuevamente tomamos a j_a y j_c como los subíndices de a y c en orden de construcción de \mathbf{P}' . Luego, como a es maximal en \mathbf{P} se tiene que $j_a < r$. Además debe ser $j_c < r$, pues caso contrario se tendría que $c < z'_r$ y así $z_n \in D(z'_r)$ lo cual es una contradicción. Resulta que z_n puede ser agregado inmediatamente antes que z'_r , obteniéndose así un orden constructivo de \mathbf{P} que satisface lo pedido. \square

Definición 6.2.6. *Un orden de los elementos de un poset \mathbf{P} en las condiciones del Lema 6.2.5 será llamado **buen orden constructivo** de \mathbf{P} .*

Lema 6.2.7. *Sea $z_1, z_2, \dots, z_{r-1}, z_r, z_{r+1}, \dots, z_n$ un buen orden constructivo de un poset k -tree \mathbf{P} , donde z_r satisface las condiciones del Lema anterior. Entonces,*

- $\{z_1, z_2, \dots, z_{r-1}\} \cap D(z_r) = \{z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_{k-1}}, z_{j_k}\}$, con $z_{j_1} < z_{j_2} < \dots < z_{j_{k-1}} < z_{j_k}$ en \mathbf{P} .
- Si $z_h \in (\{z_1, z_2, \dots, z_{r-1}\} - \{z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_k}\})$ y $j > r$ entonces $z_h \parallel z_j$.

Demostración: El primer ítem es trivial, ya que los elementos $z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_{k-1}}$ y z_{j_k} forman la cadena del caso (\mathbf{u}) del proceso constructivo.

Por el primer ítem es claro que $z_h \parallel z_r$. Para probar el segundo ítem, y con el objetivo de llegar a una contradicción, asumamos que $z_h \perp z_j$ en \mathbf{P} con $j \neq r$. Si z_h es maximal de \mathbf{P} entonces, como z_j es comparable con z_h , $z_j < z_h$ en \mathbf{P} . Además, z_j puede tener

etiquetas **(m)** o **(d)**. Por otro lado, sabemos que $z_j < z_r$ en \mathbf{P} con $h < r < j$; luego por (iv) o (v) del Lema 6.2.4 se llega a una contradicción.

Si z_h tiene etiqueta **(m)**, ya que $z_j < z_r$ z_j puede tener etiqueta **(m)** o **(d)**. Asumamos que z_j tiene etiqueta **(m)**; observar que no es posible que $z_h < z_j$, pues $z_j < z_r$ y $z_h \parallel z_r$. Luego, necesariamente $z_j < z_h$. Como $z_h \parallel z_r$, existe un elemento maximal z_i con $i < r$ tal que $z_h < z_i$ en \mathbf{P} . Luego $z_j < z_i$ en \mathbf{P} , lo cual es una contradicción por el ítem (v) del Lema 6.2.4.

Por otro lado, si z_j tiene etiqueta **(d)** entonces $z_j < z_h$. Como $z_h \parallel z_r$ existe un elemento maximal z_i con $i < r$ tal que $z_h < z_i$ en \mathbf{P} . Luego $z_j < z_i$, lo que es absurdo por el ítem (iv) del Lema 6.2.4. Concluimos que $z_h \parallel z_j$ cuando z_h tiene etiqueta **(m)**.

Si z_h es minimal entonces, observar que z_j no puede tener etiqueta **(u)** ya que $j \geq r$ y $z_h \parallel z_r$. Luego, si la etiqueta de z_j es **(m)** entonces $z_h < z_j$ en \mathbf{P} . El hecho de que $z_j < z_r$ implica que $z_h < z_r$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $z_h \parallel z_j$ cuando z_h es minimal. \square

En el siguiente Teorema veremos que la condición del Lema 4.1.2 es suficiente para los posets k -tree que son CPT .

Teorema 6.2.8. *Sea $\mathbf{P} = (X, P)$ un poset k -tree. Entonces \mathbf{P} admite un modelo CPT si y solo si $D[z]$ es CI para todo z maximal de \mathbf{P} .*

Demostración:

La implicación directa vale en general como lo demuestra el Lema 4.1.2.

Para demostrar la proposición recíproca, primero asumimos que \mathbf{P} no tiene falsos gemelos. Probaremos que si tenemos un poset $\mathbf{P} = (X, P)$ k -tree sin falsos gemelos tal que $\mathbf{P}(D[z])$ es CI para todo z elemento maximal de \mathbf{P} , entonces \mathbf{P} admite un modelo CPT en el cual ningún camino se reduce a un vértice y ningún par de caminos tiene un extremo coincidente. Procederemos por inducción sobre $|X|$.

Si $|X| = k$ o $k + 1$ entonces \mathbf{P} es una cadena y la demostración es inmediata.

Si no, por el Lema 6.2.5 existe un buen orden constructivo de \mathbf{P} $z_1, z_2, \dots, z_r, z_{r+1}, \dots, z_n$ donde z_r es el último maximal que fue agregado en el proceso constructivo y $z_i \in D[z_r]$ si $i \geq r + 1$.

Sea $X' = \{z_1, z_2, \dots, z_{r-1}\}$. Entonces existe un modelo *CPT* $R_{\mathbf{P}'} = (W'_{z_i})_{z_i \in X'}$ sobre un árbol huésped T' , en el cual ningún camino se reduce a un punto y ningún par de caminos tiene un extremo coincidente.

Por otro lado sea $X'' = D_{\mathbf{P}}[z_r]$. Por hipótesis $\mathbf{P}'' = \mathbf{P}(X'')$ es *CI*. Luego es posible obtener un modelo *CI* $R_{\mathbf{P}''} = (W''_{z_i})_{z_i \in D[z_r]}$, donde ningún camino se reduce a un vértice y ningún par de caminos tiene un extremo coincidente [6].

En lo que sigue, reacomodaremos los modelos $R_{\mathbf{P}'}$ y $R_{\mathbf{P}''}$ de manera tal que su superposición nos permita obtener un modelo *CPT* de \mathbf{P} . Por el primer ítem del Lema 6.2.7 se tiene que $X' \cap X'' = \{z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_k}\}$ con $z_{j_1} < z_{j_2} < \dots < z_{j_k}$ en \mathbf{P} ; luego los vértices z_{j_i} están representados tanto en el modelo $R_{\mathbf{P}'}$ como en $R_{\mathbf{P}''}$.

