# Optimización de la distribución del personal de juegos de un casino través de la Programación Lineal

Juan Pablo Bulbulian, Jonathan Gastrell, Exequiel Iván Tagni, y Santiago Manopella

Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Buenos Aires,
Av. Medrano 951, C1179AAQ Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

**Resumen.** Mediante los contenidos teóricos y prácticas de la Programación Lineal, resolvimos un caso de distribución del personal (croupiers y supervisores) de las distintas mesas de apuestas de un casino. Los datos del modelo planteado fueron obtenidos a partir de la operatoria de un casino real. Para afrontar este problema, tuvimos que hacer un gran foco en la comprensión de las reglas de negocio y así poder modelar el caso, definir las restricciones y la variable de estudio a optimizar. Utilizando un software de resolución de problemas de Programación Lineal, obtuvimos la distribución óptima de recursos para el caso planteado y realizamos un análisis post-óptimo para prever cambios en las reglas de negocio. Al finalizar el estudio observamos que es posible extender el uso de la metodología para optimización de cualquier tipo de recursos.

**Palabras clave:** Programación Lineal; distribución del personal; casino; modelización; análisis post-óptimo

## 1. Introducción

En este trabajo, pusimos en práctica los conceptos teóricos y prácticos de la Programación Lineal para poder resolver un caso en el cual se necesita minimizar la cantidad de personal (croupiers y supervisores) utilizado en las mesas de apuesta de un casino de dos turnos (tarde y noche). El objetivo es que todas las personas que asistan al casino puedan ser atendidas por la menor cantidad de personal posible reduciendo personal ocioso y así los costos del mismo.

La complejidad del caso elegido reside en los distintos tipos de juegos, las restricciones en cuanto a la cantidad de personal que puede atender cada uno y la demanda de los mismos. Elegimos enfocarnos en el estudio de este caso debido a que uno de los integrantes del grupo trabajó varios años en Casinos de Buenos Aires. Gracias a esto pudimos obtener los datos reales para aplicar la metodología.

Para resolver este caso utilizando Programación Lineal, la primera dificultad con la que nos encontramos fue poder entender el negocio y las reglas del mismo, y así poder definir el objetivo del caso. Luego se modeló la situación relevada, planteando las restricciones y la variable de estudio a través de ecuaciones e inecuaciones. Con esta información pudimos encontrar la solución óptima con la utilización de un software de resolución de problemas de Programación Lineal (WinQSB [5]) el cual nos proveyó de las tablas óptimas (primal y dual). A partir de estas tablas, realizamos un análisis post-óptimo (sensibilidad) con el objetivo de poder prever reacciones en la variable de estudio provocadas por cambios en el negocio.

## 2. Marco teórico

La programación lineal utiliza un modelo matemático para describir el problema. El adjetivo *lineal* significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser funciones lineales. En este caso, la palabra programación no se refiere a programación en computadoras; en esencia es un sinónimo de planeación. Así, la programación lineal trata a la planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo matemático) entre todas las alternativas de solución. [4]

En esencial, el teorema del dual establece que el primal y el dual tienen valores iguales que la función objetivo optima (si los problemas tienen soluciones óptimas). Este resultado ya es de por si interesante, pero se verá que al demostrar el teorema del dual se consigue reflexionar mucho sobre la programación lineal. [3]

Para simplificar la exposición, se supone que el primal es un problema de maximización normal con m restricciones y n variables. Entonces, el problema dual será un problema de minimización normal con m variables y n restricciones. [3]

Por el método simplex, podemos, una vez que determinada cualquier solución básica posible (punto extremo), obtener una solución mínima deseable en un numero finito de pasos. Estos pasos, o iteraciones, consisten en encontrar una nueva solución posible cuyo valor correspondiente de la función objetivo es menos que el valor de la función objetivo para la solución precedente. Este proceso se continúa hasta que una solución mínima se encuentra. [2]

## 3. Modelo

Se busca modelar la contratación de croupiers y supervisores para el funcionamiento de la sala de juegos de un casino. En la sala hay mesas de Dados, Punto & Banca, Black Jack y Ruleta. El objetivo de estudio es optimizar la cantidad de croupiers por juego minimizando la cantidad de empleados.
El casino estará abierto 16 horas al día, en dos turnos de 8 horas. Tarde (T1) y Noche (T2).
Se tendrá en cuenta la demanda de cada juego en la sala cada uno de los turnos de la jornada establecida por estadísticas proporcionadas por la Gerencia de Operaciones.

