ENSEÑAR A DUDAR PARA ENSEÑAR A DEMOSTRAR

SANTARRONE, MARÍA ALEJANDRA

Escuela Industrial Superior anexa a la Facultad de Ingeniería Química. Universidad Nacional del Litoral
santarrone@gmail.com

RESUMEN

La matemática actual, en cuanto expresión de la inteligencia humana refleja el deseo de perfección estética y da cuenta de la inmensidad de aplicaciones a otras ciencias. Sus elementos fundamentales son la lógica y la intuición, el análisis y la síntesis, la generalización y la individualización. La interacción de esas fuerzas antagónicas y la lucha por su síntesis, constituye la vida, la utilidad y el valor de la ciencia matemática. Es por ello que dar cuenta de lo que implica una demostración en matemática, en relación a los términos de verdad, es parte vertebral de la misma y enseñar dando evidencias de ello, es un factor preponderante. Este artículo pretende comunicar por un lado el planteo didáctico desarrollado desde hace varios años en el primer nivel de la Escuela Industrial Superior, cuyo objetivo es instalar primero la necesidad de demostrar, luego la posibilidad de comprender una demostración, para así lograr que el alumno construya los primeros pilares de las demostraciones de enunciados verdaderos. Por otro lado, se quiere poner en evidencia las resistencias internas con las que los docentes nos encontramos al tratar de diseñar, sobre una problemática intrínseca a la propia práctica, un proyecto de investigación.

Palabras clave: matemática, demostración, investigación.

LA ENSEÑANZA DE LAS DEMOSTRACIONES

Reconociendo que actualmente la rigurosidad de las demostraciones en matemática se está discutiendo Jaffe y Quinn (1993), en relación a su enseñanza nos basaremos en la idea de Lakatos (1978). Este sostenía que el eje central de la lógica del descubrimiento matemático radica en el hecho de que la demostración de una conjetura conlleva una permanente reelaboración y una serie de explicaciones que hacen que la conjetura se torne cada vez más plausible y convincente. Al mismo tiempo, el matemático refina y refuerza la conjetura al sujetarla a la presión que imprime la búsqueda de contraejemplos que, en principio, la falsarían. Así la práctica constituye un proceso de conjetura, refutación, desarrollo y descubrimiento. Esta concepción "cuasi-empírica" del proceso acerca el trabajo de los matemáticos al de los físicos, en el momento de usar métodos análogos, con la excepción de que las conclusiones son verificadas mediante una demostración en vez de ser producto de observaciones.
Desde la década del setenta se pueden encontrar aportes relevantes en referencia a la enseñanza y el aprendizaje de las demostraciones en matemática de autores como Lester, Bell; Fischbein, Balacheff y más cercanos en el tiempo como Godino, Nápoles Valdés, entre otros. El interés general de las investigaciones, principalmente, es el de dar solución al bajo nivel que muestran los estudiantes en la comprensión y la elaboración de demostraciones matemáticas.
En nuestro caso, la enseñanza de la demostración persigue en este nivel otro fin; el que describe Jourdain (1976), en la introducción de su libro "La Naturaleza de la Matemática": "(…) espero que conseguiré mostrar que el proceso del descubrimiento matemático es algo vivo y en desarrollo".
Nos centramos en la demostración hipotética deductiva, entendiéndola como el procedimiento donde se parte de unas ciertas hipótesis y mediante razonamientos lógicos se consigue la conclusión deseada, algo que se plasma con claridad en los "Elementos" de Euclides y que permite dar a nuestros alumnos evidencias de la teoría de la verdad de Popper (1979) a partir de la convivencia de las geometrías no euclídeas; mostrando el valor relativo de la verdad en matemática. Poincaré (1902) afirma que: "Los axiomas no son entonces "verdades evidentes" sino convenciones que se postulan como puntos de partida para derivar deductivamente sus consecuencias lógicas en la forma de teoremas particulares".
Lo importante, entonces para nuestra propuesta didáctica, no es enseñar sólo el carácter axiomático de una demostración, sino su carácter inferencial, su manera de explicar. Esto es, demostrar será llegar a ello a partir de supuestos, generalmente de nivel más "bajo", pero sin estar excesivamente preocupados por una rígida ordenación de dichos niveles.