En ambos modelos los caminos no tienen extremos coincidentes; luego es claro que, subdividiendo aristas donde sea necesario, en el modelo $R_{\mathbf{P}'}$ o en el modelo de $R_{\mathbf{P}''}$, se puede asumir que las longitudes de $W'_{z_{j_i}}$ y $W''_{z_{j_i}}$ son iguales y que la posición relativa de $W'_{z_{j_i}}$ en $W'_{z_{j_k}}$ es igual a la posición relativa de $W''_{z_{j_i}}$ en $W''_{z_{j_k}}$.

Sea R el modelo por contención de caminos que se obtiene uniendo ambos modelos de forma que, para cada $1 \leq i \leq k$, $W'_{z_{j_i}}$ se identifica con $W''_{z_{j_i}}$. Y a su vez, la parte de W''_{z_r} que no está cubierta por $W''_{z_{j_k}}$ se representa en T' agregando 2 nuevas ramas en cada uno de los extremos (ver Figura 6.3).

A continuación probaremos que R es un modelo *CPT* de \mathbf{P} . En este modelo llamamos W_z al camino correspondiente al elemento z , siendo $W_{z_i} = W'_{z_i}$ si $i < r$ y $W_{z_i} = W''_{z_i}$ si $i \geq r$. Primero veamos que si $z_i < z_j$ en \mathbf{P} entonces $W_{z_i} \subset W_{z_j}$.

Si z_i y z_j pertenecen ambos a X' o X'' entonces $z_i < z_j$ en \mathbf{P}' o \mathbf{P}'' , respectivamente, lo cual implica que $W'_{z_i} \subset W'_{z_j}$ o $W''_{z_i} \subset W''_{z_j}$. Por lo tanto $W_{z_i} \subset W_{z_j}$.

Si $z_i \in X'$ y $z_j \in X''$, por el Lema 6.2.7 se tiene que $z_i = z_{j_{l_i}}$ con $1 \leq l_i \leq k$, es decir $z_i \in X' \cap X''$. Luego $z_i = z_{j_{l_i}} < z_j$ en \mathbf{P}'' , y como vimos previamente, se tiene que $W_{z_{j_{l_i}}} = W_{z_i} \subset W_{z_j}$. El caso $z_i \in X''$ y $z_j \in X'$ se analiza análogamente.

Nos queda probar que si W_{z_i} y W_{z_j} son caminos pertenecientes a R tales que $W_{z_i} \subset W_{z_j}$ entonces $z_i < z_j$ en \mathbf{P} . Es claro que si ambos caminos pertenecen a $R_{\mathbf{P}'}$ entonces $z_i < z_j$ en \mathbf{P}' lo que implica que $z_i < z_j$ en \mathbf{P} . Análogamente se prueba que si ambos caminos pertenecen a $R_{\mathbf{P}''}$ entonces $z_i < z_j$ en \mathbf{P} .

Si $W_{z_i} \in R_{\mathbf{P}'}$, $W_{z_j} \in R_{\mathbf{P}''}$ y $W_{z_i} \subset W_{z_j}$, como también sabemos que $W_{z_j} \subset W_{z_r}$, se concluye que $W_{z_i} \subset W_{z_r}$. Esto a su vez implica que $W_{z_i} \subseteq W_{z_{j_k}}$. Estos dos últimos conjuntos pertenecen a $R_{\mathbf{P}'}$, entonces la inclusión implica $z_i \leq z_{j_k}$. Además $W_{z_{j_k}}$ y W_r están en $R_{\mathbf{P}''}$, por lo que $W_{z_{j_k}} \subset W_{z_r}$, entonces $z_{j_k} < z_r$. Por transitividad $z_i < z_r$. Por lo tanto $z_i \in X''$ y $W_{z_i} \in R_{\mathbf{P}''}$, además sabemos que $W_{z_j} \subset R_{\mathbf{P}''}$. Por ende $W_{z_i} \subset W_{z_j}$ implica que $z_i < z_j$.

Si $W_{z_i} \in R_{\mathbf{P}''}$ y $W_{z_j} \in R_{\mathbf{P}'}$, consideramos dos casos: $z_j \in X' \cap X''$ o no.

Si $z_j \in X' \cap X''$, entonces $W_{z_j} \in R_{\mathbf{P}''}$. Así, se tiene que $z_i < z_j$ en \mathbf{P}'' .

Consideremos el caso $z_j \notin X' \cap X''$, si $z_i \in X'$, entonces W_{z_i} también está en $R_{\mathbf{P}'}$. Entonces $W_{z_i} \subset W_{z_j}$ en $R_{\mathbf{P}'}$ implica $z_i < z_j$. Si $z_i \notin X'$ entonces $z_i = z_r$ o $i > r$. Si $z_i = z_r$, es absurdo porque todos los vértices de W_{z_r} no están en el árbol huésped de $R_{\mathbf{P}'}$ (lo más que llegan a compartir es $W_{z_{j_2}}$).

Si $z_i \neq z_r$, con $i > r$, $W_{z_i} \subseteq W_{z_j}$ implica $W_{z_i} \subseteq W_{z_{j_k}}$. Entonces $W_{z_i} \subset W_{z_{j_k}} \subset W_{z_r}$ en $R_{\mathbf{P}''}$ implica $z_i < z_{j_k} < z_r$. Entonces z_i tiene etiqueta **(d)** o **(m)**.

Sin pérdida de generalidad, asumimos que z_i tiene etiqueta **(d)**, cuando él fue agregado miraba a z_{j_k} y z_r y, por etiqueta **(d)**, $U(z_{j_k}) = z_r$ (en ese estadio de la construcción). Entonces, en ese momento z_{j_k} se relacionaba con un único maximal que es z_r . Si z_r es el único maximal, entonces $X'' = X$, y $W_{z_i}, W_{z_j} \in R_{\mathbf{P}''}$. Si z_r no fuera el único maximal, por construcción, al momento de ser agregado, z_{j_1} y z_{j_k} estaba en una cadena junto a otro maximal z_k . Eso es absurdo porque contradice la etiqueta **(d)** de

z_i .

Concluimos que R es un modelo CPT del poset \mathbf{P} en el cual todos los caminos tiene longitud mayor o igual a uno.

Podría ocurrir que existan caminos que tengan un extremo coincidente en R . Como asumimos que \mathbf{P} no tiene falsos gemelos, por el Lema 4.1.13 podemos asegurar que existe un modelo CPT de \mathbf{P} en el cual ningún par de caminos tiene un extremo coincidente.

