RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALTIMÉTRICOS MEDIANTE LA ARTICULACIÓN ENTRE CÁTEDRAS DE DISTINTAS ÁREAS

Justo Claudio Eduardo, Costa Viviana Angélica.

UIDET: IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, 49 y 115, La Plata, 1900, cejusto@yahoo.com.ar

Introducción

En este artículo se presentan los resultados de una actividad de articulación entre dos Áreas de la Facultad de Ingeniería de la UNLP (FI) que combina tanto la docencia, la investigación, como la extensión, y que se viene desarrollando desde hace dos años (segundo semestre de 2014) en forma continua. La misma consiste en la resolución de una tarea profesional que es de incumbencia del Ingeniero Agrimensor mediante herramientas matemáticas que se enseñan en la asignatura Matemática C del Ciclo Básico (tercer semestre) de esta Facultad, cuyos contenidos corresponden a los de Algebra Lineal.
La tarea profesional es ofrecida por la cátedra de Cálculo de Compensación (quinto semestre) de la carrera Ingeniero Agrimensor y tiene por objetivo dotar de cotas y sus respectivas incertidumbres a las ménsulas altimétricas (marcas físicas) que existen en muchos de los edificios de la Facultad. Se denominan cotas a las alturas respecto de un nivel tomado como referencia, en este caso, el nivel medio del mar de Mar del Plata (nivel de referencia para la red del Instituto Geográfico Nacional) de las ménsulas empotradas. Para este trabajo se adopta un sistema de alturas topográfico para el cual existe una relación constante entre la variación de alturas geométricas y la variación del potencial gravimétrico. Entonces se modelan las superficies equipotenciales con esferas concéntricas. Esto no es cierto para puntos lo suficientemente lejanos (Wolf y Brinker, 1998).
La resolución del problema requiere modelar matemáticamente una situación real, utilizando herramientas del Algebra Lineal, en especial, la construcción de matrices, sus operaciones, resolución de sistemas de ecuaciones lineales y el empleo del Método de Mínimos Cuadrados para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales inconsistentes. Esta área de la matemática es conocida como de difícil comprensión, por esto, varios investigadores recomiendan, para un mejor aprendizaje, motivar los contenidos desde la geometría y desde la ingeniería aplicada (Carlson, Johnson, Lay & Porter, 1993; Dorier, 2003; Hillel, 2000; Hillel, Sierpinska, & Trgalova, 1999).
El trabajo es realizado por alumnos de Matemática C (tercer semestre), y de Cálculo de Compensación (quinto semestre) de la carrera Ingeniero Agrimensor. También se inscribieron para la actividad algunos estudiantes de las carreras de Ingeniería Civil e Ingeniería Hidráulica así como un egresado de la carrera de Ing. Agrimensor.
Esta actividad, poco frecuente, permite el trabajo entre pares de distintos años, enfocados en resolver conjuntamente un trabajo profesional real con las herramientas matemáticas provistas por las cátedras convocantes.
Se persiguen con la actividad varios objetivos. Entre ellos, acercar al alumno menos avanzado en la carrera, al modelado de situaciones topográficas relativamente simples y que lo prepararán para encarar situaciones más complejas. Entendemos el modelado matemático de un problema como un proceso intelectual que incluye las capacidades de estructurar la situación que se va a modelar, traducir la realidad a una estructura matemática, interpretar los modelos matemáticos en términos reales, trabajar con un modelo matemático, reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados, así de este modo lo definen Blomhøj (2008) y de la Fuente Martínez (2009).
Otro de los objetivos, es el de motivar al alumno del Área de Ciencias Básicas, en el aprendizaje de la matemática de una forma diferente a la habitual en esta Área, donde en general los conocimientos se estudian aislados de las demás disciplinas (física y química) y descontextualizados de las distintas especialidades de la ingeniería y del ejercicio profesional. De este modo, el aprendiz, estudia la matemática otorgándole a la misma una

