

SOBRE EL CONTROL DE FUNCIONAMIENTO DE SISTEMAS EXCITADOS PARAMÉTRICAMENTE

Silvana P. Flego

Área Departamental de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de La Plata (UNLP).
(1900) La Plata, Buenos Aires, Argentina.
flego@fisica.unlp.edu.ar

Recientemente abordamos el estudio de los estados estacionarios en sistemas sometidos a excitación paramétrica mediante un tratamiento *ansatz* derivado desde el teorema del virial cuántico. En particular tratamos con las excitaciones provenientes de variar sinusoidalmente la capacitancia en un sistema oscilatorio eléctrico con un grado de libertad. Obtuvimos información sobre la amplitud estacionaria y sobre las condiciones para la aparición de los estados resonantes que nos permiten una interpretación más profunda del fenómeno y nos proporcionan nuevas herramientas de cálculos en aplicaciones prácticas. En esta comunicación mostramos como surge la condición de auto-consistencia y como la misma puede ser utilizada para determinar los parámetros de funcionamiento del circuito así como la información necesaria para llevarlo en forma controlada a un estado estacionario resonante.

Palabras claves: vibraciones paramétricas, oscilaciones eléctricas, *ansatz*, virial, Schrödinger.

INTRODUCCIÓN

El fenómeno de la excitación de oscilaciones por variaciones periódicas de los parámetros de un sistema oscilatorio [1-5] reviste de gran interés en todas las áreas de la ciencia y de la ingeniería. La ecuación de Mathieu (EM) es un excelente paradigma para el estudio de estas resonancias paramétricas, porque ejemplifica la respuesta de un sistema a perturbaciones periódicas forzadas encontradas en muchos sistemas naturales [1-13]. En cuanto a los aspectos teóricos, la literatura ya contiene la base necesaria para un análisis completo de la aparición de oscilaciones. Como es bien conocido, la cuestión conduce a la investigación de la llamada solución "inestable" de ecuaciones diferenciales parciales lineales con coeficientes periódicos, que desde el punto de vista matemático han sido estudiados en suficiente detalle [14-17]. Sin embargo, la teoría que aborda el problema lineal no proporciona información sobre la amplitud estacionaria, la estabilidad, la iniciación del proceso, etc. Tener información sobre la amplitud estacionaria es una cuestión no menos básica que el problema de la aparición de oscilaciones, ya que no sólo es importante para una descripción completa de todo el fenómeno, sino también para permitir cálculos en aplicaciones prácticas del mismo. Estudios en esta dirección han sido realizados [18-22], pero destaquemos que, cuando uno se enfrenta al estudio de un problema de estas características en el cual interviene una EM e intenta conocer la física contenida en las soluciones, uno se encuentra con una alta densidad de ecuaciones y un alto grado de sofisticaciones matemáticas que oscurecen la física contenida en el proceso. Por otra parte, destaquemos que el cálculo de las funciones de Mathieu y de sus valores propios todavía presenta algunas dificultades numéricas [23,24]. Recientemente abordamos el problema mediante un procedimiento que permite obtener *ansatz*, libres de parámetros de ajuste, para las autofunciones de la EM [25-27], y tales resultados los utilizamos para abordar el estudio de los estados estacionarios en sistemas sometidos a excitación paramétrica [28,29]. En particular abordamos las excitaciones provenientes de variar sinusoidalmente la capacitancia en un sistema oscilatorio eléctrico con un grado de libertad [28], estudiadas originalmente por Mandelstain en 1934 [13], y obtuvimos información sobre la amplitud estacionaria y sobre las condiciones para la aparición de los estados estacionarios resonantes [29]. Estos resultados permiten una interpretación más profunda del fenómeno y proporcionan nuevas herramientas de cálculos en aplicaciones prácticas. En esta comunicación mostramos como la condición de auto-consistencia obtenida en [28] y estudiada en [29] puede ser utilizada para determinar los parámetros de funcionamiento del circuito y como llevarlo en forma controlada a un estado resonante.

PRELIMINARES

Ansätze viriales para la ecuación de Schrödinger con potencial convexo simétrico

La ecuación de Schrödinger (SE) uni-dimensional, independiente del tiempo, en forma adimensional, es dada por [30]

$$\left[-\frac{1}{2} \nabla_{\tau}^2 + U(\tau) \right] \psi_n(\tau) = E_n \psi_n(\tau), \quad \nabla_{\tau}^2 \equiv \frac{d^2}{d\tau^2} \quad (1)$$

donde $U(\tau)$ es un potencial real independiente del tiempo.

