PROPUESTA DE UN TALLER DE MODELIZACIÓN ALGEBRAICO FUNCIONAL

TETI, CLAUDIA[1,2]; HAIDAR, ALEJANDRA[1,3]; BORTOLATO, SANTIAGO [1,4]; PHILIPPE, VALERIA[1,5]

[1] Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas, Universidad Nacional de Rosario
[2] cteti@fbioyf.unr.edu.ar ; [3] ahaidar@fbioyf.unr.edu.ar
[4] sbortolato@fbioyf.unr.edu.ar; [5] vphilippe@fbioyf.unr.edu.ar

RESUMEN

El presente trabajo pretende difundir una propuesta diseñada e implementada por docentes de Matemática de las carreras de Licenciaturas en Biotecnología, en Química y en Ciencia y Tecnología de los Alimentos de la Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas de la U.N. R. Distintos trabajos de investigación han constatado que determinadas características del álgebra escolar (uso casi exclusivo de las fórmulas como escrituras abreviadas de reglas de cálculo, reducción de tareas específicamente algebraicas a la manipulación formal de expresiones con letras y números y a la resolución de ecuaciones, interpretación de las ecuaciones como igualdades numéricas que se cumplen para algunos valores concretos de las incógnitas) traen como consecuencia la *ausencia del álgebra como instrumento de modelización*, lo cual dificulta enormemente el desarrollo de la modelización algebraico-funcional. En el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, presentamos entonces una propuesta de trabajo en aula taller en la que proponemos emplear el instrumento algebraico de manera que permita la ampliación progresiva de la modelización algebraica hacia la modelización algebraico-funcional. Creemos que podremos lograr el objetivo, cuestión que estamos analizando en base a los datos recabados durante el desarrollo de los talleres.

Palabras clave: álgebra, TAD, taller de modelización.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene por objetivo difundir una propuesta diseñada e implementada por docentes de Matemática de las carreras de Licenciatura en Biotecnología, Licenciatura en Química y Licenciatura en Ciencia y Tecnología de los Alimentos de la Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas de la Universidad Nacional de Rosario.
A través de distintos proyectos de investigación en los que participamos y que pretenden mejorar la enseñanza de la Matemática en nuestra facultad detectamos que el uso, que en general se hace del Álgebra, hace que se dificulte tanto el tratamiento de temas básicos del cálculo diferencial como el desarrollo de la actividad matemática como actividad de modelización.
Nos proponemos emplear el instrumento algebraico de manera que permita la ampliación progresiva de la modelización algebraica hacia la modelización con funciones, explicitando cuestiones que viene a resolver la modelización algebraica y que pueden dar sentido a la inclusión del Álgebra en la currícula de las materias de las carreras de la Facultad.
Plantearemos entonces un sistema inicial apropiado para que su modelización requiera la utilización de las distintas herramientas que componen el álgebra elemental, y que permitan avanzar hacia las relaciones funcionales.
El fundamento teórico en que nos basamos es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Desde la TAD se postula que el Álgebra debe interpretarse como un instrumento genérico de modelización de praxeologías u organizaciones matemáticas (OM).
En este trabajo describimos únicamente algunos de los tipos de cuestiones que generan las sucesivas praxeologías y que requirieron reconstruir algunas de ellas, que se suponía formaban parte del equipamiento praxeológico inicial de los estudiantes, y algunos comentarios respecto de la implementación de la propuesta.

MARCO TEÓRICO

En el campo de investigación en Didáctica de la Matemática, el Programa Epistemológico aborda el problema de la Educación Matemática desde el análisis de las prácticas matemáticas que se llevan a cabo en las diferentes instituciones. En el ámbito de este enfoque, la TAD considera que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización (Chevallard *et al.*, 1997) que está centrada en la noción de Organización Matemática (OM) o praxeología. Toda OM está compuesta por cuatro clases de elementos fundamentales:
- tareas o problemas matemáticos considerados en una institución dada.
- técnicas que permiten realizar las tareas, es decir una manera sistemática de resolver las cuestiones propuestas.
- tecnologías que describen las técnicas utilizadas y justifican su pertinencia para resolver las tareas en las que se aplica. Dichas tecnologías permiten relacionar distintas técnicas y producir otras nuevas.
- teorías, que permiten fundamentar las descripciones y justificaciones tecnológicas. La teoría justifica las tecnologías, tal como éstas justifican las técnicas.

