Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación

Escrituras en las clases de matemática para explicitar, reorganizar y sistematizar lo aprendido: Análisis de una secuencia

Tesis presentada para obtener el título de
Magíster en Escritura y Alfabetización

Tesista:
Inés Elena Sancha
Profesora en Ciencias de la Educación

Directora:
Claudia Broitman
Doctora en Educación

La Plata, Mayo de 2017

AGRADECIMIENTOS…

A Claudia Broitman, por haberme iniciado en el campo de Didáctica de la Matemática y haberme mostrado la potencialidad de este conocimiento para transformar la escuela, por su generosidad al haber aceptado dirigirme, por sus pacientes y certeras contribuciones en todo el proceso de elaboración de esta tesis, pero sobre todo, por haber confiado en mí, por el aliento permanente, por las invitaciones a "recluirme" para trabajar en mejores condiciones, por su comprensión y cálido apoyo que excedieron ampliamente su rol de directora.

A Mirta Castedo, por sus devoluciones al proyecto de tesis que me permitieron conocer autores esenciales para el marco teórico, por todas las oportunidades para aprender y lo que aportó a mi formación en Didáctica de la Lectura y la Escritura y, principalmente, por haberme enseñado la relevancia del sentido político de esta disciplina.

A Aldana López, Celeste Carli y Cecilia Wall por haberme facilitado el ingreso a la escuela Graduada Joaquín V. González de la UNLP para implementar la secuencia que se analiza en este trabajo; a su directora, Claudia Binaghi, por haber accedido a que "invadamos" la cotidianeidad de la escuela por un tiempo tan prolongado; a los alumnos del grupo de 5° año por haberme permitido entrar en su aula y aprender de sus ideas; a las docentes Soledad Opoca y Bárbara Lacunza por su cooperación en las clases y, muy especialmente, a María de los Ángeles Lastra, "la docente" del grupo, por su excelente disposición y compromiso para participar en esta investigación y por los análisis compartidos que resultaron un valioso aporte para tomar decisiones antes, durante y después de la secuencia.

A David Block, por su lectura rigurosa y comentarios sesudos sobre la planificación de la secuencia; a Mónica Alvarado por sus esclarecedoras orientaciones metodológicas; a Karina Hess Zimmermman, por su invitación a presentar avances de esta tesis en la Maestría en el Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas de la UAQ.

A Gabriela Hoz, por su interés y colaboración permanente desde su rol de tutora y por su lectura crítica de partes de la versión final; a Belén Deladino y Eugenia Heredia, por su paciencia y apoyo como secretarias de la carrera.

A Andrés Colson por su trabajo responsable y su "ojo didáctico" para filmar; a Malena García Blaya por su asistencia indispensable en las desgrabaciones y a Raquel Macciuci por sus ayudas en la redacción.

A Mónica Escobar y Verónica Grimaldi, por sus recomendaciones y colaboración para la escritura de diferentes apartados de la tesis y por estar cerca, como siempre, sosteniéndome en esta tarea.

Al Equipo de la carrera de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria de la UNIPE por las reflexiones compartidas acerca de la escritura académica, especialmente a Graciela Zilberman por haberme facilitado material bibliográfico sobre escrituras en las clases de matemática.

A Roxana Frisón por su acompañamiento imprescindible en este y otros procesos personales.

A Charli, Joaquín, Sofía, Juana, Dante y Antonio (de mayor a menor) por entusiasmarse con mis deseos, por entenderme y esperar con paciencia para compartir nuestras horas.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de investigación nos proponemos indagar el funcionamiento de las situaciones de escritura en las clases de Matemática que tienen el propósito de explicitar, reorganizar y sistematizar conocimientos que circularon a partir de la resolución de problemas.

El proceso de institucionalización que se desarrolla a lo largo de la secuencia involucra diversos intercambios orales y prácticas de lectura y escritura. Entre ellos estudiamos particularmente cómo el proceso de escritura posterior a la resolución de los problemas abona a la conceptualización matemática. Partimos del supuesto de que el conocimiento se transforma en las situaciones de escritura ligadas al proceso de institucionalización y nuestro interrogante principal se refiere al modo en que sucede tal transformación.

La indagación se realiza a través de la implementación y posterior análisis de una secuencia didáctica de Matemática sobre Números Racionales en un aula de 5° año de Nivel Primario.

En el capítulo 1 presentamos el problema de esta investigación y los supuestos y preguntas que la orientan para luego desarrollar los marcos teóricos y conceptuales que referencian el problema, considerando aportes desde la Didáctica de la Matemática y desde la Didáctica de la Escritura. Además, aquí exponemos los resultados del rastreo de antecedentes; particularmente mencionamos estudios sobre situaciones de escritura al servicio del aprendizaje de contenidos de Ciencias Naturales y Ciencias Sociales y de contenidos de Matemática.

En el capítulo 2, dedicado al marco metodológico de esta indagación, describimos las características generales del estudio y luego nos detenemos en cómo se diseñó y se implementó la secuencia didáctica, cuáles fueron las transformaciones que se realizaron sobre la secuencia original y qué estrategias metodológicas se usaron para la recolección y análisis de la información. Finalmente, nos referimos a las dimensiones que se fueron construyendo con el propósito de interpretar la información a partir de los interrogantes de la investigación.

En el capítulo 3 describimos y analizamos la secuencia de situaciones didácticas efectivamente llevada al aula detallando tanto los problemas matemáticos planteados como las situaciones de escritura propuestas.

En el capítulo 4 presentamos el análisis de la información recogida a partir de diferentes insumos. En primer lugar, consideramos los registros de las interacciones que tuvieron lugar en el aula a propósito de la resolución de los problemas de reparto y en torno a las escrituras colectivas. En segundo lugar, analizamos las producciones escritas realizadas por los niños[1] de manera individual y colectiva en las situaciones vinculadas al trabajo de explicitación, reorganización y sistematización de los conocimientos. Aquí intentamos comunicar los datos que hemos construido acerca de cómo se transformaron los conocimientos matemáticos de los alumnos en las situaciones de escritura ligadas al proceso de institucionalización, de qué modos los alumnos retornaron al propio escrito para reutilizar sus ideas en nuevos problemas o para agregar conocimientos que no habían sido incluidos en conclusiones anteriores, qué aspectos se modificaron en el pasaje de los escritos individuales a las producciones colectivas y qué conocimientos se revisaron y se transformaron en las situaciones de reescritura.

En el capítulo 5 presentamos las conclusiones de este estudio poniendo en diálogo las preguntas iniciales con los datos que fuimos construyendo e interpretando en el desarrollo y posterior análisis de la secuencia. Finalmente exponemos algunas reflexiones sobre las contribuciones que este trabajo podría realizar a futuras investigaciones, incluyendo los interrogantes que deja planteados, y algunos aportes que podría ofrecer a las aulas del nivel primario.

[1] Con el fin de evitar la redundancia del uso reiterado del masculino y femenino para designar al colectivo integrado por personas de distintos géneros y producir interferencias en la transmisión del contenido esencial, en esta presentación hemos optado por el uso genérico del masculino en su condición de término no marcado en la oposición masculino/femenino.

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y SUS MARCOS TEÓRICO REFERENCIALES

En este capítulo presentamos en primer lugar el problema y las preguntas que orientan la investigación y luego desarrollamos los marcos teóricos y conceptuales que referencian el problema. Por último, realizamos un estado del arte de los estudios sobre situaciones de escritura al servicio del aprendizaje de contenidos de Ciencias Naturales y Ciencias Sociales y de contenidos de Matemática.

1.1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Las prácticas matemáticas que se desarrollan tanto en la disciplina como en las aulas están necesariamente asociadas a prácticas de lectura y escritura. La escritura ha estado relacionada con la posibilidad de crecimiento de la ciencia matemática. Ha permitido guardar memoria de transacciones comerciales, predecir fenómenos y ejercer el poder que provee el dominio de la letra escrita, argumentar a favor de nuevas maneras de representar más propicias para resolver problemas prácticos, reorganizar y compendiar conocimientos, producir pequeñas o grandes teorías (Broitman y Torres, 2007). En las aulas, al igual que en la disciplina, se lee y se escribe para resolver problemas matemáticos, para elaborar conjeturas y validarlas, para establecer relaciones entre conceptos y sistematizarlos.

Particularmente, la explicitación, la sistematización y la reorganización de conceptos ya reconocidos generan nuevas relaciones, nuevos problemas y constituyen una parte importante del trabajo matemático. En las clases, los alumnos pueden participar en instancias que les permiten clasificar problemas que han resuelto o establecer relaciones entre conocimientos que han venido estudiando y que aparentan ser independientes. Se trata de prácticas que se aproximan a la idea de producir y usar modelos matemáticos. Aquí la escritura ocupa un lugar central; al escribir sobre estas relaciones establecidas es posible distanciarse, objetivar el pensamiento y enfrentarse a exigencias lingüísticas que favorecen el progreso en la conceptualización.

El presente trabajo de investigación intenta indagar el funcionamiento de las situaciones de escritura cuyo propósito es explicitar, reorganizar y sistematizar conocimientos que circularon en clases de Matemática a partir de la resolución de ciertos problemas. Nos detenemos especialmente en cómo el proceso de escritura posterior a la resolución de los problemas abona a la conceptualización matemática, partiendo de la idea de que el conocimiento matemático se transforma cuando se promueven interacciones sociales a propósito de la escritura durante el proceso de institucionalización.

La indagación se realiza a través de la implementación de una secuencia de situaciones de enseñanza de un contenido matemático, los números racionales en su expresión fraccionaria, en una sección de 5° año de Nivel de Educación Primaria. En ella se presentan distintos momentos de resolución de problemas, de intercambio oral acerca de las resoluciones, así como también instancias de explicitación, reorganización y sistematización de conocimientos en situaciones de lectura y escritura diferentes. Se incluyen situaciones de escritura individual, en parejas y colectiva, situaciones de lectura de estas escrituras para recuperar la información y situaciones de revisión y reescritura, todas ellas vinculadas al proceso de institucionalización de los conocimientos matemáticos que circularon en la clase durante la resolución previa de problemas.

1.1.1. ALGUNOS SUPUESTOS E INTERROGANTES QUE ORIENTAN LA INDAGACIÓN

Esta investigación parte del supuesto de que el conocimiento se transforma en las situaciones de escritura ligadas al proceso de institucionalización y su interrogante principal se refiere al modo en que sucede tal transformación en una secuencia didáctica de enseñanza de un contenido matemático particular. Nos centramos en el conocimiento construido de manera colectiva dado que no es nuestra intención primordial examinar los progresos individuales de los niños. Considerando como eje esta cuestión, nos preguntamos específicamente:

- qué características presentan las escrituras de los alumnos acerca de conocimientos matemáticos, realizadas en forma individual, en parejas y de manera colectiva,
- qué semejanzas y diferencias se manifiestan en los conocimientos que se incluyen en las escrituras de conclusiones colectivas en relación con los que se incluyen en las escrituras de conclusiones individuales,
- de qué manera la profundidad y riqueza de la escritura de conclusiones permite atrapar avances en los conocimientos matemáticos de los alumnos,
- de qué modo las situaciones de revisión del escrito propician que los alumnos puedan volver sobre ideas anteriores e interpretar errores y aciertos matemáticos, propios y ajenos,
- qué aspectos del escrito se modifican en las producciones que realizan los niños en situaciones de reescritura de conclusiones sobre aprendizajes matemáticos,
- con qué propósitos es posible promover el retorno sobre las conclusiones colectivas y sobre las escrituras realizadas en la carpeta del alumno en forma individual,

- cómo se generan condiciones para que los alumnos puedan producir escrituras propias tomando decisiones sobre los conocimientos matemáticos que incluyen en ellas,
- cómo inciden las condiciones didácticas en la transformación de conocimientos matemáticos a través de la escritura.

Es importante aclarar que no todas estas preguntas se responden puntualmente pero han marcado una dirección y orientado las cuestiones a analizar.

1.2. MARCOS TEÓRICOS DE REFERENCIA

Para profundizar sobre el problema que se intenta estudiar se considera en primer lugar que el saber a enseñar en la secuencia didáctica implementada involucra prácticas de escritura al servicio de la adquisición de conocimientos matemáticos. Se trata de un saber a enseñar que requiere, para su análisis, de una mirada desde la intersección de dos perspectivas didácticas, la enseñanza de la matemática y la enseñanza de las prácticas del lenguaje, especialmente de la escritura[2]. Por eso, para este apartado se toman teorías provenientes de la Didáctica de la Matemática francesa y marcos referenciales de la Didáctica de la Escritura. Claudia Broitman y Mirta Torres (2007) muestran la necesidad de articulación entre estas disciplinas que se ocupan de la enseñanza de contenidos específicos al explicar que:

> *[…] La escritura en la resolución de problemas matemáticos constituye un punto de apoyo para la propia acción, para controlar los pasos intermedios, para elaborar conjeturas en el proceso de producción, para comprobar los resultados, y a la vez, permite dejar huella para la comunicación a otros y para la conservación de los conocimientos elaborados. El quehacer matemático involucra determinar la validez de las conjeturas producidas en el proceso de resolución, es decir recurrir a conocimientos matemáticos para decidir si una afirmación, una relación o un resultado son o no válidos y bajo qué condiciones. Elaborar e interpretar conjeturas sobre los objetos matemáticos a partir de los problemas y las interacciones a propósito de los mismos, ayuda a tomar conciencia y objetivar las ideas que se van elaborando. Se trata de explicitar los modelos implícitos, los supuestos subyacentes a los procedimientos de resolución utilizados para hacer frente a un problema nuevo. La escritura hace posible registrar las conjeturas que se van produciendo y guardar memoria de ellas. Al pasar de lo implícito a lo explícito por escrito se requiere considerar el campo de validez de*

[2] Este tipo de investigaciones pueden considerarse como codidácticas, dado que implican un espacio de construcción compartida entre la Didáctica de la Matemática y la Didáctica de la Escritura.

esas ideas y se impone la necesidad de determinar las limitaciones de los conceptos. Poner en palabras obliga a reorganizar el pensamiento y hacerlo a través de la escritura permite además revisar y volver sobre esas conjeturas. (Broitman y Torres, 2007)

1.2.1. Aportes desde la Didáctica de la Matemática

La indagación se inscribe en la perspectiva de Didáctica de la Matemática sostenida fundamentalmente por la comunidad francesa que concibe a las matemáticas como un producto cultural y social que está en permanente transformación y que ha sido construido a través del trabajo de la humanidad al enfrentarse a diferentes clases de problemas. Las matemáticas no preceden a los hombres para que éstos las "descubran"; son productos culturales que resultan de las interacciones entre las personas y que están condicionados tanto por los problemas como por las normas de trabajo de cada época o cultura. Desde esta perspectiva, la enseñanza de las matemáticas no busca solamente transmitir conocimientos matemáticos ya producidos por la humanidad, sino generar condiciones para involucrar a los alumnos en la actividad matemática y propiciar que se apropien tanto de las maneras específicas de pensar y producir en esta disciplina como de algunos de los objetos matemáticos (Artigue, 1986; Charlot, 1991; Charnay, 1994; Sadovsky y Sessa, 2005; Sessa y Giuliani, 2008; Broitman, 2012). El estudio de las matemáticas en la escuela, entonces, involucra un proceso de producción de conocimientos en el marco de un trabajo colectivo en el que los conceptos se reestructuran progresivamente. Para ello, se parte del supuesto de que participar en prácticas matemáticas favorece la constitución del sentido de los conocimientos. En esta línea de pensamiento, Bernard Charlot afirma:

> *A esta idea de una matemática dada, opongo la idea de matemática construida, diría incluso, utilizando aquí de una manera un poco provocativa el vocabulario de la técnica, matemática fabricada. La actividad matemática no es mirar y descubrir. Es crear, producir, fabricar. Los conceptos matemáticos no son un bien cultural transmitido hereditariamente como don o socialmente como capital, sino el resultado de un trabajo del pensamiento: el de los matemáticos a través de la historia, el del niño a través de su aprendizaje.* (Charlot, 1991:3)

Desde esta concepción de enseñanza de la matemática, marco del presente estudio, la matemática aparece como una práctica intelectual accesible a todas las personas y no como una actividad que se reserva solo a aquellas personas que cuentan con ciertas condiciones genéticas o sociales para realizarlas, supuesto que subyace –aunque a veces de manera implícita- a otras perspectivas. El establecimiento de vínculos entre el proceso de producción de conocimientos de los matemáticos a través de la historia y el de los niños a través de su aprendizaje permite reconocer en las prácticas de comunicación de los matemáticos un marco de referencia para interpretar las escrituras que los niños realizan para explicitar, sistematizar o reorganizar lo aprendido.

La Didáctica de la Matemática adopta las ideas de Jean Piaget sobre la concepción de aprendizaje, particularmente su Teoría de la Equilibración, que permite explicar cómo un sujeto pasa de un estado de menor conocimiento a otro de mayor conocimiento (Piaget, 1970; García, 2001). Para este autor el conocimiento es siempre un proceso que supone una elaboración nueva que no está predeterminada en las estructuras internas del sujeto ni en los caracteres preexistentes del objeto. Lo distintivo de este planteo epistemológico es que pretende remontarse a la génesis de los conocimientos, de los que la epistemología tradicional sólo conoce los estados superiores. Su propósito es descubrir los distintos tipos de conocimiento, desde sus formas más elementales y seguir su desarrollo en los niveles ulteriores, inclusive hasta el pensamiento científico. Al postular la continuidad en la construcción del conocimiento desde el niño hasta el científico, Piaget encuentra en la historia de la ciencia los procesos que revelan esa continuidad (García, 2001). En algunos casos esta vinculación se refiere al contenido mismo de las nociones y en otros el vínculo se encuentra en los instrumentos y mecanismos comunes en su construcción, por ejemplo, las abstracciones y generalizaciones.

La epistemología piagetiana aportó una visión innovadora acerca del sujeto que construye el conocimiento: el hombre al interactuar con el mundo le otorga significación y estructura sus esquemas de conocimiento a través de un proceso interactivo que supone creatividad, ya no se trata de un receptor pasivo de percepciones de una realidad dada e inamovible, sino de un constructor de conceptualizaciones y teorizaciones que le permiten estructurar sus interacciones con la realidad (García, 2001).

Las ideas piagetianas asumidas por la Didáctica de la Matemática francesa permiten interpretar los procesos constructivos de los alumnos que suceden en el desarrollo de la secuencia de enseñanza que se implementa en el presente estudio. Estas interpretaciones a su vez, constituyen uno de los puntos de apoyo para pensar modos de intervenir en las clases que posibiliten la explicitación, reorganización y sistematización de los conocimientos.

Entre las teorías producidas por la Didáctica de la Matemática se consideran como un importante marco de referencia los aportes de la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau (1986, 1988, 2007). A partir de ideas consistentes con la concepción de matemática mencionada y con la perspectiva epistemológica piagetiana, esta teoría modeliza la enseñanza y enuncia características que deberían reunir las situaciones didácticas para que los alumnos produzcan, formulen y validen sus conocimientos matemáticos. Desde este marco se considera que el aprendizaje se produce por adaptación a un medio resistente y que los alumnos deben enfrentarse a situaciones nuevas para poner en juego los conocimientos disponibles y construir otros nuevos, en un proceso que involucra equilibrios y desequilibrios. Se busca que el alumno interactúe de manera autónoma con la situación como si ésta no estuviera cargada de intenciones didácticas -por eso Brousseau las llama situaciones a-didácticas- comportándose en tal entorno como "sujeto matemático" y no solo como "sujeto alumno".

El autor traza una tipología de las situaciones a-didácticas distinguiendo situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización, a partir de un análisis epistemológico de la actividad matemática. Particularmente, de esta caracterización nos interesa para el presente estudio la noción de *situación de formulación* como aquella en la que se suscitan intercambios de informaciones codificadas en un lenguaje y que permite que un conocimiento implícito en la acción cambie sus posibilidades de tratamiento, aprendizaje y adquisición:

> *La formulación de un conocimiento correspondería a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico). (…) La formulación de los conocimientos pone en juego repertorios lingüísticos diversos (sintaxis y vocabulario). La adquisición de tales repertorios acompaña a la de los conocimientos que enuncian pero ambos procesos son distintos.* (Brousseau, 2007:25-26)

Desde el mismo encuadre teórico, Marie-Lise Peltier-Barbier (2006) valora ciertas prácticas docentes durante la gestión de la formulación en la clase ya que pueden aportar una ayuda a los alumnos. El docente puede organizar las intervenciones de sus alumnos para permitir a cada uno reconocer su trabajo en una historia colectiva ficticia de la búsqueda de la solución:

> *Se trata (…) de un apuntalamiento al nivel de la formulación: el profesor que reformula con palabras y frases accesibles a toda la clase los elementos de las respuestas -a veces muy torpes e incompletas- propuestas por los distintos alumnos. Es entonces bajo la forma de una mayéutica muy controlada que el docente hace construir colectivamente el resumen correspondiente al trabajo efectuado durante la clase.* (Peltier-Barbier, 2006:9)

En las interacciones que suceden en el aula, a raíz de la resolución y análisis de diferentes problemas, los alumnos explicitan las ideas que elaboran, las respuestas que encuentran, las relaciones que establecen, aunque no puedan dar garantías desde el comienzo acerca de su certeza. Delia Lerner (s/f) reflexiona sobre este proceso y señala que

> *[…] La explicitación puede entenderse como un proceso de toma de conciencia didácticamente promovido, proceso que desemboca en la definición e institucionalización de un saber matemático. (…) Explicitar [sirve entre otras cosas] para organizar y reorganizar los saberes matemáticos que se van construyendo y para aproximarse a comprender el quehacer del matemático.* (Lerner, s/f:8)

Si bien ciertas situaciones de escritura que forman parte de la secuencia implementada en nuestra indagación no son precisamente situaciones a-didácticas de formulación, el concepto nos permite seguir pensando sobre cómo se transforman los conocimientos al ponerlos en palabras para explicitarlos o formularlos por escrito.

Ahora bien, para que el alumno logre desempeñarse como "sujeto matemático" el docente debe responsabilizarse de la *devolución* que consiste en introducir y sostener el trabajo autónomo del alumno frente a un problema. Ejerciendo este rol, el maestro evita en sus intervenciones proponer los conocimientos que intenta que el alumno produzca:

> *El trabajo del docente consiste pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta y los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio y no a un deseo del maestro. Hay una gran diferencia entre adaptarse a un problema que plantea el medio, insoslayable, y adaptarse al deseo del docente. La significación del conocimiento es completamente diferente.* (Brousseau, 1994b:66)

El otro papel esencial atribuido al docente por Brousseau se vincula con el proceso de transformación de los conocimientos producidos por quien está aprendiendo en saberes legitimados por la comunidad científica, se trata del rol de *institucionalización*. El autor señala que desde este rol el maestro da un estatuto a los conocimientos que circularon en la clase, los asume como objeto de enseñanza, los identifica y relaciona con otros conocimientos estudiados e indica que ellos pueden ser reutilizados:

> *La consideración "oficial" del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: ese doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización.* (Brousseau, 1988:74)

Los conocimientos que se institucionalizan pueden tener mayor o menor distancia con el saber. El autor plantea que la institucionalización puede caracterizarse como "local" cuando está más próxima al conocimiento producido en la clase pero todavía resulta muy distante de la versión oficial a la que se intenta que el alumno se aproxime. Un ejemplo de institucionalización local lo constituyen la explicitación y sistematización escrita de procedimientos utilizados para resolver un tipo de problemas.

Si bien en un inicio de la formulación de la teoría el rol de institucionalización correspondía a un "momento" en el marco de una situación de enseñanza, estudios posteriores (Perrin Glorian, 1995; Margolinas, 1993) han avanzado en la conceptualización del rol del docente y conciben la devolución y la institucionalización como procesos de negociación con los alumnos que se sostienen durante toda la situación didáctica de manera complementaria. Se trata de procesos que son contemporáneos y se encuentran profundamente imbricados:

> *Estas reflexiones me llevan a considerar también la institucionalización como un proceso que se desarrolla a lo largo de la enseñanza, un motor del avance del contrato didáctico y no como una fase al final del proceso donde el maestro da su clase. La institucionalización de los conocimientos comienza desde el inicio mismo de la devolución, ya que el docente tiene que darle al alumno, si éste no lo tiene, el proyecto de adquirir esos conocimientos; de allí la imbricación de los procesos de devolución y de institucionalización que son de este modo, en cierta medida, contemporáneos. (…) Devolución e institucionalización son así los dos procesos complementarios respecto de los cuales el maestro va a intentar controlar la adquisición por parte de los alumnos de las nociones matemáticas con su sentido: la devolución para que ellos se comprometan realmente en la resolución de los problemas, la institucionalización para que los alumnos sepan en lo que pusieron en juego, a qué se apuntaba y que habrá que retener.* (Perrin-Glorian, 1995:14)

Profundizando estas ideas, Patricia Sadovsky (2005) rescata el concepto de proyecto de aprendizaje como proceso que permite la descontextualización de los conocimientos que el alumno va a producir y que requiere de la colaboración del maestro. Advierte que la construcción de este proyecto por parte del alumno no solamente está motorizada por el deseo de aprender:

> *Un proyecto de aprendizaje supone un futuro que se inscribe en el pasado y el presente escolar. El proyecto del alumno de aprender al interactuar con una situación particular, toma necesariamente en cuenta la representación que él tiene hasta el momento del*

saber cultural que estructura los objetos matemáticos con los que está tratando. Esa representación a su vez se nutre de aquello que el alumno ha ido organizando y estructurando como producto de su práctica escolar. Esa imagen cultural que el alumno elaboró, que incluye las expectativas que el sujeto piensa que se tienen sobre él respecto del conocimiento en cuestión (¿qué quieren que aprenda con esto?, ¿qué tiene que ver esto con los problemas que hicimos antes?, etc.), interviene y condiciona su producción. (Sadovsky, 2005:45)

La Teoría de Situaciones aporta a este estudio la caracterización de las situaciones de enseñanza que generan condiciones para que los alumnos produzcan, expliciten y validen sus conocimientos. Este conjunto de características sirve como una modelización para definir la secuencia que se presenta y producir los ajustes necesarios durante la puesta en aula. Otra contribución de los estudios realizados en el marco de esta teoría consiste en plantear que el alumno puede asumir su propio proyecto de adquisición de conocimientos y que es el maestro el responsable de generar las condiciones para que esto suceda. Además, el concepto de institucionalización como proceso es central para esta investigación, dado que se pretende analizar cómo funcionan las situaciones de escritura que se van proponiendo en el desarrollo de la secuencia de enseñanza con la finalidad de explicitar, reorganizar y sistematizar lo aprendido.

Otro aporte para la presente indagación proveniente de la Teoría de Situaciones, vinculado al proceso de institucionalización, es el concepto de *memoria didáctica*. Guy Brousseau y Julia Centeno (1991) han mostrado que sostener la memoria didáctica evocando la experiencia matemática de los alumnos con relación a conceptos cercanos a los que se están trabajando incide fuertemente en sus aprendizajes. Se trata de un concepto que ha permitido identificar fenómenos vinculados al tiempo didáctico, a su progresión y a la transformación de los conocimientos en saberes por la gestión de la institucionalización del docente.

[…] El funcionamiento de la memoria didáctica incide en la comprensión de las cuestiones matemáticas debido a que el efecto de la memoria didáctica del sistema en el alumno es darle la posibilidad de movilizar un saber que él no poseía por completo, un saber que él no habría utilizado solo y que le va a permitir dar sentido a la cuestión de la que se ocupa.

El funcionamiento de la memoria didáctica podría mejorar si damos a los maestros un cierto número de conocimientos didácticos para que ellos puedan atender a lo que todavía no ha sido aprendido por el alumno, pero que ha sido una experiencia vivida *por él. El maestro podría entonces recontextualizar los conocimientos durante el aprendizaje.* (Brousseau y Centeno, 1991:205)

Los autores ponen de relieve la necesidad de tener en cuenta desde la enseñanza, no solamente las enunciaciones descontextualizadas que los alumnos hayan podido estudiar a manera de saberes, vinculadas con cierto concepto a enseñar, sino también lo que concretamente hayan hecho al respecto, en términos de conocimientos, o las situaciones específicas que les permitieron aprenderlo:

El aprendizaje y la puesta en práctica de los saberes enseñados institucionalizados, está acompañado por un entorno de conocimientos cuya activación depende de la presencia o de la ausencia de ciertas condiciones. Los conocimientos son los medios a menudo implícitos de la acción, del procesamiento de la información o del razonamiento, por oposición a los saberes, que son los objetos visibles de las transacciones didácticas. La mejor representación de los conocimientos podría ser el recuerdo de las situaciones en las que se han verificado.

A menudo la interpretación y el buen empleo por parte del profesor de las producciones del alumno, son debidos a su conocimiento del contexto y del pasado de ese alumno: no lo que sabe sino lo que conoce. (…) Esta "memoria" del profesor es indispensable para la actividad del alumno. Únicamente los saberes mejor "decantados" pueden abstenerse de un apoyo. Los saberes más nuevos son aquellos que dependen más de ese halo de conocimientos particulares. (Brousseau, 1994a:28-29)

En este estudio, las escrituras producidas en las situaciones de enseñanza para explicitar, reorganizar y sistematizar los conocimientos matemáticos resultan un punto de apoyo para el sostenimiento de la memoria didáctica de los alumnos a lo largo de la secuencia implementada. El hecho de que sean ellos quienes escriben soslaya los modos únicos de referirse a los objetos matemáticos, de manera que los alumnos pueden reconocerlos en diferentes circunstancias. Por otra parte, el proceso de escritura exige plantear diferentes instancias de evocación de situaciones ya tratadas sin volver a resolver los mismos problemas. Los alumnos a través de estas instancias tienen la oportunidad de volver a discutir el sentido y el estatuto de los conocimientos en juego.

Otra contribución proveniente del marco teórico descripto es cómo se conciben los errores que producen los niños al interactuar con nuevos objetos matemáticos. La Didáctica de la Matemática, tomando los aportes de la Psicología Genética, plantea que los errores son la expresión de una forma de conocimiento que resulta de un proceso constructivo y superarlos forma parte de tal proceso (Brousseau, 1986; Chevallard, 1997).

Desde la perspectiva piagetiana, el aprendizaje es un proceso de reconstrucciones sucesivas de las concepciones del alumno mediante procesos de desequilibrio y reequilibración. Aprender implica atravesar un tiempo en el que se ven fracasar las concepciones insuficientes. Los errores, entonces, no reflejan la ausencia de saber, sino que constituyen modos de saber que resultan de un proceso constructivo.

Brousseau (1986) plantea que en la enseñanza clásica de la matemática fueron dejados de lado los errores y dificultades propios de la disciplina, ocultándose las condiciones de producción del conocimiento, y afirma que se dio prioridad a la transmisión de ciertos saberes, ya sistematizados por los matemáticos. Pero los errores están necesariamente presentes en el proceso de producción de conocimientos. Una parte significativa de la actividad de un matemático consiste en verificar si la respuesta que se ha encontrado para un problema tiene sentido y controlar su corrección. Los matemáticos validan y rectifican sus resultados, realizan constantemente una actividad de autocorrección (Margolinas, 1993).

La Didáctica de la Matemática se ha preocupado por el estudio de los errores, por comprender sus orígenes diferentes, por organizar las condiciones didácticas que favorecen su análisis, la discusión alrededor de los mismos o su rechazo. Una cuestión central en la enseñanza está dada por la posibilidad de que los alumnos puedan poner en juego sus conocimientos viejos para abordar un nuevo problema matemático. Esto implica dar oportunidades para que los niños “pongan en acto” sus ideas implícitas, para que usen sus conocimientos extraescolares como punto de partida hacia lo nuevo, para que hagan funcionar sus conocimientos aunque sean erróneos. La enseñanza deberá organizarse, para que, a partir de sus conocimientos asistemáticos, intuitivos, extraescolares, erróneos, los niños puedan producir y reconocer algo nuevo (Broitman, 1999).

Los estudios sobre los errores han permitido comprender que no todos tienen el mismo origen. Roland Charnay (1990) encuentra errores que son “reproducibles” en los alumnos, que tienen cierta persistencia y no se deben a la distracción; son errores que pueden ponerse en relación con otros con los cuales forman una red o sistema de errores. Brousseau distingue algunos posibles tipos de obstáculos que pueden constituirse en causa de producción de errores por parte de los alumnos en su aprendizaje de la matemática: ontogenético, cultural, epistemológico y de origen didáctico. Entre ellos, se toman particularmente los de origen epistemológico como contribución al marco teórico del presente estudio.

Los obstáculos de origen epistemológico responden a un conjunto de conocimientos locales que los niños han construido. No se trata de errores aislados sino de verdaderas teorías que ellos elaboran y que se constituyen en obstáculos en la adquisición de nuevos conocimientos. Estas ideas de algún modo son similares -en cuanto a su modo de limitar u obstaculizar avances posteriores- a la génesis histórica de algunos conocimientos matemáticos. Dichas concepciones tienen un campo de eficacia, es decir funcionan para un número limitado de casos. Son conocimientos estables y por lo tanto costosos de abandonar (Broitman, 1999).

Además de significar un aporte para comprender el proceso de aprendizaje de los sujetos, el concepto de obstáculo epistemológico adquiere relevancia en este estudio porque el contenido seleccionado para la secuencia didáctica implementada, los números racionales, es un campo de contenidos complejo que supone una ruptura esencial con relación a los conocimientos que los niños han elaborado acerca de los números naturales en años anteriores (Centeno Pérez, 1988). Ideas sobre las propiedades de los números y las operaciones que han construido a propósito de los números naturales provocan errores resistentes cuando se extienden a los racionales. Estos conocimientos -o, desde la perspectiva de Artigue (1986), el mecanismo de generalización abusiva utilizado en el proceso de aprendizaje-, estarían funcionando como obstáculo epistemológico para que los alumnos puedan comprender el funcionamiento de este campo numérico, nuevo para ellos.

Al considerar el contenido de enseñanza involucrado en la secuencia que se lleva al aula en esta investigación se hace necesario tomar como referencia la Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud (1990). Este autor parte de la idea de que un concepto no puede ser reducido a su definición si se está interesado en su aprendizaje y en su enseñanza, dado que adquiere sentido para un sujeto a través de las situaciones y de los problemas con los que se enfrenta. Para este autor, un campo conceptual es un conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica esquemas, conceptos y teoremas relacionados, así como diferentes formas de representación asociadas. Esta noción permite analizar las diferentes tareas cognitivas que intervienen en las situaciones. Una de las funciones del estudio de un campo conceptual consiste en inventariar una gama de problemas y representaciones, asociadas con cada operación, y considerar en términos didácticos un proceso de construcción de los conceptos a largo plazo.

Las ideas de Vergnaud son tomadas en esta investigación para analizar la diversidad de sentidos del concepto de fracción y para seleccionar problemas de acuerdo al sentido que representan. La noción de campo conceptual permite interpretar los diferentes procedimientos infantiles en términos de la complejidad de la tarea cognitiva involucrada y promover el establecimiento de relaciones entre conceptos vinculados a los números racionales.

Otra contribución sustancial para esta investigación es tomada de la Teoría Antropológica de lo Didáctico planteada por Yves Chevallard (1997). El autor reformula las preguntas que se realizó a propósito del estudio de la transposición didáctica y, trascendiendo la enseñanza escolar de las matemáticas, analiza los procesos que suceden cuando los objetos o prácticas matemáticas viven en otras instituciones que las que le dieron origen. En esta teoría, Chevallard plantea que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son aspectos particulares del proceso de estudio de las matemáticas, entendiendo la palabra “estudio” en un sentido amplio que engloba tanto el trabajo matemático del alumno, como el del matemático profesional que también “estudia” problemas de matemáticas. El proceso de estudio no es homogéneo sino que está estructurado en diferentes momentos que no hacen referencia a un período cronológico preciso sino a dimensiones o aspectos de la actividad de estudio. Así, habría momentos exploratorios en relación a un determinado tipo de problemas, en los que se construye una técnica adecuada para abordarlos; momentos de dominio, puesta a punto y nueva creación de técnicas matemáticas; momentos tecnológico-teóricos que involucran la justificación de la práctica matemática y momentos de institucionalización y evaluación que se refieren a la obra matemática en su conjunto.

Conceptualizar el proceso de estudio como parte fundamental del proyecto educativo en oposición a la idea de que el aprendizaje se produce necesariamente como consecuencia inmediata de la enseñanza, resulta un aporte sumamente fértil para esta indagación. Particularmente resulta interesante el momento de institucionalización y evaluación de la obra matemática, dado que las situaciones de escritura que se incluyen en la secuencia de enseñanza pretenden formar parte de este proceso.

Al considerar en esta indagación las prácticas de escritura que se despliegan con el objeto de reorganizar y sistematizar lo aprendido, también resultan fértiles algunos aportes teóricos que analizan el rol de las representaciones en la disciplina matemática. En el trabajo matemático la resolución de problemas constituye el “motor” que provoca la producción de avances (Charnay, 1994; Brousseau, 1986). Esta actividad involucra un trabajo de tipo exploratorio de prueba, ensayo y toma de decisiones sobre los caminos de solución que requiere necesariamente de representaciones semióticas. En esta línea, Raymond Duval (2006) señala que los objetos matemáticos aparecen de manera inevitable en un “contexto de representación”. Por tratarse de objetos que no forman parte de la realidad en sentido físico tienen existencia a través de sus representaciones y es tarea de los alumnos reconocer el mismo objeto matemático en diferentes contextos de representación. Es así como parte del trabajo matemático involucra la búsqueda de un modo de representar el problema que resulte pertinente para su tratamiento.

Vergnaud (1990) también describe a la matemática como una construcción conceptual que se expresa a través de un sistema de representaciones y plantea que en su comprensión y en su producción resulta central el papel que juegan los significantes y la organización del discurso. El lenguaje está presente en diferentes aspectos de la actividad matemática: es un medio esencial en la designación e identificación de los objetos matemáticos, sus propiedades y relaciones, interviene tanto en el razonamiento como en la inferencia y ayuda en la anticipación de efectos, en la planificación y el control de la acción. La clasificación clásica de las funciones del lenguaje como medio de comunicación y de representación no sería suficiente para abarcar estos aspectos; es necesario considerar especialmente la función del lenguaje como ayuda del pensamiento y como organización de la acción. El autor señala que

> *[…] No es en cualquier circunstancia que un individuo acompaña su acción de una actividad lingüística, sino más bien cuando tiene necesidad de planificar y de controlar una serie de acciones insuficientemente dominadas. (…) Se puede evocar todavía el ejemplo del aprendizaje de las maniobras de conducción de un coche: un principiante verbaliza voluntariamente lo que hace o lo que va a hacer; algunas semanas más tarde no tiene necesidad de ello. La actividad lingüística favorece evidentemente la realización de la tarea y la resolución del problema encontrado; sin el cual no intervendrían.* (Vergnaud, 1990:16 versión mimeografiada)

Del mismo modo, el lenguaje y los símbolos matemáticos intervienen en el descubrimiento de relaciones, la organización temporal de la acción y su control; juegan por tanto, un papel fundamental en la conceptualización. Además, Vergnaud advierte, tomando a Regine Douady (1986), que es necesario contemplar las formas lingüísticas en tanto permiten desplegar la actividad metacognitiva propia del aprendizaje de la racionalidad científica porque éstas contribuyen en la transformación de las herramientas o categorías de pensamiento matemático en objetos matemáticos.

1.2.2. Aportes desde la Didáctica de la Escritura

Como marco referencial de la Didáctica de la Escritura se consideran los aportes del enfoque de base psicogenética que comparte los supuestos epistemológicos que se consideraron para el marco teórico de la Didáctica de la Matemática.

Los estudios de Emilia Ferreiro y Ana Teberosky (1979) mostraron que los niños construyen ideas originales y sistemáticas sobre la escritura y las ponen en acción al intentar interpretarla y al producirla por sí mismos. Otros estudios posteriores (Ferreiro, 1991; Pontecorvo, 2002) también evidenciaron que los niños tienen ideas propias sobre las características de diversos tipos de textos y pueden plasmarlas en sus producciones escritas. Si bien estas investigaciones no buscaron resolver problemas didácticos, permitieron considerar la transformación de la comprensión del objeto de conocimiento por parte de los niños para reformular interrogantes sobre la enseñanza y sobre qué tienen que aprender los niños en la escuela o de qué manera generar condiciones en las aulas para que tales contenidos sean aprendidos. Mirta Castedo (2003) señala que a partir de estas ideas surgieron estudios que coinciden en plantear que las situaciones didácticas habituales para enseñar a escribir no se corresponden con los conocimientos actuales sobre los procesos de producción de textos, tanto desde el punto de vista histórico cultural como desde la perspectiva psicológica. También menciona estudios que se vienen desarrollando, en oposición a las concepciones que sustentan la enseñanza habitual, y que coinciden en sostener que:

> *[…] El saber escribir puede ser objeto de enseñanza y de aprendizaje a través de reemplazar la enseñanza de la "redacción escolar" por la de la producción escrita –de acuerdo con las teorías de la actividad redaccional-. Esto se plantea porque se entiende a la escritura como un proceso cognitivo inserto en un contexto histórico y social, escribir es entrar en una comunidad de discurso donde se desarrollan procesos en contextos específicos y enseñar a escribir es enseñar a participar en esa comunidad con tareas auténticas y en interacción con los otros.* (Castedo, 2003:19)

Entender la escritura como un proceso inserto en un contexto histórico y social supone concebirla como una práctica del lenguaje que se adquiere formando parte de una comunidad de escritores (Chartier y Hébrard, 2000; Olson, 1995). Al definir el objeto de enseñanza desde esta perspectiva se impone la pregunta acerca de cuáles son las condiciones que hacen posible la práctica de la escritura en el ámbito escolar. Fue por ello que en el diseño e implementación de la secuencia de enseñanza desarrollada en el presente trabajo se intentó sostener las condiciones didácticas propuestas por Lerner (1996) para este fin:

> *Instalar la práctica de la escritura en la escuela –promover efectivamente la formación de escritores competentes- supone ofrecer a los alumnos un ámbito en el que escribir tiene sentido porque es el medio más apropiado para cumplir determinados propósitos, porque se escribe para destinatarios con quienes es deseable comunicarse, a quienes se quiere hacer un pedido, informar o convencer…*
>
> *(…) Al proponer situaciones de producción de textos, se crean las condiciones que permiten a los alumnos apropiarse del proceso de escritura, es decir:*
>
> - *Planificar sus textos: decidir quién es el destinatario de sus producciones y qué efectos pretenden lograr sobre él, buscar y seleccionar la información que necesitan*

para escribir, definir (a grandes rasgos) cómo va a empezar el texto, con qué se va a seguir y cómo se lo va a terminar;

- *Hacer consultas –mientras escriben- con el maestro o con los compañeros, recurrir a materiales escritos para buscar información sobre el contenido acerca del cual se está escribiendo o para resolver dudas (…)*
- *Releer durante la producción lo que ya se ha escrito, para sostener la coherencia del texto y para ir haciendo las modificaciones que se consideren necesarias;*
- *Escribir en borrador y hacer modificaciones (e incluso diferentes versiones) hasta lograr un texto satisfactorio para el autor;*
- *Revisar globalmente el texto después de haber terminado una versión aceptable y efectuar las reorganizaciones y correcciones necesarias; (…).* (Lerner, 1996:39-40)

La propuesta de incluir situaciones de escritura en las clases de matemática involucra el supuesto de que el proceso de escritura favorece la transformación de conocimientos. Teberosky (2001) sostiene que tanto la escritura como el lenguaje oral cumplen funciones de representación y comunicación, pero la escritura permite la objetivación del lenguaje e incide sobre su productor, su conocimiento sobre él mismo y sobre el mundo:

> *[…] Al igual que el lenguaje oral, el escrito cumple las funciones de representación y comunicación. Pero a diferencia del lenguaje oral, el escrito permite la objetivación del lenguaje (de la memoria, el tiempo, el espacio). Las funciones de la escritura de registro son funciones relacionadas con la memoria y comunicación, podríamos decir que son funciones hacia afuera de la escritura, hacia el mundo. Son funciones instrumentales, medios para un fin. En cambio, la objetivación no deriva del uso como instrumento sino del efecto del uso de la escritura en tanto objeto material: de la posibilidad de distanciamiento entre el productor y su producto. Cuando el mensaje no sólo es un medio sino que asume la calidad de un objeto, el productor se ve afectado por sus propios productos.* (Teberosky, 2001:320-321)

Retomando estos conceptos Mariana Miras (2000) distingue la función epistémica o heurística de la escritura, como función específica o posible subfunción en el marco de la función representativa, y subraya su potencia "… como instrumento de toma de conciencia y de autorregulación intelectual y, en último término, como instrumento para el desarrollo y la construcción del propio pensamiento". De este modo, argumenta que las producciones escritas, y en especial los procesos que el escritor utiliza al componer un texto, hacen posible o facilitan el aprendizaje, el desarrollo del conocimiento sobre nosotros mismos y sobre la realidad. La escritura no sería una herramienta únicamente capaz de plasmar conocimiento, sino también de desarrollarlo.

La autora hipotetiza que para ser capaz de escribir de manera reflexiva y aprender a través de la escritura, el escritor debe poseer un conjunto de conocimientos discursivos suficientes para crear el espacio del problema retórico y trabajar en él, así presupone un cierto nivel de dominio de las habilidades que se requieren para sostener el proceso de composición. Pero agrega que “la escritura reflexiva parece requerir algo más que un dominio suficiente de las estrategias de composición, la posibilidad de escribir reflexivamente también está relacionada con el nivel de conocimientos que el escritor tiene sobre el contenido o tema del texto”.

Miras revisa algunos de los modelos de composición escrita que se han propuesto, apoyados en una conceptualización inspirada por la psicología cognitiva. Se refiere al modelo de Flower y Hayes (1980) que plantea que “El escritor pone en funcionamiento una serie de estrategias o procedimientos heurísticos con la finalidad de delimitar el problema y tratar de acotar las posibles vías de solución”. Las actividades que utiliza el escritor son: planificar, textualizar y revisar, que a su vez se ven mediadas por la memoria a largo plazo y el contexto de producción en que se inserta. Por su parte, Claudine García-Debanc y Michel Fayol (2002-2003) valoran el modelo de Flower y Hayes como el más difundido en didáctica de la escritura porque propició avances indiscutibles, especialmente porque permitió desplazar la atención del análisis lingüístico de los escritos producidos a la consideración del proceso redaccional. Estos investigadores reconocen que las operaciones de planificación y de revisión están ampliamente desarrolladas aunque no ocurre lo mismo con las de textualización. Sin embargo, predicen que este modelo puede ayudar al docente a regular las actividades propuestas para el aprendizaje de la escritura.

Miras también se refiere a los modelos de Bereiter y Scardamalia (1987), “decir el conocimiento” y “transformar el conocimiento”. En el primero encuentra que “el escritor se limita a reproducir el conocimiento que ya posee, aquél que ya es capaz de utilizar y, en este sentido, la composición escrita no supone un reto o una ayuda para elaborar y hacer avanzar sus conocimientos”. En el segundo, “el escritor realiza un análisis de la tarea y trata de dotarse de unos objetivos concretos para componer el texto”. Aquí se destaca la importancia de “problematizar” la escritura y de establecer unos objetivos precisos. El escritor que utiliza esta estrategia no solo aprende acerca de lo que escribe sino también aprende a escribir, lo que explicita el carácter epistémico de la escritura:

> *Se generan dos "espacio-problema", el espacio-problema del contenido (el qué decir) y el espacio-problema retórico (con qué intención y cómo decirlo). En estos espacios se producen respectivamente las operaciones que modifican el conocimiento del escritor y las que modifican el texto y los propios objetivos del escritor.* (Miras, 2000:73)

La autora reconoce que la enseñanza y el aprendizaje de la escritura reflexiva en el contexto escolar plantean numerosos interrogantes y problemas, pero vincula el pasaje del modelo de escritura del "decir" al de "transformar" el conocimiento con estos procesos:

> *(…) son los distintos tipos de procesos de aprendizaje de la escritura los responsables del cambio de una a otra estrategia" (…) "Dado que estos procesos de aprendizaje en la mayoría de las culturas tienen lugar fundamentalmente en el contexto escolar, tiene sentido preguntarse sobre el posible papel de la enseñanza en el aprendizaje de la escritura reflexiva.* (Miras, 2000:76)

El acceso al desarrollo del proceso de producción escrita y a las operaciones que realizan los alumnos en la elaboración de un texto se hace posible en las situaciones de escritura en colaboración. Anna Camps, Oriol Guasch, Marta Milian y Teresa Ribas (2007) han estudiado la interacción oral que tiene lugar en grupos de alumnos para crear un discurso común en una composición escrita. El análisis que realizan estos investigadores permite atrapar las estrategias que siguen los alumnos para resolver los problemas que se les presentan en la composición y los diferentes momentos del proceso que se hacen explícitos a partir del discurso oral compartido.

Resulta de interés para el presente trabajo la distinción que realizan entre los conceptos de *texto intentado* y de texto escrito, así como también, la idea de reformulación para interpretar las operaciones que realizan los alumnos en las situaciones de escritura colectiva que forman parte de la secuencia implementada. Los autores conciben como texto intentado a "las propuestas del texto escrito formuladas en función de los receptores del texto, pero enunciadas oralmente durante la interacción del grupo a fin de someterlas a consideración de los compañeros y del mismo enunciador antes de darles forma gráfica" (Camps et al., 2007:5).

Otros estudios que también constituyen una referencia conceptual para la presente investigación son los que se han ocupado de la enseñanza y el aprendizaje de la escritura como herramienta para la apropiación de contenidos escolares de algunas disciplinas específicas. Estos parten de la idea de que la producción de escritos por parte de los alumnos puede jugar un papel decisivo en la elaboración del pensamiento, así como facilitar la puesta en juego de las ideas propias y su transformación progresiva.

Anne Vérin (1988), en el campo de la enseñanza de las Ciencias Naturales, estudia las escrituras de los alumnos argumentando que éstas constituyen una ayuda al aprendizaje científico en la escuela y, a su vez, advierte que el aprendizaje de la escritura se facilita cuando está inserto en esta situación social particular. La autora explora las condiciones pedagógicas que permiten a los alumnos tomar conciencia de sus propios procesos de escritura y apropiarse de reglas para la reescritura.

En un estudio posterior, esta misma investigadora se plantea cómo puede organizarse una clase de Física para dar lugar a la circulación del lenguaje entre los alumnos y entre los alumnos y el profesor y analiza los esquemas de actividades lingüísticas en relación con su función en el aprendizaje científico. Vérin explica que para que las actividades de la lengua sigan siendo funcionales en el proceso de conceptualización, son necesarias varias modalidades: poner en marcha una problemática, diversificar las formas lingüísticas, articularlas con trabajo experimental, desarrollar las formas ligeras de escritura, favorecer retomar y reescribir, organizar la interacción entre fases de debate y escritos individuales y colectivos, iniciar momentos reflexivos, entre otras. Al describir la estructura general de la sucesión de escritos que se presentaron en un conjunto de sesiones de clase, la autora señala que aparece una estructura "ascendente" al pasar de la producción de un escrito individual a un escrito colectivo. Aclara que el escrito individual sirve esencialmente para movilizar las ideas de cada uno mientras que las producciones colectivas suscitan confrontaciones y síntesis. Aparece también una estructura "descendente" en la que se pasa de un escrito colectivo a un escrito individual promoviéndose así la reapropiación de la conclusión emitida en los debates o la aplicación de las propuestas generales consensuadas (Vérin, 2004).

Resulta una contribución potente para nuestro estudio el análisis que hace la autora sobre la funcionalidad de los escritos en relación con los avances en los conocimientos propiciados por las producciones individuales y colectivas:

> *La funcionalidad de los escritos puede ser examinada en función de la gestión de la clase como colectividad o en función de los aprendizajes de los alumnos. Es posible que el descubrimiento sea parcial solamente y que en ocasiones, estas dos lógicas entren en conflicto. Por ejemplo, hacer producir un escrito final ("institucionalizado", u objeto de consenso validado por el profesor) al final de un módulo es, sin duda, funcional para la buena marcha de la clase en tanto que la colectividad construye un conocimiento. La funcionalidad del tal tipo de escrito, lo que ha sido decidido en la clase como objeto de acuerdo colectivo, no es en absoluto una garantía para su apropiación individual y*

puede, por el contrario, tapar una ausencia de construcción para ciertos alumnos. Puede sin embargo existir otro tipo de funcionalidad para el aprendizaje individual: la existencia de tal escrito en el cuaderno de cada uno puede servir, individualmente, de referencia posterior, a condición de que se sea conducido a reexaminar esta formulación ulteriormente. (Vérin, 2004:117-118)

Por su parte, desde la Didáctica de la Lengua, García-Debanc (1995) reconoce que la escritura interviene en el corazón de la actividad científica y que los escritos que contienen registros del trabajo realizado en el contexto de la enseñanza de las ciencias no solo son provechosos para el dominio de la producción escrita, sino también para el aprendizaje de las ciencias. La autora explica que en las clases pueden producirse diferentes tipos de escrituras de manera individual, en pequeños grupos o colectivas, en diversos momentos del proceso de aprendizaje y con funciones muy diferentes. Las escrituras que se realizan al inicio del proceso científico requieren que los alumnos movilicen sus conocimientos anteriores y se interroguen sobre los fenómenos que van a ser estudiados. Las que se producen durante el desarrollo tienen la función de mantener un registro de las experiencias y comenzar a procesar la información recogida: mediciones, observaciones, reformulaciones escritas de notas tomadas de textos, clasificación de la información recogida. Escribir durante el proceso permite comprender mejor los fenómenos y ayuda a la estructuración del conocimiento. En cambio, las escrituras que se producen al final del proceso científico permiten sintetizar los resultados de las observaciones y relacionarlos con los principios explicativos. Estos últimos escritos permiten ir más allá de los hechos en busca de explicaciones y pueden tomar la forma de resúmenes para la clase o para alumnos de otra clase. La autora también subraya cómo contribuyen las relecturas críticas entre pares y reescrituras de estos textos explicativos a la construcción y consolidación de los conocimientos y a identificar las características de la escritura científica.

La misma autora, García-Debanc, junto con Éliane Sanz-Lecina y Magali Margotin, en una investigación denominada “Lo oral para aprender, el aprendizaje de lo oral”, han estudiado la gestión de las fases de la puesta en común como particularmente crucial en la construcción de aprendizajes y difícil de conducir por los docentes. Ellas se formulan preguntas que nos resultan interesantes para interpretar con mayor precisión los espacios de intercambio en la secuencia implementada:

¿Qué tratamiento didáctico realizar a partir de los dichos de los alumnos? ¿El maestro es el que conduce a repetir, a reformular, a rectificar lo que ha sido dicho por un alumno? ¿Qué líneas discursivas (describir, explicar, justificar, preguntar…) se suscitan

entre los alumnos por las consignas y el dispositivo implementado? ¿Qué intervenciones del maestro son necesarias para hacer aprender esas líneas discursivas? ¿Qué indicadores permiten constatar que la interacción es exitosa? ¿Qué aprendizajes podemos considerar como realizados durante estas interacciones, tanto desde el punto de vista de la comprensión de conceptos científicos como desde un punto de vista lingüístico? (García-Debanc, Sanz-Lecina y Margotin, 2001-2002:202)

Estas investigadoras establecen que los diversos momentos de un proceso científico requieren de un trabajo diferente sobre las dimensiones específicas de lo oral. Así, la fase inicial de elaboración de una situación-problema requiere sobretodo del maestro una gestión de la interacción y de la comunicación entre niños para suscitar justificaciones y refutaciones de las diferentes concepciones y de la escucha mutua entre los alumnos. Aunque en este momento del trabajo, no sería pertinente observar la calidad del léxico utilizado por los niños, sí es preciso atender al léxico y a la sintaxis, en particular para la formulación de relaciones del tipo causa/consecuencia, cuando son emitidas las hipótesis. Los pedidos de reformulaciones por parte del maestro y sus propias reformulaciones favorecen los aprendizajes. En lo sucesivo del proceso, la elaboración colectiva de los resultados y de su interpretación necesita una negociación en las formulaciones del escrito de síntesis que requiere del maestro una atención a la dimensión interaccional pero también a la pertinencia del léxico utilizado y a una vinculación rigurosa entre hipótesis y conclusiones.