utilidad y significado en la resolución de problemas de su carrera arribando naturalmente a una situación de aprendizaje significativo donde se ve enfrentado a problemas reales que debe resolver reemplazando al ejercicio creado con fines didácticos. Las metas constituyen la principal variable que influye en la motivación. En nuestro caso, se encuentra centrada en la realización de una tarea, que puede dar origen a algunos tipos de motivación, las denominadas de competencia e intrínseca. Según Farías y Pérez (2010), estos tipos de motivación son aquellas por las cuales el estudiante es atrapado por el tema de estudio, o bien por ser de su interés, a veces no tanto por los contenidos sino por los procedimientos que se utilizan para ello, provocando que el aprendiz se sienta a gusto o cómodo con aquello que realiza.
Para los alumnos avanzados, el desarrollo de la actividad propuesta, tiene por objetivo el de transmitir conocimiento a sus pares menos avanzados. Algunos investigadores afirman que es clave en el proceso educativo generar espacios de este estilo. Se aprende solo, pero también, y sobre todo, con otros, en el diálogo con otros y con el entorno social. De esta forma, trabajar en conjunto entre pares, se convierte en una cuestión de optimización del tiempo de aula. También, los alumnos avanzados se relacionan con sus conocimientos anteriores (en este caso, conocimientos matemáticos) permitiéndoles reafirmarlos, ampliarlos, cuestionarlos y hasta ponerlos en duda para proponer nuevas miradas y abordajes.
Finalmente esta actividad contribuye a integrar y dar continuidad a los contenidos de estudio en las distintas áreas de las carreras, y dar respuesta a los estudiantes a la pregunta ¿Qué puedo hacer con lo que estoy estudiando en mi ejercicio profesional?

Parte experimental

Los participantes de la actividad realizaron el trabajo de campo en el predio de la Facultad de Ingeniería. El problema consistió en determinar las cotas y su incertidumbre estándar para el conjunto de ménsulas de esta Facultad. Se seleccionaron los siguientes puntos del predio: Agrimensura Viejo (Av), Partenón (P), Hidráulica (H), Construcciones (C), Química 1 (Q1), Química 2 (Q2), Decanato (D), Agrimensura Nuevo (An), como se observa en la imagen satelital de la Figura 1.
El Área Departamental Agrimensura proveyó el instrumental utilizado: varios equipos de nivelación automáticos de marca Sokkia, con sus respectivos trípodes y miras. A pedido de los alumnos se utilizó también un equipo digital, de última generación, con miras con código de barras.
Antes de iniciar la medición, se determina la influencia del error instrumental en las observaciones, dado que el modelo matemático de las mismas no incluye la existencia del error instrumental. Luego para atenuar cualquier efecto residual se buscará respetar la equidistancia entre la mira y el equipo de nivelación durante todo el trabajo, según las Figuras 2.
Se busca en esta etapa hacer énfasis en la importancia del correcto entendimiento del problema para posteriormente modelar las observaciones apropiadamente.
Con el instrumental utilizado y las consideraciones mencionadas, los participantes midieron las diferencias de alturas desde Av a P, de P a H, de H a C, de C a Q2, de Q2 a D, de D a Q1, de Q1 a An y de An a Av (Cuadro 1). Este procedimiento se realiza también en sentido inverso para mejorar la redundancia de los datos obtenidos.