NUESTRA PROPUESTA DIDÁCTICA

Consideraciones iniciales

Pensamos en el aprendizaje como un proceso de construcción activa de significados por parte del sujeto que aprende. Dicho proceso es analizado como multidimensional, dinámico y no lineal, mientras que el sujeto que aprende es considerado desde sus aspectos cognoscitivos, afectivos, con sensibilidad, valores, actitudes e intereses determinados, que interactúa con su entorno (adultos o pares) y que, cuando se potencian positivamente dichos aspectos, allanan la tarea de aprender. Es en este sentido que se piensa al aprendizaje como un proceso de construcción conjunta, a partir de la cooperación, la confrontación de ideas y de significados, la búsqueda de acuerdos y consensos.

Las actividades de enseñanza, creemos, se deben caracterizar por la intervención activa en la propuesta de situaciones de aprendizaje problematizadoras, para permitir la interacción entre el contenido educativo y los esquemas de aprendizaje del alumno, en pos del conflicto cognitivo.
Es de destacar que los alumnos ingresantes a la institución provienen de diversas escuelas primarias de la ciudad y alrededores (lo que imposibilita una articulación previa entre equipos docentes), con realidades socioeconómicas diferentes pero no necesariamente identificables, que han transitado por un cursillo de ingreso y rendido un examen en las áreas de matemática y lengua, pero que esto no garantiza la homogeneidad en el logro de las competencias esperables en el nivel.
En muchos contenidos se presentarán rupturas entre lo aprendido en el nivel primario y lo que se enseña en el nivel actual, así como también obstáculos de tipo epistemológico; estos conflictos cognitivos son tomados de base para el desarrollo de las competencias que se desean lograr.

La duda desde una mirada motivadora

Marcadamente, año tras año, venimos identificando una carencia en poder definir conceptos matemáticos y aplicarlos en diversas situaciones, por parte de los ingresantes. Ante la pregunta del "*¿por qué?*" la respuesta inicial es la del *"porque sí, así me lo enseñaron…"*. En nuestra mirada del aprendizaje no serviría de nada explicar el por qué si el alumno no evidencia la necesidad de conocerlo.
El diseño didáctico que presentaremos parte, a través del discurso docente en el aula, de la creación de una ruptura en relación a lo que nosotros denominamos mirada estática de la matemática. Un alumno que no ha visto la necesidad de preguntarse sobre los orígenes de lo que se le enseña, sobre si es correcto o no, lógico para su estructura cognitiva, el para qué, el cómo, etc., estará mirando los resultados de una ciencia que para él se ha construido en forma lineal, sin equívocos.
Como bien sabemos esto se aleja bastante de la construcción de cualquier ciencia y más en la matemática, perseguimos entonces comenzar a rotar la mirada para entenderla como una ciencia dinámica y en constante crecimiento. Para ello es necesario que los alumnos conozcan "su cocina", cómo se hace matemática.

Etapas de la situación

1) Crear la duda…es decir la necesidad de saber.

Ante una pregunta del tipo: *"¿En todos los triángulos la suma de las amplitudes de sus ángulos interiores es 180°?"*, se comienza a construir a través de un intercambio de ideas, conducido por el docente, la incertidumbre…se escuchan frases como *"¿pero qué está diciendo?…siempre me dijeron que sí"; "sí porque si recorto las puntas forma un ángulo llano"; "sí porque en los triángulos equiláteros cada ángulo mide 60°"*… Y así muchas otras. Las respuestas del docente son encaradas como preguntas abiertas, para crear clima de incertidumbre de forma tal que los alumnos ansíen una salida a este quiebre que se ha presentado: *"¿ah, pero entonces todo lo que me enseñaron está mal?"*. Y una respuesta posible del docente puede ser *"¿y quizás…?"*.
Es aquí donde el docente describe en un lenguaje accesible el surgimiento de las geometrías no euclídeas, la idea de los postulados, las propiedades para que los alumnos comiencen a percibir de dónde surgieron los conceptos y propiedades que han estudiado y aplicado años anteriores.

