

Aproximación convexa para los backorders de una política de nivel crítico con demanda continua

Pablo Escalona y Edgard Iturrieta

*Departamento de Industrias, Universidad Técnica Federico Santa María,
Avenida España 1680, Valparaíso, Chile.*

Resumen En este artículo se estudia la política de nivel crítico con full-backorder cuando el sistema de inventario enfrenta demanda aleatoria de dos clases de clientes (alta y baja prioridad). Los costos de backorders son diferenciados para cada clase de cliente y su demanda se distribuye normal. Utilizando el enfoque *state-dependent demand* obtenemos una aproximación para el inventario a la mano basada en una aproximación convexa de los backorders de cada clase. Para determinar los parámetros de la política de nivel crítico se formula un problema de optimización de costos con función objetivo convexa. El máximo error relativo inducido por la aproximación es de un 5.85 % para los experimentos realizados.

Keywords: Inventory system, Critical level policy, shortage penalty cost, continuous distributed demand, two demand classes

1. Introducción

Una política de nivel crítico es un modelo de control para el racionamiento del inventario entre diferentes clases de clientes. Su principal aplicación es en sistemas de inventario que deben proveer niveles de servicio diferenciados a dos o más clases de demanda. Esta política puede ser implementada para varias políticas de pedido y políticas de revisión, por ejemplo: el modelo tradicional (Q, r) es extendido a una política (Q, r, C) donde Q es el lote de pedido, r es el punto de reorden y $C := \{C_1, \dots, C_{n-1}\}$ es el conjunto de niveles críticos para racionar n clases de demanda; y una política *base stock* es extendida a un modelo de inventario (S, C) donde S corresponde al nivel *base stock*.

Consideremos la implementación de una política de nivel crítico para items de alta rotación (fast-moving items). Para estos items es conveniente modelar la demanda con una distribución continua (Axsäter, 2006). Los trabajos previos asociados a una política de nivel crítico sólo han considerado el caso de demanda discreta, en particular demanda Poisson, la cual es adecuada para modelar items de baja rotación (slow-moving items). El objetivo de este paper es determinar los parámetros de una política de revisión continua (Q, r, C) y full-backorder para items de alta rotación, donde el racionamiento es usado para proveer niveles de servicio diferenciados a dos clases de clientes (alta y baja prioridad). En

este artículo, consideraremos que toda demanda no atendida es backorder, asumiendo un costo de penalización por incumplimiento según el tipo de demanda insatisfecha.

Dada la estrategia de control de inventario, formulamos un problema de optimización de costos para determinar los parámetros de la política de nivel crítico. Asumimos que el lote de pedido Q se puede obtener a través del modelo de lote económico (EOQ), por lo tanto, las variables de decisión son el punto de reorden r y el nivel crítico C . La operación del inventario es modelada a través del enfoque *state-dependent demand* lo que permite obtener una expresión aproximada para el inventario a la mano basada en una aproximación convexa de los backorders para cada clase. Esta aproximación permite formular un problema convexo de minimización de costos que puede ser resuelto a través de un solver para optimización no lineal convexo.

El resto del artículo se estructura como sigue: en la Sección 2 se hace una revisión de la literatura asociada a la política de nivel crítico; la Sección 3 describe operacionalmente al sistema de inventarios y se formula un problema de optimización de costos; en la Sección 4 se demuestra la convexidad de los backorders; en la Sección 5 se exponen resultados del estudio computacional y finalmente en la Sección 6 se presentan conclusiones y extensiones de este artículo.

2. Trabajos relacionados

Una revisión exhaustiva del racionamiento de inventario puede ser encontrada en el trabajo de Kleijn and Dekker (1999) y una clasificación en el trabajo de Teunter and Haneveld (2008). Nuestro modelo corresponde a una política de nivel crítico de revisión y demanda continua. En este sentido, Nahmias and Demmy (1981) fueron los primeros en estudiar la política de revisión continua con dos clases de demanda. Melchioris et al. (2000) también analizan un modelo de inventario (Q, r, C) pero a diferencia de Nahmias and Demmy (1981) consideran un ambiente lost sales. (Isotupa, 2006) presenta un modelo bajo los mismos supuestos que Melchioris et al. (2000) pero con lead time exponencialmente distribuido. Tempelmeier (2006) considera una política (Q, r, C) con revisión continua, en tiempo discreto para dos clases de demanda y full-backorder.