A su vez, el casino presenta ciertas reglas de negocio que no se pueden ignorar en el modelado, las cuales nos determinan las restricciones de la situación planteada.
R1) La cantidad de croupiers durante el turno noche debe ser mayor a la del turno tarde.

R2) Las mesas de Dados y Punto & Banca requieren de 3 croupiers para funcionar, dos de ellos se encontraran trabajando en la mesa y el restante tomara un descanso de 30 minutos. Para luego relevar al siguiente compañero que haya cumplido una hora en la mesa.

R3) Tanto las mesas de Ruleta, como de Black Jack se agrupan de a dos. Requiriendo 3 croupiers para operar un módulo de dos mesas durante un turno. El esquema de descanso es idéntico que en los juegos de Dados y Punto & Banca.

R4) La ruleta es uno de los juegos que más convoca a las personas, por lo que en la distribución de mesas (y por ende de croupier encargados de las mesas) debe haber el doble de mesas que de Black Jack.

R5) El casino debe tener siempre el siguiente número mínimo de mesas abiertas en cualquiera de los dos turnos: Ruleta (10), Black Jack (5), Dados (1) y Punto y Banca (1).

R6) Se calcula una mesa de Ruleta abierta por cada 7 jugadores que haya en la sala, una mesa de Dados por cada 100 y una mesa de Punto y Banca por cada 50.

Durante el turno tarde se estima que hay en la sala entre 100 y 150 jugadores permanentemente durante el transcurso del turno, con el correspondiente recambio.

Durante el turno noche este cálculo se ubica entre 150 y 200.

R7) La sala tiene una capacidad máxima de 250 jugadores.

R8) Cada mesa de Dados, así como la de Punto y Banca requieren 1 supervisor. Este supervisor es capaz de trabajar en cualquiera de las dos mesas y el casino cuenta con un total de 9 de ellos por turno. Los cuales seis siempre están en la sala mientras los otros tres descansan.

R9) En el caso de los supervisores de Black Jack y Ruleta, el casino cuenta con 45 en el turno tarde y 60 en el turno noche. Por cada dos supervisores en la sala hay uno descansando.

## Modelización

4.1 Definición de variables

Definimos las variables según el Juego y el Turno tal como se muestra en la Tabal 1 para poder independizar un mismo juego en distintos turnos dado.

**Tabla 1.** $X_{ij}$ = Tríos de croupier por juego por turno (número entero)[1]

| | T1 | T2 |
|---|---|---|
| Ruleta | $X_{11}$ | $X_{12}$ |
| Black Jack | $X_{21}$ | $X_{22}$ |
| Dados | $X_{31}$ | $X_{32}$ |
| Punto & Banca | $X_{41}$ | $X_{42}$ |

4.2 Planteo de la Solución Primal

Establecemos la función objetivo como el mínimo de la suma del personal en ambos turnos.

$$MIN\ Z = X11 + X12 + X21 + X22 + X31 + X32 + X41 + X42 \qquad (1)$$

<u>Sujeto a las siguientes restricciones:</u>[2]

<u>R1</u>

$$\text{C1) } X11 + X21 + X31 + X41 \leq X12 + X22 + X32 + X42 \qquad (2)$$

<u>R4</u>

$$\text{C2) } X11 = 2\ X21 \qquad (3)$$

$$\text{C3) } X12 = 2\,X22 \qquad (4)$$

<u>R5</u>

$$\text{C4) } X11 \geq \frac{10}{2} \qquad (5)$$

$$\text{C5) } X12 \geq \frac{10}{2} \qquad (6)$$

$$\text{C6) } X21 \geq \frac{5}{2} \qquad (7)$$

[1] Al elegir la variable como tríos de croupier estamos contemplando las R2 y R3 de las reglas de negocio que requieren tener cierta cantidad de croupier por mesa.