En nuestro país, Delia Lerner, Beatriz Aisenberg, Ana Espinoza y su equipo llevan a cabo desde el año 2.000 un estudio que describen como “situado en un espacio de confluencia entre diferentes Didácticas Específicas” en torno a un problema común: “la enseñanza y el aprendizaje de la escritura y de la lectura como herramientas para la apropiación de contenidos escolares de Ciencias Naturales y de Ciencias Sociales –y como contribución a la formación de estudiantes autónomos-”. Referenciándose en aportes teóricos diversos, estas investigaciones conciben la dimensión epistémica de la escritura como una herramienta intelectual que interviene no solo en la expresión del conocimiento sino fundamentalmente en la construcción de los saberes. A partir de la preocupación por la gestión de las situaciones de escritura en el aula para que la intervención docente se constituya en una ayuda efectiva para la producción y el aprendizaje de las ciencias, se plantean ciertos interrogantes: “¿cuáles son y cómo se entrelazan los factores en juego en las situaciones de escritura?, ¿cómo se equilibra –del lado de la intervención docente– la tensión entre el contenido a enseñar y la autoría de los chicos?, ¿cuáles son las condiciones que es necesario preservar para que los alumnos se aproximen al contenido que se quiere enseñar?” (Lerner, Aisenberg y Espinoza, 2012).

Subrayamos como cuestión central para nuestro estudio el reconocimiento de la distancia entre lo que los alumnos saben acerca del contenido y lo que logran incluir en el texto. Dado que se ocupan de la escritura para aprender, se preguntan si lo sustancial estará en el texto final o si estará en los intercambios, en las revisiones, en el potencial epistémico de “estar escribiendo” e interactuando para escribir.

Uno de los trabajos sobre la producción escrita como herramienta de aprendizaje de la Historia, elaborado en el marco de este conjunto de investigaciones (Lerner, Larramendy y Benchimol, 2010), ofrece un aporte importante para analizar las escrituras infantiles en nuestra indagación. Las autoras toman las tensiones constitutivas de la escritura al servicio del aprendizaje, postuladas por Reuter (2006)[3], e intentan comprender los diversos modos en que estas tensiones -entre transcripción y construcción, entre exteriorización e interiorización y entre descontextualización y recontextualización- se hacen presentes en el aula. Tomamos de ellas el análisis que hacen de la transcripción y la construcción como dimensiones que constituyen la escritura, en relaciones variables según los propósitos del escritor y según el momento del proceso de producción.

En artículos diversos sobre la enseñanza de la escritura al servicio de la adquisición de conocimientos (Aisenberg y Lerner, 2008; Lerner, Larramendy y Benchimol, 2010; Lerner, Aisenberg y Espinoza, 2012) producidos en este mismo marco, se toman como especialmente relevantes los estudios de Jean-Charles Chabanne y Dominique Bucheton vinculados con el papel de los *escritos de trabajo* en la construcción del conocimiento en la escuela primaria. Se trata de escritos “destinados a acompañar y estimular la actividad reflexiva durante las tareas de recolección o recuperación de la información, de (re) formulación inmediata de una lección, de borrador de un proyecto narrativo o explicativo, etc.” (Chabanne y Bucheton, 2002:1). Estas “escrituras intermedias” no se confeccionan para un lector externo ni toman como referencia un modelo social de escritura ya que están estrechamente relacionadas con situaciones de elaboración de conceptos, son transitorias, pueden ser el producto del trabajo personal o del trabajo en grupo, con los propósitos de, entre otros, ayudar a memorizar conceptos tratados en una clase, preparar una exposición, elaborar un afiche, hacer un balance personal de los conocimientos. Desde el punto de vista de la transposición didáctica estas escrituras serían un equivalente escolar de los apuntes, notas o esquemas que va desarrollando un investigador en el proceso de construcción de un nuevo conocimiento.

Nos parece interesante agregar al respecto que existen también producciones escritas en el marco de proyectos de estudio de ciertos contenidos escolares que tienen un propósito

[3] Reuter, Yves (2006) [citado en Lerner, Larramendy y Benchimol, 2010]: À propos des usages de Goody en didactique. Éléments d’analyse et de discussion, en PRATIQUES nº 131/132. Metz – Francia. Diciembre de 2006.

comunicativo ya que pueden estar destinadas a que las lean otros. El Diseño Curricular de Prácticas del Lenguaje para escuelas primarias de la provincia de Buenos Aires (2008:115) se refiere a estas producciones como textos informativos en los que el autor debe resolver problemas vinculados a qué decir y cómo hacerlo, tomando en cuenta sus propósitos y la perspectiva de un futuro lector cuyos conocimientos debe representarse. Estas escrituras pueden asumir diferentes características de acuerdo al tipo de texto que se produzca: gacetillas informativas, notas de enciclopedia, artículos de divulgación, informes, etc. Un caso particular de estos escritos lo constituyen las evaluaciones académicas cuyo sentido es mostrar en qué medida los alumnos se han apropiado de los contenidos enseñados. El destinatario de estos escritos es el maestro -que ya conoce la información que se leerá-; para elaborarlos los alumnos deben enfrentar problemas específicos como decidir qué información se explicita y cuál puede omitirse dado que dejar ideas implícitas puede ser interpretado por el evaluador como desconocimiento del tema.

En un trabajo sobre el uso de las producciones escritas para la evaluación en historia, Aisenberg se detiene en el modo en que pueden operar las consignas en la posibilidad de que los alumnos desplieguen los contenidos aprendidos sobre el tema evaluado. Ella encuentra notables diferencias entre lo que los niños saben y lo que escriben, poniendo de relieve lo que queda oculto del saber de los alumnos como consecuencia de sus esfuerzos por atenerse a lo que suponen espera el docente que ellos escriban. La autora advierte que “la situación de evaluación puede “empujar” a los alumnos a ajustarse a lo que interpretan que les piden y esto puede impedir que desplieguen lo que aprendieron” (Aisenberg, 2012:104).

Vérin (1988) aporta al respecto que puede no ser estrictamente necesario que los alumnos al llegar a adultos deban escribir con frecuencia en su vida personal o profesional, pero el "oficio de alumno" necesita de saber escribir y el éxito académico implica el dominio de las competencias necesarias para escribir bien. La autora advierte que la mayoría de las investigaciones indican que en las situaciones de enseñanza de las ciencias, cuando los alumnos llegan al momento de la escritura luego de haber trabajado sobre contenidos del área, se revelan sus dificultades académicas: “Cuando se trata de "sentarse", tomar un lápiz y escribir las palabras o signos en el espacio de una hoja de papel, los alumnos que han llegado hasta allí se colocan en una situación de fracaso” (Vérin, 1988:15. Original en francés, traducción propia).

Es importante reconocer a través de este marco referencial que los alumnos escriben en casi todas las disciplinas escolares, aunque estas escrituras a menudo no sean consideradas como objeto de enseñanza, y son evaluados en gran medida por las producciones escritas que realizan en las clases o en los exámenes. Sin duda, haber logrado escribir alfabéticamente en los primeros años de la escolaridad primaria no resulta suficiente para poder utilizar la escritura con el propósito de estudiar los contenidos de un área curricular ni de dar cuenta a otros de lo aprendido. Formar a los alumnos para el dominio de estas prácticas supone crear condiciones didácticas que les permitan ejercerlas, esto es participar de situaciones en las que tengan oportunidad de leer y escribir textos informativos y en las que se justifique desplegarlas. Las prácticas del lenguaje que constituyen herramientas de aprendizaje de contenidos disciplinares enfrentan a los alumnos con nuevos problemas que les permiten seguir aprendiendo, no solo sobre ese contenido, sino sobre las formas de organizarlo y comunicarlo a otros.

Un aspecto que es necesario considerar en la presente indagación es el tipo de texto a producir por los niños en las situaciones de escritura que se incluirán en la secuencia de enseñanza de los números racionales con el propósito de explicitar, reorganizar y sistematizar lo aprendido. Hasta el momento no se han encontrado estudios referidos a las características particulares de estos textos. Se trata de escritos que no son de circulación social sino más bien textos cuya producción se justifica en el ámbito escolar, con una función específica en el proceso de aprendizaje de los alumnos.

A partir de los trabajos relevados (Teberosky, 2007; Perelman, 2008), se anticipa que los textos a producir en este estudio por los alumnos presentan algunas características comunes con los textos producidos en el ámbito de la ciencia. Esta clase de textos escritos presenta una tipografía, disposición, normas y convenciones más o menos establecidas por la comunidad académica, que en este caso está constituida por el grupo clase. En el mundo científico y en el aula, estos escritos tienen la finalidad de que se comprenda su contenido –tanto si el texto está destinado al propio autor como si se produce para otros-, por eso incluyen explicación de detalles o datos. Finalmente, en el ámbito de la ciencia y en el escolar, si el texto se produce para comunicar conocimientos a otros, la audiencia es una comunidad social específica.

Flora Perelman (2008) en su investigación sobre el resumen, interpreta este tipo de texto como una producción conceptual respecto de un contenido disciplinar específico. A diferencia del enfoque que hace del resumen una práctica exclusivamente lingüística, la autora lo trata como una actividad de estudio referida a contenidos de enseñanza -enmarcados en una didáctica específica del contenido histórico- aunque interrelacionada con la enseñanza de las prácticas del lenguaje.

Las consideraciones aquí desarrolladas sobre la naturaleza de las prácticas de escritura que son objeto de la presente indagación, así como las condiciones de enseñanza que las promueven en el aula resultan una contribución fundamental para el diseño de las situaciones de escritura que se incluyen en la secuencia sobre enseñanza de los números racionales, para anticipar intervenciones docentes y para delimitar problemas que pueden constituirse en objeto de discusión en la clase.

1.3. ANTECEDENTES DEL ESTUDIO

En el rastreo documental del tema de investigación se encontraron trabajos que indagan el funcionamiento de las situaciones de escritura al servicio del aprendizaje de contenidos de distintas disciplinas.

1.3.1. ANTECEDENTES DE ESTUDIOS SOBRE SITUACIONES DE ESCRITURA AL SERVICIO DEL APRENDIZAJE DE CONTENIDOS DE CIENCIAS NATURALES Y CIENCIAS SOCIALES

Algunos de los estudios se ocupan de las prácticas de escritura en la enseñanza de las ciencias naturales. Hemos mencionado en el apartado anterior el aporte teórico de las investigaciones de García-Debanc (1995), García-Debanc, Sanz-Lecina y Margotin (2001-2002), García-Debanc y Fayol (2002-2003) y Vérin (1988, 2004) que estudian las condiciones pedagógicas en las que la escritura propicia la apropiación de conocimientos científicos por parte de los niños.

Algunos trabajos en este campo disciplinar se ocupan de la escritura en las clases de nivel de educación secundaria (Lemke, 1997; Sardá Jorge y Sanmartí Puig, 2000). Jay Lemke advierte que el lenguaje de la ciencia, al igual que cada uno de los lenguajes de los diferentes campos especializados de la actividad humana, tiene su propio modelo semántico y sus propias formas de construir significados. Sus investigaciones lo llevan a concluir que el cambio en la enseñanza científica que mejora la habilidad de los alumnos en el uso del lenguaje de la ciencia, consiste en proporcionarles más oportunidades de práctica para utilizarlo realmente. Anna Sardá Jorge y Neus Sanmartí Puig trabajan en la misma línea, partiendo de las dificultades que encuentran en la producción de textos argumentativos por parte de los jóvenes y la necesidad de asumirlos como objetos de enseñanza.

Otros trabajos relevados, ya mencionados en el apartado 1.2.2., se dedican a las prácticas de escritura en la enseñanza de las ciencias sociales en el nivel primario (Aisenberg y Lerner, 2008; Perelman, 2008) desde supuestos didácticos congruentes con los del presente trabajo. En estas investigaciones se estudian las situaciones de escritura que favorecen el aprendizaje de contenidos históricos. Aisenberg y Lerner se ocupan del contexto y de las consignas a partir de las cuales se propone a los alumnos producir un texto histórico. Se centran también en cómo se juega la articulación entre la forma y el contenido del texto en las interacciones entre docente y alumnos durante el proceso de revisión. Las autoras encuentran que es posible, bajo ciertas condiciones, enseñar a escribir en Historia en la escuela primaria. El docente al enfrentar el desafío de enseñar a escribir para aprender Historia debe aproximarse a la perspectiva de los alumnos-escritores y ayudarlos a avanzar en su aprendizaje de los contenidos a través de la elaboración y reelaboración de un texto propio. Por su parte, Perelman explora el proceso de construcción de los resúmenes escritos y determina sus variaciones en la producción bajo diferentes condiciones didácticas. Los resultados hallados permitieron cuestionar la concepción escolar usual del resumen, concebido como una técnica de carácter netamente lingüístico, desligada de los desafíos conceptuales que supone la apropiación del saber a enseñar:

> *En la situación experimental, la construcción del resumen estuvo muy alejada de un simple procedimiento de extracción de la información contenida en los textos o de la propuesta de sustituir las palabras por sinónimos o la de usar conectores para vincular lo seleccionado. El resumen obró como un "escrito de trabajo", un escrito al servicio de la reestructuración de lo leído para estudiar y comunicar lo aprendido.* (Perelman, 2008:198)

Si bien se trata de objetos de enseñanza diferentes, todos estos trabajos resultan antecedentes valiosos para nuestra investigación ya que analizan situaciones en las que se enseñan prácticas de escritura al mismo tiempo que éstas constituyen herramientas de aprendizaje de contenidos disciplinares.

1.3.2. ANTECEDENTES DE ESTUDIOS SOBRE SITUACIONES DE ESCRITURA AL SERVICIO DEL APRENDIZAJE DE CONTENIDOS DE MATEMÁTICA

En el marco de la enseñanza de la matemática, se hallaron abundantes relatos de experiencias de autores de países anglosajones (Burns, 2004; Pugalee, 2001, 2005) referidos a alumnos de nivel secundario o universitario a los que se les presenta la situación de producir un texto sobre algún contenido matemático. Se trata de propuestas que se inscriben en una perspectiva diferente a la asumida aquí, tanto en relación a su concepción epistemológica de la matemática como a la de su enseñanza y aprendizaje; particularmente, su concepción de enseñanza de la matemática está centrada en la transmisión de algoritmos para la obtención de resultados precisos más que en las prácticas propias del trabajo matemático presentadas anteriormente. No obstante, los estudios mencionados comparten con esta investigación que escribir tiene incidencia en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

También se relevó una investigación de Susana Wolman (2010), enmarcada en una concepción didáctica asumida como propia en el presente trabajo, en la que estudia el papel que juegan las anotaciones que los alumnos de primer año de educación primaria realizan sobre sus propios procedimientos para resolver sumas y restas. Se trata de una investigación didáctica que estudia las intervenciones docentes y su incidencia en la adquisición y el progreso de procedimientos numéricos no convencionales con niños de primer año. Se pedía a los alumnos que anotaran cómo habían resuelto los problemas presentados. El propósito de esta decisión era promover que los niños explicitaran sus procedimientos a través de la utilización de sus propios modos de representación gráfica y pudieran recordar lo realizado en el momento de la puesta en común, posterior al de la resolución.

La autora encuentra que representar por escrito lo que se piensa permite a los alumnos reflexionar sobre sus procedimientos y sobre los pasos intermedios seguidos. Al producir estas notaciones los modos de resolución y las composiciones aditivas de los números se convierten en objeto de análisis. Las anotaciones que realizan los niños son escrituras con función epistémica porque ponen en juego procesos constructivos, favorecen abstraer, objetivar, construir regularidades, establecer relaciones propias del dominio matemático:

> *Durante las puestas en común las reflexiones giran en torno a esas anotaciones, se copian en el pizarrón, se hacen públicas, se interpretan, se analizan, se comparan, se justifican. Al comparar las escrituras realizadas se reflexiona sobre el valor de los números que se han considerado, se verifica si se ha sumado o restado la cantidad que establecía el problema; las producciones escritas de los procedimientos se convierten en un objeto para pensar, movilizando toda una elaboración de naturaleza cognitiva.* (Wolman 2010:171)

En un trabajo anterior, María Emilia Quaranta y Susana Wolman (2000) muestran que pedir a los niños que escriban sus procedimientos posibilita el aprendizaje acerca de cómo escribirlos y resulta un punto de apoyo para la producción de escrituras aritméticas. Por otra parte, señalan que la escritura es un proceso que no solo transforma el pensamiento en números y símbolos escritos, sino que en algunos momentos se convierte en imprescindible en el camino de encontrar una solución, dado que permite controlar las acciones realizadas para obtener el resultado. Las anotaciones que realizan los niños funcionan como un soporte para los intercambios entre alumnos y entre maestro y alumnos porque permiten explicitar los caminos seguidos para obtener el resultado, justificar las transformaciones de los números que se realizaron, la manera de obtener los resultados parciales y discutir para validarlos. Las producciones escritas quedan disponibles tanto para los niños -para establecer comparaciones, revisar y producir nuevas ideas- como para el maestro -como indicador del proceso seguido por sus alumnos-.

Las investigaciones llevadas a cabo por Wolman y por Quaranta y Wolman constituyen, sin duda, un aporte de suma relevancia para este trabajo dado que se plantea desde marcos teóricos comunes y su objeto de estudio es cercano. Ambos estudios se vinculan de algún modo con la relación entre el conocimiento matemático y su representación. La diferencia está dada por los propósitos de las escrituras y las situaciones en las que se realizan. En el caso del estudio de Wolman se trata de escrituras que los niños producen para explicitar sus procedimientos durante el proceso de resolución y en el caso de la presente investigación se analizan las situaciones de escritura en las que los niños, una vez que han resuelto los problemas, discutido y validado los procedimientos utilizados, se dedican a sistematizar y reorganizar lo aprendido.

Otro antecedente de este estudio lo encontramos en una investigación sobre situaciones de enseñanza de la matemática dirigida a alumnos en dificultades que fue llevada a cabo por Denis Butlen (1996). El autor indaga cómo, a partir de la producción de escritos colectivos en los que se resume lo que fue aprendido, es posible ayudar a los alumnos a formular, descontextualizar y, más en general, a recordar las nociones frecuentadas en clase. Así intenta contribuir a través de las “situaciones de repaso” a superar la mera descripción y la instancia de la acción para ayudar a los alumnos a entender mejor las palabras del docente en las instancias de institucionalización, a interpretar la importancia de lo que fue aprendido y su posible utilización en problemas nuevos, a ser capaces de anticiparse en próximas situaciones a los aprendizajes a los que apunta la situación.

El trabajo documentado por Butlen se realiza en una escuela primaria y consiste en proponer a dos alumnos que redacten en el cuaderno la “memoria del curso”, un resumen de algunas líneas sobre lo que se aprendió durante la semana en matemática. El texto es sometido a la crítica del curso, que lo puede modificar y agregarle precisiones. La nueva versión, redactada colectivamente, es adoptada y se convierte en el “texto del curso”. En el debate colectivo, la palabra es cedida prioritariamente a los alumnos encargados de la redacción. El autor encuentra que pasar por esta experiencia permite a la clase describir colectivamente las actividades efectuadas en términos de aprendizaje y, aún más, posibilita superar la instancia de la descripción de la acción para comprender, después de terminado, el objetivo de la actividad.

Bárbara Brizuela y Mónica Alvarado (2013) aportan también un estudio en el que indagan de qué modo diferentes herramientas notacionales facilitan las soluciones de problemas aditivos a niños pequeños -de 1° año de educación primaria que no se encuentran en situación de enseñanza- y de qué modo ellos usan el lenguaje escrito para representar sus ideas mientras resuelven los problemas. Las autoras encuentran que existe una relación entre la corrección en la resolución de los problemas y los diferentes grados de organización de las herramientas notacionales que se ponen a disposición de los niños (hoja en blanco, tablas sin etiquetas y tablas con etiquetas). Los resultados del estudio muestran que las tablas ofrecieron a los niños la posibilidad de representarse el problema y enfocarse no solo en las cantidades involucradas, sino en las estructuras de los distintos problemas. Si bien su investigación se centra particularmente en las notaciones mediadas por tablas y en niños menores que los del presente trabajo, compartimos la idea planteada por las autoras al reconocer que el lenguaje escrito es una herramienta primordial para los niños en las resoluciones de los problemas.

Por último, se encontraron documentos curriculares y relatos de experiencias didácticas dirigidas a maestros que abonan al corpus de producción sobre el presente tema de investigación.

Patricia Sadovsky, Carmen Sessa, Carolina Napp y Andrea Novembre, (2000) en un documento para profesores del nivel medio proponen reflexionar acerca de qué significa estudiar matemática y plantean algunas estrategias para mejorar la calidad de las prácticas de estudio de los alumnos. Entre estas estrategias reservan un lugar importante para las propuestas que involucran escrituras de los alumnos en sus carpetas de trabajo. Advierten que existe una diferencia entre el uso habitual de las carpetas en el nivel primario y en el secundario; en el primero suele ser el maestro quien indica a los alumnos qué deben escribir y cómo hacerlo, mientras que en el segundo, estas decisiones quedan a cargo de los alumnos. En contrapartida, proponen que la carpeta en el nivel secundario sea el espacio en el que se deje registro de las interacciones que se producen en la clase a propósito del conocimiento matemático. Para que estas escrituras tengan el valor instrumental esperado, es necesario que sea el alumno quien elabore y decida cómo incluir en la carpeta los aspectos centrales del trabajo. Las autoras del documento apuntan a avanzar en este sentido asignando momentos específicos para la escritura en la carpeta y proponen planificar tareas que tengan por objeto mejorar la calidad de esas escrituras de modo de ayudar a los estudiantes a valorar la función de la carpeta, a mejorar los registros de lo que se realiza en clase y a recuperar su proceso personal de aprendizaje.

María Jimena Morillo (2010) se ocupa de la escritura autónoma de conclusiones en el área de matemática. La autora muestra que al escribir conclusiones sobre problemas que involucran la división y las fracciones, los distintos alumnos tienen niveles diferentes de abstracción y generalización en las conceptualizaciones que incluyen en sus escrituras.

Por su parte, Mercedes Echemendy y Graciela Zilberman (2013) comunican algunas reflexiones sobre el papel de los intercambios orales en la clase de matemática y sobre el valor de producción que tienen las escrituras realizadas por los niños. Las autoras señalan que esas actividades –en particular en la clase de matemática– abren a los niños la posibilidad de acceder a conocimientos que de otra manera no se producirían, por eso, les asignan un valor formativo peculiarmente importante. También advierten que en la clase se escribe para comunicar procedimientos, para dar a conocer ideas y poder confrontarlas con las ideas de los otros; se escribe como apoyo para la resolución, para identificar lo que se aprendió y para sistematizar los nuevos conocimientos, para guardar memoria de lo generado y poder volver sobre ese registro para estudiar. Finalmente concluyen que todas ellas son prácticas que le dan sentido y lugar a la escritura en la clase, son oportunidades fecundas para la formación de los niños en la medida en que logren impactar en el conocimiento en juego. Estos antecedentes de experiencias didácticas constituyen producciones con las que el presente proyecto entra en diálogo.

Nos hemos referido en este capítulo al problema de investigación y las preguntas que la orientan para después desarrollar los marcos teóricos y conceptuales que referencian el problema, considerando los aportes desde la Didáctica de la Matemática y desde la Didáctica de la Escritura. Finalmente hemos presentado el rastreo de antecedentes de estudios sobre situaciones de escritura al servicio del aprendizaje de contenidos de Ciencias Naturales y Ciencias Sociales y de contenidos de Matemática.

En el capítulo siguiente, dedicado al marco metodológico de esta investigación, describiremos las características generales del estudio y luego nos detendremos en cómo se diseñó y se implementó la secuencia didáctica, cuáles fueron las transformaciones que se realizaron sobre la secuencia original y qué estrategias metodológicas se usaron para la recolección y análisis de la información. Por último, nos referiremos a las dimensiones que se fueron construyendo con el propósito de interpretar la información a partir de los interrogantes de la investigación.

CAPÍTULO 2

MARCO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

2.1. CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se plantea como un estudio cualitativo de carácter exploratorio que asume el marco metodológico del estudio de casos. Por tratarse de un trabajo de indagación cualitativa, las hipótesis no se establecen antes de ingresar en el campo y de comenzar la recolección de información. Roberto Hernández Sampieri, Carlos Fernández Collado y Pilar Baptista Lucio (2006) explican que en estas indagaciones "el investigador va generando hipótesis de trabajo que se afinan paulatinamente conforme se recaban más datos".

Entre los trabajos relevados en los que se abordan las prácticas de escritura como herramientas de aprendizaje de contenidos disciplinares, no se encontraron estudios que se ocupen de las prácticas de escritura en las clases de matemática de nivel primario durante el proceso de institucionalización. Esta investigación entonces busca aumentar el grado de familiaridad con ciertos problemas desconocidos (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2006) y por ello la definimos como de carácter exploratorio.

Como suele realizarse en muchos estudios cualitativos, se escoge un caso para poder profundizar en su análisis. El estudio de casos se justifica porque lo que se busca es analizar con cierta rigurosidad el funcionamiento de una secuencia en la que se incluyen situaciones de escritura y apreciar el efecto que producen en los alumnos las situaciones desarrolladas. Asumimos este marco metodológico a partir de la definición propuesta por Robert Yin (2001), quien lo caracteriza como una estrategia que permite responder preguntas del tipo "cómo" y "por qué". Otra de las características de los estudios de casos enunciadas por el autor se refiere al grado de control que el investigador tiene sobre los eventos comportamentales. Aquí, si bien decidimos no hacer observaciones naturalistas -dado que el objeto de indagación no está constituido por clases usuales sino que se estudia el funcionamiento de una secuencia de enseñanza de los números racionales en la que se intercalan ciertas situaciones de escritura-, no se ejerce un control estricto sobre los comportamientos que se suscitan en la implementación de la secuencia. La tercera característica del estudio de casos propuesta por Yin consiste en que el foco se encuentra en fenómenos contemporáneos, no históricos, insertos en algún contexto de la vida real. Entendemos que por haber seleccionado el aula como escenario, este rasgo distintivo también se encuentra presente en nuestro trabajo. El autor enfatiza la contextualización del objeto de investigación, al entender que un estudio de casos es una indagación empírica que no admite separar las variables de su entorno real.

Por su parte, para Robert Stake la finalidad del estudio de casos está en la comprensión de la realidad objeto de estudio: "El estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes" (Stake, 2007:11). Él explica que los casos en estudio interesan tanto por lo que tienen de único como por lo que tienen de común y propone una clasificación de acuerdo al interés de investigación distinguiendo los estudios de casos intrínsecos de los instrumentales. Tomamos esta última categoría para caracterizar nuestro trabajo ya que consideramos que este intenta comprender en profundidad el caso estudiado -el funcionamiento de la secuencia en un aula particular- para contribuir a la comprensión de cuestiones más generales.

Ahora bien, en la presente investigación no nos ajustamos a la caracterización que postula este autor acerca de que los estudios de casos cualitativos son de tipo naturalista. Él se ocupa de los casos que considera de interés en educación y los define como “no intervencionistas” (Stake, 2007:23) para oponerlos a los estudios de casos cuantitativos que consistirían en un conjunto de mediciones experimentales y una serie de variables descriptivas. Por el contrario, en este trabajo tomamos algunos aportes de la Ingeniería Didáctica que también es de corte cualitativo y se ubica en el registro de los estudios de casos aunque no plantea una perspectiva naturalista. Este último enfoque se opone a la investigación basada en la experimentación en clase pero se fundamenta en las formas de validación a las que ella está asociada. Según Michele Artigue, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase suelen situarse “dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. […] En la ingeniería didáctica la validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori” (Artigue, 1995:37).

El marco de investigación de la ingeniería didáctica se caracteriza por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. En nuestro caso no adoptamos esta metodología en sentido estricto dado que la propuesta implementada no fue concebida totalmente para este estudio; no obstante, sí se utilizaron y combinaron fragmentos de otras ingenierías para elaborar la secuencia que articulara problemas matemáticos con situaciones de escritura y se estudiaron ciertas escenas de sus clases, para lo cual se tomaron aportes de dicho enfoque de investigación. El docente fue involucrado en la elaboración de la propuesta efectuándose en conjunto un análisis previo de los problemas que se llevarían al aula, instancia que llevó a comandar algunas variables que se percibían como pertinentes en relación con los problemas; la implementación fue registrada y analizada posteriormente para poner a prueba ciertas construcciones teóricas.

Volviendo al aporte de Stake, al reflexionar sobre la selección de casos, él prescribe que el primer criterio debe ser la máxima rentabilidad de aquello que aprendemos y agrega "debemos escoger casos que sean fáciles de abordar y donde nuestras indagaciones sean bien acogidas, quizá aquellos en los que se pueda identificar un posible informador y que cuenten con actores (las personas estudiadas) dispuestos a dar su opinión sobre determinados materiales en sucio[4]" (Stake, 2007:17). Haciendo propias estas consideraciones, los criterios para seleccionar el caso que se estudia en profundidad en nuestra investigación a través de la implementación y posterior análisis de la secuencia fueron básicamente cuatro:

- Recorrido de formación del docente en Didáctica de la Matemática y en Didáctica de la Escritura[5]: el interés inmediato de este trabajo no era la formación del docente sino que resultaba indispensable que este gestionara los momentos de discusión sobre los problemas y las situaciones de escritura con cierta solvencia para potenciar la circulación de conocimientos en las clases; por ese motivo, se buscó un docente con varios años de experiencia en una escuela que cuenta con el asesoramiento de especialistas en ambas áreas.
- Disposición del docente para participar de la investigación: el diseño e implementación de la secuencia con el propio grupo de alumnos requería inevitablemente del compromiso y la colaboración por parte del docente; por otra parte, este debía aceptar la presencia dentro del aula del investigador y de otros docentes colaboradores en la recolección de información durante dos meses aproximadamente.
- Experiencias previas suficientes del grupo de alumnos en el despliegue de prácticas matemáticas y en el ejercicio de prácticas de escritura con sentido: si bien la secuencia implementada tiene el propósito de enseñar los números racionales y a escribir conclusiones sobre lo aprendido, desde el punto de vista del presente trabajo interesa su finalidad investigativa; dado el tiempo con el que se contaba para la recolección de información que permitiría encontrar algunas de las

[4] Interpretamos que la traducción "materiales en sucio" refiere a "materiales en bruto" que se encuentran en su estado original, antes de ser sometidos a cualquier proceso de manipulación.
[5] Este estudio no tuvo el propósito de apuntar a la formación del docente a través de un proyecto de investigación colaborativa (Bednarz, 2000). No obstante, se planteó un trabajo conjunto entre investigador y docente en las diferentes instancias del diseño del dispositivo y del proceso de recolección de información.

respuestas buscadas, era necesario que las prácticas matemáticas y de escritura con sentido ya formaran parte del trabajo cotidiano del grupo y no tener que destinar momentos a plantear situaciones en las que se promoviera su apropiación por parte de los niños.

- Condiciones institucionales favorables para implementar la secuencia: para desarrollar las situaciones de enseñanza que permitirían recabar la información se requería contar con una institución que estuviera dispuesta a colaborar en las acciones necesarias, que admitiera el ingreso de investigadora y asistente para el registro videado, que acordara con el envío de solicitudes de autorización a las familias para filmar a los alumnos, que tolerara el desorden que suponía la presencia de personas ajenas a la escuela durante un lapso de tiempo prolongado, que aceptara que los tiempos de investigación de una secuencia didáctica suelen exceder los habituales tiempos de la enseñanza escolar, entre otras.

Para finalizar la caracterización metodológica del presente trabajo, consideramos que al proponer llevar al aula un proyecto de enseñanza y observar su desarrollo en cierto número de clases, el trabajo reviste también un carácter empírico y se basa en lineamientos de la etnografía educativa para la observación y el análisis de registros de clases. Rockwell (2009) advierte que existen numerosos problemas que no pueden estudiarse desde el enfoque etnográfico ya que requieren de ciertas formas de interacción y de otras concepciones construidas por la psicología, entre otros, aquellos vinculados a la reconstrucción de procesos internos del sujeto o procesos cognitivos -como los que forman parte de nuestro objeto de indagación-. No obstante, en la enumeración que realiza la autora acerca de los criterios que permiten distinguir los estudios etnográficos de otras formas de investigar, encontramos algunos que forman parte de las características del presente trabajo, por ejemplo, el estudio está referido a un ámbito cotidiano, la escuela, en el que se forjan relaciones sociales; el producto del trabajo analítico es una descripción que intenta conservar la riqueza de las relaciones particulares que se desarrollan en el aula estudiada; el investigador es un sujeto social que sostiene una experiencia directa y prolongada en el trabajo de campo; no hay división entre la tarea de recolección de información y el trabajo de análisis, son partes indisociables del proceso investigativo asumidas por la misma persona; y por último, existe un interés por intentar comprender la visión de los sujetos involucrados y por respetar el valor de sus conocimientos.

2.2. El diseño y la implementación de la secuencia didáctica

Como se mencionó anteriormente, la indagación se organizó en torno a la implementación de una secuencia didáctica de Matemática en un aula de nivel primario. Se decidió presentar la propuesta de enseñanza en una sección de 5° año por tratarse de alumnos que se encontraban en un nivel avanzado de adquisición de la lengua escrita y la textualización a esa altura no resultaría un obstáculo para realizar las producciones. El aula seleccionada formaba parte de una escuela pública perteneciente a la Universidad Nacional de La Plata a la que asisten alumnos que ingresan por sorteo y cuyas familias son de clase media. El grupo clase estaba compuesto por 30 niños y niñas, todos de la edad correspondiente al año escolar en curso[6]. Los grupos o parejas de trabajo fueron conformados de acuerdo al criterio de la docente para favorecer la interacción entre alumnos y el trabajo sostenido en las situaciones que se proponían.

El contenido seleccionado para la secuencia fue los números racionales, particularmente en su expresión fraccionaria, porque su estudio supone enfrentar a los alumnos a numerosas rupturas con respecto a los conocimientos construidos en torno a los números naturales y este hecho podría potenciar los intercambios y la diversidad de ideas que incluyen los niños en sus escritos. Extender progresivamente el campo numérico y comprender el funcionamiento de los nuevos números, requería a los niños enfrentar ciertos obstáculos poniendo en cuestión las certezas que habían construido hasta el momento, por ejemplo: a diferencia de los números naturales, los números racionales no tienen siguiente, la multiplicación no puede interpretarse –excepto cuando se multiplica un número natural por una fracción- como una suma reiterada, en muchos casos el producto entre dos números puede ser inferior a cualquiera de los factores o el cociente de una división puede ser mayor que el dividendo, la fracción se representa a través de dos números naturales, entre otras características (Block, 1987; Centeno Pérez, 1988; Block y Solares, 2001; Brousseau, 2012a y 2012b).

Por otra parte, los diferentes problemas que involucran fracciones pueden remitir a aspectos distintos de este objeto. Las fracciones pueden ser el resultado de una medición, pueden ser el resultado de un reparto, pueden expresar una constante de proporcionalidad, pueden ser la manera de indicar la relación entre las partes que forman un todo, pueden expresar el porcentaje de una población, la probabilidad de un suceso, la densidad de un material, entre otros sentidos (Block, 1987; Block y Solares, 2001; Brousseau, 2012a y 2012b). Como se verá más adelante, en la secuencia de enseñanza diseñada para este estudio se

[6] En la provincia de Buenos Aires la Educación Primaria dura 6 años; la edad cronológica que corresponde a 5° año es de 10 años.

propusieron inicialmente problemas que incluían varios de estos sentidos, aunque al implementarla fue necesario descartar varios problemas debido a que las clases se hicieron muy extensas y se agotaba el tiempo que nos habían habilitado en la escuela para la recolección de información. En la etapa de análisis de la información se realizó un nuevo recorte y este se centró especialmente en los intercambios sucedidos en torno a los problemas de reparto y las situaciones de escritura que resultaron de la reflexión sobre ellos.

Es importante considerar que al momento de la implementación de la secuencia en ese año lectivo, el grupo de alumnos seleccionado para el estudio no había participado de situaciones de enseñanza de los números racionales. Sí había iniciado el estudio de las fracciones el año anterior, durante el transcurso de 4° año, a través de la resolución de problemas que involucraban algunos de sus diferentes sentidos: fracciones de uso social frecuente, fracciones para expresar relaciones entre parte y todo o entre partes, fracciones para expresar resultados de repartos, relaciones entre fracciones, diferentes estrategias para ordenar y comparar fracciones, fracción de un número, diferentes maneras de sumar y restar fracciones, fracciones en el contexto de series proporcionales y relaciones entre la fracción y la división entre números naturales[7].

Los problemas matemáticos que forman parte de la secuencia, tal como se señaló en el apartado anterior, fueron extraídos de propuestas de enseñanza ya elaboradas en el marco de otras investigaciones didácticas (Block, 1987; Block y Solares, 2001), de libros de texto escolares que retoman dichas propuestas y de documentos curriculares del nivel primario[8]. En la secuencia se incluyeron situaciones de escritura vinculadas al trabajo de explicitación, reorganización y sistematización de conocimientos que se pretendía desplegar en el aula. Entre ellas, se presentaron situaciones en las que los niños debían escribir por sí mismos –de manera individual o de a pares-, o en las que escribían colectivamente por dictado al docente. El siguiente cuadro resume las situaciones[9] de escritura efectivamente presentadas en las que

[7] Esta información fue provista por el coordinador del Área de Matemática de la escuela en la que se implementó la secuencia y también se desprende del análisis del libro de texto utilizado por los alumnos en 4° año.

[8] Algunas de las propuestas de problemas están incluidas en documentos curriculares de segundo ciclo de nivel primario (GCBA. Secretaría de Educación. Plan plurianual para el mejoramiento de la enseñanza (2005). Matemática. Fracciones y números decimales) y consisten en secuencias que, si bien no surgen de un trabajo de investigación didáctica, recogen entre sus problemas los aportes de numerosos estudios referidos a la construcción de los conocimientos infantiles sobre los números racionales y a los errores típicos que producen los niños y se apoyan en ciertos problemas propuestos por Brousseau sobre este campo numérico.

[9] Entendemos por situación didáctica al dispositivo diseñado intencionalmente con el fin de hacer producir a los alumnos un conocimiento determinado. La secuencia implementada en este estudio está conformada por situaciones didácticas que incluyen la resolución de problemas matemáticos y la reflexión compartida sobre esos problemas, así como también, situaciones de escritura vinculadas al proceso de institucionalización.
Las situaciones didácticas pueden extenderse más de una clase o bien, la clase puede incluir más de una situación didáctica. En este caso, ninguna situación de escritura se extendió más de una clase, pero sí excedieron el tiempo de la clase varias discusiones sobre la resolución de ciertos problemas matemáticos. Además, hubo clases, como la clase 2 y la 8, entre otras, que incluyeron más de una situación de escritura.

se aclara el número de clase en que sucedieron y se explicita la modalidad organizativa utilizada:

Situación	Colectiva	En parejas	Individual
Registrar por escrito los conocimientos matemáticos que se van produciendo en una instancia de retorno reflexivo sobre los problemas ya resueltos o sobre conclusiones anteriormente registradas para agregar conocimientos nuevos	6 situaciones (clases 1, 2, 6, 8, 11 y 16)	2 situaciones (clases 5 y 7)	1 situación (clase 15)
Volver a leer textos propios para recuperar información antes de resolver nuevos problemas o para elaborar nuevas conclusiones colectivas	3 situaciones (clases 2, 8 y 11)	1 situación (clase 2)	3 situaciones (clase 10, 15 y 16)
Revisar textos producidos en forma individual, de a pares o colectiva, para reescribirlos		1 situación (clase 16)	
Reescribir textos a partir de una revisión			1 situación (clase 16)

El diseño de la secuencia se realizó en un espacio de trabajo compartido con el docente en el que, a partir de una secuencia presentada por el investigador, se analizaron las posibilidades, obstáculos y límites que la propuesta didáctica podría alcanzar en las clases, de acuerdo al nivel de conocimientos de los niños y al recorrido didáctico ya realizado, así como también, se hicieron las modificaciones que se consideraron necesarias en la propuesta inicial. En este espacio se discutió además el contenido de algunos artículos y documentos curriculares sobre características del tipo de números que se proyectaba estudiar con los niños, cuestiones a considerar en su enseñanza y condiciones didácticas de la situación de dictado al docente[10]. Durante la implementación de la secuencia se sostuvo este espacio de

[10] Los textos compartidos en el espacio de trabajo con el docente fueron los siguientes:

- GCBA. Secretaría de Educación. Plan plurianual para el mejoramiento de la enseñanza (2005). Matemática. Fracciones y números decimales. 5° grado: Apuntes para la enseñanza (pp. 13-16).
- Ministerio de Educación de la República Argentina. Programa Nacional de Innovaciones Educativas. Propuestas para el aula. Material para docentes. Lengua. EGB1 (2001). Dictado al maestro.
- Teberosky, A. y Fabbretti, D. (1993). Escribir en voz alta. En *Cuadernos de Pedagogía*, N° 216, 54-57.

intercambio con el docente con el propósito de analizar en conjunto cómo iba sucediendo cada clase y ajustar alguna parte de la secuencia aún no implementada en función de las primeras impresiones respecto del tiempo y del grado de dificultad de los problemas[11].

2.3. Decisiones sobre la secuencia de enseñanza implementada

La secuencia diseñada tuvo varias transformaciones durante el desarrollo de las clases debido a que las instancias de intercambio con los alumnos a propósito de los problemas y las situaciones de escritura colectiva resultaron mucho más extensas en tiempo que lo previsto. Originalmente constaba de 11 clases que incluían problemas de varios sentidos de las fracciones: reparto, medida y una situación vinculada al contexto de la medida que involucraba particularmente la relación parte-todo.

Si bien la extensión temporal no significaba un obstáculo para el desarrollo de la investigación sí lo era al considerar el tiempo didáctico planificado por el docente para la enseñanza del contenido en cuestión. También resultaba inconveniente dilatar nuestra presencia en la institución por un período de tiempo mucho más prolongado del que nos había sido habilitado para la recolección de información. Por este motivo, se decidió acortar la secuencia suprimiendo varias clases que incluían problemas en el contexto de la medida. Además fue necesario desdoblar otras porque las diferentes situaciones previstas para esas clases habían quedado muy extensas y era necesario darles un cierre. Finalmente se llevaron al aula y registraron 17 clases -algunas de ellas de una hora y la mayoría, de dos horas de duración- que incluían problemas de fracciones en el contexto del reparto y uno que involucraba la relación parte-todo.

2.4. La recolección y el análisis de la información

La estrategia metodológica para recoger la información fue la observación de clases. Los registros de las clases se realizaron en video, audio y simultánea toma de notas que incluían algunas primeras impresiones e interpretaciones. Si bien se trató de una observación no participante, no se descartó la intervención del investigador en la gestión de las clases cuando este o el docente lo consideraran pertinente.

[11] Como ya hemos señalado en el apartado 2.1., en este estudio se planteó un trabajo conjunto entre investigador y docente en las diferentes instancias del diseño del dispositivo y del proceso de recolección de información. Se establecieron acuerdos en la elaboración del proyecto de enseñanza, en las condiciones didácticas y en las intervenciones fundamentales así como también, se compartió el análisis de las clases y de las producciones escritas de los alumnos, durante la implementación de la secuencia, para la toma de decisiones intermedias.

En las situaciones de producción colectiva de textos, además de la grabación en video, se usaron dos grabadores de audio, uno de los cuales estuvo dirigido al docente y el otro al grupo total de niños. En la toma de notas se prestó especial atención a las transformaciones que se fueron introduciendo en los textos trabajados en el pizarrón o en afiches. En las situaciones de producción en parejas o tríos se registraron los intercambios en al menos un grupo de alumnos.

Además de los registros de clases, el corpus de información también está conformado por todas las producciones realizadas por los alumnos durante el desarrollo de la secuencia:

- fotocopias de las producciones escritas realizadas individualmente o de a pares en las carpetas de los alumnos,
- fotografías digitales del pizarrón o afiches con las producciones escritas realizadas en forma colectiva por dictado al docente.

Se realizó un proceso de análisis manual sobre los registros de las clases observadas. A partir de una primera lectura, los registros se transformaron en esquemas para visualizar a grandes rasgos la dinámica desarrollada y poder captar en simultáneo todo lo trabajado en los diferentes episodios de cada clase. Para el análisis de los textos se realizaron operaciones de transcripción desde las versiones originales producidas por los niños o por el docente hasta las que constituyen el material analizable. Posteriormente, se establecieron las dimensiones que permitieron el análisis de la información y que serán presentadas en el apartado siguiente.

Como se anticipó en el apartado 2.3., se tomó la decisión de focalizar el análisis de la información en las clases que involucran problemas de reparto. Por ello, la información analizada incluye los registros de clases en las que se resuelven y se reflexiona sobre estos problemas y en las que se proponen situaciones de escritura de conclusiones sobre ellos.

Los fragmentos de los registros transcriptos en el capítulo 4, dedicado al análisis de la información, se identifican con el número de la clase seguido de los minutos entre los que transcurre el fragmento. Así, la leyenda: *(C1,m43.00-49.20)* encabeza el fragmento de registro de la clase 1 que sucedió entre el minuto 43.00 y el minuto 49.20 .

En los registros de cada clase se numeran correlativamente las intervenciones tanto del docente como de los alumnos para poder hacer referencia a ellas en el análisis mencionando este número. También se especifican entre paréntesis las aclaraciones necesarias para que el lector comprenda qué sucede en la clase; particularmente se anticipan los segmentos en los que el docente o los alumnos dictan, leen o escriben. Por ejemplo:

Docente: (lee) Un entero en 8, un entero en 4… (dice) Está perfecto, yo estoy copiando lo que vos estás diciendo, dale.

Fabricio: (dicta) Porque 6 es el doble de 3, (dice) y sería más veces que lo dividís… igual que 8 es el doble de 4.

Docente: A ver, miren lo que hizo Luca. Luca sabe que tiene estos dos chocolates (los dibuja en el pizarrón), ¿no? Y él dijo, le voy a dar 2/4 a cada uno. Y él se fijó si sacándole 2/4 a esto (señala los dos chocolates) podía decir si recibía 2/4 cada uno. (Dirigiéndose a Luca) ¿Cuántas veces le sacaste 2/4 a esto?

En el análisis también se incluyen figuras que pueden consistir en fotos o imágenes escaneadas de las producciones escritas en carpetas, afiches y pizarrón, intercaladas entre los registros de estas clases.

2.5. Dimensiones de análisis

A partir de los interrogantes que orientan esta investigación y de un análisis preliminar de la información ya recogida se construyeron dimensiones con el propósito de interpretarla. El establecimiento de estas dimensiones de análisis no resultó una tarea sencilla dado que la complejidad propia de las interacciones del aula no permite considerar sus numerosas variables en forma aislada.

Como se mencionó anteriormente, la cuestión que funciona como eje vertebrador de esta indagación se refiere a cómo se transforman los conocimientos matemáticos en situaciones de escritura ligadas al proceso de institucionalización. Este interrogante se constituye en una dimensión de análisis en la que se confrontan las formulaciones que realizan los alumnos sobre las resoluciones de los problemas, en forma oral, durante el intercambio producido en las puestas en común y las formulaciones que realizan en la escritura colectiva de conclusiones. Cabe aclarar que si bien nos referimos a la transformación de conocimientos matemáticos, no estamos pensando en medir o evaluar cómo sucede tal proceso en cada uno de los alumnos sino que nos centramos en los conocimientos que en general circulan en los intercambios que suceden en las clases y en las producciones que quedan escritas.

A partir de esta primera dimensión se desprenden las siguientes que se corresponden con otras preguntas de investigación y que serán analizadas como se describe a continuación:

- La incidencia de los avances en los conocimientos matemáticos en la profundidad y riqueza de la escritura de conclusiones: Se examinan las ideas que se van modificando o agregando en los sucesivos retornos sobre las producciones escritas.
- Los conocimientos que se incluyen en las escrituras de conclusiones colectivas cuando éstas se producen a partir de escrituras realizadas en forma individual o en parejas: Se

analizan comparativamente los diferentes escritos para constatar si en el pasaje de escrituras individuales o en parejas a escrituras colectivas se produce solo una sumatoria de ideas o si resulta una profundización en la teorización.

- Los conocimientos que se revisan y los que se transforman en las situaciones de reescritura: Se comparan las producciones escritas originales, con los aspectos señalados por los niños para revisar y los que se tienen en cuenta para la reescritura.

En este capítulo nos dedicamos a presentar el marco metodológico de la investigación. Comenzamos describiendo las características generales del estudio, luego explicamos cómo se diseñó e implementó la secuencia didáctica, cuáles fueron las transformaciones que se realizaron sobre la secuencia original y qué estrategias metodológicas se usaron para la recolección y análisis de la información. Finalmente, nos referimos a las dimensiones que se fueron construyendo con el propósito de interpretar la información a partir de los interrogantes de la investigación.

En el siguiente capítulo describiremos la secuencia de problemas matemáticos y de situaciones de escritura que fue efectivamente llevada al aula.

CAPÍTULO 3

LA SECUENCIA DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS Y DE SITUACIONES DE ESCRITURA

En este capítulo se describe la secuencia efectivamente llevada al aula, conformada por situaciones didácticas que incluyen tanto problemas matemáticos como situaciones de escritura. En el apartado 2.2., se mencionó que estas previsiones resultaron de los intercambios con el docente desarrollados antes de la implementación a partir de una secuencia propuesta por el investigador[12]. En esta descripción también se incluyen algunas de las modificaciones de la planificación original derivadas de decisiones que se tomaron con el docente durante la puesta en aula teniendo en cuenta la extensión del tiempo de las clases y el grado de dificultad de los problemas que pudo verse durante el desarrollo.

Entre los problemas matemáticos que involucran fracciones, vertebradores de las situaciones didácticas de la secuencia, se incluyeron situaciones de escritura vinculadas al trabajo de explicitación, reorganización y sistematización de los conocimientos que se desplegaron en el aula. En relación con la modalidad organizativa, se previeron situaciones en las que los niños debían escribir por sí mismos –de manera individual o de a pares-, o colectivamente por dictado al docente. Se incluyeron también algunas situaciones de lectura con el propósito de que los alumnos retornaran a sus propias producciones antes de resolver nuevos problemas o para elaborar nuevas conclusiones colectivas.

Se planificaron diferentes conjuntos de situaciones didácticas organizadas en torno a problemas que involucran aspectos diversos de las fracciones:

- Repartos en los que la fracción resultante es menor o mayor que 1.
- Discriminar entre varias partes de un entero, cuáles son mitades.
- Repartos de "x" chocolates entre "y" niños.
- Equivalencias entre formas diferentes de expresar una misma cantidad que requieren de la relación entre fracciones y división.
- Repartos equivalentes que involucran los conceptos de fracción de una fracción y de fracciones equivalentes.

[12] Como ya hemos mencionado en el capítulo 2, los problemas matemáticos seleccionados para elaborar la secuencia fueron extraídos de otras propuestas de enseñanza elaboradas en el marco de investigaciones didácticas (Block, 1987; Block y Solares, 2001), de libros de texto escolares que retoman dichas propuestas y del documento curricular del nivel primario: *GCBA. Secretaría de Educación. Plan plurianual para el mejoramiento de la enseñanza (2005). Matemática. Fracciones y números decimales. Apuntes para la enseñanza. 4° y 5° grado*.

- Sistematización o recapitulación de distintos aspectos de las fracciones tratados en las situaciones de la secuencia.

Cada uno de estos conjuntos de situaciones didácticas incluye la resolución de problemas matemáticos, discusiones en torno a ellos y situaciones de escritura colectivas, en parejas o individuales acerca de ideas que circularon en las resoluciones y discusiones.

3.1. Repartos en los que la fracción resultante es menor o mayor que 1 (Clases 1 y 2)

Los dos primeros problemas matemáticos propuestos requerían calcular el resultado de repartos equitativos. En el primer caso la fracción resultante era menor que 1 y en el segundo, mayor que 1. El propósito de partir de estos problemas era iniciar a los alumnos en el establecimiento de relaciones entre la división de números naturales y las fracciones. Construir estas relaciones constituye un largo proceso que demanda tiempo de aprendizaje, resolver problemas diversos con fracciones e intercambiar ideas sobre ellos.

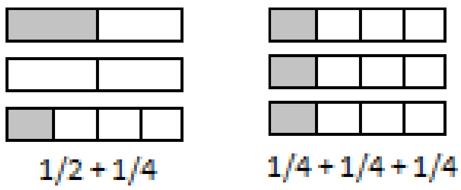
En su estudio sobre el vínculo entre las fracciones y la división, Block y Solares (2001) encuentran que el significado de las fracciones como cocientes puede asumir modalidades con niveles de complejidad diferentes. En primer lugar, las fracciones definidas como “quebrados” se construyen como sumas de fracciones unitarias. Por ejemplo, cuando se pide a los niños que “pinten” ¾ de un rectángulo, se espera que lo dividan en cuatro partes iguales y pinten tres de éstas. Aquí ¾ tiene el sentido de partes de una unidad: ¼ + ¼ + ¼. Es el sentido de uso frecuente en la vida cotidiana y el que predomina en la enseñanza usual en la escuela primaria. En segundo lugar, las fracciones definidas como “cocientes”, sentido que suele ser presentado en la escuela secundaria. En este caso, ¾ puede ser definida como el cociente de 3 entre 4, es decir, como el número que multiplicado por 4 da 3.

El primer problema que se propuso en nuestra secuencia para resolver en grupos de no más de 4 integrantes fue el que se detalla a continuación. Al presentarlo, la docente habilitó el uso de procedimientos diferentes de resolución:

> *El papá de Camilo compró 3 chocolates para repartir en partes iguales entre sus 4 hijos y que no sobre nada. ¿Cuánto chocolate come cada uno?*[13]

[13] Problema extraído y adaptado de: Block, D. y Solares, D. (2001). *Las fracciones y la división en la escuela primaria: Análisis didáctico de un vínculo*. En Revista Educación Matemática, 13(2), 5–30.

Block y Solares analizan en su artículo los procedimientos y las conceptualizaciones que se promueven al resolver un problema de reparto similar al anterior y advierten que es posible llegar al cociente solicitado a partir de la interpretación de la fracción como quebrado sin conocer la definición de las fracciones como cocientes. Los niños suelen utilizar procedimientos como los siguientes en los que la fracción resultante de la división es concebida como suma de fracciones unitarias; desde su interpretación, el hecho de que esta fracción tenga como numerador al dividendo de la división y como denominador al divisor puede resultar casual o pasar inadvertido:



Al concluir el análisis de las conceptualizaciones que los problemas de reparto permiten construir, los autores señalan que

> *"[…] El interés de la situación de reparto radica en que propicia una utilización de fracciones quebrado que presenta ciertas propiedades didácticas: los problemas ponen en juego varias unidades y no una sola, permiten que el resultado fraccionario sea mayor o menor que la unidad, permiten expresar el resultado con escrituras aditivas diferentes, según se haya hecho la partición y estudiar su equivalencia, por ejemplo, ½ + ¼ = ¼+ ¼ + ¼."* (Block y Solares, 2001:10)

En la planificación de la secuencia se previó un momento de discusión posterior a la resolución de este primer problema con el propósito de que los grupos expusieran las diferentes formas encontradas de expresar una misma cantidad. El docente propondría comparar los resultados obtenidos, a través de intervenciones como las siguientes: *Las cantidades obtenidas por cada grupo, ¿son iguales o desiguales?, ¿a cada niño le tocó lo mismo de chocolate?, ¿hay algún pedazo que sea más grande?, ¿cómo hacer para estar seguros sobre si son iguales o no?* Si no aparecieran distintas formas de resolver el reparto, podría preguntar: *¿Hay otras maneras de hacer el reparto?*

El cierre de este momento de intercambio daría lugar a la primera situación de escritura colectiva que quedaría registrada en un afiche bajo el título: *¿De qué modos diferentes se puede expresar la cantidad que le corresponde a cada chico? ¿Por qué?* (A1) Se esperaba que al elaborar el escrito los niños proporcionaran argumentos sobre la equivalencia entre diferentes expresiones de la misma parte. Justificar la equivalencia entre estas expresiones permitiría a los niños establecer algunas relaciones aditivas entre fracciones, como por ejemplo ½ y ¼ = ½ + ¼ = ¼ + ¼ + ¼ = ¾, y otras relaciones multiplicativas, como ¾ = 6/8 = 9/12. Estas últimas pondrían de relieve, entre otras cuestiones, una característica que distingue a las fracciones de los números naturales, la posibilidad de representar con diferentes fracciones un mismo número racional.