Si \mathbf{P} tiene falsos gemelos, por cada clase de equivalencia de falsos gemelos podemos dejar un representante. Así, por lo demostrado previamente, tenemos un nuevo poset CPT \mathbf{P}_1 , el cual es k -tree y no tiene falsos gemelos. Luego, por la Observación 4.1.6, \mathbf{P} es CPT .

□

El Teorema 6.2.8 muestra que en la clase de los posets k -tree, con $k \geq 2$, la condición necesaria para ser CPT dada por el Lema 4.1.2 es también suficiente. Luego el Teorema 4.1.5 y el siguiente lema completan la demostración del Teorema 6.2.10 que brinda una caracterización por subposets prohibidos de los posets k -tree.

Lema 6.2.9. *Sea $\mathbf{P} = (X, P)$ un poset, \mathbf{H} un subposet de \mathbf{P} 3-irreducible, con $h(\mathbf{H}) < h(\mathbf{P})$; y \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{E}_n y \mathbf{F}_n , con $n \geq 0$, los posets descriptos en las Figuras 2.5 y 2.6.*

- i) Si \mathbf{P} es 2-tree entonces \mathbf{H} debe ser \mathbf{B} o \mathbf{B}^d .*
- ii) Si \mathbf{P} es 3-tree entonces \mathbf{H} debe ser \mathbf{B} , \mathbf{B}^d , \mathbf{C} , \mathbf{C}^d , \mathbf{E}_n o \mathbf{E}_n^d con $n \geq 0$.*
- iii) Si \mathbf{P} es k -tree con $k \geq 4$ entonces \mathbf{H} debe ser \mathbf{B} , \mathbf{B}^d , \mathbf{C} , \mathbf{C}^d , \mathbf{E}_n , \mathbf{E}_n^d o \mathbf{F}_n con $n \geq 0$.*

Demostración: Los posets 3-irreducibles son los posets descriptos en las Figuras 2.5 y 2.6 y sus respectivos duales. Sea \mathbf{H} un poset 3-irreducible, subposet de un poset

k -tree.

Como los grafos k -tree son cordales, es decir, no tienen ciclos sin cuerdas inducidos, los posets k -tree son acíclicos. Resulta así que \mathbf{H} no es ninguno de los posets: \mathbf{D} , \mathbf{CX}_1 , \mathbf{CX}_2 , \mathbf{CX}_3 , \mathbf{EX}_1 , \mathbf{EX}_2 , \mathbf{FX}_1 , \mathbf{FX}_2 ni sus poset duales; \mathbf{A}_n , \mathbf{I}_n , \mathbf{G}_n , \mathbf{J}_n , \mathbf{H}_n , con $n \geq 0$, ni sus respectivos duales.

Para demostrar (i) asumimos que \mathbf{P} es 2-tree. Luego $h(\mathbf{H}) < 3$ por lo que \mathbf{H} debe ser alguno de los posets \mathbf{B} o \mathbf{B}^d .

Si \mathbf{P} es 3-tree entonces $h(\mathbf{H}) < 4$. Luego \mathbf{H} debe ser algunos de los posets \mathbf{B} , \mathbf{B}^d , \mathbf{C} , \mathbf{C}^d , \mathbf{E}_n o \mathbf{E}_n^d , con $n \geq 0$. Así hemos demostrado ii).

Si $k \geq 4$ entonces $h(\mathbf{H}) < k + 1$. Luego \mathbf{H} debe ser alguno de los posets \mathbf{B} , \mathbf{B}^d , \mathbf{C} , \mathbf{C}^d , \mathbf{E}_n , \mathbf{E}_n^d o \mathbf{F}_n , con $n \geq 0$. Observar que $\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_n^d$. Así queda probado iii). \square

Teorema 6.2.10. *Sea $\mathbf{P} = (X, P)$ un poset, las siguientes proposiciones son ciertas.*

i) *Sea \mathbf{P} es 2-tree. Entonces \mathbf{P} es CPT si y solo si \mathbf{P} no tiene como subposets $\widehat{\mathbf{B}}$ ni $\widehat{\mathbf{B}}^d$.*

ii) *Sea \mathbf{P} es 3-tree. Entonces \mathbf{P} es CPT si y solo si \mathbf{P} no tiene como subposets $\widehat{\mathbf{B}}$, $\widehat{\mathbf{B}}^d$, $\widehat{\mathbf{C}}$, $\widehat{\mathbf{C}}^d$, $\widehat{\mathbf{E}}_n$ ni $\widehat{\mathbf{E}}_n^d$ con $n \geq 0$.*

iii) *Sea \mathbf{P} es k -tree con $k \geq 4$. Entonces \mathbf{P} es CPT si y solo si \mathbf{P} no tiene como subposets $\widehat{\mathbf{B}}$, $\widehat{\mathbf{B}}^d$, $\widehat{\mathbf{C}}$, $\widehat{\mathbf{C}}^d$, $\widehat{\mathbf{E}}_n$, $\widehat{\mathbf{E}}_n^d$ ni $\widehat{\mathbf{F}}_n$ con $n \geq 0$.*

Los posets $\widehat{\mathbf{B}}$, $\widehat{\mathbf{B}}^d$, $\widehat{\mathbf{C}}$, $\widehat{\mathbf{C}}^d$, $\widehat{\mathbf{E}}_n$, $\widehat{\mathbf{E}}_n^d$ y $\widehat{\mathbf{F}}_n$, con $n \geq 0$, están en la Figura 6.4.

Lema 6.2.11. *Sean $\mathbf{P} = (X, P)$ y $\mathbf{P}' = (X, P')$ posets asociados. Si $\widehat{\mathbf{B}}$ o cualquiera de los posets $\widehat{\mathbf{C}}$, $\widehat{\mathbf{E}}_n$ o $\widehat{\mathbf{F}}_n$, descriptos en la Figura 6.4, es un subposet de \mathbf{P} , entonces o bien $\widehat{\mathbf{B}}$, $\widehat{\mathbf{B}}^d$, $\widehat{\mathbf{C}}$, $\widehat{\mathbf{C}}^d$, $\widehat{\mathbf{E}}_n$, $\widehat{\mathbf{E}}_n^d$ o $\widehat{\mathbf{F}}_n$ es subposet de \mathbf{P}' , respectivamente; o bien $\widehat{\mathbf{B}}^d$, $\widehat{\mathbf{B}}^d$, $\widehat{\mathbf{C}}^d$, $\widehat{\mathbf{C}}^d$, $\widehat{\mathbf{E}}_n^d$, $\widehat{\mathbf{E}}_n^d$ o $\widehat{\mathbf{F}}_n^d$ es subposet de \mathbf{P}' , respectivamente.*