Recientemente se introdujo en la literatura un procedimiento que permite, de manera simple y elegante, obtener expresiones ansatz, libres de parámetros, para las autofunciones de aquellas SE (1) cuyo potencial es convexo simétrico [25-26]. El procedimiento consiste en obtener un núcleo ansatz $\chi_o(\tau)$, solución de una relación local inferida desde el teorema del virial, a partir de la expresión

$$\chi_o(\tau) = \begin{cases} N \exp\left(-\int \sqrt{(\tau-\xi) U'(\tau)} d\tau\right) & \text{for } \tau \geq \xi \\ N \exp\left(+\int \sqrt{(\tau-\xi) U'(\tau)} d\tau\right) & \text{for } \tau < \xi \end{cases}, \quad (2)$$

donde ξ es el punto en el cual el potencial presenta su mínimo y N es la constante de integración. Luego, es posible elegir un conjunto base y construir una secuencia de funciones ortonormales $\{\varphi_n, n=0,1,2,\dots\}$ con función de peso $\chi_o^2(\tau)$. La forma explícita de la secuencia puede establecerse a partir del proceso de Gram-Schmidt, seguida por la condición de normalización. Luego, los ansätze para la SE (1) son dadas por

$$\psi_n^{\text{ansatz}}(\tau) \equiv \chi_n(\tau) = \varphi_n(\tau) \chi_o(\tau) \quad (3)$$

Ansätze viriales para la ecuación de Mathieu

El procedimiento citado en la sección anterior fue aplicado también a potenciales periódicos [27]. En particular se abordó el estudio de la ecuación de Mathieu (EM) caracterizada por el potencial

$$U(\tau) = \beta^2 \cos 2\tau, \quad (4)$$

con condiciones de contorno homogéneas

$$\psi_n(0)\psi_n'(0) - \psi_n(\pi)\psi_n'(\pi) = 0 \quad (5)$$

El núcleo de la EM, aproximando el potencial con un polinomio de sexto orden en τ , es dado por [27]

$$\chi_o(\tau) = N \exp\{-\beta g(\tau)\}, \quad 0 \leq \tau \leq \pi \quad (6)$$

con

$$g(\tau) = -\frac{\sqrt{30}}{120} \left[\left(2(\tau-\xi)^2 - 5 \right) \sqrt{\left(2(\tau-\xi)^2 - 5 \right)^2 + 5} + 5 \operatorname{arcsch} \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \left(2(\tau-\xi)^2 - 5 \right) \right) \right], \quad \xi \equiv \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

Las autofunciones de los estados excitados fueron construidas a partir de un conjunto base trigonométrico $\{1, \sin(nx), \cos(nx), \dots\}$ ($n=0,1,2,\dots$) que da origen a una secuencia de polinomios trigonométricos bi-ortonormales con función de peso $\chi_o^2(\tau)$. Denotando la polinomial seno por φ_n^{impar} y la polinomial coseno por φ_n^{par} , la expresión ansatz para el estado n puede ser escrita como

$$\chi_n(\tau) = \left[a_n \varphi_n^{\text{par}}(\tau) + b_n \varphi_n^{\text{impar}}(\tau) \right] \chi_o(\tau) \equiv a_n \chi_n^{\text{par}}(\tau) + b_n \chi_n^{\text{impar}}(\tau), \quad n=1,2,\dots \quad (8)$$

donde las constantes a_n y b_n se determinan pidiendo que se satisfagan la condición de contorno y la de normalización.

CIRCUITO RLC SOMETIDO A EXCITACIÓN PARAMÉTRICA

Consideremos un circuito RLC sin fuente electromotriz. Supongamos que en algún instante inicial, $t_o = 0$, el capacitor tiene una carga Q_o y la corriente en el circuito es nula,

$$q(0) = Q_o, \quad i(0) = 0 \quad (9)$$

Supongamos que de alguna manera, la capacidad varía de acuerdo con la ley:

$$C = C_o (1 + m \cos \omega t)^{-1} \quad (10)$$

La ecuación del circuito es dada por

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = 0 \quad \text{con} \quad i = \frac{dq}{dt} \equiv \dot{q} \quad (11)$$

teniendo en cuenta (10), la ecuación (11) puede ser escrita como

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_o^2 (1 + m \cos \omega t) q = 0 \quad (12)$$

donde

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_o^2 = \frac{1}{LC_o} \quad (13)$$

