

**Facultad de Ciencias Exactas**



**UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE LA PLATA**

---

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR DE LA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - ÁREA MATEMÁTICA-  
**EQUILIBRIOS SINGULARES EN ECUACIONES  
DIFERENCIALES ALGEBRAICAS: APLICACIÓN  
A REDES ELÉCTRICAS NO LINEALES**

---

**Lic. Cecilia Zulema González**

Directora: Dra. María del Rosario Etchechoury

AÑO 2017



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuaciones Diferenciales Implícitas . . . . .	3
1.2. Índice de una EDA . . . . .	6
1.3. Clasificación de EDAs . . . . .	13
1.3.1. EDAs regulares. . . . .	13
1.3.2. EDAs singulares. . . . .	14
1.4. Puntos de equilibrio y estabilidad. . . . .	15
1.4.1. Estabilidad de puntos de equilibrio . . . . .	15
1.4.2. Puntos de equilibrio en EDAs cuasilineales . . . . .	16
<b>2. Ecuaciones Diferenciales Algebraicas Regulares</b>	<b>19</b>
2.1. Estabilidad del equilibrio en EDOEs. . . . .	19
2.2. Clasificación de EDAs cuasilineales regulares. Estabilidad. . .	21
2.3. Algoritmo de desingularización . . . . .	25
2.3.1. EDA cuasilineal de rango localmente constante. . . . .	26
2.3.2. Breve descripción del algoritmo de desingularización. . .	26
2.4. Condiciones para la estabilidad del equilibrio en circuitos eléctricos . . . . .	27
2.4.1. Condiciones para la estabilidad del equilibrio en un circuito RLC no lineal . . . . .	27
2.4.2. Aplicación del algoritmo de desingularización. . . . .	31
2.4.3. Condiciones para la estabilidad del equilibrio en un circuito con diodo-túnel. . . . .	34
2.4.4. Aplicación del algoritmo de desingularización. . . . .	37

<b>3. Ecuaciones Diferenciales Algebraicas Singulares</b>	<b>41</b>
3.1. Problemas estacionarios . . . . .	43
3.1.1. Problemas estacionarios débiles . . . . .	44
3.1.2. Problemas estacionarios fuertes . . . . .	46
3.2. Problemas no estacionarios . . . . .	46
<b>4. Análisis del equilibrio singular en problemas no estacionarios</b>	<b>49</b>
4.1. Algunos preliminares . . . . .	50
4.2. Algunos resultados conocidos sobre estabilidad en problemas no estacionarios . . . . .	57
4.3. Variedad central en el problema no estacionario . . . . .	59
4.4. Variedad de cruce en el problema no estacionario . . . . .	61
4.4.1. En el problema desingularizado. . . . .	61
4.4.2. En el sistema original. . . . .	63
<b>5. Análisis del equilibrio singular en circuitos eléctricos no lineales</b>	<b>71</b>
5.1. Circuito eléctrico RLC . . . . .	71
5.1.1. Existencia de una variedad unidimensional de cruce. . .	71
5.1.2. Análisis de la estabilidad asintótica del equilibrio singular. . . . .	75
5.2. Circuito eléctrico LC con diodo-túnel . . . . .	75
5.2.1. Existencia de una variedad unidimensional de cruce en el circuito LC con diodo túnel. . . . .	75
5.2.2. Análisis de la estabilidad asintótica del equilibrio singular	78
<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>81</b>

# Introducción

El objetivo principal de esta tesis es aplicar resultados de la teoría de *Ecuaciones Diferenciales Algebraicas* -EDAs- al análisis de los *puntos de equilibrio singulares* en distintas clases de redes eléctricas no lineales que se modelan con este tipo de ecuaciones. Más precisamente, se estudia la *estabilidad* de los equilibrios singulares en circuitos eléctricos RLC, como así también en circuitos eléctricos con diodo-túnel. Para ambos tipos de circuitos, además, se prueba la existencia de una *solución de cruce* por el equilibrio singular. Previamente a esto, se establecen resultados teóricos que garantizan la existencia de una subvariedad de dimensión 1 asociada a una solución de cruce de una EDA cuasilineal singular por un equilibrio singular del tipo no estacionario.

En el Capítulo 1 se establecen las definiciones básicas vinculadas a *Ecuaciones Diferenciales Implícitas Autónomas* y se presentan además las EDAs cuasilineales como un caso particular importante, con el que trabajaremos a lo largo de la tesis. Luego, se detalla la clasificación de las EDAs cuasilineales en regulares y singulares, se presenta el concepto de índice de una EDA y se dan las definiciones de punto de equilibrio y estabilidad.

En el Capítulo 2 se enumeran los distintos tipos de EDAs regulares y los teoremas ya conocidos que utilizamos para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio en estos casos [17]. Se describe también el algoritmo de desingularización, que permite estudiar la existencia de soluciones en este tipo de ecuaciones [2]. Como un aporte original, usamos los teoremas sobre estabilidad para encontrar las condiciones que garantizan la estabilidad de los puntos de equilibrio regulares en las EDAs cuasilineales que modelizan circuitos eléctricos no lineales. Por último, utilizamos el algoritmo de desingularización para establecer una clasificación sobre los distintos tipos

de equilibrio en estos modelos.

En el Capítulo 3 se establece la clasificación de las EDAs cuasilineales singulares en estacionarias y no estacionarias. Para ilustrar la clase de EDAs cuasilineales singulares estacionarias, se presenta un ejemplo de aplicación en el método continuo de Newton [19] [17]. Para el caso de las EDAs cuasilineales singulares no estacionarias, presentamos algunos resultados preliminares que se aplican en el Capítulo 4, [1], [10], [17].

En el Capítulo 4 se presentan algunos resultados conocidos sobre estabilidad en problemas no estacionarios, restringiendo la dinámica a una variedad central. Como aporte original de la tesis, se prueba la existencia de otra variedad de dimensión 1, que pasa por el equilibrio singular, o equivalentemente, se demuestra la existencia de una solución de cruce por el equilibrio singular.

En el Capítulo 5 aplicamos los resultados hallados en el capítulo anterior para la búsqueda de trayectorias de cruce por equilibrios singulares en los casos de EDAs cuasilineales singulares que modelizan dos clases de circuitos eléctricos no lineales.

Finalmente, en el Capítulo 6 se establecen las conclusiones de la tesis y se describe el trabajo futuro.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo presentaremos los conceptos básicos para el desarrollo posterior de esta tesis. En primer lugar clasificaremos a las ecuaciones diferenciales ordinarias en dos clases: explícitas e implícitas. Daremos nociones fundamentales asociadas a una ecuación diferencial tales como: solución, punto de equilibrio e índice. Dentro de las Ecuaciones Diferenciales Implícitas trabajaremos con una clase de ellas, que llamaremos Ecuaciones Diferenciales Algebraicas, dentro de las cuales también consideraremos distintos tipos.

En distintas ramas de la Física, Ingeniería, Biología y otras ciencias se utilizan las ecuaciones diferenciales para modelizar la evolución de sistemas que dependen del tiempo, como por ejemplo sistemas mecánicos, procesos biológicos, circuitos eléctricos, etc. Una *Ecuación Diferencial Ordinaria Explícita* -EDOE- tiene la forma

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1}$$

donde  $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , siendo  $\Omega$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

Una *ecuación diferencial ordinaria explícita autónoma* es un caso particular de (1.1),

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.2}$$

donde el campo vectorial  $f$  no depende explícitamente del tiempo  $t$ , sino a

través del estado  $x = x(t)$ , siendo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} ; \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{bmatrix}$$

con  $x_i = x_i(t)$  y  $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ .

La ecuación (1.2) define el *espacio de estados* del sistema y  $x$  es la *variable de estados*.

**Ejemplo 1.1.** Se dice que un sistema mecánico es un oscilador armónico si, cuando se deja en libertad fuera de su posición de equilibrio, vuelve hacia dicha posición. Por ejemplo, si una masa que cuelga de un resorte se aleja de su posición de reposo, el resorte ejerce sobre la masa una fuerza que es proporcional a la distancia a la posición de reposo y que está dirigida hacia la posición de equilibrio. Se llama oscilador armónico amortiguado cuando la amplitud de las oscilaciones va disminuyendo debido al rozamiento.

Un oscilador armónico amortiguado se modeliza por medio de la ecuación diferencial de segundo orden

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

donde  $m$  representa la masa,  $x$  el desplazamiento,  $b$  es la constante de amortiguamiento y  $k$  la constante del resorte.

Por medio de las sustituciones:  $x_1 = x$  y  $x_2 = \dot{x}$ , la ecuación del oscilador puede reescribirse como una EDO:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 \end{aligned}$$

En este caso se trata de un sistema *lineal* de dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

**Ejemplo 1.2.** Las ecuaciones de Lotka-Volterra [21], son EDOEs *no lineales* que se utilizan para describir dinámicas de sistemas biológicos en el que dos



especies interactúan, compitiendo por el mismo alimento (por ejemplo, ovejas y conejos que consumen hierba), cuya cantidad disponible es limitada. Un ejemplo de este tipo de modelo es el siguiente,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(3 - x_1 - 2x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(2 - x_1 - x_2)\end{aligned}$$

donde  $x_2$  es la población de conejos y  $x_1$  la de ovejas,  $x_1 > 0$  y  $x_2 > 0$ . Los otros coeficientes son parámetros que representan las interacciones entre las dos especies.

## 1.1. Ecuaciones Diferenciales Implícitas

En muchos casos en que no es posible usar una EDOE el sistema se describe por una *Ecuación Diferencial Implícita (EDI)* que tiene la forma:

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \quad (1.3)$$

donde  $F \in C(\Omega, \mathbb{R}^m)$  y  $\Omega$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .

- Si el problema algebraico  $F(t, x, p) = 0$  que proviene de (1.3) puede resolverse globalmente para  $p$ , la formulación implícita no difiere de la EDOE.
- Si en cambio dicho problema no tiene una solución global, puede tenerla localmente si se cumplen las hipótesis del Teorema de la Función Implícita que enunciamos a continuación.

**Teorema 1.1** (Teorema de la Función Implícita). *Supongamos que  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuamente diferenciable en cada punto  $(x, y)$  de un conjunto abierto  $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Sea  $(x_0, y_0)$  un punto de  $S$  tal que  $f(x_0, y_0) = 0$  para el que la matriz Jacobiana  $f_x(x_0, y_0) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right](x_0, y_0)$ , cuyo elemento  $(i, j)$  es  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ , es no singular. Entonces existen entornos  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $x_0$  y  $V \subset \mathbb{R}^m$  de  $y_0$ , tal que para cada  $y \in V$  la ecuación  $f(x, y) = 0$  tiene solución única cuando  $x \in U$ . Además esta solución puede estar dada como  $x = g(y)$ , con  $g$  continuamente diferenciable en  $y = y_0$  [10].*

Por lo tanto, si  $F$  es localmente  $C^1$  y la matriz Jacobiana  $F_p(t, x, p)$  es no singular en  $x^* = (t_0, x_0, p_0)$  donde  $F(x^*) = 0$ , entonces por el Teorema de la Función Implícita, el conjunto definido por  $F(t, x, p) = 0$  puede ser descrito en un entorno de  $x^*$  como  $p = f(t, x)$  para una función  $f$  que es  $C^1$  y tal que  $\dot{x} = f(t, x)$  define localmente el espacio de estados para (1.3).

Se denomina *Ecuación Diferencial Implícita Autónoma* al caso particular de (1.3) :

$$F(x, \dot{x}) = 0 \quad (1.4)$$

**Ecuaciones Diferenciales Algebraicas.** Una *Ecuación Diferencial Implícita Cuasilineal* autónoma es un caso particular de EDI:

$$A(x)\dot{x} = f(x) \quad (1.5)$$

donde  $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$  y  $A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$  son funciones suaves sobre  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^m$ .

En muchos casos algunas relaciones en (1.5) no incluyen ninguna de las derivadas de las componentes del vector de estados  $x$  con respecto a  $t$ , y por lo tanto, aparecen ecuaciones sólo algebraicas, es por eso que a este tipo de ecuaciones se las suele conocer con el nombre de *Ecuaciones Diferenciales Algebraicas* -EDAs-.

Es de interés en muchas aplicaciones el caso en que  $A(x)$  es singular en alguna subvariedad del dominio  $\Omega$ .

**Solución de una Ecuación Diferencial Implícita.** Una *solución*  $C^1$  del sistema (1.3) es una función  $C^1$ ,  $x : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , donde  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  es un intervalo abierto, tal que  $(t, x(t), \dot{x}(t)) \in \Omega$  y  $F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$ , para todo  $t \in \mathcal{I}$  [18].

Una solución  $x(t)$  que *a priori* debe tomar un valor establecido  $x(t_0) = x_0$  en un  $t_0$  fijo se dice que tiene un *valor inicial*  $x_0$ .

Contrariamente a las EDOEs definidas por una función  $f$ , para EDAs es usual que no todos los puntos admitan solución que pase por ellos.

**Conjunto solución.** Un punto  $x_0$  por el que pasa una solución  $x(t)$  con  $x(t_0) = x_0$ , se llama *valor inicial consistente* en  $t_0$  y el conjunto de pares  $(t_0, x_0)$  por donde pasa alguna solución se llama *conjunto solución*.

**Conjunto singular.** Los puntos  $x \in \Omega$  tales que  $\text{rg}A(x) < m$  se llaman *puntos singulares* de (1.5) y el *conjunto singular*  $M_s$  es el conjunto de todos los puntos singulares. Es decir,

$$M_s = \{x : \text{rg}A(x) < m\}$$

**Ejemplo 1.3.** Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x_2 \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

también puede escribirse en forma matricial como una EDA de la forma (1.5), con  $(x_1 \ x_2)^T \in \mathbb{R}^2$  y

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

La EDI equivalente:

$$F(x, \dot{x}) = A(x)\dot{x} - f(x) = 0$$

Si llamamos  $p = (p_1 \ p_2)^T$ , se tiene que:

$$F(x, p) = \begin{pmatrix} x_2 p_1 - x_1 \\ p_2 + x_2 \end{pmatrix} = 0$$

y

$$F_p(x, p) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene inversa cuando  $x_2 \neq 0$ . Luego, para cualquier  $x = (x_1, x_2)$  con  $x_2 \neq 0$  existe un entorno  $U$  del punto y una función  $\varphi(x)$  definida sobre  $U$  que es  $C^1$  y donde la ecuación  $\dot{x} = \varphi(x)$  define el espacio de estados localmente, siendo:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

En este caso el conjunto de puntos singulares es:

$$M_s = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$$

y las soluciones en  $\mathbb{R}^2 - M_s$  son de la forma,

$$x_1(t) = C_1 e^{-C_2 e^{-t}}, \quad x_2(t) = C_2 e^{-t}.$$

En la figura siguiente se muestra el conjunto singular  $M_s$  y algunas soluciones  $(x_1(t), x_2(t))$ . Las curvas representan soluciones para distintas condiciones iniciales.

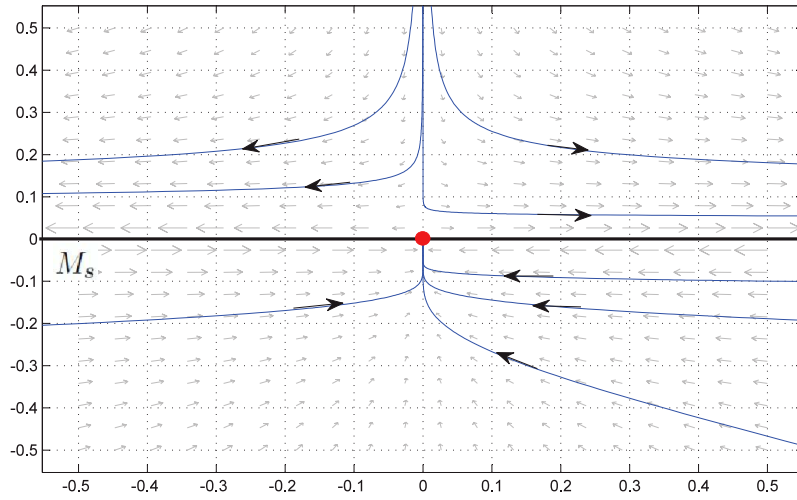


Figura 1.1: Conjunto singular y trayectorias

## 1.2. Índice de una EDA

El concepto de *índice* se define a partir de métodos que, en general, permiten conocer el comportamiento de una EDA en términos de una EDOE definida en una variedad de menor dimensión a la de aquella variedad donde está definida la EDA original, llamada *EDO subyacente*.

A continuación recordaremos algunos conceptos básicos de geometría diferencial que nos permitirán dar en forma precisa la noción de índice de una EDA.

**Variedad.** Aunque tiene una definición matemática rigurosa, en los casos que tratamos en este trabajo alcanza con considerar una variedad suave  $k$ -dimensional como la solución de una ecuación

$$\eta(x) = 0, \quad \text{donde} \quad \eta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-k},$$

con  $\eta$  suficientemente diferenciable.

**Ejemplo 1.4.** En  $\mathbb{R}^n$ , la esfera unitaria

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

es una variedad de dimensión  $n - 1$ , ya que las coordenadas de los puntos sobre la esfera son solución de la ecuación

$$\eta(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 = 0$$

**Espacio tangente.** Sea  $W \subseteq \mathbb{R}^m$  una variedad suave. El conjunto de los vectores tangentes en  $x \in W$  a todas las curvas suaves en  $W$  que pasan por  $x$  se llama *espacio tangente* a  $W$  en  $x$  y se simboliza  $T_x W$ .

Este espacio tangente es un espacio vectorial y se puede considerar como un subespacio de  $\mathbb{R}^m$ .

La unión disjunta

$$TW = \bigcup_{x \in W} T_x W$$

se llama *fibrado tangente* a  $W$  en  $x$ .

**Submersión.** Si  $f : M \rightarrow N$  es una función diferenciable entre dos variedades suaves  $M$  y  $N$ , el rango de  $f$  en un punto  $p \in M$  es el rango de la transformación lineal  $Df_p$  (matriz Jacobiana de  $f$  en  $p$ ). Se dice que  $f$  es una *submersión* en  $p \in M$  si y sólo si  $Df_p$  es suryectiva.

**Índice geométrico.** Consideraremos una EDA cuasilineal  $A(x)\dot{x} = f(x)$  definida en una subvariedad abierta  $W_0 \subset \mathbb{R}^m$ . Cualquier solución debe pertenecer en el conjunto

$$W_1 = \{x \in W_0 : f(x) \in \text{Im}A(x)\}.$$

En esta situación, se define  $F : TW_0 \cong W_0 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que:

$$F(x, p) = A(x)p - f(x)$$

y sea

$$M_0 = F^{-1}(0) = \{(x, p) \in TW_0 : A(x)p - f(x) = 0\} \quad (1.6)$$

Llamando  $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  a la proyección sobre el primer factor, tenemos que  $W_1 = \pi(M_0)$ , además dada una solución  $x(t)$  de la EDA cuasilineal, el par  $(x(t), \dot{x}(t))$  debe pertenecer a  $TW_1 \cap M_0$ .

El método de reducción de Rabier y Rheinboldt [14] es un algoritmo de restricciones que permite calcular una variedad maximal de condiciones iniciales, donde se puede garantizar existencia de solución de una EDI dada, para cada condición inicial sobre tal variedad. Además se obtiene una EDOE que, restringida a esta variedad, resulta equivalente a la EDI original. Este método de reducción requiere las siguientes hipótesis:

**(G1)**  $A(x)$  tiene rango constante  $r_1 \leq m$ , para todo  $x \in W$ .

**(G2)**  $F(x, p)$  es una submersión en el conjunto  $M_0$ .

Con estas condiciones se prueba que  $\pi|_{M_0} : M_0 \rightarrow W_1$  tiene rango constante  $r_1$ , es una transformación abierta y  $W_1 = \pi(M_0)$  es una subvariedad suave de  $W_0$  de dimensión  $r_1$ .

Si  $x(t)$  es una solución de (1.5) contenida en  $W_1$ , el par  $(x(t), \dot{x}(t))$  debe pertenecer al fibrado tangente  $TW_1$ , esto significa que  $\dot{x}(t)$  será tangente no sólo a  $W_0$  sino también a  $W_1$ , entonces el par  $(x(t), \dot{x}(t))$  necesariamente estará en  $M_1 = TW_1 \cap M_0$  y en particular  $x(t)$  estará en  $W_2 = \pi(W_1)$ .

Considerando  $F_1 = F|_{TW_1}$  podemos escribir  $M_1 = TW_1 \cap M_0$  como  $F_1^{-1}(0)$ , siendo

$$W_2 = \{x \in W_1 : f(x) \in \text{Im}A(x)|_{T_x W_1}\}$$

Si las suposiciones (G1) y (G2) se aplican a  $F_1$  y  $\text{Im}A(x)|_{T_x W_1}$ ,  $W_2$  será una variedad de dimensión  $r_2 = \text{rg}(\text{Im}A(x)|_{T_x W_1})$ . Luego, se puede continuar el razonamiento y, por este camino si se siguen las suposiciones mencionadas, se producen dos sucesiones de variedades suaves que se estabilizan:

$$M_0 \supset M_1 \cdots \supset M_\nu = M_{\nu+1}$$

y

$$W_0 \supset W_1 \cdots \supset W_\nu \supseteq W_{\nu+1} = W_{\nu+2} \quad (1.7)$$

Los rangos de las variedades (1.7) forman una sucesión:

$$r_0 > r_1 > r_2 \cdots > r_\nu = r_{\nu+1} = r_{\nu+2}$$

Bajo estas condiciones, el par  $(M_0, W_0)$  se dice que es *completamente reducible* y Rabier y Rheinboldt denominan *índice geométrico* de la EDA (1.5) al menor número  $\nu$  tal que  $M_\nu = \emptyset$  ó  $M_\nu \neq \emptyset$  y  $r_\nu = r_{\nu+1}$ .