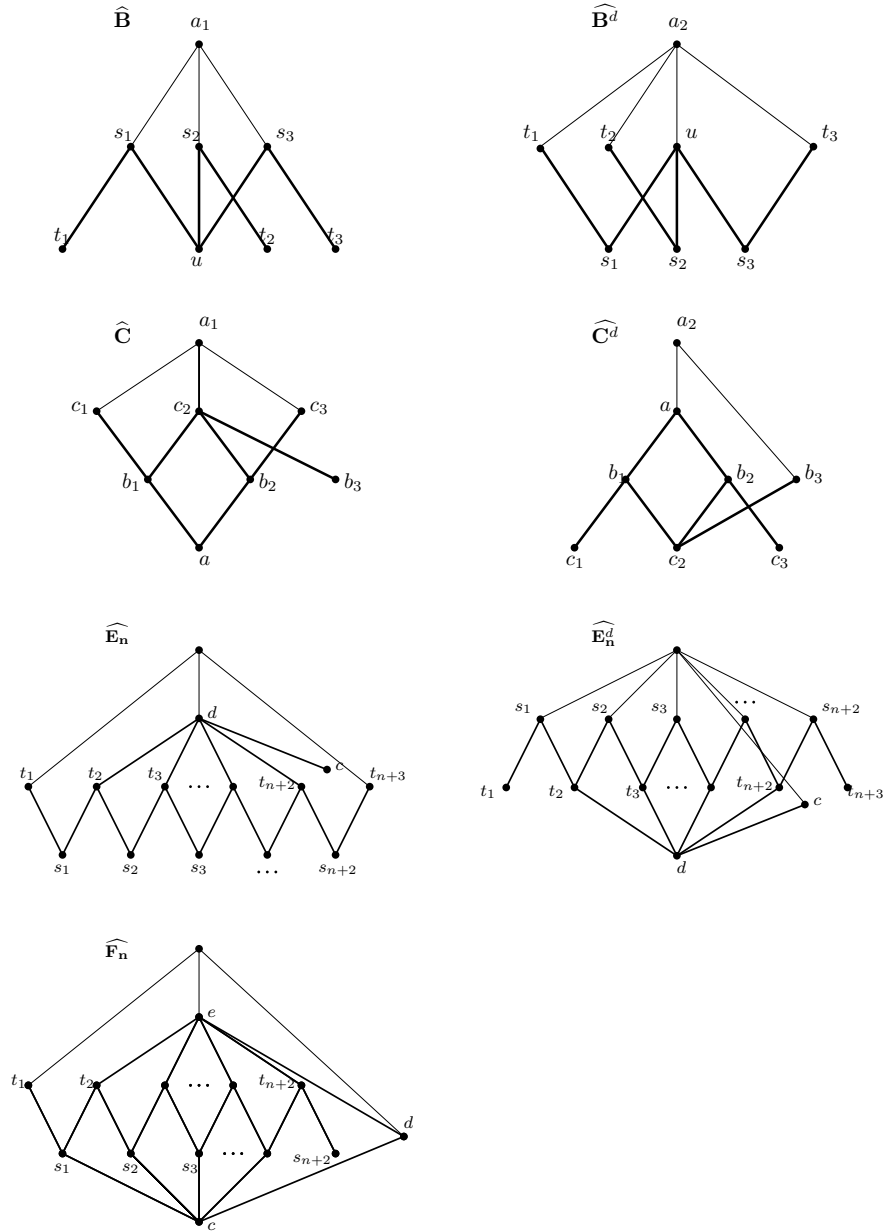


Figura 6.4: Los posets $\widehat{\mathbf{B}}$ y $\widehat{\mathbf{B}}^d$ son 2-tree pero no *CPT*. $\widehat{\mathbf{C}}$, $\widehat{\mathbf{C}}^d$, $\widehat{\mathbf{E}}_n$ y $\widehat{\mathbf{E}}_n^d$ para $n \geq 0$ no son posets 3-tree. Sin embargo, pueden ser subposet de un poset 3-tree; además ninguno es *CPT*. $\widehat{\mathbf{F}}_n$, con $n \geq 0$, puede ser subposets de un poset 4-tree pero no es *CPT*.

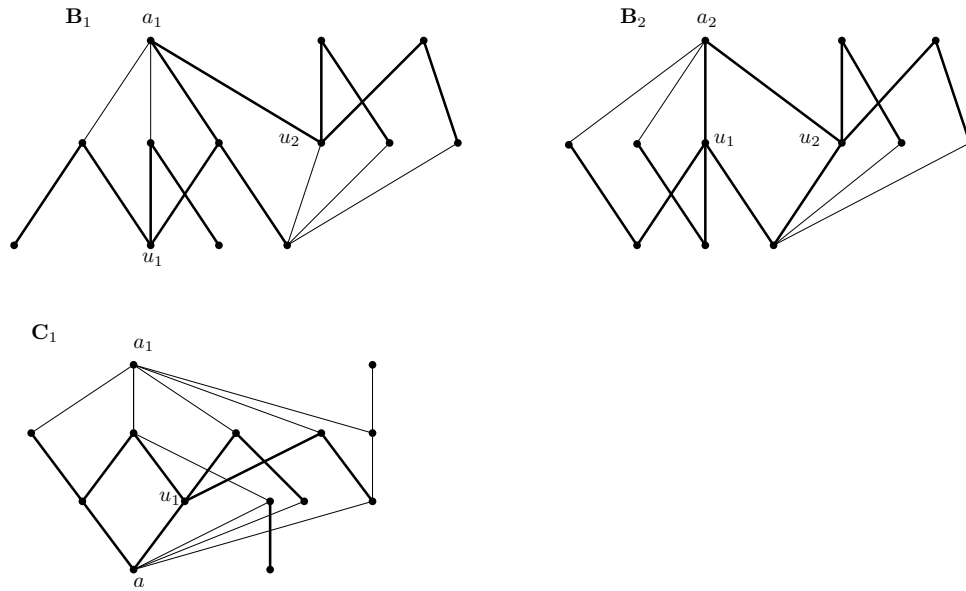


Figura 6.5: Los posets \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 son 2-tree, el poset \mathbf{C}_1 es 3-tree. Observar que \mathbf{B}_2 tiene a $\widehat{\mathbf{B}}$ como subposet, \mathbf{B}_1 tiene a $\widehat{\mathbf{B}}^d$ como subposet y \mathbf{C}_1 tiene a $\widehat{\mathbf{C}}$ como subposet. Luego, por el Teorema 6.2.10, no son *CPT*.