Proponiendo como solución de (12)

$$q(t) = y(t) \exp(-\delta t) \quad (14)$$

se encuentra que $y(t)$ debe satisfacer la siguiente ecuación,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + [-\delta^2 + \omega_o^2 (1 + m \cos \omega t)] y = 0 \quad (15)$$

Haciendo el cambio de variables,

$$\tau = \frac{1}{2} \omega t \quad \rightarrow \quad y(t) = y\left(\frac{2\tau}{\omega}\right) \equiv \psi(\tau) \quad (16)$$

la ecuación (15) adquiere la forma

$$\frac{d^2 \psi}{d\tau^2} + 2[\lambda + \beta^2 \cos 2\tau] \psi = 0 \quad (17)$$

donde

$$\lambda = \frac{\beta^2}{m} - \frac{z^2}{2}, \quad \beta^2 = 2 \frac{\omega_o^2}{\omega^2} m, \quad z = \frac{2\delta}{\omega} \quad (18)$$

y la carga (14) será dada por

$$q(t) = q\left(\frac{2\tau}{\omega}\right) \equiv \tilde{q}(\tau) \quad \text{donde} \quad \tilde{q}(\tau) = \psi(\tau) \exp(-z\tau) \quad (19)$$

Tratamiento-ansatz del régimen estacionario

Recientemente fue abordado el circuito RLC cuando trabaja en estado estacionario [28] utilizando los ansätze (8) para la EM obtenidos en [27]. Es decir, fueron obtenidos ansätze para las autofunciones de carga q_n y de corriente i_n que satisfacen la condición de contorno

$$i_n(0) = i_n(2\pi/\omega) = 0 \quad (20)$$

Observe que, esta condición garantiza la condición inicial (9) y considera que luego de un período $T = 2\pi/\omega$ la corriente regresa a su estado inicial. Las autofunciones de carga y de corriente son dadas por [28],

$$\tilde{q}_n(\tau) = Q_n \chi_n(\tau) \exp(-z_n \tau), \quad (21)$$

$$\tilde{i}_n(\tau) = I_n [\chi'_n(\tau) - z_n \chi_n(\tau)] \exp(-z_n \tau), \quad (22)$$

donde χ_n son los ansätze (8) para la EM (17) con las constantes a_n y b_n determinadas pidiendo que se satisfaga la condición de contorno (20) y la condición de normalización. Luego (8) adquiere la forma

$$\psi_n^{ansatz}(\tau) = \chi_n(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\Sigma_n^2 + z_n^2}} \left[\Sigma_n \chi_n^{par}(\tau) + z_n \chi_n^{impar}(\tau) \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

donde

$$\Sigma_n = \frac{1}{\chi_n^{par}} \frac{d}{d\tau} \chi_n^{impar} \Big|_{\tau=0} \quad (24)$$

Para que la teoría sea auto-consistente, se necesita determinar $z_n = z_n(\lambda_n)$. De (18) se tiene

$$\lambda_n = \frac{\beta^2}{m} - \frac{1}{2} z_n^2, \quad (25)$$

Los autovalores λ_n de la EM (17) pueden ser aproximados utilizando los ansätze (23) [30]

$$\lambda_n = \int_0^\pi \chi_n(\tau) H \chi_n(\tau) d\tau = \frac{1}{\Sigma_n^2 + z_n^2} \int_0^\pi \left[\Sigma_n \chi_n^{par} + z_n \chi_n^{impar} \right] \left[\Sigma_n H \chi_n^{par} + z_n H \chi_n^{impar} \right], \quad (26)$$

Definiendo los autovalores asociados a las autofunciones pares e impares por λ_n^{par} y λ_n^{impar} , y teniendo en cuenta la ortonormalidad de las funciones χ_n^{par} y χ_n^{impar} , es simple mostrar que

$$\lambda_n = \frac{1}{\Sigma_n^2 + z_n^2} \left[\Sigma_n^2 \lambda_n^{par} + z_n^2 \lambda_n^{impar} \right] \quad (27)$$

De las expresiones (25) y (27) se obtiene

$$z_n = \pm \sqrt{\Lambda_n \pm \sqrt{\Delta_n}} \quad (28)$$

donde:
$$\Lambda_n = \frac{\beta^2}{m} - \lambda_n^{impar} - \frac{1}{2} \Sigma_n^2, \quad \Upsilon_n = 2 \Sigma_n^2 \left(\frac{\beta^2}{m} - \lambda_n^{par} \right), \quad \Delta_n = \Lambda_n^2 + \Upsilon_n \quad (29)$$

Teniendo en cuenta (18) debemos tener $z_n \in \mathbb{R}^+$. Luego, existe el estado estacionario χ_n si se verifica la siguiente *condición de auto-consistencia*

$$z_n = \sqrt{\Lambda_n \pm \sqrt{\Delta_n}} \quad \text{con:} \quad \Delta_n \geq 0, \quad \Lambda_n \pm \sqrt{\Delta_n} \geq 0 \quad (30)$$

ESTUDIO DE LAS CONDICIONES DE AUTO-CONSISTENCIA

Presentamos en esta sección los resultados obtenidos en [29] de un estudio analítico de la relación de auto-consistencia (30), los cuales son de relevante importancia para el control de funcionamiento de un circuito sometido a excitaciones paramétricas.