2) El pato negro…

Lo que se expone a continuación corresponde a una versión del diseño didáctico realizado para dar respuesta a lo planteado en el punto 1). El mismo se encuentra publicado en el libro[1] Matemática I que hemos escrito profesoras del nivel, para desarrollar todo el programa de primer año.

➢ ***Razonamiento en matemática***

El razonamiento es el proceso mediante el cual se sacan conclusiones a partir de determinada información. En muchas oportunidades, al observar varias veces que una acción produce el mismo resultado, concluimos que esa acción tendrá siempre ese resultado.

Vemos un ejemplo de este tipo de razonamiento en la Figura 1.

Figura 1. Generalización.

Enseguida nos podemos dar cuenta que la generalización a la que se llega en el ejemplo es falsa. Para demostrar que una generalización es falsa, se puede citar un ***contraejemplo*** (son ejemplos que invalidan las generalizaciones falsas), en este caso la existencia de un pato negro.
Veamos a continuación una generalización pero ahora en matemática:

Generalización: "Si un cuadrilátero tiene cuatro lados iguales, tiene cuatro ángulos interiores iguales".

Para demostrar que esta generalización es falsa debemos presentar un cuadrilátero con cuatro lados iguales que no tenga cuatro ángulos iguales.

Contraejemplo: el cuadrilátero $EFGH$ (Figura 2) tiene todos sus lados iguales, pero el ángulo $H\hat{E}F$ no es igual con el ángulo $E\hat{F}G$

[1] Kernot, S., Santarrone, M. A., Veronesi, C. (2014). Matemática I. Santa Fe: EIS, UNL.

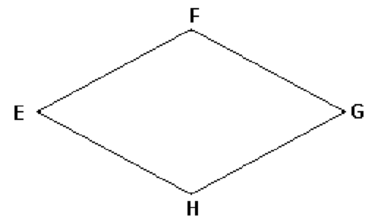

Figura 2. Un contraejemplo

Todas las propiedades y teoremas que aprendiste hasta el momento en matemática son generalizaciones verdaderas, ya que suceden en todos los casos. Por ejemplo:

Generalización: "La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es 180º".

Podemos verificarla para un triángulo cualquiera por ejemplo aplicando el siguiente procedimiento:

Dibuja un triángulo en una hoja de papel, recórtalo y corta sus esquinas. Luego, junta los recortes (como se muestra en la Figura 3).

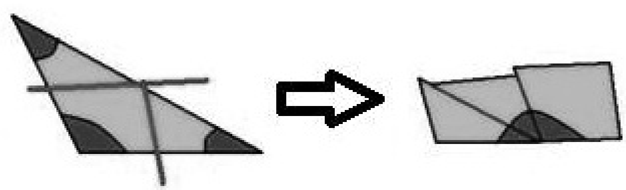

Figura3. Suma de ángulos interiores de un triángulo

¿Qué se observa acerca de la suma de las medidas de los ángulos interiores de cada triángulo?

…………………………………………………………………………………………………….

Para demostrar que esta generalización es verdadera no basta con medir en uno o varios casos particulares. Más delante, luego de aprender los conceptos desarrollados en el capítulo 3 del libro, estarás en condiciones de entender la demostración correspondiente a esta propiedad.
Para demostrar que una generalización es verdadera para todos los casos uno de los razonamientos que se utiliza en matemática es el ***razonamiento deductivo***.
El razonamiento deductivo requiere la aceptación de unas cuantas generalizaciones básicas sin probarlas. Estas generalizaciones se llaman ***postulados***.