**Índice diferencial.** Consideremos una EDI como en (1.4),  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , donde  $\Omega$  es un abierto de  $\mathbb{R}^{2m}$ . En particular, si  $F(x) = A(x)\dot{x} - f(x)$  se tiene una EDA cuasilineal. Si  $x(t)$  es una solución de la EDI y derivamos  $F(x, \dot{x})$  con respecto a  $t$  resulta,

$$\frac{d}{dt}F(x, \dot{x}) = F_x(x, \dot{x})\dot{x} + F_{\dot{x}}(x, \dot{x})\ddot{x} \quad (1.8)$$

Observamos que la  $i$ -ésima derivada resulta una expresión en las variables  $(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(i)}, x^{(i+1)})$ .

En general, las expresiones hasta la  $k$ -ésima derivada definen las ecuaciones de la *matriz derivada*:

$$F_{[k]}(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(k)}, x^{(k+1)}) = \begin{bmatrix} F(x, \dot{x}) \\ \frac{d}{dt}F(x, \dot{x}) \\ \vdots \\ \frac{d^k}{dt^k}F(x, \dot{x}) \end{bmatrix} = 0 \quad (1.9)$$

donde  $\frac{d^i}{dt^i}F(x, \dot{x})$  depende de  $(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(i)}, x^{(i+1)})$  para  $i = 1, \dots, k$ , como en (1.8) para  $i = 1$ .

Se hace un reemplazo "formal" en (1.9),

$$v = \dot{x} \in \mathbb{R}^m, \quad w = (\ddot{x}, \dots, x^{(k)}, x^{(k+1)}) \in \mathbb{R}^{km}$$

con  $(x, v, w)$  como una variable que se encuentra en el espacio  $\Omega^e \in \mathbb{R}^{(k+2)m}$ , cuya proyección sobre las primeras  $2m$  componentes reproduce  $\Omega$ .

Un punto  $x$  dado se dice *consistente* si  $(x, v, w) \in \Omega^e$  es solución de

$$F_{[k]}(x, v, w) = 0.$$

Para un  $x$  consistente fijo, el vector  $(x, v, w)$ , solución de la ecuación

$$F_{[k]}(x, v, w) = 0,$$

puede no ser único en  $\Omega^e$ , pero puede pasar que estas soluciones se proyecten sobre el mismo vector  $(x, v) \in \Omega$ . Esto significa que el arreglo  $F_{[k]} = 0$  determina de manera única  $v$  para  $x$ . Si esto sucede para cada  $x$  consistente, el menor entero no negativo  $k$  que cumple esta propiedad se llama *índice diferencial* de (1.4).

**Observación 1.1.** El método de reducción resumido antes es una buena forma de analizar las EDAs cuasilineales cuando se cumplen las hipótesis G1 y G2 globalmente, pero el análisis resulta limitado en caso contrario. El marco que se da en [14] supone que la función  $F$  que aparece en la ecuación  $F(x, \dot{x}) = 0$  es una función suficientemente diferenciable de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . La condición G1 se puede reformular para  $F(x, \dot{x}) = 0$  requiriendo que  $F_p(x, p)$  tenga rango constante en una subvariedad apropiada del espacio donde el requerimiento de submersión para  $F$  fijo en G2 se aplica en este contexto no lineal.

**Observación 1.2.** Resumiendo, podría decirse que el *índice diferencial* es el mínimo número de diferenciaciones que se necesitan para reducir la EDA a una EDOE equivalente, definida sobre la variedad final de restricciones.

**Observación 1.3.** Las EDOEs tienen índice diferencial 0.

**Ejemplo 1.5.** Consideramos la siguiente EDA:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= y + z \\ 0 &= x + y + z \end{aligned} \tag{1.10}$$

Según el algoritmo de reducción resultan:

$$\begin{aligned} M_0 &= \mathbb{R}^3 \\ M_1 &= \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}, \end{aligned}$$



donde el sistema se puede reducir a una EDOE puesto que de la última ecuación se tiene,

$$0 = \dot{x} + \dot{y} + \dot{z}$$

y

$$\dot{z} = -\dot{x} - \dot{y} = -xy - y - z.$$

El sistema (1.10) es equivalente a la EDOE:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= y + z \\ \dot{z} &= -xy - y - z\end{aligned}\tag{1.11}$$

restringida a  $M_1$ .

El índice diferencial y geométrico de la EDA (1.10) es 1.

**Ejemplo 1.6.** Aplicación del algoritmo de restricciones para el caso de un circuito LC, [5].

Los circuitos LC son circuitos eléctricos compuestos por inductores (L) y capacitores (C). Las ecuaciones del circuito las escribimos según el modelo propuesto en [11], también utilizado en [3] pero con un enfoque diferente, donde se estudian circuitos LC en un contexto geométrico que utiliza estructuras de Dirac.

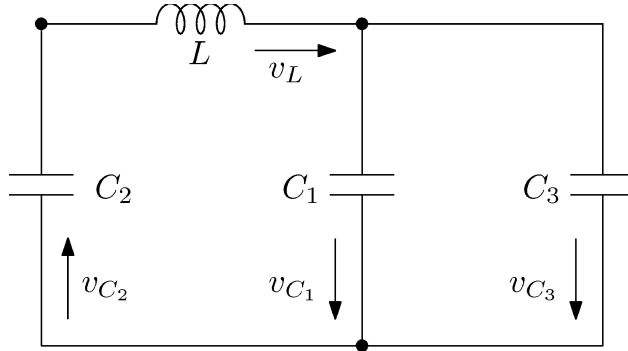


Figura 1.2: Circuito LC de 4 puertos

En este caso el espacio de cargas ( $q$ ) es  $E = \mathbb{R}^4$  y las ecuaciones están definidas sobre  $M = TE \oplus T^*E$ .

Luego, si

$$(q, v, p) \in M,$$

entonces

$$q = (q_L, q_{C_1}, q_{C_2}, q_{C_3}) \in \mathbb{R}^4,$$

el voltaje:

$$v = (v_L, v_{C_1}, v_{C_2}, v_{C_3}) \in T_q \mathbb{R}^4$$

el enlace de flujos:

$$p = (p_L, p_{C_1}, p_{C_2}, p_{C_3}) \in T_q^* \mathbb{R}^4$$

Las EDAs que modelan el circuito son:

$$\dot{p}_L + \frac{q_{C_1}}{C_1} + \dot{p}_{C_1} + \frac{q_{C_2}}{C_2} + \dot{p}_{C_2} = 0 \quad (1.12)$$

$$\dot{p}_L + \frac{q_{C_2}}{C_2} + \dot{p}_{C_2} + \frac{q_{C_3}}{C_3} + \dot{p}_{C_3} = 0 \quad (1.13)$$

$$\dot{q}_L = v_L, \quad \dot{q}_{C_1} = v_{C_1}, \quad \dot{q}_{C_2} = v_{C_2}, \quad \dot{q}_{C_3} = v_{C_3} \quad (1.14)$$

$$p_L = Lv_L, \quad p_{C_1} = p_{C_2} = p_{C_3} = 0 \quad (1.15)$$

$$v_L = v_{C_2}, \quad v_{C_1} = v_{C_2} - v_{C_3}. \quad (1.16)$$

La sucesión de subespacios que se obtiene a partir de aplicar el algoritmo de restricciones resulta:

$$M_0 = TE \oplus T^*E \cong \mathbb{R}^{12}$$

$$M_1 = \{(q, v, p) \mid p_L = Lv_L, \quad p_{C_1} = p_{C_2} = p_{C_3} = 0, \quad v_L = v_{C_2}, \quad v_{C_1} = v_{C_2} - v_{C_3}\}$$

$$M_2 = \left\{ (q, v, p) \mid p_L = Lv_L, \quad p_{C_1} = p_{C_2} = p_{C_3} = 0, \quad v_L = v_{C_2}, \quad v_{C_1} = v_{C_2} - v_{C_3}, \right. \\ \left. \frac{q_{C_1}}{C_1} = \frac{q_{C_3}}{C_3} \right\}$$

$$M_3 = \left\{ (q, v, p) \mid p_L = Lv_L, \quad p_{C_1} = p_{C_2} = p_{C_3} = 0, \quad v_L = v_{C_2}, \quad v_{C_1} = v_{C_2} - v_{C_3}, \right. \\ \left. \frac{q_{C_1}}{C_1} = \frac{q_{C_3}}{C_3}, \quad \frac{v_{C_1}}{C_1} = \frac{v_{C_3}}{C_3} \right\}$$

Dado que el circuito tiene un lazo puramente capacitivo, se demuestra que el algoritmo se detiene en  $M_4 \equiv M_3$ .

En este ejemplo es sencillo verificarlo ya que no se agrega ninguna restricción algebraica cuando se construye  $M_4$ . Luego, esta EDA tiene índice geométrico 3 y el índice diferencial es 1 ya que derivando una vez las restricciones algebraicas se obtiene la EDO equivalente.

Para hallar las EDOEs equivalentes al sistema se parametriza  $M_3$ , que es un subespacio de  $M$  de dimensión 4. Eligiendo 4 variables independientes, por ejemplo  $v_{C_3}$ ,  $q_L$ ,  $q_{C_2}$ ,  $q_{C_3}$ , se obtiene:

$$\dot{v}_{C_3} = \left( -\frac{q_{C_2}}{C_2} - \frac{q_{C_3}}{C_3} \right) \frac{C_3}{L(C_1 + C_3)} \quad (1.17)$$

$$\dot{q}_L = \frac{(C_1 + C_3)}{C_3} v_{C_3} \quad (1.18)$$

$$\dot{q}_{C_2} = \frac{(C_1 + C_3)}{C_3} v_{C_3} \quad (1.19)$$

$$\dot{q}_{C_3} = v_{C_3}. \quad (1.20)$$

Las EDOEs (1.17)-(1.20) restringidas al subespacio  $M_3$  son equivalentes al sistema de EDAs que modela al circuito LC de 4 puertos.

## 1.3. Clasificación de EDAs

En esta subsección daremos una clasificación para las EDAs cuasilineales

$$A(x)\dot{x} = f(x)$$

a partir del concepto de índice diferencial.

### 1.3.1. EDAs regulares.

En general, una EDA cuasilineal se dice *localmente regular* en un punto  $x_0$ , con  $\text{rg}A(x_0) < m$ , si el índice diferencial está definido y es constante en un entorno de ese punto.

**Ejemplo 1.7.** Consideramos el sistema

$$A(x)\dot{x} = f(x)$$

con  $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$ ,

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_4^3 - x_1 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$L, C$  constantes positivas.

Para cualquier  $x^* \in \mathbb{R}^4$ ,  $\text{rg}A(x^*) = 2 < 4$ , y el índice diferencial es 1 pues:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_4^2\dot{x}_4 = \frac{1}{C}3x_4^2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\dot{x}_3 = -\frac{1}{L}x_3 \end{aligned}$$

Luego, se trata de una EDA regular, en este caso globalmente regular.

**Observación 1.4.** Las EDAs regulares producen dinámicas bien definidas sólo en conjuntos de menor dimensión llamados *variedades solución* y su comportamiento dinámico usualmente puede describirse con una EDOE por medio de una parametrización apropiada de la variedad solución.

### 1.3.2. EDAs singulares.

Una EDA cuasilineal se dice *singular* en  $x_0$ , con  $\text{rg}A(x_0) < m$ , si el índice diferencial está definido y es constante en un subconjunto abierto y denso de un entorno de ese punto pero no en el mismo punto.

**Ejemplo 1.8.** Consideramos el sistema  $A(x)\dot{x} = f(x)$ , con  $x = (x_1, x_2)$ ,

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Si  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  es tal que  $x_1 + x_2 \neq 0$ , el sistema tiene índice diferencial 0.

Si  $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2$  es tal que  $x_1^* + x_2^* = 0$ , cada entorno de  $x^*$  contiene un subconjunto abierto y denso del conjunto regular donde el índice es 0.

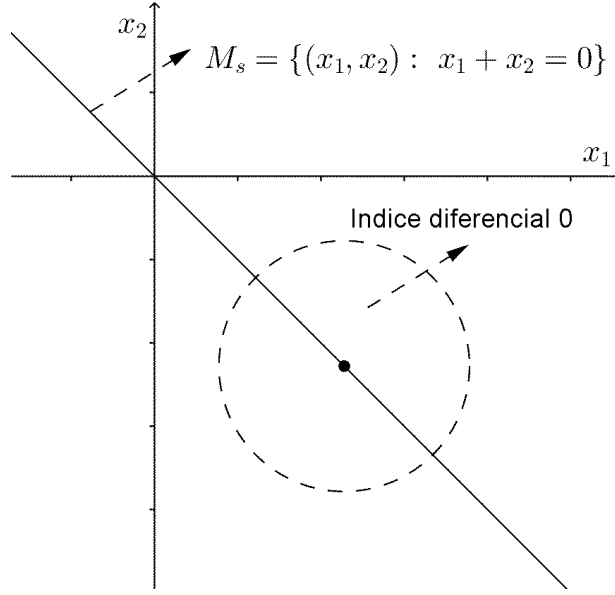


Figura 1.3: EDA singular

Luego, se trata de una EDA singular en cada punto de la recta de ecuación  $x_1 + x_2 = 0$ .

## 1.4. Puntos de equilibrio y estabilidad.

Las definiciones de punto de equilibrio y estabilidad de puntos de equilibrio son centrales para el desarrollo posterior.

**Definición 1.1.** Un punto  $x = x^*$  en el espacio de estados se llama *punto de equilibrio o punto fijo* para una EDI si el estado (trayectoria o solución) del sistema comienza en  $x^*$  y permanece en  $x^*$  para todo tiempo futuro.

Un punto de equilibrio  $x^*$  se dice *aislado* si existe algún entorno del punto donde no hay otro equilibrio del sistema.

Un punto de equilibrio  $x^*$  se dice *singular* si  $x^* \in M_s$ .

### 1.4.1. Estabilidad de puntos de equilibrio

Un punto de equilibrio  $x^*$  de un sistema  $\dot{x} = g(x)$  es

- *Estable*: si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que

$$\|x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \epsilon, \quad \forall t > 0.$$

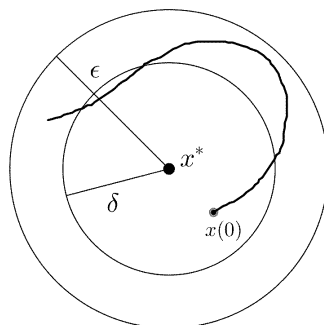


Figura 1.4:  $x^*$  es un equilibrio estable

- *Inestable*: si no es estable.
- *Asintóticamente estable*: si es estable y puede elegirse  $\delta$  tal que

$$\|x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*.$$

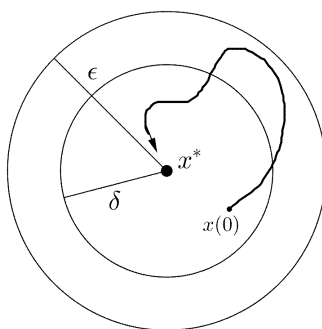


Figura 1.5:  $x^*$  es un equilibrio asintóticamente estable

### 1.4.2. Puntos de equilibrio en EDAs cuasilineales

En EDAs cuasilineales

$$A(x)\dot{x} = f(x),$$

los puntos de equilibrio son las raíces reales de la ecuación  $f(x) = 0$ .

Si  $x^*$  es un punto de equilibrio, para analizar la estabilidad hay que distinguir entre EDAs regulares y singulares.

En ambos casos, si  $x^*$  pertenece al conjunto regular  $\mathbb{R}^n - M_s$  las definiciones de estabilidad coinciden con las dadas, ya que el sistema puede reescribirse como:

$$\dot{x} = A^{-1}f(x) = g(x).$$

Si en cambio  $x^* \in M_s$ , es decir se trata de un equilibrio singular, se distinguen dos casos:

- Si la EDA es regular y  $x^*$  es equilibrio singular, la estabilidad depende de la linealización del sistema en el punto.
- Si la EDA es singular y  $x^*$  es equilibrio singular, la estabilidad se analiza en conjuntos tales como superficies cónicas en el caso estacionario o en variedades de menor dimensión transversales al conjunto singular en el caso no estacionario.

El análisis de la estabilidad de equilibrios singulares en EDAs cuasilineales regulares se detalla en el Capítulo 2 y para EDAs cuasilineales singulares en los Capítulos 3, 4 y 5.





## Capítulo 2

# Ecuaciones Diferenciales Algebraicas Regulares

Una EDA cuasilineal  $A(x)\dot{x} = f(x)$  se dice *localmente regular* en un punto  $x^*$ , con  $\text{rg}A(x^*) < n$ , si el índice diferencial está definido y es constante en un entorno de ese punto.

En este capítulo enunciamos algunos resultados sobre la estabilidad del equilibrio en algunos tipos de EDAs localmente regulares, basados en la teoría de matrices pencil y usando la forma canónica de Kronecker y métodos de proyectores para determinar el índice [17], [18].

Aplicaremos estos resultados ya conocidos para hallar las condiciones que garantizan la estabilidad del equilibrio en las ecuaciones que modelan ciertos circuitos eléctricos.

### 2.1. Estabilidad del equilibrio en EDOEs.

En esta sección mostraremos algunas definiciones y resultados importantes sobre estabilidad de puntos de equilibrio en EDOEs lineales y no lineales.

**EDOEs lineales.** Consideramos el caso de *EDOEs lineales* de la forma

$$\dot{x} = Ax, \tag{2.1}$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es matriz constante y diagonalizable. y  $x^* = 0$  es punto de equilibrio. Si la condición inicial es  $x(0) = x_0$ , la solución general tiene la forma:

$$x(t) = S e^{\Lambda t} S^{-1} x_0 = S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} S^{-1} x_0 = c_1 e^{\lambda_1 t} s_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} s_n \quad (2.2)$$

siendo  $S = [s_1 \ \dots \ s_n]$  la matriz de los vectores propios de  $A$ ,  $\Lambda$  la matriz en cuya diagonal están los valores propios correspondientes a  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , respectivamente, de modo que  $A = S \Lambda S^{-1}$ , y  $c_i = S^{-1} x_i(0)$  los coeficientes en el desarrollo de  $x(t)$ .

Si todos los factores  $e^{\lambda_j t}$  tienden a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$  entonces  $x(t)$  tiende a 0; si al menos uno de ellos tiende a  $\infty$  entonces  $x(t) \rightarrow \infty$ . Además, para cada  $j$ , el módulo de  $e^{\lambda_j t}$  depende sólo de la parte real de  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$  pues

$$e^{\lambda_j t} = e^{\alpha_j t} (\cos \beta_j t + i \sin \beta_j t), \quad \left| e^{\lambda_j t} \right| = e^{\alpha_j t},$$

luego  $e^{\lambda_j t}$  tiende a 0 para  $\alpha_j < 0$ , es constante para  $\alpha_j = 0$  y tiende a  $\infty$  cuando  $\alpha_j > 0$ . En cada caso la parte imaginaria produce oscilaciones pero la amplitud proviene de la parte real. Por lo tanto el equilibrio  $x^* = 0$  de la EDOE lineal (2.1) es asintóticamente estable cuando  $\text{Re} \lambda_j < 0$ , para todo  $j$ . Si existe algún  $j$  tal que  $\text{Re} \lambda_j > 0$  el equilibrio es inestable.

**EDOE's no lineales.** Consideramos ahora una *EDOE no lineal* de la forma

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.3)$$

con  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^r)$  y  $\Omega$  abierto en  $\mathbb{R}^r$ .

En este caso los puntos de equilibrio son las soluciones de la ecuación  $f(x) = 0$ . Llamamos  $J = f'(x^*)$  a la matriz Jacobiana del campo  $f$  evaluada en el punto de equilibrio  $x^*$ .

Se dice que un punto de equilibrio  $x^*$  es *hiperbólico* si todos los autovalores de  $J$  tienen parte real distinta de cero.

Un punto de equilibrio es *exponencialmente estable* si todos los autovalores de  $J$  tienen parte real menor que 0. Se demuestra que si un punto de equilibrio es exponencialmente estable entonces es asintóticamente estable.

Si  $x^*$  es un punto de equilibrio hiperbólico, la estabilidad de  $x^*$  se establece en términos del *sistema lineal asociado*  $\dot{x} = Jx$ , más precisamente el espectro de  $J$

determina la estabilidad del equilibrio como se demuestra en el Teorema de Hartman Grobman que enunciamos más abajo.

El teorema de Hartman Grobman es un resultado muy importante y muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $x^*$ , el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.4)$$

tiene la misma estructura cualitativa que el sistema lineal

$$\dot{x} = Jx. \quad (2.5)$$

En lo que sigue, sin pérdida de generalidad, supondremos que el punto de equilibrio puede trasladarse al origen.

**Definición 2.1.** Los sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales (2.4) y (2.5) se dicen *topológicamente equivalentes* en un entorno del origen, o tienen la misma estructura cualitativa cerca del origen, si existe un homeomorfismo  $H$  de un entorno  $U$  del origen en un entorno  $V$  que también contiene al origen, que transforma las trayectorias de (2.4) en  $U$  sobre las trayectorias de (2.5) en  $V$  y preserva la orientación. Si el homeomorfismo  $H$  preserva la parametrización por el tiempo entonces los sistemas se dicen *topológicamente conjugados* en un entorno del origen.