Para gestionar la escritura colectiva, se previó que el docente tuviera en cuenta las condiciones didácticas de la situación prototípica de escritura mediada por el docente (Lerner et al., 1996) en la que todas las decisiones referidas a cómo escribir se toman de común acuerdo entre el grupo de alumnos y el docente. Si bien se trata de una situación que se propone con frecuencia antes de que los alumnos se apropien de la alfabeticidad del sistema de escritura, en nuestro caso permite discutir qué ideas de las que circularon durante el intercambio a propósito del problema resuelto se seleccionan para dejar registradas en el afiche.

El segundo problema matemático propuesto en nuestra secuencia para que los alumnos resolvieran, esta vez en parejas, fue el siguiente:

> *¿Cómo se podrá hacer para repartir 7 chocolates entre 4 amigos, de manera que todos reciban la misma cantidad y no sobre nada?*[14]

La intención de proponer otro problema de reparto en el que la fracción resultante fuera mayor que 1 estuvo centrada en indagar si los niños leían espontáneamente el afiche A1 sobre los modos diferentes de expresar una misma cantidad -que había sido elaborado a propósito del problema anterior y se encontraba disponible en el aula- y recuperaban información del escrito para reutilizar las ideas en este problema, por ejemplo, retomando diferentes escrituras para expresar la solución: 1 y ¾ = 1 + ¾ =1 ¾ = 7/4 etc.

Para ello, al proponer este problema, el docente debía recordar a los niños, organizados en parejas, que en la clase anterior habían escrito colectivamente sobre un problema similar y alentar a que leyeran ese afiche en caso de necesitarlo, pero no debía dar indicaciones sobre de qué modo podían utilizarlo para resolver el nuevo problema.

Luego de la resolución en parejas de este segundo problema, se planificó una situación de lectura colectiva del afiche A1 con el propósito de decidir en conjunto si era posible agregar

[14] Problema extraído de: Broitman, C. y otros (2010). *Matemática en 5°*. Buenos Aires: Santillana (p.82, problema 2). De aquí en adelante, cada vez que nos refiramos a problemas extraídos de este texto escolar solo mencionaremos: Matemática en 5°.

alguna idea al escrito que hubiera surgido en la resolución de este problema y que no hubiera sido considerada en el problema anterior. En caso de que los alumnos creyeran necesario agregar ideas al cartel, se plantearía una situación de escritura colectiva para completarlo. Una idea anticipada como posible para incluir consistía en la distinción entre repartos en los que a cada uno le tocaba más de un entero de aquellos en los que a cada uno le tocaba menos de un entero. Las intervenciones docentes previstas para este momento apuntaban por un lado a que los niños relean para revisar y para decidir dónde agregar las nuevas ideas controlando que no estén ya escritas y por otro, a discutir cómo escribirlas.

Al implementar la situación de lectura del afiche A1 para realizar la revisión, se tomó la decisión de escribir colectivamente un nuevo afiche (A2) bajo el título: *¿De qué maneras puedo resolver un reparto?*

En síntesis, para este primer conjunto de situaciones didácticas se planificaron los siguientes problemas matemáticos, intercambios y situaciones de escritura:

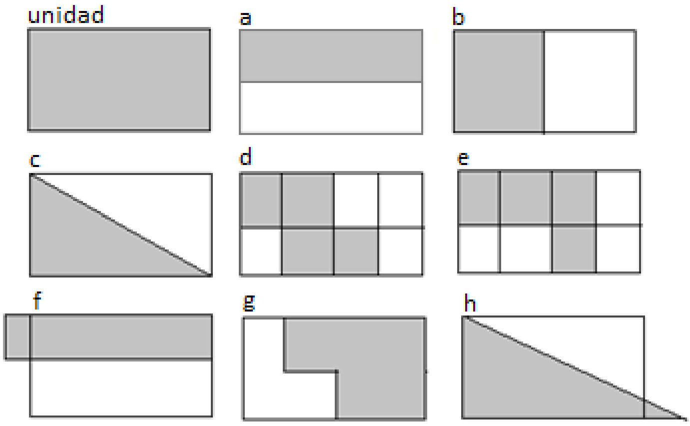
- Resolución de problema en grupos de no más de 4 integrantes: *El papá de Camilo compró 3 chocolates para repartir en partes iguales entre sus 4 hijos y que no sobre nada. ¿Cuánto chocolate come cada uno?*
- Discusión posterior a la resolución: Comparación de los resultados obtenidos.
- Situación de escritura colectiva en afiche A1: *¿De qué modos diferentes se puede expresar la cantidad que le corresponde a cada chico? ¿Por qué?*
- Resolución de problema en parejas: *¿Cómo se podrá hacer para repartir 7 chocolates entre 4 amigos, de manera que todos reciban la misma cantidad y no sobre nada?*
- Situación posible de lectura espontánea en parejas del afiche A1 antes o durante la resolución.
- Situación de lectura colectiva del afiche A1 posterior a la resolución para revisar y decidir si es necesario completar.
- Situación posible de escritura colectiva para completar el afiche A1. En la implementación de la secuencia se decidió elaborar un nuevo afiche A2 bajo el título: *¿De qué maneras puedo resolver un reparto?* Asunto posible a agregar en el afiche: distinción entre repartos menores y mayores que 1.

3.2. Discriminar entre varias partes de un entero, cuáles son mitades (Clases 3 a 6)

El siguiente problema previsto para llevar al aula presentaba un aspecto diferente del concepto de fracción, aquel que involucra la relación parte-todo. Los niños debían decidir si ciertas piezas de papel que les eran entregadas eran mitades de una unidad dada[15].

Se planificó entregar a cada equipo de 4 integrantes una hoja (unidad) y un juego de 8 partes de hoja, algunas de las cuales eran mitades de la hoja y otras no. El docente debía habilitar a los niños a que, de ser necesario, doblaran a cuadricularan las partes de papel para decidir si eran mitades o no.

Las piezas de papel a entregar tenían las siguientes formas y tamaños:



Se previó que luego de unos minutos de trabajo en grupos se generara un espacio de discusión en el que el docente iría mostrando cada una de las partes y cada uno de los equipos compartiría su decisión acerca de si la parte en cuestión era la mitad de esa unidad o no. En caso de que todos los equipos coincidieran pasaría uno de los niños a explicar cómo hicieron para estar seguros de tal afirmación. En caso de darse opiniones contrarias pasaría a explicar un niño por cada una de las opiniones surgidas.

En su Tesis de Maestría, Block (1987) analiza los procedimientos de resolución posibles y las conceptualizaciones involucradas en esta situación y explica que es necesario realizar la acción inversa a la que se realiza en el reparto: "construir otra parte igual a la dada y ver si juntas reconstituyen el todo". Este procedimiento requiere "saber que las dos mitades deben ser iguales (como en la acción de reparto) y que las dos mitades deben formar el todo (cosa no explícita en la acción del reparto)" (Block, 1987:68). Además, en los casos en que la parte no

[15] Problema extraído y adaptado de: Block, D. (1987). *Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria*. Tesis de Maestría. CINVESTAV-DIE. México (p. 66, Situación Didáctica 1.2.). De aquí en adelante, cada vez que nos refiramos a problemas extraídos de esta tesis solo mencionaremos: Tesis Block.

resulta de un reparto que se realiza doblando la hoja, como en las figuras d, e y g, se pone a los alumnos frente a una exigencia mayor: pensar que lo que debe ser mitad es el área, independientemente de la forma.

Se planificó para luego de la resolución de este problema y de la posterior puesta en común, una situación de escritura en parejas que tenía el propósito de explicar para recordar cómo hacer para darse cuenta qué partes son mitades de un entero. Para organizar esta situación de escritura se previó que el docente indicara qué integrante de la pareja iba a escribir con el lápiz y cuál iba a dictar. Las producciones en parejas se compartirían en un espacio de trabajo conjunto del grupo clase que derivaría en una nueva situación de escritura, esta vez colectiva.

La escritura colectiva quedaría plasmada en un nuevo afiche (A3) bajo el título: *¿Cómo hacer para darse cuenta qué partes son mitades de un entero?*, que incluiría los diferentes modos de darse cuenta propuestos por las parejas y las nuevas relaciones surgidas en el escrito colectivo. Este pasaje del texto elaborado en parejas al texto realizado en forma conjunta permitiría observar si la producción colectiva consistiría en la acumulación de los mismos modos de darse cuenta que habían surgido en las producciones realizadas en parejas o si se generaba la posibilidad de encontrar nuevas relaciones.

En síntesis, para el segundo conjunto de situaciones didácticas se planificaron los siguientes problemas matemáticos, intercambios y situaciones de escritura:

- Resolución de problema en grupos de 4 integrantes: *Decidir qué partes corresponden a ½ chocolate* (representadas en piezas de papel).
- Discusión posterior a la resolución: Confrontación de argumentos que apoyan la decisión acerca de si cada pieza constituye ½ de la unidad.
- Situación de escritura en parejas: Explicación sobre cómo hacer para darse cuenta de qué partes son mitades de un entero.
- Puesta en común de producciones de las parejas para relevar las ideas que incluyeron en el escrito.
- Situación de escritura colectiva: Producción de un texto común a partir de las escrituras en parejas en afiche (A3) *¿Cómo hacer para darse cuenta qué partes son mitades de un entero?*

Es importante aclarar que las clases correspondientes a este conjunto de situaciones didácticas que formaban parte de la planificación y que fueron efectivamente implementadas no se consideraron en el análisis de la información. En primer lugar, porque dada la extensión que adquirió la implementación de la secuencia, se decidió analizar solo las discusiones, las situaciones de escritura y los textos vinculados a los problemas de reparto. En segundo lugar, porque el sentido de las fracciones puesto en juego en este problema -la relación partes-todo- no era reutilizado en situaciones posteriores de la secuencia.

3.3. Repartos de "X" chocolates entre "Y" niños (Clases 7 a 9)

El siguiente conjunto de situaciones didácticas planificadas en la secuencia retomaba los problemas que involucran fracciones en el contexto del reparto.

Se previó entregar a los alumnos, organizados en parejas, un cuadro con repartos diversos sin resolver y preguntas para reflexionar sobre ellos[16]. En la hoja que se entregaría a cada pareja, los niños debían escribir en primer lugar las respuestas a cada una de las cuatro preguntas y los argumentos para justificarlas. Posteriormente, debían resolver solo uno de los repartos que sería asignado por el docente. Cada pareja recibiría una copia como la siguiente:

Repartos de chocolates entre chicos

Parte 1)

En este cuadro se presentan varios repartos de chocolates entre chicos para realizar en partes iguales y sin que sobre nada.

Repartos	Número Chocolates	Número Niños	A c/u le toca
Reparto 1	2	3	
Reparto 2	2	4	
Reparto 3	1	3	
Reparto 4	3	2	
Reparto 5	1	2	
Reparto 6	3	6	
Reparto 7	2	6	
Reparto 8	6	4	

Antes de resolver los repartos, respondan:

A. ¿A los niños de qué repartos les tocará, a cada uno, más de un chocolate?
B. ¿A los niños de qué repartos les tocará, la misma cantidad de chocolate?
C. ¿A los niños de qué repartos les tocará más chocolate que a los del reparto 1?
D. Elijan por lo menos un reparto del que estén seguros que a cada chico le toca lo mismo de chocolate que a cada uno del reparto 5.

Parte 2)

¿Qué fracción de chocolate le toca a cada uno en el reparto ………(se completa con el reparto asignado a la pareja)? Resolver atrás.

[16] Tesis Block, p.93 (Situación Didáctica 1.4.). En la tesis se denomina 'apuestas' a las cuatro preguntas o desafíos que los niños tienen que resolver en relación al cuadro de repartos.

Responder las preguntas sin haber completado la columna sobre cuánto le toca a cada niño en el reparto promueve que los alumnos se centren en las relaciones posibles entre el número que indica la cantidad a repartir y el número que indica la cantidad de partes entre las que se reparte para poder analizar y comparar los resultados de los repartos. En su Tesis de Maestría, Block (1987) analiza este problema en un contexto de pasteles y señala que apunta a generar condiciones para que los niños reparen en la relación que existe entre el par número de pasteles-número de niños y el tamaño de la parte que toca a cada niño. Los alumnos podrían arribar a conclusiones similares a las siguientes:

Si el pastel entero es el mismo en todos los casos entonces ocurre que:

- *Si hay más pasteles que niños, el pedazo que toca a cada uno es mayor que el entero.*
- *Si hay igual número de niños (en dos repartos), entre más pasteles, más toca a cada uno.*
- *Si hay igual número de pasteles, entre más niños, menos toca a cada uno.*
- *Si el número de niños y el número de pasteles aumentan en la misma proporción, sigue tocando lo mismo a cada niño.* (Block, 1987:94)

Por otra parte, el análisis de los resultados de los repartos promovería que los niños constaten que la división de *a* unidades entre *b* permite obtener como cociente el quebrado *a/b* de unidad y, además, daría la posibilidad de que anticipen la necesidad de dicho resultado. Lograr que los alumnos realicen esta anticipación favorecería una aproximación a la concepción de las fracciones como cocientes, aunque aún no se apropien de ella acabadamente (Block y Solares, 2001).

Luego de la resolución y escritura en parejas de las respuestas se preveía un momento de discusión. Cada pareja debía indicar al docente el resultado del reparto que le había sido asignado para que este complete la columna correspondiente del cuadro ubicado en el pizarrón y debía también validar ese resultado, explicando cómo lo había obtenido. Posteriormente, de manera colectiva se irían leyendo las preguntas y las respuestas pensadas por cada pareja, de una en una, para decidir su validez a partir de la explicitación de los razonamientos seguidos.

La situación de escritura colectiva que se previó para cerrar este conjunto de situaciones consistía en registrar conclusiones acerca de cómo hacer para darse cuenta cuánto chocolate le tocaría a cada uno, agregando si fuera necesario, alguna idea a los afiches de las clases anteriores, especialmente a los afiches A1 y A2, encabezados por los títulos *¿De qué modos diferentes se puede expresar la cantidad que le corresponde a cada chico? ¿Por qué?* y

¿De qué maneras puedo resolver un reparto?, respectivamente. La revisión de estos carteles para decidir si agregarían alguna idea, constituiría en sí misma una situación de lectura. Se esperaba que decidieran registrar la relación que existe entre el reparto de *a* unidades entre *b* partes y la fracción *a/b*.

En síntesis, para el tercer conjunto de situaciones didácticas se planificaron los siguientes problemas matemáticos, intercambios y situaciones de escritura y lectura:

- Resolución de cuatro preguntas sobre los repartos presentados en cuadro, en parejas: *¿A los niños de qué repartos les tocará, a cada uno, más de un chocolate? ¿A los niños de qué repartos les tocará, la misma cantidad de chocolate? ¿A los niños de qué repartos les tocará más chocolate que a los del reparto 1? Elijan por lo menos un reparto del que estén seguros que a cada chico le toca lo mismo de chocolate que a cada uno del reparto 5.*
- Situación de escritura en parejas: Respuestas a las 4 preguntas y sus argumentaciones.
- Resolución de problema en parejas: *¿Qué fracción de chocolate le toca a cada uno en el reparto … (a determinar por el docente)?*
- Puesta en común de los resultados de los repartos y de las respuestas a las preguntas.
- Situación de escritura colectiva: Cómo hacer para darse cuenta cuánto chocolate le toca a cada uno, agregando si fuera necesario, alguna idea a los afiches de las clases anteriores, especialmente a los afiches A1 y A2. Situación de lectura para revisar los afiches. Asunto posible a agregar: relación entre el reparto de *a* unidades entre *b* partes y la fracción *a/b*.

3.4. Equivalencias entre formas diferentes de expresar una misma cantidad que requieren de la relación entre fracciones y división (Clases 10 y 11)

El siguiente conjunto de situaciones didácticas previstas incluía problemas en los que los alumnos debían resolver diferentes repartos, comparar los diversos procedimientos y analizar la equivalencia de las distintas maneras de expresar una misma cantidad. Al comenzar el momento de resolución, el docente debía colocar a disposición de los niños los afiches producidos en las clases anteriores, sin leerlos y sin indicar que los leyeran, para darles oportunidad de que los consulten, individualmente y por propia iniciativa, en caso de que les resultara necesario para recordar o encontrar un procedimiento que les permitiera resolver los nuevos problemas planteados.

El problema que se planificó para su resolución individual fue el siguiente:

Se desea repartir chocolates entre niños, de modo tal que cada uno reciba la misma cantidad y todo el chocolate sea repartido. Decidí en cada caso cuánto come cada uno y de qué otras maneras podría hacerse el reparto[17].

a) 17 chocolates entre 4 niños.

b) 21 chocolates entre 5 niños.

c) 10 chocolates entre 3 niños.

d) 1 chocolate entre 8 niños.

Una vez que la mayoría de los niños hubiera resuelto el ítem a), estaba previsto que el docente gestionara una puesta en común de los procedimientos de resolución. Se esperaba que los niños produjeran diferentes expresiones del resultado, por ejemplo, 4 y 1/4 o 17/4, vinculado a 17 de ¼ y que el docente sostuviera la incertidumbre sin validar ninguna anticipadamente para dar lugar a que los niños reflexionaran sobre la equivalencia entre ellas. Otra cuestión que se previó como importante para analizar a esta altura de la secuencia fue la relación entre los repartos y la cuenta de dividir. Así se podría discutir sobre la relación entre 17 repartido entre 4 y 17 dividido 4, y la relación entre el 1 como resto y el ¼. Se esperaba que los niños advirtieran esta regularidad y comenzaran a generalizarla: siempre la fracción que resulta tiene como numerador al resto y como denominador al divisor.

Después de la puesta en común sobre el ítem a) se proponía a los niños que resolvieran los tres ítems restantes y finalmente un nuevo intercambio oral que apuntaba a la comparación entre los procedimientos usados para b), c) y d) y los que fueron registrados en el pizarrón a propósito de la parte a). La consigna que guiaría el intercambio sería: *¿Qué tienen de parecido estos procedimientos?*

Al finalizar el momento de resolución e intercambio sobre los problemas se previó la presentación de una situación de lectura colectiva en la que se pedía a los niños que reflexionaran sobre la necesidad del retorno sobre lo escrito para reutilizar sus ideas en la resolución de nuevos problemas. Las preguntas del docente que precedían a esta situación de lectura eran las siguientes: *¿Alguno tuvo en cuenta los carteles elaborados en clases anteriores?, ¿los leyeron antes de resolver?*, en caso afirmativo, *¿qué aspectos, procedimientos o ideas que leyeron, les sirvieron?*

[17] Problema adaptado de: Plan plurianual para el mejoramiento de la enseñanza (2005) *Matemática. Fracciones y números decimales. 4to grado: apuntes para la enseñanza*. Buenos Aires: Secretaría de Educación. GCBA (p.19, problema 1).

Para cerrar este conjunto de situaciones, se planificó incluir otra vez una situación de escritura colectiva en la que los niños deberían agregar ideas nuevas, en caso de que surgieran, a los afiches de las clases anteriores, A1 y A2. Se esperaba que registraran conclusiones sobre las relaciones analizadas entre los repartos, las fracciones y la cuenta de dividir, a propósito de 17 repartido entre 4.

Se planificó para antes de iniciar el siguiente conjunto de situaciones que los alumnos resolvieran en sus hogares una serie de problemas que ponían en juego y profundizaban algunos aspectos de las fracciones para que reutilizaran las cuestiones tratadas en las clases anteriores y las tuvieran disponibles para transitar la última parte de la secuencia. El primer problema propuesto apuntaba a que los niños identificaran 1/8, 3/8 y 5/8 como soluciones y a que pudieran encontrarlas sin realizar dibujos ni cálculos:

1)[18] *a) Un kilo de helado se reparte en 8 partes iguales. ¿Cuánto pesa cada parte?*

b) Tres kilos de helado se reparten en 8 partes iguales. ¿Cuánto pesa cada parte?

c) Cinco kilos de helado se reparten en 8 partes iguales. ¿Cuánto pesa cada parte?

El segundo problema era similar al anterior pero en esta oportunidad las cantidades estaban descontextualizadas:

2)[19] *Si se reparte todo en partes iguales, ¿cuánto le toca a cada uno?*

a) 1 entre 5

b) 3 entre 5

c) 12 entre 5

d) 1 entre 7

e) 4 entre 7

f) 15 entre 7

Finalmente, el tercer problema para resolver en los hogares apuntaba a que los niños vincularan la división entera con el resultado de un reparto equitativo:

3)[20] *Para calcular repartos equitativos se hicieron estas cuentas de dividir.*

a) $\begin{array}{r|l} 21 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 5 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r|l} 41 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 8 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r|l} 57 & 6 \\ \cline{2-2} 3 & 9 \end{array}$

a) ¿Cuánto se repartió en cada caso?, ¿entre cuántos se realizó el reparto?

b) ¿Cuál será el resultado de cada reparto si no quedó nada sin ser repartido?

[18] Matemática en 5° (p.83, problema 5).
[19] Matemática en 5° (p.83, problema 6).
[20] Matemática en 5° (p.85, problema 6).

En síntesis, para el cuarto conjunto de situaciones didácticas se planificaron los siguientes problemas matemáticos, intercambios y situaciones de escritura y lectura:

- Situación posible de lectura individual: Lectura espontánea de afiches A1 y A2 para resolver los problemas planteados.
- Resolución de problema de manera individual: *Se desea repartir chocolates entre niños, de modo tal que cada uno reciba la misma cantidad y todo el chocolate sea repartido. Decidí en cada caso cuánto come cada uno y de qué otras maneras podría hacerse el reparto.*

  a) 17 chocolates entre 4 niños.
- Puesta en común de procedimientos de resolución y análisis de la equivalencia de las diferentes expresiones de una misma cantidad.
- Resolución de problema de manera individual: *(continuación)*

  b) 21 chocolates entre 5 niños.

  c) 10 chocolates entre 3 niños.

  d) 1 chocolate entre 8 niños.
- Puesta en común de procedimientos de resolución y comparación con procedimientos utilizados en ítem a).
- Situación de lectura colectiva para analizar necesidad de retorno sobre lo escrito: *¿Alguno tuvo en cuenta los carteles elaborados en clases anteriores?, ¿los leyeron antes de resolver?*, en caso afirmativo, *¿qué aspectos, procedimientos o ideas que leyeron, les sirvieron?*
- Situación de escritura colectiva: Cómo hacer para darse cuenta cuánto chocolate le toca a cada uno, agregando si fuera necesario, alguna idea a los afiches de las clases anteriores, especialmente a los afiches A1 y A2. Asunto posible a agregar: relaciones entre los repartos, las fracciones y la cuenta de dividir.
- Resolución de problemas de manera individual en el hogar para reutilizar y profundizar aspectos tratados acerca de las fracciones.

3.5. REPARTOS EQUIVALENTES QUE INVOLUCRAN LOS CONCEPTOS DE FRACCIÓN DE FRACCIÓN Y DE FRACCIONES EQUIVALENTES (CLASES 12 A 14)

En el siguiente conjunto de situaciones didácticas planificadas se propuso que los alumnos resolvieran dos problemas matemáticos en los que se requería comparar repartos y poner en juego los conceptos de fracción de fracción y de fracciones equivalentes.

Se previó presentar a los niños en primer lugar el siguiente problema para que resolvieran en parejas:

Decidan si con el reparto a) cada amigo recibe la misma cantidad que con el reparto b). Luego anoten las expresiones fraccionarias que surgen de cada reparto, analicen y argumenten si son o no equivalentes. Si piensan que las expresiones fraccionarias son equivalentes, encuentren un modo de "pasar" de una a otra[21].

Para repartir 23 chocolates entre 5 amigos se pensaron dos maneras diferentes:

a) 23 chocolates entre 5 da 4 chocolates para cada uno, pues 4x5=20 y sobran 3 chocolates, cada uno de los 3 chocolates que sobran se corta en cinco partes y se entrega una parte de cada chocolate a cada chico.

b) *4 chocolates a cada uno, se corta cada uno de los 3 chocolates restantes por la mitad y se le da una mitad a cada chico; luego se divide el último medio en 5 y se entrega una parte a cada uno.*

La comparación de dos modos propuestos para resolver el mismo reparto requería tomar como objeto de análisis las relaciones puestas en juego en esos procedimientos para dar argumentos sobre su equivalencia. De esta manera se trascendía el plano de la acción que suponía resolver el reparto y se introducía a los niños en la práctica de la argumentación.

Una cuestión particular que podría movilizar el análisis del reparto b) era el cálculo de la fracción de una fracción al tener que dividir una de las mitades del chocolate en cinco partes iguales.

Se planificó que luego de este momento el docente gestionara una puesta en común de las resoluciones y se retomaran cuestiones trabajadas en clases anteriores para continuar profundizando en las relaciones estudiadas. Como para los problemas precedentes, durante la resolución se pensó que estuvieran disponibles los afiches elaborados en clases anteriores por si los niños necesitaban recuperar, sin indicación del docente, escrituras previas de conclusiones.

Posteriormente se previó presentar el último problema de la secuencia para que los alumnos resolvieran también en parejas.

[21] Matemática en 5° (p.83, Una vuelta de tuerca) y Plan Plurianual 5° (p.17, problema 2).

Para el día del niño, la cooperadora de la escuela regaló alfajores a los chicos de todos los grados. En 5ºB entregó una caja de 4 alfajores para los 6 varones y una caja de 6 alfajores para las 9 mujeres. Tanto los varones como las mujeres repartieron los alfajores en partes iguales y sin que les sobre nada. ¿Es cierto que cada uno de los varones comió menos cantidad de alfajor que cada una de las mujeres?

En este problema también se requería la comparación de dos repartos, pero en esta oportunidad los niños tenían que apelar al uso de fracciones equivalentes. Si bien las fracciones equivalentes ya se habían utilizado anteriormente, se esperaba que aquí se explicitara el concepto y se concluyera que cada varón comería la misma cantidad de alfajor que cada mujer de 5º año, a partir de la conversión de las fracciones resultantes de cada reparto a la fracción irreductible 2/3.

Finalmente se previó un intercambio posterior a la resolución en el que se apuntaría a discutir sobre estos aspectos de la fracción.

En síntesis, para el último conjunto de situaciones didácticas se planificaron los siguientes problemas matemáticos e intercambios:

- Resolución de problema en parejas: *Decidan si con el reparto a) cada amigo recibe la misma cantidad que con el reparto b). Luego anoten las expresiones fraccionarias que surgen de cada reparto, analicen y argumenten si son o no equivalentes. Si piensan que las expresiones fraccionarias son equivalentes, encuentren un modo de "pasar" de una a otra. Para repartir 23 chocolates entre 5 amigos se pensaron dos maneras diferentes: a) 23 chocolates entre 5 da 4 chocolates para cada uno, pues 4x5=20 y sobran 3 chocolates, cada uno de los 3 chocolates que sobran se corta en cinco partes y se entrega una parte de cada chocolate a cada chico. b) 4 chocolates a cada uno, se corta cada uno de los 3 chocolates restantes por la mitad y se le da una mitad a cada chico; luego se divide el último medio en 5 y se entrega una parte a cada uno.*
- Puesta en común de las resoluciones. Concepto de fracción de fracción.
- Resolución de problema en parejas: *Para el día del niño, la cooperadora de la escuela regaló alfajores a los chicos de todos los grados. En 5ºB entregó una caja de 4 alfajores para los 6 varones y una caja de 6 alfajores para las 9 mujeres. Tanto los varones como las mujeres repartieron los alfajores en partes iguales y sin que les sobre nada. ¿Es cierto que cada uno de los varones comió menos cantidad de alfajor que cada una de las mujeres?*
- Puesta en común de las resoluciones. Concepto de fracción equivalente.

3.6. Sistematización o recapitulación de distintos aspectos de las fracciones tratados en las situaciones de la secuencia (Clases 15 a 17)

El tramo final de la secuencia incluyó algunas situaciones de escritura que tenían el propósito de sistematizar lo aprendido. Se planificó en primer lugar la presentación de una situación de escritura individual en la que se pedía a los niños que elaboraran un "machete"[22] para una evaluación escrita con todo lo aprendido sobre fracciones a partir de la revisión de sus carpetas y afiches. Para elaborar estas notas para el estudio, los alumnos debían necesariamente realizar una lectura individual de estos materiales.

El texto que los niños debían producir revestía cierta complejidad dado que en primer lugar era un apunte que los tenía a ellos mismos como destinatarios, pero además sería leído por otro compañero y era necesario que éste lo pudiera entender. Esta condición debía ser anticipada a los niños para que lo tuvieran en cuenta en la textualización. Por otra parte, era importante que consideraran que ese texto individual sería utilizado para elaborar una producción colectiva.

Luego se propondría una situación de revisión de los apuntes escritos para lo cual se intercambiarían las producciones entre compañeros. El alumno "revisor" debía analizar si "se entendía" lo escrito por el compañero y sugerir las aclaraciones que creyera necesarias. No debía agregar nuevas ideas si consideraba que faltaban en el texto. Cada alumno incorporaría a su propio texto las sugerencias realizadas por el alumno "revisor", si le parecían pertinentes. Por eso, esta situación de revisión sería sucedida por una situación de reescritura individual en la que cada integrante de la pareja realizaría en su propia producción las modificaciones que considerara pertinentes.

Para finalizar, como cierre de las situaciones de escritura de la secuencia, se había planificado la producción de un texto colectivo en un afiche (A4) en el que se retomarían y, eventualmente, se profundizarían las escrituras de las notas individuales para el estudio. En la implementación hubo que acotar esta situación por razones de tiempo a la escritura en el pizarrón de un punteo que incluyera aspectos que no podían faltar en ninguno de los apuntes para la evaluación.

[22] En Argentina se denomina "machete" a un escrito realizado generalmente en pequeños trozos de papel que utilizan los alumnos de manera oculta para ayudarse en las evaluaciones. También es llamado así en Colombia; en otros países de habla hispana lo designan, por ejemplo, con el término "acordeón" en México, porque el papel se pliega formando un fuelle, "torpedo" en Chile, "trencito" en Uruguay, "chuleta" en España, etcétera. Si bien este término refiere a una actividad que se suele ocultar, en el libro que usaban los alumnos se proponían recuadros a modo de "machetes" como espacios de recapitulación o de información para recordar. Por eso en la secuencia implementada se propuso su elaboración como una anotación permitida que aportaba al proceso de estudio.

La última situación planificada en la secuencia fue la resolución individual de cuatro problemas a modo de evaluación de lo aprendido. Los niños estarían al tanto de que deberían resolverla y se les propondría que estudiaran teniendo en cuenta todos los materiales escritos disponibles (carpetas, afiches, "machete"). Además se les propondrían algunos problemas adicionales para resolver en sus casas antes de la evaluación a modo de repaso.

Durante la resolución de la evaluación, los niños podrían consultar las notas para el estudio elaboradas en la clase anterior, presentándose así una situación de posible lectura espontánea.

Los problemas previstos para presentar a los alumnos en la evaluación son los que se detallan a continuación:

1) *Encontrá tres maneras diferentes de repartir 14 chocolates entre 4 chicos, de manera que cada uno reciba la misma cantidad y no sobre nada.*

2) Un alumno de 5ºB hizo esta cuenta para resolver un problema sobre un reparto en partes iguales:

$$\begin{array}{r|l} 44 & 8 \\ \cline{2-2} 4 & 5 \end{array}$$

a) ¿Cuánto se repartió?, ¿entre cuántos se realizó el reparto?

b) ¿Cuál es el resultado del reparto si no quedó nada sin ser repartido?

3) a) Se repartieron 9 chocolates entre 12 amigos en partes iguales y sin que sobre nada. ¿Cuánto chocolate le toca a cada uno?

b) Decidí si en estos repartos equitativos en los que no sobra nada, le toca a cada uno más, menos o igual chocolate que en la parte a)

- 6 chocolates entre 8 personas

- 5 chocolates entre 6 personas

- 3 chocolates entre 4 personas

4) Explicá una manera de darte cuenta cuándo una parte es la mitad de un entero.

En síntesis, para las situaciones de sistematización o recapitulación de lo aprendido se planificaron los siguientes problemas matemáticos y propuestas de escritura y lectura:

- Situación de lectura individual de carpetas y afiches para elaborar los apuntes para la evaluación.
- Situación de escritura individual: Apuntes para estudiar en forma de "machete".
- Situación de revisión de las notas para la evaluación, elaboradas por un compañero, para hacer sugerencias de modificaciones.

- Situación de reescritura individual de las modificaciones sugeridas por el compañero que se consideran pertinentes en el propio apunte para la evaluación.
- Situación de escritura colectiva de texto común que retoma las escrituras individuales en afiche A4.
- Resolución individual de problemas a modo de repaso.
- Situación de lectura individual de carpetas, afiches y registro de notas para estudiar para la evaluación.
- Resolución individual de problemas de la evaluación.
- Situación posible de lectura individual de las notas para el estudio con el propósito de realizar consultas que ayuden a resolver la evaluación.

En este capítulo hemos descripto y analizado la secuencia de situaciones didácticas efectivamente llevada al aula detallando tanto los problemas matemáticos planteados como las situaciones de escritura propuestas.

En el próximo capítulo presentaremos el análisis de la información recogida a partir de los registros de las interacciones que tuvieron lugar en el aula a propósito de la resolución de los problemas de reparto y en torno a las escrituras vinculadas al trabajo de explicitación, reorganización y sistematización de los conocimientos que surgieron en torno a ellos.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En el presente capítulo intentaremos realizar una reconstrucción de la secuencia implementada a partir de la interpretación de un conjunto de insumos. Como se anticipó en el capítulo 2, el análisis de la información se realiza a partir de algunos registros de las interacciones que tuvieron lugar en el aula a propósito de la resolución de los problemas de reparto y en torno a ciertas escrituras vinculadas al trabajo de explicitación, reorganización y sistematización de los conocimientos que surgieron en estas situaciones[23]. Se consideran en paralelo las producciones escritas de manera colectiva en pizarrón y afiches y las que realizaron los alumnos por sí mismos en sus carpetas. El análisis se organiza en dimensiones que atraviesan las diferentes situaciones de escritura incluidas en la secuencia.

En las situaciones de producción escrita sobre los conocimientos matemáticos que surgieron en una instancia de discusión sobre problemas de reparto ya resueltos, es posible analizar el modo en que se transforman ciertos conocimientos que circulan en la clase confrontando las formulaciones orales que realizan los alumnos durante el intercambio sobre los problemas y las formulaciones que realizan durante la escritura colectiva.

En algunas de estas situaciones de producción se propuso la escritura de conclusiones colectivas a partir de escrituras realizadas en forma individual. En estas producciones es interesante explorar la naturaleza de los conocimientos que se incluyen en las escrituras de conclusiones colectivas en relación con los que se incluyen en las escrituras de conclusiones individuales para constatar si las escrituras colectivas resultan simplemente una sumatoria de las ideas de las conclusiones individuales, o si en este pasaje se genera una profundización en la conceptualización.

En ciertas situaciones de la secuencia en las que se requiere volver a leer textos propios para recuperar información antes de resolver nuevos problemas de reparto es importante analizar en primer lugar si los niños retornan al escrito de manera autónoma o si lo hacen solo bajo la indicación del docente. Además es posible indagar qué tipo de informaciones recuperan de estas producciones escritas para ser reutilizadas en problemas diferentes a los ya resueltos.

[23] En el capítulo 3 se encuentra la descripción y el análisis de la secuencia efectivamente llevada al aula en la que se detallan los problemas matemáticos y las situaciones de escritura propuestas.

En algunos casos el docente propone volver sobre los afiches con otra intención, agregar nuevas conclusiones colectivas que no se hayan incluido con anterioridad. Se trata de situaciones de lectura que están al servicio de la escritura, tienen el propósito de recordar qué se escribió para decidir si se suman o no las ideas que circularon en otras instancias de resolución. Aquí importa examinar las ideas que se van modificando o agregando en los sucesivos retornos sobre las producciones escritas y analizar cómo inciden los avances en los conocimientos matemáticos en la profundidad y riqueza de la escritura de estas conclusiones.

Por último, en las situaciones de revisión de textos producidos individualmente o en forma colectiva para volver a escribirlos es interesante estudiar cuáles son los conocimientos que se revisan y los que se transforman en situaciones de reescritura. Para ello, se confrontan las producciones escritas originales, con los aspectos señalados por los niños para revisar y las producciones que resultan de la reescritura.

En los siguientes apartados se presenta el análisis de la información, retomando los aspectos recién señalados:

- Transformación de conocimientos matemáticos en situaciones de escritura ligadas al proceso de institucionalización.
- Retorno al propio escrito para reutilizar sus ideas en nuevos problemas o para agregar conocimientos que no habían sido incluidos.
- Pasaje de los escritos individuales a las producciones colectivas.
- Conocimientos que se revisan y se transforman en situaciones de reescritura.

4.1. TRANSFORMACIÓN DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS EN SITUACIONES DE ESCRITURA LIGADAS AL PROCESO DE INSTITUCIONALIZACIÓN

En este apartado se confrontan las formulaciones que realizan los alumnos sobre las resoluciones de algunos problemas, en forma oral, durante el intercambio del grupo clase producido en las puestas en común y las formulaciones que realizan en la escritura colectiva de conclusiones.

Los primeros registros que se consideran en el análisis son los que corresponden a la resolución de los problemas de *reparto en los que la fracción resultante es menor o mayor que un entero*. En relación con ellos se analizan los registros de las situaciones de escritura colectiva que se plasmaron en los afiches A1, *"¿De qué modos diferentes se puede expresar la cantidad que le tocó a cada uno?"*, y A2, *"¿De qué maneras puedo resolver un reparto?"*.

Luego se confrontan los registros de las discusiones sobre los problemas involucrados en el conjunto de situaciones que denominamos en la secuencia *repartos de "X" chocolates* *entre "Y" niños*. En este caso la situación de escritura colectiva consistió en agregar al afiche A2 conclusiones acerca de cómo hacer para darse cuenta cuánto chocolate le toca a cada uno en el reparto. Se esperaba que los alumnos decidieran registrar la relación que existe entre el reparto de *a* unidades entre *b* partes y la fracción *a/b*.

Finalmente se examinan las discusiones en torno a la resolución de los problemas que involucran *equivalencias entre formas diferentes de expresar una misma cantidad que requieren de la relación entre fracciones y división* y los intercambios que sucedieron en la situación de escritura colectiva en la que nuevamente se pide a los niños que agreguen ideas que no incluyeron antes en los afiches A1 y A2. En esta oportunidad se esperaba que pudieran dar cuenta por escrito de la relación entre los repartos y la cuenta de dividir.

4.1.1. EN REPARTOS EN LOS QUE LA FRACCIÓN RESULTANTE ES MENOR O MAYOR QUE 1

4.1.1.1. ANÁLISIS DE LA PUESTA EN COMÚN DE LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE REPARTO EN EL QUE LA FRACCIÓN RESULTANTE ES MENOR QUE UN ENTERO Y ESCRITURA COLECTIVA QUE RESPONDE A LA PREGUNTA ¿DE QUÉ MODOS DIFERENTES SE PUEDE EXPRESAR LA CANTIDAD QUE LE TOCÓ A CADA UNO? (CLASE 1)

4.1.1.1. a. Puesta en común

Como se mencionó en el capítulo 3 en el que se describe y analiza la secuencia planificada, en la primera clase se propuso a los alumnos que resolvieran en grupos el siguiente problema:

> *El papá de Camilo compró 3 chocolates para repartir en partes iguales entre sus 4 hijos y que no sobre nada. ¿Cuánto chocolate comió cada uno?*

Una vez que los grupos terminaron de resolver la docente propuso realizar un intercambio colectivo con el propósito de sistematizar los procedimientos utilizados. Para comenzar este momento asignó un número a cada uno de los grupos que indicaba el orden en que expondrían su resolución. El criterio que usó para asignar los números estaba vinculado a los modos de resolver que había observado en los grupos de tal modo que primero se expusieran los procedimientos apoyados en el dibujo y luego los que utilizaban cálculos. La dinámica que propuso fue que los niños de cada grupo indicaran qué cantidad de chocolate pensaban que había comido cada hijo para luego dar lugar a la explicación del procedimiento utilizado por cada grupo para llegar a esa conclusión. Los grupos coincidieron en que la cantidad que le había tocado a cada hijo era ¾ y la docente pasó rápidamente al intercambio sobre los diferentes modos de resolver registrando en el pizarrón lo que los alumnos explicaban.

El procedimiento utilizado por los primeros grupos que expusieron consistió en dibujar los tres chocolates, partirlos en 4 partes cuadradas iguales, colocar el número 1 que representaba al primer hijo en uno de los cuartos de cada chocolate, el número 2 que representaba al segundo hijo en otro de los cuartos de cada chocolate y así sucesivamente hasta llegar a los 4 hijos que mencionaba el enunciado del problema. Obtuvieron la cantidad que correspondía a cada hijo contando los 3 números 1 que habían escrito en cada chocolate, los 3 números 2, los 3 números 3 y los 3 números 4. Se trata de un procedimiento gráfico que requiere necesariamente del conteo para obtener el resultado y, por otra parte, de interpretar que las tres partes son cuartos del entero, ¾, y no 3/12, como podría suponerse si se considerara el total de los cuartos de los tres chocolates enteros.

La docente registró en el pizarrón algunas variantes en las representaciones de este modo de resolver, por ejemplo, diferentes formas de las partes en que se dividió cada chocolate o el dibujo de los 4 hijos numerados del 1 al 4 para hacerlos corresponder con los números indicados en las partes de cada chocolate, o la indicación de esta correspondencia con diferentes colores. La docente señaló que estas formas de resolver eran similares aunque las partes en que dividieron los chocolates fueran de distinta forma y aclaró que no iban a repetir los procedimientos que eran parecidos a los que ya habían expuesto.

Uno de los niños de estos primeros grupos introdujo una idea distinta, explicó que numeró las partes de diferente manera a las anteriores. Él colocó en las partes de los chocolates, tres veces consecutivas el número 1, otras tres veces consecutivas el número 2 y del mismo modo los números 3 y 4. El intercambio que se produjo entre el alumno y la docente a propósito de este procedimiento fue el siguiente:

(C1,m28.20-29.40)

1. *Docente: Joaquín, ¿vos desde el principio sabías que tenías que darle 3 partes a cada uno?*
2. *Joaquín B.: Supuse porque alguna vez hice ese cálculo. Alguna vez me lo tomaron*[24]*.*
3. *Docente: ¿Y qué es lo que vos sabés de esa vez que te tomaron?*
4. *Joaquín B.: Porque era 3.*
5. *Docente: Si yo te hubiese dado otra fracción… otro reparto entre otra cantidad de chocolates…*
6. *Joaquín B.: Siempre empiezo probando con 3… no sé por qué pero siempre empiezo con 3…*
7. *Docente: Bueno, después más adelante, vamos a ver si se puede empezar siempre con 3.*
8. *Joaquín B.: Si no me da, empiezo con otro, con otro…*
9. *Docente: Vas probando…*
10. *Joaquín B.: Sí, primero lo de atrás y después lo de adelante.*
11. *Docente: ¿Pero será casual que vos empezaste con 3?*
12. *Joaquín B.: Siempre me gusta empezar con 3, dije, debe ser con 3, 3 chocolates…*
13. *Docente: Ah! Bueno, no es porque sí, ¿vos empezás con 3 por qué?*

[24] La expresión "me lo tomaron" se refiere a que alguna vez tuvo que resolver el mismo cálculo en una evaluación.

14. Joaquín B.: Especialmente porque son 3 chocolates.

Este diálogo entre la docente y Joaquín B. muestra que desde el inicio de la situación comenzaron a circular conocimientos vinculados a la posibilidad de anticipar la fracción resultante sin necesidad de contar las partes. Si bien la docente intervino para que Joaquín B. los explicite, no se detuvo para promover su análisis aparentemente debido a que se retomarían más adelante en el desarrollo de la secuencia.

Las resoluciones de otros grupos incluían el dibujo de los chocolates y el cálculo ½ + ¼ = ¾. En la exposición se puso en evidencia que el dibujo no siempre se usó como apoyo para resolver. En varios grupos fue realizado como parte de la justificación de por qué comía ¾ de chocolate cada hijo y no como un paso necesario para llegar al cálculo. Este orden temporal entre cálculo y dibujo fue respetado por la docente al registrar el procedimiento en el pizarrón. La distinción entre los momentos en que se realizan las anotaciones remite a las funciones que pueden cumplir las escrituras infantiles en la resolución de problemas, en un caso estas cumplirían una función epistémica que pone en juego los procesos constructivos y en el otro, una función comunicativa, a modo de relato de lo realizado (Wolman, 2010).

Por último, una de las resoluciones consistió en hacer un dibujo en el que partían dos chocolates en octavos y uno en cuartos. Para explicar cómo obtuvieron el resultado ¾, los alumnos apelaron a la equivalencia 4/8 = ½, para luego llegar al mismo cálculo que los grupos anteriores, ½ + ¼ = ¾.

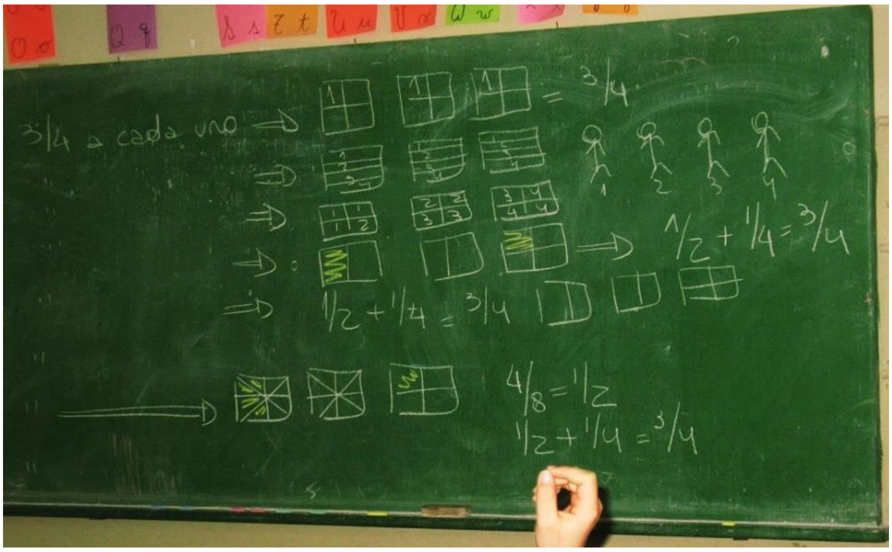


Figura 1: Producciones registradas por la docente en el pizarrón durante la puesta en común del problema “El papá de Camilo compró 3 chocolates para repartir en partes iguales entre sus 4 hijos y que no sobre nada. ¿Cuánto chocolate comió cada uno?”

Al exponerse este último procedimiento, un niño de otro grupo acotó que la cantidad resultante podría haberse expresado como 6/8. A partir de tal intervención, se suscitó un debate en el que los alumnos pusieron en juego los conocimientos que tenían disponibles –y que posiblemente fueron construidos a partir del trabajo con fracciones realizado en 4° año- sobre la equivalencia entre fracciones y sobre algunos aspectos que caracterizan a los números fraccionarios en relación con los números naturales:

(C1,m43.00-49.20)

15. *Sofía O.: Yo pensé algo pero no lo escribimos.*
16. *Docente: ¿Qué pensaste?*
17. *Sofía O.: Había pensado lo mismo que Sofi (otra alumna del mismo nombre), se puede dividir en cuartos o se puede dividir en octavos.*
18. *Algunos alumnos: ¿Eh?*
19. *Docente: ¿Por qué?*
20. *Sofía O.: Porque cuartos… octavos es el doble de…*
21. *Joaquín B.: …es el doble de cuartos.*
22. *Sofía O.: 4 es el doble de… no, 8 es el doble de 4, entonces si son octavos lo vas a dividir más pero siempre te va a dar la misma cantidad, no sé cómo explicarlo.*
23. *Docente: Sofía está diciendo esto, escuchen, que 8 es el doble de 4 y que si ella lo divide en 8, ¿qué pasa?, ¿podés llegar a darle la misma cantidad que ¾ si es en octavos?*
24. *Sofía O.: Le vas a dar lo mismo, nada más que lo vas a dividir más.*
25. *Docente: ¿Están de acuerdo con esto que está diciendo Sofía, que yo lo podría haber expresado con octavos?*
    (Nadie responde)
26. *Docente: ¿Es similar a lo que hizo qué grupo?*
27. *Algunos alumnos: el 7 (se refieren al grupo que partió dos de los chocolates en octavos).*
28. *Docente: Todos hallaron la misma respuesta…*
29. *Sofía O.: Le va a dar 6/8 si… 8 es el doble de 4, tenés que hacer el doble de 3 para que sea la misma cantidad.*
30. *Docente: ¿Siempre me va a dar que yo piense así de esa manera?*
31. *Sofía O.: Sí*
32. *Docente: ¿O solamente se va a dar con cuartos y octavos?*
33. *Sofía: No, también es con tercios y sextos.*
34. *Docente: ¿Por qué?*
35. *Joaquín B.: ¡Pueden ser dieciséistavos!*
36. *Docente. ¿Dieciséis cuánto?*
37. *Joaquín B.: Estavos, no sé cómo se dice.*
    (Risas)
38. *Docente: A ver, escuchen lo que está diciendo Sofía. Sofía después de toda esta discusión se está dando cuenta de que en vez de poner ¾ podrían haber puesto 6/8. Está diciendo que si en vez de trabajar con cuartos ella (la alumna del grupo 7) hubiera trabajado con octavos era lo mismo. Yo le pregunté si siempre pasa eso y ella me dijo que sí. ¿En qué casos pasa también?*
39. *Sofía O.: En 3 con los sextos…*
40. *Joaquín B.: En tercios.*
41. *Sofía O.: (se corrige) En tercios con sextos.*
42. *Docente: ¿Y por qué será que pasa eso? ¿Marcos?*
43. *Marcos: Porque octavos es la mitad de cuartos.*
44. *Algunos alumnos: ¡Al revés!*
45. *Docente: A ver, escuchen esto que dice Marcos.*
46. *Fabricio: Un octavo es menos que un cuarto (enfatiza la palabra menos, como oponiéndose a lo dicho por Marcos).*
47. *Docente: ¿Y Marcos qué dijo?*

48. *Joaquín B.: Que es un múltiplo.*
49. *Algunos: ¡No!*
50. *Docente: Marcos, ¿podés repetir lo que vos dijiste?*
51. *Marcos: Que el octavo es la mitad del cuarto y que sería como el múltiplo, que 14 es la mitad del 7.*
52. *Varios: ¿Cómo? No, 7 es la mitad de 14. 14 es el doble de 7.*
53. *Docente: Fabri, vos le dijiste una acotación a Marcos como si él estuviese diciendo algo diferente. Vos estás diciendo que 1/8 es la mitad de ¼, ¿no? Y él está diciendo que 8 es múltiplo de 4. Y que pasa lo mismo, podés hacer la misma fracción con 7 y 14. ¿Por qué pensás eso, Marcos?, ¿de qué te sirve eso de los múltiplos?*
54. *Marcos: Porque me ayuda a pensar que es la mitad de ese número.*
55. *Docente: Vos estás diciendo que el 8 es múltiplo de 4 y un octavo es la mitad de un cuarto. ¿Estamos todos de acuerdo en que yo podría haber expresado de otra forma eso (el ¾)?*
    (Nadie responde)
56. *Investigadora (Inv.): Si 8 es el doble de 4, ¿1/8 es el doble o la mitad de ¼?*
57. *Fabricio: En fracciones es la mitad pero en números es el doble.*
    (Murmullo, varios quieren participar)
58. *Lucas: Porque cuando lo cortás, suponete un chocolate, 1/8 es más chiquito porque vos estás separando un chocolate en más partes y ¼ es más grande porque lo estás cortando en 4 partes. Lo estás cortando en más…*
59. *Inv.: ¿Están de acuerdo con lo que dice él (Lucas)?*
60. *Valentino: Yo lo explicaría así, por ejemplo, un entero es más grande que ¼ porque es como al revés, el número es más grande y es más pequeño el tamaño, cuanto más lo cortás, más chiquito es…es al revés que los números normales, cuanto más número, es más chiquito lo que vas a tener que cortar… cuanto más grande el número más chiquito vas a tener que ir haciendo la fracción.*

En este fragmento de la clase se observa que los alumnos ya disponían de algunos conocimientos en torno a las fracciones equivalentes:

- las fracciones equivalentes pueden expresar la misma cantidad aunque el entero "se divida más veces" (intervenciones 22 y 24),
- un número mayor en el denominador supone que se divide en más partes al entero y, a la vez, resulta menor el tamaño de esas partes (intervenciones 46, 51, 54, 58 y 60)
- para obtener fracciones equivalentes es posible calcular el doble del denominador y del numerador (intervenciones 29 y 33).

Sin embargo, es claro que aún no todos consideraban la necesidad de realizar el mismo cálculo multiplicativo, en simultáneo, con numerador y denominador, ni tampoco la posibilidad de realizar esta operación no solo con los dobles sino con cualquier número entero. Además se pone en evidencia que ya habían comenzado a construir algunos conocimientos vinculados a las características de las expresiones fraccionarias contrapuestas con las aprendidas con anterioridad respecto de los números naturales: a diferencia de los números naturales, en las fracciones con numerador 1, cuanto mayor es el denominador, menor es la cantidad que expresa el número. En palabras de Valentino (intervención 60): "es al revés que los números 'normales', cuanto más número, es más chiquito lo que vas a tener que cortar".

4.1.1.1. b. Escritura colectiva

Posteriormente la docente propuso una situación de escritura colectiva en un cartel colgado en el pizarrón con el propósito de sistematizar de qué maneras se puede expresar ¾ teniendo en cuenta las ideas que habían circulado en el intercambio transcripto en el registro anterior. Escribió el título en el cartel A1: *"¿De qué modos diferentes se puede expresar la cantidad que le tocó a cada uno?"* y, para organizar la situación de escritura, la docente pidió que primero le dicten de qué maneras se podía expresar esa cantidad y que luego expliquen por qué esa expresión era equivalente a ¾.

Los niños propusieron representaciones de ¾, varias de ellas no habían surgido en la puesta en común sobre la resolución del problema: 6/8; 12/16; ½ + ¼; ¼ + ¼ + ¼; 12/4 :3; 24/32; 4/8 + ¼ y 1 - ¼. Si bien al planificar la situación se había anticipado que iban a proponer representaciones ligadas a los procedimientos utilizados para resolver el problema, los alumnos fueron dictando expresiones del número a partir de la búsqueda de fracciones equivalentes con números cada vez más altos en el numerador y en el denominador, expresiones con cálculos aditivos y con otro cálculo novedoso para ellos, como 12/4 :3, que la docente incluyó aunque fuera una solución errónea. Las justificaciones se apoyaron en relaciones matemáticas entre los números, de manera descontextualizada del reparto de los 3 chocolates entre los 4 niños. La situación de escritura se transformó así en un problema diferente al que le dio origen.