Valores críticos de los parámetros

Observando que λ_n^{par} , λ_n^{impar} y Σ_n dependen solo de β , se tiene $\Delta_n = \Delta_n(\beta, m)$ y $\Lambda_n = \Lambda_n(\beta, m)$. Estamos interesados en el comportamiento del sistema cuando $m \in (0, 1)$, pues (10) nos dice que para $m=0$ no tendríamos variación de capacidad y para $m=1$ la capacidad se tornaría infinitamente grande cada vez que $\cos(\omega t) = -1$. Luego, estudiamos el comportamiento de las funciones

$$z_n = z_n(\beta, m) = \sqrt{\Lambda_n \pm \sqrt{\Delta_n}}, \quad \beta \geq 0, \quad 0 < m < 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (31.a)$$

condicionadas por:
$$\Delta_n \geq 0, \quad \Lambda_n \pm \sqrt{\Delta_n} \geq 0 \quad (31.b)$$

➤ Consideramos $z_n = \sqrt{\Lambda_n + \sqrt{\Delta_n}}$, (32)

★ Si $\Lambda_n \leq 0$ el valor mínimo de z_n ocurre cuando $Y_n = 0$. Un análisis de (29) bajo esta condición, nos dice que,

Si $\lambda_n^{par} \leq \lambda_n^{impar} + \frac{1}{2}\Sigma_n^2$: $z_n^{min} = z_n(\beta, m_c^{(n)}) = 0$, donde $m_c^{(n)} = \frac{\beta^2}{\lambda_n^{par}}$ (33.a)

★ Si $\Lambda_n > 0$ el valor mínimo de z_n ocurre cuando $\Delta_n = 0$. Un análisis de (29) bajo esta condición, nos dice que,

Si $\lambda_n^{par} > \lambda_n^{impar} + \frac{1}{2}\Sigma_n^2$: $z_n^{min} = z_n(\beta, m_c^{(n)}) = \sqrt{\frac{\beta^2}{m_c^{(n)}} - \lambda_n^{impar} - \frac{1}{2}\Sigma_n^2}$ (33.b)

donde : $m_c^{(n)} = \frac{\beta^2}{\lambda_n^{impar} - \frac{1}{2}\Sigma_n^2 + \sqrt{2\Sigma_n^2(\lambda_n^{par} - \lambda_n^{impar})}}$

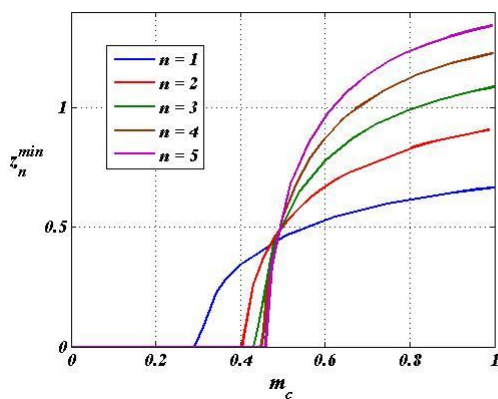
➤ Consideramos $z_n = \sqrt{\Lambda_n - \sqrt{\Delta_n}}$, (34)

★ Si $\Lambda_n < 0$, $z_n \notin \mathbb{R}$. Luego el estado estacionario no existe.

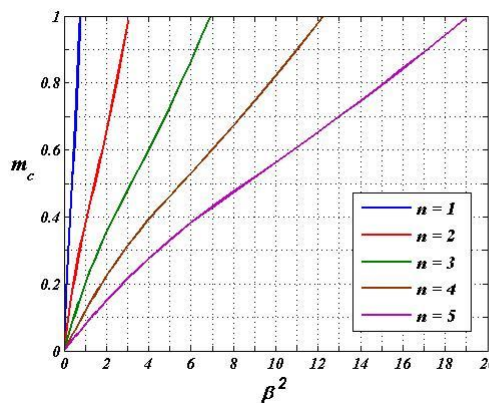
★ Si $\Lambda_n \geq 0$, $z_n \in \mathbb{R}$ si $-\Lambda_n^2 \leq Y_n \leq 0$. Luego, z_n^{min} ocurre cuando $Y_n = 0$ y es dado por (33.a).