[2] En varias de las restricciones, el total de croupier de las mesas de Ruleta y Black Jack se dividen por dos ya que tres dos cada dos mesas.

$$C7)\ X22 \geq \frac{5}{2} \tag{8}$$

$$C8)\ X31 \geq 1 \tag{9}$$

$$C9)\ X32 \geq 1 \tag{10}$$

$$C10)\ X41 \geq 1 \tag{11}$$

$$C11)\ X42 \geq 1 \tag{12}$$

<u>R6</u>

$$C12)\ X11 \geq \frac{100}{7*2} \tag{13}$$

$$C13)\ X11 \leq \frac{150}{7*2} \tag{14}$$

$$C14)\ X31 \geq \frac{100}{100} \tag{15}$$

$$C15)\ X31 \leq \frac{150}{100} \tag{16}$$

$$C16)\ X41 \geq \frac{100}{50} \tag{17}$$

$$C17)\ X41 \leq \frac{150}{50} \tag{18}$$

$$C18)\ X12 \geq \frac{150}{7*2} \tag{19}$$

$$C19)\ X12 \leq \frac{200}{7*2} \tag{20}$$

$$C20)\ X32 \geq \frac{150}{100} \tag{21}$$

$$C21)\ X32 \leq \frac{200}{100} \tag{22}$$

$$C22)\ X42 \geq \frac{150}{50} \tag{23}$$

$$C23)\ X42 \leq \frac{200}{50} \tag{24}$$

<u>R7</u>

$$C24)\ X11 \leq \frac{250}{7*2} \tag{25}$$

$$C25)\ X12 \leq \frac{250}{7*2} \tag{26}$$

$$C26)\ X31 \leq \frac{250}{100} \tag{27}$$

$$C27)\ X32 \leq \frac{250}{100} \tag{28}$$

$$C28)\ X41 \leq \frac{250}{50} \tag{29}$$

$$C29)\ X42 \leq \frac{250}{50} \qquad (30)$$

R8[3]

$$C30)\ X31 + X41 \leq 9 - 3 \qquad (31)$$

$$C31)\ X32 + X42 \leq 9 - 3 \qquad (32)$$

R9[4]

$$C32)\ X11 + X21 \leq \frac{45-15}{2} \qquad (33)$$

$$C33)\ X12 + X22 \leq \frac{60-20}{2} \qquad (34)$$

R10[5]

$$C34)\ X11, X12, X21, X22, X31, X32, X41, X42 \in \mathrm{N}_0 \qquad (35)$$

4.3 Planteo de la Solución Dual

A continuación presentamos el planteo de la Solución Dual que permite una significativa reducción de los cálculos computacionales mediante la reducción de restricciones. En nuestro caso, las 34 restricciones se redujeron a simplemente 8. A su vez, se puede evitar el uso de las variables artificiales, mediante la aplicación del método de solución Dual – Simplex y facilita el estudio del impacto sobre la optimalidad por cambios en el problema original. Finalmente el planteo de la Solución Dual nos facilita la interpretación económica del problema.

Basado en las restricciones y variables anteriores, el modelo dual queda definido de la siguiente manera:

Función Objetivo:

$$\begin{aligned} MAX\ Z = {} & 5C4 + 5C5 + 2.5C6 + 2.5C7 + 1C8 + 1C9 + 1C10 + 1C11 + 7.14C12 \\ & + 10.714C13 + 1C14 + 1.5C15 + 2C16 + 3C17 + 10.714C18 \\ & + 14.286C19 + 1.5C20 + 2C21 + 3C22 + 4C23 + 17.857C24 \\ & + 17.857C25 + 2.5C26 + 2.5C27 + 5C28 + 5C29 + 6C30 + 6C31 \\ & + 15C32 + 20C33 \end{aligned} \qquad (35)$$

Restricciones:

$$X11)\ 1C1 + 1C2 + 1C4 + 1C12 + 1C13 + 1C24 + 1C32 <= 1 \qquad (36)$$

$$X21)\ 1C1 - 2C2 + 1C6 + 1C32 <= 1 \qquad (37)$$

$$X31)\ 1C1 + 1C8 + 1C14 + 1C15 + 1C26 + 1C30 <= 1 \qquad (38)$$

$$X41)\ 1C1 + 1C10 + 1C16 + 1C17 + 1C28 + 1C30 <= 1 \qquad (39)$$

$$X12)\ -1C1 + 1C3 + 1C5 + 1C18 + 1C19 + 1C25 + 1C33 <= 1 \qquad (40)$$

$$X22)\ -1C1 - 2C3 + 1C7 + 1C33 <= 1 \qquad (41)$$

[3] La resta simboliza el descanso de los supervisores
[4] La resta simboliza el descanso de los supervisores
[5] La condición de no negatividad y variable entera

$$\text{X32)}\ -1C1 + 1C9 + 1C20 + 1C21 + 1C27 + 1C31 <= 1 \quad (42)$$

$$\text{X42)}\ -1C1 + 1C11 + 1C22 + 1C23 + 1C29 + 1C31 <= 1 \quad (43)$$

## 5 Tablas Óptimas de Solución

Mediante el uso del software WinQSB [5], obtuvimos las siguientes tablas óptimas como solución para el modelo planteado.