Este sistema formado por los cuatro elementos conforma una OM considerada la unidad mínima de análisis de la actividad matemática.
En el marco de la TAD, el caso particular del álgebra escolar ha sido motivo de investigaciones, algunas de ellas han abordado cuestiones referidas al proceso de

algebrización de OM en la Escuela Secundaria. Distintos trabajos de investigación han constatado que determinadas características del álgebra escolar (uso casi exclusivo de las fórmulas como escrituras abreviadas de reglas de cálculo, reducción de tareas específicamente algebraicas a la manipulación formal de expresiones con letras y números (cálculo algebraico) y a la resolución de ecuaciones, interpretación de las ecuaciones como igualdades numéricas que se cumplen para algunos valores concretos de las incógnitas) traen como consecuencia la *ausencia del álgebra como instrumento de modelización*, lo cual dificulta enormemente el desarrollo de la modelización algebraico-funcional y obstaculiza la emergencia de las cuestiones problemáticas que podrían dar sentido al cálculo diferencial (Ruiz Munzón *et al*., 2010).

Desde la TAD se postula que el álgebra debe interpretarse como un instrumento genérico de modelización de OM. En particular, el álgebra escolar, antes de ser tematizada como objeto explícito de enseñanza, debe utilizarse para profundizar el estudio de determinadas OM previamente construidas.

Como esta teoría considera que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización, Fonseca Bon *et al*., (2014) interpretan la noción de "modelización matemática":

- *Incluye a la modelización intramatemática (*modelización matemática de sistemas matemáticos como una parte esencial de la actividad de modelización, por ejemplo, la modelización algebraica de un sistema numérico o geométrico) que es inseparable de la modelización de sistemas extramatemáticos.
- *Postula que los modelos que se construyen tienen estructura praxeológica y* cuya función principal no es la de parecerse al sistema que modeliza, sino la de *aportar conocimientos* sobre él y hacerlo de la forma más económica y eficaz posible. Además la problemática de la adecuación o *ajuste del modelo al sistema* comporta la tarea de comparación de diferentes modelos de un mismo sistema.
- Describe los procesos de modelización como *procesos de reconstrucción y articulación de OM de complejidad creciente* que necesariamente tienen que partir de cuestiones problemáticas que se plantea una comunidad de estudio y que constituyen la "*razón de ser"* de las OM.

Se indica que para poder formular el problema didáctico como un auténtico problema científico es necesario explicitar un modelo epistemológico de la noción de la matemática escolar en determinada institución y utilizarlo como referencia para analizar los hechos didáctico-matemáticos. Dicho Modelo Epistemológico de Referencia (MER) es una red de praxeologías matemáticas y se concreta mediante una red de cuestiones y respuestas donde éstas tienen estructura praxeológica.

En el marco de nuestra propuesta, adoptamos como MER, el propuesto en el trabajo de Ruiz Munzón *et al.* (2010), en el cual se amplía el modelo epistemológico del álgebra para articularlo con la modelización funcional.

En el modelo epistemológico propuesto, los autores, distinguen diferentes etapas del proceso de algebrización elemental, proponiendo una descripción del proceso de algebrización en términos de ampliaciones sucesivas de determinadas praxeologías matemáticas. Y describen la modelización algebraico-funcional mostrando en qué sentido se puede considerar como un desarrollo de la modelización algebraica.