Al dictar ½ + ¼, una alumna se mostró dubitativa porque no era un solo número fraccionario sino una descomposición aditiva de ¾. La docente aclaró que no se habían puesto restricciones respecto de la posibilidad de usar signos para expresar la cantidad en cuestión. Esta aclaración habilitó a que otros niños propusieran ¼ + ¼ + ¼ y 1 - ¼, expresiones aditivas que tampoco habían circulado en la puesta en común.

La escritura de las argumentaciones para justificar por qué las representaciones propuestas eran equivalentes a ¾ generó un extenso intercambio que propició cierto avance en el establecimiento de relaciones que no habían surgido antes en la clase o que habían sido mencionadas sin llegar a profundizarse o sin ser comprendidas por la mayoría de los alumnos.

(C1,m56.53-59.37)

1. *Docente: Sofi, ¿por qué 6/8 es lo mismo que ¾?*
2. *Sofía O.: Un entero en octavos es 8 octavos.*
3. *Docente: ¿Cómo pongo?, ¿lo pongo en fracción o en palabras, cómo querés?*
4. *Sofía O.: (dicta) Un entero es 8.*
5. *Docente: (escribe) "Un entero en 8 (octavos)".*
6. *Sofía O.: Y un entero también es 4 cuartos.*
7. *Docente O.: (escribe) "Un entero en 4 es 4 cuartos".*
8. *Yael: Sofía, me perdí, ¿qué tiene que ver?*

(Algunos alumnos leen lo que escribe la docente y no entienden)

9. *Fabricio: Porque también 6/8 no completa el entero…*
10. *Docente: (lee) Un entero en 8, un entero en 4… (dice) Está perfecto, yo estoy copiando lo que vos estás diciendo, dale.*
11. *Sofía O.: Porque 8 es el doble de 4… porque un entero se va a dividir más… 8, se divide en 8 octavos, se va a dividir más, va a dar la misma cantidad pero se va a dividir más.*
12. *Docente: ¿Cómo lo pongo?*
    (Sofía y varios alumnos se ríen por la insistencia de la docente en preguntar cómo lo escribe)
13. *Fabricio: Y claro, que 6 es el doble de 3 y 8 es el doble de 4.*
14. *Alumno: Yo la haría más fácil.*
    (Sofía O. sigue intentando expresar sus ideas en lenguaje escrito para poder dictar)
15. *Docente: A ver, Fabri, cómo podemos poner.*
16. *Fabricio: (dicta) Porque 6 es el doble de 3, (dice) y sería más veces que lo dividís… igual que 8 es el doble de 4.*
17. *Docente: (escribe) "Porque como se divide más", (lo va leyendo en forma de pregunta mientras escribe para que los niños continúen dictando) ¿Porque como se divide más…?*
18. *Sofía O.: (dicta) Tenés que poner el doble… para que te dé la misma cantidad.*
19. *Fabricio: (dicta) Si se divide en más partes tenés que poner el doble.*
20. *Docente: (escribe) "Tenés que poner el doble para que sea la misma cantidad". (dice) ¿Así?*
21. *Inv.: Chicos (a toda la clase), fíjense si a alguno de los que propusieron esas escrituras le sirve la explicación que está inventando este grupo.*
22. *Docente: ¿Ahí? (lee) Porque como se divide más tenés que poner el doble.*
    (Queda escrito al lado de 6/8: "Un entero en 8 (octavos) // Un entero en 4 es 4 cuartos // Porque como se divide más tenés que poner el doble para que sea la misma cantidad")

Al analizar la continuidad de las ideas discutidas en la situación de escritura colectiva acerca de las diferentes formas de expresar el resultado con respecto a las que circularon en la puesta en común sobre la resolución del problema, se observa que en la primera instancia los niños lograron enunciar la relación de equivalencia entre ¾ y 6/8 justificando que el numerador 6 y el denominador 8 se obtenían calculando el doble de 3 y 4 respectivamente (C1,m43.00-49.20, intervención 29). Sin embargo, en el momento de la escritura colectiva, ante la exigencia de expresar esas ideas en lenguaje escrito para ser dictado a la docente, la relación entre estas fracciones equivalentes no parece fácil de explicar. Llevó varios minutos de discusión acordar cómo pondrían esas ideas en el afiche y se hizo necesario volver a dar razones para justificar que "va a dar la misma cantidad pero se va a dividir más" (intervención 11) o que "6 es el doble de 3… igual que 8 es el doble de 4" (intervención 16).

A través de la pregunta "¿Cómo lo pongo?" (intervenciones 3, 12 y 15), la docente propicia que los niños distingan entre la forma de expresarse en la oralidad y la forma de "decir en lenguaje escrito" para dictar (Teberosky y Fabbretti, 1993; Lerner y otros, 1996). Esta exigencia que se sostiene a lo largo de toda la secuencia genera condiciones para que los alumnos sean más rigurosos en sus definiciones y progresen en la conceptualización de las fracciones. No obstante, en ciertos casos pareciera que el grado de precisión que requiere la escritura incide en que los niños se centren en el proceso redaccional y no incluyan todo lo que saben en el texto que producen. Tal es el caso del intercambio precedente en el que algunos alumnos establecieron relaciones entre numerador y denominador para explicar la equivalencia dando indicios de concebir a la fracción como una relación entre dos números. Sin embargo, lo que quedó escrito en el cartel no constituye una justificación suficiente, "Porque como se divide más tenés que poner el doble para que sea la misma cantidad", ya que allí no fue explicitado que para obtener una fracción equivalente es necesario duplicar simultáneamente tanto el numerador como el denominador. Esta falta de correspondencia entre lo que los niños formulan en el momento del intercambio sobre el problema y las ideas que incluyen en la escritura colectiva se puso de manifiesto en varias oportunidades a lo largo de la secuencia. Si bien en esta investigación partimos de la idea de que la escritura propicia la transformación de conocimientos, podemos hipotetizar que en ciertas situaciones la preocupación por "cómo" escribir descentra a los niños del contenido que intentan incluir en el texto[25]. Es así que las producciones sobre lo aprendido no siempre permiten acceder en forma completa a los conocimientos de los alumnos.

Luego de escribir la justificación de por qué 6/8 era un modo de representar ¾, se pidió a los niños que analizaran si esta explicación servía para otras expresiones anotadas en el cartel. Varios niños afirmaron que efectivamente, servía para sus expresiones:

(C1,m59.50-1:03.58)

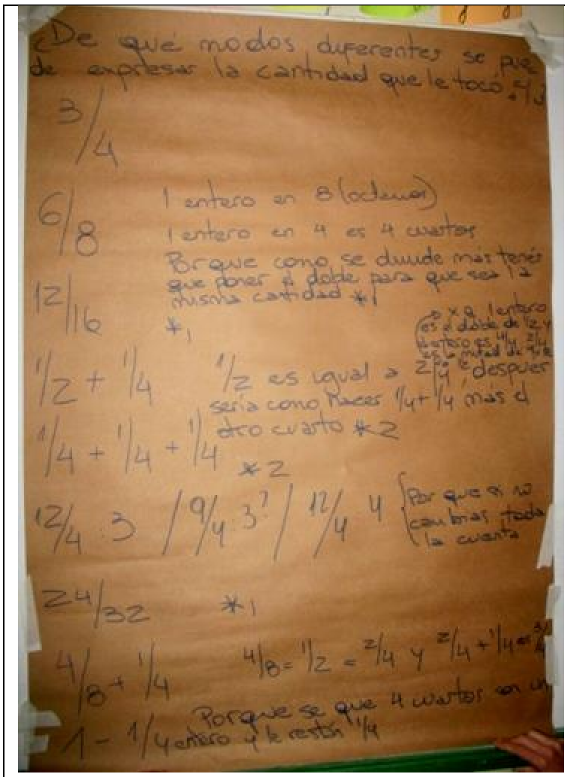
23. *Docente: A ver, vamos a hacer esto, yo pongo así, (escribe) *1, (dice) y le vamos a poner a la expresión que le corresponde la misma argumentación.*
24. *Natalí: Sirve para la de abajo (se refiere a 12/16)*
25. *Docente: ¿Están todos de acuerdo que esto sirve para la de Fabri?*
26. *Yael: Sí, y para la de Ramiro también (se refiere a 24/32).*
27. *Docente: Ramiro, ¿sirve?*
28. *Ramiro: Sí.*
29. *Docente: ¿Hay para alguna otra que sirva?*
30. *Fabricio: ¿En 12/4 dividido 3?*

Aunque no se analizaron las razones por las que les servía la explicación anotada en el cartel para las demás expresiones, es importante destacar que esta propuesta promovió que los niños de algún modo agruparan las expresiones que se relacionaban multiplicativamente con ¾ y dejaran por fuera a las composiciones aditivas. La discusión sobre la inclusión de 12/4

[25] Algunos autores que estudian la escritura al servicio de la adquisición de conocimientos también señalan que los alumnos no incluyen en sus textos todo lo que saben sobre un tema, aunque no hemos relevado estudios que muestren que esto se deba a que están centrados en el proceso redaccional. Como se mencionó en el capítulo 1, al indagar el modo en que pueden operar las consignas en la posibilidad de que los alumnos desplieguen los contenidos aprendidos sobre un tema, particularmente en el uso de las producciones escritas para la evaluación, Aisenberg encontró que "la situación de evaluación puede «empujar» a los alumnos a ajustarse a lo que interpretan que les piden y esto puede impedir que desplieguen lo que aprendieron" (Aisenberg, 2012:6). Por su parte, Perelman (2008) en su estudio sobre la construcción de resúmenes también abona en este sentido al afirmar que los niños muestran una tendencia a la literalidad respecto del texto-fuente y no incluyen todo lo que han comprendido en sus lecturas sobre el tema en cuestión aunque los conocimientos que han elaborado sí pueden constatarse en una situación dialógica.

dividido 3 en este conjunto de expresiones permitió arribar a la conclusión de que se trataba de una expresión errónea y reemplazarla por 9/4 dividido 3.

La justificación de por qué ¾ es igual a ½ + ¼, una de las composiciones aditivas, generó menos debate. Una de las alumnas explicó que ½ es igual a 2/4 y que "sería como hacer ¼ + ¼ más el otro cuarto". Otro niño agregó: "te das cuenta que ½ es 2/4 porque si 4/4 es un entero, la mitad es 2/4" y de esta misma idea desprendió su argumentación para justificar por qué 1 - ¼ es igual a ¾. La explicitación de estos razonamientos promovió que otra alumna introdujera una nueva relación: "a 100 lo divido en 4 y te da 25, entonces a 100 le resto 25 y te da 75". No todas estas ideas pudieron ser tomadas por la docente para escribir en el afiche, dado que había terminado la hora de clase.



Transcripción de la escritura del cartel:
¿De qué modos diferentes se puede expresar la cantidad que le tocó a c/u?

¾	
	1 entero en 8 (octavos) 1 entero en 4 es 4 cuartos
6/8	Porque como se divide más tenés que poner el doble para que sea la misma cantidad *1
12/16 *1	xq 1 entero es el doble de ½ y el entero es 4/4, 2/4 es la mitad de 1 y sería 1/2
½ + ¼	½ es igual a 2/4, después sería como hacer ¼ + ¼ más el otro cuarto *2
¼ + ¼ + ¼	*2
12/4:3 9/4:3	12/4:4 Porque si no cambiás toda la cuenta
24/32	*1
4/8 + ¼	4/8=1/2 =2/4 y 2/4+ ¼ es ¾
1 – ¼	Porque se que 4 cuartos son un entero y le restás ¼

Figura 2: Cartel A1 elaborado en situación de escritura colectiva: ¿De qué modos diferentes se puede expresar la cantidad que le tocó a cada uno?

En síntesis, destacamos que esta escritura colectiva propició ciertos avances en los conocimientos que circularon en la puesta en común del primer problema. Al escribir el cartel los alumnos se enfrentaron a un nuevo problema matemático que requería proponer modos diferentes de expresar la fracción ¾. El problema al que se enfrentaban para escribir las diferentes representaciones de la fracción en el afiche estaba descontextualizado del problema original de resolución de un reparto. Esto incidió en que fuera posible cierta profundización y el establecimiento de algunas nuevas relaciones matemáticas sobre las fracciones.

4.1.1.1. c. Síntesis de algunos conocimientos infantiles que circularon en la puesta en común del problema: "El papá de Camilo compró 3 chocolates para repartir en partes iguales entre sus 4 hijos y que no sobre nada. ¿Cuánto chocolate comió cada uno?" y en la situación de escritura colectiva del cartel: "¿De qué modos diferentes se puede expresar la cantidad que le tocó a cada uno?"

Asuntos	Algunos conocimientos que circularon en la puesta en común sobre los modos de resolver el problema	Algunos conocimientos que circularon en la situación de escritura colectiva
Equivalencia entre las particiones del entero	(intervención 17). "El entero se puede dividir en cuartos o se puede dividir en octavos". (intervención 24). "Le vas a dar lo mismo, nada más que lo vas a dividir más"	(intervenciones 2 y 6). "Un entero en octavos es 8 octavos… Y un entero también es 4 cuartos". (intervención 9). "Porque también 6/8 no completa el entero…"
Relaciones entre numerador y denominador de las fracciones equivalentes	(intervención 22). "8 es el doble de 4, entonces si son octavos lo vas a dividir más pero siempre te va a dar la misma cantidad que ¾". (intervención 29). "8 es el doble de 4, tenés que hacer el doble de 3 para que sea la misma cantidad". (intervenciones 51 y 54). "8 es el doble de 4, pensar en que 8 es múltiplo de 4 ayuda a saber que 4 es la mitad de 8 y los octavos son la mitad de los cuartos".	(intervención 11). "Porque 8 es el doble de 4… porque un entero se va a dividir más… 8, se divide en 8 octavos, se va a dividir más, va a dar la misma cantidad pero se va a dividir más". (intervención 13). "6 es el doble de 3 y 8 es el doble de 4". (intervención 16). "Porque 6 es el doble de 3, y sería más veces que lo dividís… igual que 8 es el doble de 4". (intervenciones 18 y 19). "Tenés que poner el doble… para que te dé la misma cantidad". "Si se divide en más partes tenés que poner el doble".
Indicios de generalización de conocimientos sobre fracciones equivalentes	(intervención 33). "Esto pasa siempre, con cuartos y octavos y también con tercios y sextos".	(intervenciones 24, 26 y 28). La explicación de la equivalencia entre ¾ y 6/8 también sirve para explicar la equivalencia de estas fracciones con 12/16 y con 24/32.
Características de los números fraccionarios	(intervención 60). "Es al revés que los números normales, cuanto más número, es más chiquito lo que vas a tener que cortar… cuanto más grande el número más chiquito vas a tener que ir haciendo la fracción".	
Equivalencias entre composiciones aditivas		(registro sin transcribir). "½ es igual a 2/4, sería como hacer ¼+¼ más el otro cuarto"

Al poner en relación las formulaciones que hicieron los niños en la puesta en común de la resolución del problema y en la situación de escritura colectiva, identificamos algunos asuntos que se trataron en una situación y no en la otra y otros asuntos que se trataron en ambas.

En primer lugar, observamos que la equivalencia entre diferentes particiones del entero se trató en ambas situaciones. En la puesta en común los alumnos aluden a la posibilidad de partir el entero en diferente cantidad de partes, cuartos y octavos, y a la de obtener fracciones equivalentes con un entero dividido en distinta cantidad de partes. Ellos no aclaran en este caso cómo lo harían ni refieren a la cantidad que sería necesaria en el numerador de la fracción. En la situación de escritura enriquecen esta idea especificando la relación entre las diferentes particiones y el entero: en un caso se requieren 8 de esas partes para formar el entero, en el otro caso se requieren 4. Aquí estarían poniendo en juego la relación 1 = 8/8 = 4/4. Además vinculan 6/8 con ¾ al compararlas con el entero porque se trata de fracciones que no lo completan, aunque este criterio no sea suficiente para justificar la equivalencia entre ellas.

Al analizar las formulaciones respecto de otro asunto vinculado al anterior, las relaciones entre numerador y denominador de las fracciones equivalentes, encontramos que tanto en la puesta en común como en la situación de escritura los alumnos plantean que si se calcula el doble de la cantidad de partes de ¾ -el doble de 4-, es posible obtener una fracción equivalente duplicando la cantidad que corresponde al numerador, ¾ = 2.3 / 2.4 = 6/8. En ambos casos los alumnos muestran cierto dominio de una técnica, aunque ese conocimiento no es suficiente para permitirles enunciar las razones de esta relación ni dar cuenta explícitamente de la simultaneidad necesaria en el cálculo de ambos dobles. Es posible que por esa misma razón no hayan logrado expresar con claridad tal relación en la escritura del afiche.

También en ambas situaciones encontramos intervenciones de los alumnos en las que subyacen ciertos indicios de generalización de los conocimientos sobre fracciones equivalentes. En la puesta en común los niños pueden extender la relación encontrada entre ¾ y 6/8 a “los cuartos” y “los octavos”, así como a “los tercios” y “los sextos”, refiriéndose a los denominadores de ciertas fracciones sin importar qué números podrían estar involucrados en los numeradores. En la situación de escritura se pone en evidencia que los niños pueden extender la relación entre ¾ y 6/8 a otras fracciones utilizando también la técnica de calcular sucesivamente el doble del numerador y del denominador: ¾ = 6/8 = 12/16 = 24/32.

Un asunto que solo se discutió en la puesta en común del problema y no se retomó en la situación de escritura, posiblemente porque se centraron en la equivalencia entre fracciones, se refiere a una característica de los números fraccionarios que los diferencia de los números naturales. Los niños advirtieron que en los números naturales, cuanto mayor es el número, mayor es la cantidad que representa, en cambio, en los números fraccionarios con numerador 1, si $a > b$, $1/a < 1/b$.

Por último, en la situación de escritura pudo profundizarse sobre la equivalencia entre diferentes descomposiciones aditivas de 3/4, asunto que solo había sido esbozado en el momento de la puesta en común al presentarse el cálculo ½ + ¼ = ¾ como uno de los procedimientos de resolución del problema. La escritura favoreció que los niños establecieran las razones por las que se cumplen las igualdades: ¾ = ½ + ¼ = 2/4 + ¼ = ¼ + ¼ + ¼.

4.1.1.2. ANÁLISIS DE LA PUESTA EN COMÚN DE LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE REPARTO EN EL QUE LA FRACCIÓN RESULTANTE ES MAYOR QUE UN ENTERO Y ESCRITURA COLECTIVA QUE RESPONDE A LA PREGUNTA ¿DE QUÉ MANERAS PUEDO RESOLVER UN REPARTO? (CLASE 2)

4.1.1.2. a. Resolución del problema

En la siguiente clase se propuso a los alumnos que resolvieran en parejas el segundo problema de la secuencia:

¿Cómo se podrá hacer para repartir 7 chocolates entre 4 amigos de manera que todos reciban la misma cantidad y no sobre nada?

Antes de empezar la clase se había colgado en el frente el afiche A1, elaborado en la clase anterior, que había sido pasado en limpio por la docente: *"¿De qué modos diferentes se puede expresar la cantidad que le tocó a cada uno?"*. También, tal como lo hacían habitualmente con las escrituras de conclusiones de un debate, los alumnos ya habían pegado en su carpeta una fotocopia con el contenido del cartel.

Una vez presentado el problema en el pizarrón, al indicar a los niños el modo de agruparse para resolver, la docente habilitó la posibilidad de consultar el cartel que estaba colgado y pegado en las carpetas:

Docente: Resuelven de a dos; para resolverlo pueden consultar el afiche que construimos la clase anterior.

La sugerencia realizada por la docente dio lugar a que algunos alumnos volvieran sobre lo escrito, situación que será analizada más adelante en el apartado 4.2.[26].

Durante el momento de resolución en parejas y posiblemente motivados por la pregunta del problema, “¿Cómo se puede hacer para…?”, los niños intentaron buscar más de un modo de hallar la solución. La mayoría de los procedimientos retomaba los utilizados en el problema anterior cuyo resultado era la fracción ¾. En la figura 3, puede observarse cómo Macarena y Emilia utilizan procedimientos gráficos que representan repartos en los que se apoyan para expresar la solución como 1 + ¾, 14/8 o 7/4.

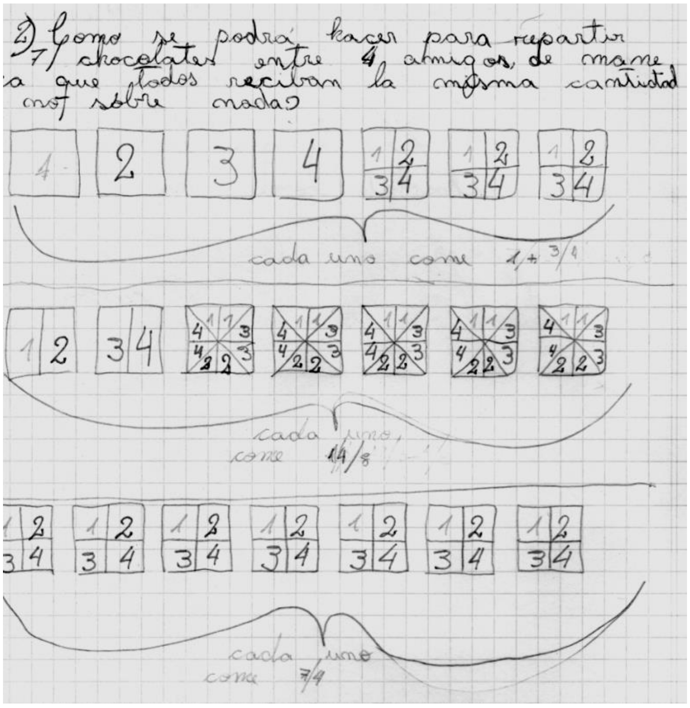


Figura 3: Procedimientos de resolución utilizados por Macarena y Emilia para el problema “¿Cómo se podrá hacer para repartir 7 chocolates entre 4 amigos de manera que todos reciban la misma cantidad y no sobre nada?”

4.1.1.2. b. Puesta en común

En la puesta en común de procedimientos de resolución la docente aclaró a los niños que no los hacía pasar para que ese momento sucediera más rápido, para lo cual, ella iba a escribir lo que le dictaran. Del mismo modo que en el trabajo colectivo sobre el primer problema, explicó que no iba a repetir los procedimientos que fueran similares.

En primer lugar, como en el problema anterior, aparecieron algunas variantes de repartos gráficos en las que los alumnos utilizaron colores, flechas, dibujos de los 4 amigos que recibirían el chocolate, formas de las partes y modos de numerarlas diversos, para finalmente

[26] Retorno al propio escrito para reutilizar sus ideas en nuevos problemas o para agregar conocimientos que no habían sido incluidos.

encontrar la fracción resultante por conteo. También se propusieron modos diferentes de partir el entero apelando al uso de fracciones equivalentes para obtener, por ejemplo 14/8, pero en esta oportunidad, la docente no promovió que se profundice sobre la justificación de las equivalencias. Esa discusión se había desarrollado largamente durante la puesta en común y la escritura colectiva de la clase anterior. Además, era claro que los niños ya dominaban con cierta destreza el cálculo de fracciones equivalentes y utilizaban ese conocimiento para hallar diferentes expresiones del resultado. Las intervenciones de la docente en ese momento de la clase apuntaron a que los alumnos justificaran, particularmente, la equivalencia entre las expresiones 1 y ¾ o 1 + ¾ y 7/4.

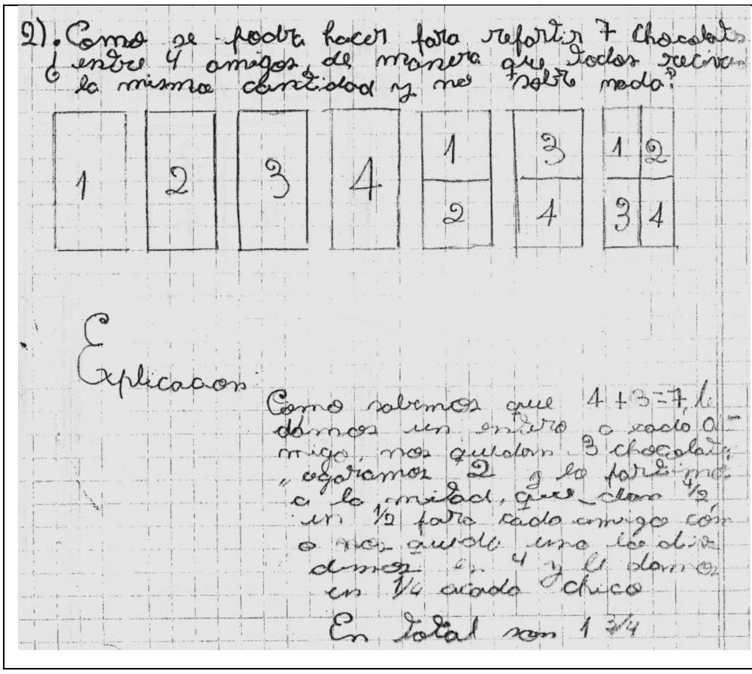
En el fragmento que se presenta a continuación se observa que Martina y Antonio realizaron el dibujo de los siete chocolates pero ya habían anticipado la parte entera que resultaría del reparto y la parte que correspondería a la fracción. El dictado a la docente de la escritura del cálculo los obligó a explicitar los cálculos que habían realizado mentalmente:

(C2,m32.21-35.57)

1. *Docente: Antonio y Martina lo resolvieron de otra forma, ¿cómo lo hicieron?*
2. *Antonio: Hicimos los siete chocolates también y …*
   (La docente dibuja los 7 chocolates en el pizarrón)
3. *Martina: Pensamos que 3 + 4 es 7, entonces… o sea se podía darle un chocolate a cada chico.*
   (La docente ordena la clase y pide a Martina que repita para que escuchen su explicación)
4. *Martina: Como sabemos que 3 + 4 es 7, vamos a poder darle un chocolate a cada chico.*
5. *Docente: ¿Entienden esto que dice Martina?*
6. *Alumno: Yo no entiendo por qué 3+4.*
7. *Docente: A ver, Martina dice, como sabemos que 3 + 4 es 7 (escribe en el pizarrón 3 + 4 = 7), decís que le van a poder dar un chocolate…*
8. *Antonio: A cada chico.*
9. *Docente: A cada chico, ¿por qué?*
10. *Martina: Porque en ese 4 ya le das uno a cada uno.*
11. *Docente: Miren esto que hizo Martina y Antonio. Ellos saben que 7 es igual a 3 + 4. Estos 4 dice que son los que le van a dar a cada uno de esos nenes. ¿Le alcanzó para repartir un entero a cada uno?*
12. *Varios alumnos: Sí.*
13. *Docente: Ahora con este 3 que tienen acá qué pasó, Martina.*
14. *Antonio: Eran los 3 que nos sobraban, entonces agarramos 2 y los dividimos a la mitad, los partimos a la mitad.*
15. *Docente: ¿Cualquier 2?*
16. *Antonio: No, los de atrás.*
17. *Martina: O sea, los primeros 4 los numeramos 1, 2, 3, 4.*
    (La docente numera los chocolates)
18. *Antonio: Y después los dos primeros de esos 3 que nos sobran, los dividimos a la mitad y les pusimos también, 1, 2, 3, 4.*
19. *Docente: (marca las mitades y las numera, luego señala el último chocolate) ¿Y después?*
20. *Antonio: A ese lo dividimos en 4.*
21. *Docente: (marca y numera los cuartos) Marti y Antonio, ¿primero pensaron este cálculo (refiriéndose a 3 + 4 = 7) y después hicieron los dibujos o primero hicieron los dibujos y después el cálculo?*
22. *Martina: En el momento de hacerlos (se refiere a los dibujos de los chocolates) pensamos en el 3 + 4.*
23. *Docente: (a la clase) ¿Entendieron esto? Marti, ¿cómo redactaron la respuesta?*
24. *Martina: Como acá decía (lee) cómo se podrá hacer para… hicimos como una explicación respuesta, algo así, porque en la respuesta explicamos todo más o menos como lo hicimos.*

25. *Docente: A ver, dale.*
26. *Martina: ¿Te lo leo? (lee pero va levantando la cabeza como si explicara) Como sabemos que 3 + 4 es 7 le damos un entero a cada amigo, quedan 3 chocolates, agarramos 2 y los partimos a la mitad, quedan 4 medios, un medio para cada amigo, como nos queda solo uno, lo partimos en 4, queda ¼ para cada amigo. En total son 1 entero y ¾.*
(La docente anota en el pizarrón, al lado de 3 + 4 = 7, "En total le dan 1 y ¾")

Martina expresa en este fragmento (intervenciones 3 y 4) que pensar en la descomposición aditiva de 7 en 3 + 4 funcionó como condición para decidir que los 7 chocolates alcanzaban en primer lugar para entregar uno a cada amigo. Luego (intervenciones 13 a 20), ambos niños explican cómo reparten los 3 chocolates que sobran, apoyándose en un procedimiento gráfico para obtener ¾. En la afirmación "en ese 4 ya le das uno a cada uno" (intervención 10), pareciera que, de manera implícita, están poniendo en juego la relación entre el dividendo (D), el divisor (d), el cociente (c) y el resto (r), D = d x c + r, ya que al descomponer aditivamente el 7, están pensando el 4 como 4 x 1, de lo que resulta 7 = 4 x 1 + 3. Acaso con la intención de promover que los alumnos tomen conciencia de los pasos seguidos para resolver el problema o de enfatizar la eficacia que tuvo la anticipación realizada, la docente solicita (intervención 21) que identifiquen si primero pensaron el cálculo 7 = 4 + 3 o si, en cambio, primero realizaron el dibujo de los chocolates. Martina confirma que el cálculo precedió al dibujo y lee la "explicación respuesta" (intervenciones 24 y 26) que produjo junto a su compañero:



Explicación del procedimiento: "Como sabemos que 4+3=7 le damos un entero a cada amigo, nos quedan 3 chocolates, agarramos 2 y los partimos a la mitad, quedan 4/2, un ½ para cada amigo, como nos queda uno lo dividimos en 4 y le damos un ¼ a cada chico. En total son 1 ¾."

Figura 4: Procedimiento de resolución utilizado por Martina y Antonio para el problema "¿Cómo se podrá hacer para repartir 7 chocolates entre 4 amigos de manera que todos reciban la misma cantidad y no sobre nada?"

Resulta interesante analizar el intercambio que se produce a partir de la lectura de la "explicación respuesta" en la que se concluye que "En total son 1 ¾". La pregunta de la docente acerca de cómo llegaron al número 1 ¾ y el requerimiento de escribir el cálculo obliga a los niños a intentar explicitar las relaciones que les permitieron hallar la solución:

(C2,m36.37-38.25)

27. *Docente: Voy a retomar la explicación que dieron Martina y Antonio. Sabemos que 3+4 es 7, de estos 4 (señala el 4 del cálculo) le da un entero a cada uno. Los otros dos los va a partir en medios, le da un medio a cada uno y el último que queda lo parte en 4 y le da una de esas partes. (Dirigiéndose a Martina y Antonio) ¿Cómo llegaron al 1 y ¾?*
28. *Martina: Un entero, ese ya es uno y después como sabemos que ½ son 2/4, a esos 2/4 le sumamos el cuarto del último chocolate.*
29. *Docente: El entero… (señala los enteros)*
30. *Martina: Y después el medio que son 2/4. Le sumamos el otro cuarto del último chocolate que partimos en 4.*
31. *Docente: ¿Y cómo llegaron a 1 y ¾, hicieron el cálculo o lo hicieron mentalmente?*
32. *Martina y Antonio: Mentalmente.*
33. *Docente: ¿Pero no pusieron el cálculo que pensaron?*
34. *Martina y Antonio: No.*
35. *Docente: ¿Y si lo tuviera que haber escrito, cómo lo pongo?*
36. *Martina: El 1 entero, más ½, que es igual a…, o sea, el ½ es igual a 2/4, no sé cómo explicarlo…*
37. *Docente: El ½ es igual a 2/4 (escribe 1; ½ = 2/4). Ya lo puse. Pero por un lado me quedó el entero (señala el 1), por otro lado me quedó ½ = 2/4, y después hicieron 2/4 + 1/4 me da ¾ (escribe: 2/4 + ¼ = ¾), ¿cómo llegaron al 1 y ¾?*
38. *Martina: Sumamos el 1 y el ¾.*
39. *Docente: O sea, no hicieron 1 + ½ (refiriéndose a lo dicho por Martina en intervención 36), hicieron 1 + ¾ (debajo anota 1 + ¾).*

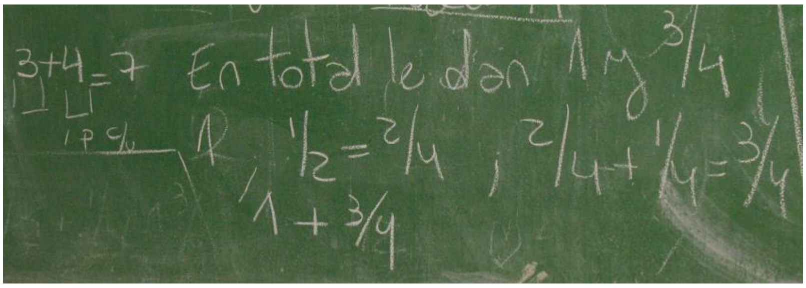


Figura 5: Parte del registro de la producción de Martina y Antonio realizado por la docente en el pizarrón durante la puesta en común del problema "¿Cómo se podrá hacer para repartir 7 chocolates entre 4 amigos de manera que todos reciban la misma cantidad y no sobre nada?"

Si bien Martina y Antonio no logran reunir todos los sumandos en un solo cálculo escrito, durante la exposición de la pareja siguiente, Sofía O. y Valentina, es posible establecer esta relación. La docente promueve que las niñas vinculen su procedimiento con el utilizado por Martina y Antonio y estas logran identificar que la diferencia consiste en poder escribir en un solo cálculo 1, ½ y ¼ para obtener el resultado 1 ¾:

(C2,m38.25-39.20)

40. *Docente: Ustedes (dirigiéndose a Sofía O. y Valentina) usaron la misma forma que ellos (refiriéndose a Martina y Antonio), repartieron primero los enteros, después partieron en medios y después en cuartos. ¿En qué difiere?*
41. *Sofía O.: En que ahí (señala el pizarrón pero no se ve exactamente dónde) pusimos igual y ahí pusimos todo. Pusimos (lee de su carpeta) un entero más un medio más un cuarto es igual a un entero y un cuarto.*
42. *Valentina: (corrige) Y tres cuartos.*
43. *Docente: Lo pongo acá al costado, escúchenme, no voy a dibujar otra vez porque ellas hicieron lo mismo que el grupo de Antonio y Martina, solamente que al momento de hallar la respuesta, no pensaron en la igualdad de un medio con dos cuartos. Decime de nuevo Sofi, dale.*
    (Sofía dicta y la docente escribe al lado de la producción del grupo anterior: "1 + ½ + ¼ = 1 ¾")

La siguiente pareja, Franco y Joaquín B., introduce en la puesta en común un nuevo modo de resolver el problema ya que los niños hacen explícita la relación entre repartir y dividir. Durante el trabajo en pareja, estos alumnos encontraron varias formas de hallar la solución, sumaron 7 veces ¼ para obtener 7/4 y también expresaron el resultado en otras fracciones equivalentes a la hallada. Sin embargo deciden exponer el procedimiento de la cuenta de dividir propuesto por Franco porque Joaquín B. manifiesta que "está buena" esa idea.

(C2,m39.52-43.57)

44. *Docente: Joaco y Franco, díganme cómo lo pensaron, cómo lo hicieron.*
45. *Franco: 7 dividido 4.*
46. *Docente: ¿Pongo así? (escribe dividendo y divisor en la cuenta) ¿Y?*
47. *Franco: Nos fijamos cuántas veces entraba y entraba una vez sola en el 7.*
48. *Docente: Resolvieron la cuenta (va escribiéndola en el pizarrón).*
49. *Franco: Sí, (dicta) 1 y resto me dio 3. Y los 3 que me dio los partí en 4, me dio 1 y ¾.*
50. *Docente: A ver, miren lo que hizo este grupo, este grupo decidió dividir.*
51. *Franco: Hicimos un montón igual (se refiere a los modos de resolver).*
52. *Joaquín B.: Hicimos un montón, pero esa manera se le ocurrió solo a él.*
53. *Docente: ¡Fuerte! Franco y Joaco, ¿por qué decidieron dividir?*
54. *Joaquín B.: Eso se le ocurrió solo a él.*
55. *Franco: Porque estás repartiendo los chocolates en 4...*
56. *Docente: Igual (dirigiéndose a Joaquín B.), cuando uno trabaja en parejas y deciden…*
57. *Franco: En realidad lo decidimos los dos.*
58. *Joaquín B.: Recién ahora lo entendí, cuando explicaron la otra.*
59. *Franco: Dividimos 7 dividido… porque estás repartiendo 7 chocolates a 4 chicos, entonces ahí también estás haciendo lo mismo. Y los tres chocolates que te quedan de resto los partís en …*
    (La docente dibuja los tres chocolates del resto y los parte en 4)
60. *Joaquín B.: … cuartos.*
61. *Franco: Cuartos y te da eso. Igual yo primero me confundí (en el momento de trabajo en parejas le había dado 1 y ¼) y después vi lo de Natalí (procedimiento gráfico con conteo) y me di cuenta de que estaba mal.*
62. *Docente: A ver, uno puede equivocarse, ¿no?, al momento de resolver, estamos a tiempo y si nos equivocamos lo podemos subsanar.*
63. *Franco: ¡Gracias Nata! (haciendo una seña con el pulgar hacia arriba a Natalí).*
64. *Docente: Franco, escucháme un segundo, ¿dibujaste estos tres chocolates y repartiste en 4?*
65. *Franco: En cuartos.*
66. *Docente: ¿Y qué hiciste?*
67. *Franco: Y le di uno a cada uno.*

68. *Joaquín B.: Un chocolate y ¾ para cada uno.*
69. *Docente: ¿Y esa fue la respuesta?*
70. *Franco: Sí, un chocolate y ¾.*
71. *Docente: ¿Qué significa ese uno? (señala el cociente)*
72. *Franco: Un chocolate para cada chico.*
73. *Docente: ¿Entienden todos qué es este uno?*
74. *Franco: Es como la que hizo Fabricio (se refiere a un procedimiento gráfico en el que habían numerado del 1 al 4 los primeros cuatro chocolates enteros y habían partido los 3 últimos chocolates en cuartos y numerando con el 1 un cuarto de cada uno de los tres chocolates para formar ¾).*
75. *Joaquín B.: No entendió, pone una cara… (refiriéndose a Fabricio)*
76. *Docente: ¿Cómo es que hicieron ustedes para hallar estos ¾?*
77. *Franco: Uno a un chico, otro a otro chico y otro a otro chico (se refiere a que da un cuarto a cada uno).*
78. *Docente: ¿Pusiste número o algo acá? (señalando los tres chocolates dibujados al lado de la cuenta)*
79. *Franco: Puse 1 (en un cuarto), en el otro también puse 1 y en el otro también. Y ahí tuve el 1 y ¾.*
80. *Docente: Miren esto, ellos deciden repartir 7 dividido 4 (los señala en la cuenta de dividir). Franco y Joaquín B. dicen que este 1 representa el chocolate entero que le dieron a cada uno. Y con los tres que sobraron (señala en la cuenta y en el dibujo), los partieron y le dieron un cuarto de esos chocolates a cada uno. Llegaron a lo mismo, que cada uno come 1 y ¾.*

El aporte de Franco y Joaquín B. consiste en introducir la división para resolver un reparto en la que identifican el significado del dividendo, el divisor y el cociente. A partir de intervenciones de la docente, ponen estos elementos en relación con los datos del problema. La relación entre el resto y el divisor para componer el ¾ aún no es considerada por los niños. Para seguir repartiendo el resto, ellos apelan a un procedimiento gráfico y lo asocian al utilizado por un compañero.

Un último intercambio en la puesta en común de las resoluciones sucede a propósito de la relación entre 7/4 y 1 ¾. Los alumnos habían expuesto todos sus procedimientos pero no se había analizado por qué era posible expresar la misma cantidad con ambas expresiones fraccionarias.

(C2,m45.35-49.18)

81. *Inv.: Yo quería preguntarles sobre estas formas que encontraron. Acá llegaron a 1 y ¾, acá también llegaron a 1 y ¾, en esta también (va señalando los procedimientos). Pero en esta dicen que es igual a 7/4 (procedimiento de Yael y Natalí), no me doy cuenta por qué.*
    (Muchos alumnos levantan la mano)
82. *Docente: Vamos a hacer que primero Natalí y Yael expliquen de dónde salen estos 7/4 y después si difiere lo que ellas dicen con lo que alguno va a decir, levantan la mano.*
83. *Yael: Como los partimos en 4 cada chocolate y son 7, pensamos que eran 7/4. Y después nos dimos cuenta que era lo mismo que hacer 1 y ¾ porque ya al tener 4/4, tenés un entero, más los otros ¾, te da 1 y ¾.*
84. *Docente: Ella no les está preguntando por qué ustedes consideran que esto es igual que esto (señala 7/4 y 1 y ¾), ¿de dónde salen estos 7/4?*
85. *Natalí: Nosotras partimos los 7 chocolates en 4, entonces como eran 7…, como los partimos en 4…, para no confundirnos pusimos un color en cada uno, entonces nos dieron 7/4 porque son 7 chocolates dividido entre 4.*
86. *Yael: Como que el color se repetía 7 veces y era ¼.*
87. *Natalí: O sea, la fracción se repetía 7 veces.*
88. *Docente: ¿Cuál fracción se repite?*
89. *Natalí y Yael: El cuarto.*

90. *Inv.: Ah, un cuarto 7 veces (asiente). Está bueno eso que decían, que ustedes después se dieron cuenta... (La docente va escribiendo 7 veces 1/4 debajo del 7/4 del procedimiento que habían expuesto Yael y Natalí)*
91. *Yael: Que 4/4 es lo mismo que un entero y como ya habíamos llegado a 7/4, nos sobraban ¾ de 4/4, entonces era 1 y ¾.*
92. *Inv.: ¿Lo podemos escribir más desarmado? Lo escribo acá arriba. Yael dice que ellas encontraron ¼, ¼, ¼ (va escribiendo ¼ las 7 veces) de cada color, van 4, van 5, van 6, van 7.*
93. *Yael: Si vos redondeás 4/4 sería un entero.*
94. *Inv.: Ellas dicen que estos 4 cuartos (los encierra con una llave) forman un entero. ¿Lo ponemos acá?*
95. *Pilar: Y, porque el chocolate lo dividís en 4.*
96. *Yael: (dicta) 4/4 es lo mismo que un entero.*
    (Inv. escribe "4/4=1")
97. *Yael: Y los otros ¾ como no llegan a ser un entero se quedan como ¾.*
    (Inv. encierra en otra llave las 3 veces ¼ que restaban de las 7 veces ¼)
98. *Inv.: Entonces por eso… (señala las dos llaves, la de las 4 veces ¼ y la de las 3 veces ¼), ¿de ahí salió esto que pusieron acá?*
99. *Yael: Sí.*
100. *Natalí: Además de eso porque los 7 chocolates los partimos en 4, entonces como era ¼ de cada chocolate, ahí te quedan las 7 fracciones de ¼.*
101. *Inv.: Y acá están las 7 veces… (señala la escritura de ¼ ¼ ¼… 7 veces) de esto que había anotado Angie, ¿no? (señala la escritura: 7 veces ¼). Entonces, ¿estos los podemos sumar? (escribe el signo + entre las fracciones ¼), entonces tengo un entero más estos otros ¾.*

Estos alumnos llegan entonces a identificar que la suma de 7 veces ¼ da como resultado 7/4 y que dado que 4/4 conforman un entero, pueden agruparse los sumandos en 4 veces ¼ y 3 veces ¼ e inferirse que 7/4 = 1 ¾

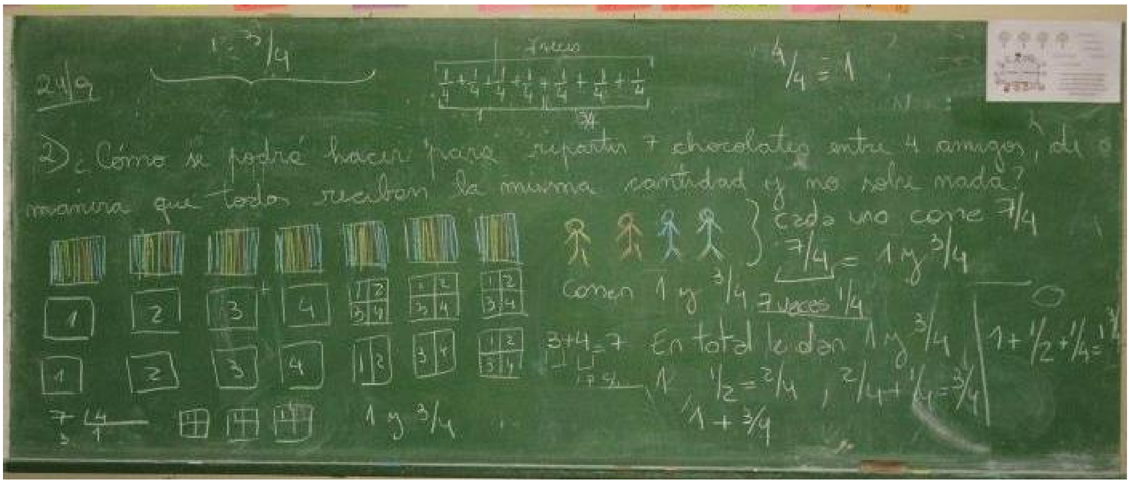


Figura 6: Producciones registradas por la docente en el pizarrón durante la puesta en común del problema "¿Cómo se podrá hacer para repartir 7 chocolates entre 4 amigos de manera que todos reciban la misma cantidad y no sobre nada?"

Los conocimientos que circularon en la puesta en común de este segundo problema de reparto en el que la fracción resultante era mayor que un entero -y que no se habían debatido a propósito del primer problema- podrían resumirse del siguiente modo, aunque no fueron tratados aún de manera general y explícita sino que se discutieron en el contexto de la situación:

- La cantidad a repartir puede descomponerse aditivamente en la cantidad de partes en las que se debe repartir, dando uno a cada una, y en un resto que no es suficiente para repartir en enteros pero que se puede continuar repartiendo como fracción menor que 1. En el caso del problema en cuestión, la descomposición sería la siguiente: 7 = 4 x 1 + 3.
- Las partes enteras y fraccionarias que corresponden a cada uno, obtenidas a través de un procedimiento de reparto gráfico, pueden reunirse aditivamente para obtener el resultado. En este caso: 1 + ½ + ¼ = 1 ¾ o 1 + ¾.
- Los problemas de reparto pueden pensarse como una división en la que la cantidad a repartir es el dividendo, la cantidad de partes el divisor, lo que le toca a cada uno como parte entera es el cociente y el resto es una cantidad que es posible seguir repartiendo. En el problema tratado: 7 : 4 = 1 con resto 3 para continuar repartiendo.
- Las fracciones mayores que un entero pueden expresarse como el entero más una parte fraccionaria ya que la suma de las partes en que está dividido el entero puede agruparse en las que forman una unidad y las que no llegan a formarla. En este caso: 7/4 = 4/4 + ¾ = 1 + ¾ = 1 ¾.

<u>4.1.1.2. c. Escritura colectiva</u>

Luego de haber resuelto y discutido los dos primeros problemas de la secuencia, se propuso a los alumnos el retorno sobre las escrituras del cartel A1, producido en la clase anterior. Esta situación que se analiza en el apartado 4.2. tenía el propósito de discutir qué les había resultado útil de esas anotaciones para la resolución del segundo problema y de decidir si era necesario agregar alguna nueva idea.

A partir de este intercambio se decidió proponer la escritura colectiva sobre lo que los niños habían aprendido al trabajar con los dos problemas de reparto. Antes de iniciar el dictado, la docente solicitó que intercambiaran en parejas qué creían que deberían incluir en el cartel que iban a escribir (A2), encabezado por el título *"¿De qué maneras puedo resolver un reparto?*[27]*"*. En el intercambio de algunas parejas se evidencia que los niños reconocen

[27] Si bien se había decidido encabezar el afiche con la pregunta ¿De qué maneras puedo resolver 'un' reparto? apuntando a que los alumnos incluyeran ideas con cierto grado de generalidad sobre las resoluciones, quedó escrito por error ¿De qué maneras puedo resolver 'el' reparto?, expresión que parece referirse a un reparto particular. A pesar de esta modificación, los niños se centraron en ideas más bien generales y se refirieron a los repartos resueltos solo para proporcionar algunos ejemplos.

conocimientos adquiridos el año anterior y que les resulta difícil identificar aprendizajes nuevos en estas situaciones.

(C2,m15.23-17.13)

1. *Docente: Les voy a hacer una propuesta, vamos a registrar qué formas o qué cosas aprendí hoy para resolver situaciones de reparto. Piensen un ratito qué cosas aprendí hoy o en la clase anterior para resolver un reparto. Qué cosas tengo que tener en cuenta. Piénsenlo de a dos, después me lo van a dictar y lo vamos a ir anotando (va preparando el afiche para colgar con el título "¿De qué maneras puedo resolver el reparto?").*

Pareja Yael y Natalí:

2. *Yael: Y bueno, sabemos que… ¿qué? (se ríen). Yo ya sabía que 4/4 era un entero… del año pasado. Que 7/4 era 1 y ¾, vos me lo dijiste.*
3. *Natalí: ¿No lo sabías?*
4. *Yael: No, lo tenía que pensar.*

Pareja Valentino y Ramiro:

5. *Valentino: ¿Nuevo?...es que no hicimos nada nuevo.*
6. *Ramiro: Ya lo sabíamos todo.*
7. *Valentino: Pero por ahí nos centramos más en esta parte (señala las anotaciones sobre fracciones equivalentes en la fotocopia que tiene en su carpeta con la información del cartel anterior).*
8. *Ramiro: Nosotros esa la sabíamos bastante, ¿no?*
9. *Valentino: A ver, dale, escribámoslo. (Buscan hojas, se dicta a sí mismo para que Ramiro escuche qué pone) Hoy nos centramos más…*

La escritura del cartel A2 con las conclusiones ocupó un momento extenso de la clase. Se inició con el reconocimiento de que hay maneras diversas de hallar la solución y se propuso en primer lugar la cuenta de dividir como modo de resolver el reparto.

(C2,m19.14-21.38)

10. *Docente: ¿Pudieron pensar qué cosas saben ustedes ahora para resolver un reparto? Ahora vamos a ir registrando esas cosas que ustedes saben.*
11. *Vicky: No hay una sola forma de resolver un cálculo con fracciones*
12. *Fabricio: Esa no era la pregunta.*
13. *Docente. Yo no quiero poner el 'no', ¿cómo podemos poner?*[28]
14. *Vicky: Hay varias maneras de resolver cálculos con fracciones.*
    (La docente lo escribe)
15. *Docente: ¿Algo más? ¿Vicky?*
16. *Vicky: Que se puede hacer una división antes de empezar.*
17. *Docente: ¿Cómo lo pongo?*
18. *Vicky: (dicta) Hay varias formas…, no, eeeh, puedo utilizar un cálculo de división.*
19. *Docente: (escribe) Se puede utilizar un cálculo de división. (pregunta a Vicky) ¿Te animás a decirme por qué?*
20. *Vicky: No.*

[28] En la escuela donde se implementó la secuencia es habitual escribir carteles intentando que no haya negaciones, por eso la docente propone a los niños que lo reformulen en términos afirmativos.

Es importante señalar que la cuenta de dividir había sido propuesta en el intercambio sobre las resoluciones del problema por un solo alumno, Franco. Se trata de un niño que estaba asistiendo a clases de apoyo en las que él y su docente habían anticipado diferentes modos de resolver repartos y habían analizado la cuenta de dividir como una posibilidad. La cuenta no era un procedimiento reconocido por el resto del grupo como herramienta que permitiera hallar la solución. Vicky no utilizó esa estrategia para resolver el problema, la puso en palabras por primera vez en el momento de la escritura colectiva después de haber presenciado la puesta en común en la que se mostró este procedimiento. Es evidente que resultó de sumo interés para los niños dado que a partir de la propuesta de Vicky, todos se involucraron acaloradamente en analizarla.

La docente intentó que los alumnos justificaran por qué era posible utilizar una cuenta de dividir para resolver un reparto. Las primeras intervenciones de los niños no llegaban a ser demasiado claras y además fue necesario pedirles que se esfuercen en "decirlas en lenguaje escrito" para que la docente pudiera textualizarlas en el cartel.

(C2,m21.38-26.20)

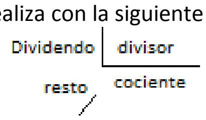
21. *Docente: ¿Otro que la pueda ayudar? ¿Por qué yo puedo utilizar en una situación de reparto un cálculo como dice Vicky, de dividir? ¿A ver, Marcos?*
22. *Marcos: Porque si podés dar enteros, podés dividir el número de los que son por el…*
23. *Varios alumnos: No entendí.*
24. *Docente: Tratá de decirlo, Marcos, vos mismo controlando esto que yo tengo que poner acá. Decímelo como lo pongo.*
25. *Marcos: Porque si tenés enteros y podés repartir en los compañeros que tenés, lo podés dividir.*
26. *Docente: ¿Entienden esto que dice Marcos? A ver, él dice, porque si yo le puedo dar enteros a esos compañeros que tengo, puedo dividir.*
27. *Fabricio: Porque si tenés los enteros se los podés dar de diferentes maneras.*
28. *Docente: ¿Por qué puedo usar el cálculo de división? ¿Por qué puedo utilizar esa cuenta? Esto que dijo Vicky, que yo puedo usar la cuenta de dividir, ¿alguno la utilizó? ¿Por qué a mí me sirve esa cuenta de dividir?*
29. *Franco: Porque estás repartiendo los chocolates a los chicos, en este caso.*
30. *Docente: Y si yo en vez de repartir chocolates, reparto tornillos, ¿me sirve?*
31. *Varios alumnos: Sí.*
32. *Otros alumnos: No. No se puede cortar un tornillo.*
33. *Docente: Escúchenme, la forma en que yo puedo resolver este problema, ¿depende de lo que yo esté repartiendo? Por ejemplo, yo en vez de repartir chocolates, reparto torta. ¿Puedo utilizar esa cuenta de dividir?*
34. *Varios alumnos: ¡Sí!!*
35. *Alumno: Depende de la cantidad.*
36. *Docente: Entonces, no estoy pensando en estos 7 chocolates entre esos 4 nenes, leamos acá (lee el título del cartel), ¿De qué manera puedo resolver el reparto? (continúa hablando) Es verdad que este reparto es de 7 entre 4, el que resolvimos la vez anterior era 3 entre 4. Estoy tratando de que sea algo que a mí me sirva para resolver otra cosa sin importar esos números que tengo acá. ¿Cómo puedo poner por qué me sirve la cuenta de dividir?*
37. *Sofía L.: Porque el divisor…, no…*
38. *Varios alumnos: El dividendo.*

39. *Sofía L.: No, el que está abajo…*[29]
40. *Varios alumnos: El cociente.*
41. *Sofía L.: ¡El cociente! El cociente es el entero que tenés. Cuando en el cociente tenés 1, ese 1 es el entero.*
42. *Docente: ¿Y con ese entero qué pasa?*
43. *Sofía L.: ¿Cómo qué pasa?*
44. *Docente: Yo lo que quiero que me expliquen es por qué yo puedo usar una cuenta de dividir, un cálculo de dividir para resolver una situación de reparto.*
45. *Sofía L.: Porque te muestra lo que das, el entero… y lo que te sobra es lo que tenés que...*
46. *Docente: A ver, Maca, si podés ayudar a Sofi.*
47. *Macarena: Yo iba a decir que porque cuando estás dividiendo estás repartiendo cosas.*
48. *Docente: ¿Están de acuerdo en eso?*
49. *Varios alumnos: Sí.*
50. *Franco: Ahí lo entendí más, porque es una manera como lo dijo Sofi pero nada más que…*
51. *Docente: Sofi por ahí se fue a este caso puntual, tratar de analizar qué es ese número, no está mal.*
52. *Sofía O.: También si te da 3, son ¾, no 3 enteros.*
53. *Varios alumnos: ¿Cómo?*
54. *Docente: A ver, después vamos a analizar casos puntuales, de esa cuenta de dividir. Yo lo que quiero que me expliquen es por qué me sirve la cuenta de dividir. Macarena está diciendo porque yo cuando divido estoy repartiendo cosas, ¿están de acuerdo con eso? ¿Pongo que a mí me sirve la cuenta de dividir por eso? (Escribe en el cartel: "Porque cuando divido reparto cosas")*

Podría interpretarse que los niños reconocen la división como forma posible de resolver un reparto solo en aquellos casos en que es posible asignar una cantidad entera a cada una de las partes entre las que se está repartiendo (intervenciones 22, 25 y 35). Esta idea errónea o incompleta circuló en la clase pero no llegó a ser tomada por la docente para ser incluida en el cartel. Resulta interesante analizar aquí cómo la escritura colectiva incide de cierta manera en el proceso de validación. Las ideas que el docente va seleccionando para textualizar en el escrito colectivo, entre la diversidad de propuestas que realizan los niños, son las más avanzadas o las que más se aproximan a lo que se espera que produzcan, en este caso, ideas generales acerca de las razones por las que la cuenta de dividir resulta una herramienta útil para resolver repartos.