**Tabla 2.** Tabla Óptima Primal

| VARIABLE DE DECISIÓN | SOLUCIÓN | COSTO UNITARIO O GANANCIA C(J) | CONTRIBUCIÓN TOTAL | COSTO REDUCIDO | ESTADO |
|---|---|---|---|---|---|
| X11 | 8 | 1 | 8 | 1.5 | Limitada |
| X21 | 4 | 1 | 4 | 0 | Básica |
| X31 | 1 | 1 | 1 | 0 | Básica |
| X41 | 2 | 1 | 2 | 0 | Básica |
| X12 | 12 | 1 | 12 | 0 | Básica |
| X22 | 6 | 1 | 6 | 3 | Limitada |
| X32 | 2 | 1 | 2 | 1 | Limitada |
| X42 | 3 | 1 | 3 | 0 | Básica |

De la tabla óptima primal podemos observar que el resultado por Juego según los turnos mantienen la regla de negocio que implica que a la tarde hay menor demanda de juegos que en el turno noche. Esto se puede ver mejor en la siguiente tabla, donde se muestran los croupiers necesarios por turno.

**Tabla 3.** Tabla de Resultados

| | TURNO TARDE | | TURNO NOCHE | |
|---|---|---|---|---|
| | Croupiers Contratados | Tríos de Croupiers | Croupiers Contratados | Tríos de Croupiers |
| RULETA | 24 | 8 | 36 | 12 |
| BLACK JACK | 12 | 4 | 18 | 6 |
| DADOS | 3 | 1 | 6 | 2 |
| PUNTO Y BANCA | 6 | 2 | 9 | 3 |

Cómo se puede ver en la Tabla 3, en total son 45 croupiers para el turno tarde y 69 croupiers para el turno noche dando un total de 114 para cubrir ambos.

En la Tabla 3 se puede observar también que se cumplen con las distintas reglas de negocio, así como la que implica que la ruleta es el juego más concurrido, seguido por el Black Jack.

Por otro lado, la tabla optima obtenida nos dice que las variables X11, X22 y X32 (Ruleta-turno tarde, Black Jack-turno noche y Dados-turno noche) traen asociado un costo si se aumentara la cantidad de tríos para esos juegos. Esto nos da una base para accionar ante un posible crecimiento en el casino.

**Tabla 4.** Tabla Óptima Dual

| | RESTRICCIÓN | LADO IZQUIERDO | DIRECCIÓN | LADO DERECHO | HOLGURA | PRECIO SOMBRA |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X11 | 1 | <= | 1 | 0 | 7.14 |
| 2 | X21 | 1 | <= | 1 | 0 | 3.57 |
| 3 | X31 | 1 | <= | 1 | 0 | 1 |
| 4 | X41 | 1 | <= | 1 | 0 | 2 |
| 5 | X12 | 1 | <= | 1 | 0 | 10.714 |
| 6 | X22 | 1 | <= | 1 | 0 | 5.357 |
| 7 | X32 | 1 | <= | 1 | 0 | 1.5 |
| 8 | X42 | 1 | <= | 1 | 0 | 3 |
| MAX Z = 34.281 | | | | | | |

A partir del análisis dual se cambia la perspectiva del problema y se intenta maximizar el uso de recursos del casino pero tomando en cuenta las restricciones del trabajo de los croupiers. Se puede observar en los valores del precio sombra de las variables que representan a los croupiers que son la cantidad de croupiers que el casino tiene que contratar para minimizar su uso.

## 6 Comparación Primal-Dual

Al comparar los resultados de la tabla del modelo primal con la del dual encontramos una leve diferencia en los valores del funcional y de las variables. Esto se debe a que para el modelo primal existe una restricción sobre los valores de las variables para que sean enteros, mientras que en el modelo dual esta restricción no existe. De todos modos, se puede observar en los valores de los precios sombra de las variables de los croupiers que mantienen la misma relación y se asemejan bastante a los del modelo primal.