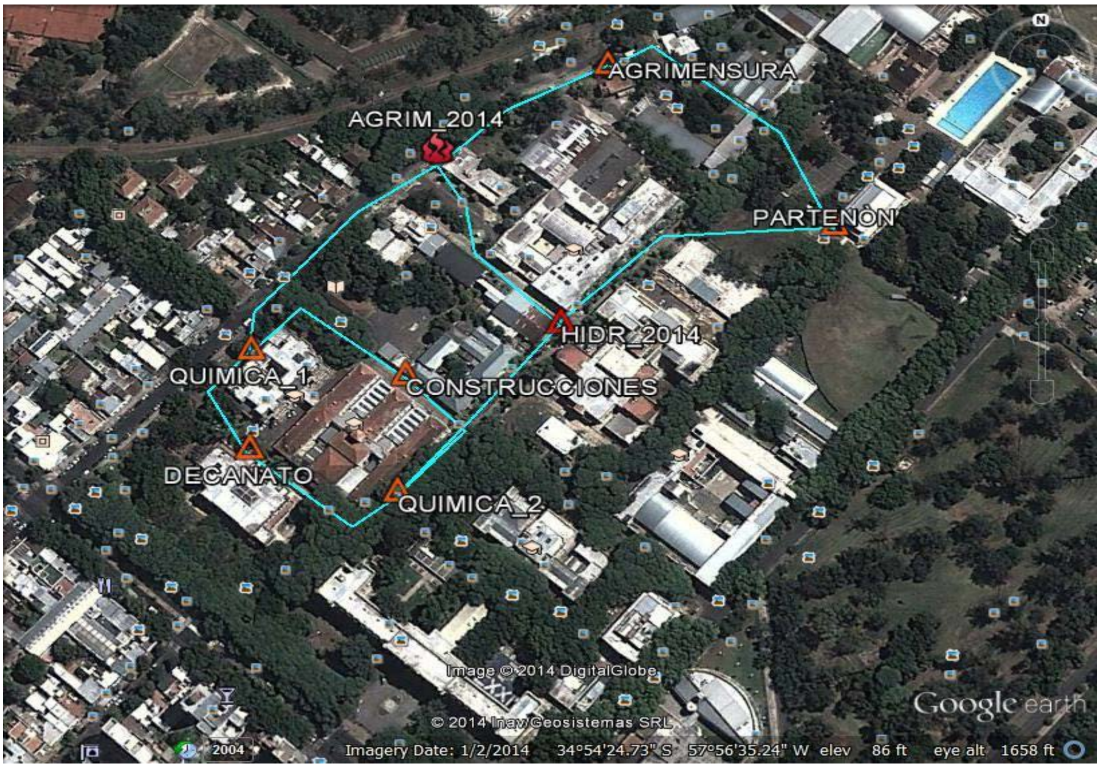

Figura 1: Puntos seleccionados en el campus de la Facultad de Ingeniería.

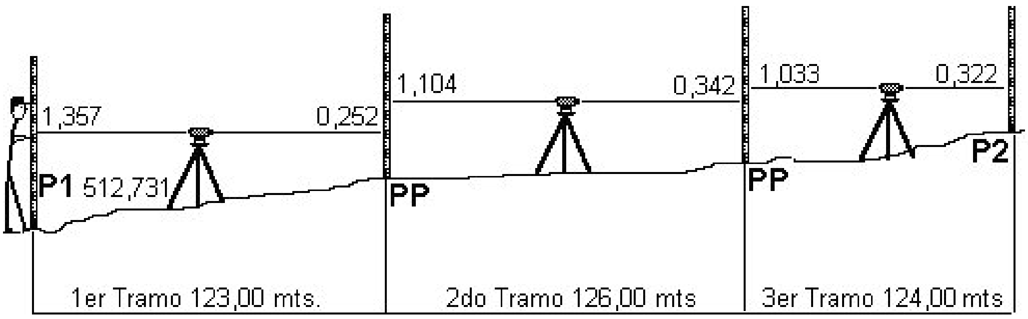

Figura 2. Esquema de trabajo.

Resultados y discusión

Luego de realizar la experimentación y obtenidas las mediciones del Cuadro 1, los participantes proceden a resolver el problema. Para ello cada tramo medido lo modelan matemáticamente mediante una ecuación lineal.

Edificio	**Nomenclatura**	**Tramo**	**Δh**
Agrimensura Viejo	Av	Av a P	0.273*m*
Partenón	P	P a H	1.606*m*
Hidráulica	H	H a C	0.832*m*
Construcciones	C	C a Q2	0.920*m*
Química 2	Q2	Q2 a D	-0.378m
Decanato	D	D a Q1	-0.108m
Química 1	Q1	Q1 a An	-0.858m
Agrimensura Nuevo	An	An a Av	-2.296m

Cuadro 1. Diferencias de alturas observadas.