Proponen tres etapas para el proceso de algebrización elemental:

Identifican la primera etapa del proceso de algebrización con el momento en que a través de la formulación simbólica se pone en juego la necesidad de escribir la secuencia de operaciones, explicitando su estructura de forma global y, por lo tanto, tomando en consideración la jerarquía de las operaciones, las reglas del uso de paréntesis y las propiedades de las relaciones entre ellas (elementos tecnológicos).

El paso a la segunda etapa del proceso de algebrización lo identifican con la necesidad de igualar dos expresiones que contienen los dos mismos argumentos no numéricos. Se requiere de nuevas técnicas, las técnicas de cancelación, puesto que hay que manipular una igualdad como un nuevo objeto matemático (ecuación).

Proponen que la tercera etapa del proceso de algebrización corresponde al momento en que se requiere una fuerte generalización del cálculo ecuacional debido a la necesidad de no limitar el número de variables y de no hacer ningún tipo de distinción entre incógnitas y parámetros. El tipo de cuestiones que provoca esta ampliación tiene relación con el estudio de la variación conjunta de dos o más variables y su repercusión sobre la variación de la expresión algebraica. Las técnicas para abordar estas cuestiones en el ámbito puramente algebraico son bastante limitadas. Cuando las expresiones son más complejas aparecen fórmulas mucho más difíciles de analizar si solo disponemos de técnicas algebraicas.

Es en esta tercera etapa donde consideran que culmina el proceso de algebrización elemental y describen a continuación la modelización algebraico-funcional, mostrando en qué sentido se puede considerar como un desarrollo de la modelización algebraica.

Denominan primer nivel de modelización algebraico-funcional de un sistema el que se materializa en modelos que se expresan mediante funciones aisladas de una única variable y las correspondientes ecuaciones (e inecuaciones) asociadas.

El paso al primer nivel de modelización algebraico-funcional es provocado por tipos de cuestiones que hacen referencia a la variación de una magnitud del sistema en función de otra. El tipo de tareas matemáticas involucradas son las requeridas para estudiar funciones aisladas, es decir, para descubrir las relaciones internas entre los elementos de una misma función y para analizar su comportamiento global.

El segundo nivel de modelización algebraico-funcional de un sistema es el que se materializa en modelos que se expresan precisamente mediante familias de funciones de una variable y las correspondientes ecuaciones (e inecuaciones) paramétricas asociadas. En este segundo nivel se distingue entre parámetros y variables, ya que se trabaja con familias de funciones de una variable, pero no con funciones de dos variables.

Los autores consideran que se alcanza un tercer nivel de modelización algebraico-funcional de un sistema cuando los modelos se expresan mediante familias de funciones de dos o más variables y las correspondientes fórmulas asociadas. En este tercer nivel de modelización el papel de los parámetros y de las variables es intercambiable. Se estudia cómo repercute la variación conjunta de dos o más variables sobre la variación de una función.

En términos generales plantean que, mientras las tareas propias de la modelización algebraica se caracterizan por el hecho de que los datos son *relaciones algebraicas* y la incógnita es también una *relación algebraica*, las tareas específicas de la modelización funcional se caracterizan por incluir el estudio de la *variación continua* de una variable respecto de otra u otras, lo que requiere el uso de técnicas funcionales y, en particular, de las técnicas y el discurso tecnológico-teórico que proporciona el cálculo diferencial.

La propuesta

La propuesta consiste en el desarrollo de actividades para estudiantes del primer año de las Licenciaturas Biotecnología, en Química y en Ciencia y Tecnología de los Alimentos de la Facultad de Cs. Bioquímicas y Farmacéuticas.

Estas actividades se implementan en talleres, no obligatorios y en horarios adicionales a los curriculares, por lo que quienes asisten se supone presentan interés hacia la matemática o son conscientes de la necesidad de reforzar sus conocimientos.

Se propone el trabajo en grupos, con la guía y ayuda de los docentes, y se solicita la presentación de un informe grupal al finalizar cada taller en el que no sólo se presenten los resultados obtenidos sino también la argumentación y fundamentación de los mismos.