**Teorema 2.1** (Teorema de Hartman Grobman). *Sea el sistema  $\dot{x} = f(x)$  con  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo  $C^1$  y  $f(0) = 0$ . Supongamos que  $J = f'(0)$ , matriz Jacobiana de  $f(x)$  evaluada en 0, tiene todos sus autovalores con parte real no nula. Entonces existe un homeomorfismo  $H : U \rightarrow V$  donde  $U, V$  son entornos abiertos de 0, que lleva las trayectorias del sistema lineal  $\dot{x} = Jx$  en las del sistema  $\dot{x} = f(x)$  y tal que  $H(0) = 0$  y preserva la parametrización. Es decir, los dos sistemas son topológicamente conjugados en un entorno del origen [13].*

En conclusión, la estabilidad del equilibrio en un sistema de la forma (2.4) depende de la estabilidad del equilibrio en el sistema lineal asociado (2.5), [10].

## 2.2. Clasificación de EDAs cuasilineales regulares. Estabilidad.

En esta sección presentaremos algunas clases particulares de EDAs regulares, y también algunos resultados de estabilidad vinculados a cada una de ellas. En efecto, enunciaremos varias proposiciones y teoremas que permiten determinar la estabilidad de equilibrios en ecuaciones localmente regulares de distintos tipos: lineales, semilineales, semiexplícitas y cuasilineales. Como herramienta fundamental, utilizaremos las matrices pencil asociadas a estos sistemas [17].

**EDAs Lineales.** Son sistemas descriptos por ecuaciones de la forma

$$A\dot{x} + Bx = 0, \quad (2.6)$$

se trata de ecuaciones lineales homogéneas, invariantes en el tiempo, con  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\det A = 0$ .

De modo similar al empleado en las EDOEs lineales (2.1), la búsqueda de soluciones para (2.6) de la forma  $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} x_n$  conduce al problema generalizado de autovalores caracterizado por la ecuación

$$\det(\lambda A + B) = 0.$$

Para precisar lo anterior se definen:

**Definición 2.2.** Una *matriz pencil*  $\{A, B\}$  es una familia de un parámetro:  $\{A, B\} = \{\det(\lambda A + B) : \lambda \in \mathbb{C}\}$

**Definición 2.3.** El *espectro* de la matriz pencil  $\{A, B\}$  es el conjunto:  $\sigma(A, B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda A + B) = 0\}$

**Definición 2.4.** Una matriz pencil  $\{A, B\}$  es *regular* cuando el polinomio en  $\lambda$ ,  $\det(\lambda A + B)$ , no es idénticamente nulo o equivalentemente cuando su espectro es finito, en caso contrario la matriz pencil se dice *singular*.

**Proposición 2.1.** Si  $\{A, B\}$  es una matriz pencil regular, entonces existen matrices no singulares  $E, F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tales que:

$$EAF = \begin{pmatrix} I & O \\ O & N \end{pmatrix}, \quad EBF = \begin{pmatrix} W & O \\ O & I \end{pmatrix},$$

donde  $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , para algún  $m < n$ , y  $N \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  es una matriz nilpotente con índice  $\nu < n - m$ .

**Observación 2.1.** Se dice que una matriz cuadrada  $A$  es *nilpotente* si existe un  $\nu \in \mathbb{N}$ , tal que  $A^\nu$  es la matriz nula. El índice de nilpotencia es el menor  $\nu$  para el que se cumple esta propiedad.

El índice de nilpotencia  $\nu$  se llama el *índice de Kronecker* de la matriz pencil asociada a la EDA lineal (2.6).

**Teorema 2.2.** (Estabilidad en EDAs lineales) Si  $\{A, B\}$  es una matriz pencil regular con  $\sigma(A, B) \in \mathbb{C}^-$ , entonces el origen es un equilibrio asintóticamente estable de (2.6).

**Proposición 2.2.**  $B$  es una matriz no singular o regular si y sólo si  $0 \notin \sigma(A, B)$ .

Las técnicas de proyectores se aplican al estudio de la estabilidad de EDAs lineales y permiten conocer el índice de Kronecker de una matriz pencil.

**Métodos de proyectores.** En este caso hace falta tener en cuenta que la variedad solución  $\mathcal{M}$  de la EDA debe ser un subconjunto de  $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx \in \text{Im}A\}$ . En la proposición que se enuncia a continuación se demuestra que en el caso de índice 1 los conjuntos  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{D}$  coinciden.

**Proposición 2.3.** *Sea  $Q$  algún proyector sobre  $\mathcal{N} = \text{Ker}A$ , es decir, un operador lineal que satisface  $Q^2 = Q$  y  $\text{Im}Q = \mathcal{N}$ .*

*Son equivalentes:*

1. *La matriz pencil  $\{A, B\}$  tiene índice de Kronecker 1.*
2. *La matriz  $A_1 = A + BQ$  es no singular.*
3.  $\mathbb{R}^n = \mathcal{N} \oplus \mathcal{D}$ .
4.  $\mathcal{M} = \mathcal{D}$ .

**EDAs semilineales.** Las EDAs semilineales autónomas están definidas por,

$$A\dot{x} = f(x) \quad (2.7)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^n$ ,  $\det A = 0$  y  $f \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$ , siendo  $U$  un entorno de un punto de equilibrio  $x^*$ , es decir,  $f(x^*) = 0$ .

En este caso la estabilidad asintótica puede analizarse como una extensión del caso lineal.

**Teorema 2.3.** *(Estabilidad en EDAs semilineales) Consideramos una EDA semilineal autónoma con  $f(x^*) = 0$  y  $J = f'(x^*)$ . Si  $\{A, -J\}$  es una matriz pencil regular con índice de Kronecker 1 y  $\sigma(A, -J) \subset \mathbb{C}^-$ , entonces  $x^*$  es un equilibrio asintóticamente estable de (2.7).*

**EDAs semiexplícitas.** Las EDAs semiexplícitas son un caso importante dentro de la clase de EDAs semilineales. Tienen la forma:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f^\circ(u, v) \\ 0 &= g^\circ(u, v) \end{aligned} \quad (2.8)$$

con  $f^\circ : \mathbb{R}^{r+p} \rightarrow \mathbb{R}^r$  y  $g^\circ : \mathbb{R}^{r+p} \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

Observar que una EDA semiexplícita es una EDA de la forma (2.7) si consideramos

$$A = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f^\circ(u, v) \\ g^\circ(u, v) \end{pmatrix}$$

Recíprocamente, una EDA semilineal puede escribirse en la forma (2.8). En efecto, si  $\text{rg}A = r$ , existen matrices no singulares  $E$  y  $F$  tales que

$$EAF = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

con  $I \in \mathbb{R}^{r \times r}$ .

Si premultiplicamos (2.7) por  $E$  y aplicamos el cambio de coordenadas  $x = Fy$ , donde  $y = (u, v)^T$ , la EDA semilineal toma la forma de una EDA semiexplícita:

$$\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = Ef(Fy).$$

**El caso de índice diferencial 1.** Sea la EDA semiexplícita

$$\dot{u} = f(u, v) \tag{2.9}$$

$$0 = g(u, v) \tag{2.10}$$

Suponemos que  $g$  es  $C^1$  y  $g_v(u, v)$  es una matriz invertible en el punto  $(u^*, v^*)$  que satisface  $g(u^*, v^*) = 0$ . Diferenciando en la ecuación (2.10) con respecto a  $t$ , obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, v) \\ g_v(u, v)\dot{v} &= -g_u(u, v)g(u, v) \end{aligned} \tag{2.11}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, v) \\ \dot{v} &= -g_v^{-1}(u, v)g_u(u, v)g(u, v) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Luego, bajo la suposición de regularidad de  $g_v(u, v)$ , una diferenciación produce la llamada *EDOE subyacente* (2.12) para la que  $g = 0$  es invariante. Esto expresa que el índice diferencial del sistema es 1 cerca de  $(u^*, v^*)$ .

Además, la regularidad de  $g_v(u^*, v^*)$  tiene implicancias adicionales:

1. La ecuación (2.10) define una *variedad solución* diferenciable  $\mathcal{M}$ .
2. Existe una  $\tilde{g}$  tal que  $g(u, v) = 0 \Leftrightarrow v = \tilde{g}(u)$  en un entorno de  $(u^*, v^*)$ .
3. El comportamiento dinámico sobre  $\mathcal{M}$  puede describirse, en la parametrización dada por  $u$ , a través de la *EDOE reducida*

$$\dot{u} = f(u, \tilde{g}(u)).$$

**La estabilidad en EDAs semiexplícitas.** Para este caso se obtiene un resultado de estabilidad equivalente al Teorema 2.3.

**Proposición 2.4.** *Consideremos la EDA semiexplícita (2.9)-(2.10) en un entorno del equilibrio  $(u^*, v^*)$ , es decir  $f(u^*, v^*) = 0$ ,  $g(u^*, v^*) = 0$ . Sean*

$$A = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad y \quad J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}.$$

*Entonces  $\sigma(f_u - f_v g_v^{-1} g_u) = \sigma(A, -J)$ .*

**EDAs cuasilineales.** Las EDAs cuasilineales o linealmente implícitas autónomas se describen por un sistema de la forma:

$$A(x)\dot{x} = f(x), \tag{2.13}$$

con  $A(x) \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$  y  $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

La matriz  $A(x)$  es singular con rango constante en un entorno de un punto dado  $x^*$ . En lo que sigue nos enfocaremos en los puntos de equilibrio de la EDA cuasilineal, es decir,  $f(x^*) = 0$ . El siguiente resultado sobre estabilidad de los puntos de equilibrio vale en el caso de las ecuaciones cuasilineales con índice de Kronecker 1.

**Teorema 2.4.** *(Estabilidad en EDAs cuasilineales) Sea una EDA cuasilineal  $A(x)\dot{x} = f(x)$ ,  $x^*$  es un punto de equilibrio, es decir,  $f(x^*) = 0$ . Llamamos  $A = A(x^*)$  y  $J = f'(x^*)$ . Supongamos que  $A(x)$  tiene rango constante en algún entorno de  $x^*$ . Si  $\{A, -J\}$  es una matriz pencil regular con índice de Kronecker 1 con  $\sigma(A, -J) \in \mathbb{C}^-$ , entonces  $x^*$  es un equilibrio asintóticamente estable de (2.13).*

**Observación 2.2.** En esta sección presentamos los Teoremas 2.2, 2.3 y 2.4 que dan resultados de estabilidad para EDAs lineales, semilineales y cuasilineales respectivamente, en términos de la descripción original del problema usando la teoría de las matrices pencil y no en términos de la parametrización de la variedad solución como en el método de reducción de Rabier y Rheinboldt [14].

## 2.3. Algoritmo de desingularización

El algoritmo de desingularización permite, dada una EDA cuasilineal del tipo (2.13), hallar una EDA cuasilineal equivalente de rango localmente constante, restringida a una subvariedad de dimensión menor donde se puede garantizar existencia de solución. El algoritmo está desarrollado detalladamente en [2].

### 2.3.1. EDA cuasilineal de rango localmente constante.

Consideramos la ecuación (2.13) con dominio en una variedad analítica real  $M$ , donde las aplicaciones  $A$  y  $f$  son funciones analíticas reales definidas sobre  $M$ . Si  $\text{rg}A(x) = \text{rg}(A(x) \ f(x))$  es localmente constante, es decir es constante alrededor de un punto  $x^*$ , entonces la ecuación (2.13) se dice que es de *rango localmente constante* en  $x^*$ .

Dada una EDA del tipo (2.13), el algoritmo de desingularización permite hallar una EDA cuasilineal equivalente, de rango localmente constante, restringida a una subvariedad de dimensión menor donde se puede garantizar existencia de solución. La restricción del sistema hace posible estudiar los puntos de equilibrio asintóticamente estables en una subvariedad de menor dimensión y analizar su comportamiento.

### 2.3.2. Breve descripción del algoritmo de desingularización.

En primer lugar definimos *desingularización* y luego el teorema de existencia de tal desingularización.

**Definición 2.5.** Sea  $M$  una variedad analítica real y sea  $X$  un subconjunto analítico de  $M$ . Una *desingularización* de  $X$  es una aplicación analítica real propia  $\pi : N \rightarrow M$  tal que  $\pi(N) = X$ , siendo  $N$  es una variedad analítica real de la misma dimensión de  $X$ .

**Teorema 2.5.** Sea  $M$  una variedad analítica real y sea  $X$  un subconjunto analítico cerrado. Entonces existe una desingularización  $\pi : N \rightarrow M$ .

El algoritmo de desingularización puede describirse brevemente así: dada  $M$  una variedad de dimensión  $m$  y  $A(x)\dot{x} = f(x)$  una EDA cuasilineal, se demuestra que esta ecuación puede transformarse en una EDA cuasilineal equivalente que simbolizamos  $\tilde{A}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x)$  y que resulta de rango localmente constante sobre una variedad analítica  $\tilde{N}$ . Además, existe una proyección de  $\tilde{N}$  en  $M$  tal que las soluciones de la EDA reducida se proyectan como soluciones de la EDA original.

Para construir la variedad  $\tilde{N}$  se utiliza la técnica de desingularización, para ello se muestra en [2] que  $M$  es una unión disjunta:  $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2$ , donde  $M_1$  y  $M_2$  son subvariedades abiertas de igual dimensión que  $M$  y  $M_0$  es la unión de subconjuntos definidos por ecuaciones analíticas con  $\dim M_0 < m$ . Además, el sistema lineal algebraico asociado a (2.13) no tiene solución para  $x \in M_1$ , tiene solución para todo  $x \in M_2$  y el sistema (2.13) restringido a  $M_2$  es una EDA



cuasilineal de rango localmente constante. Para estudiar que ocurre con el sistema restringido a  $M_0$  se aplica, si es necesario, la técnica de desingularización de  $M_0$ . Se puede ver que si  $M$  es conexo,  $M_1 = \emptyset$  o  $M_2 = \emptyset$ .

## 2.4. Condiciones para la estabilidad del equilibrio en circuitos eléctricos

Algunos resultados sobre estabilidad desarrollados antes pueden aplicarse a distintos modelos de redes eléctricas que se representan por EDAs.

En términos generales, un circuito se puede considerar como un conjunto de *ramas* interconectadas, donde en cada rama inciden dos *nodos* distintos.

Cada rama del circuito tiene dos variables asociadas: la corriente  $I$  en la rama y el voltaje  $V$ . Con respecto a los llamados *elementos reactivos* (*capacitores e inductores*), la rama tiene dos variables adicionales: la carga  $q$  para los capacitores y el flujo  $\psi$  para los inductores.

Las ecuaciones que gobiernan la dinámica del circuito combinan las relaciones lineales entre corrientes y voltajes dadas por las leyes de Kirchhoff, con las relaciones electromagnéticas que caracterizan los dispositivos que incluyen ecuaciones diferenciales en los elementos reactivos y relaciones algebraicas, posiblemente no lineales (no diferenciales). La naturaleza mixta de estas ecuaciones explica el rol de la aplicación de las EDAs a la modelización de circuitos.

### 2.4.1. Condiciones para la estabilidad del equilibrio en un circuito RLC no lineal

Consideramos un circuito RLC no lineal que consiste de una resistencia, un capacitor y un inductor en paralelo con una fuente  $E$ .

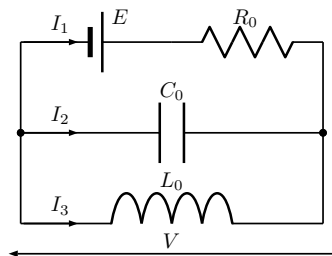


Figura 2.1: Circuito RLC no lineal

Sea  $I_i$  la corriente en la  $i$ -ésima rama,  $V$  la caída de voltaje (común) en cada rama. Sea  $C_0(V)$  y  $L_0(I_3)$  la capacidad y la inductividad, respectivamente, donde  $C_0 : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  y  $L_0 : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  son funciones suaves. Por las leyes de Kirchhoff para las corrientes se tiene que  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ ; además la evolución en el tiempo de la caída de voltaje y las corrientes en las ramas del capacitor e inductor están dados por

$$I_2 = (C_0(V) + VC'_0(V)) \dot{V} = C(V) \dot{V}$$

y

$$V = (L_0(I_3) + I_3 L'_0(I_3)) \dot{I}_3 = L(I_3) \dot{I}_3$$

En la rama de la resistencia,  $I_1$  y  $V$  están relacionados por una ecuación de la forma  $\psi(I_1, V + E) = 0$ , donde  $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suficientemente suave. Por simplicidad llamaremos  $x_i = I_i$  para  $1 \leq i \leq 3$ ,  $x_4 = V$ .

Las ecuaciones que gobiernan la evolución del voltaje y la corriente tienen la forma:

$$A(x) \dot{x} = f(x) \tag{2.14}$$

siendo  $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$ ,

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(x_4) \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ \psi(x_1, x_4 + E) \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Como el sistema anterior corresponde a una EDA cuasilineal se puede aplicar el Teorema 2.4 para determinar la estabilidad del equilibrio singular.

El punto de equilibrio es  $x^* = (x_1^*, 0, -x_1^*, 0)$ , con  $\psi(x_1^*, E) = 0$ , además

$$J = f'(x^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = A(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(-x_1^*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(0) \end{pmatrix}.$$

Puesto que  $L(x_3)$  y  $C(x_4)$  son funciones positivas,  $\text{rg} A(x) = 2$ , para todo  $x$ .

Debemos encontrar las condiciones para que  $\{A, J\}$  sea una matriz pencil regular con índice de Kronecker 1. Para esto usamos la Proposición 2.3 con

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

proyector sobre  $\text{Ker}A(x^*)$ . Luego,

$$A_1 = A - JQ = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(-x_1^*) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & C(0) \end{pmatrix},$$

que resulta invertible si  $\frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} \neq 0$ . En este caso, la matriz pencil  $\{A, J\}$  tiene índice de Kronecker 1. El espectro está formado por las soluciones de la ecuación:

$$|\lambda A - J| = -C(0) \frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} L(-x_1^*) \lambda^2 + \frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} L(-x_1^*) \lambda - \frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} = 0.$$

A continuación describiremos los tipos de solución que pueden aparecer:

1. Soluciones de la ecuación cuando  $\frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} = 0$ :

$$\lambda^2 = -\frac{1}{C(0)L(-x_1^*)} < 0$$

Luego las raíces tienen parte real cero y no se cumple que  $\sigma(A, -J) \subset \mathbb{C}^-$ .

2. Soluciones de la ecuación cuando  $\frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} \neq 0$ :

$$\lambda = \frac{-L(-x_1^*) \frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} \pm L(-x_1^*) \left| \frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} \right| \sqrt{1 - \frac{4C(0) \left( \frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} \right)^2}{L(-x_1^*) \left( \frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} \right)^2}}}{-2C(0)L(-x_1^*) \frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_1}}$$

Mediante algunas operaciones simples obtenemos:

$$\lambda_1 = \frac{\frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_4}}{2C(0) \frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_1}} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4C(0) \left( \frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} \right)^2}{L(-x_1^*) \left( \frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} \right)^2}} \right],$$

$$\lambda_2 = \frac{\frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_4}}{2C(0) \frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_1}} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4C(0) \left( \frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} \right)^2}{L(-x_1^*) \left( \frac{\partial\psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} \right)^2}} \right].$$

- $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son complejos con parte real negativa si:

$$1 - \frac{4C(0) \left( \frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} \right)^2}{L(-x_1^*) \left( \frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} \right)^2} < 0,$$

y

$$\frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} > 0, \frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} < 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} < 0, \frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} > 0.$$

- $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales negativos si:

$$0 < 1 - \frac{4C(0) \left( \frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} \right)^2}{L(-x_1^*) \left( \frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} \right)^2} < 1,$$

y

$$\frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} > 0, \frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} < 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} < 0, \frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} > 0.$$

A partir del análisis anterior podemos enunciar el siguiente resultado:

**Proposición 2.5.** *Los puntos de equilibrio de la EDA cuasilineal correspondiente al circuito RLC son  $x^* = (x_1^*, 0, -x_1^*, 0)$  donde  $x_1^*$  es tal que  $\psi(x_1^*, E) = 0$ . Además si  $\frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_4}$  y  $\frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_1}$  son ambas no nulas y de distinto signo, entonces  $x^*$  es equilibrio asintóticamente estable. [6]*

**Ejemplo 2.1.** Consideramos

$$\psi(x_1, x_4 + E) = x_4 + E - (ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1),$$

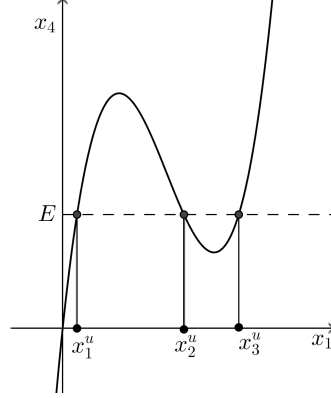
con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , y tal que  $u(x_1) = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1$  tome valores positivos para  $x_1 > 0$ .

En este caso los puntos de equilibrio dependen de los valores de los parámetros  $a, b, c$  y son  $x^* = (x_1^*, 0, -x_1^*, 0)$ , donde  $x_1^* > 0$  es raíz de la ecuación:  $ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 = E$ .

Puesto que  $\frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} = 1$ , si  $\frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} = -3ax_1^{*2} - 2bx_1^* - c < 0$  el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

Por ejemplo, si  $u(x_1) = \frac{17}{32}x_1^3 - \frac{35}{8}x_1^2 + \frac{19}{2}x_1$ , pueden existir uno, dos o tres puntos de equilibrio. En la figura están señalados tres valores de  $x_1^*$ , que producen tres

puntos de equilibrio  $(x_1^u, 0, -x_1^u, 0)$ ,  $(x_2^u, 0, -x_2^u, 0)$ ,  $(x_3^u, 0, -x_3^u, 0)$ . Dependiendo de los valores de  $E$  se puede determinar cuales son asintóticamente estables.