Cuando se implementa una política de nivel crítico con full-backorder, puede suceder que el lote de reabastecimiento entrante no sea lo suficientemente grande para cubrir los backorders. Por lo tanto, es importante cómo los backorders son satisfechos. Esta política es difícil de analizar matemáticamente y dada su complejidad varios autores se focalizan en reglas sub-óptimas pero factibles de implementar, e.g., el mecanismo *threshold-clearing* de Deshpande et al. (2003) y el esquema *FCFS type clearing* de Arslan et al. (2007). Deshpande et al. (2003) analizan el mismo modelo de racionamiento que Nahmias and Demmy (1981) y derivan expresiones para los backorders e inventario a la mano en estado estable. Basados en estas expresiones Deshpande et al. (2003) proponen un modelo de optimización de costos y desarrollan un algoritmo para computar los parámetros óptimos de la política de nivel crítico. Arslan et al. (2007) proponen un

modelo de nivel de servicio para obtener los parámetros óptimos de una política de nivel crítico con múltiples clases de demanda. Wang et al. (2013b) analizan la política de racionamiento bajo las mismas condiciones operacionales que Deshpande et al. (2003) pero consideran un criterio mixto de servicio con costos de penalización y restricciones de nivel de servicio de tipo fill-rate.

De la literatura revisada, los trabajos de Dekker et al. (2002), Wang et al. (2013a) y Möllering and Thonemann (2010) proponen problemas de nivel de servicio para determinar los parámetros óptimos de la política de nivel crítico. Dekker et al. (2002), analizan la política de nivel crítico cuando el sistema de inventario opera bajo una política de revisión continua lote por lote y lost sales. Möllering and Thonemann (2010) analizan una política de revisión periódica *base stock* con dos clases de demanda, lead time determinístico y full-backorder con restricciones de nivel de servicio tipo 1 o fill-rate. Wang et al. (2013a) analizan el mismo modelo que Möllering and Thonemann (2010) pero consideran una política de racionamiento anticipativo. Esta política reserva inventario para la clase de alta prioridad considerando un nivel crítico constante y el lote de reabastecimiento entrante en el próximo periodo.

Todos los autores anteriores resuelven problemas de revisión periódica o continua con demanda discreta. Por lo tanto, hasta donde sabemos, no existe un modelo de nivel crítico para el caso de demanda continua considerado en este artículo.

3. Formulación del problema

Consideremos un centro de distribución que atiende a dos clases de demanda $i \in \{1, 2\}$, donde $i = 1$ representa a la clase de alta prioridad e $i = 2$ a la de baja prioridad. Sea $D_i(t, t + \tau)$ la demanda de clase i en el intervalo $[t, t + \tau]$, una variable aleatoria continua normalmente distribuida con media $\mu_i > 0$ y varianza $\sigma_i^2 > 0$. Asumiendo que ambas demandas son independientes entre sí, la demanda total de ambas clases en el intervalo $[t, t + \tau]$ corresponde a $D(t, t + \tau) = D_1(t, t + \tau) + D_2(t, t + \tau) = D(\tau)$, con $D(\tau) \sim N(\mu\tau, \sigma^2\tau)$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$ y $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

El sistema de inventarios opera bajo una política de nivel crítico (Q, r, C) de revisión continua, full-backorder y lead time determinístico. Cuando el nivel de inventario cae bajo el punto de reorden r , se emite una orden de reabastecimiento de $Q > 0$ unidades, la cual arriba después de $L > 0$ unidades de tiempo. Mientras el nivel de inventario sea mayor que el nivel crítico C , ambas clases de demanda son satisfechas desde el inventario a la mano. Una vez que el nivel de inventario es menor a C , sólo la clase de alta prioridad es atendida y la clase de baja prioridad es backorder. Si el nivel de inventario llega a cero, ambas clases son backorder.