En lo que sigue mostramos el comportamiento del sistema con z_n dada por (32). El lector interesado puede consultar [29] para un análisis más completo. En la figura 1 se muestran las curvas fronteras de las superficies (32) y en la figura 2 se representan tales superficies.

Fig.1: Curvas fronteras de las superficies de autoconsistencia

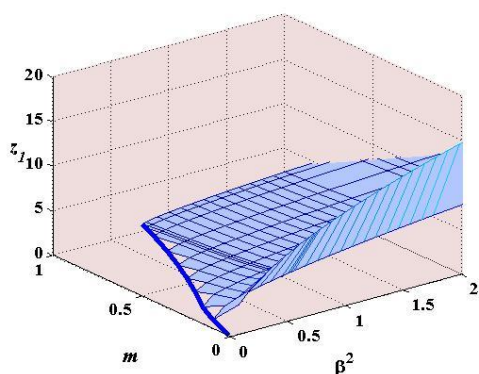


a) Grafica de $z_n^{min} = z_n(\beta, m_c)$ con $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

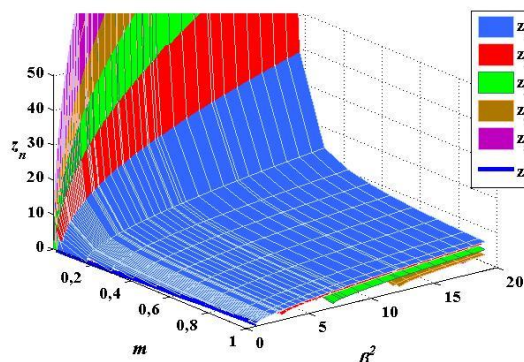


b) Proyección de $z_n^{min} = z_n(\beta, m_c)$ en el plano " $\beta^2 m$ ".

Fig.2: Superficies de auto-consistencia



a) Grafica de $z_1 = z_1(\beta, m)$



b) Grafica de $z_n = z_n(\beta, m)$ con $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Estudio de regiones estacionarias

Los autovalores de la EM son dados por (25) con z_n satisfaciendo (32)

$$\lambda_n = \lambda_n(\beta, m) = \frac{\beta^2}{m} - \frac{1}{2} [z_n(\beta, m)]^2, \quad (35)$$

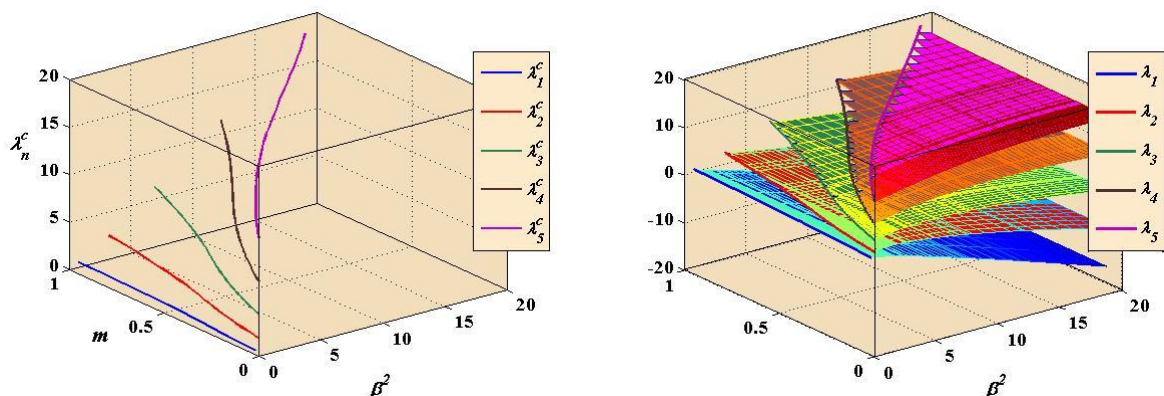
Luego, los parámetros críticos que conducen a los valores mínimos de z_n determinan los valores máximos de $\lambda_n(\beta, m)$. Teniendo en cuenta las expresiones (33) y (34) obtenemos

$$\text{Si } \lambda_n^{par} \leq \lambda_n^{impar} + \frac{1}{2} \Sigma_n^2 : \quad \lambda_n^c = \lambda_n(\beta, m_c^{(n)}) = \lambda_n^{par}(\beta) \quad (36)$$

$$\text{Si } \lambda_n^{par} > \lambda_n^{impar} + \frac{1}{2} \Sigma_n^2 : \quad \lambda_n^c = \lambda_n(\beta, m_c^{(n)}) = \lambda_n^{impar}(\beta) + \frac{1}{2} \sqrt{2 \Sigma_n^2 (\lambda_n^{par} - \lambda_n^{impar})} \quad (37)$$