### 2.4.2. Aplicación del algoritmo de desingularización.

Veremos que después de reducir (2.14) a un sistema de orden 2, el algoritmo de desingularización (Sección 2.3) permite determinar si el equilibrio  $x^*$  es nodo o foco.

En este caso, el conjunto  $M$  está determinado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ \psi(x_1, x_4 + E) &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si  $\psi(x_1, x_4 + E)$  es tal que  $\frac{\partial \psi(x_1, x_4 + E)}{\partial x_4} \neq 0$  en un entorno del punto de equilibrio, aplicando el Teorema de la Función Implícita (1.1), se tiene que existe una función  $\varphi$  continuamente diferenciable, tal que  $x_4 + E = \varphi(x_1)$ . Luego, el sistema original se reduce a:

$$L(-x_1 - x_2)(-\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = \varphi(x_1) - E \quad (2.16)$$

$$C(\varphi(x_1) - E)\varphi'(x_1)\dot{x}_1 = x_2, \quad (2.17)$$

que resulta ser un sistema de orden 2 del tipo  $\tilde{A}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x)$ , con:

$$\tilde{A}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -L(-x_1 - x_2) & -L(-x_1 - x_2) \\ C(\varphi(x_1) - E)\varphi'(x_1) & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \varphi(x_1) - E \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

El conjunto singular es

$$\{x_1 : \varphi'(x_1) = 0\},$$

ya que las funciones  $L$  y  $C$  son positivas, los puntos de equilibrio singular son  $\{x^* = (x_1^*, 0) : \varphi(x_1^*) = E\}$ .

En esta situación se dan dos casos posibles para el análisis de la estabilidad del punto de equilibrio:

**RLC. 1** Si  $\varphi(x_1^*) = E$  y  $\varphi'(x_1^*) \neq 0$ ,  $x^* = (x_1^*, 0)$  es un *equilibrio regular* del sistema reducido.

**RLC. 2** Si  $\varphi(x_1^*) = E$  y  $\varphi'(x_1^*) = 0$ ,  $x^* = (x_1^*, 0)$  es un *equilibrio singular* del sistema reducido. El análisis de la estabilidad en este caso lo haremos en el Capítulo 5, Sección 5.1.

Si  $x^*$  es equilibrio regular, caso (**RLC. 1**), la matriz  $\tilde{A}(x_1, x_2)$  admite inversa y el sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C(\varphi(x_1)-E)\varphi'(x_1)} \\ -\frac{1}{L(-x_1-x_2)} & -\frac{1}{C(\varphi(x_1)-E)\varphi'(x_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x_1) - E \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x_2}{C(\varphi(x_1)-E)\varphi'(x_1)} \\ -\frac{\varphi(x_1)-E}{L(-x_1-x_2)} - \frac{x_2}{C(\varphi(x_1)-E)\varphi'(x_1)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Aplicando el Teorema de Hartman-Grobman (2.1), en un entorno de  $x^*$  las trayectorias del sistema no lineal se corresponden con la del sistema lineal

$$\dot{x} = J(x^*)x,$$

donde

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C(0)\varphi'(x_1^*)} \\ -\frac{\varphi'(x_1^*)}{L(-x_1^*)} & -\frac{1}{C(0)\varphi'(x_1^*)} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Se puede determinar si el equilibrio asintóticamente estable  $x^*$  es un nodo o un foco analizando si los autovalores de la matriz  $J(x^*)$  son reales o complejos, respectivamente.

La ecuación característica es

$$\lambda^2 + \frac{1}{C(0)\varphi'(x_1^*)}\lambda + \frac{1}{C(0)L(x_1^*)} = 0,$$

cuyas soluciones pueden ser reales negativas (nodo estable) o complejas conjugadas con parte real negativa (foco estable).

**Ejemplo 2.2.** Consideramos

$$\psi(x_1, x_4) = x_4 - (x_1^3 - 9x_1^2 + 24x_1),$$

el equilibrio es  $x^* = (0, 0, 0, 0)$  y puesto que  $\frac{\partial \psi(0,0)}{\partial x_4} = 1$  y  $\frac{\partial \psi(0,0)}{\partial x_1} = -24$ ,  $x^*$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable para la EDA que modeliza el circuito RLC [8].

Para clasificar el equilibrio  $x^*$  mediante la técnica de desingularización consideramos:

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{24C(0)} \\ -\frac{24}{L(0)} & -\frac{1}{24C(0)} \end{pmatrix},$$

la ecuación característica es

$$\lambda^2 + \frac{1}{24C(0)}\lambda + \frac{1}{C(0)L(0)} = 0,$$

cuyas soluciones pueden ser reales negativas o complejas conjugadas con parte real negativa ya que  $L(0) > 0$ . En el caso que existan raíces complejas conjugadas, la parte imaginaria depende del valor de

$$\frac{1}{C(0)} \frac{(L(0) - 4 \cdot 24^2 C(0))}{24^2 C(0) L(0)}.$$

- Si  $L(0) - 4 \cdot 24^2 C(0) \geq 0$  las soluciones de la ecuación característica son reales negativas y el equilibrio es un nodo (estable).

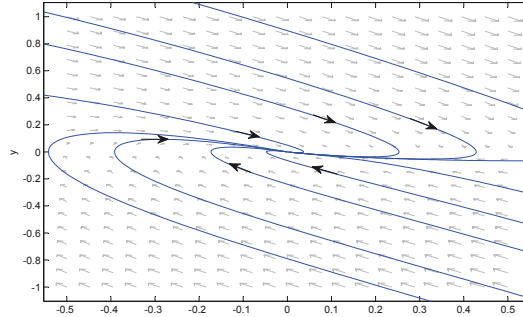


Figura 2.2: El equilibrio es un nodo estable

- Si  $L(0) - 4 \cdot 24^2 C(0) < 0$  las soluciones de la ecuación característica son complejas conjugadas con parte real negativa y el equilibrio es un foco (estable).

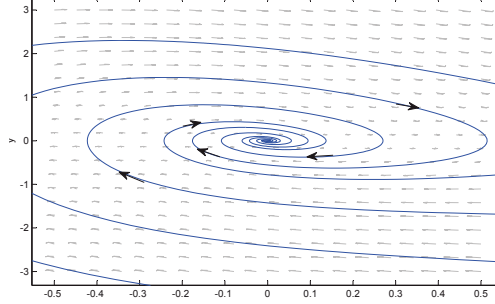


Figura 2.3: El equilibrio es un foco estable

### 2.4.3. Condiciones para la estabilidad del equilibrio en un circuito con diodo-túnel.

En este caso estudiamos la estabilidad de los equilibrios en un *circuito eléctrico no lineal*  $LC$  con diodo-túnel que se modeliza por medio de una ecuación diferencial algebraica, donde hay una fuente de corriente  $I_s$ , la capacidad  $C$  depende de uno de los voltajes, la inductancia  $L$  de la corriente y la relación entre el otro voltaje y la corriente en el modelo diodo-túnel está dada por una función no lineal  $\psi$ . Un diodo-túnel es un componente electrónico que, cuando se aplica una pequeña tensión, empieza a conducir (la corriente empieza a fluir). Si se sigue aumentando esta tensión la corriente aumentará hasta llegar un punto después del cual la corriente disminuye. La corriente continuará disminuyendo hasta llegar al punto mínimo (valle) y después volverá a incrementarse. En este modelo las funciones  $C : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  y  $L : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  son suaves.

La EDA cuasilineal que describe el circuito es del tipo  $A(x)\dot{x} = f(x)$ , con  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , donde  $x_1$  y  $x_3$  representan a los voltajes y  $x_2$  a la corriente, siendo:

$$A(x) = \begin{pmatrix} C(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & L(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_3 \\ x_2 + I_s - \psi(x_3) \end{pmatrix},$$

con  $\psi$  una función con derivadas de todos los órdenes.



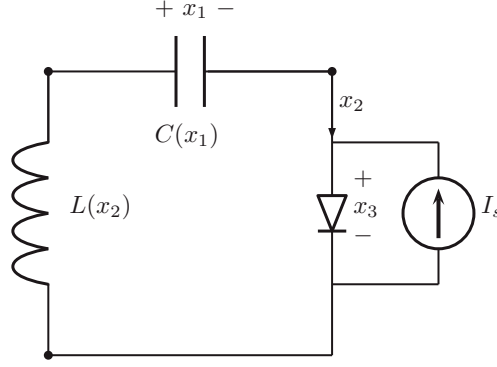


Figura 2.4: Circuito LC no lineal con diodo-túnel

El equilibrio es en este caso  $x^* = (-x_3^*, 0, x_3^*)$ , con  $\psi(x_3^*) = I_s$ , además resultan

$$A = A(x^*) = \begin{pmatrix} C(-x_3^*) & 0 & 0 \\ 0 & L(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = f'(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\psi'(x_3^*) \end{pmatrix}.$$

Es claro que  $\text{rg}A(x) = 2$ , para todo  $x$ , puesto que  $C(x_1)$  y  $L(x_2)$  son funciones estrictamente positivas.

Para analizar la estabilidad del equilibrio debemos encontrar las condiciones para que  $\{A, J\}$  sea una matriz pencil regular con índice de Kronecker 1. Para esto aplicamos la Proposición 2.3, con

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que es un proyector sobre  $\text{Ker}A(x^*)$  y consideramos  $A_1 = A - JQ$ , que resulta:

$$A_1 = \begin{pmatrix} C(-x_3^*) & 0 & 0 \\ 0 & L(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\psi'(x_3^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(-x_3^*) & 0 & 0 \\ 0 & L(0) & 1 \\ 0 & 0 & \psi'(x_3^*) \end{pmatrix}.$$

Observar que  $A_1$  es invertible si  $\psi'(x_3^*) \neq 0$ . Además, en este caso, la matriz pencil  $\{A, J\}$  tiene índice de Kronecker 1.

El espectro está formado por las soluciones de la ecuación:

$$|\lambda A - J| = \lambda^2 C(-x_3^*) L(0) \psi'(x_3^*) + \lambda C(-x_3^*) + \psi'(x_3^*) = 0,$$

que son:

$$\lambda_1 = \frac{-C(-x_3^*) + \sqrt{C(-x_3^*)^2 - 4C(-x_3^*)L(0)\psi'(x_3^*)}}{2C(-x_3^*)L(0)\psi'(x_3^*)}$$

$$\lambda_2 = \frac{-C(-x_3^*) - \sqrt{C(-x_3^*)^2 - 4C(-x_3^*)L(0)\psi'(x_3^*)}}{2C(-x_3^*)L(0)\psi'(x_3^*)}$$

Mediante cálculos sencillos se obtiene:

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{4L(0)\psi'(x_3^*)}{C(-x_3^*)}}}{2L(0)\psi'(x_3^*)}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \frac{4L(0)\psi'(x_3^*)}{C(-x_3^*)}}}{2L(0)\psi'(x_3^*)}$$

■ Si

$$1 - \frac{4L(0)\psi'(x_3^*)}{C(-x_3^*)} < 0 \text{ y } \psi'(x_3^*) > 0,$$

$\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son complejos conjugados con parte real negativa.

■ Si

$$0 < 1 - \frac{4L(0)\psi'(x_3^*)}{C(-x_3^*)} < 1 \text{ y } \psi'(x_3^*) > 0,$$

$\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales negativos.

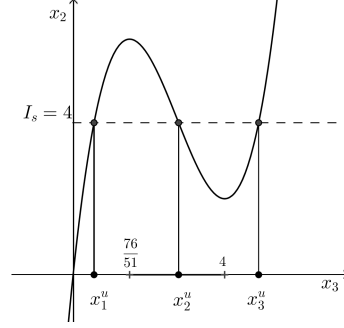
A partir del análisis anterior podemos enunciar el siguiente resultado:

**Proposición 2.6.** *Los puntos de equilibrio de la EDA cuasilineal correspondiente al circuito no lineal LC con diodo-túnel son de la forma  $x^* = (-x_3^*, 0, x_3^*)$ , donde  $x_3^*$  es tal que  $\psi(x_3^*) = I_s$ . Además si  $\psi'(x_3^*) > 0$ ,  $x^*$  es equilibrio asintóticamente estable.*

**Ejemplo 2.3.** Si  $\psi(x_3) = ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3$ ,  $\psi'(x_3) = 3ax_3^2 + 2bx_3 + c$ , con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $x_3^* > 0$ . En este caso los puntos de equilibrio dependen de los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y son  $x^* = (-x_3^*, 0, x_3^*)$  donde  $x_3^* > 0$  y raíz de la ecuación:  $ax_3^{*3} + bx_3^{*2} + cx_3^* = I_s$ . Si  $3ax_3^{*2} + 2bx_3^* + c > 0$  el equilibrio es asintóticamente estable.

Por ejemplo, si  $\psi(x_3) = \frac{17}{32}x_3^3 - \frac{35}{8}x_3^2 + \frac{19}{2}x_3$ , pueden existir uno, dos o tres puntos de equilibrio según el valor de  $I_s$ . En la figura están señalados tres valores de  $x_3^*$ , para  $I_s = 4$  que producen tres puntos de equilibrio  $(-x_1^u, 0, x_1^u)$ ,  $(-x_2^u, 0, x_2^u)$ ,  $(-x_3^u, 0, x_3^u)$ .

En este caso la derivada toma valores negativos si  $\frac{76}{51} < x_3 < 4$  por lo que  $x_1^u$  y  $x_3^u$  originan puntos de equilibrio asintóticamente estables:  $(-x_1^u, 0, x_1^u)$ ,  $(-x_3^u, 0, x_3^u)$ .



#### 2.4.4. Aplicación del algoritmo de desingularización.

Reducimos el sistema a otro de orden 2, luego aplicando el algoritmo de desingularización podremos determinar si el equilibrio  $x^*$  es nodo o foco.

El sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} C(x_1)\dot{x}_1 &= \psi(x_3) - I_s \\ L(\psi(x_3) - I_s)\psi'(x_3)\dot{x}_3 &= -x_1 - x_3 \end{aligned} \quad (2.20)$$

En este caso, el sistema reducido  $\tilde{A}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x)$  es de orden 2 y se tiene,

$$\tilde{A}(x_1, x_3) = \begin{pmatrix} C(x_1) & 0 \\ 0 & L(\psi(x_3) - I_s)\psi'(x_3) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{f}(x_1, x_3) = \begin{pmatrix} \psi(x_3) - I_s \\ -x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

El conjunto singular es:

$$M_s = \{x_3 : \psi'(x_3) = 0\}.$$

**Diodo1** Si  $\psi(x_3^*) = I_s$  y  $\psi'(x_3^*) \neq 0$ ,  $x^* = (-x_3^*, x_3^*)$  es un *equilibrio regular* del sistema reducido.

**Diodo2** Si  $\psi(x_3^*) = I_s$  y  $\psi'(x_3^*) = 0$ ,  $x^* = (-x_3^*, x_3^*)$  es un *equilibrio singular* del sistema reducido. El análisis de la estabilidad está desarrollado en el Capítulo 5, Sección 5.2.

Si  $x^*$  es equilibrio regular, condición **(Diodo1)**, la matriz  $\tilde{A}(x_1, x_3)$  admite inversa y el sistema se reduce a:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C(x_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L(\psi(x_3)-I_s)\psi'(x_3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(x_3) - I_s \\ -x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\psi(x_3)-I_s}{C(x_1)} \\ \frac{-x_1-x_3}{L(\psi(x_3)-I_s)\psi'(x_3)} \end{pmatrix}.$$

Aplicando el Teorema de Hartman-Grobman (2.1), resulta que en un entorno de  $x^*$  las trayectorias del sistema no lineal se corresponden con la del sistema lineal  $\dot{x} = J(x^*)x$ , con

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\psi'(x_3^*)}{C(-x_3^*)} \\ -\frac{1}{L(0)} & -\frac{1}{L(0)} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Se puede determinar si el equilibrio asintóticamente estable  $x^*$  es un nodo o un foco analizando si los autovalores de la matriz  $J(x^*)$  son reales o complejos. En este caso, los autovalores son:

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{4L(0)\psi'(x_3^*)}{C(-x_3^*)}}}{2L(0)\psi'(x_3^*)} \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \frac{4L(0)\psi'(x_3^*)}{C(-x_3^*)}}}{2L(0)\psi'(x_3^*)}$$

$\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales negativos cuando  $0 < 1 - \frac{4L(0)\psi'(x_3^*)}{C(-x_3^*)} < 1$  y  $\psi'(x_3^*) > 0$ , y son complejos con parte real negativa cuando  $1 - \frac{4L(0)\psi'(x_3^*)}{C(-x_3^*)} < 0$  y  $\psi'(x_3^*) > 0$ .

En el primer caso, el equilibrio es un nodo (estable) y en el segundo es un foco (estable).

**Ejemplo 2.4.** Si  $\psi(x_3) = x_3^3 - 9x_3^2 + 24x_3$  y  $I_s = 0$  el único punto de equilibrio es  $x^* = (0, 0, 0)$  y  $\psi'(0) = 24$ , y entonces  $x^*$  es equilibrio asintóticamente estable [7].

Si clasificamos el equilibrio  $x^*$  mediante la desingularización obtenemos:

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\psi'(0)}{C(0)} \\ -\frac{1}{L(\psi(0))} & -\frac{1}{L(\psi(0))} \end{pmatrix}$$

y la ecuación característica es

$$\lambda^2 + \frac{1}{L(\psi(0))}\lambda + \frac{\psi'(0)}{L(\psi(0))C(0)} = 0$$

cuyas soluciones pueden ser reales negativas o complejas conjugadas con parte real negativa ya que  $L(0) > 0$ . En el caso de tratarse de raíces complejas conjugadas, la parte imaginaria depende del valor de

$$\frac{C(0) - 4 L(\psi(0))\psi'(0)}{C(0)L^2(\psi(0))} = \frac{C(0) - 4 \cdot 24L(0)}{C(0)L^2(0)}.$$

- Si  $0 \leq 96 L(0) \leq C(0)$ ,  $x^*$  es nodo estable.

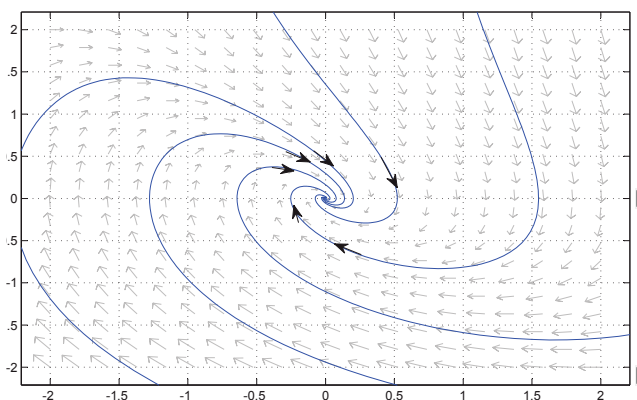


Figura 2.5: El equilibrio es un nodo estable

- Si  $96 L(0) \geq C(0)$ ,  $x^*$  es foco estable.

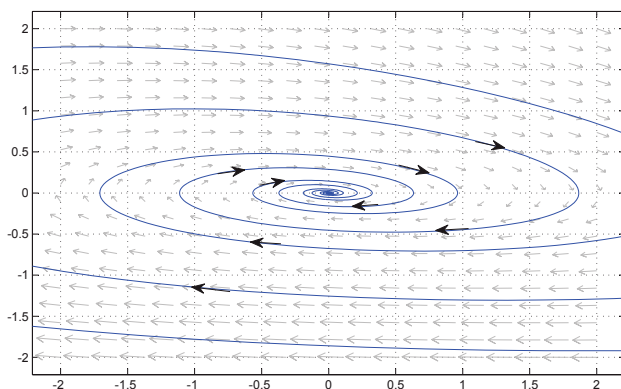


Figura 2.6: El equilibrio es un foco estable

40

34

## Capítulo 3

# Ecuaciones Diferenciales Algebraicas Singulares

Consideramos una EDA cuasilineal

$$A(x)\dot{x} = f(x) \tag{3.1}$$

y un punto  $x_0$  tal que  $\text{rg}A(x_0) < n$ , entonces la EDA se dice *singular en  $x_0$*  si el índice diferencial está definido y es constante en un subconjunto abierto y denso de un entorno de  $x_0$  pero no en el punto mismo.

En este capítulo trabajaremos con EDAs cuasilineales singulares de índice 0 y enunciaremos resultados conocidos para problemas estacionarios y no estacionarios. Ilustraremos el problema estacionario con un ejemplo sobre el método continuo de Newton [17], [18], [19].

En lo que sigue consideraremos  $A \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , el conjunto singular  $M_s = \{x \in \mathbb{R}^n : \det A(x) = 0\}$  y  $x^*$  un punto de equilibrio singular, es decir  $x^* \in M_s$  con  $f(x^*) = 0$ .

**Problemas singulares de índice 0:** La dinámica del sistema (3.1) cerca de un punto de equilibrio singular  $x^*$  queda determinada por las propiedades locales de la matriz  $A(x)$ . En particular, cuando  $A(x)$  es invertible, el problema queda reducido a una EDOE de índice 0.

$$\dot{x} = A^{-1}(x)f(x) \equiv h(x) \tag{3.2}$$

Puesto que la reducción no puede hacerse en  $M_s$ , se dice que la EDA define un *problema singular de índice 0* en un entorno reducido de  $x^*$ .

Un punto singular de una EDA (3.1) se dice *no crítico*, cuando se cumple la condición

$$\nabla \det A(x^*) = (\det A(x^*))' \neq 0, \quad (3.3)$$

que implica que  $M_s$  es una variedad suave cerca de  $x^*$ .