Por ejemplo, para el primer tramo, entre el viejo edificio del Área Departamental Agrimensura y el Partenón proponen la ecuación

$$P - Av = 0.273$$

De esta forma logran un sistema de ecuaciones lineales del que se querrá obtener su solución, que en notación matricial tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Av \\ P \\ H \\ C \\ Q2 \\ D \\ Q1 \\ An \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.273 \\ 1.606 \\ 0.832 \\ 0.920 \\ -0.378 \\ -0.108 \\ -0.858 \\ -2.296 \end{pmatrix}$$

La matriz del sistema y el término independiente son cargados en el software GeoGebra, que es libre, de fácil uso y acepta realizar cálculos matriciales dispuestos como en una planilla de cálculo. Denotan A, a la matriz del sistema, X el vector de las incógnitas y b al vector del término independiente, para luego proceder con la búsqueda de su resolución. Para ello, analizan el sistema de ecuaciones, encontrando que la matriz A es singular (no invertible) con lo cual el sistema es compatible indeterminado o no tiene solución. Es decir que no existe ningún vector X tal que A.X sea igual a b. En este caso, el sistema no admite solución, porque el término independiente no es combinación lineal de las columnas de la matriz, o lo que es equivalente a decir que el vector b no pertenece al espacio columna de la matriz A. Esto es debido a que la suma de los desniveles, que debería ser cero, no lo es, por deberse la toma de observaciones a un proceso aleatorio. Entonces, en estos casos de incompatibilidad, se busca una alternativa que dé respuesta al problema.
El método de Mínimos Cuadrados es una de ellas. Consiste en hallar la “mejor solución X” al sistema de ecuaciones lineales incompatible A.X=b, A de orden mxn y b de orden mx1. Con “mejor solución” se refiere a que se busca X_0 en R^n tal que verifique lo siguiente en norma 2:

$$\min_{X_0} \|\mathrm{A}.X_0 - \mathrm{b}\|$$

denominando en este caso residuo al vector:

$$r = \mathrm{A}.X_0 - \mathrm{b}.$$

De esta manera el modelo lineal expresa la relación entre las observaciones y parámetros (cotas), incluyendo un residuo r de modo que por ejemplo la primera ecuación sería de la forma:

$$P - Av = 0.273 + r_{P-Av}$$

Para cualquier X $\in$ R^n, A.X es combinación lineal de las columnas de A, por lo que entonces el método busca el vector X_0 que es combinación de las columnas de A que sea más “cercano” a b. Esto ocurre cuando $A.X_0$ es la proyección ortogonal de *b* sobre el espacio columna de A, es decir que el vector (b – $A.X_0$) es ortogonal al vector A.Y, $\forall \in R^n$. Entonces el producto escalar entre A.Y por (b – $A.X_0$) debe ser cero, $\forall \in R^n$: Se obtiene entonces:

$$Y^t \mathrm{A}^t(\mathrm{b} - \mathrm{A}.\mathrm{X}_0) = 0 \quad \forall \mathrm{Y} \in R^n$$

$$Y^t A^t\,v = 0 \quad \forall Y \in R^n$$

Entonces:

$$Y^t(A^t.b - A^t.A.X_0) = 0 \quad \forall Y \in R^n$$

Se deduce que:

$$A^t A.X_0 = A^t b$$

Al sistema de ecuaciones anterior se lo denomina sistema de ecuaciones normales (Lay, & Murrieta, 2007; Strang, 2007). Tal sistema es compatible determinado si la matriz $A^t.A$ es no singular y entonces en este caso la solución del sistema seria única e igual a:

$$X_0 = (A^t A)^{-1} A^t.b$$

Pero en este problema la matriz A de coeficientes del sistema es singular. Entonces utilizando el dato conocido de la cota de Av=15,914m la reemplazan en el sistema y se obtiene uno nuevo cuya matriz de coeficientes tiene sus columnas linealmente independientes, lo que asegurará que la matriz $A^t.A$ sea no singular.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} P \\ H \\ C \\ Q2 \\ D \\ Q1 \\ An \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.187 \\ 1.606 \\ 0.832 \\ 0.920 \\ -0.378 \\ -0.108 \\ -0.858 \\ -18.296 \end{pmatrix}$$

Proceden entonces a hallar la solución del sistema de ecuaciones normales con este último sistema (incompatible), pero con columnas linealmente independientes, que denominaremos A*.X*=b*, obteniendo los valores para las cotas (Cuadro 2).