Demostración: Sea \mathbf{P} un poset que contiene a $\widehat{\mathbf{B}}$ como subposet. Los módulos no triviales de $\widehat{\mathbf{B}}$ son: su vértice universal, que llamaremos y , y los vértices del subposet \mathbf{B} , descrito en la Figura 2.5. Al conjunto de vértices de \mathbf{B} lo denotaremos por X . Como \mathbf{P} y \mathbf{P}' son asociados (tienen el mismo grafo de comparabilidad) podemos determinar el vértice y' y el conjunto X' de vértices de \mathbf{P}' correspondientes al vértice y y al conjunto X , respectivamente.

Por el segundo ítem del Corolario 2.3.9 tenemos que el subposet de \mathbf{P}' inducido por los vértices de X' es \mathbf{B} o \mathbf{B}^d .

Observar que en \mathbf{P}' el vértice y' debe ser mayor que todos los vértices de X' o debe ser menor que todos ellos, luego en \mathbf{P}' tenemos como subposet a $\widehat{\mathbf{B}}$, $\widehat{\mathbf{B}}^d$, $\widehat{\mathbf{B}}^d$ o bien $\widehat{\mathbf{B}}^d$.

Para los posets $\widehat{\mathbf{C}}$, $\widehat{\mathbf{E}}_n$ y $\widehat{\mathbf{F}}_n$ la demostración es análoga. □

Como consecuencia del lema anterior y del Teorema 6.2.10, probamos que la clase de posets k -tree dualmente- CPT coincide con la clase k -tree fuertemente- CPT y obtenemos una caracterización de la clase de posets k -tree fuertemente- CPT , para $k \geq 2$.

Teorema 6.2.12. *Sea $\mathbf{P} = (X, P)$ un poset k -tree con $k \geq 2$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

- i) \mathbf{P} es fuertemente- CPT .*
- ii) \mathbf{P} es dualmente- CPT .*
- iii) \mathbf{P} no contiene a $\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{B}}^d, \widehat{\mathbf{C}}, \widehat{\mathbf{C}}^d, \widehat{\mathbf{E}}_n, \widehat{\mathbf{E}}_n^d, \widehat{\mathbf{F}}_n$, con $n \geq 0$, ni a sus duales como subposet, ver la Figura 6.4.*

Observar que para $k = 2, 3$ la familia de prohibidos no es minimal. Para los posets 2-tree que son fuertemente- CPT , los posets $\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{B}}^d$ y sus duales constituyen la familia de prohibidos minimal. Mientras que la familia de prohibidos minimal de los 3-tree fuertemente- CPT está formada por $\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{B}}^d, \widehat{\mathbf{C}}, \widehat{\mathbf{C}}^d, \widehat{\mathbf{E}}_n, \widehat{\mathbf{E}}_n^d$, con $n \geq 0$, y sus respectivos duales.

Demostración: La implicación *i)* entonces *ii)* es cierta aún cuando \mathbf{P} no sea k -tree. Si \mathbf{P} es dualmente- CPT entonces, por definición de dualmente- CPT y el Teorema 6.2.10, los posets $\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{B}}^d, \widehat{\mathbf{C}}, \widehat{\mathbf{C}}^d, \widehat{\mathbf{E}}_n, \widehat{\mathbf{E}}_n^d, \widehat{\mathbf{F}}_n$, con $n \geq 0$, y sus respectivos duales no pueden ser subposets de \mathbf{P} . Así hemos probado la implicación *ii)* entonces *iii)*. Queda demostrar la implicación *iii)* entonces *i)*. Por *iii)* del Teorema 6.2.10, \mathbf{P} es CPT . Asumimos, con el fin de obtener una contradicción, que \mathbf{P} no es fuertemente- CPT . Sea \mathbf{P}' un poset no CPT asociado a \mathbf{P} . Por el Teorema 6.2.10 \mathbf{P}' contiene como subposet, a alguno de los posets $\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{B}}^d, \widehat{\mathbf{C}}, \widehat{\mathbf{C}}^d, \widehat{\mathbf{E}}_n, \widehat{\mathbf{E}}_n^d, \widehat{\mathbf{F}}_n$ con $n \geq 0$. Luego, por el Lema 6.2.11, \mathbf{P} contiene como subposet a alguno de los siguiente posets: $\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{B}}^d, \widehat{\mathbf{C}},$

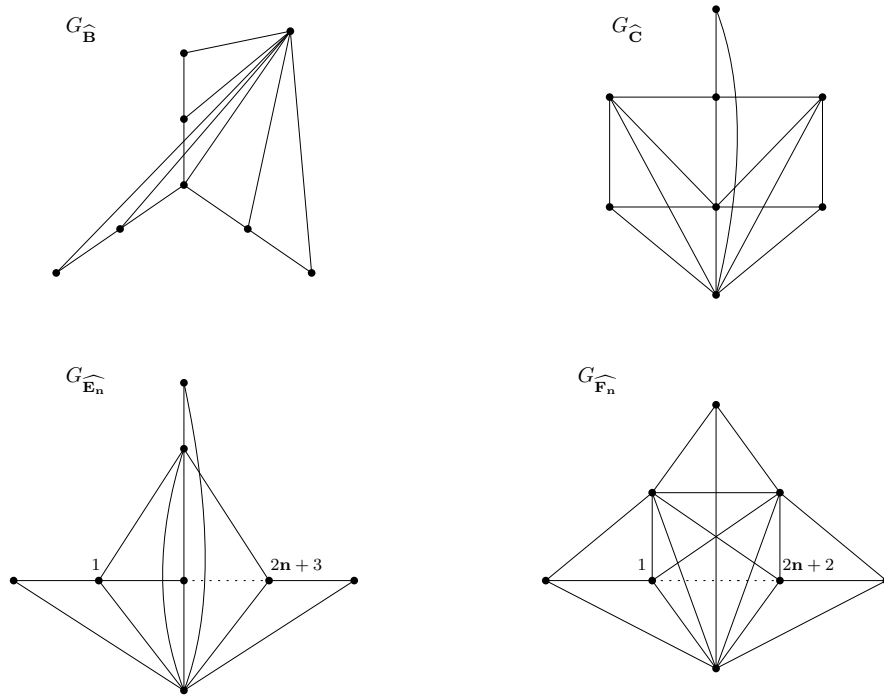


Figura 6.6: Los grafos de comparabilidad de los posets $\widehat{\mathbf{B}}$, $\widehat{\mathbf{C}}$, $\widehat{\mathbf{E}}_n$, $\widehat{\mathbf{F}}_n$ en la Figura 6.4.