**Clasificación de singularidades:** Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ , si  $\text{Adj}A$  es la matriz adjunta de  $A$ , es decir la matriz de los cofactores traspuesta asociada a  $A$ , se tiene que:

$$\det A \cdot I_n = \text{Adj}A \cdot A = A \cdot \text{Adj}A,$$

Luego el sistema (3.1) puede reescribirse así:

$$\det A(x) \dot{x} = \text{Adj}A(x) f(x). \quad (3.4)$$

Llamando  $\omega(x) = \det A(x)$  y  $g(x) = \text{Adj}A(x)f(x)$ , obtenemos el siguiente sistema que llamaremos *sistema canónico* asociado a (3.1):

$$\omega(x) \dot{x} = g(x). \quad (3.5)$$

Es fácil mostrar que las soluciones de (3.1) son soluciones de (3.5) y recíprocamente.

La clasificación de los puntos singulares puede hacerse por medio del sistema canónico asociado.

**Singularidades algebraicas:** Son los puntos  $x^* \in \mathbb{R}^n$  donde  $f(x^*) \notin \text{Im}A(x^*)$ .

En el caso no crítico, dicha condición es equivalente a que  $g(x^*) \neq 0$ . Estos puntos singulares se comportan generalmente como *puntos de impasse* donde las trayectorias colapsan en tiempo finito con velocidad infinita.

**Singularidades geométricas:** Son los puntos  $x^* \in \mathbb{R}^n$  donde  $f(x^*) \in \text{Im}A(x^*)$ .

En el caso no crítico, es equivalente a que  $g(x^*) = 0$ . Incluyen el caso importante del equilibrio singular, es decir cuando  $f(x^*) = 0$ , con  $x^* \in M_s$ .

**Singularidades geométricas débiles:** Un punto singular geométrico  $x^*$  se llama singularidad débil si existe un entorno  $U_{x^*}$  donde  $\omega(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$ , es decir, si existe un entorno singular  $U_{x^*} \cap M_s$  formado totalmente por singularidades débiles.

**Singularidades geométricas fuertes:** Los puntos singulares geométricos en los que falla la condición anterior se llaman singularidades fuertes, son puntos de acumulación del conjunto de singularidades algebraicas.



**Problemas estacionarios y no estacionarios.** Sea  $x^*$  un punto de equilibrio singular, se dice que es *estacionario* (respectivamente *no estacionario*) si la matriz Jacobiana de  $f$  en  $x^*$ ,  $J(x^*) = f'(x^*)$ , cumple con la condición:  $\text{Im}J(x^*) \subseteq \text{Im}A(x^*)$  (respectivamente  $\text{Im}J(x^*) \not\subseteq \text{Im}A(x^*)$ ).

El estudio de los equilibrios singulares estacionarios tiene una aplicación importante y muy estudiada en el método continuo de Newton para la búsqueda de raíces de ecuaciones del tipo:

$$-J(x)\dot{x} = f(x) \quad (3.6)$$

Para equilibrios no estacionarios con índices diferenciales 0 y 1, está demostrado que existe una subvariedad  $\mathcal{C}$  que intersecta transversalmente el conjunto singular donde la dinámica está bien definida, [17].

### 3.1. Problemas estacionarios

Son los problemas del tipo (3.1) donde el equilibrio singular  $x^*$  satisface la condición:

$$\text{Im}J(x^*) \subseteq \text{Im}A(x^*).$$

Un ejemplo de esta situación aparece en el método continuo de Newton donde  $A(x) = -J(x)$ , que analizaremos a continuación.

#### Método continuo de Newton:

El caso de los equilibrios estacionarios ha sido muy estudiado ya que incluye el problema del método continuo de Newton para la búsqueda de raíces de ecuaciones.

La determinación de los ceros de una función vectorial no lineal  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un problema clásico y surge naturalmente en campos tales como dinámica, control, economía, etc. y existen muchas técnicas de aproximación.

El método clásico de Newton se define, para funciones  $f \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ , por la iteración

$$x_{k+1} = x_k - J^{-1}(x_k)f(x_k),$$

en el conjunto  $\Omega$  de puntos regulares de  $f$ , es decir, donde la matriz Jacobiana es invertible. Esta iteración se puede considerar como un sistema dinámico discreto y su característica principal es que los ceros regulares de  $f$  corresponden a los puntos de equilibrio asintóticamente estables del sistema.

El método continuo de Newton está definido en el conjunto  $\Omega$  por el sistema dinámico

$$\dot{x} = -J^{-1}(x)f(x).$$

Hay una cercana relación entre las dos ecuaciones discreta y continua. En el caso continuo se puede mostrar que las raíces de  $f$  conducen a puntos de equilibrio asintóticamente estables del sistema. En el conjunto  $M_s = \mathbb{R}^n - \Omega$ , definido por la condición  $\det J(x) = 0$ , los equilibrios singulares se deben tratar de una manera especial.

### 3.1.1. Problemas estacionarios débiles

En esta sección enunciamos algunos resultados sobre estabilidad de equilibrios singulares en problemas estacionarios débiles que se ilustran con un ejemplo sobre el método continuo de Newton. [20], [18], [17].

**Proposición 3.1.** *Si  $x^*$  es una singularidad débil no crítica de (3.1), entonces existe una extensión  $C^1$  de  $h(x) = A^{-1}(x)f(x)$  cerca de  $x^*$  con  $A, f \in C^2$ .*

#### Estabilidad de equilibrios débiles

Si  $x^*$  es un equilibrio singular débil, puesto que  $A(x)h(x) = f(x)$  y  $h(x^*) = 0$ , tenemos que  $AH = J$ , con  $A = A(x^*)$  y  $J = f'(x^*)$  singulares y  $H = h'(x^*)$ .

Se introduce el parámetro  $\Lambda$  definido por la relación

$$\frac{\text{Adj} A(x^*) f''(x^*) vv}{2 \nabla \det A(x^*) v} = \Lambda v, \quad (3.7)$$

para  $v \in \text{Ker} A - \{0\}$ .

El equilibrio  $x^*$  es *estándar* si

$$\nabla \det A(x^*) v \neq 0,$$

para cualquier  $v \in \text{Ker} A(x^*) - \{0\}$ .

Además supondremos que  $x^*$  es *transversal* en el sentido que

$$\nabla \det J(x^*) v \neq 0$$

para cualquier  $v \in \text{Ker} J(x^*) - \{0\}$ .

En problemas estacionarios estas condiciones determinan que  $\text{Im} A = \text{Im} J$ .

**Teorema 3.1.** *Sea  $x^*$  un equilibrio estacionario débil (estándar y transversal) con  $\text{Ker} A = \text{Ker} J$ . Se considera cualquier proyector  $P$  a lo largo del  $\text{Ker} A$  y se definen  $\tilde{A} = A|_{\text{Im} P}$  y  $\tilde{J} = J|_{\text{Im} P}$ . Sea  $\Lambda$  dado por la relación (3.7). Si  $\sigma(\tilde{A}, -\tilde{J}) \cup \{\Lambda\} \subset \mathbb{C}^-$  entonces  $x^*$  es equilibrio asintóticamente estable de  $A(x)\dot{x} = f(x)$ .*

**Proposición 3.2.** *Sean  $P_1, P_2$  dos proyectores a lo largo de  $\text{Ker} A$ . Se definen  $\tilde{A}_i = A|_{\text{Im} P_i}$  y  $\tilde{J}_i = J|_{\text{Im} P_i}$  para  $i = 1, 2$ . Entonces  $\sigma(\tilde{A}_1, -\tilde{J}_1) = \sigma(\tilde{A}_2, -\tilde{J}_2)$ .*

**Ejemplo 3.1.** Método de Newton  
Consideramos la EDA cuasilineal

$$-J(x)\dot{x} = f(x),$$

donde

$$f(x) = (x_1^2 \ x_2)^T, \quad -J(x) = -f'(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El único punto de equilibrio es  $x^* = (0 \ 0)^T$ . El conjunto singular es

$$M_s = \{(x_1, x_2) : \det A(x) = 0\} = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0\},$$

se tiene que  $x^* \in M_s$ .

Todos los puntos de  $M_s$  son singularidades no críticas ya que, para todo  $x$ ,  $\nabla \det A(x) = (2, 0)$  es no nulo.

Se trata de un problema singular de índice 0 ya que en cada entorno  $U$  de un punto de  $M_s$  existe un subconjunto  $S \subset U$  abierto y denso en  $U$  tal que en  $S$  el sistema es explícito, es decir, de la forma  $\dot{x} = A^{-1}(x)f(x)$ .

Llamamos  $\omega(x) = \det A(x)$  y  $g(x) = \text{Adj}A(x)f(x)$ . En este caso se observa que las singularidades son geométricas puesto que si  $x \in M_s$  entonces  $g(x) = 0$ , siendo

$$g(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^2 \\ -2x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

El punto  $x^* = (0, 0)^T$  es un equilibrio singular débil.

Como

$$J(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}J(x^*) = \{(v_1, v_2) : v_2 = 0\}, \quad \nabla \det J(x) = (2, 0)$$

se cumple que  $\nabla \det J(x^*)v \neq 0$ , para  $v \in \text{Ker}J(x^*)$ , se trata de un *equilibrio transversal* y además, como  $A(x^*) = -J(x^*)$ , el equilibrio es también *estándar*.

*Cálculo del espectro y del parámetro  $\Lambda$ :* Sea

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

un proyector a lo largo de  $\text{Ker}A$ , luego

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\lambda \tilde{A} - \tilde{J}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que el espectro resulta:  $\sigma(\tilde{A}, -\tilde{J}) = \{-1\}$ . A partir de la definición (3.7) del parámetro  $\Lambda$  obtenemos en nuestro ejemplo:

$$\text{Adj}A(x^*)f''(x^*)vv = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2v_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_1^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

además  $2\nabla \det A(x^*)v = 2(2, 0)(v_1, v_2) = 4v_1$ , entonces se tiene:

$$\begin{pmatrix} -\frac{v_1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

luego  $\Lambda = -\frac{1}{2}$ .

Por lo tanto  $\sigma(\tilde{A}, -\tilde{J}) \cup \{\Lambda\} = \{-1, -\frac{1}{2}\} \subset \mathbb{C}^-$  y el equilibrio singular débil  $x^*$  es asintóticamente estable para el sistema  $-J(x)\dot{x} = f(x)$ .

### 3.1.2. Problemas estacionarios fuertes

El siguiente teorema determina condiciones suficientes para la estabilidad asintótica de equilibrios estacionarios fuertes. En este caso el campo  $h(x) = \frac{g(x)}{\omega(x)}$  está definido sólo direccionalmente y el Jacobiano  $H = h'(x^*)$  no está definido. Se puede probar la estabilidad direccional del equilibrio si la abscisa espectral  $\alpha = \max_{\lambda_i \in \sigma(\tilde{A}, -\tilde{J})} \text{Re}(\lambda_i)$  está dominada por  $\Lambda$ , cuando  $f$  y  $A$  son  $C^3$ .

**Teorema 3.2.** *Sea  $x^*$  un equilibrio estacionario fuerte (estándar y transversal) con  $\text{Ker}A = \text{Ker}J$  y  $A = A(x^*)$  y  $J = f'(x^*)$ . Consideramos  $P$ ,  $\tilde{A}$  y  $\tilde{J}$  como en el Teorema 3.1 y sean  $Q = I - P$  y  $\alpha = \max_{\lambda_i \in \sigma(\tilde{A}, -\tilde{J})} \text{Re}(\lambda_i)$ . Si  $\alpha < \Lambda < 0$  (que implica que  $\sigma(\tilde{A}, -\tilde{J}) \cup \{\Lambda\} \subset \mathbb{C}^-$ ) entonces  $x^*$  es equilibrio asintóticamente estable de  $A(x)\dot{x} = f(x)$ . Esto es, existe una región con forma cónica  $\mathcal{K}_\theta = \{x \in \mathbb{R}^n : \|P(x - x^*)\| \leq \theta \|Q(x - x^*)\|\}$  con eje en la dirección de  $\text{Ker}A$ , positivamente invariante y convergente a  $x^*$  para  $\theta, \rho > 0$  suficientemente pequeños, [17].*

## 3.2. Problemas no estacionarios

Son los problemas del tipo (3.1) donde el equilibrio singular  $x^*$  satisface la condición:

$$\text{Im}J(x^*) \not\subset \text{Im}A(x^*).$$

En estos casos, el análisis del problema desingularizado  $\dot{x} = g(x)$ , sirve para caracterizar la estabilidad del equilibrio singular ya que está demostrado que bajo ciertas suposiciones, existe una subvariedad  $\mathcal{C}$ , de dimensión  $n - 1$ , donde la dinámica está bien definida y que intersecta transversalmente al conjunto singular [17].

En el capítulo siguiente demostraremos que, en problemas singulares no estacionarios de índice cero, y bajo ciertas condiciones, existe además una variedad de dimensión 1, que produce una solución de cruce por el punto de equilibrio singular.



## Capítulo 4

# Análisis del equilibrio singular en problemas no estacionarios

En este capítulo daremos, en primer lugar, algunas definiciones preliminares y luego teoremas y resultados conocidos sobre la estabilidad del equilibrio singular en problemas cuasilineales no estacionarios de índice 0 [10], [22], [1], [17]. Usando estos resultados analizaremos las dos variedades que aparecen en este tipo de problemas: una *variedad central* de dimensión  $n - 1$  y una *variedad unidimensional*, que llamaremos *variedad de cruce*. Esta última variedad puede ser estable o inestable en el problema desingularizado; hallaremos la ecuación que la define y las condiciones que debe cumplir para producir una solución de cruce en el problema original  $A(x)\dot{x} = f(x)$ .

Dada la EDA cuasilineal  $A(x)\dot{x} = f(x)$  con  $A \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$  y  $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , si  $x^*$  es un *punto de equilibrio singular no crítico*, es decir

$$f(x^*) = 0, \quad \det A(x^*) = 0, \quad \nabla \det A(x^*) \neq 0, \quad (4.1)$$

la dinámica del sistema cerca de  $x^*$  queda determinada por las propiedades locales de la matriz  $A(x)$ . En particular, cuando  $A(x)$  es invertible, el problema se reduce a una EDOE de índice 0.

$$\dot{x} = A^{-1}(x)f(x) \equiv h(x) \quad (4.2)$$

y como la reducción no se puede hacer en  $M_s$ , la EDA cuasilineal define un *problema singular de índice 0* en un entorno reducido de  $x^*$ , es decir, un entorno  $U$  de  $x^*$ , tal que  $A(x)$  es no singular para cada  $x \in U - M_s$ .

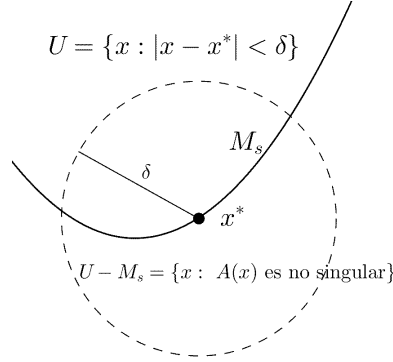


Figura 4.1: Equilibrio singular de índice 0

## 4.1. Algunos preliminares

En lo que sigue se enunciarán las definiciones y resultados conocidos, que nos permitirán probar los resultados originales de esta sección.

**Transversalidad entre dos variedades.** Consideraremos una variedad de dimensión  $k$ , como el conjunto solución de la ecuación  $\eta(x) = 0$ , donde  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  es suficientemente diferenciable. Sean  $P$  y  $Q$  variedades en  $\mathbb{R}^n$  con dimensiones  $p$  y  $q$  respectivamente que suponemos que se intersectan en un punto  $z \in \mathbb{R}^n$ . Se dice que  $P$  y  $Q$  se *intersectan transversalmente* en  $z$  o que son *transversales* en  $z$ , si los espacios tangentes a las dos variedades en  $z$  generan  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 4.1.** Dos variedades  $P$  y  $Q$  en  $\mathbb{R}^n$  se *intersectan transversalmente* o son *transversales* si y sólo si se intersectan transversalmente en todos sus puntos de intersección o no tienen intersección.

**Ejemplo 4.1.** En  $\mathbb{R}^2$  las dos variedades  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  de la Figura 4.2, tienen rectas tangentes  $T_1$  y  $T_2$  en el punto  $z$ , respectivamente. Cualquier vector de  $\mathbb{R}^2$  se puede descomponer en la suma de dos vectores en las direcciones de  $T_1$  y  $T_2$ , entonces  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son transversales en  $z$ . Una pequeña perturbación en cada curva no elimina la intersección entre ellas. Salvo en el caso en que las curvas fueran tangentes, en cuyo caso  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  no serían transversales en  $z$ .

Si  $n > 2$ , en  $\mathbb{R}^n$  las variedades no son transversales en  $z$  puesto que las direcciones tangentes en el punto no generan todo el espacio. Una pequeña perturbación de cada curva eliminará la intersección.



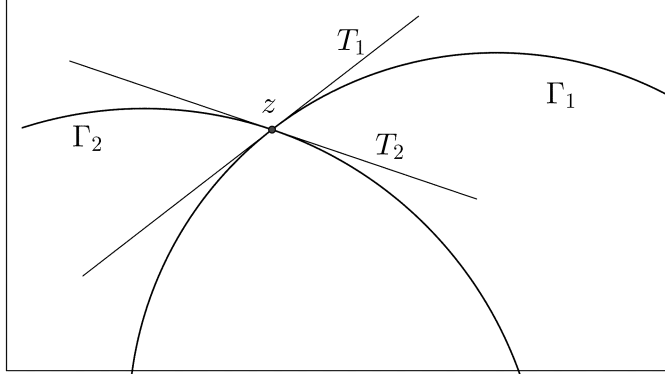


Figura 4.2: Variedades transversales

**Variedad invariante.** Sea

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.3)$$

con  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D$  un entorno del origen y  $f(0) = 0$ .

Una variedad  $\eta(x) = 0$  se dice invariante para (4.3) si se cumple:

$$\eta(x(0)) = 0 \Rightarrow \eta(x(t)) \equiv 0, \quad \forall t \in [0, t_1) \subset \mathbb{R} \quad (4.4)$$

donde  $[0, t_1)$  es un intervalo para el cual la solución  $x(t)$  está definida.

**Subespacios estable, inestable y central.** Si consideramos el sistema

$$\dot{x} = f(x),$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $x^*$  un punto de equilibrio, es natural considerar el sistema linealizado (Teorema 2.1)

$$\dot{y} = A_0 y, \quad (4.5)$$

con  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_0 = J(x^*)$ , siendo  $J$  la matriz Jacobiana asociada al campo  $f$ .

La solución de (4.5) que pasa por el punto  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  tiene la forma:

$$y(t) = e^{A_0 t} y_0,$$

donde

$$e^{A_0 t} = I + A_0 t + \frac{1}{2!} A_0^2 t^2 + \frac{1}{3!} A_0^3 t^3 + \cdots + \frac{1}{n!} A_0^n t^n + \cdots$$

Por otra parte,

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

siendo:

$$\begin{aligned} E^s &= \overline{\{e_1, \dots, e_s\}} \\ E^u &= \overline{\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}} \\ E^c &= \overline{\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}\}} \end{aligned}$$

con  $s+u+c=n$ . Se tiene que:  $\{e_1, \dots, e_s\}$  son los autovectores de  $A_0$  que corresponden a autovalores con parte real negativa,  $\{e_{s+1}, \dots, e_{s+u}\}$  son los autovectores de  $A_0$  que corresponden a autovalores con parte real positiva y  $\{e_{s+u+1}, \dots, e_{s+u+c}\}$  son los autovectores de  $A_0$  que corresponden a autovalores con parte real nula.

$E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$  son los subespacios *estable*, *inestable* y *centro*, respectivamente.

Si consideramos a  $A_0$  como la matriz una transformación lineal de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , se tiene que los subespacios  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$ , son invariantes por dicha transformación lineal, puesto que, cada subespacio está generado por un conjunto de autovectores de  $A_0$ .

Por otra parte, se demuestra que si un subespacio  $V$  es invariante por una transformación lineal  $T$ , también es invariante con respecto a

- $cT$ ,  $c \in \mathbb{R}$
- $T^n$ ,  $n > 1, n \in \mathbb{N}$

y entonces podemos concluir que  $V$  es invariante bajo la transformación

$$I + A_0 t + \frac{1}{2!} A_0^2 t^2 + \frac{1}{3!} A_0^3 t^3 + \dots + \frac{1}{n!} A_0^n t^n \quad \text{para cualquier } n$$

Puesto que la suma converge uniformemente a  $e^{A_0 t}$  y que  $V$  es cerrado se concluye que  $V$  es invariante para  $e^{A_0 t}$  [22].

**Variedad central.** Consideremos el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.6}$$

con  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D$  un entorno del origen y  $f(0) = 0$ . Si  $f(x)$  es dos veces diferenciable, esta ecuación se puede reescribir como:

$$\dot{x} = A_0 x + [f(x) - f'(0)x] = A_0 x + \tilde{f}(x)$$

donde  $A_0 = f'(0)$  es la matriz Jacobiana de  $f$  en 0 y

$$\tilde{f}(x) = f(x) - f'(0)x$$

es una función con derivadas parciales segundas continuas que verifica:

$$\tilde{f}(0) = 0, \quad \tilde{f}'(0) = 0.$$

En este caso la linealización en el origen del sistema (Teorema 2.1) es:

$$\dot{x} = A_0 x,$$

con  $A_0 = f'(0)$ .