Sea b_i el costo unitario por unidad de tiempo de no satisfacer la demanda de clase i con $b_1 > b_2 > 0$; y h el costo de almacenamiento unitario por unidad de tiempo.

Dado el mecanismo de priorización de los clientes, definimos al costo de inventario por unidad de tiempo en el instante t como la suma de costos de almacenamiento y costos de backorders de la siguiente manera:

$$h \cdot OH(t) + b_1 \cdot BO_1(t) + b_2 \cdot BO_2(t),$$

donde $OH(t)$ es el inventario a la mano en t y $BO_i(t)$ es el backorder de clase i en t . En lo sucesivo, se determinarán expresiones para ambos componentes del costo total.

3.1. Costo de almacenamiento en estado estable

En la política tradicional (Q, r) es fácil computar el valor esperado del inventario a la mano y backorders en estado estable a partir de la función de distribución del nivel de inventario, ya que el inventario a la mano es el componente positivo del nivel del inventario mientras que los backorders son los componentes negativos del inventario a la mano (Axsäter, 2006). Para una política (Q, r, C) el nivel de inventario es el inventario a la mano menos todos los backorders, es decir, $IL(t+L) = OH(t+L) - BO_1(t+L) - BO_2(t+L)$. Por otro lado, para la política (Q, r, C) sigue siendo válido que $IL(t+L) = IP(t) - D(L)$, donde $IP(t)$ es la posición del inventario en t y $D(L)$ la demanda total durante el lead time (Deshpande et al., 2003). Además, la distribución de $IP(t)$ es uniforme en el intervalo $[r, r+Q]$ (Axsäter, 2006). Luego, el inventario a la mano en $t+L$ es $OH(t+L) = IP(t) - D(L) + BO_1(t+L) + BO_2(t+L)$. Tomando valor esperado y luego límite $t \rightarrow \infty$, el valor esperado del inventario a la mano en estado estable es:

$$\mathbb{E}(OH(\infty)) = \frac{Q}{2} + r - \mu L + \mathbb{E}(BO_1(\infty)) + \mathbb{E}(BO_2(\infty)), \quad (1)$$

donde $BO_i(\infty)$ son los backorders en estado estable para $i = 1, 2$. Luego, el valor esperado del costo de almacenamiento por unidad de tiempo en estado estable (steady-state holding cost) es :

$$\mathbb{E}(HC) = h \left(\frac{Q}{2} + r - \mu L + \mathbb{E}(BO_1(\infty)) + \mathbb{E}(BO_2(\infty)) \right) \quad (2)$$

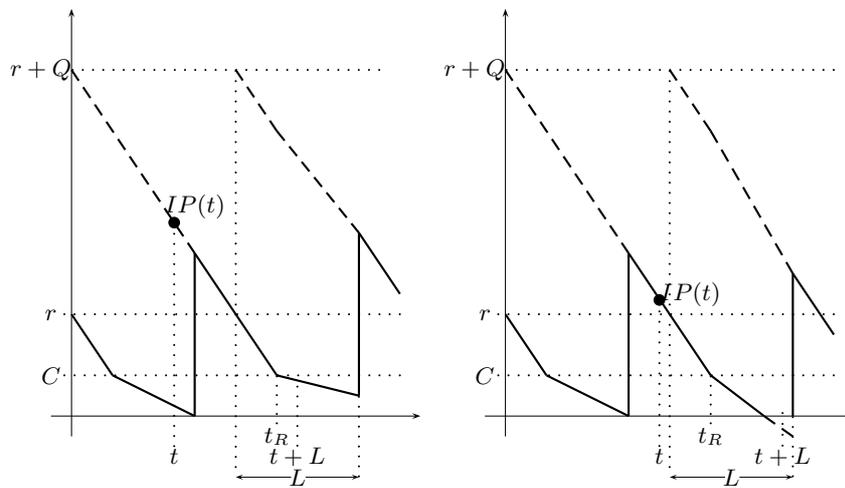
3.2. Costo de backorder en estado estable