La docente intentó que la escritura de la explicación fuera algo más general que las formulaciones que los alumnos venían realizando, pero ellos estaban centrados en el significado de cada componente de la cuenta de dividir. En algunas intervenciones (intervenciones 30, 33 y 36) apuntó explícitamente a descontextualizar la situación, les propuso pensar en repartos en los que no intervinieran chocolates y chicos, sino otros objetos como tornillos o tortas y les planteó imaginar un reparto entre diferentes cantidades, no solo entre las cantidades involucradas en los dos problemas analizados.

[29] Se refiere al número que se ubica debajo del divisor. En Argentina la cuenta de dividir de uso convencional se realiza con la siguiente disposición espacial:



Fue así como Macarena (intervención 47) pudo establecer una relación general entre este sentido de los problemas multiplicativos y la operación de división, cuestión que había sido planteada antes por Franco (intervención 29) pero no había sido retomada para la discusión. La formulación de Macarena fue la que finalmente se incluyó en el escrito.

En este fragmento hubo varias participaciones de los niños centradas en el significado del cociente y del resto (intervenciones 41, 45 y 52) que la docente caracterizó como enfocadas en "casos puntuales" y como no erróneas aunque no respondían a la pregunta (intervenciones 51 y 54). Este tipo de participaciones de los alumnos cobró mayor protagonismo en el siguiente episodio que se centró en analizar cada una de las partes de la cuenta de dividir a propuesta de una docente de la misma escuela que colaboraba en la investigación.

(C2,m26.20-27.34)

55. *Docente colaboradora: Podríamos pensar entonces en poner, debajo de lo que va a escribir Angie (docente), un ejemplo de una división y poder mostrar qué es cada cosa, porque están haciendo mucho hincapié ustedes en qué información me da esa cuenta. ¿Se animan a hacer eso, les serviría a ustedes poner un ejemplo para poder entender de qué están hablando?*
56. *Docente: Yo voy a escribir esta misma cuenta… (escribe la cuenta de dividir que había sido propuesta por Franco:*

$$\begin{array}{l|l} 7 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$$

)

57. *Docente colaboradora: Y ustedes van a poner al lado de cada número para qué me sirve cada uno de esos datos.*
58. *Docente: O qué te indica ese número…*
59. *Docente colaboradora: Sí, qué información me brinda.*
60. *Docente: ¿Y ahora qué hago?*
    (Murmullo)
61. *Docente: Una forma que tenemos nosotros para explicar es flechitas, ¿no? ¿Saco flechita de dónde?*
62. *Varios alumnos: Del 1.*
63. *Docente: Del 1, ¿qué pongo en el 1? ¿Cata?*
64. *Cata y varios alumnos: Entero.*

Pareciera que había un consenso general en la clase para comenzar a explicar lo que resultaba más claro del significado de los componentes de la cuenta y, posiblemente, lo más novedoso para los niños en este momento: el cociente representa la parte entera que corresponde a cada una de las partes. El resto de los componentes de la cuenta comenzaba a visualizarse como una parte importante del resultado –aspecto central en el concepto de división- y como un elemento que tenía algún vínculo con la parte fraccionaria del resultado, pero los niños no podían a esa altura fundamentar dicha relación con argumentos consistentes.

(C2,m27.39-29.57)

65. *Juan: Entonces el resto (se refiere al resto de los chocolates luego de repartir uno a cada uno) sería el resto de la división, lo que te sobra…(no se entiende) por eso, ¾.*
66. *Yael: El resto también es parte del resultado.*
    (Hablan varios a la vez)
67. *Docente: Escúchenme, es dificilísimo esto.*
68. *Varios alumnos: Sí.*
69. *Docente: Nos vamos a equivocar, se pueden enroscar con las palabras… Cata dice que este (el cociente) es el entero. Yael está diciendo que este resto es parte de ese resultado. ¿Cómo hago yo para volcar eso en este afiche?*
70. *Yael: Es lo que falta repartir (refiriéndose al resto).*
71. *Natalí: ¡Es lo que sobra!*
72. *Yael: No, ¡lo que falta!*
    (Murmullos)
73. *Docente: De a uno, Tati (Albertina).*
74. *Albertina: Para mí el 1 es lo que ya le dieron a cada chico.*
75. *Docente: Puse entero (en la cuenta del cartel), ¿estamos todos de acuerdo en que ese 1 es un entero? ¿Le agrego algo más o es suficiente con eso?*
76. *Varios alumnos: No (se refieren a no agregar). Al resto le tenés que poner…*
77. *Valentino: Al resto yo le pondría que serían los… los cuartos que no llegaron a ser un entero.*
78. *Juan: ¿Y por qué los cuartos, profe?*
79. *Docente colaboradora: Miren qué interesante la pregunta que hizo Juan. ¿Por qué los cuartos, Valen? ¿De dónde los sacaste si ahí hay un 3?*
80. *Valentino: Del 4 que está ahí arriba (señala el divisor).*
81. *Docente colaboradora: ¿Y qué harías con ese 4 y ese 3? ¿Cómo usarías esa información? ¿Cómo pondrías en el afiche?*
    (Silencio)
82. *Docente colaboradora: ¿Entendés lo que te pregunto? Vos estás diciendo que ese 3 son los cuartos que todavía no se repartieron. ¿Cómo lo podrías escribir ahí para que quede claro para el resto?*
83. *Valentino: Que le dé… ¾ a… un entero… (no logra responder)*
84. *Docente: Pero cómo uno puede llegar a entender que son ¾. ¿Yael?*
85. *Yael: Porque los partís en 4 partes.*
86. *Docente: ¿Y a mí eso qué me está diciendo? ¿De dónde salió que lo estoy partiendo en 4?*
87. *Yael: Por el dividendo (duda)*
88. *Docente: ¡Ohhh, divisor!*
89. *Natalí: (corrige) ¡Por el divisor!*

Al caracterizar el resto de la cuenta para explicarlo por escrito, los niños aluden a una cuestión temporal que interpretan en el cálculo: El cociente es lo que ya se repartió y el resto, si bien es lo que sobra, es también lo que falta repartir porque aún no está explicitada la relación entre el resto y el divisor para hallar el resultado (intervenciones 70, 71, 72 y 74). La propuesta de Valentino (intervención 77) introduce en el debate esta relación al definir el resto 3 como “los cuartos que no llegaron a ser un entero” y justificar que los cuartos “salen” del 4 que está en el divisor (intervención 80). Esta idea es tomada por Yael y Natalí (intervenciones 85, 87 y 89) para explicitar nuevamente que el ¾ surge de los 3 chocolates del resto que se parten en las 4 partes que indica el divisor.

Si bien la docente que colaboraba en la investigación intentó que Valentino profundizara en los argumentos que vinculan la parte fraccionaria del resultado con la relación entre el resto y el divisor (intervención 82), el niño no logró en ese momento expresarlo en palabras para dictarlo y la caracterización del resto para completar la flecha correspondiente se retomó más adelante.

La discusión posterior para decidir qué escribir en la flecha que correspondía al divisor estuvo orientada por la búsqueda de un modo general de definirlo.

(C2,m29.57-31.35)

90. *Docente: ¿Qué le pongo al divisor?*
91. *Varios alumnos: (gritan) Son los chicos. En cuánto se parte el chocolate.*
92. *Fabricio: Las veces en las que se tiene que repartir o a cuántos hay que repartir.*
93. *Docente: ¿Están de acuerdo con lo que dice Fabricio? Fabricio dijo: las veces en las que se tiene que repartir, ¿o?...*
94. *Fabricio: A cuántos hay que repartir.*
95. *Docente: O a cuántos hay que repartir.*
    (Murmullo, alguien menciona a los chicos)
96. *Docente: ¿Siempre van a ser chicos?*
97. *Varios alumnos: No.*
98. *Docente: Es verdad que esta cuenta corresponde a este problema (señala el pizarrón que aún tiene los procedimientos registrados en la puesta en común) y son chicos. Fabri lo que dijo hoy es que eran las partes entre las que yo tenía que repartir o las cosas en las que tenía que repartir.*
99. *Fabricio: O la gente entre la que tenés que repartir.*
100. *Docente: O la gente, ¿cómo lo pongo?*
101. *Albertina: Como lo puso Fabricio, las partes en las que se puede repartir.*
    (Varios alumnos hacen propuestas, seres vivos, objetos)
102. *Docente: Esto que dice Alber, ¿no me sirve? Volvélo a decir, Alber.*
103. *Albertina: Las partes en las que se puede repartir.*
104. *Docente: ¿Están de acuerdo?*
105. *Fabricio: En cuánto lo tengo que repartir.*
    (La docente escribe: "Las partes en que las tengo que repartir")
106. *Sofía O.: Profe, en los cálculos así… digamos que hay dos resultados, hay dos números que te dan el resultado, que es el caso del 1 y el 3.*
    (La docente sigue escribiendo y no escucha esta intervención).

Entre las propuestas que realizan los niños para caracterizar al divisor, la docente institucionaliza la de Fabricio que está formulada en términos más generales que las demás (intervención 92): "las veces en las que se tiene que repartir o a cuántos hay que repartir". Sin embargo, los alumnos siguen mencionando el contexto del problema al identificar el divisor con los chicos entre los que se reparten los chocolates. Por ese motivo, la docente (intervenciones 96 y 98) vuelve a intervenir explicitando que aunque la cuenta fue tomada del problema, no siempre se reparte entre chicos. Si bien los alumnos proponen agregar otros términos algo más generales -gente, seres vivos, objetos-, la docente escribe en la flecha correspondiente al divisor lo planteado por Albertina y Fabricio como formulación más general: "Las partes en que las tengo que repartir[30]".

[30] Cabe aclarar que se produjo un error involuntario en la escritura del cartel, la docente debería haber escrito "Las partes en las que tengo que repartir".

El intercambio producido en torno al significado del divisor finalizó con una reflexión de Sofía O. (intervención 106) que retomaba el análisis del resto y reparaba en una característica fundamental de la división[31], la relevancia del cociente y del resto para establecer el resultado de esta operación: "en los cálculos así… digamos que hay dos resultados, hay dos números que te dan el resultado, que es el caso del 1 y el 3". Esta idea había sido propuesta previamente también por Yael (intervención 66): "El resto también es parte del resultado", aunque no fue difundida a toda la clase en ninguna de las dos oportunidades.

Un aspecto interesante a analizar en el fragmento anterior es que aunque la docente usaba con alta frecuencia la primera persona para dirigirse a los niños y para escribir en el cartel, ellos propusieron escrituras para el divisor en las que predominaba la forma impersonal -por ejemplo, las veces en las que se tiene que repartir, a cuántos hay que repartir o las partes en las que se puede repartir- que es propia del tipo de texto informativo que estaban produciendo[32].

Para definir qué escribir en la flecha correspondiente al dividendo, no hubo discusión sobre cómo ponerlo. La docente escribió la primera propuesta en la que los niños abandonaron la forma impersonal y utilizaron en cambio la segunda persona del singular.

(C2,m31.40-31.59)

107. *Docente: A ver, (va señalando las partes de la cuenta) divisor, las partes en que las tengo que repartir. Cociente, me dijeron, entero. Al dividendo, ¿qué le pongo?*
108. *Fabricio: Lo que tenés que repartir.*
109. *Docente: ¿Así pongo, lo que tenés que repartir?*
110. *Varios alumnos: Sí.*
(La docente escribe en la flecha que corresponde al dividendo: "Lo que tenés que repartir")

Al retomarse el debate sobre qué escribir en la flecha correspondiente al resto se produjo nuevamente un largo intercambio que daba cuenta de las diferentes interpretaciones que los niños tenían de este componente importante de la división. Si definían que el resto era "lo que sobra", suponían que el cálculo ya estaba terminado como división entera y que el resto ya no se podía seguir repartiendo. Esta idea sobre lo que sobra como algo que no es importante y no se debe hacer nada con él posiblemente se apoya en los cálculos que suelen

[31] En la división entera o euclidiana, dados dos números naturales (dividendo y divisor) es necesario encontrar otros dos números naturales (cociente y resto) de manera tal que: dividendo=divisor x cociente + resto, con resto mayor o igual que cero y menor que el divisor. En la división exacta, dados dos números enteros (dividendo y divisor), se requiere encontrar un tercer número (cociente) de manera tal que: dividendo = divisor x cociente. Aquí existe la posibilidad de que el cociente no siempre sea un entero y puede ser punto de apoyo para el trabajo con números fraccionarios: si a = b x k ==> a/b = k.

[32] Nos referiremos más adelante a la relación entre el uso de la persona verbal y el proceso de despersonalización del saber.

realizar los alumnos para dividir cuando trabajan con números naturales y la pregunta habitual consiste en cuánto corresponde a cada uno en la división. Por el contrario, si lo definían como "lo que falta repartir" suponían que la operación quedaba inconclusa.

(C2,m32.19-37.14)

111. *Docente: ¿Y el 3 que es el resto? ¿Qué hago? ¿More?*
112. *Morena: Lo que sobra para repartir.*
113. *Natalí: Lo que te falta.*
114. *Docente colaboradora: ¿Y si lo tengo que repartir, sobra?*
115. *Alumna: Profe, ¿lo que te sobra o lo que te falta?*
116. *Franco: Depende.*
117. *Docente: Emi, ¿qué habías pensado?*
118. *Emilia: Yo había pensado lo que sobra de lo que repartís.*
119. *Rodrigo: Lo que sobra porque si es lo que te falta, no puede ser el resto.*
120. *Docente: Pero, ¿yo puedo hacer una pregunta? Si a mí me está diciendo (se refiere al enunciado del problema) que no sobre nada… Porque puede ser que en una situación yo diga: listo, le doy uno, me quedo con 3. Pero acá me está diciendo que no sobre nada. ¿Cómo hago yo?*
    (Murmullo, no se entiende)
121. *Docente: Pero Franco lo hizo. Franco, ¿vos qué hiciste con eso que te había sobrado?, ¿cómo lo podemos explicar en el afiche? ¿Te sobró eso a vos? (se refiere al resto) ¿Dijiste que eso se lo comía otro nene?*
    (No se escucha qué responde Franco, varios levantan la mano)
122. *Docente: ¿Qué hago yo con esto? ¿Cómo pongo? ¿Marcos?*
123. *Marcos: Lo que te falta repartir.*
124. *Docente: ¿Les parece? A ver Juli.*
125. *Julieta: Lo que falta repartir.*
126. *Docente: Lo que falta repartir.*
127. *Rodrigo: Lo que tenés que repartir.*
128. *Docente. Lo que tenés que repartir, lo que falta repartir. ¿Vicky?*
129. *Vicky: Lo que te falta repartir.*
130. *Docente: ¿Algo diferente a lo que te falta repartir?*
131. *Lucas: Lo que tienen que tratar de repartir.*
132. *Docente: ¿Por qué tratar?*
133. *Lucas: Porque hay 4 chicos y hay 3 chocolates, no podés…*
134. *Docente: ¿No podés qué?*
135. *Lucas: No podés darle un chocolate a cada uno.*
136. *Docente: Escuchen lo que está diciendo Lucas, Lucas dice que tiene 3 (chocolates) y tenía 4 chicos, como no le podés dar uno a cada uno, hay que pensar eso. ¿Cómo pongo yo que este 3 lo vas a repartir porque no te alcanza para darle uno a cada uno?*
137. *Alumna: Lo que tiene que seguir repartiendo.*
138. *Docente: ¿Lo que tienen que seguir repartiendo?*
139. *Natalí: Es lo mismo lo que le sobra para repartir que lo que le falta repartir.*
140. *Yael: No, no es lo mismo.*
    (Murmullo)
141. *Docente: Depende de la situación, si vos me decís lo que te sobra lo tienen que seguir repartiendo…*
    (Interrumpen con murmullo, no se entiende)
142. *Docente: Si vos decís, esto es lo que sobró y lo sigo repartiendo y vos decís es lo que tengo que todavía repartir… es lo mismo.*
143. *Varios alumnos: No se puede repartir.*
144. *Docente: ¿No lo pudieron repartir? Yo estoy repartiendo, no estoy diciendo que no puedo usar fracciones. ¿Qué le pongo a este resto?*
145. *Lucas: Yo viste que había dicho lo que tenía que repartir… (se traba)*
146. *Docente: No pensemos en cómo puedo yo repartir ese 3 y no es el momento ahora de discutir eso. Pensemos, ¿qué me está indicando ese 3?*
147. *Lucas: Los chocolates que tenés que repartir.*

148. *Docente: Bueno, ¿qué pongo?*
149. *Luca: Lo que no se puede repartir en enteros.*
150. *Docente: Escuchen esto que está diciendo Luca que está muy relacionado con lo que decía Lucas: Lo que no se puede repartir en enteros. ¿Están de acuerdo con eso? ¿Entonces cómo pongo?*
151. *Luca: (dicta) Lo que no se puede repartir en enteros y habría que repartirlo en fracciones.*
152. *Docente: ¿Pongo así?*
153. *Varios alumnos: Sí.*
(La docente escribe: "Lo que no se puede repartir en enteros y tengo que repartirlo en fracciones")

La discusión sobre la definición del resto se "trabó" a pesar de las intervenciones de la docente para evitarlo. Ella intentó mostrar que el problema requería de una división exacta para hallar la solución recordando que en el enunciado estaba indicado que no debía sobrar nada (intervención 120) pero la falta de acuerdo y el desconcierto continuaban en la clase. La idea de Lucas, referida a que el resto es lo que tienen que "tratar" de repartir (intervención 131), y las propuestas de Luca, centradas en que es lo que no se puede repartir en enteros y se reparte en fracciones (intervenciones 149 y 151), fueron validadas por la docente y permitieron considerar el resto como aquello que se continúa repartiendo en fracciones menores que el entero para poder escribirlo en el cartel.

La docente modificó lo que le dictaban los alumnos con el verbo en forma impersonal (intervención 151), "Lo que no se puede repartir en enteros y habría que repartirlo en fracciones", para escribirlo en primera persona del singular, "Lo que no se puede repartir en enteros y tengo que repartir en fracciones". El reemplazo de 'habría' por 'tengo' podría obedecer a que la docente intentó guardar concordancia con la escritura ya realizada en el cartel respecto del divisor: "Las partes en que las tengo que repartir", que también tenía el verbo en primera persona del singular. Posiblemente de manera implícita haya evaluado que no era ese el momento para discutir sobre la concordancia entre la persona y el verbo.

Seguidamente se planteó continuar con la escritura del cartel proponiendo otras formas de resolver el reparto. Si bien los niños explicaron modos de hallar la solución que eran diferentes a la cuenta, retomaron algunos aspectos que habían sido discutidos al analizar y describir sus partes.

(C2,m39.40-44.15)
154. *Docente: Ahora, ¿otra forma de resolver ese reparto? ¿Marcos?*
155. *Marcos: Dibujando.*
156. *Varios alumnos: Dibujando los chocolates o lo que tenés que repartir.*
157. *Docente: Dale Marcos.*
158. *Marcos: Dibujando lo que tenés que repartir.*
159. *Docente: (escribe y va diciendo lo que escribe, lo acompaña con la entonación de que falta algo) Dibujando lo que tenés que repartir y ¿dividirlo?*
160. *Fabricio: Lo dividís en el dibujo (hace gesto de hacer rayas horizontales).*
161. *Docente: Pero esa división, ¿de dónde sale?*
162. *Fabricio: La división sale de lo que le tenés que dar a cada chico.*

163. *Marcos: Dividirlo por la cantidad de los que son.*
164. *Docente: Marcos dice y dividir por la cantidad de los que son, ¿pongo así?*
 (Discuten cómo ponerlo variando el orden de las mismas palabras)
165. *Docente colaboradora: podemos usar lo que pensó hoy Albertina, dividirlo por la cantidad de personas, objetos, seres.*
166. *Yael: ¿Por la cantidad no será?*
167. *Docente: A ver, Yael dice por la cantidad, ¿les parece?*
168. *Varios alumnos: ¡Sí!*
169. *Docente: (mientras escribe) ¿Y dividirlo por la cantidad?*
170. *Fabricio: De lo que tenés que repartir.*
171. *Docente: ¿Así, de lo que tenés que repartir?*
172. *Fabricio: De lo que lo tenés que repartir.*
 (Murmullo)
173. *Docente: Escúchenme, se están haciendo confusiones con las palabras. Ustedes dicen que hay que dibujar lo que tenés que repartir. En este caso, estos 7 chocolates. Y dividirlo por la cantidad, ¿de qué?*
 (Murmullo)
174. *Docente colaboradora: Hoy Albertina pudo ponerlo en palabras a eso, ¿por qué no lo usan? Hoy ponía personas, cosas, seres…*
175. *Fabricio: ¡Por las partes! Porque en el ejemplo (se refiere al divisor de la cuenta de dividir) pusimos las partes en las que tengo que repartir.*
176. *Docente: Bueno, ¿Cómo lo puedo poner?*
177. *Fabricio: Dividirlo por las partes que lo tengo que repartir.*
178. *Docente: Y dividirlo por las partes en que lo tengo que repartir. ¿Están de acuerdo?*
179. *Varios alumnos: Sí. Y dividirlo por las partes en que lo tenés que repartir.*
 (La docente escribe lo acordado en el cartel: "Dibujando lo que tenés (cantidad) que repartir y dividirlo por la cantidad de partes en que lo tenés que repartir")

Al describir la forma de resolver el reparto a través del dibujo para escribirla en el cartel, nuevamente los niños se enfrentaron a la necesidad de encontrar un modo general de definir las partes en las que tenían que repartir. Si bien la docente colaboradora intervino proponiendo ejemplos concretos para caracterizarlas (intervenciones 165 y 174), los niños pudieron referirse a ellas de manera descontextualizada. Es claro que al intentar conceptualizar las partes entre las que se reparte, retomaron ideas del extenso intercambio que se había generado anteriormente en torno a la cuenta de dividir para definir el significado del divisor (intervención 175). Varias de las participaciones de los niños fueron referidas al modo de escribir esas ideas haciendo pequeños ajustes que permitían profundizar en la conceptualización.

Posteriormente, la docente pidió a los alumnos que realicen otras propuestas sobre formas de resolver repartos para incluir en el cartel, pero los niños comenzaron a buscar modos de obtener ¾ independientemente del contexto del reparto, como había sido discutido en la elaboración del cartel de la primera clase. Por eso les solicitó que se atuvieran a los procedimientos que ya habían analizado en la puesta en común del problema cuya solución era 1 y ¾. Los niños reflexionaron largamente sobre las diferencias entre los modos de resolver que utilizaban dibujos. A esta altura de la clase estaban muy cansados y, por momentos, pareciera que la escritura perdió sentido para ellos.

(C2,m51.23-1:14.38)

180. *Docente: Miren, chusmeen[33] un rato esto (se refiere al pizarrón con los procedimientos) y piensen en las formas que usaron ustedes, todos tuvieron esa necesidad de dibujar y dividirlo por tantas veces como partes…*
181. *Varios alumnos: No.*
182. *Docente: ¿Y cómo pongo? Se ve que dibujar es amplio y habría que especificar qué cosas hago con ese dibujo.*
183. *Docente colaboradora: ¿Todos dibujaron y representaron de la misma manera el reparto, chicos?*
184. *Docente: Si yo tengo que decir esta forma, (lee del afiche) dibujando lo que tenés que repartir y dividirlo por las partes en que lo tenés que repartir, (pregunta) ¿dónde está en el pizarrón, la veo?*
185. *Varios alumnos: Sí, la primera (señalan en los procedimientos registrados en la puesta en común).*
186. *Docente: La primera. ¿La segunda?*
187. *Natalí: En ese caso los 4 primeros chocolates no los estás dividiendo.*
188. *Docente: ¿Por qué?*
189. *Natalí: Porque como son 4 chicos, alcanza para darles uno a cada uno sin partirlos.*
190. *Docente: Escuchen esto que está diciendo Natalí. Es verdad que en estos tres casos, si yo miro, dibujamos, ¿dibujamos de la misma manera?*
191. *Varios alumnos: No.*
192. *Docente: Entonces son formas que por ahí a mí me sirven para resolver repartos. ¿Cómo puedo poner esta forma que está diciendo Natalí, que no es igual a esta porque acá no los partieron? (se refiere a los primeros 4 chocolates del segundo procedimiento dibujado). ¿Cómo puedo poner?*
193. *Natalí: Que no siempre se tiene que repartir, que…*
194. *Fabricio: No siempre es necesario…*
195. *Natalí: No siempre es necesario dividir.*
196. *Docente: (lee lo que escribieron en el cartel) Una forma, dijimos, dibujando. Vuelvo al dibujo.*
197. *Natalí: No siempre es necesario dividir.*
198. *Docente: Yo después lo que puedo hacer, de este apartado que pusimos dibujar… Cuando tengamos el afiche pasado [en limpio], vamos a tener las diferentes formas dentro de los dibujos.*
199. *Yael: Si vos tenés más de 10 chocolates, no sé, 50 chocolates, como que no está muy bueno dibujarlos.*
200. *Fabricio: Ahí te sirve la división.*
201. *Docente: Escuchen esto que está diciendo Yael y lo que está diciendo Fabricio, que me parece que está muy bueno. Yael dice si yo tengo 50 chocolates para repartir no voy a dibujar los 50 chocolates y Fabricio dice yo voy a usar la división.*
202. *Fabricio: Si tengo 5 chicos, hago 50 dividido 5.*
203. *Docente: Después ustedes verán qué forma te resulta más fácil al momento de resolver. Pero a ver, ¿está mal si dibujo los 50 chocolates como dijeron ustedes?*
204. *Fabricio: No es lo más económico, pero se puede.*
205. *Docente: ¿Es una forma que se puede aceptar? Sí. Ahora, volviendo a lo que dijo Natalí, lo de los dibujos, ¿cómo pongo?*
206. *Natalí: Que no siempre en todos los casos se tienen que partir los chocolates.*
    (Los alumnos comenzaron a dispersarse porque fue una situación muy extensa. No lograban aclarar las diferencias entre las resoluciones de repartos que utilizaban dibujos)
207. *Albertina: Podemos hacer opciones.*
208. *Docente: ¿A ver opciones? ¿De qué tipo?*
209. *Albertina: Son opciones para hacer la cuenta, para llegar al resultado.*
210. *Luca: Hacer una que se dividen todos, otra que no se dividen todos…*
211. *Docente: ¿Una opción cuál sería?*
212. *Pilar: Dibujo los 7 chocolates y a los 7 chocolates los puedo dividir en 4 pedazos, o a los 4 primeros los puedo dejar enteros y reparto un entero a cada uno y divido los otros…*
213. *Docente: Escuchen esto que dice Albertina, mirando el pizarrón, vemos que el dibujo fue una forma de resolver, también vemos que hay diferentes formas utilizando el dibujo. Albertina dice de poner*

[33] Si bien "chusmear", derivada de "chismear", es una expresión coloquial usada en Argentina que significa hacer comentarios acerca de los asuntos privados de los demás, de forma indiscreta o con mala intención, en este caso la docente la usa para pedir a los niños que miren el pizarrón con atención o de manera curiosa.

opciones. Entonces Pilar dijo, una opción sería dibujarlos todos y partirlos a todos en 4. Otra opción sería dibujarlos a todos, repartir primero 4 y dividir a los últimos 3. ¿Y otra opción cuál sería?

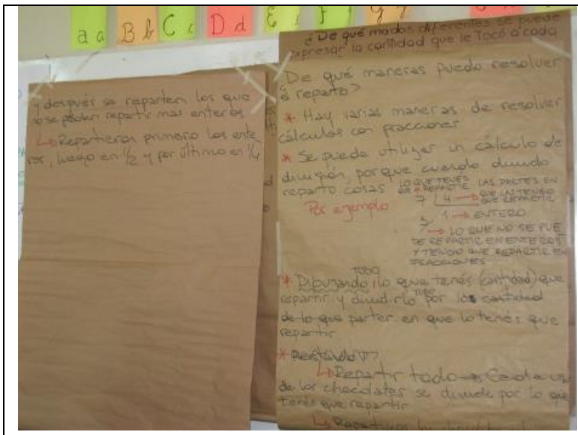
214. *Pilar: Con los 4 primeros chocolates se le da un entero para cada chico, más una mitad más un cuarto.*
215. *Docente: Está perfecto, una opción fue partir a todos en la cantidad de personas en que tenía que hacer el reparto, la otra es repartir estos enteros y los que no me alcanzaban los repartieron en cuartos y en la tercera, reparto enteros, después medios y después cuartos. Ahora, ¿cómo lo puedo poner? Voy a poner las tres opciones y me dicen cómo.*
216. *Luca: Profe, la primera se puede llamar repartir todo, por ejemplo.*
217. *Docente: Claro, repartir todo. ¿Cómo lo explico?*
218. *Luca: Cada uno de los chocolates se reparte en 4 partes.*
219. *Docente: ¿Cada uno de los chocolates…? ¿Se parte…?*
220. *Luca: En la cantidad necesaria que haya que repartir.*
221. *Inv.: Lo podemos poner más cortito, en las partes que hay que repartir.*
222. *Docente: Cada uno de los chocolates se divide…*
223. *Varios alumnos: …Por lo que lo tenés que repartir.*
224. *Docente: (termina de escribir: "Repartir todo. Cada uno de los chocolates se divide por lo que tenés que repartir") Esta es una forma, ¡otra opción!*
225. *Fabricio: Nosotros pensamos que 4 de los chocolates que teníamos no era necesario dividirlos, un entero le dimos a cada uno, los tres que sobran que no se los podemos dar en enteros, lo dividimos por la cantidad de personas.*
226. *Docente: ¿Qué fue lo primero que hicieron? ¿Repartieron qué cosa?*
227. *Fabricio: Repartimos los chocolates enteros y después ya pasamos a los otros 3. (dicta) Y los otros 3 que sobran… (se corrige) que faltan repartir…*
228. *Docente: Repartieron los chocolates enteros…*
229. *Rodrigo: (dicta) Y los otros que quedan para repartir, los partimos…*
230. *Docente: ¿Por qué?*
231. *Rodrigo: Porque si no, quedaría uno sin comer chocolate.*
232. *Docente: Primero se reparten los chocolates enteros y ¿por qué decidieron no seguir repartiendo enteros?*
233. *Fabricio: Porque si no, no alcanzaban, eran 4 chicos y tenía 3.*
234. *Docente: Y tenías 3, bueno, ¿cómo pongo? Primero repartieron los enteros…*
235. *Fabricio: Después decidimos repartir los 3 chocolates que faltaban repartir por 4 pedazos…*
    (La docente escribe: "Repartimos los chocolates enteros y después se reparten los que no se pueden repartir más enteros")
236. *Docente: ¿Y la otra? Martina.*
237. *Martina: Pensamos casi lo mismo. Lo único que cambiamos es que esos dos chocolates en vez de repartirlos en cuartos los repartimos en medios.*
238. *Docente: ¿Es lo mismo?*
239. *Martina: No.*
240. *Docente: ¿Cómo lo pongo?*
241. *Martina: Emmm…*
242. *Docente: ¿Primero repartieron cómo?*
243. *Martina: Los 4 enteros.*
244. *Docente: Olvidémonos del 4, ¿primero repartieron cómo ustedes?*
245. *Martina: Uno para cada chico.*
246. *Docente: En los enteros. ¿Después reparten de qué forma?*
247. *Martina: Después pensamos, emmm…*
248. *Antonio: Dos chocolates los partimos a la mitad…*
249. *Martina: Que ahí me van a dar cuatro medios que son para cada chico.*
250. *Docente: ¿Y por último qué hicieron?*
251. *Martina: Y por último hicimos ese solo en cuartos.*
252. *Docente: ¿Cómo pongo? (suena el timbre de recreo) ¡Ya salen! ¿Primero en enteros, después…?*
253. *Martina: A dos los partimos por la mitad que sería un medio para cada chico.*
254. *Docente: Y por último en cuartos. ¡Salgan!*
    (Queda escrito: "Repartieron primero los enteros, luego en ½ y por último en ¼". No es clara la escritura pero la situación había sido demasiado extensa, además había sonado el timbre de recreo)

Las primeras intervenciones de la docente en este extenso fragmento apuntaron a que los niños identifiquen que no todos los procedimientos gráficos son iguales y les propuso organizar el texto a producir colectivamente señalando opciones con viñetas. Dado que los niños estaban agotados y dispersos, la docente se vio en la obligación de realizar varias intervenciones de recapitulación de los acuerdos y aportes de los diferentes alumnos (intervenciones 201, 213 y 215).

Los niños identificaron tres formas de resolución con dibujos para incluir en el escrito; al describir la segunda opción en la que 4 enteros quedan sin partir, utilizaron indistintamente expresiones referidas a que estos chocolates no se "dividen", no se "reparten" o no se "parten" (intervenciones 187, 189, 193, 195, 197, 206 y 225). Encontramos aquí un uso algo confuso por parte de los niños de estas expresiones, dado que si bien es acertado que en este procedimiento no se "parte" cada uno de los 4 chocolates enteros, la parte entera del resultado se obtiene al "dividir" o "repartir" los 4 chocolates, entregando uno a cada amigo. Por ello, no resulta adecuado afirmar que estos 4 chocolates no se dividen o no se reparten. Este uso de los términos no fue tematizado para definir qué se iba a escribir en el cartel ni fue puesto en diálogo con la discusión anterior sobre la posibilidad de resolver los repartos con un cálculo de dividir (intervenciones 16 a 54). Lo que quedó escrito en el afiche se elaboró a partir de aportes que fueron haciendo varios niños por separado y de algún modo, se saldó la confusión de términos haciendo uso del verbo "repartir" tanto para la parte entera como para la parte fraccionaria del resultado: "Repartimos los chocolates enteros y después se reparten los que no se pueden repartir más enteros".

En el contexto de esta situación de escritura hubo varias intervenciones de la docente cuya intención fue favorecer el proceso de conceptualización matemática de los niños. Por ejemplo, al insistir en que Rodrigo explique por qué no podía seguir repartiendo enteros después de darle un chocolate a cada chico (intervenciones 228 a 235), pareciera que la docente apunta a profundizar el concepto de reparto en el que el resultado es mayor que un entero.

Es interesante también reparar en cómo la escritura permitió que Yael y Fabricio intercambiaran ideas sobre un tema que hasta ahora no se había discutido: la conveniencia o no de utilizar dibujos para resolver repartos cuando se está tratando con números mayores y la posibilidad de usar la división en esos casos (intervenciones 199, 200, 202 y 204).



Transcripción de la escritura del cartel (comienza en el afiche de la derecha y termina en el de la izquierda):
¿De qué maneras puedo resolver un reparto?
*Hay varias maneras de resolver cálculos con fracciones
*Se puede utilizar un cálculo de división porque cuando divido reparto cosas
Por ejemplo

LO QUE TENÉS QUE REPARTIR
LAS PARTES EN QUE LAS TENGO QUE REPARTIR
7 | 4
3 1 → ENTERO
LO QUE NO SE PUEDE REPARTIR EN ENTEROS Y TENGO QUE REPARTIR EN FRACCIONES

*Dibujando: TODO lo que tenés (cantidad) que repartir y dividirlo TODO por las ~~cantidad de lo que~~ partes en que lo tenés que repartir.
*~~Restando~~
→Repartir todo→Cada uno de los chocolates se divide por lo que tenés que repartir
→Repartimos los chocolates enteros y después se reparten los que no se pueden repartir más enteros
→Repartieron primero los enteros, luego en ½ y por último en ¼

Figura 7: Cartel A2, elaborado en situación de escritura colectiva: ¿De qué maneras puedo resolver un reparto?

Como fue mencionado anteriormente, un aspecto que llama la atención en la producción final de este afiche es cierta falta de uniformidad en el empleo de la persona verbal. El título del cartel invita al uso de la primera persona del singular, "¿De qué maneras 'puedo' resolver el reparto?". La primera oración está enunciada en una forma impersonal, "Hay varias maneras…", y la segunda combina una forma impersonal, "Se puede…", con una proposición subordinada en primera persona del singular, "cuando divido reparto cosas", volviendo así a la persona verbal iniciada en el título. En las flechas que corresponden a los componentes de la cuenta de dividir se emplea la segunda persona del singular para el dividendo, "lo que tenés que repartir", la primera persona del singular para el divisor, "las partes en que las tengo que repartir", y una combinación de forma impersonal y primera persona del singular para describir el resto, "lo que no se puede repartir en enteros y tengo que repartir en fracciones". Finalmente, al describir los procedimientos de resolución en los que se utilizan dibujos predomina la segunda persona del singular, "lo que tenés que repartir", aunque en las dos últimas oraciones aparecen la primera persona del plural combinada con forma impersonal, "Repartimos… y después se reparten…", y la tercera persona del plural, "Repartieron…". Es posible que la concordancia de la persona verbal no haya sido motivo de atención por parte de los niños dado que el escrito que estaban produciendo consistía en un texto para el propio estudio que los tenía a ellos mismos como destinatarios y solo sería publicado en el aula. El uso que los alumnos hacen de la forma impersonal del verbo en algunos enunciados también puede analizarse como una marca del proceso de despersonalización[34] del saber que están produciendo y reorganizando de una manera cada vez más explícita y objetiva. Al despersonalizar un texto de saber, este podrá ser retenido y reutilizado en situaciones futuras.

Finalmente, el análisis de esta segunda situación de escritura colectiva nos permite afirmar que se promovieron ciertos avances en los conocimientos de los niños respecto de los que circularon en la puesta en común del segundo problema. En particular, la escritura del significado de los diferentes componentes de la cuenta de dividir permitió establecer relaciones que no habían surgido en el trabajo sobre los procedimientos.

4.1.1.2. d. Síntesis de algunos conocimientos infantiles que circularon en la puesta en común del problema: "¿Cómo se podrá hacer para repartir 7 chocolates entre 4 amigos de manera que todos reciban la misma cantidad y no sobre nada?" y en la situación de escritura colectiva: "¿De qué maneras puedo resolver un reparto?"

Asuntos	Algunos conocimientos que circularon en la puesta en común sobre los modos de resolver el problema	Algunos conocimientos que circularon en la situación de escritura colectiva
Descomposición aditiva del dividendo en cociente entero multiplicado por cantidad de partes y resto	(intervenciones 3 y 4). "Pensamos que 3 + 4 es 7, entonces… o sea se podía darle un chocolate a cada chico." (intervención 10). "Porque en ese 4 ya le das uno a cada uno."	(intervenciones 187 y 189). "En ese caso los 4 primeros chocolates no los estás dividiendo." "Porque como son 4 chicos, alcanza para darles uno a cada uno sin partirlos."
Composición de parte entera y fraccionaria para obtener el resultado del reparto. Equivalencia con expresiones fraccionarias mayores que uno.	(intervenciones 28 y 30). "Un entero, ese ya es uno, y después como sabemos que ½ son 2/4, a esos 2/4 le sumamos el cuarto del último chocolate." (intervención 38) [¿Cómo llegaron al 1 y ¾?] "Sumamos el 1 y el ¾." (intervención 41). "Un entero más un medio más un cuarto es igual a un entero y tres cuartos." (intervención 83). "Como los partimos en 4 cada chocolate y son 7, pensamos que eran 7/4. Y después nos dimos cuenta que era lo mismo que hacer 1 y ¾ porque ya al tener 4/4, tenés un entero, más los otros ¾, te da 1 y ¾." (intervención 85). "Nosotras partimos los	(intervención 212). "Dibujo los 7 chocolates y a los 7 chocolates los puedo dividir en 4 pedazos, o a los 4 primeros los puedo dejar enteros y reparto un entero a cada uno y divido los otros…" (intervención 214). "Con los 4 primeros chocolates se le da un entero para cada chico, más una mitad más un cuarto."

[34] Según Chevallard (1997) el saber sabio desde su origen se vincula a su productor; compartirlo y hacerlo público en la comunidad supone un cierto grado de despersonalización. El proceso de despersonalización es uno de los requisitos para que un saber matemático sea escolarizable y culmina en el momento de la enseñanza. El autor afirma que cuando "el sujeto está expulsado fuera de sus producciones", el saber es objetivado.

	7 chocolates en 4, entonces como eran 7…, como los partimos en 4…, para no confundirnos pusimos un color en cada uno, entonces nos dieron 7/4 porque son 7 chocolates dividido entre 4.” (intervención 91). “Que 4/4 es lo mismo que un entero y como ya habíamos llegado a 7/4, nos sobraban ¾ de 4/4, entonces era 1 y ¾.”	
Relación entre reparto y división.	(intervenciones 45, 47 y 49). “7 dividido 4 (en forma de cuenta)… Nos fijamos cuántas veces entraba y entraba una vez sola en el 7… 1 y resto me dio 3. Y los 3 que me dio los partí (dibujando) en 4, me dio 1 y ¾.” (intervenciones 59 y 60). “Dividimos 7 dividido… porque estás repartiendo 7 chocolates a 4 chicos, entonces ahí también estás haciendo lo mismo. Y los tres chocolates que te quedan de resto los partís (dibujando) en… cuartos.” (intervención 72). [¿Qué significa ese uno? (señala el cociente)] “Un chocolate para cada chico.”	(intervenciones 22 y 25). “Porque si podés dar enteros, podés dividir el número de los que son por el… Porque si tenés enteros y podés repartir en los compañeros que tenés, lo podés dividir.” (intervenciones 158 y 177). [El reparto podés resolverlo] dibujando lo que tenés que repartir… y dividirlo por las partes en que lo tengo que repartir. (intervenciones 199 y 200). “Si vos tenés más de 10 chocolates, no sé, 50 chocolates, como que no está muy bueno dibujarlos.” “Ahí te sirve la división.” Significado de los componentes de la cuenta de dividir (intervención 45). [cociente] “Porque te muestra lo que das, el entero… y lo que te sobra es lo que tenés que... (intervención 70). [resto] “Es lo que falta repartir.” (intervención 71). [resto] “¡Es lo que sobra!” (intervención 74). [cociente] “Para mí el 1 es lo que ya le dieron a cada chico.” (intervención 77). “Al resto yo le pondría que serían los… los cuartos que no llegaron a ser un entero.” [¿de dónde sacaste los cuartos?] (intervención 80). Del 4 que está ahí arriba (señala el divisor).” (intervenciones 87 y 88). [¿De dónde salió que lo estoy partiendo en 4?] “Por el dividendo (duda) ¡divisor!” (intervención 92). [divisor] “Las veces en las que se tiene que repartir o a cuántos hay que repartir” (intervención 103). [divisor] Las partes en las que se puede repartir. (intervención 108). [dividendo] “Lo que tenés que repartir.” (intervención 151). (resto) “Lo que no se

		puede repartir en enteros y habría que repartirlo en fracciones.” (intervención 66) “El resto también es parte del resultado.” (intervención 106). “Profe, en los cálculos así… digamos que hay dos resultados, hay dos números que te dan el resultado, que es el caso del 1 y el 3.”

Al poner en relación las formulaciones realizadas por los niños en el momento de discusión sobre la resolución del problema y en la situación de escritura colectiva encontramos que se trataron tres asuntos en común.

Uno de ellos fue la posibilidad de anticipar la existencia de una parte entera en el resultado del reparto a partir de la descomposición aditiva del dividendo en un sumando que representa el cociente entero, multiplicado por la cantidad de partes, y otro sumando que representa el resto. En la puesta en común de la resolución los alumnos hacen un uso implícito de la relación $D = d \times c + r$ al definir que la cantidad a repartir es suficiente para dar un chocolate a cada chico considerando que $7 = 4\ [x\ 1] + 3$. Luego, durante el intercambio producido en la situación de escritura los niños advierten que 4 de los 7 chocolates no se dividen porque con ellos alcanza para dar un chocolate a cada chico. Pareciera que aquí se insinúa tácitamente una condición que se desprende de la relación mencionada y se avanza algo más hacia una generalización: si el dividendo es mayor que el divisor, el cociente tendrá una parte entera.

Otro de los asuntos discutidos en ambos momentos fue la forma de componer la parte entera y la parte fraccionaria para obtener el resultado del reparto y, a la vez, la equivalencia de estas expresiones mixtas con fracciones mayores que uno. En la puesta en común los niños pueden apoyarse en la equivalencia ½ = 2/4 para sumar el tercer cuarto de chocolate y obtener la parte fraccionaria, 2/4 + ¼ = ¾, y también logran componer el resultado sumando el entero a la parte fraccionaria, 1 + ½ + ¼ = 1 + ¾ = 1 ¾ ó 1 y ¾. Además, producen argumentos para justificar la equivalencia entre 1 ¾ y la fracción 7/4 que había sido encontrada como solución mediante otros procedimientos. Ellos explican que al partir cada uno de los 7 chocolates en 4 y dar una parte de cada chocolate a cada chico, a cada uno le tocan 7/4 porque ¼ + ¼ + ¼ + ¼ + ¼ + ¼ + ¼ = 7/4 y, considerando la correspondencia entre 1 y 4/4, agrupan los sumandos para llegar a: 7/4 = 4/4 + ¾ = 1 + ¾ = 1 ¾. Las intervenciones que los niños realizan en la situación de escritura colectiva al describir los diferentes procedimientos de resolución de un reparto, recuperan estas relaciones pero las formulan de manera sintética, con mayor grado de abstracción, y las usan para hacer cierta clasificación de los modos de hallar la solución.

Finalmente, se intercambia en ambos momentos sobre la relación entre los repartos y la operación de división. En la puesta en común los niños afirman que, efectivamente, el reparto puede resolverse a través de una cuenta de dividir ubicando en el dividendo la cantidad a repartir y en el divisor la cantidad de partes entre las que se reparte. Arriban a que el cociente significa la cantidad que corresponde a cada parte en el reparto y el resto significa lo que sobra pero tiene que seguir repartiéndose. Este último reparto del resto es resuelto aquí gráficamente. El intercambio producido a propósito de la escritura colectiva, generó una idea que no había sido explicitada en la puesta en común sobre la relación entre el reparto y la división. Los alumnos restringen el vínculo a aquellos casos en que es posible repartir en partes enteras. Si bien se trata de una idea errónea acerca del dominio de validez de esta relación -que pasó inadvertida y no fue tomada posteriormente como objeto de reflexión-, resulta interesante subrayar cómo la necesidad de precisar el lenguaje para escribir sobre las razones que justifican la relación entre el reparto y la división puso sobre la superficie una idea que no había sido explicitada en la instancia anterior. Otro avance en los conocimientos que se revela en la situación de escritura colectiva es el límite que ponen a los procedimientos gráficos. Si bien reconocen que dibujar es una forma de resolución posible, señalan que no resulta conveniente en los casos en que intervienen cantidades mayores y recomiendan allí el uso de la división.

La decisión de incluir en el afiche la cuenta de dividir con flechas que definieran cada uno de sus componentes generó la necesidad de producir algunas ideas que no habían surgido en la puesta en común y de formularlas de manera descontextualizada del problema. El cociente aparece nuevamente como la cantidad entera que corresponde a cada parte en el reparto, pero al definir el resto surge una cuestión temporal que no había sido analizada: primero se reparte en enteros y después se reparte lo que no alcanza para ser repartido en enteros. A partir de allí los niños establecen que el resto significa lo que sobra pero debe continuar repartiéndose y, además, pueden identificar una nueva relación: el resto se reparte entre la cantidad de partes que indica el divisor. Este conocimiento resulta un avance significativo para comprender la relación entre los componentes de la división y supera los procedimientos que utilizaban en la instancia de resolución en la que repartían el resto de manera gráfica. Otra reflexión que surge aquí de las precisiones que exige la escritura es el reconocimiento de una importante cuestión conceptual: la división entera involucra dos resultados, el cociente y el resto.

4.1.2. En repartos de "X" chocolates entre "Y" niños (Clases 7 a 9)

4.1.2. a. Resolución del problema

La siguiente situación de la secuencia en la que se presentaron problemas de reparto consistió en la comparación de 8 repartos diferentes de chocolates entre niños. Se trataba de repartos que tenían las mismas condiciones que los resueltos con anterioridad; se repartían los chocolates en partes iguales sin que sobrara nada:

Repartos	*Número Chocolates*	*Número Niños*	*A c/u le toca*
Reparto 1	*2*	*3*	
Reparto 2	*2*	*4*	
Reparto 3	*1*	*3*	
Reparto 4	*3*	*2*	
Reparto 5	*1*	*2*	
Reparto 6	*3*	*6*	
Reparto 7	*2*	*6*	
Reparto 8	*6*	*4*	

A. *¿A los niños de qué repartos les tocará, a cada uno, más de un chocolate?*
B. *¿A los niños de qué repartos les tocará la misma cantidad de chocolate?*
C. *¿A los niños de qué repartos les tocará más chocolate que a los del reparto 1?*
D. *Elijan por lo menos un reparto del que estén seguros que a cada chico le toca lo mismo de chocolate que a cada uno del reparto 5.*

Organizados en parejas, los niños debían responder en primer lugar las 4 preguntas que requerían el establecimiento de ciertas relaciones entre los números intervinientes en los repartos, sin resolverlos, y posteriormente debían resolver solo uno de los 8 repartos que era indicado por la docente a cada pareja.

Luego de poner en común lo discutido en las parejas, se propuso una situación de escritura colectiva, analizada en el apartado 4.1.2.c., en la que se pedía a los alumnos que decidieran si agregaban alguna idea al cartel confeccionado en clases anteriores, titulado: *"¿De qué maneras puedo resolver un reparto?"*.

Durante el trabajo de resolución en parejas surgieron algunas cuestiones que nos parece interesante analizar. Seleccionamos fragmentos del intercambio de una de las parejas, la de Yael y Natalí. Este primer fragmento muestra cómo estas alumnas van controlando las representaciones que realizan para resolver el problema planteado. Yael oficiaba de dictante y Natalí era quien tenía a su cargo la escritura en el papel mientras respondían la pregunta A en la que debían identificar los repartos cuyo cociente era mayor que el entero:

(C7,m10.06-12.50)

1. *Yael: ¿Qué hay que poner? No se entiende.*
2. *Natalí: 8 (dice mientras está escribiendo en la hoja de la pareja, el 8 se refiere al número de reparto de 6 chocolates entre 4 chicos).*
3. *Yael: Poné 6 y dibujá 6 chocolatines más. (Espera mientras su compañera escribe). ¡Seis, seis, y dibujaste ocho! (marcando un error en la anotación de Natalí).*
   (Natalí se ríe, borra y corrige lo que indicó Yael)
4. *Yael: Y abajo dibujá 4 tipitos[35]. (Dicta señalando dónde ponerlo) Y a cada uno le toca un chocolate… más los otros.*
   (Natalí dibujó 6 chocolates y un "tipito" en cada uno de los 4 primeros, luego se disponía a dibujar las particiones por la mitad de los dos chocolates restantes haciéndolas corresponder con otros 4 "tipitos")
5. *Yael: No, no, no, no le pongas todos. Estos si querés no los dibujes. No les dibujes adentro. (Se refiere a no dibujar las particiones ni los "tipitos" en los dos chocolates que sobraron luego de repartir 1 entero a cada uno de los 4 chicos o "tipitos". Yael borra lo que estaba haciendo Natalí, toma su lápiz y dibuja dos chocolates). Ponele que estos son chocolates… y le hacés una… yo no sé dibujar llaves[36].*
6. *Natalí: Bueno, yo se la hago.*
7. *Yael: Sí, hacésela vos, y acá ponés: (Dicta) Sobran y ya cada uno tiene un entero. (Dice) No es necesario saber cuánto es para cada uno. (Vuelve a dictar lo mismo).*
8. *Natalí: (Mientras escribe) ¿Tienen un entero?*
9. *Yael: (Dicta otra vez) Tienen un entero. (Dice) Porque no es necesario dividir y saber cuánto es porque… (no se entiende).*
   (Natalí busca en el cuadro otro reparto para elaborar la respuesta)
10. *Yael: ¿Y cuál era?*
    (Natalí señala)
11. *Yael: Y poné el 4 (refiriéndose al reparto de 3 chocolates entre 2 niños) y hacé lo mismo, dibujá 3 chocolates y hacé 2 tipitos. Ponele (dicta): sobra y ya cada uno tiene un entero. O como lo pusiste ahí, no sé cómo lo habías puesto (Espera mientras Natalí termina de anotar). ¿No hay ninguno más?*
12. *Natalí: No. Esperá, por las dudas verifiquemos.*
    (Antes de pasar a la siguiente pregunta, ambas alumnas controlan haber señalado todos los repartos cuyo cociente es mayor que uno. Sin resolver ningún cálculo, solo mirando los números del cuadro, van revisando uno por uno y diciendo con seguridad "este no…, este sí…").

Yael ha asumido su lugar de dictante, pero no solo dicta, también plantea diversos modos de representar y da explicaciones sobre por qué propone ciertas escrituras o representaciones. Para iniciar la resolución de esta primera pregunta en la que se requería identificar los repartos mayores que el entero, Yael indica a su par poner el número 6 y dibujar 6 chocolatines (intervención 3), luego dibujar los 4 chicos entre los que se debía repartir a los

[35] Con la palabra "tipitos" se refiere a los chicos entre los que debían repartir los chocolates.
[36] Con la palabra "llaves" se refiere a la forma "{" para indicar los chocolates que sobran después de repartir un chocolate entero a cada niño.

que en primera instancia les correspondería un chocolate entero (intervención 4). Natalí escribe lo que expresa su compañera pero sigue avanzando autónomamente en la resolución cuando esta se detiene y hace corresponder ahora las mitades de los dos chocolates sobrantes con los 4 chicos. Yael, interpretando qué pide la consigna, propone a su compañera no representar estas particiones ni los “tipitos” (intervención 5) dado que no es necesario saber cuánto corresponde a cada uno, sino solo determinar si el resultado es mayor que un entero (intervenciones 7 y 9). Del mismo modo, ambas proceden a incluir en la respuesta el reparto N° 4 en el que se reparten 3 chocolates entre 2 chicos. Yael vuelve a señalar que sobran chocolates después de haber repartido un chocolate a cada chico, razón que ella considera suficiente para afirmar que la fracción resultante será mayor que un entero: “sobra y ya cada uno tiene un entero” (intervención 11).

Al resolver la pregunta B que requería establecer cuáles son los repartos cuyos cocientes son iguales, se produce el siguiente intercambio en la misma pareja. Aquí Yael parece tomar conciencia de un conocimiento a partir de enunciarlo para que sea escrito por su compañera.