Si la matriz  $A_0$  tiene todos sus autovalores con parte real negativa, el origen es un equilibrio asintóticamente estable. Si existe al menos un autovalor con parte real positiva, el equilibrio es inestable. En cambio, si  $A_0$  tiene algunos autovalores con parte real nula y los demás con parte real negativa, la linealización no permite determinar la estabilidad del origen como equilibrio del sistema. La estabilidad del origen en estos casos puede establecerse analizando un sistema no lineal cuyo orden es el número de autovalores de  $A_0$  con parte real cero. A continuación describiremos de modo sintético este procedimiento [10].

Supongamos que la matriz  $A_0$  tiene  $k$  autovalores con parte real 0 y  $n - k$  autovalores con parte real negativa.

Sea  $M$  la matriz cuyas columnas son los autovectores de  $A_0$  y  $T = M^{-1}$ , entonces

$$TA_0T^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

donde  $A_1$  es una matriz de orden  $k$  cuyos autovalores tienen parte real cero y  $A_2$  es una matriz de orden  $n - k$  con todos sus autovalores con parte real negativa.

El cambio de variables

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = Tx,$$

con  $y \in \mathbb{R}^k$  y  $z \in \mathbb{R}^{n-k}$ , transforma (4.6) en

$$\dot{y} = A_1 y + g_1(y, z) \tag{4.7}$$

$$\dot{z} = A_2 z + g_2(y, z) \tag{4.8}$$

donde  $g_1$  y  $g_2$  heredan las propiedades de  $\tilde{f}$ , son continuamente diferenciables y

$$g_i(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial g_i(0, 0)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g_i(0, 0)}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2 \tag{4.9}$$

**Definición 4.2.** (Variedad Central) Si  $z = h(y)$  es una variedad invariante para (4.7)-(4.8) y  $h$  es suave, entonces  $h$  es una *variedad central* si:

$$h(0) = 0, \quad \frac{\partial h(0)}{\partial y} = 0.$$

El siguiente resultado describe el movimiento del sistema sobre la variedad central [10].

**Teorema 4.1** (Teorema de la variedad central). *Si  $g_1$  y  $g_2$  son funciones  $C^2$  que satisfacen (4.9), todos los autovalores de  $A_1$  en (4.7) tienen parte real cero y todos los autovalores de  $A_2$  en (4.8) tienen parte real negativa, entonces existe  $\delta > 0$  y una función continuamente derivable  $h(y)$  definida para  $\|y\| < \delta$ , tal que  $z = h(y)$  es una variedad central para (4.7)-(4.8).*

La variedad central es  $z = h(y)$ , siendo la función  $h$  la solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial h}{\partial y} [A_1 y + g_1(y, h(y))] - A_2 h(y) - g_2(y, h(y)) = 0, \quad (4.10)$$

con condiciones iniciales

$$h(0) = 0, \quad \frac{\partial h(0)}{\partial y} = 0. \quad (4.11)$$

**Teorema 4.2.** *Bajo las hipótesis del Teorema 4.1, si el origen  $y = 0$  del sistema reducido  $\dot{y} = A_1 y + g_1(y, h(y))$  es asintóticamente estable (respectivamente, inestable) entonces el origen del sistema completo (4.7)-(4.8) es también asintóticamente estable (respectivamente, inestable) [1], [10].*

**Variedades estable, inestable y central.** Nuevamente consideremos la ecuación

$$\dot{x} = f(x),$$

sabemos que si  $x^*$  es un punto de equilibrio, a partir del sistema lineal

$$\dot{y} = A_0 y \quad (4.12)$$

con  $A_0 = J(x^*)$ , podemos obtener información sobre la naturaleza de las soluciones del sistema original cerca de  $x^*$  [13], [22].

En primer lugar trasladamos el equilibrio  $x^*$  al origen mediante la transformación  $y = x - x^*$ ,

$$\dot{y} = f(x^* + y) \quad (4.13)$$

y a partir de la expansión por serie de Taylor se obtiene

$$\dot{y} = A_0 y + R(y) \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (4.14)$$

donde  $R(y) = O(|y|^2)$ .

Luego, existe una transformación lineal  $T$  que transforma (4.12) en un sistema lineal cuya matriz es diagonal en bloques:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_s & O & O \\ O & A_u & O \\ O & O & A_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

donde

$$T^{-1}y = (u, v, w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c, \quad s + u + c = n,$$

$A_s$  es una matriz de orden  $s$  cuyos autovalores tienen parte real negativa,  $A_u$  es una matriz de orden  $u$  cuyos autovalores tienen parte real positiva y  $A_c$  es una matriz de  $c$  cuyos autovalores tienen parte real cero. Aplicando la misma transformación  $T$  a (4.14) se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A_s u + R_s(u, v, w) \\ \dot{v} &= A_u v + R_u(u, v, w) \\ \dot{w} &= A_c w + R_c(u, v, w) \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde  $R_s(u, v, w)$ ,  $R_u(u, v, w)$  y  $R_c(u, v, w)$  son las primeras  $s$ ,  $u$ ,  $c$  componentes, respectivamente, de  $T^{-1}RTy$ .

**Definición 4.3** (Variedad estable e inestable). [13] Sea  $x_0$  un punto de equilibrio del sistema  $\dot{x} = f(x)$ , existen variedades  $S$  y  $U$  que son tangentes a los subespacios estable e inestable ( $E^s$  y  $E^u$  respectivamente) del sistema linealizado  $\dot{x} = Ax$ , con  $A = J(x_0)$ .  $S$  se llama *variedad estable* y  $U$  *variedad inestable*. Además  $S$  y  $U$  tienen la misma dimensión que  $E^s$  y  $E^u$  y si  $\Phi_t$  es el flujo del campo vectorial  $f(x)$ , entonces  $S$  y  $U$  son positiva y negativamente invariantes bajo  $\Phi_t$  y satisfacen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(c) = x_0 \quad \text{para todo } c \in S$$

y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(c) = x_0 \quad \text{para todo } c \in U$$

Si consideramos el sistema (4.16), existen una variedad estable e invariante de dimensión  $s$ , una variedad inestable e invariante de dimensión  $u$  y una variedad central e invariante de dimensión  $c$ . Las tres variedades se intersectan en el origen y se demuestra:

**Teorema 4.3** (Variedad estable, inestable y central de puntos de equilibrio).

Supongamos que el campo vectorial

$$\dot{u} = A_s u + R_s(u, v, w) \quad (4.17)$$

$$\dot{v} = A_u v + R_u(u, v, w) \quad (4.18)$$

$$\dot{w} = A_c w + R_c(u, v, w) \quad (4.19)$$

es  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , entonces, por el punto de equilibrio 0 existen: una variedad  $W_{loc}^s(0)$  que es  $C^r$ , invariante, estable y localmente de dimensión  $s$ ; una variedad  $W_{loc}^u(0)$  que es  $C^r$ , invariante, inestable y localmente de dimensión  $u$ ; y una variedad  $W_{loc}^c(0)$  que es  $C^r$ , invariante, central y localmente de dimensión  $c$ . Las tres variedades se intersectan en el origen, son tangentes a los respectivos subespacios del campo vectorial lineal y pueden representarse localmente como curvas.

$$W_{loc}^s(0) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c \mid v = h_v^s(u), w = h_w^s(u)\}$$

$Dh_v^s(0) = 0$  y  $Dh_w^s(0) = 0$ ,  $|u|$  es suficientemente pequeño.

$$W_{loc}^u(0) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c \mid u = h_u^u(v), w = h_w^u(v)\}$$

$Dh_u^u(0) = 0$  y  $Dh_w^u(0) = 0$ ,  $|v|$  es suficientemente pequeño.

$$W_{loc}^c(0) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c \mid u = h_u^c(w), v = h_v^c(w)\}$$

$Dh_u^c(0) = 0$  y  $Dh_v^c(0) = 0$ ,  $|w|$  es suficientemente pequeño.

Las funciones  $h_v^s(u)$ ,  $h_w^s(u)$ ,  $h_u^u(v)$ ,  $h_w^u(v)$ ,  $h_u^c(w)$  y  $h_v^c(w)$  son  $C^r$ . Además, las trayectorias en  $W_{loc}^s(0)$  y  $W_{loc}^u(0)$  tienen las mismas propiedades asintóticas que las trayectorias en  $E^s$  y  $E^u$ , respectivamente. Es decir, las trayectorias de (4.17), (4.18) y (4.19) con condiciones iniciales en  $W_{loc}^s(0)$  (respectivamente,  $W_{loc}^u(0)$ ) se acercan al origen exponencialmente cuando  $t \rightarrow +\infty$  (respectivamente,  $t \rightarrow -\infty$ ). [22]

**Observación 4.1.** Las condiciones  $Dh_v^s(0) = 0$ ,  $Dh_w^s(0) = 0$ , etc., se refieren a que las variedades no lineales son tangentes en 0 a sus variedades lineales asociadas. La expresión *local* significa que la variedad está definida como una superficie y es invariante solamente en un entorno del punto de equilibrio.

Si el punto de equilibrio es *hiperbólico*, es decir que  $E^c = \emptyset$ , entonces las trayectorias del campo vectorial no lineal en un entorno suficientemente pequeño del origen se comportan como las trayectorias del campo vectorial lineal asociado.

En general, las trayectorias en  $W_{loc}^c(0)$  no se infieren de las trayectorias en  $E^c$ .

## 4.2. Algunos resultados conocidos sobre estabilidad en problemas no estacionarios

Para el caso de EDAs cuasilineales de índice singular 0, con equilibrio en  $x^*$ , está demostrado en [17] que si  $\{A(x^*), -J(x^*)\}$  tiene índice de Kronecker 1, entonces existe una variedad invariante de dimensión  $n-1$  cuyas propiedades cualitativas dependen de la matriz pencil. En esta variedad se puede determinar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio. El Lema 4.1 y el Teorema 4.4 [17] dan condiciones para determinar la estabilidad del equilibrio singular en problemas no estacionarios.

**Lema 4.1.** *Sea  $x^*$  un equilibrio singular de la EDA cuasilineal  $A(x)\dot{x} = f(x)$ , que satisfice*

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \text{Adj}A(x^*)J(x^*) \\ \nabla \det A(x^*) \end{pmatrix} = 2 \quad (4.20)$$

*Entonces existe una variedad  $(n-1)$ -dimensional  $\mathcal{C}$  que es invariante para el flujo del campo desingularizado  $g(x) = \text{Adj}A(x)f(x)$ . Además, localmente,  $\mathcal{C}$  y el conjunto singular  $M_s$  se intersecan transversalmente en  $\{x \in M_s : g(x) = 0\}$ , y la restricción del campo  $h(x) = A^{-1}(x)f(x)$  a  $\mathcal{C}$  puede extenderse cerca de  $x^*$  para definir un campo vectorial  $\tilde{h}$  tangente a  $\mathcal{C}$ , que resulta  $C^1$ .*

### Comentarios sobre el Lema 4.1

1. La condición (4.20) implica:

- $x^*$  es equilibrio no crítico:

Puesto que  $\text{rg}A(x^*) = n-1$ , se cumple que  $\text{rg}\text{Adj}A(x^*) = 1$  y luego  $\text{rg}\text{Adj}A(x^*)J(x^*) = 1$ , por lo tanto  $\text{rg}\nabla \det A(x^*) = 1$  y entonces  $\nabla \det A(x^*) \neq 0$ .

- Las variedades  $h = g(x)$  y  $M_s$  son transversales:

En  $x^*$ , el espacio tangente a  $M_s$  es  $\{v \in \mathbb{R}^n : \nabla \det A(x^*)v = 0\}$ .

El espacio tangente a  $h = g(x)$  está dado por

$$\{v \in \mathbb{R}^n : g'(x^*)v = \text{Adj}A(x^*)J(x^*)v = 0\} = \text{Ker}g'(x^*).$$

Si se cumple la condición (4.20) ambos espacios tangentes tienen rango  $n-1$  y generan  $\mathbb{R}^n$ .

- $x^*$  es equilibrio singular no estacionario:

Como  $\text{rg}\text{Adj}A(x^*) = 1$ , se tiene que  $\text{rg}\text{Adj}A(x^*)J(x^*) = 1$ .

Si  $v \in \text{Im}J(x^*)$ , existe  $u \in \mathbb{R}^n$  tal que  $J(x^*)u = v$ , entonces

$$\text{Adj}A(x^*)J(x^*)u = \text{Adj}A(x^*)v.$$

Si  $v \in \text{Im}A(x^*)$ , entonces debe existir  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $A(x^*)\tilde{u} = v$ , en este caso,  $\text{Adj}A(x^*)v = \text{Adj}A(x^*)J(x^*)\tilde{u} = 0$ , lo que es absurdo ya que  $\text{rgAdj}A(x^*)J(x^*) = 1$ .

Por lo tanto,  $\text{Im}J(x^*) \not\subseteq \text{Im}A(x^*)$ .

2. El sistema  $A(x)\dot{x} = f(x)$ , puede escribirse como en (3.5):

$$\omega(x)\dot{x} = \text{Adj}A(x)f(x).$$

Consideramos el sistema *desingularizado*

$$\dot{x} = g(x) = \text{Adj}A(x)f(x). \quad (4.21)$$

La matriz Jacobiana de  $g$  es  $g'(x) = \text{Adj}A(x)J(x) + (\text{Adj}A(x))'f(x)$  y, puesto que  $f(x^*) = 0$  se tiene que:

$$g'(x^*) = \text{Adj}A(x^*)J(x^*)$$

que tiene rango 1 y por lo tanto  $n - 1$  autovalores nulos.

Por el Teorema 4.1 (Teorema de la variedad central), se sigue que existe una variedad de dimensión  $n - 1$  invariante por el flujo de  $g$  cuyo espacio tangente es  $\text{Ker}g'(x^*)$ .

3. En un problema no estacionario las variedades  $M_s$  y  $\mathcal{C}$  se intersectan transversalmente en el equilibrio singular no crítico  $x^*$ , es decir, el espacio tangente a  $M_s$  y el espacio tangente a  $\mathcal{C}$  generan  $\mathbb{R}^n$ . Luego, no es posible hallar un entorno de  $x^*$  totalmente contenido en  $\mathcal{C}$  y entonces  $x^*$  resulta un punto de acumulación del conjunto de singularidades algebraicas. Por lo tanto, en el caso no estacionario, *los puntos de equilibrio singulares son singularidades fuertes*.



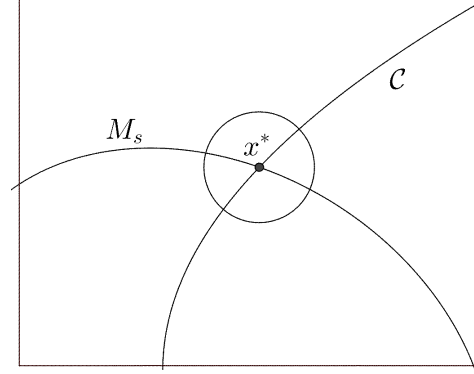


Figura 4.3: El equilibrio  $x^*$  es singularidad fuerte

**Observación 4.2.** En problemas cuasilineales regulares de índice de Kronecker 1, como se muestra en el Teorema 2.4, la matriz pencil  $\{A(x^*), -J(x^*)\}$  caracteriza la dinámica local cerca del equilibrio  $x^*$  en la variedad solución. En problemas singulares de índice 0, imponiendo la condición del índice de Kronecker 1, solamente en el equilibrio singular  $x^*$  se obtiene un teorema análogo [17]:

**Teorema 4.4.** *Supongamos que se satisfacen las hipótesis del Lema 4.1 en el equilibrio singular  $x^*$  del sistema  $A(x)\dot{x} = f(x)$ . Sea  $A = A(x^*)$  y  $J = J(x^*)$ , si  $\{A, -J\}$  es matriz pencil regular con índice 1 con  $\sigma(A, -J) \subset \mathbb{C}^-$ , entonces  $x^*$  es asintóticamente estable para la dinámica de  $\tilde{h}$  en la variedad centro  $\mathcal{C}$ .*

### 4.3. Variedad central en el problema no estacionario

Consideraremos el sistema desingularizado

$$\dot{x} = g(x) = \text{Adj}A(x)f(x)$$

correspondiente a  $A(x)\dot{x} = f(x)$  y que cumple (4.20).

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que 0 es el punto de equilibrio singular, si hubiera otro equilibrio  $x^*$  podría hacerse una traslación  $\hat{x} = x - x^*$  para llevarlo a 0.

Aplicando el Teorema 4.1 se tiene la linealización

$$\dot{x} = A_0x + \tilde{g}(x) \tag{4.22}$$

donde

$$\tilde{g}(x) = g(x) - g'(0)x, \quad A_0 = g'(0),$$

con  $g'(0)$  la matriz jacobiana de  $g$  en 0.

Como  $g'(x) = \text{Adj}A(x)J(x)$  y  $\text{rgAdj}A(0) = 1$ ,

$\text{rg}g'(0) = \text{rgAdj}A(0)J(0) = \text{rg}A_0 = 1$  y luego  $A_0$  tiene  $n - 1$  autovalores nulos.

El espacio generado por los autovectores correspondientes a los autovalores nulos, tangente a la variedad central  $\mathcal{C}$  en 0, es

$$E^c = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \text{Adj}A(0)J(0)v = 0\} = \text{Ker}g'(0).$$

Además, existe un autovalor  $\lambda \neq 0$ . Su correspondiente autovector genera un subespacio de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión 1. Si  $\lambda < 0$  dicho subespacio es tangente a una variedad estable y si  $\lambda > 0$ , es tangente a una variedad inestable (Teorema 4.3). Si  $M$  es la matriz cuyas columnas son los autovectores de  $A_0$  y  $T = M^{-1}$ , entonces

$$TA_0T^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & \lambda \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

donde  $A_1$  es una matriz de orden  $n - 1$  con todos sus autovalores con parte real 0 y  $\lambda$  el único autovalor no nulo. Mediante el cambio de variables

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = Tx,$$

con  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$  y  $z \in \mathbb{R}$ , la ecuación (4.22) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1y + g_1(y, z) \\ \dot{z} &= \lambda z + g_2(y, z) \end{aligned} \quad (4.24)$$

La ecuación de la variedad central, invariante para el flujo de  $g$ , es  $z = h_c(y_1, \dots, y_{n-1})$ , donde la función  $h_c$  es la solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial h_c}{\partial y} [A_1y + g_1(y, h_c(y))] - \lambda h_c(y) - g_2(y, h_c(y)) = 0, \quad (4.25)$$

con condiciones iniciales:

$$h_c(0) = 0; \quad h'_c(0) = 0. \quad (4.26)$$

De acuerdo al Teorema 4.4, si se satisfacen las hipótesis del Lema 4.1 en el equilibrio singular  $x^*$  de  $A(x)\dot{x} = f(x)$  y si  $\{A(x^*), -J(x^*)\}$  es matriz pencil regular de índice 1 con  $\sigma(A(x^*), -J(x^*)) \subset \mathbb{C}^-$ , entonces  $x^*$  es asintóticamente estable para la dinámica de  $\tilde{h}_c$  en la variedad centro  $\mathcal{C}$  de dimensión  $n - 1$ .

## 4.4. Variedad de cruce en el problema no estacionario

En esta sección analizamos la variedad de cruce, de dimensión 1 que aparece en el problema no estacionario de índice 0. En primer lugar estudiamos el problema desingularizado y hallamos la ecuación que representa a dicha variedad en este sistema, luego usamos los resultados obtenidos para analizar la existencia de una solución de cruce en el problema original.

### 4.4.1. En el problema desingularizado.

Consideramos el sistema

$$\dot{x} = g(x) = \text{Adj}A(x)f(x), \quad (4.27)$$

correspondiente a  $\omega(x)\dot{x} = g(x)$ , que cumple la condición (4.20). Luego, por el punto de equilibrio 0 existen una variedad central  $\mathcal{C}$  de dimensión  $n - 1$  y una variedad de dimensión 1.

El subespacio de dimensión 1, generado por el autovector  $v_\lambda$  correspondiente al único autovalor  $\lambda$  distinto de cero (4.23), en un entorno del 0, es tangente a una variedad estable  $W^s(0)$  (si  $\lambda < 0$ ) ó a una variedad inestable  $W^u(0)$  (si  $\lambda > 0$ ). Luego, existe una variedad solución estable ó inestable del sistema  $\dot{x} = g(x)$ , que llamaremos  $W(0)$ .

Por el Teorema 4.3

$$W(0) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : y = h(z)\},$$

con  $h(z)$  tangente a  $v_\lambda$  para  $|z|$  suficientemente pequeño.

La variedad  $W(0)$  es invariante. En efecto, si  $y(0) = h(z(0))$  entonces  $(y(t), z(t))$  pertenece a  $W(0)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , es decir,  $y(t) = h(z(t))$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . La dinámica del sistema en dicha variedad está descrita por la ecuación

$$\dot{z} = \lambda z + g_2(h(z), z).$$

Si  $y(0) \neq h(z(0))$ ,  $w(t) = y(t) - h(z(t))$  representa la desviación de la trayectoria de la variedad en cualquier tiempo  $t$ .

Aplicando el cambio de variables

$$\begin{aligned} w &= y - h(z) \\ z &= z \end{aligned}$$

el sistema original (4.24) se transforma en:

$$\dot{w} = A_1(w + h(z)) + g_1(w + h(z), z) - h'(z)(\lambda z + g_2(w + h(z), z)) \quad (4.28)$$

$$\dot{z} = \lambda z + g_2(w + h(z), z) \quad (4.29)$$

Por la invariancia de la variedad resulta que si  $w = 0$ , entonces  $\dot{w} = 0$ , así:

$$0 = A_1 h(z) + g_1(h(z), z) - h'(z) [\lambda z + g_2(h(z), z)], \quad (4.30)$$

Ya que la ecuación anterior se satisface para cualquier solución contenida en la variedad estable o inestable, la función  $h(z)$  debe satisfacer esta ecuación.