Consideremos un tiempo arbitrario $t+L$. El sistema de inventario está en racionamiento en el tiempo $t+L$ si $IP(t) - D(t, t+L) < C$. Luego, si el sistema está en racionamiento en el tiempo $t+L$ implica que en el actual ciclo de reabastecimiento el nivel del inventario alcanzó el nivel crítico C . Bajo la condición de racionamiento, sea t_R el último instante en el que el nivel del inventario alcanzó el nivel crítico C . Luego, los backorders de baja y alta prioridad en $t+L$ son respectivamente:

$$BO_2(t+L) = \begin{cases} D_2(t_R, t+L) & \text{si } IP(t) - D(t, t+L) \leq C \\ 0 & \sim \end{cases} \quad (3)$$

$$BO_1(t+L) = \begin{cases} [D_1(t_R, t+L) - C]^+ & \text{si } IP(t) - D(t, t+L) \leq C \\ 0 & \sim \end{cases} \quad (4)$$

La figura 1 muestra dos ciclos de la política (Q, r, C) con presencia de backorders. La figura 1a representa un ciclo con backorder de clase 2 y la figura 1b un ciclo con backorders de ambas clases.



(a) Backorder de clase 2 en $t+L$ (b) Backorder de clase 1 y 2 en $t+L$

Figura 1: Ciclos típicos de una política (Q, r, C) con backorders de dos clases

La posición del inventario $IP(t)$ no provee suficiente información para determinar los backorders en estado estable (Deshpande et al., 2003). Para suplir esta falta de información proponemos aproximar la demanda de clase i durante el periodo de racionamiento según la siguiente relación:

$$\frac{D_i(t_R, t+L)}{D(t_R, t+L)} = \frac{\mu_i}{\mu}, \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad (5)$$

donde $D(t_R, t+L) = D(t, t+L) - IP(t) + C$, i.e., nuestra aproximación considera que la demanda de clase i durante el periodo de racionamiento es proporcional a la demanda total de ambas clases y que el factor de proporcionalidad corresponde

a la relación entre los valores esperados de la demanda unitaria por unidad de tiempo. Luego, reemplazando la ecuación (5) en (3) y (4), tomando valor esperado, condicionando en la posición del inventario $IP(t)$ y tomando límite $t \rightarrow \infty$, la aproximación de los backorders en estado estable de clase 1 y 2 son respectivamente :

$$\mathbb{E}(BO_1(\infty)) = \frac{\sigma'^2}{Q} \frac{\mu_1}{\mu} \left[H\left(\frac{r+C'-\mu'}{\sigma'}\right) - H\left(\frac{r+Q+C'-\mu'}{\sigma'}\right) \right] \quad (6)$$

$$\mathbb{E}(BO_2(\infty)) = \frac{\sigma'^2}{Q} \frac{\mu_2}{\mu} \left[H\left(\frac{r-C-\mu'}{\sigma'}\right) - H\left(\frac{r+Q-C-\mu'}{\sigma'}\right) \right], \quad (7)$$

donde: $\mu' = \mu L$, $\sigma' = \sigma\sqrt{L}$, $C' = C\left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right)$,

$$H(x) = \int_x^\infty G(v)dv = \frac{1}{2} [(x^2 + 1)(1 - \Phi(x)) - x\varphi(x)],$$

$\Phi(x)$ función de distribución acumulada de la normal estándar y $\varphi(x)$ función densidad de la normal estándar.

Como $H(x)$ es decreciente y convexa (Axsäter, 2006), es fácil notar que $\mathbb{E}(BO_1(\infty))$ es decreciente en r y C , mientras que $\mathbb{E}(BO_2(\infty))$ es creciente en C y decreciente en r . Este mismo comportamiento es descrito por Deshpande et al. (2003) para demanda Poisson. Luego, el costo esperado de los backorders por unidad de tiempo en estado estable es:

$$\mathbb{E}(BOC) = b_1\mathbb{E}(BO_1(\infty)) + b_2\mathbb{E}(BO_2(\infty)). \quad (8)$$