$\widehat{\mathbf{C}}^d$, $\widehat{\mathbf{E}}_n$, $\widehat{\mathbf{E}}_n^d$ o $\widehat{\mathbf{F}}_n$, $\widehat{\mathbf{B}}^d$, $\widehat{\mathbf{B}}_n^d$, $\widehat{\mathbf{C}}^d$, $\widehat{\mathbf{C}}_n^d$, $\widehat{\mathbf{E}}_n^d$, $\widehat{\mathbf{E}}_n^d$, $\widehat{\mathbf{F}}_n^d$. Esto contradice nuestra asunción sobre \mathbf{P} . \square

El siguiente resultado será utilizado en la próxima sección en la caracterización de grafos 2-tree que son CPT .

Lema 6.2.13. *Si \mathbf{P}' es un poset asociado a \mathbf{B}_1 o \mathbf{B}_2 en la Figura 6.5 entonces tiene a $\widehat{\mathbf{B}}^d$ como subposet.*

Demostración: Observemos que el grafo de comparabilidad de \mathbf{P}' tiene una única clase de implicancia. Luego, por la Proposición 2.3.2, \mathbf{P}' tiene a su dual como un único poset asociado. Por lo tanto, podemos asumir $\mathbf{P}' = \mathbf{B}_1^d$ (o \mathbf{B}_2^d). Es fácil ver en la Figura 6.5 que \mathbf{B}_1 (o \mathbf{B}_2) tiene al dual de $\widehat{\mathbf{B}}^d$ como subposet. Luego, \mathbf{P}' tiene a $\widehat{\mathbf{B}}^d$ como subposet.

□

6.3. Grafos CPT k -trees

Recordemos que los **grafos fuertemente-CPT** y **grafos dualmente-CPT** son los grafos de comparabilidad de los posets fuertemente-CPT y posets dualmente-CPT, respectivamente.

Como corolario del Teorema 4.2.3 y el hecho que todo árbol es un grafo de comparabilidad tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.3.1. *Todo árbol es un grafo fuertemente-CPT.*

En el siguiente Teorema presentamos una caracterización de los grafos k -tree que son dualmente-CPT y probamos que son exactamente los grafos k -tree que son fuertemente-CPT.

Teorema 6.3.2. *Sea G un grafo de comparabilidad y k -tree. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

- i) G es fuertemente-CPT.*
- ii) G es dualmente-CPT.*
- iii) G no contiene a ninguno de los grafos $G_{\widehat{\mathbf{B}}}$, $G_{\widehat{\mathbf{C}}}$, $G_{\widehat{\mathbf{E}_n}}$ ni $G_{\widehat{\mathbf{F}_n}}$ con $\mathbf{n} \geq 0$ de la Figura 6.6 como subgrafo inducido.*

Demostración: Por el Teorema 6.2.12 es cierta la proposición *i)* si y solo si *ii)*. Para probar *ii)* implica *iii)*, sea G dualmente-CPT. Entonces existe un poset \mathbf{P} dualmente-CPT tal que $G = G_{\mathbf{P}}$. Asumamos, para llegar a una contradicción, que G tiene como subgrafo inducido a alguno de los siguientes grafos: $G_{\widehat{\mathbf{B}}}$, $G_{\widehat{\mathbf{C}}}$, $G_{\widehat{\mathbf{E}_n}}$ o $G_{\widehat{\mathbf{F}_n}}$. Entonces

\mathbf{P} contiene un subposet \mathbf{P}' asociado a $\widehat{\mathbf{B}}$, $\widehat{\mathbf{C}}$, $\widehat{\mathbf{E}}_n$ o $\widehat{\mathbf{F}}_n$. Luego, por el Lema 6.2.11, se tiene los siguiente casos:

- Si \mathbf{P}' es asociado a $\widehat{\mathbf{B}}$ entonces $\mathbf{P}' = \widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{B}}^d, \widehat{\mathbf{B}}^d$ o $\widehat{\mathbf{B}}^d$.
- Si \mathbf{P}' es asociado a $\widehat{\mathbf{C}}$ entonces $\mathbf{P}' = \widehat{\mathbf{C}}, \widehat{\mathbf{C}}^d, \widehat{\mathbf{C}}^d$ o $\widehat{\mathbf{C}}^d$.
- Si \mathbf{P}' es asociado a $\widehat{\mathbf{E}}_n$ entonces $\mathbf{P}' = \widehat{\mathbf{E}}_n, \widehat{\mathbf{E}}_n^d, \widehat{\mathbf{E}}_n^d$ o $\widehat{\mathbf{E}}_n^d$.
- Si \mathbf{P}' es asociado a $\widehat{\mathbf{F}}_n$ entonces $\mathbf{P}' = \widehat{\mathbf{F}}_n$ o $\widehat{\mathbf{F}}_n^d$.

En cualquiera de los casos anteriores, por el Teorema 6.2.12, el poset \mathbf{P} no es dualmente-*CPT*, lo cual es una contradicción. Así queda demostrado *ii)* implica *iii)*.

Para demostrar *iii)* implica *i)*, con el objetivo de llegar a una contradicción, asumimos que G no es fuertemente-*CPT*. Entonces existe un poset \mathbf{P} , que no es *CPT*, tal que $G = G_{\mathbf{P}}$. Por el Teorema 6.2.10, \mathbf{P} tiene como subposet a alguno de los siguientes posets: $\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{B}}^d, \widehat{\mathbf{C}}, \widehat{\mathbf{C}}^d, \widehat{\mathbf{E}}_n, \widehat{\mathbf{E}}_n^d$ o $\widehat{\mathbf{F}}_n$. Luego, en cualquiera de los casos $G_{\mathbf{P}}$, tiene como subgrafo inducido a alguno de los grafos $G_{\widehat{\mathbf{B}}}, G_{\widehat{\mathbf{C}}}, G_{\widehat{\mathbf{E}}_n}$ o $G_{\widehat{\mathbf{F}}_n}$ con $n \geq 0$, lo cual contradice *iii)*. \square

Los siguientes corolarios son consecuencia de los teoremas 6.2.12 y 6.3.2.

Corolario 6.3.3. *Sea G un grafo de comparabilidad y 2-tree. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

*i) G es fuertemente-*CPT*.*

*ii) G es dualmente-*CPT*.*

iii) G no contiene al grafo $G_{\widehat{\mathbf{B}}}$ en la Figura 6.6 como subgrafo inducido.