Si en (4.29) sumamos y restamos  $g_2(h(z), z)$  obtenemos,

$$\dot{z} = \lambda z + g_2(w + h(z), z) - g_2(h(z), z) + g_2(h(z), z)$$

y llamando  $N_2(w, z) = g_2(w + h(z), z) - g_2(h(z), z)$  resulta,

$$\dot{z} = \lambda z + N_2(w, z) + g_2(h(z), z),$$

luego, restando (4.30) a (4.28) obtenemos:

$$\dot{w} = A_1 w + g_1(w + h(z), z) - g_1(h(z), z) - h'(z) N_2(w, z) = A_1 w + N_1(w, z),$$

con  $N_1(w, z) = g_1(w + h(z), z) - g_1(h(z), z) - h'(z) N_2(w, z)$ .

Las funciones  $N_1$  y  $N_2$  satisfacen las condiciones:

$$N_i(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial N_i(0, 0)}{\partial w} = 0, \quad i = 1, 2.$$

De lo anterior queda probada la siguiente proposición:

**Proposición 4.1.** *Sea  $x^*$  un punto de equilibrio singular de la EDA cuasilínea  $A(x)\dot{x} = f(x)$  y consideremos el sistema desingularizado*

$$\dot{x} = g(x) = \text{Adj}A(x)f(x).$$

*Si se cumple la condición*

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \text{Adj}A(x^*)J(x^*) \\ \nabla \det A(x^*) \end{pmatrix} = 2,$$

*existe una variedad unidimensional  $W(x^*)$  tangente en  $x^*$  al autovector  $v_\lambda$ , correspondiente al autovalor no nulo  $\lambda$  de la matriz  $A_0 = \text{Adj}A(x^*)J(x^*)$ .*

*La variedad  $W(x^*)$  está dada por la solución  $y = h(z)$  de la ecuación diferencial*

$$0 = A_1 h(z) + g_1(h(z), z) - h'(z) [\lambda z + g_2(h(z), z)]. \quad (4.31)$$

*Las variables  $y, z$  corresponden a la transformación  $[y \ z]^T = Tx$ , siendo  $T = M^{-1}$ , con  $M$  la matriz de los autovectores de  $A_0$ .*

#### 4.4.2. En el sistema original.

De acuerdo a lo que analizamos en la sección anterior, en el sistema desingularizado  $\dot{x} = g(x)$  existe una variedad  $W(0)$  de dimensión 1 (estable o inestable), representada por la ecuación  $y = h(z)$ , con  $[y \ z]^T = Tx$ , que pasa por el punto de equilibrio.

Cada  $x_W \in W(0)$  es de la forma  $x_W = T^{-1}[h(z) \ z]^T$ , luego el campo vectorial  $g(x)$  en cada punto de la variedad  $W(0)$  resulta:

$$H_d(z) = g(x_W) = g(h(z), z),$$

En el conjunto regular  $\mathbb{R}^n - M_s$  el sistema original puede escribirse

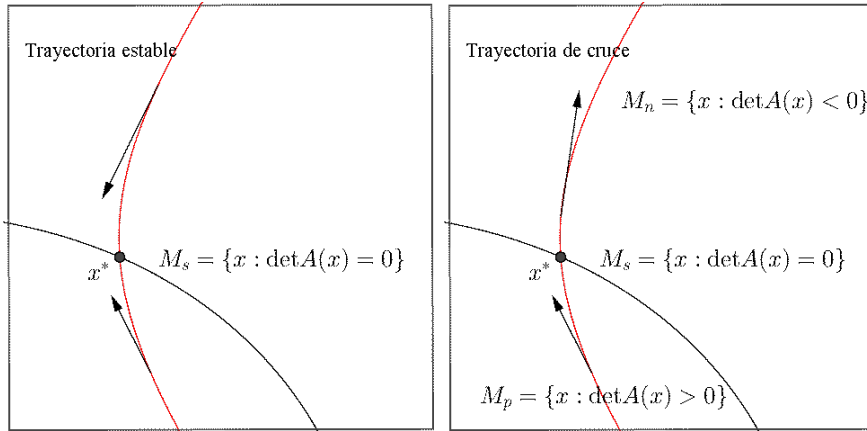
$$\dot{x} = \frac{1}{\det A(x)} g(x)$$

y en cada  $x_W \in W(0)$  el campo vectorial

$$H(z) = \frac{1}{\det A(x_W)} g(x_W) = \frac{1}{\det A(h(z), z)} g(h(z), z)$$

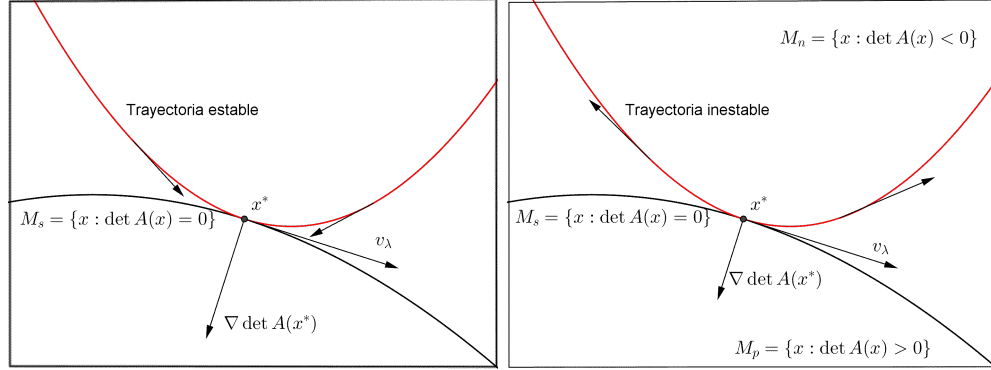
tiene la misma dirección que  $H_d$  pero cambia de sentido en el conjunto  $M_n = \{x : \det A(x) < 0\}$ .

En las siguientes figuras mostramos el comportamiento de los campos  $H_d$  y  $H$ . A la izquierda aparecen algunos vectores del campo  $H_d$  en una trayectoria estable para el problema desingularizado, a la derecha los vectores del campo  $H$  en la trayectoria que cruza el conjunto singular por  $x^*$ .



(a) Trayectoria estable en el sistema desingularizado que pasa por  $x^*$  (b) Trayectoria que cruza el conjunto singular por  $x^*$

Si la trayectoria estable o inestable para el problema desingularizado representada por la variedad  $W(0)$  no fuera transversal al conjunto singular en  $x^*$  como se ve en la siguiente figura, el vector tangente a la variedad y  $\nabla \det A(x^*)$  serían ortogonales.



(c) Trayectoria estable tangente a  $M_s$  en el sistema desingularizado (d) Trayectoria inestable en el sistema original, no cruza el conjunto singular

En este caso, se cumple la condición

$$v_\lambda \cdot \nabla \det A(x^*) = 0$$

donde  $v_\lambda$  representa el autovector correspondiente al autovalor no nulo de la matriz  $A_0 = \text{Adj}A(x^*)J(x^*)$  y la trayectoria no "cruza" el conjunto singular. Es decir que se mantiene en el conjunto regular donde  $\det A(x) < 0$  o  $\det A(x) > 0$ .

De lo anterior queda demostrado:

**Proposición 4.2.** *Consideremos la EDA cuasilineal  $A(x)\dot{x} = f(x)$ , donde  $A(x) \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$  y  $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  en un entorno del punto de equilibrio singular no crítico  $x^*$ .*

*Si*

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \text{Adj}A(x^*)J(x^*) \\ \nabla \det A(x^*) \end{pmatrix} = 2,$$

*entonces existe una variedad unidimensional tangente en  $x^*$  al autovector  $v_\lambda$ , correspondiente al autovalor no nulo de la matriz  $A_0 = \text{Adj}A(x^*)J(x^*)$ . Además, si  $v_\lambda$  no es normal a  $\nabla \det A(x^*)$ , el equilibrio singular  $x^*$  es un punto de cruce de la EDA cuasilineal.*

**Ejemplo 4.2.** Sea el sistema cuasilineal

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3)\dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \\ \dot{x}_3 &= -2x_3\end{aligned}$$

El conjunto singular, de dimensión 2 es:

$$M_s = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \det A(x) = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

Todos los puntos de  $M_s$  son singularidades no críticas ya que  $\nabla \det A(x) = (1, 1, 1)$  es no nulo para todo  $x$ .

Para cada punto de  $M_s$  existe un entorno reducido que incluye un subconjunto abierto y denso del conjunto regular. En cada uno de tales subconjuntos el sistema se reduce a un sistema explícito  $\dot{x} = A^{-1}(x)f(x)$ , se trata entonces, de un problema singular.

El punto de equilibrio singular es  $x^* = (0, 0, 0)$ .

$$\text{Sean } \omega(x) = \det A(x) = x_1 + x_2 + x_3; \quad g(x) = \text{Adj} A(x)f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2(x_1 + x_2 + x_3) \\ -2x_3(x_1 + x_2 + x_3) \end{pmatrix}.$$

Este problema es no estacionario pues,

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \text{Adj} A(x^*)J(x^*) \\ \nabla \det A(x^*) \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

y entonces  $x^*$  es una singularidad geométrica fuerte.

**Análisis de la estabilidad.** El sistema desingularizado  $\dot{x} = g(x) = \text{Adj}(A(x))f(x)$ , resulta:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2(x_1 + x_2 + x_3) \\ \dot{x}_3 &= -2x_3(x_1 + x_2 + x_3)\end{aligned}$$

Si lo linealizamos alrededor del equilibrio singular, que en este caso es el origen,

$$\dot{x} = A_0 x, \tag{4.32}$$

con  $A_0$  la matriz Jacobiana de  $g$  evaluada en  $x^*$ . Se tiene,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene dos autovalores 0 y el autovalor 1, siendo la matriz de los autovectores

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con el cambio de variables  $[y_1 \ y_2 \ z]^T = T[x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  el nuevo sistema puede reescribirse así,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -2y_1^2 - 2y_1y_2 - 2y_1z \\ \dot{y}_2 &= -y_1y_2 - y_2^2 - y_2z \\ \dot{z} &= z \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 0y + g_1(y, z) \\ \dot{z} &= 1z + g_2(y, z) \end{aligned}$$

con  $y = [y_1 \ y_2]$ ,  $g_1(y, z) = (-2y_1^2 - 2y_1y_2 - 2y_1z, -y_1y_2 - y_2^2 - y_2z)$  y  $g_2(y, z) = 0$ .

La variedad central  $\mathcal{C}$  está dada por  $z = h_c(y_1, y_2)$ , siendo  $h_c(y_1, y_2)$  la solución de la ecuación diferencial:

$$\left[ \frac{\partial h_c}{\partial y_1} \quad \frac{\partial h_c}{\partial y_2} \right] [-2y_1^2 - 2y_1y_2 - 2y_1h_c(y_1, y_2) \quad -y_1y_2 - y_2^2 - y_2h_c(y_1, y_2)]^T - h_c(y_1, y_2) = 0$$

con condiciones de borde

$$h_c(0) = 0; \quad \frac{\partial h_c}{\partial y_1}(0) = 0; \quad \frac{\partial h_c}{\partial y_2}(0) = 0.$$

Proponemos

$$h_c(y_1, y_2) = h_{21}y_1^2 + h_{22}y_2^2 + h_{23}y_1y_2 + h_{31}y_1^3 + \dots$$

y sustituimos en la ecuación de la variedad central para encontrar los coeficientes  $h_{ij}$ . En este caso  $h_c(y_1, y_2) = 0$  es solución, por lo tanto  $\mathcal{C}$  es el plano de ecuación  $x_1 = 0$ .

Para conocer si  $x^*$  es equilibrio asintóticamente estable, primero aplicamos la Proposición 2.3, considerando  $A = A(x^*)$ ,  $J = J(x^*)$ ,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



un proyector sobre  $\mathcal{N} = \text{Ker} A$ , y

$$A_1 = A - JQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es una matriz no singular y por lo tanto la matriz pencil  $\{A, -J\}$  tiene índice de Kronecker 1.

El espectro es  $\sigma\{A, -J\} = \{-1, -2\} \subset \mathbb{C}^-$ , luego por el Teorema 4.4, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable para la dinámica de  $h_c$  restringida a  $\mathcal{C}$ .

### Variedad de cruce.

En la linealización (4.32) del sistema  $\dot{x} = g(x) = \text{Adj}(A(x))f(x)$ , la matriz  $A_0$  tiene un autovalor 1 y su correspondiente autovector  $v_\lambda = (1, 0, 0)$  genera un subespacio que es tangente a una variedad inestable, que llamaremos  $W_0$ .

La variedad  $W_0$  está dada por la solución de la ecuación (4.31),

$$0 = A_1 h(z) + g_1(h(z), z) + h'(z) [\lambda z + g_2(h(z), z)],$$

donde  $[h_1(z) \ h_2(z) \ z]^T = Tx$  con condiciones de borde  $h_1(0) = 0$ ,  $h_2(0) = 0$  y  $h'_1(0) = 0$ ,  $h'_2(0) = 0$ . En este caso se tiene:

$$0 = (-2h_1^2(z) - 2h_1(z)h_2(z) - 2h_1(z)z, -h_1(z)h_2(z) - h_2(z)^2 - h_2(z)z + z(h'_1(z), h'_2(z))),$$

que resulta equivalente al sistema

$$2h_1^2(z) + 2h_1(z)h_2(z) + 2h_1(z)z = zh'_1(z) \quad (4.33)$$

$$h_1(z)h_2(z) + h_2(z)^2 + h_2(z)z = zh'_2(z), \quad (4.34)$$

con  $h_1(0) = 0$ ,  $h_2(0) = 0$  y  $h'_1(0) = 0$ ,  $h'_2(0) = 0$ . Proponemos

$$h_1(z) = h_2^1 z^2 + h_3^1 z^3 + \dots$$

$$h_2(z) = h_2^2 z^2 + h_3^2 z^3 + \dots$$

Igualando coeficientes es fácil ver que  $h_1(z) = 0 = h_2(z)$  resulta solución, luego la variedad unidimensional resulta:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_2 &= 0 \\ z &= x_1 \end{aligned}$$

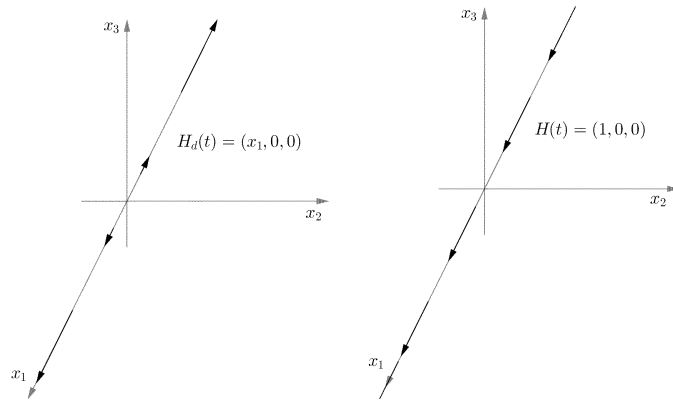
En el sistema original  $A(x)\dot{x} = f(x)$ , el vector  $v_\lambda$  es transversal al conjunto singular y puesto que  $v_\lambda = (1, 0, 0)$  y  $\nabla \det A(x^*) = (1, 1, 1)$  no son ortogonales, existe una solución de cruce por el equilibrio singular  $x^*$ .

Sintetizando el análisis anterior, en este problema hay un único punto de equilibrio singular  $x^* = (0, 0, 0)$  que resulta asintóticamente estable para la dinámica de  $h_c$  restringida a la variedad central  $\mathcal{C}$  que es en este caso el plano de ecuación  $x_1 = 0$ .

En el sistema desingularizado hay una variedad unidimensional inestable  $W_0$ , ya que el autovalor no nulo es  $\lambda = 1 > 0$ , con autovector correspondiente  $(1, 0, 0)$ . El campo en cada punto de dicha variedad es  $H_d(x) = (x_1, 0, 0)$ . En el sistema original el campo correspondiente es

$$H(x) = \frac{1}{\det A(x)}(x_1, 0, 0) = \frac{1}{x_1}(x_1, 0, 0) = (1, 0, 0),$$

siendo  $x^* = (0, 0, 0)$  un punto de cruce y la variedad de cruce unidimensional es el subespacio de  $\mathbb{R}^3$  generado por el vector  $\vec{v} = (1, 0, 0)$ .



(e) Variedad inestable en el problema desingularizado      (f) Variedad de cruce en el problema original

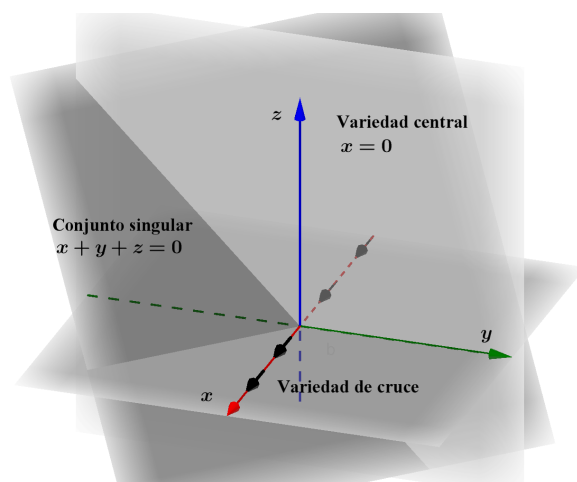


Figura 4.4: Variedades en el ejemplo 4.2



# Capítulo 5

## Análisis del equilibrio singular en circuitos eléctricos no lineales

En este capítulo, usando los resultados del Capítulo 4, analizaremos el comportamiento de las trayectorias unidimensionales de cruce por puntos de equilibrio singulares en las EDAs cuasilineales singulares que modelan dos clases de redes eléctricas no lineales: las de tipo RLC y aquellas con un diodo-túnel.

### 5.1. Circuito eléctrico RLC

En esta sección estudiamos la existencia de una variedad de dimensión 1 que cruza el punto de equilibrio singular en las ecuaciones que modelizan los circuitos eléctricos RLC. Para hacer dicho análisis usamos lo estudiado en 2.4.1, específicamente el caso singular que aparece luego de aplicar el algoritmo de desingularización (2.4.2).

#### 5.1.1. Existencia de una variedad unidimensional de cruce.

En el caso del circuito RLC no lineal (Sección 2.4.1), las ecuaciones que gobiernan la evolución del voltaje y la corriente se pueden representar mediante una EDA cuasilineal:

$$A(x)\dot{x} = f(x),$$

donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(x_4) \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ \psi(x_1, x_4 + E) \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Luego de aplicar el algoritmo de desingularización (Sección 2.4.2) el sistema se reduce a otro del mismo tipo con:

$$\tilde{A}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -L(-x_1 - x_2) & -L(-x_1 - x_2) \\ C(\varphi(x_1) - E)\varphi'(x_1) & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \varphi(x_1) - E \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Si  $\varphi(x_1^*) = E$  y  $\varphi'(x_1^*) = 0$  (Condición **RLC. 2**),  $x^* = (x_1^*, 0)$  es un equilibrio singular.

Se tiene que

$$\nabla \det \tilde{A}(x_1^*, 0) = (L(-x_1^*)C(0)\varphi''(x_1^*), 0)$$

que no es nulo si  $\varphi''(x_1^*) \neq 0$  y entonces el equilibrio es singular y no crítico.

Además

$$\text{Adj} \tilde{A}(x_1^*, 0) = \begin{pmatrix} 0 & L(-x_1^*) \\ 0 & -L(-x_1^*) \end{pmatrix}, \quad \tilde{J}(x_1^*, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y se cumple la condición

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \text{Adj} A(x^*)J(x^*) \\ \nabla \det \tilde{A}(x^*) \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & L(-x_1^*) \\ 0 & -L(-x_1^*) \\ L(-x_1^*)C(0)\varphi''(x_1^*) & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Luego, existen una variedad central y otra variedad  $W_1$  para el sistema desingularizado.

Ambas variedades tienen dimensión 1 y son transversales al conjunto singular  $M_s = \{(x_1, x_2) : \varphi'(x_1) = 0\}$  en  $x^* = (x_1^*, 0)$ .

Para encontrar los vectores tangentes a la variedad central y a la variedad  $W_1$ , trasladamos el equilibrio singular al origen mediante  $\hat{x}_1 = x_1 - x_1^*$ ,  $\hat{x}_2 = x_2$  y consideramos el sistema desingularizado  $\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}) = \text{Adj} A(\hat{x})f(\hat{x})$ , que para este modelo resulta:

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 L(-\hat{x}_1 - x_1^* - \hat{x}_2) \\ -C(\varphi(\hat{x}_1 + x_1^*) - E)(\varphi(\hat{x}_1 + x_1^*) - E)\varphi'(\hat{x}_1 + x_1^*) - \hat{x}_2 L(-\hat{x}_1 - x_1^* - \hat{x}_2) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Los autovalores y autovectores de la matriz

$$A_0 = g'(0) = \begin{pmatrix} 0 & L(-x_1^*) \\ 0 & -L(-x_1^*) \end{pmatrix}$$

son:  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = -L(-x_1^*) < 0$  y  $v_0 = (1, 0)$ ,  $v_1 = (1, -1)$ , respectivamente, luego en este caso

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T^{-1},$$

y mediante el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

se tiene que,

$$\begin{aligned} y &= \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \\ z &= -\hat{x}_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo en el sistema (5.2) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -C(\varphi(y+z+x_1^*)-E)(\varphi(y+z+x_1^*)-E)\varphi'(y+z+x_1^*) = 0y + g_1(y, z) \\ \dot{z} &= C(\varphi(y+z+x_1^*)-E)(\varphi(y+z+x_1^*)-E)\varphi'(y+z+x_1^*) - zL(-y-x_1^*) = \\ &= -zL(-x_1^*) + C(\varphi(y+z+x_1^*)-E)(\varphi(y+z+x_1^*)-E)\varphi'(y+z+x_1^*) + \\ &\quad - z(L(-y-x_1^*) - L(-x_1^*)) = \\ &= -zL(-x_1^*) + g_2(y, z) \end{aligned}$$

Como se trata de un modelo en el plano, existen una variedad central  $\mathcal{C}$  dada por  $z = \tilde{h}_c(y)$  y una variedad  $W_1$ , ambas de dimensión 1.