3.3. Función de costo total

Sea $AC(r, C) = h\mathbb{E}(OH(\infty)) + b_1\mathbb{E}(BO_1(\infty)) + b_2\mathbb{E}(BO_2(\infty))$ el costo total esperado por unidad de tiempo. Utilizando las ecuaciones (2), (5), (6) y (7) y reagrupando términos:

$$\begin{aligned} AC(r, C) = & h\left(\frac{Q}{2} + r - \mu L\right) \\ & + (b_1 + h)\frac{\sigma'^2}{Q} \frac{\mu_1}{\mu} \left[H\left(\frac{r+C'-\mu'}{\sigma'}\right) - H\left(\frac{r+Q+C'-\mu'}{\sigma'}\right) \right] \\ & + (b_2 + h)\frac{\sigma'^2}{Q} \frac{\mu_2}{\mu} \left[H\left(\frac{r-C-\mu'}{\sigma'}\right) - H\left(\frac{r+Q-C-\mu'}{\sigma'}\right) \right] \quad (9) \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es determinar los parámetros óptimos de la política (Q, r, C) que minimizan el costo total del inventario. Luego, podemos escribir el problema de minimización de costos como el siguiente problema de optimización, denotado como **(P0)**:

Problema **(P0)**

$$\text{Min}_{r,C} AC(r, C) \quad (10)$$

$$s.t \quad r \geq C \geq 0 \quad (11)$$

La restricción (11) impone que el punto de reorden debe ser mayor o igual que el nivel crítico C , lo que responde a que no haya racionamiento antes de emitir la orden de reabastecimiento. Note que la función de costo total $AC(r, C)$ es no lineal producto de la función $H(x)$.

4. Convexidad de la función de costo total $AC(r, C)$

La función $AC(r, C)$ es no lineal, por lo tanto, determinar los parámetros óptimos de la política de nivel crítico resolviendo el problema **(P0)** es complicado matemáticamente, a menos que la función $AC(r, C)$ sea convexa.

Proposición 1. *Los backorders de clase 1 y clase 2 definidos por la ecuaciones (5) y (6) son convexos en r y C .*

Demostración. Demostrar convexidad en r y C requiere demostrar que la expresión $f(s) = H(s) - H(s + q)$ es convexa en s , con $q = Q/\sigma'$. Derivando $f(s)$ con respecto a s :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(s)}{\partial s} &= G(s + q) - G(s) \\ \frac{\partial^2 f(s)}{\partial s^2} &= (\Phi(s + q) - 1) - (\Phi(s) - 1) \\ \frac{\partial^2 f(s)}{\partial s^2} &= \Phi(s + q) - \Phi(s), \end{aligned}$$

donde $G(x) = -\partial H(x)/\partial x$. Como $\Phi(s)$ es estrictamente creciente en s , $f(s)$ es estrictamente convexa en s ya que $q > 0$.

Consideremos ahora los backorders en estado estable de clase 2 dados por la ecuación (7). Aplicando cambio de variable $s = (r - C - \mu')/\sigma'$, redefinimos a $f(s)$ como una función dependiente de r y C :

$$g(r, C) = f\left(\frac{r - C - \mu'}{\sigma'}\right).$$

Note que la función $g : \Re^2 \rightarrow \Re$ es composición entre una función convexa $f : \Re \rightarrow \Re$ y una función afín $s(x) = Ax + b$, donde:

$$A = [1/\sigma' \quad -1/\sigma'] \quad x = \begin{bmatrix} r \\ C \end{bmatrix} \quad b = [-\mu'/\sigma']$$

Luego, si f es convexa, g es convexa al ser una composición entre una función convexa con una función afín en r y C , (Boyd (2004) 3.2.2 *Composition with an*

affine mapping). Concluimos que los backorders de clase 2 en estado estable son convexos en su dominio. El análisis anterior también es válido para los backorders de clase 1. Para esto, basta con redefinir $s(x)$ y $g(r, C)$ considerando:

$$A = 1/\sigma' \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right) \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} r \\ C \end{bmatrix} \quad b = [-\mu'/\sigma']$$

Por lo tanto, $AC(r, C)$ es convexa, y el problema **(P0)** es un problema no lineal y convexo. □