Corolario 6.3.4. *Sea G un grafo de comparabilidad y 3-tree. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

- i) G es fuertemente- CPT .
- ii) G es dualmente- CPT .
- iii) G no contiene a $G_{\hat{\mathbf{B}}}$, ni a $G_{\hat{\mathbf{C}}}$, ni a $G_{\hat{\mathbf{E}}_n}$ con $n \geq 0$, en la Figura 6.6, como subgrafos inducidos.

Notar que, de forma similar a lo que ocurre con los posets split que son CPT , aunque el Teorema 6.2.10 nos brinda una caracterización por subposets prohibidos de los posets k -tree, con $k \geq 2$, que son CPT , la misma no es suficiente para obtener una caracterización por subgrafos prohibidos de los grafos k -tree que son CPT . Por ejemplo, el grafo $G_{\hat{\mathbf{B}}}$ en la Figura 6.6 es un grafo 2-tree CPT , aunque el poset $\hat{\mathbf{B}}$ es un subposet prohibido para los posets 2-tree CPT . El Lema 6.2.13 implica que los grafos $G_{\mathbf{B}_1}$ y $G_{\mathbf{B}_2}$ no son grafos CPT . En particular, $G_{\mathbf{B}_1}$ y $G_{\mathbf{B}_2}$ son prohibidos de la clase de grafos 2-tree CPT . Conjeturamos que son los únicos.

Conjetura 6.3.5. *Sea G un grafo 2-tree. G es CPT si y solamente si G no tiene a $G_{\mathbf{B}_1}$ ni a $G_{\mathbf{B}_2}$ como subgrafos inducidos.*

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

En la primera parte de este trabajo hemos dado una caracterización de los vértices extremos de los grafos CI usando una familia auto-complementaria de subgrafos inducidos prohibidos. Hemos estudiado a la clase de grafos que son CI porque ella ha sido ampliamente estudiada y está contenida en la clase de grafos CPT . Sin embargo, no hemos podido usar los resultados obtenidos en el estudio de los grafos o posets CPT .

A partir del Capítulo 4 nos ocupamos en el estudio de los grafos CPT y posets CPT . Como consecuencia de una condición necesaria para ser poset CPT obtuvimos una familia de subposets prohibidos minimales de los posets que son CPT . También mostramos diferentes ejemplos de posets que no son CPT aún cuando satisfacen la condición necesaria. Demostramos que en la clase de posets CPT la dimensión y la dimensión de intervalos no están acotadas superiormente.

Por otra parte, introdujimos las definiciones de posets fuertemente- CPT y dualmente- CPT . Hemos encontrado ejemplos en cada clase descrita en el diagrama de la Figura 7.1, pero no tenemos un ejemplo que haga diferencia entre las clases dualmente- CPT y fuertemente- CPT . En particular, hemos demostrado que todo poset cuyo grafo de comparabilidad es un árbol es fuertemente- CPT .

Posets

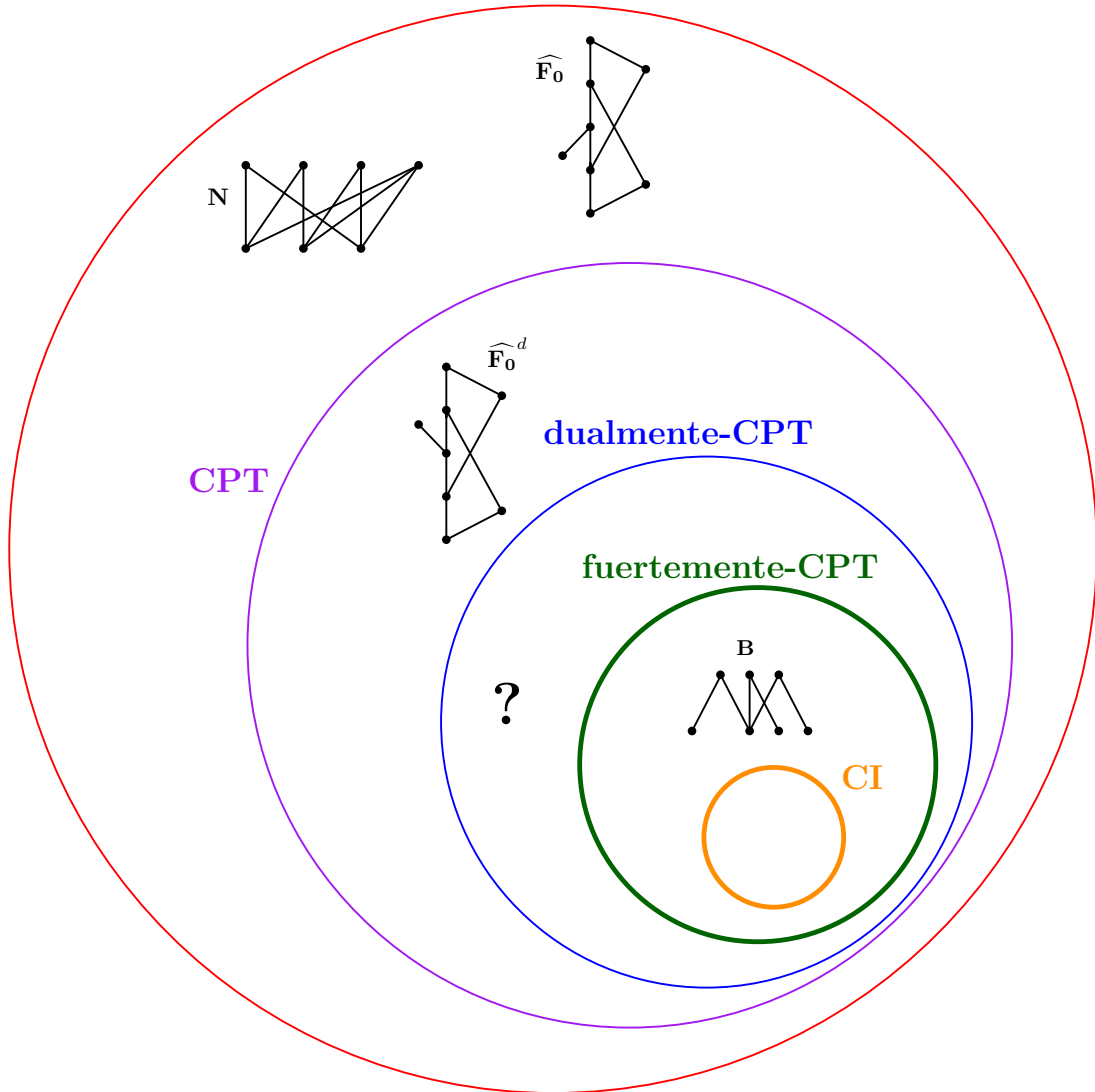


Figura 7.1: Representación de las diferentes clases de posets *CPT* estudiadas.