Nos situamos en el momento en que los estudiantes se supone dominan las técnicas básicas de resolución de ecuaciones e inecuaciones a través de operaciones aritméticas. O sea, suponemos que los alumnos, en el primer ciclo del nivel universitario, ya han superado las dos primeras etapas del proceso de modelización algebraica elemental propuesto en el MER. O sea que cuentan con un equipamiento praxeológico inicial que les permite realizar la formulación simbólica de expresiones, siguiendo la secuencia de operaciones, explicitando su estructura de forma global y tomando en consideración la jerarquía de las operaciones, las reglas del uso de paréntesis y las propiedades de las relaciones entre ellas, además de técnicas de cancelación para manipular ecuaciones.

Nos situamos entonces en la tercera etapa del proceso de algebrización elemental y su ampliación hacia las etapas del proceso de modelización algebraico-funcional.

Proponemos entonces actividades que consideramos permitirán avanzar desde la modelización algebraica elemental hacia la modelización funcional.

En el primer encuentro planteamos la siguiente situación:

Deseamos construir una pista para autitos de carrera a control remoto de manera que tenga dos tramos rectos de igual longitud y dos tramos semicirculares iguales.
Realiza un bosquejo de las formas posibles para una pista con tales características y decide cual sería la forma más conveniente y por qué.

Esta primera actividad permite a los estudiantes, en primera instancia, familiarizarse con la propuesta de trabajo autónoma y en grupos, donde deben tomar un rol más activo y participativo.

Las tareas involucradas en este primer momento son del ámbito de la geometría: identificar formas posibles y viables para la construcción de la pista (Figura 1). Construir un modelo de la pista, con el objetivo de *aportar conocimiento sobre la situación planteada*.

Los grupos de trabajo proponen distintas formas posibles para la pista, argumentando los criterios de selección, las ventajas y desventajas de cada propuesta.