(C7,m12.59-16.26)

13. *Yael: Acá (señala reparto 2), tiene que ser la mitad. Y en esta, y en esta (señala muy segura los repartos 5 y 6).*
    (Ambas niñas verifican en la tabla mirando los números, nuevamente sin hacer cálculos, “en esta no…, en esta sí…” y concluyen que los que cumplen la condición solicitada en la pregunta son solo los repartos 2, 5 y 6 que permiten obtener las fracciones 2/4, ½ y 3/6, respectivamente)
14. *Yael: Bueno, poné…, dibujá 2 chocolates. (Da esta indicación a Natalí para representar el reparto de 2 chocolates entre 4 niños).Poné (dicta) les toca la misma cantidad, (dice) porque no es nuestro trabajo poner cuántos sino por qué (no se pedía en la consigna que explicaran por qué). Y abajo ponele el 5, dibujá los chocolates, dibujá los tipitos y poné lo mismo, les toca la misma cantidad. Y en el 6 dibujá 3 chocolates y 6…*
15. *Natalí: (sigue resolviendo en la hoja sin detenerse, de manera casi automática) después hago una llave y pongo (se autodicta) porque son el doble.*
16. *Yael: (dicta) Porque son el doble, (dice) ponele eso… De personas, porque habla de personas y la mitad de chocolate…*
    (Natalí continúa resolviendo en la hoja y Yael se queda pensando)
17. *Yael: Yo no sabía eso de que si era el doble o la mitad…*
18. *Natalí: (va diciendo lo que escribe y preguntando) Porque son el doble, ¿de personas?*
19. *Yael: Porque son el doble de personas y la mitad de chocolates. De cantidad, que quede eso, de cantidad. Entre paréntesis ponele (dicta) de cantidad.*
20. *Natalí: ¿Qué pongo?*
21. *Yael: Cantidad. Porque estamos hablando de la cantidad no de la forma.*
    (Queda escrito: “Porque son el doble de personas y la mitad de chocolate (cantidad)”)

La selección de los repartos que permiten obtener el mismo cociente no parece ofrecer dificultad para estas niñas, dado que con solo mirar los números correspondientes a la cantidad a repartir y a las partes entre las que se reparte esa cantidad, ellas pueden identificar cuáles cumplen la condición solicitada. Yael nuevamente interpreta la consigna afirmando que no se pide que expliciten cuánto le toca a cada niño en el reparto sino las razones por las que esas fracciones representan la misma cantidad (intervención 14). Al justificar por qué esos cocientes son iguales ambas niñas acuerdan en que se debe a que son el doble de personas y la mitad de chocolates (intervenciones 15, 16, 18 y 19). Durante la textualización compartida de estas ideas, Yael reconoce un aprendizaje nuevo en sus propias formulaciones orales: “Yo no sabía eso de que si era el doble o la mitad…” (intervención 17). Ella parece referirse a que si la cantidad de partes entre las que se reparte -representada en el denominador- es el doble de la cantidad a repartir -representada en el numerador-, o bien, esta última es la mitad de la primera, la fracción resulta equivalente a ½. Esta relación que se había puesto en juego a nivel implícito en la selección de los repartos equivalentes pudo ser identificada por esta niña como un nuevo conocimiento gracias al desafío que supuso dictarlo para que su par lo incluyera en la producción escrita de la resolución.

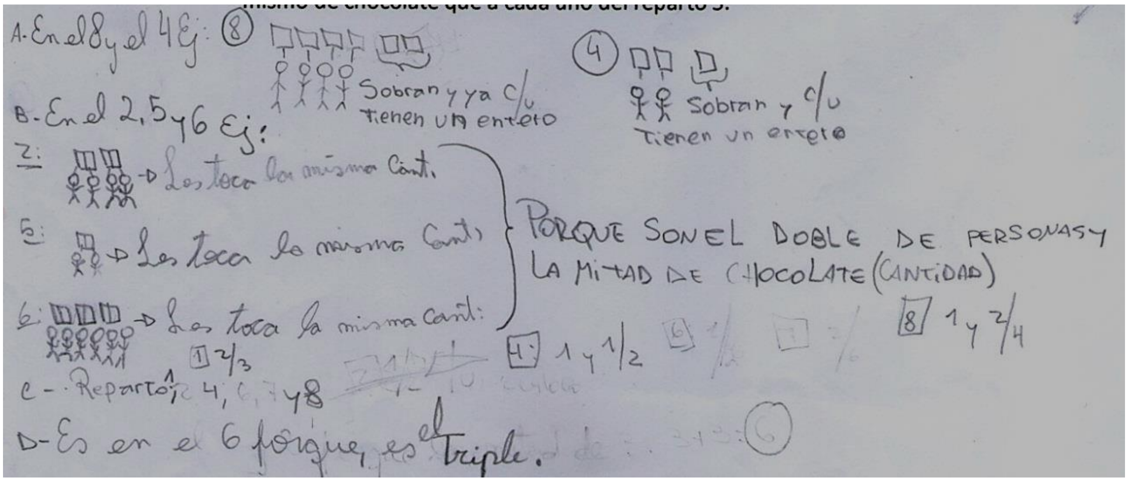


Figura 8: Detalle de la producción de la pareja de Yael y Natalí para resolver el problema de comparación de repartos de “X” chocolates entre “Y” niños.

Al responder la última de las cuatro preguntas en la que se les pedía que eligieran al menos un reparto que fuera equivalente al reparto N° 5 cuyo cociente era ½, estas alumnas en interacción con otra niña encuentran una regularidad importante para la construcción de la relación entre los repartos y el concepto de fracción.

(C7,m26.03-32.15)

22. *Yael: No entendemos la pregunta D.*
23. *Inv.: (lee la consigna) Elijan por lo menos un reparto del que estén seguros que a cada chico le toca lo mismo de chocolate que a cada uno del reparto 5. (Dice) ¿Cuánto les toca a los chicos del reparto 5?*
24. *Natalí y Yael: Un medio.*
25. *Inv.: ¿Un medio? Bueno, digan por lo menos uno del que estén seguras que también les toca un medio. ¿Sí?*
26. *Yael: Sí, otro…*

27. *Inv.: Otro reparto de acá, de los 8, que también crean que les toca un medio.*
28. *Natalí: ¿Un medio a cada uno?*
29. *Inv.: Un medio a cada chico. Un medio, ¿sí?*
    (Natalí comienza a resolver)
30. *Yael: Ah, mirá, acabo de descubrir algo. (Señala los números de la tabla, dibuja una rayita en el medio de los chocolates y los chicos en repartos 5 y 3, y lee) Un medio y un tercio.*
31. *Camila (niña de la pareja frente a Yael y Natalí): Todos son así, todos son con la rayita. Es como que todos tuviesen la rayita acá (se refiere a que la rayita está entre las columnas de chocolates y de niños). Es así de fácil.*
32. *Yael: ¿En serio? (sorprendida) ¿Todos?*
33. *Camila: Sí.*
    (Natalí continúa resolviendo el problema planteado en la consigna D. Yael va haciendo aportes, hace algunos dibujos antes de afirmar que 3/6 es igual a ½ y 2/4 también)
34. *Yael: ¿Sabés qué? Camila me dio una idea. (Va marcando la raya intermedia y va leyendo las fracciones resultantes en cada reparto) Dos tercios, dos cuartos, un tercio, tres dosavos…, no sé, como se diga, ¿entendés? Todos, si les ponés la rayita es el resultado.*
    (Comienzan a resolver el reparto N°3 que les había sido asignado. Yael dicta y Natalí escribe cómo lo van resolviendo)
35. *Yael: (dicta) Dividimos el chocolate en 3 y al ser 3 chicos, nos dio justo para 1/3 para cada uno… (dice) Y también anotá eso de la rayita… Es interesante.*
    (Natalí, que pareció no escuchar la explicación anterior de su compañera, va completando las rayitas que faltaban en la tabla)
36. *Yael: Pero no, las rayitas no, expliquemos algo de eso.*
37. *Natalí: Vos explicalo, yo no tuve la idea.*
38. *Yael: Pero anotalo, para que no me lo (no se entiende)… Ah, no, no, no lo anotes.*
    (Natalí llama a la docente, se acercan las dos alumnas donde ella está. Natalí le muestra las rayitas que descubrió Yael)
39. *Docente: ¿Por qué llegaste a eso?*
40. *Yael: Y porque estábamos así y como a nosotras nos tocó el reparto 3 y nos dio un tercio, yo me fijé en los números, les puse una rayita y dio un tercio. Entonces me fijé con todos y daba lo mismo.*
41. *Docente: ¿Y da lo mismo? Bueno, después lo vemos.*

Las relaciones que las niñas iban estableciendo para responder las cuatro preguntas y la disposición de las cantidades en el cuadro de los repartos promovieron que Yael comenzara a observar una regularidad sustancial (intervención 30): los números que indican la cantidad a repartir y la cantidad de partes entre las que se reparte, corresponden respectivamente al numerador y al denominador de la fracción resultante. Si bien este descubrimiento se circunscribió en un principio a los repartos N°3 y N°5, la interacción con Camila (intervenciones 31 a 33), alumna de otra pareja, facilitó que Yael comprendiera que era posible extender la relación a todos los repartos del cuadro.

Yael intenta compartir el hallazgo con su compañera y propone incluir la explicación -"anotá eso de la rayita"- en la resolución del reparto N°3 porque "es interesante" (intervenciones 34 a 36). Natalí comienza a completar las rayitas que faltan en el cuadro pero no está dispuesta a incluir la explicación en la resolución del reparto que tenían asignado, posiblemente debido a que aún no resultaban claras para ella las razones por las que "funcionaba" tal procedimiento. Aunque Natalí recurre a la docente buscando su aprobación, esta escucha la explicación de la pareja sin validarla, posponiendo su análisis para el momento de la discusión colectiva de las resoluciones.

4.1.2. b. Puesta en común de la resolución de los repartos

En la puesta en común se invirtió el orden del trabajo realizado por las parejas. Lo primero que se les propuso fue exponer la resolución de cada uno de los 8 repartos de la tabla y luego lo que habían pensado sobre las 4 preguntas en las que se requería comparar los repartos estableciendo algunas relaciones entre los números.

Dado que el grupo clase estaba conformado por 30 alumnos, siete repartos fueron resueltos por dos parejas y el reparto N°5 fue resuelto por una sola pareja. La resolución de estos repartos no presentó ninguna dificultad a los niños. La mayoría de las parejas resolvió de forma gráfica, dibujando los chocolates e identificando las partes que correspondían a cada niño. Estas representaciones parecían tener el propósito de comunicar a otros un modo de resolver más que ser punto de apoyo para la resolución. Algunas parejas utilizaron números en la resolución que les permitían obtener fracciones equivalentes al reparto indicado. Varias colocaron como respuesta directamente la fracción sin incluir ningún cálculo y solo una utilizó la cuenta convencional de la división indicando con flechas el significado de cada componente pero además la acompañó con la resolución de forma gráfica.

Para organizar el intercambio sobre cuánto tocaba a cada niño en los 8 repartos, la docente iba preguntando a cada par de parejas que resolvía el mismo reparto cuál había sido el resultado obtenido y luego les pedía que explicaran el procedimiento utilizado. En los casos en los que las dos parejas obtenían diferentes fracciones, discutían acerca de la equivalencia entre ellas. Una vez alcanzado el acuerdo sobre el resultado, la docente completaba el casillero correspondiente a cada reparto en el cuadro que estaba expuesto en un afiche al frente de la clase.

Al socializar los procedimientos, algunas parejas comenzaron a explicitar la relación entre las cantidades de chocolates y de niños y los números correspondientes al numerador y denominador de la fracción resultante del reparto. Luca y Ramiro fueron los primeros en hacer circular esta nueva relación a propósito de la resolución del reparto N°2 que requería distribuir en partes iguales y sin que sobrara nada 2 chocolates entre 4 niños:

(C7,m36.18-39.04)

42. *Docente: ¿Ustedes lo pensaron igual?, Luca, ¿cómo pensaron?*
43. *Luca: Yo de pronto estaba mirando…*
44. *Docente: ¿Por qué yo? ¿Trabajaron los dos?*
45. *Luca: Sí, sí, trabajamos los dos.*
46. *Ramiro: Sí, trabajamos los dos.*

47. *Luca: Pero hubo una parte que estaba mirando y vi el número de chocolates y los chicos y dije: 2/4, lo comprobé y me daba. Que si el número de chocolates se pone como el primer número, digamos, de arriba, y el número de chicos se pone como la parte de abajo, da igual.*
48. *Docente: ¿Así como está acá, 2/4? (señala el número 2 y el número 4 en la misma fila del cuadro)*
49. *Luca: Hice la cuenta, después, sí, daba en todas.*
50. *Docente: A ver, ¿qué cuenta hiciste?*
    (…)
51. *Luca: Le fui restando a dos, que es el número de chocolates, le fui restando los 2/4 y me dio justo.*
52. *Docente: ¿Y vos te das cuenta por qué llegaste a eso de 2/4?*
53. *Luca: Emmm (se queda pensando)*
54. *Docente: A ver, miren lo que hizo Luca. Luca sabe que tiene estos dos chocolates (los dibuja en el pizarrón), ¿no? Y él dijo, le voy a dar 2/4 a cada uno. Y él se fijó si sacándole 2/4 a esto (señala los dos chocolates) podía decir si recibía 2/4 cada uno. (Dirigiéndose a Luca) ¿Cuántas veces le sacaste 2/4 a esto?*
55. *Luca: 4 veces.*
56. *Docente: 4 veces, ¿por qué?*
57. *Luca: Porque son 4 chicos.*
58. *Docente: Porque son 4 chicos los que están en el reparto. Pero, ¿yo puedo decir que porque sí, a mí se me ocurrió decir que iba a recibir cada uno 2/4? De algún lado salió, ¿cómo llegaste a eso?*
59. *Luca: Llegué porque… primero vi el número de chocolates y después vi el número de chicos y ahí se me vino a la cabeza 2/4. Cuando hice la cuenta sí daba que eran 2/4.*
60. *Docente: ¿Entendieron cómo lo pensó él?*
61. *Sofía O.: Yo no entendí por qué los 2/4 y no 3 (se refiere a ¾).*
62. *Docente: (Dirigiéndose a Luca) ¿Por qué hiciste 2/4 y no ¾?, dice Sofía. ¿De dónde sale ese 2 y de dónde sale ese 4?*
63. *Luca: El 2 sale de, del número de chocolates y el 4 sale del número de chicos.*
    (Ramiro va señalando en el cuadro de su hoja los números que menciona Luca para que toda la clase los vea)
64. *Docente: ¿Entendés, Sofi, por qué dijo el 2 y por qué dijo el 4 y no el 3?*
65. *Sofía O.: Sí.*
66. *Docente: Porque 2 son la cantidad de chocolates y 4 la cantidad de chicos.*

La explicación de Luca da cuenta de cierta captación "visual" de las relaciones entre la cantidad que corresponde al numerador y la cantidad que corresponde al denominador de la fracción resultante: "estaba mirando y vi…" (intervención 47), "primero vi el número de chocolates y después vi el número de chicos y ahí se me vino a la cabeza 2/4" (intervención 59). Esta relación que va estableciendo de manera intuitiva necesita ser comprobada para poder ser extendida luego a los demás pares de números (intervenciones 49 y 59). Para validar su conjetura, Luca no realiza el reparto de los dos chocolates entre cuatro chicos sino que efectúa cuatro restas sucesivas de 2/4 a los dos chocolates que tiene para repartir y concluye que su conjetura es verdadera. Este uso de la resta como iteración se vincula con el sentido de partición que tiene el problema. La docente pregunta y repregunta con la aparente intención de que Luca haga cada vez más explícita la relación que elaboró y que se difunda en la clase para que pueda ser comprendida por el resto de los alumnos.

La pareja de Yael y Natalí que tenía a cargo el reparto N°3 expuso en este intercambio algunas de las ideas que pusieron en juego en el momento de la resolución cuyo fragmento de registro *(C7,m26.03-32.15)* ya habíamos incluido en el apartado anterior.

(C7,m39.45-40.25)

67. Docente: Reparto número 3, ¿cuánto obtuvo cada uno?, Yael.
68. Yael: 1/3.
69. Fabricio: 1/3.
70. Docente: ¿Cómo llegaron al resultado?
71. Yael: Primero hicimos los dibujos y nos dio 1/3. Y después…
72. Docente: ¿Cómo hicieron los dibujos?
73. Yael: Las dos, un chocolate y lo partimos en tres partes…
74. Docente: (va dibujando en el pizarrón) ¿Ahí?
75. Yael: Sí, y como eran 3 chicos nos daba justo, así que… Y después estábamos viendo esos números y nos dimos cuenta que cada reparto era lo mismo que número de chocolates y número de chicos.
76. Docente: Similar a lo que dijo Luca.
77. Yael: Igual, sí. Lo pensamos con Camila.
78. Docente: Pero primero hicieron esto (señala el dibujo hecho en el pizarrón).
79. Yael: Sí, y después nos dimos cuenta.

Yael parece interesada en contar la revelación encontrada sobre la relación entre cantidades de chocolates y niños y la fracción resultante (intervención 71, 75, 77 y 79), aunque la docente insiste en que muestren la resolución gráfica que fue realizada antes de establecer dicha relación (intervención 78). Posiblemente la intención de la maestra al no dar un lugar especial a esta relación hallada por varias parejas sea que continúen teniendo vigencia todas las formas de resolver los repartos y sigan explicitándose las vinculaciones entre las formas gráficas y las formas que se apoyan solo en las cantidades. Se trataría de un modo de evitar que este último procedimiento de colocar las "rayitas" entre ambas cantidades sea adoptado por la mayoría de los niños de manera algoritmizada.

Algo similar sucede en la exposición de Camila sobre el modo de resolver utilizado en su pareja para el reparto N°7:

(C7,m51.24-52.15)

80. Docente: Reparto 7, Camila y Julieta, ¡Julieta! ¿Cuánto le dieron a cada uno?
81. Julieta: 2/6.
82. Docente: ¿Y ustedes, Cami?
83. Camila: 2/6.
84. Docente: 2/6, a ver, ¿por qué?
85. Camila: Primero porque nos habíamos dado cuenta de que haciéndole una rayita te daba el resultado y después lo dibujamos.
86. Docente: A ver, ellas dicen… ¿Fue lo primero que pensaron?
87. Camila: Sí, cuando hacíamos las preguntas nos dimos cuenta.
88. Docente: Ah, entonces no fue lo primero que pensaron. A ver, (dirigiéndose a toda la clase) ellas en base a las preguntas que tenían anteriormente pensaron que si ellas ponían una rayita entre estos dos números (hace el gesto de dibujar rayitas en las ocho filas del cuadro entre las columnas de 'Número de chocolates' y ´Número de niños') me daba la fracción que le correspondía a cada uno.
(Murmullo, se escucha a algunos niños que dicen haber hecho lo mismo con las "rayitas")
89. Docente: Paren, paren. Y ellas dijeron 2/6. Pero igual para corroborar que sean estos 2/6 lo dibujaron.
90. Camila: Sí.
91. Docente: ¿Qué dibujaron?
92. Alumno: Yo pensé lo mismo que Camila con las rayitas.

(Camila explica la resolución gráfica similar a las presentadas en los repartos anteriores pero no se retoma por el momento el procedimiento de colocar la "rayita" entre cantidad de chocolates y cantidad de niños)

Camila hace referencia al uso de la "rayita" para darse cuenta de qué cantidad de chocolate le toca a cada niño (intervención 85) e inmediatamente la docente les pide que analicen si fue lo primero que pensaron, enfatizando en qué se apoyaron para establecer esa relación (intervenciones 86 y 88). Si bien el murmullo de la clase ponía en evidencia que eran muchos los niños que ya empezaban a poner en juego el mismo conocimiento, la maestra subraya que la pareja de Camila tuvo que dibujar para corroborar si se cumplía esta regularidad y pide que expliquen cómo lo hicieron (intervenciones 89 y 91).

Al terminar de completar el cuadro de los repartos (ver figura 9), la maestra intentó cerrar este momento de puesta en común antes de pasar a las reflexiones que los alumnos habían realizado a propósito de las cuatro preguntas. Tanto era el interés de los alumnos por la nueva relación construida que, Macarena, necesitó interrumpir el cierre para dejar en claro que ella y su par, Emilia, también habían pensado el procedimiento de la "rayita".

93. *Macarena: Yo quería decir algo, que Camila también lo dijo, que nos habíamos dado cuenta con Emi que para darse cuenta también nos podíamos fijar en la tabla que da 2/3, 2/4.*

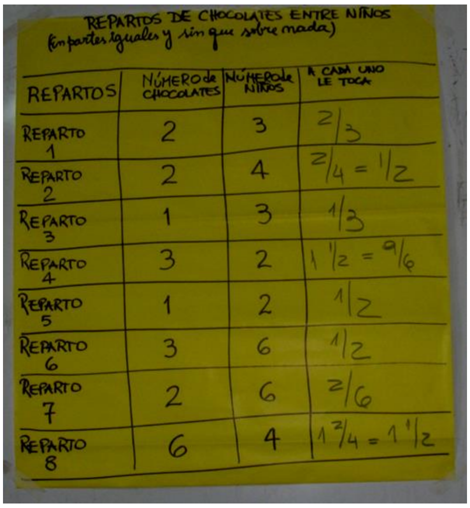


Figura 9: Afiche con el cuadro completo que resume los repartos de "X" chocolates entre "Y" niños.

El timbre del recreo no permitió institucionalizar el procedimiento hallado como modo posible de resolver repartos; fue así que en la siguiente clase la docente retomó la preocupación de los niños y promovió la reflexión sobre el alcance de esta forma de resolver:

(C8,m00:50-7.03)

94. *Docente: Bueno, ayer justo cuando tocó el timbre, habíamos terminado de decir qué parte le tocaba a cada nene, ¿no es cierto? (…) Macarena, no sé si recuerdan, llegó a decir que ella se había dado cuenta cuando tenía que decir cuánto le tocaba a cada nene, que ella podía como poner una rayita por acá (señala en el cuadro de los repartos) y si el reparto era de 2 chocolates entre 3 nenes, ella sabía que era ⅔. Ella primero puso el resultado, en base a esto de poner la marquita, y después lo comprobó haciendo el dibujo, ¿no es cierto, Maca?*
95. *Macarena: Sí.*
96. *Docente: Y esto que dijo Maca yo lo escuché también por el grupo de Natalí, lo escuché también por el grupo de Luca y Ramiro.*
97. *Alumna: O en el de Camila.*
98. *Docente: Lo escuché en el grupo de Camila, lo escuché en el grupo de Luca. Y entonces a mí me surgió esta duda de si están todos de acuerdo con esto que dijo Maca, de que si era 2 entre 3, yo ponía la rayita y decía 2/3 y listo.*
99. *Varios alumnos: Sí.*
100. *Docente: ¿Sí? ¿Es un modo de resolver?*
101. *Algunos alumnos: Sí.*
102. *Docente: ¿Sí? ¿Cómo?*
    (Hablan varios a la vez, no se entiende)
103. *Antonio: Igual tenés que comprobar.*
104. *Docente: A ver, a ver esto que está diciendo Antonio. Antonio dice: -Igual tenés que comprobar. En el caso de los nenes por ejemplo, que dijeron: -¡Ah! Listo, tengo dos chocolates, reparto entre tres, es 2/3. Maca lo primero que dijo fue que ella comprobó, pero que después se dio cuenta que en todos los casos pasaba lo mismo y no necesitaba ya ella comprobarlo con el dibujo. ¿Están todos de acuerdo con esto que dijo Macarena?*
105. *Fabricio: Yo no sé si todos, todos los de reparto, yo creo que en ese sí, es necesario comprobar pero...*
106. *Docente: A ver, por ejemplo, a ver, ¿es necesario comprobar, siempre?*
107. *Varios alumnos: No.*
108. *Docente: ¿Cuándo no?*
    (Murmullo)
109. *Docente: Les voy a poner un ejemplo, por ejemplo si yo digo 2 x 10 ¿Cuánto es?*
110. *Varios alumnos: ¡20!*
111. *Docente: ¿Necesitamos comprobar?*
112. *Natalí: No, porque ya lo sabés.*
113. *Docente: ¿Es necesario comprobarlo? Si uno está seguro de algo, por ahí si tenés que fundamentar el porqué.*
114. *Fabricio: Pero si te dan 40 chocolates para 56 personas.*
115. *Docente: No vayamos a ejemplos concretos. Yo te digo esto: ¿Es necesario siempre...? Yo te digo, esto es así por tal cosa. Si vos lo comprobás es que no estás tan seguro, ¿o no? Entonces esto que dice Natali, que a veces no se necesita comprobar cosas porque ya las sabemos, es verdad.*
    (Interrupción de varios minutos por ingreso de docente de otra sección)
116. *Docente: Volvemos a esto de Maca. ¿Están todos de acuerdo con esto que dice Macarena?*
117. *Varios alumnos: Sí.*
118. *Docente: Ahora, ¿es una nueva forma que yo tengo o una nueva herramienta al momento de resolver problemas de reparto o algo cuando tengo que repartir?*
119. *Varios alumnos: Sí.*
120. *Docente: ¿Sí? ¿Emi?*
121. *Emilia: Para mí no, porque…*
122. *Docente: ¿Por qué no?*
123. *Emilia: Porque puede ser que… ahora, porque puede ser que un día te toque un problema y que tengas que hacer eso y que no, que no te dé.*
124. *Docente: A ver Maca, Yael, Natalí que fueron las que... Luca, los que sostienen esto. ¿Puede pasar que yo en algún momento tenga que hacer algún reparto y esta conclusión que ustedes están diciendo o esto que se dieron cuenta no se pueda aplicar?*
    (Murmullos, no se escucha bien)
125. *Yael: Uno más grande como decir por ejemplo 42 y 50 algo así y...*

126. *Docente: A ver, por ejemplo, Yael dice que uno no lo podría hacer cuando están involucrados números más grandes ¿Por ejemplo?*
(Silencio)
127. *Docente: A ver pensemos, pensemos. ¿Cómo sería?*
128. *Yael: No es muy seguro, no estaría tan seguro cómo hacer eso, por ahí se puede.*

Los niños parecen no estar demasiado seguros de que esta regularidad se cumpla siempre o de cuál sería su dominio de validez. No todos reconocen el procedimiento de la "rayita" como "un modo de resolver" en cualquier reparto, tal como queda evidenciado en la falta de certeza que muestran ante las preguntas que hace la docente (intervenciones 100, 118 y 124). Según algunos afirman, sería necesaria una comprobación a través de otra estrategia de resolución (intervenciones 103, 105 y 123), particularmente en el caso de estar involucrados números mayores (intervenciones 114, 125 y 128).

En este intercambio colectivo sobre los límites en el uso del procedimiento de la "rayita" para resolver repartos, una alumna, Camila, intenta proponer un caso donde la escritura de la fracción no resultaría válida. Se trata de una expresión más compleja que la fracción entendida como cociente de dos números naturales, con la que los alumnos están trabajando, porque involucra la escritura de una división de un número racional por un número natural.

(C8,m7.03-9.00)
129. *Docente: ¿Cami?*
130. *Camila: Por ejemplo cuando tenés que dividir ¼ entre 2 chicos eso no te sirve.*
131. *Docente: A ver escuchen esto que dice Camila, que cuando yo tengo que dividir ¼ entre 2 chicos, eso no me sirve.*
132. *Fabricio: Pero lo podés pensar porque si vos te lo pondrías...*
133. *Docente: Esperá, escuchá, Fabri, ella no está diciendo que ese reparto no se puede hacer, ella no dice que no se puede repartir ¼ entre 2, ella está diciendo que esto de poner la rayita, como dijeron… si es ¼ entre 2 no se puede poner...*
134. *Fabricio: Lo que me refiero, nosotros lo estamos viendo como escrito así, nos dimos cuenta porque estaba escrito así, si vos tenés que repartir un cuarto entre dos chicos, te pondría 1/4 y al lado los dos chicos, el doble. Entonces no se puede pensar como la mitad de un cuarto porque no sería un medio.*
135. *Docente: Escucháme lo que te digo pero, ella no dijo que no se puede hacer ese reparto, dijo...*
136. *Fabricio: No, ya sé, si se puede pensar ese 2 como 1/2 y sería la mitad de 1/4.*
137. *Docente: Se puede resolver y cada uno lo resuelve de una manera, pero estamos hablando de si puede poner esa rayita. Camila dice que no porque quedaría así (va escribiendo en el pizarrón la continuación del cuadro, en un casillero escribe ¼ y en el otro escribe 2). Supongamos que hay un reparto 9. Este sería 1/4 que es el chocolate. ¿Entre cuántos dijiste, Cami? Y acá los chicos. Entonces dice Cami yo no puedo hacer ¼, rayita, 2, porque no me daría (escribe 1/4/2). No está diciendo que no se puede hacer este reparto, estamos hablando con esto de la rayita que dijo algún grupo. Pero a ver, si yo tengo que hacer un reparto de alguna cosa entre tantos nenes, ¿no es válido esto que están diciendo ustedes?*
138. *Varios alumnos: Sí.*

139. *Docente: ¿Sí o no?*
140. *Varios alumnos: Sí.*
141. *Docente: Algunos grupos de hecho lo usaron.*
142. *Fabricio: Igual yo no estaría seguro…*
143. *Docente: Bueno, esperá, esperá un segundo, vamos a hablar con los que lo usaron. Los que lo usaron, ¿están de acuerdo que es una nueva forma? (se refiere a forma de resolver repartos).*
144. *Varios alumnos: Sí.*

Al analizar colectivamente el ejemplo que plantea Camila se superponen dos asuntos que es necesario distinguir: la posibilidad de resolver el reparto de ¼ de chocolate entre 2 chicos y la posibilidad de escribir la fracción resultante como 1/4/2. Pareciera que cuando la alumna advierte que el procedimiento en cuestión "no te sirve" (intervención 130) se refiere a la escritura, ella no reconoce 1/4/2 como una escritura válida. Para Fabricio no parece quedar del todo claro por qué no sería válida esta escritura e insiste en que ese reparto es posible de resolver (intervención 134). Pero la docente no se detiene a indagar sobre cómo interpretan los niños la escritura en cuestión, ella apunta a que los alumnos distingan entre "no se puede resolver" y "no se puede resolver usando la rayita" (intervenciones 133, 135 y 137): subraya que se puede resolver el reparto e intenta poner un límite a la posibilidad de usar "la rayita" en este caso. Cuando la docente plantea que con ese procedimiento "no le daría" (intervención 137) no refiere a un resultado sino que está diciendo quizás que lo que queda escrito no es una fracción, no es un número en sentido estricto. Sin embargo, aunque no es una expresión que se utilice en este nivel de la escolaridad, permite a algunos niños interpretar lo que significa la mitad de ¼, o 1 chocolate repartido entre 4 y luego repartido nuevamente entre 2.

Más allá de la validez del procedimiento de "la rayita", la cuestión matemática de fondo que se discute en estos fragmentos de la clase gira en torno a la factibilidad de la generalización. Los alumnos han encontrado ciertos casos particulares en los que este modo de resolver les permite hallar el resultado del reparto. La docente intenta que reflexionen acerca de la posibilidad de que sea válido para todos los casos pero, dado que los alumnos no parecen tener los suficientes recursos para poder generalizar, plantean la necesidad de una comprobación. Resulta interesante analizar las prácticas matemáticas involucradas en esta propuesta de los niños ya que, acertadamente, ellos no confían en la inducción como modo de inferir ideas generales y, al no tener posibilidad de demostrar de otro modo la validez del procedimiento, proponen una comprobación empírica e intentan encontrar al menos un caso que refute la generalización.

4.1.2. c. Escritura colectiva

El intercambio producido en torno al procedimiento que pone en juego la relación entre el reparto de *a* unidades entre *b* partes y la fracción *a/b* despertó gran interés en los alumnos. Antes de pasar a la puesta en común de las respuestas a las cuatro preguntas que iniciaban el problema, la docente propuso registrar por escrito en el afiche A2, encabezado por el título "*¿De qué maneras puedo resolver un reparto?*", esta nueva forma de resolución que habían hallado. Dada su potencia anticipatoria, la sistematización del procedimiento de "la rayita" resultaría una manera de comenzar a modelizar este tipo de problemas.

Primeramente fue necesario revisar el cartel con el propósito de decidir si era pertinente agregar la estrategia encontrada, momento de la clase que se analiza en el apartado 4.2.2. Una vez acordada su inclusión, la escritura colectiva se realizó en el pizarrón para poder hacer todas las modificaciones que los niños consideraran pertinentes y luego pasar en limpio la producción al afiche. El intercambio que tuvo lugar en la situación de dictado al docente se centró en un primer momento en el grado de generalidad que asumiría la formulación del nuevo modo de resolver para trascender el contexto extramatemático en que se había planteado el problema:

(C8,m22.05-30.05)

1. *Docente: ¿Cómo puedo poner, Yael?*
2. *Yael: (dicta) Si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir…*
   (La docente escribe: "Si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir")
3. *Yael: (dicta) Y el objeto que tenés que repartir… (dice) ¿cómo se dice?*
4. *Natalí: (dicta) Y el entero.*
5. *Yael: (dicta) Y el entero.*
6. *Lucas: La cantidad, (dicta) y la cantidad de chocolate.*
7. *Natalí: Porque no siempre es un entero.*
   (Murmullo)
8. *Docente: ¡Paren! Yael dijo, (lee) si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir y (dice) ¿el entero? Natalí está diciendo: no siempre es un entero. Macarena dice que podrían agregar 'la cantidad', él dijo lo mismo, ¿cómo podemos poner?*
9. *Macarena: (dicta) Y la cantidad que tenés para repartir, (dice) lo que pasa que quedaría…(no se entiende)*
10. *Docente: ¿Y la cantidad que tenés para repartir? (escribe: "la cantidad que tenés")*
11. *Yael: Porque si no, sería de chocolates pero no siempre son chocolates.*
12. *Docente: Escuchen esto que dice Yael. Yael dice no poner la cantidad de chocolates porque no siempre son chocolates.*
13. *Natalí: De objetos podés poner.*
14. *Docente: ¿Les parece que está bien esto que está diciendo Yael?*
    (Interrupción)
15. *Docente: (retomando) Ellas están tratando de explicar cómo es que yo puedo poner la rayita y me daba dos tercios para cada nene, ¿sí? Yael dijo, (lee) si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés.*
16. *Yael: (dicta) Para repartir, ponés… emmm*
17. *Macarena: (dicta) Ponés la cantidad… (dice) Lo que pasa que queda mucho 'cantidad'.*

18. *Docente: Piensen esto, es un borrador. Uno cuando escribe, por ahí escribe un montón de cosas y no siempre lo primero que escribe es lo que va a quedar, ¿o no? Vamos a ir revisándolo, si hay que tachar tachamos. Si hay que agregar, agregamos. Dale.*
19. *Macarena: (dicta) Ponés… la cantidad… de… (dice) no sé.*
20. *Varios alumnos: (dictan) La rayita.*
21. *Docente: Maca, ¿ponés la qué? ¿la rayita?*
    (Murmullos)
22. *Docente: Escuchen, Yael hizo esta introducción, (lee) si yo sé la cantidad de personas entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés para repartir ponés… (dice) ustedes qué tuvieron en cuenta, la cantidad de chocolates y entre la cantidad de personas que se hacía ese reparto, ¿y qué te indicaba cada cosa?*
    (Algunos niños responden pero no se entiende)
23. *Docente: (destapa el afiche de los repartos del problema y señala allí en la primera fila). Por ejemplo, vos Maca, habías dicho, si es 2 chocolates entre tres nenes es 2/3, ¿sí o no?, bueno, ¿cómo hiciste eso, cómo lo pensaste?*
24. *Macarena: No sé, porque yo en realidad primero partí los chocolates dibujándolos y después mirando me di cuenta de que era lo mismo.*
25. *Docente: Está perfecto, pero estamos tratando de explicar esta forma. ¿Cómo puedo hacer yo para que entiendan esta nueva forma? Ustedes acá saben la cantidad que tienen para repartir y entre la cantidad que tienen que hacer ese reparto. Yael lo empezó así. ¿Qué es lo que hicieron ustedes?*
26. *Yael: La rayita. La rayita entre…*
27. *Natalí: La barra.*
28. *Lucas: ¡El dominador (sic) y el numerador!*
29. *Yael: No entre coso, entre la cantidad de…. Repartir…*
30. *Docente: ¿A ver, Cami?*
31. *Camila: Yo quería poner, por ejemplo, que la cantidad se transforma en el numerador y las personas en el denominador.*
32. *Docente: Camila dice que esta cantidad de cosas que yo tengo para repartir se transforma en el numerador y la cantidad de personas que tengo para hacer el reparto se transforma en el denominador. ¿Están de acuerdo con eso?*
33. *Varios alumnos: Sí.*
34. *Yael: ¿Pero primero no tenemos que anotar qué es el numerador y el denominador?*
35. *Docente: Si quieren después podemos poner un ejemplo. A ver, Cami, ponés ¿qué? A ver, dale (invitándola a que continúe con el dictado).*
36. *Camila: No sé.*
37. *Docente: Como me lo dijiste vos.*
38. *Camila: Pero con 'ponés la' (era lo último que habían escrito), no sé bien. (dicta) Ponés la rayita entre medio de la…*
39. *Docente: Lo que dijiste antes.*
40. *Camila: Que después se transforma la cantidad de personas en el denominador y…*
41. *Docente: Esperá, ¿'después', dijiste?(escribe: "después se transforma la cantidad")*
42. *Camila: Sí.*
43. *Docente: ¿La cantidad?*
44. *Camila: (dicta) De personas en el denominador.*
45. *Docente: ¿La cantidad de fracciones?*
46. *Camila: No, de personas.*
47. *Docente: ¿Habías dicho de personas? ¿En qué se transforma la cantidad de personas?*
48. *Camila: En el denominador.*
49. *Docente: (lee mientras escribe) Y después se transforma la cantidad de personas en el denominador. (dice) ¿Y qué más?*
50. *Camila: (dicta) Y lo que tenés que repartir en el numerador.*
    (Queda escrito en el cartel: "Si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés para repartir, después se transforma la cantidad de personas en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador")

En sus primeras intervenciones Yael y Natalí parecen preocupadas por aludir a la cantidad a repartir usando algún término que no solo refiera a los chocolates que formaron parte del contexto del problema de origen; de allí que proponen “el objeto” o “el entero que tenés para repartir” (intervenciones 3, 4, 5 y 13). La propuesta de Lucas: “la cantidad de chocolate” (intervención 6) obliga a estas alumnas a explicitar que puede ocurrir que lo que se reparta no sean chocolates o que ni siquiera sean enteros (intervenciones 7 y 11). Se suceden entonces algunas propuestas que coinciden en escribir “la cantidad que tenés para repartir” sin especificaciones acerca de qué se reparte, aunque la repetición del término ‘cantidad’ no convence demasiado a Macarena (intervenciones 9 y 17). La preocupación que introduce esta alumna no está centrada en el contenido de la producción escrita sino en un problema de cohesión textual, la pertinencia de la repetición léxica. Cuestiones como esta, vinculadas a la redacción, se intercalan con las que se centran en el contenido de la producción y vuelven a aparecer en el fragmento siguiente del intercambio.

Para superar el escollo que suponía para los niños la formulación en términos algo más generales, la docente se esfuerza por que reparen en la relación entre las cantidades que están intentando diferenciar y los componentes que integran la fracción resultante del reparto (intervenciones 22, 23 y 25). Si bien en principio solo mencionan “la rayita” y dudan al definir las cantidades que corresponden al numerador y al denominador, una de las alumnas, Camila (intervención 31), logra enunciar oralmente esta relación: “la cantidad se transforma en el numerador y las personas en el denominador”. A pesar de haber propuesto la idea, ponerla en palabras aptas para poder ser textualizadas no resulta una tarea tan sencilla para Camila; el intercambio producido en las intervenciones 35 a 50 está dedicado a ajustar esta escritura. Resulta interesante la propuesta de Yael (intervención 34) de agregar la definición de numerador y de denominador a la descripción de Camila. Pareciera que esta alumna percibe la necesidad de aclarar estos conceptos ya que se han formulado de manera muy imprecisa en los intentos del grupo por describir el procedimiento encontrado.

El fragmento siguiente incluye intervenciones de los niños orientadas por intereses diversos, ya que algunas apuntan a realizar sugerencias para mejorar la redacción del texto producido y otras, en simultáneo, a discutir el alcance de la generalización del procedimiento en cuestión y la información que es necesario incluir para que resulte más clara para el lector. La docente da lugar a todas las intervenciones aunque no todas las propuestas son incluidas en la producción escrita, ya que permanentemente las hace circular para que sean consensuadas por todos los alumnos:

(C8,m30.26-42.05)

51. *Docente: A ver, escuchen esto (lee lo que quedó escrito). ¿Están de acuerdo con esto? ¿Albertina?*
52. *Albertina: Profe, dice (lee) para repartir, después se transforma (dice) y después hay que poner 'en, en la cantidad de la que tenés que repartir'.*
53. *Valentina: No, para mí está bien. Porque ella dice de poner 'después se transforma en la cantidad'…*
54. *Docente: Porque ¿quién es el que se transforma? ¿Se transforma la cantidad de personas? A ver, dice (lee) después se transforma la cantidad de personas en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador. (dice) ¿Están de acuerdo con eso que dijo Camila? ¿Sofi?*
55. *Sofía: Yo le pondría en 'para repartir', punto, después… Porque si no, estás…*
56. *Lucas: Profe, yo le pondría una rayita. El numerador, por ejemplo el uno, un medio, ¿no? (hace gesto de dibujar la línea de la fracción en el aire)*
57. *Docente: Es verdad que ustedes lo pensaron así, agregarle esta rayita. Maca, Yael, Camila, habían pensado en esta rayita (completa las líneas de las fracciones en los repartos del cuadro). Al decir que esta cantidad de chocolate se transforma en el numerador (señala la columna 'Número de chocolates') y que las personas entre las que hacen el reparto (señala la columna 'Número de niños') se transforman en el denominador, ¿no estamos hablando de que ya es una fracción? De hecho, ¿ustedes no llegaron a hacer todo este tipo de anotaciones (señala la columna 'A cada uno le toca' en la que hay diferentes fracciones escritas)? Lucas, lo que estaba haciendo Camila era explicar por qué este 2 que estaba acá (señala el 2 en la columna 'Número de chocolates') pasaba acá (señala el numerador de la fracción resultante) y este 3 (señala el 3 en la columna 'Número de niños') pasaba acá (señala el denominador de la fracción resultante), ¿sí? ¿Es necesario agregar lo de la rayita? ¿Están de acuerdo con esto? (señala lo que escribieron). Valentino, ¿estás de acuerdo con esta explicación?, ¿sirve para resolver un reparto?*
58. *Valentino: En este caso sí, pero por ahí en otro caso, no.*
59. *Docente: ¿En otros repartos no sirve?*
60. *Valentino: Para mí, no.*
61. *Docente: ¿Por qué?*
62. *Valentino: Por ejemplo, si no hay un entero de chocolate, hay un medio de chocolate.*
63. *Docente: Lo de Camila, sí.*
64. *Valentino: No… creo que no sirve.*
65. *Varios alumnos: No entiendo lo que dice Valentino.*
66. *Docente: Pensando en estos casos (se refiere a los repartos del problema), después vamos a ver qué pasa cuando yo no tengo enteros, pensando en estos casos, yo tengo enteros para repartir entre ciertas personas, ¿me sirvió esta forma?*
67. *Varios alumnos: .Sí.*
68. *Docente: ¿Están todos de acuerdo? ¿No quieren modificar nada más de esta forma?*
69. *Yael: Podemos poner un ejemplo.*
70. *Docente: ¿Qué ejemplo?*
71. *Yael: Y, le ponemos ejemplo y una fracción y le ponemos lo de arriba es el numerador y lo de abajo…*
72. *Natalí: Explicar qué es el numerador…*
73. *Docente: Nosotros, alumnos de 5°, si leemos que la cantidad de chocolate se transforma en el numerador y que la cantidad de personas por las que yo tengo que hacer el reparto se transforma en el denominador, ¿necesitamos poner qué es el numerador y el denominador?*
    (Silencio, algunos alumnos dicen que no)
74. *Docente: Les estoy haciendo una pregunta a ustedes, eh, ¿no?, ¿es suficiente con esto?*
75. *Martina: Para mí el 'después' ese queda un poco de más.*
76. *Docente: ¿Qué pongo?*
77. *Martina: Tachalo y poné directamente 'se transforma…'*
78. *Docente: Si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés para repartir, se transforma la cantidad de personas en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador.*
79. *Fabricio: Para mí en el 'tenés que repartir' de abajo va coma, (lee) lo que tenés que repartir, (dice) coma, (lee) en el numerador.*
80. *Docente: Yo les había hecho una consulta, en esta forma que ustedes habían puesto (señala el afiche A2), nosotros ya sabemos que estamos resolviendo repartos. Si yo estoy resolviendo un reparto hay algo para repartir entre algo, ¿no? En los anteriores, ¿necesitaron aclarar esto de que si yo tenía para repartir algo entre tantas personas?*
81. *Algunos alumnos: No.*

82. *Docente: Fueron directamente a la forma de resolverlo. Pensando en eso, ¿qué podría yo registrar en el afiche?*
(Silencio, parecen cansados de la situación, algunos hacen propuestas que no llegan a concretarse)
83. *Natalí: ¿No quedaría mejor: la cantidad de personas se transforma en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador?*
84. *Docente: Natalí dice primero poner la cantidad de personas se transforma en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador. Este 'se transforma' trasladarlo acá, (subraya 'se transforma' y hace una flecha indicando el lugar donde iría, luego lee) la cantidad de personas se transforma en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador.*
85. *Varios alumnos: Está bien.*
86. *Docente: Lo dejo ahí.*
87. *Inv.: Hoy escuché a Valentino que dijo: -pero puede ser que entre los que se reparta no sean personas. ¿Eso sirve para pensar en cambiar algo más o lo dejamos con personas?*
88. *Docente: Está diciendo esto que había dicho Yael con respecto a lo que yo tenía que repartir. Algunos dijeron de poner chocolates y Yael dijo que no siempre se reparten chocolates. ¿Y esto que está diciendo Valentino, tiene razón o no? Valentino dijo que no siempre es entre personas el reparto.*
(Murmullo)
89. *Docente: ¿Entonces cómo puedo poner, qué puedo sacar o qué puedo agregar?*
90. *Fabricio: Si sabés la cantidad de cosas para repartir*
91. *Docente: (lee) Si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés para repartir, (dice) ¿a qué se está refiriendo con la cantidad de personas? ¿son las cosas que yo reparto?*
92. *Yael: No, son las cosas que…*
93. *Natalí: A quién repartís.*
94. *Lucas: En partes que lo repartís.*
95. *Docente: ¿Cómo puedo poner esto de las personas para que no quede como que es exclusivo para cuando son personas?*
96. *Camila: Son las veces que tenés que…*
97. *Docente: ¿Si sabés la cantidad de veces entre las que tenés que repartir, pongo? (lo escribe)*
98. *Alumno: Objetos.*
99. *Docente: ¿Siempre van a ser objetos?*
100. *Alumno: Pueden ser muchas cosas.*
101. *Docente: ¿Y no habrá una palabra que reúna todo eso que puede llegar a ser?*
102. *Lucas: ¡Seres vivos!*
103. *Docente: Esto que los chicos dicen que (lee) Si sabés la cantidad de veces entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés para repartir, (dice) ¿no es suficiente eso?*
104. *Sofía O.: Ese 'se transforma' abajo para mí iría después de 'para repartir'.*
105. *Docente: Vos seguís con lo de 'se transforma'. A ver, (lee) después se transforma la cantidad de veces en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador, (dice) o puede quedar (lee cambiando de lugar 'se transforma') después la cantidad de veces se transforma en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador. (dice) Puede quedar como la opción 2 o como está así, hace un rato dijeron así, por eso no lo agregué.*
106. *Varios alumnos: La 2. Otros: ¡Dejalo así!*
107. *Docente: ¿Quiénes prefieren la 2?*
(Algunos alumnos levantan la mano, otros gritan: ¡así!).
108. *Docente: ¿Lo dejo así? ¿Me escuchan? No modifica el sentido del texto. Si yo pongo el 'se transforma' ahí o donde está la flechita no va a modificar lo que vamos a entender. ¿Lo pongo así en el afiche? (se refiere a copiar lo que estuvieron escribiendo en el pizarrón en el afiche A2).*
109. *Alumnos: ¡Sí!*
(Queda escrito: "Si sabés la cantidad de veces entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés para repartir, después se transforma la cantidad de veces en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador" y posteriormente se pasa en limpio al afiche A2)

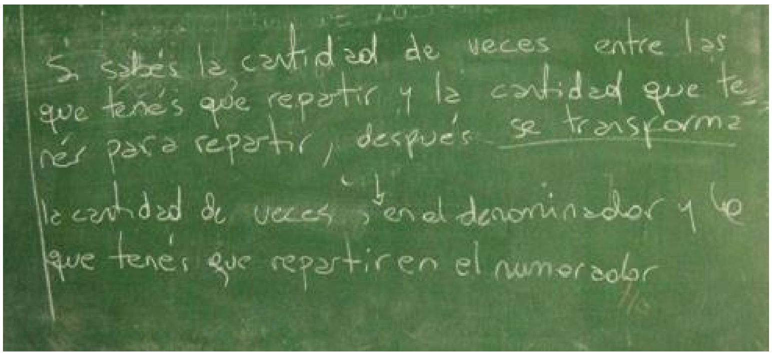


Figura 10: Escritura colectiva en borrador para ser agregada al Cartel A2: ¿De qué maneras puedo resolver un reparto?, sobre el procedimiento que pone en juego la relación entre el reparto de a unidades entre b partes y la fracción a/b

Los intereses de los niños a lo largo de este extenso fragmento giran en torno a tres núcleos que se van superponiendo. Uno de ellos es la necesidad de incluir información o ejemplos acerca del significado de los componentes de una expresión fraccionaria -numerador, denominador y línea de la fracción-, dado que son conceptos que se mencionan en la explicación del procedimiento que acaban de escribir y no parecen haber sido suficientemente definidos para algunos alumnos. Así, Lucas (intervención 56) propone agregar "la rayita" a través de un ejemplo, la fracción ½, a continuación de 'se transforma la cantidad de personas en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador'. Yael y Natalí (intervenciones 34, 69, 71 y 72) insisten en la necesidad de incluir un ejemplo con una explicación sobre qué es el numerador y qué es el denominador. Frente a estas propuestas, la docente plantea una interesante reflexión (intervención 73) en la que explicita quién es el destinatario del escrito y tematiza el problema de la información que es necesario incluir de acuerdo a los conocimientos que supuestamente este ya domina. En este caso el destinatario son los propios alumnos de 5° año, por eso la intervención de la docente pone de relieve la importancia de representarse a sí mismos como futuros lectores del texto que están produciendo y de preguntarse si les han quedado conceptos implícitos que sería necesario desarrollar para comprender el escrito o, por el contrario, si al desarrollarlos el texto resultaría redundante o sobrecargado porque ya disponen de la información suficiente para interpretarlo.

Otro núcleo del intercambio está centrado en el dominio de validez de la formulación general que han elaborado para describir el procedimiento. Al releer la explicación que han escrito, Valentino plantea que esta forma sirve para este caso pero puede no servir para otros (intervención 58). La preocupación se enlaza con la discusión que había tenido lugar en la puesta en común *(C8,m7.03-9.00)* a partir de la reflexión de Camila acerca de la imposibilidad de usar "la rayita" para resolver el reparto de ¼ de chocolate entre 2 niños. Si bien la docente pospone el análisis de estos casos para otro momento y propone escribir sobre aquellos en los que se reparten enteros (intervención 66), resulta interesante señalar el interés que perdura en algunos niños por incluir en el texto la restricción de la validez de este procedimiento argumentando que no sirve para casos en los que lo que se reparte no llega a ser un entero de chocolate (intervenciones 60, 62 y 64).

Un segundo aspecto del interés en la búsqueda de una forma más general de referirse al procedimiento de "la rayita" se retoma al proponer a los niños que reflexionen sobre cómo están expresadas en el texto las partes entre las que se reparte (intervenciones 87 y 88), hasta ese momento formuladas en términos de personas: "Si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir…". Valentino había señalado que los repartos no siempre se realizan entre personas, por eso la docente vuelve a plantear de qué modo escribirlo (intervenciones 89 y 95) y los niños intentan diferentes maneras de expresarlo: cosas, partes, objetos, seres vivos, entre otras (intervenciones 90, 92, 93, 94, 96, 98, 100 y 102), para finalmente reemplazar la palabra 'personas' por 'veces': "Si sabés la cantidad de veces entre las que tenés que repartir…"

El tercer núcleo de intereses aparece intercalado a lo largo de todo el fragmento, en este caso los alumnos parecen centrados en la forma y no tanto en el contenido del escrito. Se suceden entonces numerosas sugerencias que apuntan a mejorar la redacción, aunque en el fragor de la discusión varias de ellas no llegan a ser tomadas por la docente. Encontramos un primer intercambio (intervenciones 52 a 54) en el que Albertina sugiere agregar 'en' en una parte del texto y Valentina se opone argumentando que es correcta la escritura tal como está; este señalamiento es validado rápidamente por la docente dado que el agregado cambiaría el sentido del escrito. Luego Sofía y Fabricio hacen sugerencias de puntuación (intervenciones 55 y 79) que quedan diluidas en el intercambio.

Martina hace una indicación explícita para que la docente tache la palabra 'después' porque "parece un poco de más" (intervenciones 75 a 78) aunque esta solicitud no aparece reflejada en la producción. En este caso, hipotetizamos que el señalamiento sobre la redacción sí involucra una cuestión conceptual: al proponer eliminar la palabra 'después', la alumna estaría reconociendo que no se trata de dos momentos en el procedimiento de resolución sino que la relación entre los componentes del reparto es constitutiva de la fracción resultante.

Luego, varios alumnos proponen hacer un cambio en el lugar en que se ubica 'se transforma' (intervenciones 83, 85, 104, 106 y 109). Esta sugerencia es tomada por la docente en varias oportunidades (intervenciones 84, 105, 107 y 108) y dado que los niños no alcanzan un acuerdo se concluye que su ubicación no cambia el sentido del texto.

El fragmento muestra que los niños ponen en circulación conocimientos diversos sobre la escritura con el fin de hacer más preciso el sentido de su producción. No todos ellos son tomados como objeto de reflexión para considerar su inclusión en el texto colectivo, pero podemos conjeturar que la preocupación que los alumnos manifiestan por mejorar la escritura contribuye a profundizar la comprensión del contenido involucrado.

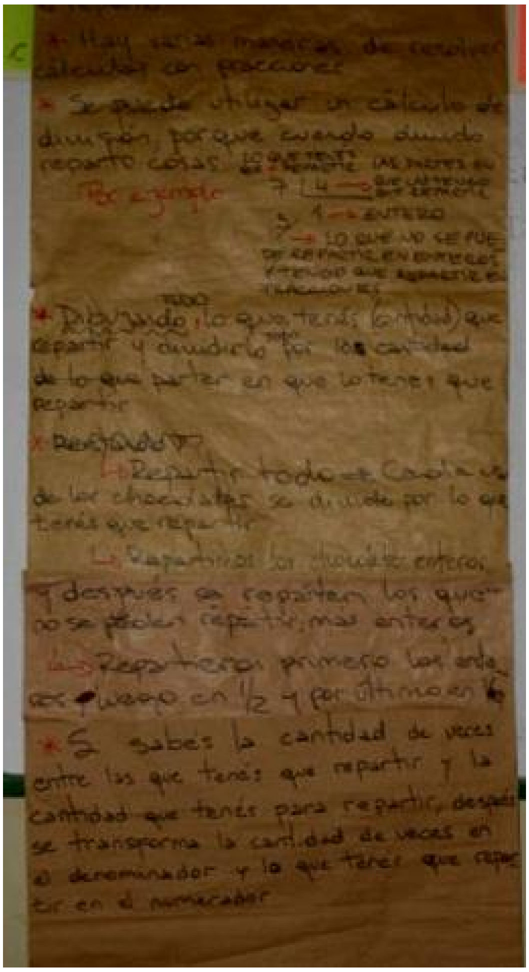


Figura 11: Cartel A2, elaborado en situación de escritura colectiva: ¿De qué maneras puedo resolver un reparto?, con el agregado del procedimiento que pone en juego la relación entre el reparto de *a* unidades entre *b* partes y la fracción *a/b*.