5. Estudio Computacional

El objetivo del estudio computacional es evaluar el desempeño de la aproximación convexa de los backorders propuesta en este trabajo. Generamos 36 instancias en torno a un caso base con los siguientes parámetros: costos de backorder $b_1 = 32000$ y $b_2 = 16000$, costo de almacenamiento $h = 5000$, demandas normalmente distribuidas de medias $\mu_1 = \mu_2 = 5$ y varianzas $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 5$, lead time $L = 60$ y lote de reabastecimiento $Q = 1500$. Para cada instancia determinamos los parámetros óptimos de la política de nivel crítico (en lo sucesivo, r^* y C^*), inventario a la mano y backorders en estado estable. Para esto, formulamos el problema **(P0)** en AMPL y dada su naturaleza no lineal y convexa, utilizamos MINOS 5.51 para resolverlo. Las ecuaciones (6) y (7) fueron formuladas utilizando la librería `amplgsl32.dll`.

Una vez obtenidos los parámetros óptimos r^* y C^* , realizamos una simulación, programada en C, para evaluar los backorders de cada clase e inventario a la mano en estado estable. Sean \bar{BO}_i los backorders de clase i y \bar{OH} el inventario a la mano en estado estable obtenidos de la simulación. Para cada instancia, la simulación consiste en 10 réplicas de 1000 ciclos de reabastecimiento.

Para evaluar la calidad de la aproximación propuesta en este trabajo, comparamos los backorders e inventario a la mano en estado estable con los obtenidos de la simulación. Sean $\Delta BO_i = |BO_i(\infty) - \bar{BO}_i|/\bar{BO}_i$ y $\Delta OH = |OH(\infty) - \bar{OH}|/\bar{OH}$ los errores relativos de los backorders e inventario a la mano en estado estable con respecto a los obtenidos de la simulación dados (r^*, C^*) .

La tabla 1 presenta las 36 instancias evaluadas. Para cada instancia se indica los parámetros, los resultados del proceso de optimización y los resultados de la simulación. El máximo error relativo para los backorders de clase 1 es de 5.85%; 4.61% para los backorders de clase 2 y 0.21% para el inventario a la mano. El promedio del error relativo entre el proceso de optimización y la simulación es 2.26%, 0.42% y 0.04% respectivamente.

Dados los resultados obtenidos, concluimos que la aproximación convexa de los backorders propuesta en este paper es una buena aproximación.

Respecto al comportamiento de los parámetros óptimos (r^*, C^*) tenemos los siguientes comentarios que se derivan de los experimentos computacionales de la tabla 1:

- r^* es creciente en b_i , h , μ_i , L y decreciente en Q ,
- C^* es creciente en b_1 , h y L y decreciente en b_2 , μ_2 ,
- cuando $b_1 = b_2$, el nivel crítico óptimo es $C^* = 0$. Este caso es equivalente a tener una sola clase, y el resultado es el mismo al obtenido por Axsäter (2006).

Con respecto al comportamiento de los backorders tenemos los siguientes comentarios que se derivan de los experimentos computacionales de la tabla 1:

- el backorder de clase 1 es creciente en h , μ_1 , σ_1^2 , σ_2^2 , L y decreciente en b_1 y μ_2 ,
- el backorder de clase 2 es creciente en h , μ_2 , σ_1^2 , σ_2^2 , L y decreciente en b_2 y μ_1 .

6. Conclusiones y trabajo futuro

El presente artículo analiza la política de nivel crítico en un sistema de inventarios que atiende a dos clases de demanda en un ambiente full backorder y que utiliza costos de penalización para priorizar la demanda en periodos de racionamiento. La demanda de cada clase se asume normalmente distribuida, permitiendo formular una expresión aproximada para el inventario a la mano basada en una aproximación convexa de los backorders en estado estable. Planteamos un problema de optimización de costos no lineal y convevo, el cual es resuelto mediante MINOS 5.51 para varias instancias.

Una vez obtenidos los parámetros óptimos de la política de nivel crítico realizamos una simulación con el objetivo de evaluar la calidad de la aproximación convexa de los backorders propuesta en este paper. Los máximos errores relativos inducidos por nuestra aproximación son de 5.85 %, 4.61 % y 0.21 % para los backorders de clase 1, backorders de clase 2 e inventario a la mano. Por lo tanto creemos que nuestra aproximación tiene un buen desempeño.