En la figura 3 se representan las curvas para $\lambda_n^c = (\beta, m_c^{(n)})$ y las superficies $\lambda_n(\beta, m)$ para los estados $n = 1, \dots, 5$.

Fig.3: Superficies de auto-consistencia para $\lambda_n = \lambda_n(\beta, m)$



a) Grafica de $\lambda_n^c = \lambda_n(\beta, m_c^{(n)})$ con $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

b) Grafica de $\lambda_n = \lambda_n(\beta, m)$ con $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

A partir de (27) podemos escribir

$$z_n^2 = -\Sigma_n^2 \frac{\lambda_n - \lambda_n^{par}}{\lambda_n - \lambda_n^{impar}} \quad (38)$$

Las propiedades de los autovalores de una ecuación de Sturm-Liouville, permiten afirmar que $\lambda_n^{impar} < \lambda_n^{par}$. Dado que z_n debe ser un número real positivo, (38) nos dice que

$$\lambda_n^{impar}(\beta) < \lambda_n(\beta, m) < \lambda_n^{par}(\beta) \quad (39)$$

Es decir, cada superficie de autoconsistencia para los autovalores $\lambda_n(\beta, m)$ se encuentra entre dos superficies cilíndricas con generatrices paralelas al eje m y cuyas directrices son respectivamente, las curvas $\lambda_n^{impar}(\beta)$ y $\lambda_n^{par}(\beta)$. En la figura 4 se muestran

las gráficas de las funciones (35) para $m = 0.5$ y $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Las líneas sólidas son las curvas intersección de las superficies graficadas en la figura 3.b con el plano $m = 0.5$. Las líneas de puntos son la intersección de los citados cilindros con dicho plano. Observe que cada curva $\lambda_n(\beta, 0.5)$ está definida en $[\beta_c^{(n)}, \infty)$ y $\lambda_n^{max} = \lambda_n(\beta_c^{(n)}, 0.5)$, donde $\beta_c^{(n)}$ es el valor de β para el cual $m_c^{(n)} = 0.5$. Para valores de $\beta < \beta_c^{(j)}$ solo podrán existir los estados estacionarios con $n \leq j - 1$. Observe además que los valores de $\beta_c^{(n)}$ crecen con m .

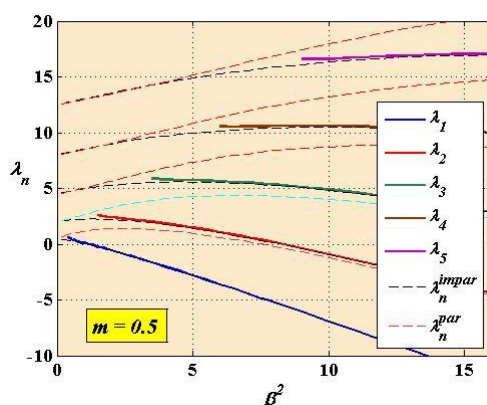
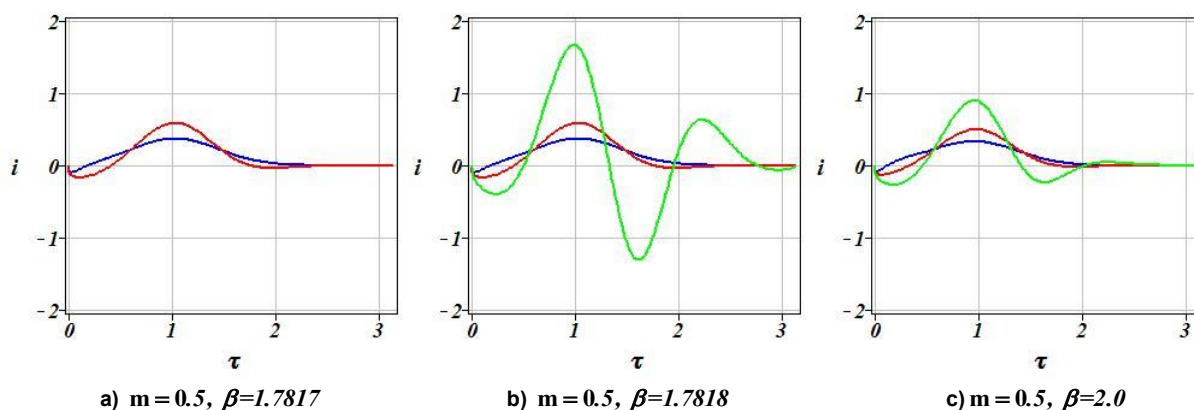