Luego del trabajo sobre la resolución de cada uno de los repartos de la tabla y la situación de escritura que se suscitó a raíz de ella, se realizó la puesta en común de las respuestas a las cuatro preguntas que los alumnos habían resuelto en parejas al inicio de la clase. Este intercambio consistió en la reutilización de las ideas que habían circulado hasta ese momento para proponer argumentos que les permitían comparar los repartos y no dio lugar a ninguna nueva situación de escritura.

4.1.2. d. Síntesis de algunos conocimientos infantiles que circularon en la puesta en común del problema: "Repartos de "X" chocolates entre "Y" niños" y en la situación de escritura colectiva para agregar ideas al cartel: "¿De qué maneras puedo resolver un reparto?"

Asuntos	Algunos conocimientos que circularon en la puesta en común sobre los modos de resolver el problema	Algunos conocimientos que circularon en la situación de escritura colectiva
Descripción del procedimiento que pone en juego la relación entre el reparto de *a* unidades entre *b* partes y la fracción *a/b*	(intervención 47). "…hubo una parte que estaba mirando y vi el número de chocolates y los chicos y dije 2/4, lo comprobé y me daba. Que si el número de chocolates se pone como el primer número, digamos, de arriba, y el número de chicos se pone como la parte de abajo, da igual." (intervención 75). "…Y después estábamos viendo esos números y nos dimos cuenta que cada reparto era lo mismo que número de chocolates y número de chicos."	(intervenciones 2, 3, 4, 6, 7 y 11). "Si sabés la cantidad de personas entre las que tenés que repartir y…", "…el objeto que tenés que repartir…" "…el entero." "La cantidad de chocolate." "…no siempre es un entero" "… sería de chocolates pero no siempre son chocolates." (intervención 31). "…la cantidad se transforma en el numerador y las personas en el denominador." (intervención 34). "¿Pero primero no tenemos que anotar qué es el numerador y el denominador?" (intervención 94, 96, 98, 100 y 102). "…en partes que lo repartís." "Son las veces…" "Objetos." "Pueden ser muchas cosas." "¡Seres vivos!"
Necesidad de comprobación de la validez del procedimiento a través de otras estrategias. Límites del procedimiento	(intervención 49). "Hice la cuenta, después, sí, daba en todas." (intervenciones 103, 105, 123, 125 y 128). "Igual tenés que comprobar." "Yo no sé si todos, todos los de reparto, yo creo que en ese sí, es necesario comprobar…" "…puede ser que un día te toque un problema y que tengas que hacer eso y que no, que no te dé." "Uno más grande como decir por ejemplo 42 y 50 algo así…" "No es muy seguro, no estaría tan seguro cómo hacer eso, por ahí se puede." (intervención 130). "Cuando tenés que dividir ¼ entre 2 chicos eso no te sirve."	(intervenciones 58, 62 y 64). "En este caso sí, pero por ahí en otro caso, no." "…si no hay un entero de chocolate, hay un medio de chocolate…creo que no sirve."

Al poner en relación las formulaciones que hicieron los niños en la puesta en común de los modos de completar el cuadro y en la situación de escritura colectiva para agregar ideas al cartel, identificamos el tratamiento de dos asuntos en común.

El primero de ellos refiere a la descripción del procedimiento que pone en juego la relación entre el reparto de *a* unidades entre *b* partes y la fracción *a/b*. En la puesta en común los niños reconocen haber realizado una captación perceptiva de las relaciones entre los números que parece estar favorecida por la disposición de los datos en el cuadro. Por otra parte, se centran en la ubicación que corresponde a cada uno de los datos en la fracción –"número de chocolates arriba" o "número de chicos abajo" de la "rayita"-, en términos más bien figurativos, sin conceptualizar aparentemente el sentido de esos números. Frente a la exigencia de poner este procedimiento en palabras para ser escritas en el afiche los niños hacen intentos por describir el procedimiento con mayor grado de generalidad. Es así que proponen diferentes términos que no remiten al contexto del problema hasta lograr explicitar que la cantidad a repartir se transforma en el numerador y las personas entre las que se reparte, en el denominador. En el escrito ya no se menciona la ubicación espacial en la fracción ni la "rayita" a la que aludían coloquialmente en la puesta en común, han profundizado en la conceptualización de la relación hallada.

El segundo asunto que tratan en ambas instancias de trabajo colectivo es la necesidad de comprobación de la validez del procedimiento a través de otras estrategias y de los límites que encuentran en él. En la puesta en común queda claro que los alumnos no se sienten absolutamente seguros con el nuevo modo de acceder a los resultados de los repartos y aseveran que esta relación establecida de manera intuitiva requiere ser comprobada antes de poder ser extendida a todos los casos. Si bien reconocen que han podido validar el procedimiento en todos los casos que han probado, hipotetizan que podría no resultar válido con números mayores. Algunos alumnos intentan encontrar un caso en el que no sea válido el procedimiento y proponen el caso de ¼ repartido entre 2 poniendo en juego una práctica matemática que consiste en buscar un ejemplo que invalide la conjetura que habían construido. En la situación de escritura para agregar ideas al cartel, los niños sostienen el interés por incluir en el texto la restricción de la validez del procedimiento de "la rayita" para los casos en los que lo que se reparte no son enteros. Aunque finalmente no se textualiza esta idea en la producción colectiva, es importante destacar cómo los alumnos tienen en cuenta los límites del procedimiento como parte constitutiva de la relación encontrada. Determinar el dominio de validez de una relación o de una propiedad es también una práctica matemática en la que los niños se involucran.

4.1.3. En equivalencias entre formas diferentes de expresar una misma cantidad que requieren de la relación entre fracciones y división (Clases 10 y 11)

Otro conjunto de situaciones de la secuencia presentado en las clases 10 y 11 incluía problemas en los que se requería a los alumnos la resolución de diferentes repartos, la comparación de los diversos procedimientos y el análisis de la equivalencia entre las distintas maneras de expresar la misma cantidad que resultaba de cada uno de los repartos. Como ya se anticipó en el capítulo 3, en esta oportunidad los niños debían resolver de manera individual y tendrían disponibles los afiches producidos en las clases anteriores. La docente no indicaría su lectura porque estaba previsto observar si los niños los consultaban de manera autónoma.

El problema presentado fue el siguiente:

Se desea repartir chocolates entre niños, de modo tal que cada uno reciba la misma cantidad y todo el chocolate sea repartido. Decidí en cada caso cuánto come cada uno y de qué otras maneras podría hacerse el reparto.

a) 17 chocolates entre 4 niños.
b) 21 chocolates entre 5 niños.
c) 10 chocolates entre 3 niños.
d) 1 chocolate entre 8 niños.

Se propuso a los niños que resolvieran el reparto a) y luego se realizó una puesta en común de los diferentes procedimientos que quedó registrada en el pizarrón. A continuación se les propuso que resolvieran los repartos b), c) y d) y se llevó a cabo un intercambio en el que los niños debían identificar cuál de las formas registradas para el reparto a) habían utilizado en estos nuevos repartos.

Al finalizar esta actividad de resolución de los problemas y análisis de los procedimientos, la docente planteó a los niños interrogantes acerca del uso que habían dado a los afiches colgados en el aula para la resolución de los repartos y sobre la pertinencia de agregar algún conocimiento nuevo que no hubiera sido incluido con anterioridad. Estos fragmentos de la clase se analizan en los apartados 4.2.1 y 4.2.2., respectivamente.

4.1.3. a. Puesta en común de los procedimientos utilizados en el reparto a)

Durante la resolución individual del problema por parte de los niños, la docente fue observando cuáles eran los modos de resolver que ellos utilizaban. De este modo pudo seleccionar los diferentes procedimientos que serían expuestos y decidir en qué orden lo harían en la puesta en común. A medida que los alumnos fueron explicando sus resoluciones ella las fue numerando. Registró en primer lugar los procedimientos de tipo gráfico tal como los niños se los fueron dictando:

1) Dibujo del reparto de 4 chocolates enteros a cada chico y del último entero dividido en 4 partes numeradas del 1 al 4 indicando así el reparto de ¼ a cada chico. El resultado que los alumnos obtuvieron a partir de este procedimiento fue de 4 y ¼.

2) Dibujo de los 17 chocolates divididos en 4 partes, en una de las partes de cada chocolate colocaron el número 1 para indicar que un solo chico comía cada uno de estos cuartos. El resultado obtenido aquí fue 17/4.

3) Algunos niños usaron una variante del primer procedimiento para encontrar una forma diferente de resolver partiendo el chocolate que sobraba en 8 y obteniendo el resultado 4 y 2/8.

Los procedimientos numéricos fueron más frecuentes y sumamente variados; permitieron encontrar interesantes relaciones entre ellos y con las formas gráficas de resolver:

4) Uno de los niños realizó la siguiente descomposición explicando que pensó que 4/4 forman un entero para concluir que 8/4 forman 2 enteros:

$$17 \left\{ \begin{array}{l} \text{8 veces } \tfrac{1}{4} = 2 \\ \text{8 veces } \tfrac{1}{4} = 2 \\ \text{1 vez } \tfrac{1}{4} \end{array} \right\} \text{4 enteros y } 1/4$$

5) Otra niña realizó la multiplicación 4 x 4 = 16 indicando que cada uno de los 4 chicos recibía 4 chocolates enteros y dibujó el chocolate sobrante partiéndolo en 4 partes iguales de las cuales marcó la que correspondía a cada chico. El resultado obtenido en este caso también fue de 4 y ¼.

6) Varios niños utilizaron la cuenta de dividir 17 : 4 obteniendo cociente 4 y resto 1. Luego dibujaron el chocolate que correspondía al resto y continuaron resolviendo de forma gráfica. Fue así que obtuvieron también 4 y ¼ para cada uno. Una de las niñas agregó la explicación con flechas en cada uno de los componentes de la cuenta: En el 17: chocolate para repartir; en el 4 del divisor: entre los nenes que hay que repartir; en el 4 del cociente: cantidad de enteros por nenes y en el 1 del resto: chocolate que falta repartir.

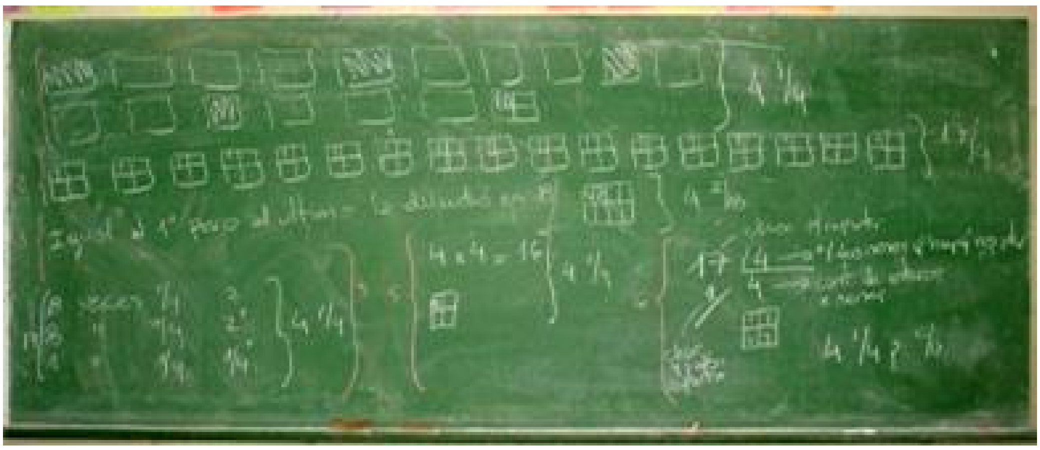


Figura 12: Producciones registradas por la docente en el pizarrón durante la puesta en común del problema "Se desea repartir chocolates entre niños, de modo tal que cada uno reciba la misma cantidad y todo el chocolate sea repartido. Decidí en cada caso cuánto come cada uno y de qué otras maneras podría hacerse el reparto. a) 17 chocolates entre 4 niños." (Procedimientos 1 a 6)

7) Otro alumno contó que vio el problema y se dio cuenta de cuánto le iba a tocar a cada chico, 17/4, aunque no sabía cómo explicarlo. Una niña lo ayudó a explicar argumentando que le servía pensar en los repartos que habían resuelto en clases anteriores en los que se vinculaba la cantidad a repartir y la cantidad de partes en las que se reparte con el numerador y el denominador de la fracción resultante, forma que ellos llamaban coloquialmente "método de la rayita".

8) El mismo niño del procedimiento anterior también explicó que lo había pensado como una multiplicación, 17 veces ¼ que era como 17 x ¼, y así llegó a 17/4.

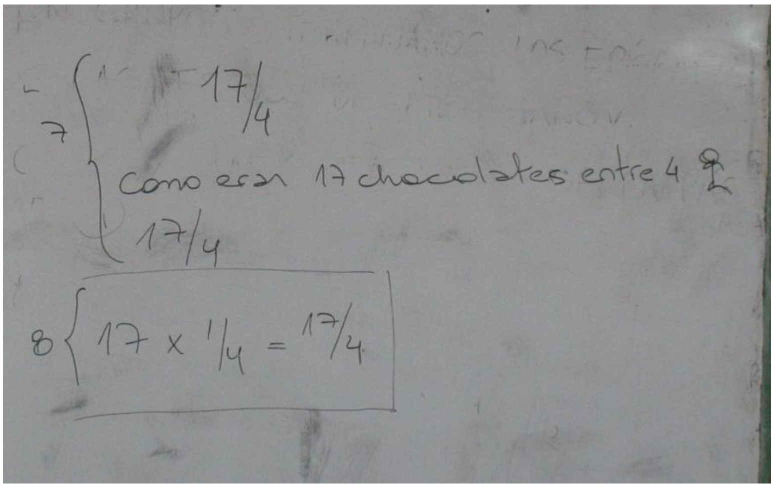


Figura 13: Producciones registradas por la docente en el pizarrón durante la puesta en común del problema "Se desea repartir chocolates entre niños, de modo tal que cada uno reciba la misma cantidad y todo el chocolate sea repartido. Decidí en cada caso cuánto come cada uno y de qué otras maneras podría hacerse el reparto. a) 17 chocolates entre 4 niños." (Procedimientos 7 y 8)

A partir de las resoluciones que los niños fueron exponiendo, la docente decidió en primer lugar conducir el intercambio hacia el análisis de la relación entre los repartos y la división (resolución 6) de modo que ellos pudieran encontrar ciertas vinculaciones:

- entre 17 repartido en 4 y 17 dividido 4,
- entre el 1 del resto, el 4 del divisor y el ¼ del resultado.

Si bien la docente en un primer momento intentó que los niños se centraran en esta segunda relación entre resto, divisor y parte fraccionaria del resultado del reparto, fue necesario dedicar algunas intervenciones previas a analizar las relaciones involucradas en la cuenta de dividir y cuál era el significado de cada uno de sus componentes en el contexto del reparto que estaban resolviendo.

(C11,m33.56-38.37)

1. *Docente: 17 dividido 4 (se refiere a la cuenta de dividir). Natalí dijo que le daba 4 y que este que le sobraba, lo dibujaba debajo, lo partía en 4 y decía que le daba ¼ a cada uno. ¿Será casual que yo de resto tengo 1 y que de divisor tengo el 4 y ella dice que le da ¼ de ese que sobró?*
2. *Algunos niños: No.*
3. *Docente: ¿Por qué?*
4. *Yael: Porque como 4 por 4 es 16 y hay 17 chocolates, te tiene que sobrar 1 sí o sí.*
5. *Docente: ¿Y por qué vos decís 4 por 4? ¿Al hacer 4 por 4 qué es lo que estoy haciendo?*
6. *Natalí: Multiplicando los chocolates por la cantidad de nenes.*
7. *Docente: Miren esto que está diciendo Yael, Yael está tratando de entender por qué me sobró 1, entonces ella dice que 4 por 4 me da 16 (escribe en el pizarrón '4 x 4 = 16') y Natalí dice que está multiplicando la cantidad de chocolates que le da a cada nene (señala el cociente de la cuenta) por la cantidad de nenes que tiene (señala el divisor de la cuenta). ¿Entienden por qué Natalí hace 4 por 4? ¿Qué estoy multiplicando al hacer 4 por 4?*
   (Varios alumnos hablan a la vez, no se entiende)
8. *Docente: La cantidad de chicos por la cantidad de chocolates que le di a cada uno. Natalí, vos al decir la cantidad de chocolates que le toca a cada uno, en la cuenta de dividir, ¿qué parte es?, ¿qué es ese 4?*
9. *Natalí: La cantidad de enteros.*
10. *Docente: ¿Y cómo se llama esa parte de la división?*
11. *Yael y Natalí: Cociente.*
12. *Docente: ¿Por qué lo multiplicaste?*
13. *Natalí: Por el dividendo… (se corrige) ¡por el divisor!*
    (La docente escribe 'c x d' debajo del cálculo '4 x 4 = 16' que había escrito antes)
14. *Docente: Bien, y a vos esto te da 16, ¿y?*
15. *Natalí: Como para llegar a 17 me falta 1...*
16. *Docente: Escuchen esto que está diciendo Natalí. Ella sabe que si hace 4 por 4 le da 16 que es la cantidad de enteros que le da a cada chico y la cantidad de chicos que tenía para repartir y ella dice que ese 4 es el cociente y este otro 4 es el divisor. Y ella sabe que 4 por 4 le da 16, pero para llegar al dividendo, ella sabe que hay algo que le está faltando, (a Natalí) ¿qué es lo que te está faltando ahí?*
17. *Natalí: 17 menos 16, o 16 más 1 da 17.*
18. *Docente: Ella dice 16 más 1 da 17 (escribe en el pizarrón '16 + 1 = 17'). Esta relación que está haciendo Natalí, ¿se acuerdan de haberla trabajado?*
19. *Ramiro: Sí, profe.*
20. *Docente: ¿Qué es lo que ustedes saben?*
21. *Ramiro: La de comprobar la cuenta que era 4 por 4 más el resto.*
22. *Docente: Escuchen esto que está diciendo Ramiro, lo de comprobar la cuenta, ¿no? Si yo hago 4 por 4 más el resto…*
23. *Ramiro: Te tiene que dar el 17 ese.*
24. *Docente: ¿Solamente en este caso te sirve saber 4 por 4…?*
25. *Varios alumnos: No.*
26. *Docente: ¿Qué es lo que sabemos nosotros en la cuenta de dividir?*
27. *Valentino: El cociente más el divisor más el resto te va a dar…*
28. *Alumno: Cociente por divisor (corrigiendo lo dicho por Valentino).*
29. *Docente: A ver, yo hago así cociente por divisor… (escribe en el pizarrón c x d)*
30. *Varios alumnos: Más el resto.*
31. *Docente: ¿Me tiene que dar igual a qué?*
32. *Varios alumnos: Al dividendo.*
    (La docente agrega en el pizarrón lo que van dictando los niños y queda ´c x d + R = D')
33. *Docente: ¿Todos están de acuerdo con esto? (señala lo que acaba de escribir).*
34. *Alumnos: Sí.*
35. *Docente: Ahora, Natalí fíjense lo que hizo, 4 por 4 (señala '4 x 4 = 16'). Puede ser que acá pensemos que este 4 es el divisor o el cociente porque en este caso son los mismos números, es indistinto. Le dio 16 y ella sabe que tenía 17, entonces dijo: 16 más ese resto me da 17, la cuenta está perfecta, ¿o no?*

Al analizar las relaciones entre el reparto y la cuenta de dividir, los niños no atienden en principio a la relación entre resto, divisor y parte fraccionaria del resultado del reparto, pero llegan a establecer correspondencias entre las diferentes cantidades involucradas en el problema -17 chocolates para repartir, 4 chicos entre los que estos se reparten, 4 chocolates enteros para cada uno de los chicos y 1 chocolate que sobra- y los componentes de la división entera –dividendo, divisor, cociente y resto-. La docente propicia que los alumnos vinculen las relaciones encontradas con el análisis que habían abordado con anterioridad respecto del funcionamiento de la división (intervención 18), reconocido por los niños como la "comprobación de la cuenta" (intervenciones 21 a 23). Promueve también que formulen estas relaciones en términos más generales (intervenciones 24 y 26) arribándose así a un modo de representación matemática más formal: cociente x divisor + resto = Dividendo (c x d + r = D), aunque en esta oportunidad no se explicitan las condiciones que debe cumplir el resto en esta relación (ser menor que el divisor y mayor o igual que cero).

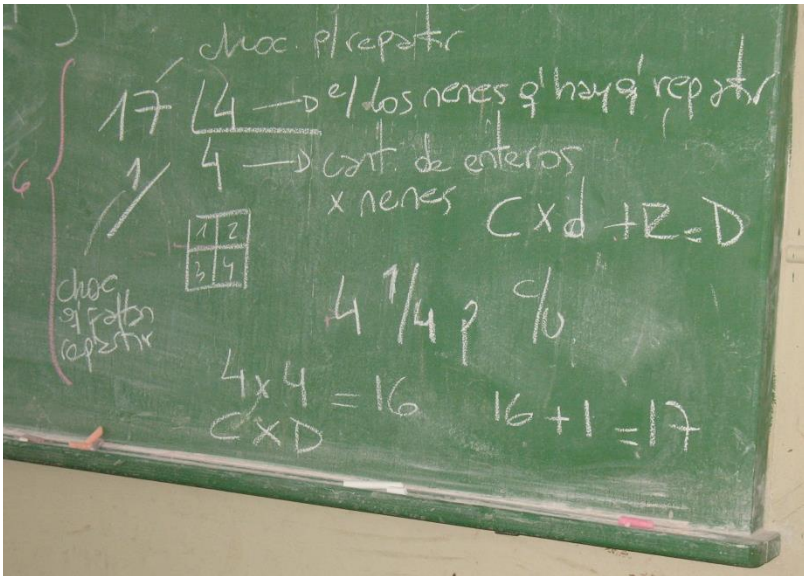


Figura 14: Anotaciones realizadas por la docente durante el análisis del procedimiento 6 que consiste en utilizar la cuenta de dividir 17 : 4 y la partición gráfica del resto para la resolución del reparto de 17 chocolates entre 4 chicos.

Posteriormente, la docente insistió en orientar sus intervenciones a que los niños pudieran comenzar a establecer relaciones entre el 1 del resto de la división, el 4 del divisor y el ¼ que formaba parte del resultado del reparto.

(C11,m38.37-40.02)

36. *Docente: Ahora, con ese chocolate que me sobró, ¿qué hago yo?*
37. *Yael: Lo parto en 4.*

38. *Docente: Lo partí en 4; y yo les preguntaba si era casual que acá (señala el resto) haya tenido un 1 y que acá (señala el divisor) haya tenido un 4. ¿De dónde será que salen ese 1 y ese 4?*
39. *Vicky: El 1 es de lo que le restó… sería lo que le falta, porque 4 por 4 da 16.*
40. *Docente: Sí, estamos de acuerdo, ese 1 es lo que da.*
41. *Sofía O.: Pero da 1 entero, no ¼.*
42. *Vicky: Lo divide por el cociente.*
43. *Yael: Lo divido en cuartos porque el divisor que sería los nenes que hay para repartir son 4, entonces ella divide el chocolate en 4 para que quede justo.*
44. *Docente: Y si en vez de haberme sobrado 1, me sobraban 2, ¿cuántos le doy? (se refiere a cuántos chocolates le corresponderían a cada uno).*
45. *Varios alumnos: Dos cuartos.*
46. *Docente: ¿Estamos de acuerdo en que si me sobran 2 le doy 2/4?*
47. *Varios alumnos: Sí.*
48. *Docente: ¿Tengo necesidad de dibujar esos 2 chocolates?*
49. *Varios alumnos: No.*
50. *Docente: ¿Si hubiesen sido 3 que le sobran?*
51. *Varios alumnos: Tres cuartos.*
52. *Docente: Tres cuartos, ¿y qué puedo decir yo del resto con respecto al divisor, de la fracción que va a comer cada uno de ese chocolate que sobró?*
53. *Macarena: Que te das cuenta porque ves que es 1 del resto y 4 del cociente, entonces es ¼.*
54. *Docente: ¿Del cociente?*
55. *Alumno: Del divisor.*
56. *Docente: ¿O este 4 es del divisor?*
57. *Macarena: (se corrige) ¡Del divisor! Entonces es ¼.*

La docente retoma la pregunta que había realizado al inicio del intercambio (intervención 1) con el propósito de que los niños analicen si la correspondencia entre el 1 del resto, el 4 del divisor y el ¼ de la parte fraccionaria del resultado del reparto, 4 ¼, respondía a un hecho casual (intervención 38). Varios alumnos van haciendo aportes que les permiten ir aproximándose a las razones que sustentan esta relación. Entre los aportes, es interesante la distinción que establece Sofía O. al señalar que el 1 del resto es un chocolate entero y no ¼ (intervención 41). Aunque no se profundiza sobre el significado del 1 en ambas expresiones, la diferencia queda implícita en las explicaciones de los alumnos: El 1 del resto muestra que no fue posible dividir esa parte del dividendo en partes enteras, mientras que el 1 del numerador en ¼ indica que ya se realizó la división de ese entero sobrante en 4 partes iguales, menores que la unidad (intervenciones 39, 42 y 43).

La docente comanda la variable de los números (intervenciones 44, 46, 48 y 50) proponiendo diferentes restos posibles. De este modo invita a los niños a pensar en las fracciones que resultarían del reparto en cada caso sin necesidad de resolver de forma gráfica y a reflexionar en términos más generales sobre la vinculación del resto y el divisor con el numerador y el denominador de la parte fraccionaria del resultado de este reparto: "…¿qué puedo decir yo del resto con respecto al divisor, de la fracción que va a comer cada uno de ese chocolate que sobró?" (intervención 52).

Posteriormente, a partir del reconocimiento por parte de los niños de que los diferentes modos de resolver registrados en el pizarrón arrojaron como resultado la misma cantidad, expresada de maneras distintas, se produce un intercambio en el que se discute por qué 17/4, 17 de ¼ y 4 ¼ son expresiones equivalentes. En primer lugar Luca da una explicación algo compleja que parece no ser completamente comprendida por sus compañeros y que requiere de la aclaración de la docente:

(C11,m41.53-45.55)

58. *Docente: Hoy Joaquín dijo que 17/4 era lo mismo que 4 y ¼, ¿no es cierto? Miren todo lo que está escrito acá (señala los registros de las diferentes formas de resolver en el pizarrón). Cada chico puede comer 4 y ¼, o 17/4 (va señalando los procedimientos que dieron como resultado una u otra fracción), ¿es lo mismo decir 4 y ¼ que 17/4?*
59. *Alumnos: Sí.*
60. *Docente: De acuerdo a las explicaciones que ustedes fueron dando, son diferentes formas de expresar lo que comió cada chico y son todas equivalentes, ¿estamos de acuerdo hasta ahí? Entonces ustedes están diciendo que 17/4 es lo mismo que 4 ¼, ¿no? (escribe '17/4 = 4 ¼'). ¿Cómo puedo mostrarle a un nene que no estuvo en esta clase que esto es lo mismo que esto (señala a ambos lados de la igualdad)?*
61. *Luca: Porque 4/4 sería ya un entero, entonces yo tengo 17, le saco 4/4, me queda 17, 16, 15, 14, 13 (cuenta 4 con los dedos a partir de 17); 13. Entonces ya tengo un entero, después se juntan dos enteros, tres enteros…*
62. *Alumno: No entendí muy bien.*
63. *Docente: Luca dijo que 4/4 es igual a 1 entero (escribe '4/4 = 1'). ¿Y qué pasa Luca con esto?*
64. *Luca: Si yo sigo transformando cada 4/4 del 17/4 en enteros…*
65. *Docente: Luca piensa esto, a los 17/4 los tiene en la cabeza, y él dijo: si yo sé que 4/4 es un entero, me quedo con (a Luca) ¿13 cuartos?*
66. *Luca: Sí.*
67. *Docente: ¿Y qué pasa con esos 13 cuartos?*
68. *Luca: Esos 13 cuartos son 13 cuartos y un entero. Entonces seguimos restando y lo seguimos transformando en enteros y termina quedando 4 enteros y ¼.*
    (Murmullo, los alumnos parecen no entender)
69. *Docente: Es un poco compleja, pero él piensa esto, miren, estos son 17/4 en su totalidad, y él dice: como yo sé que 4/4 son un entero, 1 entero más 13/4 es igual a 17/4 (escribe '1 + 13/4 = 17/4'). Él lo pensó así. Y sabe que con estos 13/4 puede formar otro entero y sucesivamente va a ir restándole, a este, enteros hasta no poderle restar más los enteros. Complejo, pero es una forma de explicar de dónde sale o por qué esto (señala a ambos lados de la igualdad 17/4 = 4 ¼) es igual.*

La explicación de este alumno involucra la descomposición de 17/4 en cuartos. Apoyándose en la equivalencia 4/4 = 1, realiza una sucesión de restas de 4 cuartos para componer la cantidad inicial en parte entera y fraccionaria: 17/4 = 1 + 13/4 = 2 + 9/4 = 3 + 5/4 = 4 + ¼ = 4 ¼.

La segunda explicación elaborada por los niños permite retomar la relación entre el reparto y la cuenta de dividir y avanzar en la explicitación de la vinculación entre el resto, el divisor y la parte fraccionaria del resultado del reparto. La docente los convocó a volver sobre las resoluciones que habían realizado en busca de un apoyo para explicar la equivalencia en cuestión.

(C11,m45.55-47.47)

70. *¿Alguna otra forma de las que ustedes estuvieron analizando que les sirva para pensar esto?*
71. *Sofía: La de Natalí (se refiere a la forma 6), porque ahí 17/4 los estás dividiendo, el 17 y el 4 los estás dividiendo.*
72. *Docente: Yo entiendo de lo que está diciendo Sofía que al 17/4 lo transformo en esta división (escribe en el pizarrón la cuenta de 17 dividido 4), ¿eso estás diciendo, Sofi?*
73. *Sofía: Sí. Y después como tenés…, pensando ya en que la cuenta está completa…*
74. *Docente: La completamos, nuevamente (coloca el 4 en el cociente y el 1 en el resto)*
75. *Sofía: Entonces sería 4 enteros y ¼, entonces…*
76. *Docente: ¿De dónde sale eso? ¿El 4 del cociente…?*
77. *Sofía: Es un entero…*
78. *Docente: ¿Un solo entero?*
79. *Sofía: No, son 4 enteros. Y después te sobra un 1 y ese sería ¼.*
80. *Docente ¿Quieren que haga flechitas para explicar lo que dice Sofi?*
81. *Varios alumnos: Sí.*
82. *Docente: Ella dice que este 4 del cociente son los 4 enteros (saca una flecha del 4 y vuelve a escribirlo más abajo). ¿Y qué más?*
83. *Sofía: Y que el 1 que te sobra es ¼.*
84. *Docente: ¿El 1 es el 1 de ¼? (saca una flecha del 1 y lo escribe al lado de los 4 enteros).*
85. *Sofía: Y el cuarto sería el que va abajo.*
86. *Docente: ¿Así? (saca otra flecha del 4 del divisor y escribe el denominador 4 de la fracción ¼)*
87. *Sofía: Sí, así.*

Apoyándose en la cuenta de dividir 17 entre 4, Sofía pudo establecer explícitamente las relaciones entre el cociente y la parte entera, entre el resto y el numerador y entre el divisor y el denominador de la parte fraccionaria del resultado del reparto.

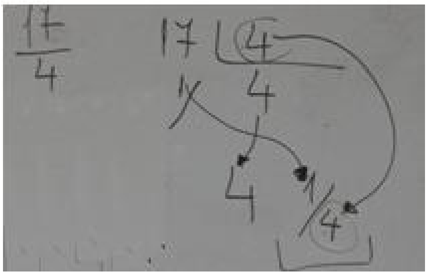


Figura 15: Anotaciones realizadas por la docente en el pizarrón durante la explicación de una alumna acerca de la equivalencia entre 17/4 y 4 ¼ apoyándose en la división entera.

El intercambio posterior apuntó a continuar profundizando el análisis y a que circule en la clase la relación explicitada por Sofía entre la fracción 17/4, la división entera entre 17 y 4 y el resultado del reparto expresado como 4 ¼. Si bien se trata de un fragmento de registro en el que se siguen analizando procedimientos de resolución, se incluyen algunas intervenciones que estuvieron vinculadas a un retorno sobre el afiche para recordar algunas ideas y una situación de escritura colectiva en el pizarrón de algunas conclusiones provisorias, realizada de manera espontánea en el pizarrón. Estas conclusiones fueron tenidas en cuenta luego en la situación de escritura de ideas para agregar al afiche A2 que se analiza en el apartado siguiente.

(C11,m47.50-59.36)

88. *Albertina: Profe, pero sería… el 4 sería el entero y el 4 del divisor…*
89. *Natalí: Es con lo que lo partís.*
90. *Albertina: El 4 del divisor es el 4 que está abajo.*
91. *Docente: ¿Cómo se llama el número de abajo de la fracción?*
92. *Varios alumnos: Denominador.*
93. *Docente: ¿Se acuerdan que de esto habíamos hablado? Es más, lo habíamos anotado. ¿Alguien se acuerda de eso?*
94. *Varios alumnos: Sí, profe.*
95. *Docente: A ver, ¿dónde está eso? ¿Estaba anotado, no? Fíjense si lo encuentran en el cartel.*
    (Varios alumnos señalan y dicen: ¡Ahí! Fabricio comienza a leer)
96. *Docente: Paren, paren. (se acerca al cartel) Fabricio está leyendo esto, (lee) si sabés la cantidad de veces entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés para repartir, después se transforma la cantidad de veces en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador. (dice) ¿Sirve eso para pensar en eso que estaba diciendo la compañera? ¿Les sirve eso para darse cuenta cuál es el numerador y cuál es el denominador?*
97. *Varios alumnos: Sí.*
98. *Docente: ¿Cuál es el denominador?*
99. *Varios alumnos: El de abajo.*
100. *Docente: ¿Por qué? ¿Qué les indicaba el denominador?*
101. *Luca: En cuánto se divide el número…*
102. *Natalí: La cantidad de veces en que tenías que repartir.*
    (Varios alumnos hacen formulaciones similares a la de Natalí)
103. *Docente: ¿Están de acuerdo con esto, en que ese 4 me indica la cantidad de veces en que repartí ese chocolate que me sobró? ¿Y ese 1 que está ahí? (se refiere al resto)*
104. *Varios alumnos: Es el numerador.*
105. *Docente: Es el numerador, bien. ¿Y qué te indica?*
106. *Yael: Cuántas cosas tenés y el 4 en cuántas tenés que repartir.*
107. *Lucas: Ese 4 aparece ahí porque ese 1 que te sobra, lo tenés que tratar de repartir. Entonces, como son 4 chicos…*
108. *Docente: Lucas dice que esto que me sobró lo tengo que repartir (saca una flecha del resto y escribe en el pizarrón: 'esto que me sobró lo tengo que repartir'), (a Lucas) ¿Y entre cuántos lo vas a repartir? ¿Qué te indica en esta cuenta entre cuánto vas a repartir eso que te sobró?*
109. *Lucas: En 4.*
110. *Yael: El divisor.*
111. *Docente: ¿Siempre? Bien, esto que me sobró acá lo tengo que repartir. Yo voy a poner acá entre paréntesis 'divisor' (lo anota). Y este 1 que está relacionado con el resto, ¿qué me indica?*
112. *Varios alumnos: El numerador.*
113. *Docente: El numerador. Si hubiese sido 3 en vez de 1, el numerador de esta fracción, ¿sería 3?*
114. *Natalí: Sí, porque te indica la cantidad de veces que agarrás a esa… (no se entiende)*
115. *Docente: Escuchen esto que dice Natalí. Te indica la cantidad de veces que vos vas a agarrar a este en lo que dividiste ese entero. ¿Están de acuerdo? ¿Cómo puedo poner esto? A ver Lucas, ¿cómo lo puedo poner? (lee) Esto que me sobró lo tengo que repartir. (dice) ¿Y? ¿Cómo puedo poner esto que vos dijiste, Natalí?*
116. *Natalí: ¿En ese ejemplo?*
117. *Docente: Si yo hablo de numerador, de denominador, de divisor, de resto, ¿es solo para este ejemplo o es general? ¿Qué relación voy a establecer entre el divisor, el resto y lo que va a comer de eso que sobró?*
118. *Natalí: ¿Podemos explicarlo usando ese ejemplo? (señala la cuenta que estaba escrita en el pizarrón)*
119. *Docente: Sí, a ver, dale.*
120. *Natalí: En ese caso sería (dicta) el 1 sería el numerador porque te indica la cantidad de veces que agarraste al denominador. El denominador sería la cantidad de veces que partís al entero.*
121. *Docente: ¿La cantidad de veces?*
122. *Natalí: (dicta) La cantidad de veces que dividís al objeto.*

123. *Docente: ¿Que dividís al objeto? Miren lo que dijo Natalí, que este 1 de acá, (lee) sería el numerador, porque te indica la cantidad de veces que agarraste al denominador. Y después pusiste que el denominador que es el 4 sería la cantidad de veces en que dividís al objeto. Si yo pienso en la cantidad de veces en que dividí al objeto, en esta cuenta, ¿qué parte es?*
124. *Varios alumnos: El divisor.*
125. *Docente: ¿Vendría del divisor este denominador? ¿Entienden que cuando Natalí decía la cantidad de veces en que se divide al objeto hablaba de ese divisor?*
126. *Varios alumnos: Sí.*
(Murmullo)
127. *Inv.: Está bueno lo que proponen ahí (señalando a uno de los grupos que hizo un comentario), que una vez que tengo la cuenta hecha solo mirándola me puedo dar cuenta de cuánto da.*
128. *Martina: No necesitás el dividendo.*
129. *Antonio: Se lo sacás, se lo borrás, lo tapás con una mano y te queda 4 enteros y ¼.*
130. *Fabricio: ¿Podemos probar con otra cuenta?*

Para que los niños recuperen el nombre de los componentes de la fracción, numerador y denominador, y su relación con el reparto que se estaba analizando, la docente propone retornar sobre lo que habían agregado en el afiche A2 en clases anteriores, referido a la relación que existe entre el reparto de *a* unidades entre *b* partes y la fracción *a/b* (intervenciones 93 a 97). Los alumnos rápidamente localizan la información solicitada y se apoyan en ella para identificar una vez más la correspondencia entre el resto de la división y el numerador y entre el divisor y el denominador para expresar la parte fraccionaria del resultado del reparto. La docente comienza a registrar estas conclusiones parciales en el pizarrón (intervención 108) sacando flechas en la cuenta de dividir que se estaba analizando y traccionando hacia la generalización de este procedimiento (intervención 117): "Si yo hablo de numerador, de denominador, de divisor, de resto, ¿es solo para este ejemplo o es general? ¿Qué relación voy a establecer entre el divisor, el resto y lo que va a comer de eso que sobró?". Después de varias intervenciones que apuntan a que todos los niños se apropien de las relaciones halladas, el intercambio concluye con una interesante reflexión de uno de los grupos (intervenciones 127 a 130) acerca de la posibilidad de identificar el resultado del reparto considerando información que provee la cuenta de dividir, sin necesidad de hacer otros cálculos o gráficos. Aunque Fabricio, nuevamente, muestra su necesidad de probar con otros casos para estar seguro de tal generalización.

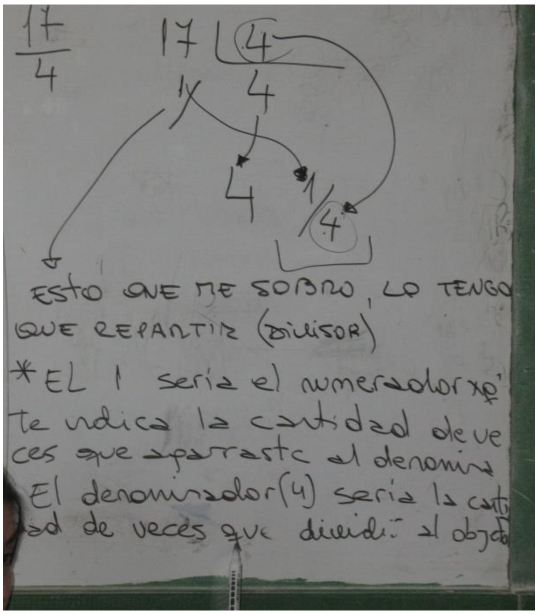


Figura 16: Anotaciones realizadas por la docente en el pizarrón como conclusiones provisorias de la relación entre el resto y el divisor de la cuenta de dividir con el numerador y el denominador de la parte fraccionaria del resultado de un reparto.

El último asunto que se discutió en la puesta en común fue una tercera explicación de la equivalencia entre 17/4 y 4 ¼. En esta oportunidad fue la docente quien propició que se establecieran ciertas vinculaciones con uno de los procedimientos gráficos utilizados, la resolución 2, dado que no habían surgido entre las propuestas de los niños y se trataba de una relación importante.

(C11,m1.53-5.32)

131. *Docente: vamos a retomar esta cuestión que habíamos planteado, por qué 17/4 era lo mismo que 4 y ¼. Nos apoyamos en esto que había mostrado Macarena de pensar a los chocolates repartidos entre 4 (se refiere a resolución 2). Miren lo que voy a anotar acá. Si yo pienso en lo que le voy a dar a cada uno de cada chocolate y empiezo a poner la fracción que cada nene va a comer de cada chocolate, está bien que ponga ¼? (escribe en el pizarrón '¼ +') ¿Cuántas veces tengo que poner ¼?*
132. *Vicky: Cuatro.*
    (Murmullo)
133. *Varios alumnos: 4 veces ¼.*
134. *Docente: ¿Qué es 4 veces ¼?*
135. *Vicky: El entero.*
136. *Docente: Pero si yo quiero representar con estas fracciones todo lo que comió cada nene, yo voy poniendo ¼ + ¼ + ¼, ¿cuántas veces lo tengo que sumar?*
137. *Yael: 17 veces.*
    (La docente completa las 17 veces ¼)
138. *Docente: Yo tengo los 17 pedacitos que comió cada uno de chocolate (señala lo que acaba de escribir), esos pedacitos eran ¼ del chocolate. Y teníamos que tratar de entender por qué 17/4 era igual a 4 ¼. ¿Cómo puedo hacer yo para entender de dónde sale 4 ¼?*
139. *Natalí: Yo haría agarrando 4 cuartos, haciendo una llave abajo y ponele 1 entero.*
140. *Docente: (realiza en el pizarrón lo indicado por Natalí) ¿Todos entienden de dónde sale este entero?*
141. *Varios alumnos: Sí. De 4 cuartos.*
142. *Docente: ¿Están de acuerdo con esto? (escribe '4/4 = 1')*
143. *Varios alumnos: Sí.*

144. *Docente: ¿Qué más podrías hacer, Natalí?*
145. *Natalí: Hago otra vez lo mismo, tres veces más.*
146. *Docente: ¿Qué pongo acá? (señala debajo de las llaves)*
147. *Varios alumnos: Un 1.*
148. *Natalí: Y ahí te quedan 4 enteros y ¼.*
149. *Docente: ¿Con todos estos enteros formo 4? (Hace una llave que abarca los 4 números 1 y escribe debajo el número 4)*
150. *Varios alumnos: Sí.*
151. *Docente: Y este me quedó acá suelto.*
152. *Fabricio: Sí, 4 enteros y ¼.*

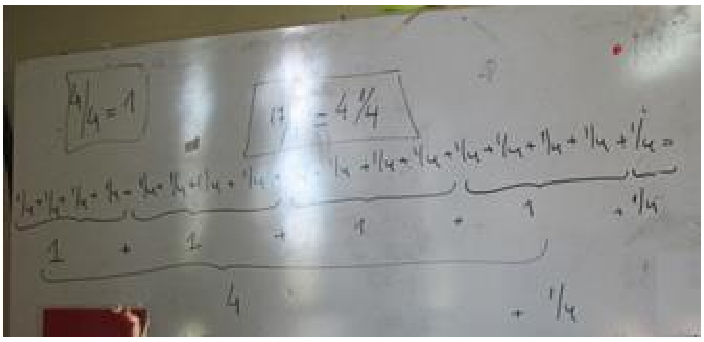


Figura 17: Anotaciones realizadas por la docente en el pizarrón durante el intercambio acerca de la equivalencia entre 17/4 y 4 ¼ apoyado en la descomposición de 17/4 en 17 veces ¼.

Si bien la descomposición de 17/4 en 17 sumandos de la fracción ¼ fue propuesta por la docente (intervenciones 131, 136 y 138), los alumnos pudieron utilizarla como apoyo para armar 4 reagrupamientos formados por 4 veces ¼ y de ese modo, justificar la equivalencia con 4 ¼.

Al finalizar esta puesta en común del reparto a), se propuso a los niños que resolvieran los repartos b), c) y d) y a continuación se analizó colectivamente qué formas de resolver habían usado, tomando como referencia las analizadas para el reparto a) que aún estaban escritas en el pizarrón. Los alumnos reutilizaron mayoritariamente la resolución 6 (divisiones enteras entre los chocolates y los niños) y la resolución 7 ("método de la rayita"). Muy pocos utilizaron resoluciones gráficas.

<u>4.1.3. b. Escritura colectiva</u>

Luego del extenso intercambio sobre los modos de resolver estos cuatro repartos y el análisis de las equivalencias entre las diferentes expresiones de una misma cantidad, se volvió sobre el afiche A2, *"¿De qué maneras puedo resolver un reparto?"* para discutir si era necesario agregar alguna idea a partir de todo lo que habían aprendido con los nuevos problemas resueltos. Esta situación de retorno sobre el propio escrito que se analiza en el apartado 4.2.2., dio lugar a una situación de escritura colectiva. Los niños agregaron algunas ideas vinculadas a los modos de resolver repartos que aún no habían sido consideradas. En primer lugar, se dispusieron a incluir aclaraciones sobre la cuenta de dividir que figuraba en el cartel.

(C11,m52.30-59.02)

1. *Docente: Ahí (en el afiche) lo único que habíamos puesto con respecto al resto era que era lo que no se podía repartir en enteros y yo lo tenía que repartir de alguna forma. Si yo miro acá (señala la cuenta del pizarrón), acá se profundizó mucho más qué es lo que pasa con este resto. No quedó solamente que es lo que tengo que seguir repartiendo porque no me alcanza para darle enteros. Llegaron a poner nombres de numerador, denominador, el resto, el divisor. Bueno, ¿cómo pongo? Yo después pongo un asterisco, después veo de qué forma resolverlo ahí (se refiere a la forma en que lo va a incluir en el afiche que tiene poco espacio para agregar ideas), ¿pero qué pongo?*
2. *Sofía: Como pusiste ahí en la cuenta (se refiere a las notas provisorias que habían tomado que pueden leerse en la Figura 16), ¿te dicto lo que dice ahí?*
3. *Yael: (dicta) Si te sobra algo en la cuenta de dividir…*
4. *Docente: Y si en vez de poner 'si te sobra algo en la cuenta de dividir'…, ¿cómo se llama lo que te sobra en la cuenta de dividir?*
5. *Varios alumnos: El resto.*
   (La docente escribe: 'Si hay resto en una cuenta')
6. *Docente: ¿Si hay resto en una cuenta?*
7. *Sofía O.: (dicta) Lo tenés que tratar…*
8. *Yael: (dicta) Si hay resto en una cuenta lo tenés que dividir por el divisor.*
   (La docente escribe lo dictado por Yael)
9. *Natalí: ¿Ejemplo?*
10. *Docente: ¿Y qué pasa?*
11. *Yael: No sé, Natalí me dice que ponga un ejemplo.*
12. *Sofía: No lo tenés que dividir por el divisor, porqueee…*
13. *Yael: No dividir, pero repartir…*
14. *Alumna: Porque ya no se puede dividir más*
15. *Sofía: Porque si es un resto es porque ya no se puede dividir.*
16. *Docente: ¿Cómo puedo poner para que a mí me sirva en varias situaciones?, ¿cómo puedo poner?*
17. *Sofía: Yo cambiaría dividir por repartir, repartir por el divisor y eso sería la fracción que no es entero.*
18. *Docente: ¿Pero cómo hallo yo esa fracción? ¿Qué es lo que me pueden ustedes decir con respecto a esa fracción, del resto y del divisor?*
19. *Marcos: Que a ese chocolate que queda lo tenés que repartir entre…*
20. *Docente: Tomando esto que está acá (señala la cuenta del pizarrón que puede verse en las Figuras 15 y 16), ustedes pusieron flechita del divisor al 4, del resto al 1, dijeron que el 1 era el numerador, que el 4 es el denominador. Se dieron cuenta que independientemente de que sea 4 y 1, pasaba lo mismo. Si yo acá dividía entre 5, este divisor lo iba a tener acá (señala el denominador), ¿cómo puedo ponerlo?*
21. *Camila: Que el resto se transforma en el numerador.*
22. *Docente: (lee) Si hay resto en una cuenta de dividir (dice) ¿qué pasa?*
23. *Camila: Pero con eso que ya pusieron no sé cómo ponerlo…*
24. *Docente: ¿Qué saco? Dale.*
25. *Camila: No, no sé.*
26. *Docente: Bueno, tomo lo que dijiste vos, (comienza a escribir nuevamente debajo de lo que ya está escrito) si hay resto…*
27. *Camila: (continúa dictando) en una cuenta, se transforma, (dice) no, no sé.*
28. *Docente: Dale, (dice mientras escribe) si hay resto en una cuenta el resto se transforma…*
29. *Alumno: (dicta) En ¼.*
30. *Alumno: (dicta) En numerador.*
31. *Alumna: 'En numerador', no, 'en el numerador', sería.*
32. *Docente: En el numerador…(escribe 'numerador')*
33. *Alumno: Y el divisor…*
34. *Alumno: En denominador*
35. *Docente: Cami, vos por qué decís de agregar 'si hay resto'.*
36. *Camila: Porque por ahí no hay nada, no hay.*

37. *Docente: ¿Y si no hay resto?*
38. *Natalí: Claro, porque si no hay resto, no podés dividir.*
39. *Sofía O.: Yo digo de no empezar por si hay resto en una cuenta, ponerlo de otra manera.*
40. *Docente: Paren, después por ahí discutimos eso. ¿Están de acuerdo con esto que acaba de decir Camila? (Tacha el primer renglón) Esto lo dejamos porque Camila dijo que todo esto que está acá no le servía, entonces yo volví a poner lo que dijo ella, (lee) si hay resto en una cuenta, el resto se transforma en numerador y el divisor en denominador. ¿Les parece que es suficiente esto que puso Camila?*
41. *Varios alumnos: Sí.*

La docente subraya los avances que los niños han logrado en las discusiones sobre los componentes de la división (intervención 1) para alentarlos a ampliar la información incluida en el afiche. Los alumnos comienzan intentando dictar cómo averiguar el resultado de un reparto cuando una división tiene resto distinto de cero. A pesar de la profundidad del análisis que habían realizado en la puesta en común, la situación de escritura colectiva los lleva a una nueva discusión: ¿Es correcto decir que el resto se divide por el divisor? Aparentemente, para algunos niños esta idea resulta contradictoria dado que, si se trata de un resto, ya no se puede dividir más (intervenciones 12, 14, 15). Proponen entonces referirse a este procedimiento cambiando la expresión 'dividir el resto por el divisor' por 'repartir el resto por el divisor' para que se entienda que el resto se reparte en fracciones (intervención 16). Es interesante señalar que la definición de resto que estaba escrita en la anterior versión, "Lo que no se puede repartir en enteros y tengo que repartir en fracciones", marcaba con claridad esta distinción.

Camila parece comprender el procedimiento que intentan describir (intervención 21) pero le resulta difícil ajustar su idea para que ensamble con el enunciado que habían iniciado sus pares en el dictado (intervenciones 23 y 25). Son necesarias varias intervenciones de la docente (intervenciones 22, 24, 26 y 28) para destrabar la producción y que la alumna pueda plasmar por escrito sus ideas con la colaboración de otros.

Un aspecto que tampoco había surgido en la puesta en común es considerar qué sucede cuando la cuenta no tiene resto o tiene resto cero. La docente repara en la condición que había quedado establecida en el texto que estaban escribiendo (intervención 35): era necesario que hubiera resto para poder utilizar el procedimiento. Al pedir una justificación promueve que los niños argumenten que si no hay resto no es posible realizar la división (intervención 38).

Las intervenciones de la docente en esta oportunidad parecen tener la intención de evitar que los niños dilaten demasiado el intercambio y que sean precisos en la producción del escrito tanto en lo referente a su forma como a su contenido. Ella hace sugerencias explícitas para que ajusten el lenguaje al tipo de texto que están produciendo: "Y si en vez de poner 'si te sobra algo en la cuenta de dividir'..., ¿cómo se llama lo que te sobra en la cuenta de dividir? (intervención 4). Posiblemente haya considerado algo coloquial y subjetiva esa expresión como para ser incluida en un texto informativo y, por tal motivo, propuso reemplazarla por el término 'resto' que la mayoría de los alumnos ya dominaba. Además, ante diferentes textos intentados formulados oralmente por los niños para ajustar la redacción (intervenciones 7 y 8 o intervenciones 29, 30 y 31), la docente decide escribir una de las opciones, sin dar lugar a la discusión, validando así la propuesta que considera más adecuada para poder seguir adelante con la producción colectiva. También, frente a propuestas concretas de los alumnos para modificar la redacción del escrito, "Yo digo de no empezar por si hay resto en una cuenta, ponerlo de otra manera" (intervención 39), pospone explícitamente la discusión para más adelante (intervención 40), con el supuesto propósito de que se centren en qué asuntos incluir en el texto. Por último, las intervenciones que apuntan al contenido del texto traccionan una vez más para que los niños realicen formulaciones generales, "¿Cómo puedo poner para que a mí me sirva en varias situaciones?" (intervención 16). O en ciertos casos, da pistas sobre qué pueden tomar como punto de apoyo en las anotaciones realizadas durante la puesta en común y convoca a pensar en cómo enunciar esas relaciones en lenguaje escrito: "… ustedes pusieron flechita del divisor al 4, del resto al 1, dijeron que el 1 era el numerador, que el 4 es el denominador. Se dieron cuenta que independientemente de que sea 4 y 1, pasaba lo mismo. Si yo acá dividía entre 5, este divisor lo iba a tener acá (señala el denominador), ¿cómo puedo ponerlo?" (intervención 20).

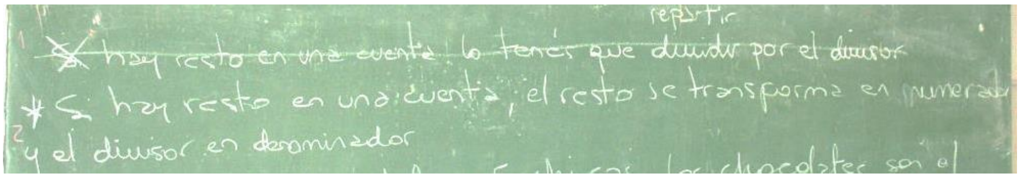


Figura 18: Escritura colectiva en borrador para ser agregada al Cartel A2: ¿De qué maneras puedo resolver un reparto?, sobre el procedimiento que vincula el resto y el divisor de la división entera con el numerador y el denominador de la parte fraccionaria del reparto.

4.1.3. c. Síntesis de algunos conocimientos infantiles que circularon en la puesta en común de problemas que involucran equivalencias entre formas diferentes de expresar una misma cantidad -que requieren de la relación entre fracciones y división- y en la situación de escritura colectiva para agregar ideas al cartel: "¿De qué maneras puedo resolver un reparto?"