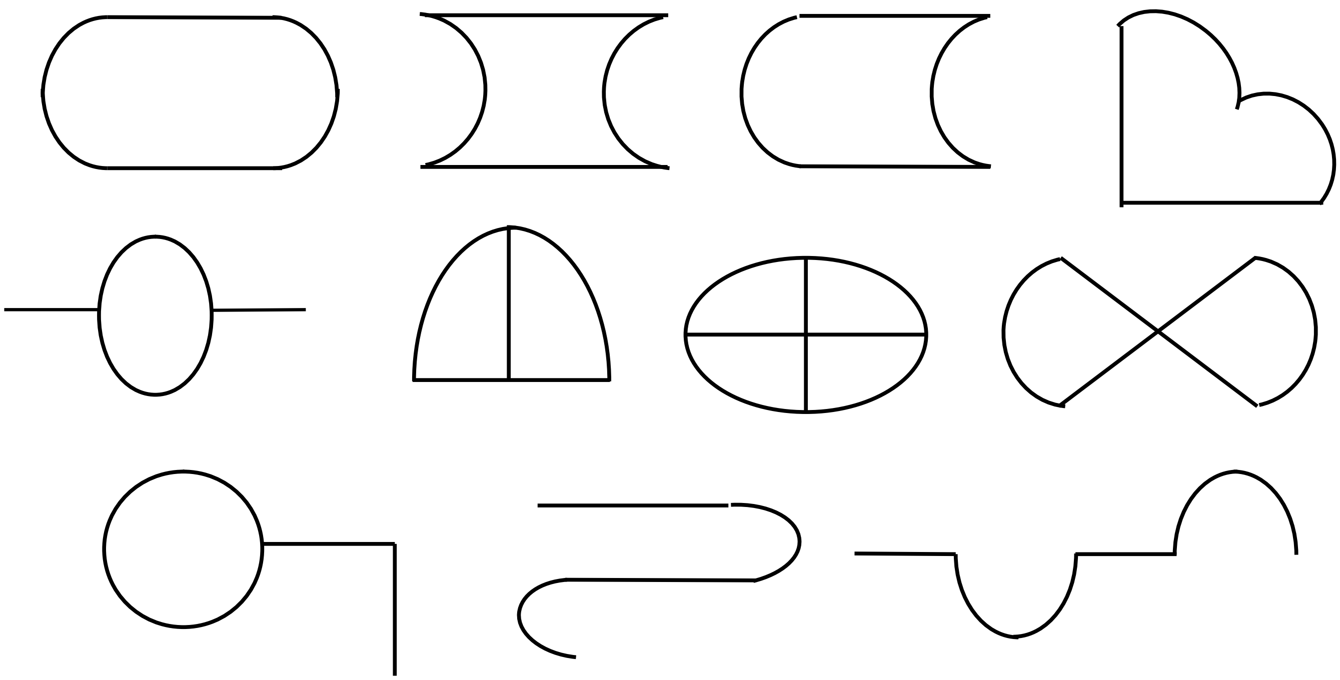

Figura 1: Dibujos de formas posibles y viables para la construcción de la pista.

Los fundamentos para la selección son planteados y discutidos. Se descartan, teniendo en cuenta la situación, las pistas abiertas (no permiten recircular), las que tiene ángulos menores o iguales a 90° (se descarrilarán los autos).

Las formas elegidas resultan: pista plana (Figura 2 a) y pista no plana (Figura 2 b).

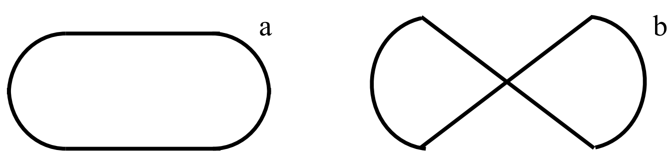

Figura 2: Formas seleccionadas. a) Pista plana; b) pista no plana.

Se decide trabajar con el modelo de pista plana por tratarse de un caso más simple, para luego considerar la segunda opción.
Posteriormente, proponemos responder las siguientes cuestiones:

Q1) ¿Qué datos sobre las dimensiones de la pista necesitarás para calcular su longitud? Si tuvieras esos datos ¿Cómo la calcularías?
Q2) ¿Qué datos sobre las dimensiones de la pista necesitarás para calcular el área que abarca? Si tuvieras esos datos ¿Cómo la calcularías?
Q3) Disponemos de sólo 20 m de material para armar la pista, realiza un análisis de las dimensiones posibles de la pista y discute en grupo las distintas formas posibles, y realiza un informe de las conclusiones, fundamentando cómo llegaste a ellas.

Las variables más adecuadas para el contexto (seleccionadas por consenso entre los distintos grupos de trabajo) y que permitirán cálculos más sencillos, son la longitud del tramo recto y el radio del tramo circular:

L: long. del tramo recto;
r: medida del radio del tramo circular

En esta instancia, es posible abordar el problema con una primera técnica que los alumnos ya conocen, como es el uso de fórmulas de área y perímetro de figuras geométricas conocidas.

Aparecen entonces implicadas dos nuevas variables y dos ecuaciones que las relacionan.

Longitud de la pista (P) $P = 2 . L + \pi . 2 . r$
Área encerrada por la pista (A) $A = L . 2 . r + \pi . r^2$

Las tareas implicadas en las cuestiones Q1 y Q2 involucran la identificación de variables, las relaciones entre ellas y los datos a través del uso de fórmulas de la geometría.