Edificio	Cotas (m)
Agrimensura Viejo	15.914
Partenón	16.188
Hidráulica	17.795
Construcciones	18.628
Química 2	19.549
Decanato	19.172
Química 1	19.065
Agrimensura Nuevo	18.208

Cuadro 2. Cotas encontradas.

Encontrado el vector solución, calculan el vector de residuos r=A.X - b, que es constante e igual a r= $(0.0011, 0.0011, 0.0011, 0.0011, 0.0011, 0.0011, 0.0011, 0.0011)^t$ *y* su norma 2 es $\|A.X - b\| = 0.0031$.
Con estos resultados es posible comenzar un análisis estadístico de los mismos y que aportarán un conocimiento acerca de la variabilidad esperada de un trabajo realizado en similares condiciones.

Conclusiones

Los resultados observados en esta actividad son de diverso índole académico:

- Áulicos: se dotó a los alumnos de un espacio donde desarrollar un trabajo continuo y progresivo durante dos años consecutivos en el estudio de contenidos que permiten la resolución de un trabajo profesional. Para los docentes implicó un acercamiento de los saberes que imparten y la posibilidad de desarrollar mejores estrategias de enseñanza.

- Curriculares: esta actividad permitió ver la necesidad de abordar en el grado, el estudio de sistemas de ecuaciones lineales sobre-determinados y del método de Mínimos Cuadrados.
- Monitoreo/seguimiento de los estudiantes: se logró observar la poca continuidad de los estudiantes de Ingeniero Agrimensor en la carrera durante el período trabajado: primer semestre 2015 al primer semestre 2016.
- Presentación a congresos: los primeros resultados fueron presentados en el XIX EMCI Nacional, XI Internacional, San Nicolás de los Arroyos en el año 2015.
- Difusión y extensión: se ofreció este espacio a la matrícula profesional por medio del Colegio de Distrito V del Consejo Profesional de Agrimensura. Se contó con la participación de un matriculado. Esta actividad profesional no se realizaba anteriormente como trabajo curricular en la carrera de Ingeniero Agrimensor.
- Otros: los resultados obtenidos de las ménsulas sirven de referencia para las diferentes tareas docentes de las asignaturas vinculadas a la Topografía y como material didáctico para quienes deseen trabajar con datos reales.
- La Facultad contará con una actualización permanente de su red altimétrica.

Bibliografía

Blomhøj, M. (2008). Modelización matemática-una teoría para la práctica. Revista de Educación Matemática, 23(2).

Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., & Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. The College Mathematics Journal, 24(1), 41-46.

de la Fuente Martínez, C. (2009). Modelos matemáticos, resolución de problemas y proceso de creación y descubrimiento en matemáticas. Conexiones y aprovechamiento didáctico en secundaria. Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas, 123-154.

Dorier, J. L. (2003). Teaching linear algebra at university. arXiv preprint math/0305018.

Farías, D., & Pérez, J. (2010). Motivación en la Enseñanza de las Matemáticas y la Administración. Formación universitaria, 3(6), 33-40.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In On the teaching of linear algebra (pp. 191-207). Springer Netherlands.

Hillel, J., Sierpinska, A., & Trgalova, J. (1999). Teaching and Learning Linear Algebra with Cabri. PME 23 Proceedings.

Lay, D. C., & Murrieta, J. M. (2007). Algebra lineal y sus aplicaciones. J. E. M. Murrieta (Ed.). Pearson educación.

Strang, G. S. (2007). Algebra lineal y sus aplicaciones. Thomson.

Wolf P., Brinker R. (1998). Topografìa. Alfaomega.