Las generalizaciones verdaderas, se llaman ***teoremas.*** Los teoremas pueden probarse con la ayuda de definiciones, postulados y la lógica del razonamiento deductivo**.** Cada teorema consta de las siguientes partes:

* **Enunciado del teorema:** expresa las condiciones que se imponen a los elementos que intervienen y también expresa la propiedad que se desea probar.
* **Hipótesis:** es la expresión de las condiciones impuestas a los elementos que intervienen.
* **Tesis:** es la expresión de la propiedad que se desea demostrar.
* **Demostración:** es el razonamiento lógico y deductivo que conduce a probar la Tesis. Aquí es donde pueden intervenir definiciones, postulados y otros teoremas ya probados. También se pueden utilizar los datos o condiciones establecidos en la Hipótesis.

<u>Ejemplo de la demostración de un teorema</u>

* Enunciado: Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
* Hipótesis: $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son ángulos opuestos por el vértice
* Tesis: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$
* Demostración:

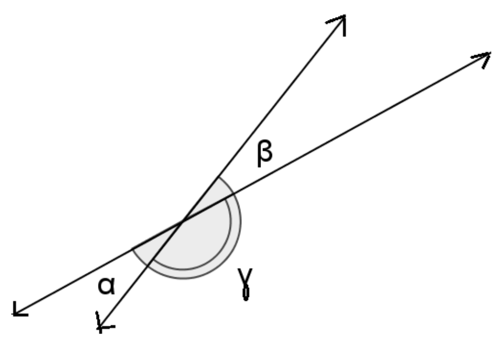

Figura 4 Figura de análisis para la demostración del teorema

Considerando la Figura 4, el ángulo $\hat{\gamma}$ es adyacente al $\hat{\alpha}$; como la suma de dos ángulos adyacentes es un ángulo llano, se tiene:

$\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 1$ llano.
En consecuencia: $\hat{\gamma}$ es suplemento de $\hat{\alpha}$.

Pero el $\hat{\gamma}$ es también adyacente del $\hat{\beta}$, por lo tanto:

$\hat{\beta} + \hat{\gamma} = 1$ llano.
En consecuencia: $\hat{\gamma}$ es también suplemento de $\hat{\beta}$.

Pero dos ángulos que tienen igual suplemento son iguales; luego, como $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ tienen el mismo suplemento, resultan iguales, es decir:

$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ que es la tesis y por lo tanto se ha demostrado el teorema.

Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica en ambos casos.

a) Un triángulo que tiene dos de sus lados que miden 3cm y 4cm respectivamente, tiene área 6 cm^2.
b) Todo triángulo equilátero es isósceles.
c) La sustracción entre dos números naturales da como resultado otro número natural.
d) Si a un número natural se le suma su consecutivo se obtiene por resultado un número par.

---

3) Evidencias de las competencias alcanzadas.
Para evaluar la competencia que se espera en el alumno, que pueda justificar correctamente si una conjetura es verdadera o falsa, es decir si es falsa dar el contraejemplo correspondiente y si es verdadera razonar deductivamente a partir de las hipótesis para arribar a la tesis, se realiza un trabajo sostenido y de carácter espiralado. Las propiedades y definiciones de los nuevos contenidos abordados se trabajan a partir de la clasificación y justificación de enunciados verdaderos o falsos.

A continuación se brindan algunos ejemplos, extraídos de temarios de evaluaciones escritas:

- ✓ Los cuadrados son rectángulos.
- ✓ Dos semirrectas son opuestas si tienen el mismo origen
- ✓ Un triángulo cuyas medidas de sus lados son 7u, 6u y 8u no es rectángulo.
- ✓ Si en un triángulo isósceles, la medida de uno de los ángulos iguales es 60° entonces el triángulo es equilátero.
- ✓ Si a ϵ Z, entonces –a no necesariamente es un número entero negativo.
- ✓ $Si\ a \in Z \Rightarrow \frac{a}{a} = 1$
- ✓ No se cumple la propiedad conmutativa en la resta de números enteros.
- ✓ - -8.4=-32
- ✓ $-\frac{4}{6}$ y $-\frac{10}{15}$ no son fracciones equivalentes.
- ✓ $\sqrt{-81}$ no tiene solución en Z.