Existen varios asuntos que pueden ser extensiones de este paper. Uno es la optimización conjunta del lote de pedido, punto de reorden y nivel crítico. Segundo, es expandir los resultados a más de dos clases. Tercero, investigar la relación de equivalencia entre costos de penalización, fill-rate y nivel de servicio tipo I.

Referencias

- Arslan, H., Graves, S., Roemer, T., 2007. A single-product inventory model for multiple demand classes. *Management Science* 53, 1486–1500.
- Axsäter, S., 2006. *Inventory Control*. Springer's, USA.

- Boyd, S., 2004. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, United Kingdom.
- Dekker, R., Hill, R.M., Kleijn, M.J., Teunter, R.H., 2002. On the (s-1,s) lost sales inventory model with priority demand classes. *Naval Research Logistics* 49, 593–610.
- Deshpande, V., Cohen, M., Donohue, K., 2003. A threshold inventory rationing policy for service differentiated demand classes. *Management Science* 49, 683–703.
- Isotupa, K.S., 2006. An (s,q) markovian inventory system with lost sales and two demand classes. *Mathematical and Computer Modelling* 43, 687–694.
- Kleijn, M., Dekker, R., 1999. An overview of inventory systems with several demand classes. *Econometric Institute Report 9838/A*, Erasmus University, Rotterdam, The Netherlands .
- Melchioris, P., Dekker, R., Kleijn, M., 2000. Inventory rationing in an (s,q) inventory model with lost sales and two demand classes. *Journal of the Operational Research Society* 51, 111–122.
- Möllering, K., Thonemann, U., 2010. An optimal constant level rationing policy under service level constraints. *OR Spectrum* 32, 319–341.
- Nahmias, S., Demmy, C., 1981. Operating characteristics of an inventory system with rationing. *Management Science* 27, 1236–1245.
- Tempelmeier, H., 2006. Supply chain inventory optimization with two customer classes in discrete time. *Europe Journal Operations Research* 174, 600–621.
- Teunter, R., Haneveld, W., 2008. Dynamic inventory rationing strategies for inventory systems with two demand classes, poisson demand and backordering. *European Journal of Operational Research* 190, 156–178.
- Wang, D., Tang, O., Huo, J., 2013a. A heuristic for rationing inventory in two demand classes with backlog costs and a service constraint. *Computers & Operations Research* 40, 2826–2835.
- Wang, Y., Zhang, S., Sun, L., 2013b. Anticipated rationing policy for two demand classes under service level constraints. *Computers and Industrial Engineering* 23, 1200–1212.