## 7 Análisis de Sensibilidad

La restricción C12 representa a la cantidad de trío de croupiers necesarios para 1 ruleta en el turno 1 y esta cantidad tiene que ser como mínimo mayor a 7.14, número que se calcula como el cociente entre total de jugadores promedio de la tarde y cantidad de jugadores en dos ruletas porque estas siempre están en pares. Según el análisis esta restricción tiene un valor de 7.14 y puede variar entre 5 y 10. Si opero poniéndole el valor máximo, o sea C12 = 10, obtengo la siguiente distribución:

**Tabla 5.** Tabla Óptima Dual

| | VARIABLE DE DECISIÓN | LADO IZQUIERDO | DIRECCIÓN | LADO DERECHO | HOLGURA | VALOR DE SOLUCIÓN |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X11 | 1 | <= | 1 | 0 | 10 |
| 2 | X21 | 1 | <= | 1 | 0 | 5 |
| 3 | X31 | 1 | <= | 1 | 0 | 1 |
| 4 | X41 | 1 | <= | 1 | 0 | 2 |
| 5 | X12 | 1 | <= | 1 | 0 | 10.714 |
| 6 | X22 | 1 | <= | 1 | 0 | 5.357 |
| 7 | X32 | 1 | <= | 1 | 0 | 1.5 |
| 8 | X42 | 1 | <= | 1 | 0 | 3 |
| | | | MAX Z = 38.571 | | | |

La variable de decisión X21 fue la única afectada al modificar la restricción C12. La variable tiene un valor de solución de 5 y antes tenía un valor de solución de 3.57, esto significa que se respetó la relación entre variables de decisión. Recordemos que X21 representa a trío de croupiers en el turno 1 para 1 mesa de black jack, y que las mesas de ruleta tienen que ser el doble de las mesas de black jack. Claramente se puede ver en la solución que el modelo representado respetó la restricción dada, porque al agregar mesas de ruleta las mesas de black jack siguen siendo la mitad en cantidad.

También esto nos indica que si en algún momento el flujo de personas al casino aumenta o disminuye podemos saber certeramente dónde y cuántos croupiers agrega.

## 8 Conclusiones

A partir del desarrollo del trabajo práctico pudimos aplicar la Programación Lineal para resolver un problema real en donde un casino necesita minimizar la contratación y uso de los croupiers en dos turnos del casino.

Partimos de algunos datos obtenidos de uno de los integrantes del grupo trabajó varios años en Casinos de Buenos Aires, quién suministró detalles del flujo de personas durante la tarde y durante la noche, además de proporcionarnos las reglas del negocio.

Sin embargo, mediante avanzábamos en la definición del modelo, nos dimos cuenta que la mala interpretación de las reglas de negocio o la función objetivo puede traer como consecuencia obtener una solución errónea. Esto implica que la interpretación del negocio es tan importante como el correcto modelado del mismo ya que sin el modelo matemático bien definido, el resultado puede alejarnos del objetivo.

Una vez resuelto este enorme obstáculo que es el correcto modelado, nos dimos cuenta que fácilmente podemos ajustar las restricciones y variables del modelo a una realidad distinta en caso de cambiar. Esto es positivo porque permite que cualquier casino se puede beneficiar de este esquema ajustándolo a sus circunstancias.

Una vez realizado el modelo correctamente, mediante la utilización del software WinQSB [5] se obtiene la solución primal, la cual nos muestra que valores deben tomar las distintas variables para acercarnos lo más que se pueda al objetivo sin dejar de atender las reglas de negocio planteadas.

También se pudo ver el problema de la perspectiva de los recursos del casino a través del análisis dual, y gracias a esta conversión, se pudo observar el impacto del cambio reglas de negocio mediante el análisis de sensibilidad, contemplando así un posible crecimiento del casino.

Por último, también concluimos que si bien nuestro caso estaba enfocado en el negocio de un casino, la técnica de Programación Lineal se puede aplicar por igual a distintos negocios, tanto a otros casinos de distintas magnitudes como a negocios de otra índole.

## Referencias

1. Bonini, Charles E.; Hausman. Warren H. y Bierman Jr., Harold, Análisis cuantitativo para los negocios, McGraw Hill Interamericana S. A., Santa Fé de Bogotá, 2.000, ISBN 0-256-14021-9.
2. Gass, Saúl L, Programación Lineal, CECSA, México, 5a impresión, 1.985, ISBN968-26-0057.
3. Winston, Wayne L., Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos, 4ª Edición, International Thomson Editores, S. A. de C. V., México, 2.005, ISBN 970-686-362-1.
4. Hiller, Frederick S.; Lieberman, Gerald J., Introducción a la Investigación de Operaciones, McGraw Hill, México, 1.997, 4ª Edición, ISBN 970-10-1022-1.
5. WinQSB Software, Version 1.00 for Windows; Linear and Integer Programming; Chang, Yih-Long.