Fig.4: Curvas de autovalores para $m = 0.5$

Hacia las resonancias paramétricas

Los resultados anteriores nos conducen a preguntarnos que sucede cuando los parámetros son elegidos cercanos a los valores críticos del estado n . Un estudio de las autofunciones revela que la intensidad de la corriente crece notoriamente cuando nos acercamos a esos valores a partir de los cuales el estado deja de ser estacionario [28], lo cual sugiere que los parámetros críticos están íntimamente vinculados a las resonancias paramétricas. Estas características pueden observarse en la figura 5, la cual fue construida utilizando la expresión ansatz (23) con parámetros cercanos a los valores críticos correspondientes al estado $n = 3$ ($\beta_c^{(3)} \approx 1.7818$, $m_c^{(3)} = 0.5$).

Fig.5: Ansätze para las autofunciones de corriente



SOBRE EL CONTROL DE FUNCIONAMIENTO DEL SISTEMA

Los resultados anteriores nos permiten seleccionar los parámetros para que el sistema trabaje en el estado estacionario n . Teniendo en cuenta (13), (18) y (28) tenemos

$$R_n = L \omega z_n(\beta, m) = L \omega_o \sqrt{\frac{2m}{\beta^2}} z_n(\beta, m), \quad \text{con } \beta = \frac{\omega_o}{\omega} \sqrt{2m} \quad (40)$$

Dado que $\beta = \beta(\omega_o, \omega, m)$ y $\omega_o = \omega_o(L, C_o)$ se tiene que $R_n = R_n(L, C_o, \omega, m)$. Luego, (40) nos dice que podemos elegir el valor de la resistencia para que el sistema se encuentre en el estado estacionario n . Por otra parte, puede ajustarse la frecuencia de excitación y la resistencia de manera que el estado n esté próximo a la resonancia, es decir

$$\omega_n^{res} \approx \sqrt{\frac{2m_c^{(n)}}{[\beta_c^{(n)}]^2}} \omega_o, \quad R_n^{res} = L \omega_n^{res} z_n(\beta_c^{(n)}, m_c^{(n)}) \quad (41)$$

En la figura 6 se muestran las curvas de resistencia para $m = 0.5$ y $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Como puede observarse, cada curva está definida en $[\beta_c^{(n)}, \infty)$ y $R_n^{min} = R_n(\beta_c^{(n)}, 0.5)$, donde $\beta_c^{(n)}$ es el valor de β para el cual $m_c^{(n)} = 0.5$. Para valores menores de m , las curvas se inician más cerca del eje β^2 . Para $m_c^{(n)} \leq m_*^{(1)}$ ($m_*^{(1)} \approx 0.30694$) todas las curvas se inician en el eje β^2 . Es decir, el estado estacionario resonante ocurre para $R_n^{res} = 0$.

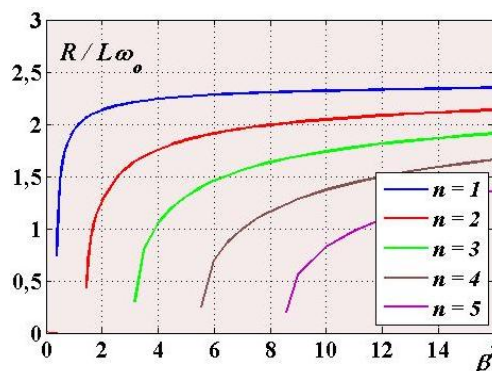


Fig.6: Curvas de resistencia para $m = 0.5$

CONCLUSIÓN

En esta comunicación mostramos los avances alcanzados en el estudio de los estados estacionarios de un circuito RLC sometido a excitaciones paramétricas. Presentamos un resumen de los principales resultados obtenidos en [29] donde se estudia el comportamiento del circuito a partir de la condición de auto-consistencia obtenida en [28] y observamos como tales resultados pueden ser utilizados para determinar de forma auto-consistente los parámetros de funcionamiento del sistema. Evidenciamos además, información teórica sobre el origen de las inestabilidades y como la misma puede ser utilizada para llevar al sistema, en forma controlada, a estados estacionarios resonantes. Tales resultados necesitan ser confrontados con resultados experimentales u obtenidos por simulación computacional a fin de evaluar la potencialidad del procedimiento. Estamos trabajando en esta línea.