- ✓ Todo número elevado a la cero da uno.
- ✓ $Si\ a \in Q \Rightarrow a^{-1} = -a$
- ✓ Si **a** є Q^- entonces –a = lal
- ✓ $Si\ b \in Q \wedge b \neq 0 \Rightarrow b^{-1}.b = 1$
- ✓ 0 es un número racional.
- ✓ Siendo m un número entero, el valor numérico de la expresión algebraica $-m^3$, es siempre menor que cero.
- ✓ Si $a \in Z^+ \wedge b \in Z^- \wedge n \in N \Rightarrow (a.b)^n < 0$
- ✓ 0:0 es indeterminado.
- ✓ $2-4(x+5) = -4x+22$
- ✓ 0^0 no se define
- ✓ $a \in Z \wedge n,m \in N \Rightarrow \left(a^n\right)^m = a^{n.m}$
- ✓ Todos los sólidos de revolución son convexos.
- ✓ $Si\ a \in Z,\ a^0 = 1$
- ✓ $\sqrt[4]{-64}$ no tiene solución en los números enteros.
- ✓ $Si\ a \in Z \wedge b \in Z, n \in N\ ;\ (a+b)^n = a^n + b^n$
- ✓ $Si\ a \in Z^-, n \in N \wedge par \Rightarrow a^n > 0$

Se puede evidenciar que en algunos casos se particulariza la propiedad con medidas o números para que le resulte más accesible la justificación al alumno.
Al final del año, cuando se trabaja con contenidos de la segunda parte de geometría es cuando se ponen en juego las demostraciones con más rigurosidad[2].
En general la mayoría de los alumnos van realizando justificaciones cada vez más completas y complejas, llegando a realizar argumentaciones que rozan demostraciones matemáticas simples.
Sostenemos que la necesidad de saber los conceptos teóricos en términos verbales hace que la teoría en matemática cobre vida, que se pueda trabajar con ella para descubrir cosas nuevas, y es entonces cuando se puede percibir el dinamismo propio en la matemática, su esencia más allá de su utilidad. Creemos fundamental cultivar en nuestros alumnos dos razonamientos, demostrativo y plausible, ya que uno completa el otro. En el primero lo significativo es distinguir una prueba de una intuición, en el otro es distinguir entre intuiciones más o menos razonables; enseñar a nuestros alumnos que las verdades matemáticas dependen lógicamente unas de otras, para que vean en la matemática una ciencia en movimiento, en construcción.

DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

Todo lo antes expuesto se basa en una problemática detectada en la práctica docente y una propuesta de solución trabajada año tras año, que experimentalmente creemos que ha resultado. Pero los resultados no han sido puestos a rigor científico y eso es lo que se pretende en el futuro, a partir de un trabajo de investigación.

[2] Ver capítulo III del libro.

En la investigación social, los fenómenos en un principio son interpretados por los mismos protagonistas, en segundo término por los científicos. En nuestro caso estamos participando de ambos momentos, y por ende debemos tener el suficiente cuidado de no caer en la abdicación empirista. El conocimiento científico consiste en realizar interpretaciones de segundo grado, es decir su misión fundamental es problematizar el fenómeno descripto en una primera instancia.

Lo observado con preocupación inicialmente fue que los ingresantes a la Escuela Industrial tienen una mirada contemplativa ante los contenidos matemáticos y una fuerte verosimilitud hacia lo dictado por sus maestras en la escuela primaria. Esto para nuestra visión del aprendizaje, representa un obstáculo didáctico importante para seguir construyendo los conocimientos previstos para el nivel.

Sin darnos cuenta, al tratar de dar solución a la problemática planteada a los largo de estos años, hemos avanzado en los primeros lineamientos del diseño de investigación. La interpretación de segundo grado de la problemática nos ha llevado al planteo del objetivo principal: “Comparar las concepciones que tienen los alumnos de primer año de la Escuela Industrial Superior de la ciudad de Santa Fe, con respecto a la matemática en relación a su dinámica, antes y después de la intervención docente a través del uso del razonamiento hipotético deductivo”.