El espacio tangente a  $W_1$  en  $x^*$  está generado por el autovector  $v_1 = (1, -1)$  y corresponde al autovalor  $\lambda_1 = -L(-x_1^*) < 0$  que es estable para el sistema  $\dot{\hat{x}} = g(\hat{x})$ .

Puesto que el autovector  $v_1 = (1, -1)$  no es ortogonal con

$$\nabla \det \tilde{A}(x_1^*, 0) = (L(-x_1^*)C(\varphi(x_1^*))\varphi''(x_1^*), 0),$$

se concluye que, en el sistema  $\tilde{A}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x)$ ,  $x^*$  es un punto de cruce. [9]

La ecuación  $y = h(z)$  que representa a  $W_1$  está dada por la solución de la ecuación diferencial

$$0 = A_1 h(z) + g_1(h(z), z) + h'(z) [\lambda z + g_2(h(z), z)], \quad h(0) = 0 \quad (5.4)$$

En este caso,

$$\begin{aligned} g_1(y, z) &= -C(\varphi(y + z + x_1^*) - E)(\varphi(y + z + x_1^*) - E)\varphi'(y + z + x_1^*) \\ g_2(y, z) &= C(\varphi(y + z + x_1^*) - E)(\varphi(y + z + x_1^*) - E)\varphi'(y + z + x_1^*) \\ &\quad - z(L(-y - x_1^*) - L(-x_1^*)) \end{aligned}$$

y entonces la ecuación (5.4) resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= -C(\varphi(h(z) + z + x_1^*) - E)(\varphi(h(z) + z + x_1^*) - E)\varphi'(h(z) + z + x_1^*) + \\ &\quad + h'(z) [C(\varphi(h(z) + z + x_1^*) - E)(\varphi(h(z) + z + x_1^*) - E)\varphi'(h(z) + z + x_1^*) \\ &\quad - zL(-h(z) - x_1^*)] \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.1.** Como caso concreto elegimos  $\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ , en el caso que tome valores positivos para  $x > 0$ . Los puntos de equilibrio singulares son  $(x_1^*, 0)$  donde  $\varphi(x_1^*) = E$  y  $\varphi'(x_1^*) = 0$ .

En particular, si tomamos el problema reducido  $\tilde{A}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x)$  del circuito RLC con  $\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ ,  $L = C = 1$ ,  $E = 16$ , en este caso un equilibrio singular es  $x^* = (4, 0)$ , ya que  $\varphi(4) = 16$  y  $\varphi'(4) = 0$ .

En el problema desingularizado  $\dot{x} = g(x)$  la variedad estable que corresponde al autovalor  $\lambda_1 = -1$  es la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} 0 &= -[(h(z) + z + 4)^3 - 9(h(z) + z + 4)^2 + 24(h(z) + z + 4) - 16] (3(h(z) + z + 4)^2 \\ &\quad - 18(h(z) + z + 4) + 24) + h'(z) [-z + [(z - h(z) + 4)^3 - 9(z - h(z) + 4)^2 + \\ &\quad 24(z - h(z) + 4) - 16] [3(z - h(z) + 4)^2 - 18(z - h(z) + 4) + 24]] \end{aligned}$$

En este caso,

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= x_1 - 4 \\ \hat{x}_2 &= x_2 \end{aligned}$$

y entonces

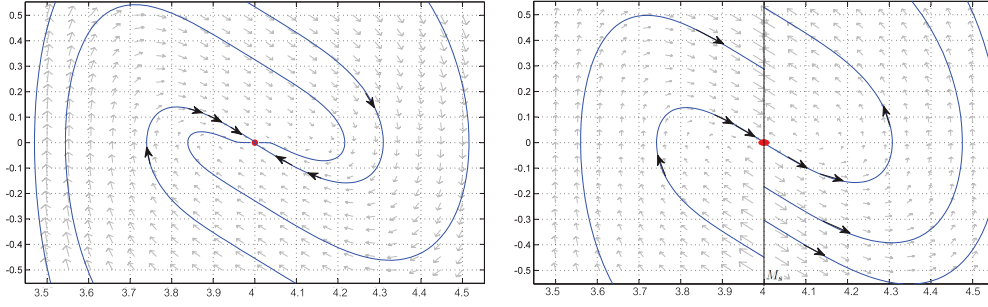
$$\begin{aligned} y &= x_1 + x_2 - 4 \\ z &= -x_2 \end{aligned}$$

luego tenemos que  $x_1 = h(-x_2) - x_2 + 4$ . En el gráfico siguiente se muestra la variedad unidimensional estable en el problema desingularizado que pasa por el punto de equilibrio singular.

En el problema completo  $\tilde{A}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x)$ , con  $\tilde{A}(x)$  y  $\tilde{f}(x)$  como en (5.1), dicha variedad mantiene su dirección pero pasa a ser una variedad de cruce como se ve



en la siguiente figura. Las variedades están calculadas numéricamente mediante el paquete ODE45 de Matlab.



(a) Variedad estable en el problema desingularizado

(b) Variedad de cruce en el problema original

### 5.1.2. Análisis de la estabilidad asintótica del equilibrio singular.

De acuerdo con el Teorema 4.4, suponiendo que se satisfacen las hipótesis del Lema 4.1 en  $x^*$ , si  $\left\{ \tilde{A}(x^*), -\tilde{J}(x^*) \right\}$  es matriz pencil regular con índice de Kronecker 1 con  $\sigma\left(\tilde{A}(x^*), -\tilde{J}(x^*)\right) \subset \mathbb{C}^-$ , entonces  $x^*$  es asintóticamente estable para la dinámica de  $z = \tilde{h}_c(y)$  restringida a la variedad centro  $\mathcal{C}$  que en esta situación tiene dimensión 1. En este caso,  $\sigma\left(\tilde{A}(x^*), -\tilde{J}(x^*)\right) = \{0\}$  por lo que no se puede concluir nada sobre la estabilidad del sistema.

## 5.2. Circuito eléctrico LC con diodo-túnel

Del mismo modo que en el circuito RLC, analizamos los puntos de equilibrio singular en las EDAs cuasilineales que modelizan este tipo de circuitos y la existencia de una variedad de cruce de dimensión 1.

### 5.2.1. Existencia de una variedad unidimensional de cruce en el circuito LC con diodo túnel.

En el caso del circuito LC no lineal con diodo-túnel (Sección 2.4.3), la EDA cuasilineal que describe el circuito es del tipo  $A(x)\dot{x} = f(x)$ , con  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,

donde  $x_1$  y  $x_3$  representan a los voltajes y  $x_2$  a la corriente, siendo:

$$A(x) = \begin{pmatrix} C(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & L(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_3 \\ x_2 + I_s - \psi(x_3) \end{pmatrix},$$

con  $\psi$  una función con derivadas de todos los órdenes.

Luego de aplicar el algoritmo de desingularización, se tiene el sistema

$$\tilde{A}(x_1, x_3) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \tilde{f}(x_1, x_3),$$

con

$$\tilde{A}(x_1, x_3) = \begin{pmatrix} C(x_1) & 0 \\ 0 & L(\psi(x_3) - I_s)\psi'(x_3) \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(x_1, x_3) = \begin{pmatrix} \psi(x_3) - I_s \\ -x_1 - x_3 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

y el equilibrio  $x^* = (-x_3^*, x_3^*)$  con  $\psi(x_3^*) = I_s$ , es no crítico puesto que,  $\nabla \det \tilde{A}(-x_3^*, x_3^*) = (0, L(0)C(-x_3^*)\psi''(x_3^*))$  es no nulo cuando  $\psi''(x_3^*) \neq 0$ . En este caso, se cumple la condición

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \text{Adj} A(x^*) J(x^*) \\ \nabla \det A(x^*) \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -C(-x_3^*) & -C(-x_3^*) \\ 0 & L(0)C(-x_3^*)\psi''(x_3^*) \end{pmatrix} = 2.$$

Por lo tanto, existen una variedad central y una variedad de dimensión 1, transversales al conjunto singular  $M_s = \{(x_1, x_3) : \psi'(x_3) = 0\}$ . Para encontrar los vectores tangentes a la variedad central y a la variedad de cruce de dimensión 1 en este problema, trasladamos el equilibrio singular al origen mediante

$$\hat{x}_1 = x_1 + x_3^*, \quad \hat{x}_3 = x_3 - x_3^*$$

y consideraremos el sistema desingularizado

$$\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}) = \text{Adj} A(\hat{x}) f(\hat{x}),$$

o equivalentemente:

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\psi(\hat{x}_3 + x_3^*) - I_s)(\psi(\hat{x}_3 + x_3^*) - I_s)\psi'(\hat{x}_3 + x_3^*) \\ C(\hat{x}_1 - x_3^*)(-\hat{x}_1 - \hat{x}_3) \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Buscamos los autovalores y autovectores de la matriz  $A_0 = g'(0)$ ,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -C(-x_3^*) & -C(-x_3^*) \end{pmatrix}$$

que resultan  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = -C(-x_3^*) < 0$  y  $v_0 = (1, -1)$ ,  $v_1 = (0, 1)$ , respectivamente.

En este caso

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con el cambio de coordenadas lineal

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix}$$

se tiene que,

$$y = \hat{x}_1 \tag{5.7}$$

$$z = \hat{x}_1 + \hat{x}_3 \tag{5.8}$$

Luego, sustituyendo en (5.6) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= L(\psi(z - y + x_3^*) - I_s)(\psi(z - y + x_3^*) - I_s)\psi'(z - y + x_3^*) = 0y + g_1(y, z) \\ \dot{z} &= -zC(-x_3^*) + L(\psi(z - y + x_3^*) - I_s)(\psi(z - y + x_3^*) - I_s)\psi'(z - y + x_3^*) - \\ &\quad - z(C(y - x_3^*) - C(-x_3^*)) = \\ &= -zC(-x_3^*) + g_2(y, z) \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.2.** Para analizar un caso concreto elegimos  $\psi(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ , en el caso que tome valores positivos para  $x > 0$ . Los puntos de equilibrio singulares son  $(-x_3^*, x_3^*)$  donde  $\psi(x_3^*) = I_s$  y  $\psi'(x_3^*) = 0$ .

En particular, si tomamos el problema reducido  $\tilde{A}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x)$  del circuito LC con diodo túnel con  $\psi(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ ,  $L = C = 1$ ,  $I_s = 16$ , se cumple que  $\psi(4) = 16$  y  $\psi'(4) = 0$  por lo que  $x^* = (-4, 4)$  es un equilibrio singular.

En el problema desingularizado la ecuación de la variedad unidimensional estable para el sistema  $\dot{x} = g(x)$  es  $y = h(z)$ , tangente en  $(-4, 4)$  al vector  $v_1 = (0, 1)$ .

El sistema (5.6) en este caso resulta:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= [(z - h(z) + 4)^3 - 9(z - h(z) + 4)^2 + 24(z - h(z) + 4) - 16] \\ &\quad [3(z - h(z) + 4)^2 - 18(z - h(z) + 4) + 24] \\ \dot{z} &= -z + [(z - h(z) + 4)^3 - 9(z - h(z) + 4)^2 + 24(z - h(z) + 4) - 16] \\ &\quad [3(z - h(z) + 4)^2 - 18(z - h(z) + 4) + 24] \end{aligned}$$

y la ecuación diferencial (4.30) para la variedad es:

$$\begin{aligned}
0 = & [(z - h(z) + 4)^3 - 9(z - h(z) + 4)^2 + 24(z - h(z) + 4) - 16] \\
& [3(z - h(z) + 4)^2 - 18(z - h(z) + 4) + 24] \\
& + h'(z) [-z + [(z - h(z) + 4)^3 - 9(z - h(z) + 4)^2 + 24(z - h(z) + 4) - 16] \\
& [3(z - h(z) + 4)^2 - 18(z - h(z) + 4) + 24]]
\end{aligned}$$

Para este ejemplo se cumple que

$$\hat{x}_1 = x_1 + 4$$

$$\hat{x}_3 = x_3 - 4$$

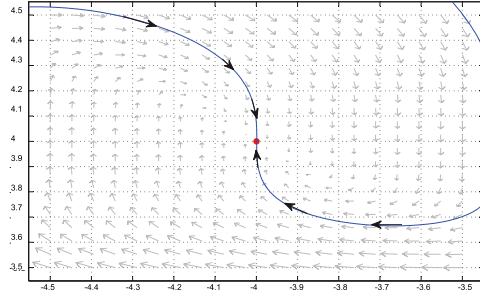
y entonces

$$y = x_1 + 4$$

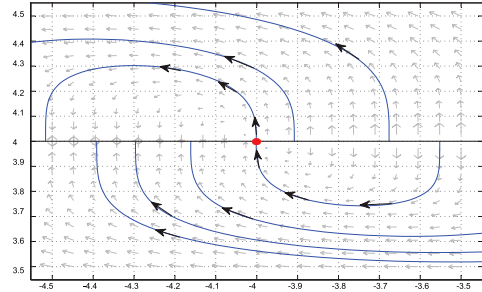
$$z = x_1 + x_3$$

tenemos que  $x_1 = h(x_1 + x_3) - 4$ .

En los gráficos siguientes se muestran: la variedad estable en el problema desingularizado y la variedad de cruce en el problema original. Las variedades están calculadas numéricamente mediante el paquete ODE45 de Matlab.



(c) Variedad estable en el problema desingularizado



(d) Variedad de cruce en el problema original

### 5.2.2. Análisis de la estabilidad asintótica del equilibrio singular

De acuerdo al Teorema 4.4, si se satisfacen las hipótesis del Lema 4.1 en  $x^*$ , y si  $\{\tilde{A}(x^*), -\tilde{J}(x^*)\}$  es matriz pencil regular de índice 1 con  $\sigma(\tilde{A}(x^*), -\tilde{J}(x^*)) \subset \mathbb{C}^-$ ,

entonces  $x^*$  es asintóticamente estable para la dinámica de  $z = \tilde{h}_c(y)$  en la variedad centro  $\mathcal{C}$  que en esta situación tiene dimensión 1.

En este caso,  $\sigma\left(\tilde{A}(x^*), -\tilde{J}(x^*)\right) = \{0\}$  por lo que, al igual que lo que ocurría en el circuito RLC, no se puede concluir nada sobre la estabilidad del sistema.



# Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo aplicamos resultados de la teoría de EDAs al análisis de los puntos de equilibrio singulares en algunos tipos de redes eléctricas no lineales que se modelizan con este tipo de ecuaciones. Analizamos la estabilidad de los puntos de equilibrio singulares en circuitos eléctricos RLC y con diodo-túnel.

Mostramos la clasificación de los distintos tipos de EDAs en regulares y singulares y los teoremas ya conocidos que permiten analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio en cada caso. Por otra parte, describimos el algoritmo de desingularización, que mediante la restricción del sistema original, hace posible estudiar el comportamiento de los puntos de equilibrio en una subvariedad de menor dimensión y analizar su comportamiento.

A partir de dichos resultados, y como un aporte original, utilizamos los teoremas sobre estabilidad para encontrar condiciones que garantizan la estabilidad de los puntos de equilibrio regulares en las EDAs cuasilineales que modelizan circuitos eléctricos no lineales, además, usando el algoritmo de desingularización, establecimos una clasificación sobre los distintos tipos de equilibrio en estos modelos.

En las EDAs cuasilineales singulares consideramos la clasificación en estacionarias y no estacionarias, para ilustrar las del primer tipo consideramos un ejemplo sobre aplicación del método continuo de Newton para la búsqueda de raíces de ecuaciones.

Con respecto a las EDAs cuasilineales singulares no estacionarias con índice 0, mostramos algunos resultados ya conocidos sobre estabilidad, restringiendo la dinámica a una variedad central.

Como otro aporte original destacamos la prueba de la existencia de una variedad de dimensión 1 por el equilibrio singular que llamamos variedad de cruce. Luego, aplicamos los resultados hallados y encontramos las trayectorias de cruce por equilibrios singulares en las EDAs cuasilineales singulares que modelizan dos clases de circuitos eléctricos no lineales: RLC y LC con diodo-túnel.

En trabajos futuros se espera continuar con el análisis sobre la existencia de puntos de cruce en los equilibrios singulares en casos de ecuaciones que modelicen otros tipos de circuitos o en otras disciplinas donde aparezcan EDAs. Por otra parte, en las ecuaciones que modelizan los circuitos eléctricos que estudiamos en este trabajo, los resultados conocidos no sirvieron para determinar la estabilidad en puntos de equilibrio singular. Consideramos importante continuar estudiando el tema y en lo posible encontrar maneras de decidir si un punto de equilibrio es o no estable.

Además, dado que los problemas que tratamos fueron EDAs cuasilineales singulares no estacionarias de índice 0 otra cuestión sería continuar con el análisis en el caso de índice 1 o índices superiores.

Desde el enfoque numérico, resulta de interés avanzar en el estudio de métodos que permitan analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio y la existencia de soluciones de cruce en estos tipos de EDAs.



# Bibliografía

- [1] J. CARR, *Applications of Centre Manifold Theory*, Soringer Verlag, 1981.
- [2] H. CENDRA, M. ETCHECHOURY, *Desingularization of implicit analytic differential equations*. J. Phys. A: Math. Gen. vol. 39 pp. 10975-11001, 2006.
- [3] H. CENDRA, M. ETCHECHOURY, S. FERRARO, *An extension of the Dirac and Gotay-Nester theories of constraints for Dirac dynamical systems*. J. Geom. Mechanics., 6 pp. 167-236, 2014.
- [4] L. CHUA, A. DENG *Impasse points. Part II: Analytical aspects*, International journal of circuit theory and applications, Vol. 1, 27 1-282, 1989.
- [5] M. ETCHECHOURY, C. GONZÁLEZ, D. KLEIMAN. *Ecuaciones Diferenciales Implícitas: Aplicación a Circuitos LC*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, Editor: ASAMACI, Vol. 4, ISSN: 2314-3282. pag. 81-84. 2013.
- [6] M. ETCHECHOURY, C. GONZÁLEZ, *Estabilidad del equilibrio singular en redes eléctricas no lineales..* Aceptado para su publicación en Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, Editor: ASAMACI, año 2017.
- [7] ETCHECHOURY, M., C. GONZÁLEZ, *Estabilidad de equilibrios singulares: aplicación a un circuito eléctrico no lineal*. LXIII Reunión de Comunicaciones científicas de la Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional de San Luis, septiembre de 2014.
- [8] ETCHECHOURY, M., C. GONZÁLEZ, *Análisis de la estabilidad del equilibrio singular en el modelo de una red eléctrica no lineal*. LXIV Reunión de Comunicaciones científicas de la Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional del Litoral, septiembre de 2015.
- [9] ETCHECHOURY, M., C. GONZÁLEZ, *Soluciones de cruce en puntos de equilibrio singular. Aplicación a un circuito RLC no lineal*. LXV Reunión de Comunicaciones Científicas Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, septiembre de 2016.

- [10] H. KHALIL, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 2da edición, 1996.
- [11] J. MARSDEN AND H. YOSHIMURA, *Dirac Structures in Lagrangian Mechanics, Part I: Implicit Lagrangian Systems*, J. of Geom. and Phys., 57, pp.133-156. 2006.
- [12] W. MARSZALEK, T. AMDEBERHAN, R. RIAZA *Singularity Crossing Phenomena in DAEs: A Two-Phase Fluid Flow. Application Case Study*, Computers and Mathematics with Applications 49, 303-319, 2005.
- [13] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer. 1991.
- [14] P. RABIER, W. RHEINBOLDT, *A Geometric Treatment of Implicit Differential-Algebraic Equations*, J. Diff Eqns.: 109, 110-146, 1994.
- [15] P. RABIER, W. RHEINBOLDT *On singularities of autonomous implicit ordinary differential equations*, IEEE Transactions on circuits and systems, I: Fundamental theory and applications, vol. 50, no. 7, 2003.
- [16] G. REISSIG, BOCHE, H., *On Singularities of Autonomous Implicit Ordinary Differential Equations*. IEEE Transactions on circuits and systems-I: Fundamental theory and applications, vol. 50, no. 7, 2003.
- [17] R. RIAZA, *Stability Issues in Regular and Noncritical Singular DAEs*, Acta Applicandae Mathematicae 73: 301-336, 2002.
- [18] R. RIAZA, *Differential-Algebraic Systems. Analytical Aspects and circuit applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.
- [19] R. RIAZA, P. J. ZUFIRIA, *Stability of Singular Equilibria in Quasilinear Implicit Differential Equations*. Journal of Differential Equations 171, 24-53 (2001)
- [20] R. RIAZA, P. J. ZUFIRIA, *Weak Singularities and the Continuous Newton Method*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 236, 438-462 (1999).
- [21] S. H. STROGATZ, *Nonlinear dynamics and chaos*. Addison-Wesley Publishing Company (1994).
- [22] S. WIGGINS, *Introduction to Dynamical Systems*. Springer. 2003.