En los Capítulos 5 y 6 hemos estudiados dos clases de posets: la clase de posets k -tree que son CPT y la clase de posets split que son CPT . Para ambas clases hemos demostrado que la condición necesaria para ser un poset CPT dada en el Lema 4.1.2 es también suficiente. Usando este resultado damos una caracterización por subposets prohibidos de los posets split CPT y de los posets k -tree que son CPT . Para ambas clases de posets mostramos que los posets dualmente- CPT son exactamente los posets fuertemente- CPT ; y dimos una caracterización por subposets prohibidos. Como consecuencia, obtuvimos una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos tanto de los grafos que son split fuertemente- CPT como de los grafos que son k -tree fuertemente- CPT . Paralelamente mostramos que los grafos split (o k -tree) que son dualmente- CPT son exactamente los grafos split (o k -tree) que son fuertemente- CPT . Por otra parte, observamos que aunque el Teorema 5.1.5 nos brinda una caracterización por subposets prohibidos de los posets split que son CPT , la misma no es suficiente para obtener una caracterización por subgrafos prohibidos de los grafos split que son CPT . Una situación similar se observa para los grafos k -tree que son CPT .

Además, se plantearon problemas que han quedado abiertos:

- **Problema abierto 4.2.4:** ¿Existe un poset dualmente- CPT que no sea fuertemente- CPT ?
- **Problema abierto 4.2.5:** ¿La propiedad de ser fuertemente- CPT es hereditaria por subposets?
- **Problema abierto 4.3.5:** Determinar si la dimensión de los posets dualmente- CPT está acotada superiormente por una constante. La misma pregunta para los posets fuertemente- CPT .

En un trabajo futuro comenzaremos a profundizar en estos problemas utilizando descomposición modular.

De los resultados obtenidos en esta tesis surgieron los trabajos [2], enviado para publicar en *Discrete Applied Mathematics*, y [3], enviado para publicar en *Discussiones Mathematicae Graph Theory*.

El interés despertado en otros grupos de investigación por los resultados obtenidos en este trabajo se reflejan en la invitación a dictar una conferencia sobre los mismos durante el *16th Haifa Workshop on Interdisciplinary Applications of Graphs, Combinatorics and Algorithms* que se llevó a cabo en la Universidad de Haifa, Israel, en Junio de 2016.

Bibliografía

- [1] L. Alcón, N. Gudiño, M. Gutierrez, *On containment graphs of paths in a tree*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, Volume 50, (2015), pp 175–180.
- [2] L. Alcón, N. Gudiño, M. Gutierrez, *Introducing containment graphs of paths in a tree*, Discrete Applied Mathematics. Eviado para publicar.
- [3] L. Alcón, N. Gudiño, M. Gutierrez, *End-vertices in containment interval graphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory. Eviado para publicar.
- [4] J. Bondy, U. Murty, *Graph Theory*, Springer, New York, NY, USA. (2007).
- [5] A. Brandstädt, V. B. Le, J. P. Spinrad, *Graph Classes: A Survey*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. (1999).
- [6] B. Dushnik, E. Miller, *Partially ordered sets*, American Journal of Mathematics 63, (1941), pp. 600–610.
- [7] P.C. Fishburn, W.T. Trotter, *Geometric Containment Orders: A survey*, Order 15, (1999), pp. 167–182.
- [8] T. Gallai, *Transitiv Orientierbare Graphen*, Acta Mathematica Hungar 18, (1967), pp. 25–66.

- [9] A. Ghouila-Houri, *Caractrization des graphes non orientés dont on peut les arrêtes de manire obtenir le graphe d'une relation d'ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris 254 (1962), pp. 1370–1371.
- [10] J. Gimbel, Source in posets and comparability graphs, *Order* 9, pp. 361–365,(1992).
- [11] M. Golumbic, *Algorithmic graph theory and perfect graphs*, (2da. edición), Elsevier, (2004).
- [12] M. Golumbic, A.N. Trenk *Tolerance graphs*, Cambridge University Press, (2004).
- [13] M. Golumbic, E. Scheinerman, *Containment Graphs, Posets, and Related Classes of Graphs*, *Annals of the New York Acad. Sci.* 555, (1989), pp. 192–204.
- [14] G. B. Guenver, J. X. Rampon, *Split orders*, *Discrete Mathematics* 276 (1-3), (2004), pp. 249–267.
- [15] D. Kelly, *The 3-irreducible partially ordered sets*, *Can. J. Math.* 29, (1977), pp. 367–383.
- [16] S. Olariu, On source in comparability graphs, with applications, *Discrete Mathematics*, pp. 289-292, (1992).
- [17] A. Pnueli, A. Lempel, S. Even, *Transitive orientation of graphs and identification of permutation graphs*, *Canadian Journal of Mathematics* 23, (1971), pp. 160–175. *Mathematics* 63, (1941), pp. 600–610.
- [18] J. Spencer, *Minimal Scrambling Sets of Simple Orders*, *Acta Mathematica Hungar*, 22, (1971), pp. 349–353.
- [19] J. Spinrad, *Efficient Graph Representations*, AMS, (2003).

- [20] E. Steinitz, *Sur l'extension de l'ordre partiel*, Fund. Math. 16, (1930), pp. 386–389.
- [21] W. T. Trotter, J. I. Moore, *Characterization problems for graphs, partially ordered sets, lattices, and families of sets*, Discrete Mathematics 16, (1976), pp. 361–381.
- [22] W. T. Trotter, J. I. Moore, D. P. Sumner, *The dimension of a comparability graph*, Proceedings of the American Mathematical Society 60,(1976), pp. 35–38.
- [23] W. Trotter, *Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory*, Ann. (1992).
- [24] W. Trotter, *Stacks and Splits of Partially Ordered Sets*, Discrete Mathematics 35, Issues 13, (1992), pp. 229–256.
- [25] J. Urrutia, *Partial Orders and Euclidean Geometry, Algorithms and Order*, I. Rival, ed., Kluwer Academic, Dordrecht (1989), pp. 327–346.