Finalmente, destaquemos que el procedimiento seguido en esta comunicación puede ser aplicado a otros sistemas excitados paraméricamente siempre que los estados estacionarios estén gobernados por una ecuación tipo-Schrödinger con potencial convexo simétrico.

Agradecimiento: Este trabajo fue parcialmente soportado por el Proyecto "Investigación en el área de Ciencias Básicas-Convocatoria 2014-" de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata (UNLP), Argentina.

REFERENCIAS

1. J. Stoker: *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*. (New York, Inter. Publ.1950).
2. A.H.Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear oscillations*. (New York, NY: Wiley Interscience, 1995.)
3. T. B. Benjamin, F. Ursell. Proc. R. Soc. A **224** (1954) 505–515. (doi:10.1098/rspa.1954.0218).
4. M. Faraday. Phil. Trans. R. Soc. Lond. **121** (1931) 299–340. (doi:10.1098/rstl.1831.0018)
5. R. Kelly. J. Fluid Mech. **27** (1967) 656–689. (doi:10.1017/S0022112067002538)
6. J. J. Binney, Mon. Not. R. Astron. Soc. **183** (1978) 779–797.
7. J. J. Binney, Mon. Not. R. Astron. Soc. **196** (1981) 455–467.
8. P. Sammarco, H.H. Tran, O. Gottlieb. J. Fluid Mech. **349** (1997) 327.
9. P. Hall, G. Seminara. J. Fluid Mech. **101** (1980) 423. (doi:10.1017/S0022112080001735)
10. G. Vittori. J. Hydraul. Eng. **124** (1998) 406. (doi:10.1061/(ASCE)0733-9429)
11. S. Fauve. *Pattern forming instabilities. In Hydrodynamics and nonlinear instabilities* (eds C. Godreèche & P. Manneville), (1998) 387. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
12. F.J. Poulin, G. R. Flierl. Proc.R. Soc. A **464** (2008)1885-1904 doi:10.1098/rspa.2008.0007.
13. L. Mandelstam, N. Papalexi: *Concerning the Basis of a Method for the Approximate Solution of Differential Equations*. Technical Physics in the USSR **1**, N° 4,(1934) 415.
14. H. Poincaré; *New Methods of Celestial Mechanics*. (Translated by D. Goroff, Amer. Inst. of Phys. 1993).
15. A. Liapounov: *The General Problem of Stability of Movement*, Charkow 1892, Annals of the Faculty of Sciences of Toulouse, 1907.
16. A. Andronov, A. Witt: *On the Mathematical Theory of Self-Excitation Systems with Two Degrees of Freedom*, Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki, **IV**, N° 1 (1934).
17. L. Mandelstam, N. Papalexi: *On Resonance Phenomena with Frequency Distribution*, Z.f. Phys. **72**, (1931) 223.
18. N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions* (Oxford Press, London, 1951).
19. J. A. Stratton: *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill, New York, 1941), Chap. 6.
20. P. M. Morse and H. Feshbach: *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, New York, 1953).
21. A. Erdélyi: *Bateman Manuscript Project on Higher Transcendental Functions* (McGraw-Hill, Malabar, FL, 1981), Chap. 16.
22. M. Abramowitz and I. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1964).
23. F. A. Alhargan: *Algorithm for the computation of all Mathieu functions of integer orders*, ACM Trans. Math. Softw. **26** (2001) 390.
24. D. Frenkel and R. Portugal: *Algebraic methods to compute Mathieu functions*, J. Phys. A **34**, (2001) 3541.
25. S. P. Flego. *Virial-ansatz treatment for time-independent symmetric convex potential*. Submitted.
26. S. P. Flego. *Virial-ansatz treatment for time-independent symmetric convex potential defined in finite intervals*. Submitted.
27. S. P. Flego. *Ansätze for the eigenfunction of the Mathieu Equation*. Submitted.
28. S. P. Flego. *Stationary ansatz-solutions of the RLC-circuit under parametric excitation*. To be submitted.
29. S. P. Flego. *Behavior of the stationary states of parametrically excited RLC circuits*. To be submitted.
30. W. Greiner and B. Müller, *Quantum mechanics. An Introduction*. (Springer, Berlin, 1988).