Aquí se evidencia la acción cognitiva que es la de comparar, convirtiendo la comparación en un elemento que nos permite comprender “por fuera” nuestro objeto de interés, controlando de alguna manera nuestra tarea de investigador.

Siguiendo a Ragin (2007) en la investigación comparativa, el examen de la diversidad, de los patrones parecidos y diferentes, va de la mano del estudio de las causas.

El planteo de las preguntas de investigación lleva consigo nuevamente resistencias internas que debemos atravesar para despojarnos de prejuicios o ideas preconcebidas. Hemos elaborado las siguientes:

- ¿Cómo conciben los alumnos a la matemática como ciencia? ¿Estática o dinámica?
- ¿Qué prácticas de enseñanza favorecen la concepción dinámica de la matemática?
- ¿Se pueden distinguir características institucionales que favorecen a la concepción estática de la matemática?
- ¿Cuáles son las características de los alumnos que logran, más rápidamente, el cambio en la concepción dinámica de la matemática?

Como se ve en el planteo anterior de esta comunicación, son preguntas para las que creemos tener respuesta a algunas de ellas. He aquí la problemática: cómo alejarnos de nuestros preconceptos para poder arribar a una conclusión basada en la indagación que puede o no ser satisfactoria a lo preconcebido.

De acuerdo a las preguntas, la investigación será de tipo cualitativa donde se abordarán métodos y técnicas que perseguirán la triangulación como forma de control permanente de los resultados parciales obtenidos. Se analizarán:

- ✓ respuestas dadas en la primer actividad del año-ver pág. 15 libro Matemática I, por parte de los alumnos de un curso determinado.
- ✓ respuestas de los verdaderos y falsos tomados en la primera evaluación y en la última evaluación del año.
- ✓ carpeta de alumnos en séptimo grado. (escogidos de acuerdo a las respuestas de los verdaderos y falsos tomados en la primera evaluación, su rendimiento en el trimestre y las respuestas dadas en la primera actividad del año).
- ✓ calificaciones de los alumnos

Se piensa además en la metodología de Grupo Focal con padres, para indagar lo que han plasmado en el hogar los alumnos sobre su visión de la matemática antes y después de la intervención docente.
Consideramos que investigar implica crear las condiciones de democratización y socialización de las metodologías y conocimientos que se produzcan como resultado de procesos indagativos. Sostenemos que la investigación es una de las tareas del profesor, en el sentido que lo involucra en procesos y reflexiones que requieren rigurosidad para una intervención seria y comprometida, aunque muchas veces no se disponga del tiempo para formalizarlos en un escrito.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bachelard, G. (1974). *La Formación del Espíritu Científico.* Buenos Aires: Siglo XXI Editores.

Jaffe, A., Quinn, F. (1993). Theoretical Mathematics: Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics. *Bulletin of the AMS*, (29) 1-13.

Jourdain, P. (1976). *La naturaleza de la matemática, en el mundo de las matemáticas*. Vol I. Barcelona: Grijalbo.

Kernot, S., Santarrone, M. A., Veronesi, C. (2014). *Matemática I*. Santa Fe: EIS, UNL. Disponible en http://www.libreroonline.com/argentina/editorial/l-a-f/pag-20308 Consultado el 21/08/15

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza editorial.

Poincaré, H. (1902). *La Science et l´Hypothése*. París: Alcan (Traducción: Ciencia e Hipotesis. Madrid: Austral, 1963).

Popper, K. (1979). *Desarrollo del conocimiento científico. Conjeturas y refutaciones*. Buenos Aires: Paidós.

Ragin, C. (2007). *La construcción de la investigación social. Introducción a laos métodos y su diversidad*. Colombia: Siglo del Hombre Editores.

Senior Martínez, J. E. (2001). El surgimiento de las teorías no euclidianas y su influencia en la filosofía de la ciencia del siglo XX. *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia*. Vol 2. (4), (5), 45-63.