Para responder Q3, es necesario fijar el valor del perímetro de la pista:
$20 = 2 . L + \pi . 2 . r$
Queda planteada entonces una ecuación donde la solución no es un número sino una relación entre la longitud del tramo recto (L) y la medida del radio (r).
Habitualmente, el modelo dominante del álgebra escolar como aritmética generalizada la reduce a la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico y a la resolución de ecuaciones con una incógnita. De acuerdo al modelo epistemológico de referencia adoptado, que propone un proceso de algebrización más amplio, es evidente aquí que las tareas y las técnicas del ámbito puramente algebraico (despejar o reemplazar valores dados o intentar resolver ecuaciones) no son suficientes para abordar las cuestiones planteadas. Surge la necesidad de una ampliación de la OM al pasar de situaciones que requieren, además del uso de una *fórmula algebraica,* técnicas para estudiar cómo depende cada variable de la fórmula de las restantes.
Para poner en evidencia esta necesidad es importante el rol docente como orientador del proceso a través de preguntas:

¿Hay alguna relación entre las medidas de la pista?
¿Es posible encontrar alguna expresión que nos permita calcular el lado del tramo recto conociendo el radio del tramo circular?

Será necesario entonces encontrar la expresión que permite dar el valor del tramo recto conocido el radio (o el radio dado el tramo recto):
$L = 10 - \pi . r$

¿Podemos construir una pista con el radio de 1m, 2m, 3m, ……8m,…?
¿Cuáles son los valores posibles? ¿Por qué?

Las dimensiones de una pista con las condiciones planteadas no son independientes y no pueden tomar cualquier valor; es necesario encontrar una expresión que permita calcular la longitud L para distintos valores del radio r, obtener valores, organizarlos para poder analizar y llegar a una conclusión.
Los estudiantes proponen organizar los datos en una tabla de valores y en la búsqueda de una técnica más eficiente, surgió el uso de un software (Excel) para construirla y poder responder a estos interrogantes. De esta manera ingresó al medio la tabulación, lo cual fue validado por la comunidad de estudio como una manera pragmática de organizar los datos. En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes, y en la Figura 3 los esquemas de las pistas correspondientes a valores del radio:1, 2 y 3.

r	**L**
1	6,86
1,5	5,29
2	3,72
2,5	2,15
3	0,58
3,5	-0,99
4	-2,56
5	-5,7
6	-8,84
7	-11,98
8	-15,12

Tabla 1

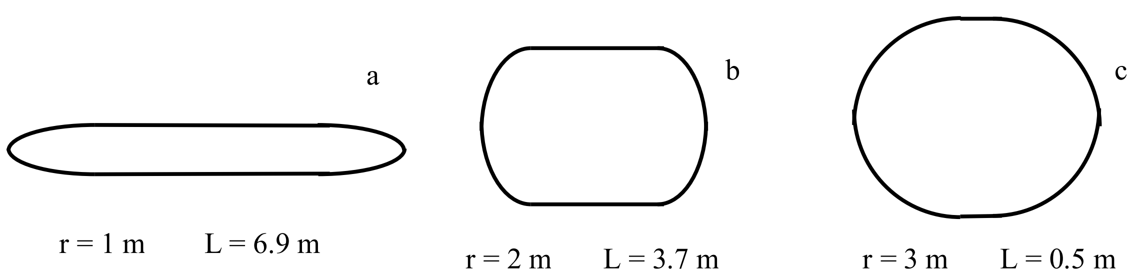

Figura 3: Esquemas de pistas correspondientes a diferentes radios.
a) Pista de radio 1 m; b) pista de radio 2 m; c) pista de radio 3 m.

El uso de técnicas gráficas (esquemas de pistas) permite visualizar la dependencia de las variables involucradas y se concluye además, que hay valores del radio para los cuales la longitud del tramo recto tomaría valores negativos, lo cual es incompatible con la situación modelizada.
Para determinar exactamente cuáles son las restricciones en los valores de r será necesaria entonces, la manipulación formal de las expresiones simbólicas (técnicas algebraicas) que muestran las propiedades del sistema modelizado, en este caso la pista de autos, sus dimensiones posibles con perímetro fijo.
En este caso se plantea una inecuación que limita los valores posibles del radio:

$L > 0 \Rightarrow 10 - \pi . r > 0 \Rightarrow r < {}^{10}/_{\pi}$

En la implementación de esta propuesta, a partir de los distintos planteos de los alumnos y sus argumentaciones, surgieron distintos interrogantes:
Siendo el perímetro fijo de 20m, ¿el área comprendida por la pista es constante?
Nuevamente se recurre al uso de tablas construidas con Excel. La Tabla 2 permite visualizar la variación del área para pistas de distintas dimensiones.

r	L	A= 3.14*r^2+2r*L
0,5	8,43	9,215
1	6,86	16,86
1,5	5,29	22,935
2	3,72	27,44
2,5	2,15	30,375
3	0,58	31,74

Tabla 2

Hasta este momento la manipulación de fórmulas algebraicas ha permitido responder los interrogantes y se presenta una nueva cuestión: *Podríamos asegurar que el área máxima de la pista se obtendrá cuando r=3?*

La respuesta a esta pregunta por parte de los estudiantes fue afirmativa, justificando en base a los resultados obtenidos en la tabla. Esta respuesta fue puesta en duda pidiendo que calcularan el área de una pista con un tramo recto de 10cm.

Surge la necesidad de interpretar una "fórmula" como una relación funcional entre variables y utilizar el *modelo funcional* para estudiar propiedades del sistema modelizado, usando las técnicas matemáticas asociadas (funcionales y gráficas) y estaríamos en el primer nivel de modelización algebraico-funcional.

La utilización de la fórmula para calcular el área permite "ver" que la misma depende tanto de r como de L, pero L también depende de r. Por lo tanto es posible, a través del trabajo algebraico llegar a obtener una expresión que permita relacionar A con r, quedando "oculta" la variable L, que influye en el dominio de A.

$$\left.\begin{array}{l} A = \pi . r^2 + 2. r . L \\ A = -\pi . r^2 + 20 . r \\ L = 10 - \pi . r \end{array}\right\} \quad Dominio\ r < {}^{10}/_{\pi}$$

La Figura 4 muestra el gráfico de A en función de r, a través de la técnica gráfica es posible determinar y justificar el valor máximo del área, identificando la expresión como la ley de una función cuadrática cuyo valor máximo se produce en $r = {}^{10}/_{\pi}$ (Valor medio entre las 2 raíces de $-\pi . r^2 + 20 . r = 0$)

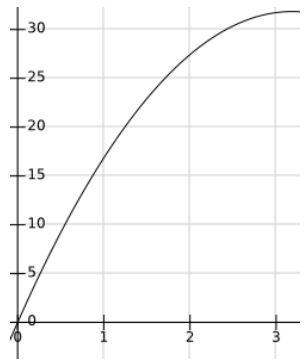

Figura 4

COMENTARIOS FINALES

Creemos que a través de esta propuesta podremos lograr se alcance un *primer nivel de modelización funcional (*Ruiz Munzón *et al.*, 2010) de un sistema que se materializa en modelos que se expresan mediante *funciones aisladas de una única variable* y las correspondientes ecuaciones (e inecuaciones) asociadas. Este tipo de modelización incluye en cierta forma la *modelización algebraica* y viene a responder a cuestiones que hacen referencia a la variación de una magnitud del sistema en función de otra.
Hemos implementado esta propuesta y estamos en la etapa de evaluación de la eficacia de nuestro diseño en base a los datos recabados durante el desarrollo de los talleres.
.
Continuamos en el diseño e implementación de una actividad en la que a través de modificaciones en las condiciones de la construcción de la pista que permitan trabajar con familias de funciones de una variable para lograr un *segundo nivel de modelización funcional*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Disponible en: https://curriculares.files.wordpress.com/2011/09/el_eslabon_perdido.pdf. Consultado el: 1/06/2015.

Fonseca Bon, C., Gascón Pérez, J. , Oliveira Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(3), 289-318. doi:10.12802/relime.13.1732

Ruiz Munzón, N., Bosch, M., Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. Disponible en: http://documat.unirioja.es/descarga/articulo/3629690.pdf. Consultado el: 1/06/2015.