Instancia N°	Parámetros									Solución óptima de (P0)					Simulación		
	b_1	b_2	h	μ_1	σ_1^2	μ_2	σ_2^2	L	Q	r^*	C^*	$BO_1(\infty)$	$BO_2(\infty)$	$OH(\infty)$	\overline{BO}_1	\overline{BO}_2	\overline{OH}
1	32000	16000	5000	5	5	5	5	60	1500	320.08	77.22	6.95	21.36	498.38	7.09	21.31	498.34
2	48000	16000	5000	5	5	5	5	60	1500	350.67	107.82	3.44	21.36	525.47	3.56	21.30	525.44
3	64000	16000	5000	5	5	5	5	60	1500	367.08	124.22	2.07	21.36	540.51	2.17	21.30	540.52
4	80000	16000	5000	5	5	5	5	60	1500	377.31	134.45	1.40	21.36	550.07	1.48	21.29	550.18
5	32000	20000	5000	5	5	5	5	60	1500	348.65	48.65	6.95	15.10	520.70	7.09	15.05	520.65
6	32000	24000	5000	5	5	5	5	60	1500	369.34	27.96	6.95	11.25	537.53	7.07	11.20	537.60
7	32000	28000	5000	5	5	5	5	60	1500	385.01	12.29	6.95	8.71	550.67	7.06	8.67	550.74
8	32000	32000	5000	5	5	5	5	60	1500	397.30	0.00	6.95	6.95	561.19	7.01	6.92	561.20
9	32000	16000	2500	5	5	5	5	60	1500	444.30	47.00	2.07	6.95	603.32	2.15	6.94	603.25
10	32000	16000	7000	5	5	5	5	60	1500	237.12	93.65	12.18	34.84	434.14	12.37	34.77	434.21
11	32000	16000	9000	5	5	5	5	60	1500	165.37	105.37	18.17	48.70	382.24	18.44	48.68	382.19
12	32000	16000	11000	5	5	5	5	60	1500	108.14	108.14	24.64	60.10	342.88	24.92	60.06	343.03
13	32000	16000	5000	10	5	5	5	60	1500	645.82	102.96	9.26	14.24	519.32	9.40	14.27	518.97
14	32000	16000	5000	15	5	5	5	60	1500	958.69	115.83	10.42	10.68	529.79	10.49	10.69	529.68
15	32000	16000	5000	20	5	5	5	60	1500	1266.41	123.55	11.12	8.54	536.07	11.07	8.53	536.79
16	32000	16000	5000	25	5	5	5	60	1800	1525.87	154.44	13.84	8.53	648.24	14.11	8.15	647.65
17	32000	16000	5000	5	1	5	5	60	1500	320.08	77.22	6.91	21.32	498.30	6.94	21.30	498.42
18	32000	16000	5000	5	2.5	5	5	60	1500	320.08	77.22	6.92	21.33	498.33	7.01	21.32	498.32
19	32000	16000	5000	5	7.5	5	5	60	1500	320.08	77.22	6.97	21.38	498.43	7.16	21.29	498.54
20	32000	16000	5000	5	10	5	5	60	1500	320.08	77.22	7.00	21.41	498.48	7.28	21.25	498.58
21	32000	16000	5000	5	5	10	5	60	1500	594.34	51.48	4.63	28.48	477.45	4.82	28.49	477.13
22	32000	16000	5000	5	5	15	5	60	1500	881.47	38.61	3.47	32.04	466.98	3.65	32.03	466.83
23	32000	16000	5000	5	5	20	5	60	1500	1173.75	30.89	2.78	34.17	460.70	2.92	33.80	461.58
24	32000	16000	5000	5	5	25	5	60	1800	1402.32	30.89	2.77	42.66	547.74	2.90	42.72	547.24
25	32000	16000	5000	5	5	5	1	60	1500	320.08	77.22	6.91	21.32	498.30	7.06	21.26	498.34
26	32000	16000	5000	5	5	5	2.5	60	1500	320.08	77.22	6.92	21.33	498.33	7.07	21.27	498.42
27	32000	16000	5000	5	5	5	7.5	60	1500	320.08	77.22	6.97	21.38	498.43	7.10	21.34	498.42
28	32000	16000	5000	5	5	5	10	60	1500	320.08	77.22	7.00	21.41	498.48	7.13	21.40	498.41
29	32000	16000	5000	5	5	5	5	30	1500	48.65	48.65	6.90	15.05	520.60	7.03	14.99	520.65
30	32000	16000	5000	5	5	5	5	90	1500	620.08	77.22	7.00	21.41	498.48	7.14	21.37	498.48
31	32000	16000	5000	5	5	5	5	120	1500	920.08	77.22	7.05	21.46	498.54	7.21	21.62	497.95
32	32000	16000	5000	5	5	5	5	150	1500	1220.08	77.22	7.10	21.51	498.68	3.01	8.61	200.20
33	32000	16000	5000	5	5	5	5	60	600	488.03	30.89	2.99	8.75	199.78	3.01	8.61	200.20
34	32000	16000	5000	5	5	5	5	60	900	432.05	46.33	4.28	12.92	299.24	4.41	12.90	299.06
35	32000	16000	5000	5	5	5	5	60	2500	133.46	128.70	11.47	35.49	830.43	11.62	35.43	830.49
36	32000	16000	5000	5	5	5	5	60	4000	29.73	29.73	18.30	22.54	1470.57	18.42	22.50	1470.57

Tabla 1: Solución óptima del problema (P0) y simulación para varias condiciones de operación