Asuntos	Algunos conocimientos que circularon en la puesta en común sobre los modos de resolver el problema	Algunos conocimientos que circularon en la situación de escritura colectiva
Relación entre el resto y el divisor de la cuenta de dividir para continuar repartiendo cuando ya no se pueden obtener más partes enteras.	(intervención 39 y 41). “El 1 es de lo que le restó… sería lo que le falta, porque 4 por 4 da 16”, “Pero da 1 entero, no ¼”. (intervención 43). “Lo divido en cuartos porque el divisor que sería los nenes que hay para repartir son 4, entonces ella divide el chocolate en 4 para que quede justo”. (intervención 109). [lo que sobró se reparte] “En 4”, “El divisor”.	(intervención 8). “Si hay resto en una cuenta lo tenés que dividir por el divisor”. (intervención 15). “Porque si es un resto es porque ya no se puede dividir” (se refiere a que no se pueden obtener más partes enteras). (intervención 38). “… si no hay resto, no podés dividir” (se refiere a que no se puede obtener una parte fraccionaria).
Información provista por la cuenta de dividir sobre la relación entre resto-numerador y divisor-denominador de la parte fraccionaria del resultado del reparto	(intervención 53). “… te das cuenta porque ves que es 1 del resto y 4 del divisor, entonces es ¼”. (intervención 75, 79 y 83). “Entonces sería 4 enteros y ¼”, “… son 4 enteros. Y después te sobra un 1 y ese sería ¼”, “… el 1 que te sobra es ¼”. (intervención 85). “Y el cuarto sería el que va abajo”. (intervención 101, 102). [el denominador indica] “En cuánto se divide el número…”, “La cantidad de veces en que tenías que repartir”. (intervención 104). “El 1 es el numerador”. (intervención 106). [el numerador indica] “cuántas cosas tenés y el 4 en cuántas tenés que repartir”. (intervención 107). “Ese 4 aparece ahí (se refiere al denominador de la fracción) porque ese 1 que te sobra, lo tenés que tratar de repartir. Entonces, como son 4 chicos…”	(intervención 120, 122 y 124, escritura espontánea durante puesta en común). “… el 1 sería el numerador porque te indica la cantidad de veces que agarraste al denominador. El denominador sería la cantidad de veces que partís al entero”… “la cantidad de veces que dividís al objeto”, [La cantidad de veces en que dividí al objeto es…] “El divisor”. (intervenciones 128 y 129, escritura espontánea durante puesta en común). [Solo mirando la cuenta me puedo dar cuenta de cuánto da…] “No necesitás el dividendo”, “Se lo sacás, se lo borrás, lo tapás con una mano y te queda 4 enteros y ¼”. (intervención 21, 33 y 34). “Que el resto se transforma en el numerador”, “Y el divisor”… “En denominador”.

Al poner en relación las formulaciones que hicieron los niños en el momento de discusión sobre la resolución de los repartos y las que realizaron en las situaciones de escritura colectiva -tanto la situación espontánea que se desarrolló durante la puesta en común como la que se planificó en la secuencia para agregar nuevamente ideas al cartel-, identificamos el tratamiento de dos asuntos en común, muy vinculados entre sí, que solo separamos a los fines del análisis.

El primero de ellos refiere a la relación que los alumnos encuentran entre el resto y el divisor de la cuenta de dividir para continuar repartiendo cuando ya no se pueden obtener más partes enteras. Si bien este asunto había sido discutido en la resolución de problemas anteriores, se dedicaron varios fragmentos de la clase a explicitar nuevamente estas relaciones. Los niños necesitan poner en palabras que lo que sobra es un entero pero este luego se reparte en la cantidad que indica el divisor. En el momento de la escritura surgen reflexiones similares pero se agrega una condición que no había sido mencionada en el intercambio anterior: debe haber resto en la cuenta de dividir para que el resultado del reparto tenga una parte fraccionaria. Aunque no se haya tematizado, la rigurosidad que exige la escritura los enfrenta a la necesidad de explicitar la condición de que exista un resto que se pueda continuar repartiendo después de repartir las partes enteras, aludiendo así a la distinción entre la división entera y la división exacta.

El segundo asunto que se trata en ambas instancias de intercambio es la información que provee la cuenta de dividir acerca de la relación entre el resto y el numerador y entre el divisor y el denominador, para componer la parte fraccionaria del resultado del reparto. En el momento de la puesta en común los niños dan cuenta de haber reconocido estas relaciones en el contexto del problema y de la cuenta particular que están analizando. Del mismo modo que en las situaciones anteriores de la secuencia, en la situación de escritura predominan las formulaciones algo más generales y explicativas y, por otra parte, los niños hacen explícita la posibilidad de "leer" en la cuenta el resultado del reparto, cuestión que no se había o con tanta claridad en el momento de la discusión sobre los modos de resolver los repartos.

4.2. Retorno al propio escrito para reutilizar sus ideas en nuevos problemas o para agregar conocimientos que no habían sido incluidos

En este apartado se analizan los momentos de las clases en los que los alumnos vuelven a leer las propias producciones. En algunos casos lo hacen con el propósito de reutilizar ideas ya escritas en la resolución de nuevos problemas de reparto, ya sea de manera espontánea o por sugerencia del docente. También pueden volver al escrito para agregar nuevas conclusiones que no habían sido incluidas con anterioridad. En este último caso, se examinan las ideas que se van modificando o agregando en los sucesivos retornos y cómo inciden los avances de los conocimientos matemáticos en la profundidad y riqueza de estas escrituras.

4.2.1. Retorno sobre la escritura colectiva para resolver nuevos problemas de reparto

Como se mencionó anteriormente, antes de comenzar la clase 2 en la que los niños debían resolver un reparto de 7 chocolates entre 4 niños, se había colgado en el frente el afiche A1 que había sido elaborado en la clase anterior a partir de la resolución del reparto de

3 chocolates entre 4 niños. La versión original había sido pasada en limpio por la docente en el afiche de la figura 19, ¿De qué modos diferentes se puede expresar la cantidad que le tocó a cada uno?

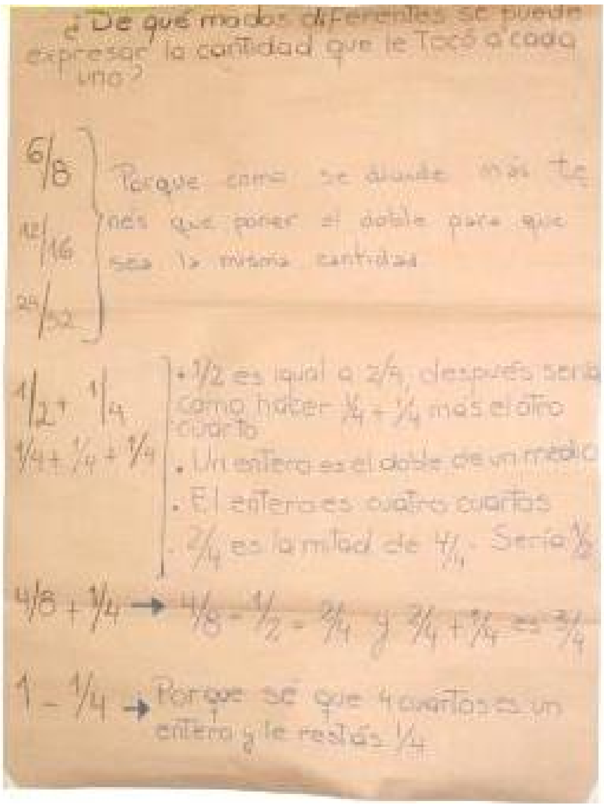


Figura 19: Cartel A1 pasado en limpio por la docente a partir del elaborado en situación de escritura colectiva: ¿De qué modos diferentes se puede expresar la cantidad que le tocó a cada uno? (Figura 2)

Dado que en el momento de la resolución en parejas, la docente había habilitado la posibilidad de consultar el cartel que estaba colgado en el frente del aula o las fotocopias con la misma información que los niños tenían pegadas en las carpetas, al finalizar la clase les propuso explicitar si habían vuelto a leer esa escritura y en tal caso, qué les había servido de ella para resolver el problema.

(C2,m50:07-56.13)

1. *Docente: Les hago una consulta, ¿alguno se ayudó con el afiche que habíamos hecho la clase anterior para resolver ese problema?, ¿alguno lo consultó?*
2. *Varios alumnos: No.*
   (Vicky levanta la mano, pero la docente no la ve)
3. *Docente: Esperen que a mí me resulta interesante saber esto, ¿algún grupo utilizó el afiche…?*
4. *Inv.: (interrumpe) Podrían leerlo un ratito de a dos, leerlo otra vez porque por ahí no se acuerdan, y ver si algo de eso les sirvió para resolver esto (señala el registro de los procedimientos del pizarrón).*
   (Ninguna pareja lee el afiche)
5. *Docente: A ver, esperen un segundito, ¿algún grupo consultó este afiche de la clase anterior para resolver este problema?*
6. *Algunos alumnos: No.*

(Vicky y Julieta levantan la mano)

7. *Docente: Julieta y Vicky están levantando la mano, ¿alguna otra pareja tuvo en cuenta el afiche?*
8. *Sofía O.: Nosotras solamente para hacer la llave (se refiere al símbolo "}" que encierra las fracciones equivalentes).*
9. *Docente: Bueno, (a Sofía O.) paren, (a Vicky y Julieta) díganme qué cosas les sirvieron de este afiche para resolver este problema.*
10. *Julieta: Tuvimos en cuenta el primero, (lee) porque como se divide más tenés que poner el doble para que sea la misma cantidad, (dice) porque lo partimos en 14/8 una vez.*
11. *Docente: ¿Lo partieron en 14/8?*
12. *Julieta: (asiente) Llegamos a 14/8.*
13. *Docente: Ah! paren, a ver, llegaron a 14/8 ustedes como respuesta.*
14. *Julieta: Sí.*
15. *Docente: ¿Cómo hacen para llegar a esos 14/8?*
16. *Julieta: Porque en vez de partirlos en cuartos los partimos en octavos, le dimos 2/8 a cada una y 2/8 es lo mismo que ¼.*
17. *Docente: Pregunta, ¿ustedes eso lo hicieron como primera forma o segunda forma de resolución?*
18. *Julieta y Vicky: Tercera.*
19. *Docente: Tercera, a ver, escúchenme un segundo. Julieta dice que a ellas les sirvió esto (lee el cartel) "porque como se divide más tenés que poner el doble para que sea la misma cantidad".*
    (Murmullo)
20. *Fabricio: Nosotros también usamos eso.*
21. *Joaquín B.: Sí, pero no lo leímos, eso ya lo sabíamos.*
22. *Fabricio: Y sí, pero de alguna manera lo sacaste del afiche.*
23. *Docente: A ver, Joaco, ¿puedo decir una cosa? Entiendo que algunos por ahí se lo acordaban pero en cierta forma vos estás utilizando esta información (señala el cartel). Te la acordabas y por ahí no necesitaste leerlo, pero estás usando lo de la clase anterior.*
24. *Joaquín B.: Por ahí, ya lo sabía, pero yo no lo leí… (no se escucha bien qué dice).*
25. *Docente: Escuchame una cosa, Joaco, por ahí no tuviste necesidad de leerlo porque te lo acordabas, pero es lo que acordamos en la clase anterior, es lo que me dijeron ustedes.*
26. *Alumno: Yo me lo acordaba de la clase pasada.*
27. *Docente: A ver, Julieta utilizando esto de que como se divide más, tenés que tener el doble, ella en vez de pensar en dividir el chocolate en 4, lo dividió en 8. Como aumentó al doble las partes en las que dividió al chocolate, decidió tomar el doble de partes, ¿no?, ¿y llegaron a qué respuesta?*
28. *Julieta: 14/8*
29. *Docente: A ver, ¿algún otro grupo utilizó algo del afiche? ¿Yael?*
30. *Fabricio: Sí, nosotros.*
31. *Docente: ¿Qué cosa?*
32. *Fabricio: Lo mismo que Julieta, que como se divide más tenés que poner el doble para que sea la misma cantidad, porque nosotros pensamos lo de los octavos a base de los 7/4.*
33. *Natalí: Profe, en sí nosotras no lo usamos pero nos sirvió lo de la igualdad.*
34. *Valentino: Para mí la parte dos, la que dice que es igual ½ a 2/4 (lo mira de su fotocopia).*
    (La clase se diluye porque suena el timbre de recreo)

Pareciera que en esta oportunidad los niños no volvieron a leer el afiche pero reconocen que usaron varias de las ideas allí escritas para resolver el problema. Las niñas que dicen haberlo leído, Julieta y Vicky (intervenciones 10 a 18), no lo usaron en el momento de resolver sino para hallar diferentes formas de expresar el resultado 7/4 con fracciones equivalentes, cuestión que había sido discutida al escribir el cartel a propósito de las formas de expresar 3/4.

Es interesante la distinción que realiza Joaquín B. (intervención 21) al reconocer que usaron ideas del cartel pero que no las leyeron porque se las acordaban. Si bien la docente insiste (intervenciones 23 y 25) en que aunque no hayan leído el cartel usaron la información que había sido acordada en la clase anterior por ellos mismos para dejar registrada, no es posible asegurar que los niños la recuerdan por el trabajo realizado en esa clase o por el hecho de haberla escrito. Este grupo de niños ya había trabajado sobre fracciones equivalentes en 4° año y es factible que ellos hayan usado esos conocimientos para encontrar modos diferentes de expresar la fracción resultante porque ya los dominaban con anterioridad. De hecho, se observa en numerosas parejas de niños el interés por encontrar varias fracciones equivalentes al resultado como un modo de poner en juego un conocimiento que manejan fluidamente. En ese caso, la escritura del cartel no estaría explicitando conocimientos adquiridos en la clase anterior, sino aquellos que ellos ya dominaban antes de la clase.

En la clase 11 se presentó una nueva situación en la que se indagó si los niños habían vuelto a leer los carteles elaborados en las clases anteriores. En esta oportunidad, aunque estaban colgados, no se habilitó explícitamente la consulta de los carteles porque interesaba saber si recurrían a ellos de manera autónoma. Nuevamente la lectura de las conclusiones previas no parece haber sido una herramienta que los niños hayan valorado como muy necesaria para resolver los repartos.

(C11,m38.30-41.37)

1. *Docente: ¿Alguno utilizó lo que teníamos en los afiches para resolver esto?*
2. *Algunos alumnos: No.*
3. *Docente: ¿Nada de lo que teníamos en los afiches me sirvió? ¿Nada de lo que pusimos y registramos en las clases anteriores me sirvió para resolver esto?*
4. *Sofía: Sí, a mí me sirvió la de dividir.*
5. *Docente: A vos te sirvió la de dividir, ¿qué te sirvió, Sofi?*
6. *Sofía: Emmm, no sé, como no se me ocurría una forma, me fijé y…*
7. *Alumno: Te inspiró (risas)*
8. *Inv.: ¿Vos te acordabas lo que habías escrito o tuviste que ir a leerlo?*
9. *Sofía: No, me acordaba.*
10. *Docente: ¿Nadie usó, por ahí sin necesidad de leerlo, pero porque se acordaba de lo que habíamos estado discutiendo? ¿Morena, qué te sirvió?*
11. *Morena: La división también.*
12. *Martina: Yo ni miré pero ya me acordaba lo que habíamos dicho de la división.*
    (Varios alumnos acuerdan)
13. *Docente: ¿Vicky, vos no usaste nada del afiche?*
14. *Vicky: No.*
15. *Docente: ¿Y en qué te basaste para resolverlo de esa manera?*
16. *Vicky: Porque Fabricio había dicho que había que tener en cuenta la cantidad de chocolates y la cantidad de chicos, entonces usé esa manera y la hice mentalmente.*
17. *Docente: ¿Maca, te sirvió de algo lo del afiche?*
18. *Macarena: La división, pero como ya estaba anotado ahí (señala el pizarrón), no…*
19. *Juan: Yo usé la división, pero la descripción del resumen (señala el afiche) no me sirvió.*
20. *Docente: ¿No lo tuviste en cuenta eso? ¿Por qué no lo tuviste en cuenta?*
21. *Juan: O sea, poner los números sí, pero yo no expliqué qué es cada número.*
22. *Docente: Está bien, vos no explicaste, pero al momento de decir qué come cada uno, ¿no estás teniendo en cuenta lo que significa cada una de las partes en la división?*
23. *Juan: Sí (dudando).*

24. *Docente: ¿Yo puedo decir que el dividendo es lo que le voy a dar a cada uno?*
25. *Juan: No.*
26. *Docente: En cierta forma estoy teniendo en cuenta qué dato me aporta cada parte de la división. Por ahí no tuviste necesidad de leerlo porque te lo acordabas. Fíjense cómo difiere la forma en que ustedes resolvieron este reparto con el que habíamos resuelto la primera clase, ¿no es cierto? La mayoría en la primera clase había hecho dibujos.*

Los alumnos que dicen haber consultado o que les sirvieron los afiches utilizaron la cuenta de dividir para resolver los repartos (intervenciones 4, 11 y 18), aunque reconocen no haberlos leído en el momento sino que resolvieron a partir de lo que recordaban que estaba escrito en ellos (intervención 12).

Resulta interesante la lectura que realiza la docente en esta situación de retorno sobre lo escrito en el afiche. Ella lo interpreta como registro de los avances que los niños han logrado en sus resoluciones (intervención 26) y subraya que en las primeras clases, a diferencia de las posteriores, los alumnos utilizaban dibujos para resolver los repartos.

4.2.2. Retorno sobre la escritura colectiva para decidir si se agrega una nueva idea

En la clase 8 los alumnos habían discutido sobre el procedimiento de “la rayita” que vinculaba la cantidad a repartir y el número de partes entre las que se reparte con el numerador y el denominador de la fracción resultante, respectivamente. Al identificar esta forma como un modo de resolver repartos fue necesario revisar el afiche A2, encabezado por el título “*¿De qué maneras puedo resolver un reparto?”* con el propósito de decidir si era pertinente agregar la estrategia encontrada.

(C8,m9.00-10.27)

1. *Docente: ¿Cómo lo podría registrar yo? ¿Se acuerdan en el afiche que dijimos de qué manera se podían resolver repartos? ¿Está en ese afiche eso?*
2. *Varios alumnos: No.*
3. *Docente: ¿No está?*
4. *Varios alumnos: No.*
5. *Docente: Miren, se los voy a leer, dice (lee) ¿De qué maneras puedo resolver un reparto? (continúa leyendo todo el afiche A2). ¿Se acuerdan?*
6. *Algunos alumnos: No está.*
7. *Docente: ¿Eso no está? (señalando el afiche en el que resolvieron los repartos con el procedimiento de “la rayita”). ¿Cómo lo podríamos poner? ¿Están de acuerdo que sería una nueva forma de resolver?*
8. *Varios alumnos: Sí.*
9. *Docente: ¿Y cómo lo podríamos poner?*

Si bien varios alumnos afirmaron -antes de leer el afiche y a partir de lo que recordaban haber escrito- que ninguno de los procedimientos registrados coincidía con el que pretendían incluir, la docente volvió a leer todo para que tuvieran oportunidad de realizar un rastreo más analítico de las ideas allí desarrolladas. La lectura compartida estuvo en este caso al servicio de la escritura colectiva que se realizaría una vez identificada la ausencia del procedimiento en cuestión.

Luego de algunas propuestas para comenzar a describir el nuevo modo de resolver partiendo de las definiciones de numerador y denominador de una fracción, los niños se centraron en la forma en que debería enunciarse tal descripción para poder ser inserta en lo que ya estaba escrito en el afiche.

(C8,m18.25-21.53)

10. *Docente: Al momento de registrar… ¿Se acuerdan del cuadro que teníamos debajo…? (Se refiere al afiche con los repartos del problema que quedó colgado debajo del afiche A2 que se disponen a completar). ¿…Que si el reparto era de 2 chocolates entre 3 nenes (escribe el 2 y el 3) o de 4 chocolates entre 2 nenes (escribe el 4 y el 2 debajo de los números anteriores, como reproduciendo el cuadro con que habían trabajado), dijeron de poner estas rayitas así?, ¿no es cierto? (escribe las rayas de las fracciones entre 2 y 3 y entre 4 y 2). Entonces alguno había dicho que era el numerador y Franco retomó eso del numerador y dijo: -Yo me acuerdo que en 4° vimos numerador y denominador. Estamos refrescando esto que dijo Franco. Por ahí para el momento de registrar esta nueva forma no sirve recordar el denominador y el numerador. Vamos a ver ahora si nos sirve o no. Pero me pareció que estaba bueno retomar esto que había dicho Franco, ¿sí? ¿Cómo puedo registrar esta nueva forma de resolver un reparto? ¿Vicky?*

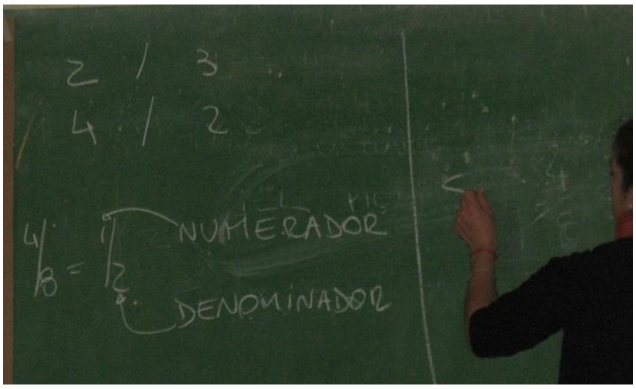


Figura 20: Anotaciones de la docente en el pizarrón mientras se discute cómo incluir la escritura del procedimiento de "la rayita" en el afiche A2, ¿De qué maneras puedo resolver un reparto?

11. *Vicky: (dicta) Otra forma de resolver fracciones es utilizar el numerador y el denominador (Murmullo, interrupción)*
12. *Macarena: ¿Ese seguiría a ese? (refiriéndose a que el cartel que van a escribir sería la continuación del afiche A2 que ya habían iniciado en clases anteriores).*
13. *Docente: Claro, Macarena me está preguntando esto porque Vicky volvió a introducir con un título, ¿no es cierto? Es una continuación de ese afiche, yo lo voy a poner debajo de eso. Entonces por ahí no es necesario volver a poner cómo puedo hacer para resolver repartos. Sería una continuación, un asterisco más. ¿Cómo podríamos poner?*
14. *Macarena: (dicta) Una forma…*
15. *Docente: ¿Les parece que primero lo ponga en el pizarrón y después lo vemos?*
16. *Varios alumnos: Sí.*
17. *Docente: Maca, ¿cómo puedo poner?*
18. *Macarena: (dicta) Otra forma…*
19. *Docente: No pongamos 'otra forma', ya salimos con el asterisco, ¿se acuerdan que en el afiche habíamos puesto así? Miren.*

La pregunta de Macarena (intervención 12) pone de relieve la necesidad de adecuar el nuevo texto al modo de enunciar que venían utilizando en el afiche ya que, una vez pasado en limpio, se ubicaría a continuación de la escritura allí plasmada. En el texto intentado por Vicky (intervención 11) aparecía una introducción, “Otra forma de resolver fracciones es…”, que no hubiera guardado coherencia con el punteo en el que cada procedimiento se iniciaba con un asterisco. La docente acompaña el señalamiento hecho por Macarena explicitando enfáticamente (intervención 13) que es suficiente comenzar la descripción con un asterisco sin introducción, sin embargo esta misma niña es quien vuelve a proponer introducir el texto con “Una forma” y con “Otra forma” (intervenciones 14 y 18) sin alcanzar a incluir la propuesta de la docente acerca de la adecuación al modo de enunciar del afiche. Por ello, fue necesaria una indicación específica de no incluir esa manera de introducir el texto (intervención 19).

En la clase 11, antes de registrar las ideas nuevas que habían surgido de los intercambios, también fue necesario volver a leer el afiche A2 para decidir si era pertinente incluirlas. Los niños proponen agregar diferentes procedimientos y se producen algunas discusiones sobre el alcance de estos modos de resolver para determinar si vale la pena guardar un registro escrito de ellos.

(C11,m44.53-52.28)

1. *Docente: Ahora les hago esta pregunta, surgieron un montón de cosas en la clase, ¿consideran que hay algo para agregar al afiche? ¿Se acuerdan ‘¿De qué maneras puedo resolver un reparto?’, del afiche que habíamos hecho? Lo voy a leer y después vamos a pensar qué cosas podemos agregar que discutimos hoy (lee el afiche A2 completo).*
   (Hablan Vicky y Yael pero no se escucha)
2. *Docente: Vicky dice de agregar lo de la multiplicación, Yael lo del denominador y lo del numerador.*
3. *Sofía: Yo agregaría también la forma que hizo Cata (se refiere a la resolución 4).*
4. *Docente: ¿Qué había hecho Cata?*
5. *Sofía: La de 8 veces ¼, 8 veces ¼ y una vez ¼.*
6. *Docente: A ver, yo pregunto, ese de 8 veces ¼, ¿me puede servir para todas las situaciones de reparto?*
7. *Lucas: Como en la 5, profe, no en todas te sirve.*
8. *Docente: Apuntemos a hacer cosas generales, que me sirvan para cualquier situación independientemente de la cantidad que tengo para repartir.*
   (Murmullo)
9. *Docente: Bueno, entonces vamos a agregar esto (señala forma 8 de resolver), esto (señala las flechas de la cuenta de dividir que se pueden ver en las figuras 15 y 16), ¿y qué más? Luca, en base a lo que vos utilizaste, también Vicky, en base a lo que vos utilizaste, ¿qué podríamos agregar? Por ahí podemos llegar a modificar algo de lo que ya pusimos, que les resulte más fácil.*
10. *Luca: No, me parece que está. Yo puse la 1, la había usado en la d), y en la c) había usado multiplicación y estaban las dos.*
11. *Docente: Marcos, vos de lo que usaste, ¿pensás que podés agregar algo en el afiche?*
12. *Marcos: Esa forma.*
13. *Docente: ¿Cuál?*
14. *Marcos: Si tenés 10 chocolates entre 5 chicos, le ponés esa barrita, rayita.*
15. *Docente: Bueno, entonces vamos a agregar con respecto a estas (señala formas 7, 8 y la cuenta). A ver, Yael, pensando en lo de la cuenta de dividir, ¿qué hago? Pensando que ya tengo ese afiche, que puedo completar algo de lo que puse, o bien agregar.*
16. *Yael: Completá que dice si sabés las veces que tenés que repartir.*

17. *Docente: La última parte, vos decís de completar, ¿de qué forma lo completarías?*
18. *Yael: Agregándole eso que había dicho Natalí de que se veía el 4 y el ¼.*
19. *Docente: ¿Cómo pondrías?*
20. *Natalí: Usando ese ejemplo.*
21. *Yael: Si te sobra algo en la cuenta de dividir…*
22. *Docente: ¿Y con qué lo podemos relacionar del afiche?*
23. *Yael: Con la cuenta de dividir.*
24. *Docente: Si yo agrego algo de lo que está acá, de lo que estuvo dando vueltas en el afiche en la parte de la cuenta de dividir, ¿está relacionado con eso o no? ¿Esto que hicieron ustedes se desprende de la cuenta de dividir (señala la cuenta del pizarrón)?*
25. *Ramiro: Sí.*

Sofía propone incluir la resolución 4 –“la de 8 veces ¼, 8 veces ¼ y una vez ¼”- (intervención 3). Aunque era posible demostrar la equivalencia de esta resolución con las otras formas de resolver -particularmente con el procedimiento 8: 17 veces ¼ = 17 x ¼ = 17/4-, la docente opta por no dar lugar a su inclusión aparentemente porque no estaba formulada en términos más generales (intervenciones 6 y 8). De este modo, ella tracciona para que los niños descontextualicen las resoluciones analizadas y las piensen para cualquier reparto con el propósito de decidir si lo agregan o no al afiche. Los alumnos proponen la inclusión de algunos procedimientos numéricos que ponen en juego la relación entre los repartos y la división (o la multiplicación).

4.3. PASAJE DE LOS ESCRITOS INDIVIDUALES A LAS PRODUCCIONES COLECTIVAS

Como se anticipó en el capítulo 3, en la clase 15 se inició la implementación del conjunto de situaciones que tenían la intención de sistematizar el trabajo realizado a lo largo de la secuencia, solicitando a los alumnos que escribieran un “machete” con “todo lo que habían aprendido sobre fracciones” para contar con esa ayuda en una próxima evaluación. Este apunte para la prueba fue elaborado por cada uno de los niños a partir de la lectura individual sugerida explícitamente por la docente de carpetas, libros de texto y afiches producidos en forma colectiva. Posteriormente se propuso una situación de revisión -que se analiza en el apartado 4.4.- en la que se intercambiaron los escritos entre pares. El alumno “revisor” agregó sugerencias por escrito en la misma hoja al final de las anotaciones para el estudio y luego el autor evaluó cuáles de ellas incorporar en su propia producción. A partir de estas escrituras individuales, en la clase 16 se produjo un texto colectivo en el que se puntearon los asuntos que no deberían faltar en ninguna de las recopilaciones de lo aprendido. Aclaramos que aquí fue necesario hacer una modificación respecto de lo previsto: La planificación incluía la elaboración de un nuevo punteo de conocimientos que tomaría como referencia las escrituras individuales realizado esta vez en forma conjunta por toda la clase, el afiche A4, pero debido al largo tiempo que había ocupado la situación anterior y al riesgo de que una nueva escritura de los mismos contenidos perdiera sentido para los niños, se decidió acotar la escritura colectiva a una enumeración de aspectos que no podían dejar de tenerse en cuenta en los apuntes individuales.

En la consigna que dio inicio al conjunto de situaciones de sistematización, la docente anticipó a los niños con mucha precisión las condiciones bajo las cuales deberían realizar la producción. Entre las condiciones mencionó la situación de revisión que sucedería a esta escritura para que tuvieran en cuenta en la textualización que si bien eran ellos los destinatarios del escrito, el texto debía ser comprendido por otros:

(C15,m0.17)

1. *Docente: Les cuento qué vamos a hacer hoy. Ustedes saben que siempre después de trabajar varias clases con un mismo tema, después de todo, ¿qué viene?, una evaluación. Vamos a preparar nuestro machete para ese examen. ¿Cómo voy a preparar el machete para el examen? De forma individual, van a poder consultar no solo la carpeta de ustedes sino también los afiches, todo lo que hicimos, lo del libro entra porque hicimos tareas del libro. Así que, recuerden, podemos consultar la carpeta, el libro y los afiches. Pero tenemos una condición que respetar. Si bien el machete lo va a hacer cada uno y va a ser para cada uno, tiene que ser claro porque en un momento vamos a hacer un intercambio de machetes con el compañero y lo vamos a leer para ver si se entiende y le vamos a hacer sugerencias a mi compañero. Entonces si bien va a ser un machete de uso personal, tengo que tener en cuenta que alguien lo va a leer. Como va a haber alguien que lo va a leer, no puedo poner cosas que entienda yo solo. Por ejemplo, vieron que a veces cuando hacemos toma de notas o vamos tomando apuntes de lo que nos van diciendo, uno puede utilizar una forma de escribir personal. Por ejemplo, si yo tengo que escribir 'realmente', pongo así (escribe 'real//'). Pero eso es para mí. Si yo sé que va a haber otro que lo va a leer, no puedo hacer esto porque es algo que manejo yo sola. ¿Está claro lo que digo? Este machete puede ir acompañado de dibujos, de conclusiones, de algún problema que ustedes consideren importante, lo van a hacer ustedes, va a ser para ustedes.*
2. *Fabricio: ¿Cuántas páginas como mínimo?*
3. *Docente: No hay mínimo, ni máximo. Lo importante es que tenga todo lo que trabajamos y que vos consideres que es importante para tener en el momento del examen.*

Durante el desarrollo de esta situación de escritura individual fue posible observar que los alumnos hojeaban sus carpetas y se detenían a leer las conclusiones colectivas[37], leían los afiches colgados en el salón desde sus bancos o acercándose a ellos. En algunos casos se paraban y llevaban su carpeta al lado de los afiches para copiar lo que estaba allí escrito. La mayoría de los niños usaba colores para elaborar de manera muy prolija y ordenada las notas que servirían de ayuda en la evaluación.

Los escritos que los niños produjeron individualmente sobre los contenidos trabajados se apoyan entonces en textos que habían sido elaborados por ellos mismos de manera colectiva. Nos detendremos en dos aspectos de la primera versión de estas escrituras individuales. En primer lugar, analizaremos cómo se manifiesta en estas producciones una de

[37] Habitualmente la docente copiaba las conclusiones colectivas que se escribían en el pizarrón, las pasaba en limpio en computadora y las entregaba en fotocopias a los alumnos para que las peguen en sus carpetas.

las tensiones utilizadas por Lerner, Larramendy y Benchimol (2010) en su estudio sobre las escrituras en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de contenidos históricos: la tensión entre transcripción y construcción del conocimiento. En segundo lugar, examinaremos los contenidos que los niños seleccionan para incluir en sus notas.

Con respecto al primer aspecto, es necesario recordar que las autoras mencionadas conciben a la reelaboración y a la transcripción como dimensiones constitutivas de la escritura y valoran el lugar de esta última porque, aunque el contenido verse sobre lo ya pensado, la reproducción permite objetivarlo y volver sobre él para revisarlo. Ellas reconocen que la transcripción puede resultar una copia literal de los textos-fuente que los niños toman como referencia y combinarse con una reapropiación del contenido en el proceso de producción del nuevo texto (Lerner, Larramendy y Benchimol, 2010:43).

En el análisis de los apuntes para el estudio encontramos diferentes grados de distanciamiento en relación con las producciones colectivas entre los que distinguimos tres grupos.

a) Algunos alumnos seleccionan fragmentos pertinentes de los afiches disponibles en la clase o de las conclusiones registradas en las carpetas y los copian de manera casi textual. Estos niños no necesariamente muestran un bajo nivel de apropiación de los contenidos; las intervenciones que varios de ellos han realizado en las diferentes situaciones de la secuencia y los resultados obtenidos en la evaluación final permiten inferir el alto grado de comprensión que habían logrado sobre los conceptos en juego. Es posible interpretar que al haber participado activamente como autores de las conclusiones colectivas, varios de estos alumnos comprendían muy bien el sentido de ciertos fragmentos y decidieron transcribir en sus producciones individuales los que mejor explicaban algunos conceptos. Por ejemplo, Martina selecciona para elaborar sus notas los fragmentos que resaltamos en las transcripciones de los afiches A1 y A2:

Transcripción de la escritura del cartel A1:

¿De qué modos diferentes se puede expresar la cantidad que le tocó a c/u?

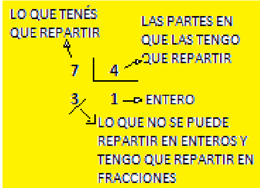
¾	1 entero en 8 (octavos) 1 entero en 4 es 4 cuartos
6/8	Porque como se divide más tenés que poner el doble para que sea la misma cantidad *1
12/16 *1	xq 1 entero es el doble de ½ y el entero es 4/4, 2/4 es la mitad de 1 y sería 1/2
½ + ¼	½ es igual a 2/4, después sería como hacer ¼ + ¼ más el otro cuarto *2
¼ + ¼ + ¼	*2
12/4:3 9/4:3	12/4:4 Porque si no cambiás toda la cuenta
24/32	*1
4/8 + ¼	4/8=1/2 =2/4 y 2/4+ ¼ es ¾
1 – ¼	Porque se que 4 cuartos son un entero y le restás ¼

Transcripción de la escritura del cartel A2:

¿De qué maneras puedo resolver un reparto?

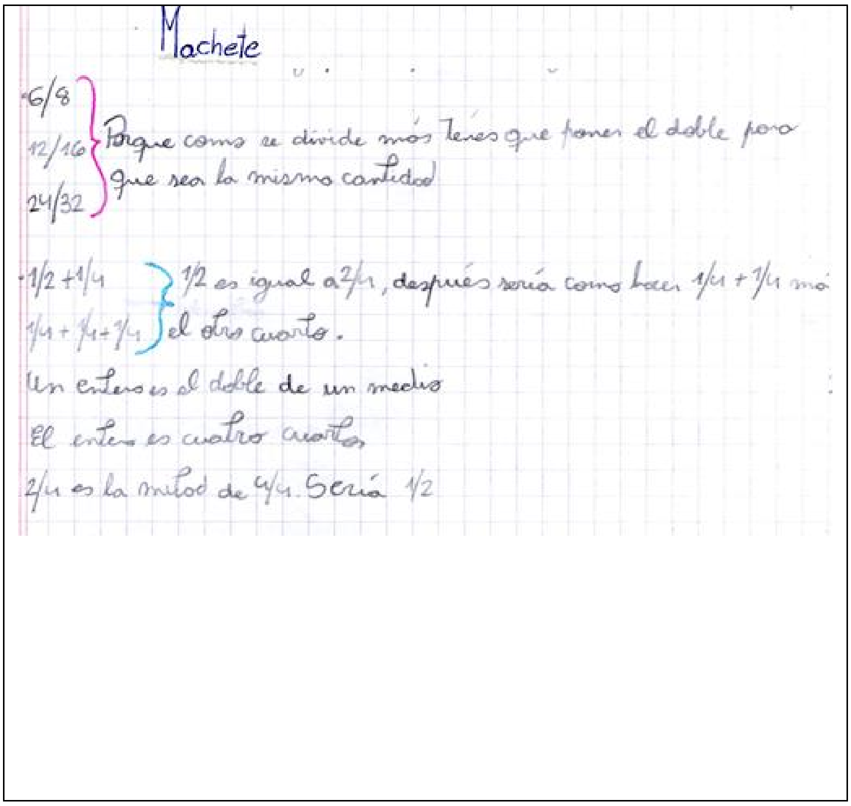
*Hay varias maneras de resolver cálculos con fracciones
*Se puede utilizar un cálculo de división porque cuando divido reparto cosas

Por ejemplo



*Dibujando: TODO lo que tenés (cantidad) que repartir y dividirlo TODO por las ~~cantidad de lo que~~ partes en que lo tenés que repartir.
*~~Restando~~
→Repartir todo→Cada uno de los chocolates se divide por lo que tenés que repartir
→Repartimos los chocolates enteros y después se reparten los que no se pueden repartir más enteros
→Repartieron primero los enteros, luego en ½ y por último en ¼

Figura 21: Transcripción de los afiches A1 y A2 con el resaltado en color de los fragmentos seleccionados por Martina para incluir en sus notas para la evaluación.



Machete

6/8
12/16 Porque como se divide más Tenes que poner el doble para que sea la misma cantidad
24/32

1/2 + 1/4 1/2 es igual a 2/4, después sería como hacer 1/4 + 1/4 más
1/4 + 1/4 + 1/4 el otro cuarto.
Un entero es el doble de un medio
El entero es cuatro cuartos,
2/4 es la mitad de 4/4. Sería 1/2

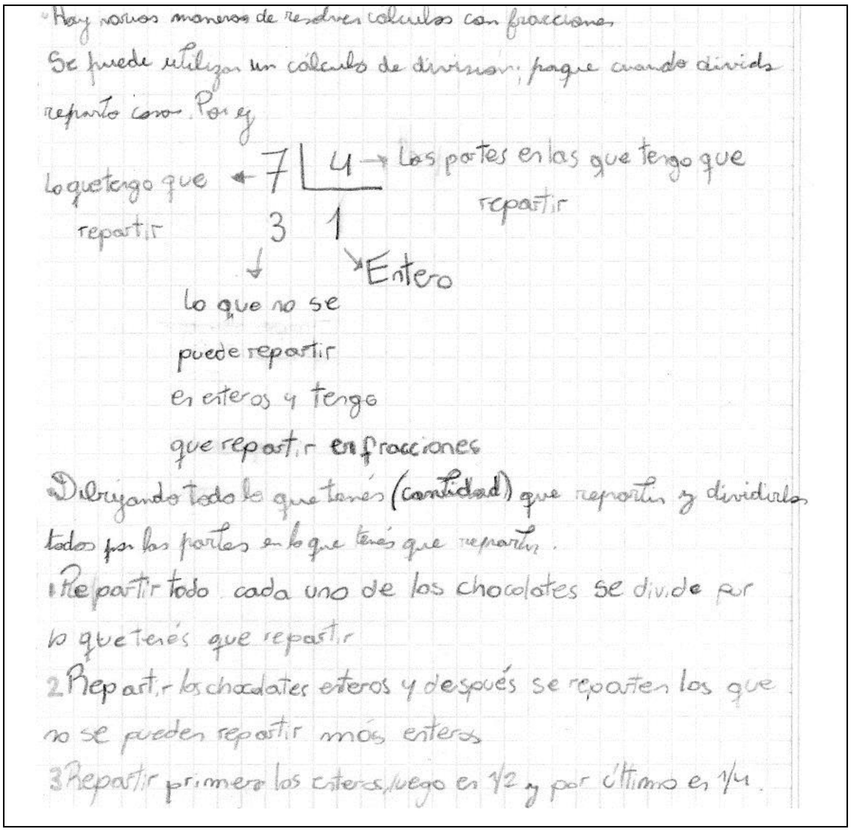

Hay varios maneras de resolver cálculos con fracciones.
Se puede utilizar un cálculo de división, porque cuando divids reparto como. Por ej
lo que tengo que repartir ← 7 | 4 → Las partes en las que tengo que repartir
3 1 → Entero
lo que no se puede repartir en enteros y tengo que repartir en fracciones
Dibujando todo lo que tenés (cantidad) que repartir y dividirlo todos por las partes en lo que tenés que repartir.
1 Repartir todo cada uno de los chocolates se divide por lo que tenés que repartir
2 Repartir los chocolates enteros y después se reparten los que no se pueden repartir más enteros
3 Repartir primero los enteros, luego en 1/2 y por último en 1/4.

Figura 22: “Machete” de Martina.

Martina selecciona las ideas principales del afiche A1 sobre los diferentes modos en que se puede expresar la fracción 3/4 y las reordena de acuerdo a las relaciones que se habían establecido colectivamente en el contexto de producción. Así, escribe en columna en un mismo conjunto las fracciones equivalentes 6/8, 12/16 y 24/32 con su justificación y agrupa las descomposiciones aditivas más importantes junto a las explicaciones en las que elimina dos conectores y sustituye por palabras algunas escrituras numéricas como ½ o 4/4. Luego reproduce en forma completa el afiche A2 pero intenta mejorar la coherencia en algunos verbos: En la flecha que corresponde al dividendo de la cuenta de dividir del afiche está escrito “lo que tenés que repartir” pero la alumna lo transforma en “lo que tengo que repartir”, utilizando la primera persona del singular tal como están conjugadas las explicaciones del resto y el divisor de la misma cuenta. Finalmente, las dos últimas viñetas que comienzan con “Repartimos” y “Repartieron” en el afiche, son iniciadas por Martina con el infinitivo del verbo guardando de este modo coherencia con la primera viñeta.

b) Otros alumnos combinan la transcripción textual de fragmentos con la reelaboración de algunas ideas y la introducción de ejemplos propios. Macarena, por ejemplo, se apoya en las producciones colectivas pero las reorganiza con su propia redacción.

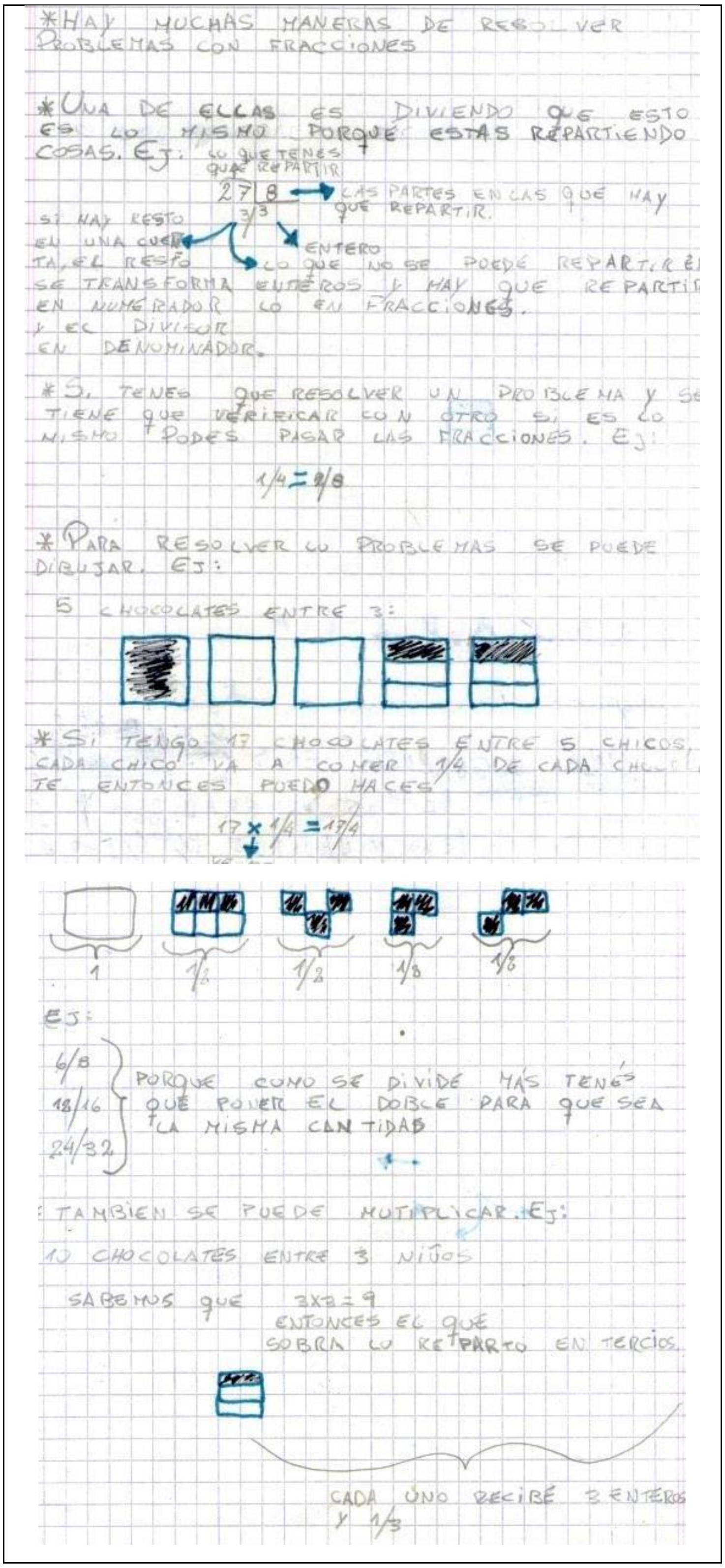


Figura 23: “Machete” de Macarena.

Encabeza sus notas para la evaluación con la frase "Hay muchas maneras de resolver problemas con fracciones" que parece un parafraseo de la frase que inicia el afiche A2 en forma de viñeta: "Hay varias maneras de resolver cálculos con fracciones". El afiche continúa con una segunda viñeta: "Se puede utilizar un cálculo de división porque cuando divido reparto cosas", pero la alumna la incluye intentando dar continuidad a la primera oración: "Una de ellas es diviendo (dividiendo) que esto es lo mismo porque estás repartiendo cosas". Luego escribe el ejemplo de una cuenta de dividir con números propios, diferentes a los del cartel, aunque anota en las flechas correspondientes al dividendo, divisor, cociente y resto explicaciones que son casi una copia textual. Es importante resaltar que atreverse a poner un ejemplo con la misma cuenta pero con otros números supone un avance importante en la apropiación del conocimiento en juego y una aproximación a cierto nivel de generalización. Interpretamos esta transformación como un indicador de que ella ha comprendido el procedimiento y sabe que funciona aunque los números sean diferentes.

A continuación, Macarena introduce una viñeta en la que desarrolla una idea original que no apareció en ninguna de las conclusiones colectivas referida al uso que podría darse a las fracciones equivalentes en la comprobación de resultados: "Si tenés que resolver un problema y se tiene que verificar con otro si es lo mismo podés pasar las fracciones. Ej: ¼ = 2/8". Sin embargo, varios ítems más adelante reproduce textualmente el fragmento del afiche A1 referido a la equivalencia entre las fracciones 6/8, 12/16 y 24/32.

c) Otros alumnos reelaboran las escrituras colectivas e incluyen sus ideas y ejemplos originales.

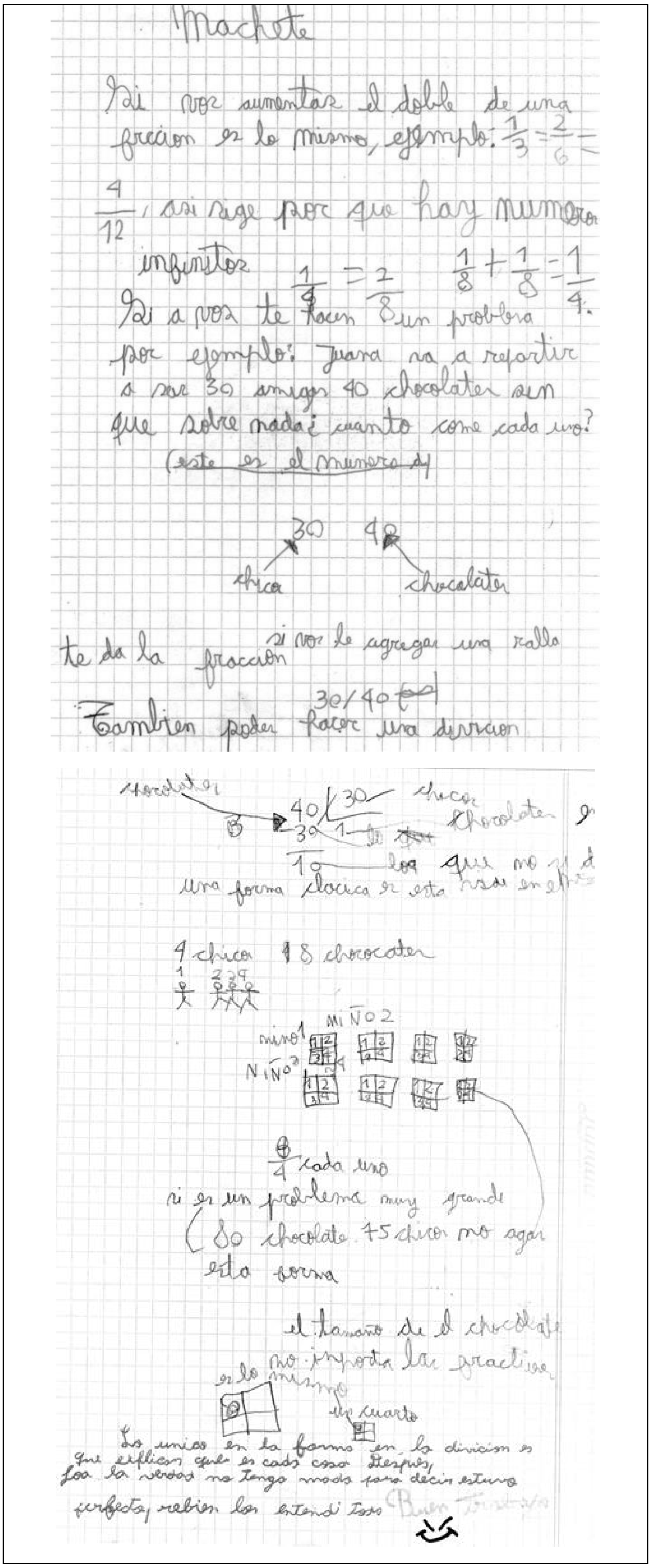


Figura 24: “Machete” de Joaquín B.

Joaquín B., por ejemplo, elabora su producción en segunda persona del singular, dirigiéndose a un lector potencial. Comienza afirmando que las fracciones equivalentes a una fracción dada son infinitas, idea que no fue considerada en los intercambios sucedidos durante la secuencia: "Si vos aumentás el doble de una fracción es lo mismo, ejemplo: 1/3 = 2/6 = 4/12, así sigue porque hay números infinitos". Posteriormente propone por propia iniciativa el enunciado de un problema de reparto de 40 chocolates entre 30 amigos que le sirve de apoyo para describir el procedimiento de transformar la cantidad a repartir en el numerador de la fracción y la cantidad de partes entre las que se reparte, en el denominador: "30→chicos, 40→chocolates, si vos le agregás una raya te da la fracción 30/40". Si bien en el resultado que encuentra invierte el orden de numerador y denominador, Joaquín B. muestra un modo propio de registrar este procedimiento.

Apoyándose en el mismo problema de reparto explica la resolución a través de la cuenta de dividir 40 entre 30. Utiliza el recurso de las flechas en cada uno de los componentes de la cuenta, igual que en el afiche, y elabora explicaciones usando sus palabras aunque no las formula de manera general sino refiriéndose al contexto del problema. En el dividendo escribe: "chocolates"; en el divisor, "chicos"; en el 1 del cociente, "chocolates enteros" y en el 10 del resto, "lo que no se divide en enteros".

Para referirse a un procedimiento gráfico utiliza un nuevo ejemplo, 8 chocolates entre 4 chicos, y lo representa de manera algo confusa aunque logra obtener una fracción correcta, 8/4. Joaquín B. anuncia este modo de resolver dando cuenta nuevamente de estar dirigiéndose a un lector potencial: "Una forma clásica es esta". Además lo acompaña de un consejo al destinatario: "si es un problema muy grande, 80 chocolates, 75 chicos, no hagas esta forma". Pareciera que en la producción de este alumno se entreteje la función comunicativa de la escritura con el propósito de guardar memoria de lo aprendido.

Como anticipamos, el segundo aspecto que analizaremos en las anotaciones individuales realizadas por los niños se refiere a los contenidos que seleccionaron para disponer de ellos en el momento de la evaluación.

a) Encontramos que en la mayoría de estas producciones aparece la transcripción textual de un fragmento del afiche A1, *¿De qué modos diferentes se puede expresar la cantidad que le tocó a c/u?*, referido a las fracciones equivalentes a

3/4. Los niños eligen copiar del cartel las fracciones 6/8, 12/16 y 24/32, acompañadas de la explicación: “Porque como se divide más tenés que poner el doble para que sea la misma cantidad” pero incluyen con menor frecuencia las descomposiciones aditivas de 3/4. En diferentes momentos de la secuencia los alumnos recurren al uso de fracciones equivalentes para buscar modos diferentes de resolver un reparto, aun cuando no lo solicita la consigna, o aluden a cómo estas se obtienen mostrando así el uso fluido que hacen de una técnica[38]. Podría interpretarse que la inclusión recurrente de este fragmento obedece a una valoración de la técnica que ya dominan y que les permite abordar la tarea de obtener fracciones equivalentes como un aspecto importante para registrar. El hecho de que todos transcriban literalmente la explicación puede deberse a que reconocen a qué se refiere, aunque esté expresada con marcadas imprecisiones como se analizó en el apartado 4.1.1.1.b., o bien, a que aún no estén en condiciones de elaborar una justificación racional del funcionamiento de esa técnica y prefieran copiarla. También se puede conjeturar que lo reproducen textualmente en las anotaciones individuales porque se trata del primer afiche que escribieron en la secuencia y a esta altura no recuerdan con exactitud a qué ideas refiere.

b) Otro de los contenidos que aparece en todas las notas individuales para la evaluación se refiere a los diferentes modos de resolver repartos.

b.1) Entre ellos, la cuenta de dividir con la explicación del significado de cada uno de sus componentes extraída del afiche A2 no falta en ninguna de las producciones. Recordamos que este modo fue propuesto por un solo alumno en la puesta en común del segundo reparto de la secuencia pero impactó a todos y fue inmediatamente adoptado por la mayoría del grupo. Tal vez debido a la potencia del procedimiento para mostrar sintéticamente las relaciones entre el reparto y el resultado con sus partes entera y fraccionaria, los niños decidieron incluirlo en el afiche colectivo como la primera opción para resolver repartos. Pareciera que en esta instancia de escritura individual, los alumnos sostienen el criterio por el que consideran infaltable a este modo de resolver.

[38] Yves Chevallard (1997) propone la noción de *praxeología* matemática como modelo básico para describir el conocimiento matemático. En un primer nivel de conocimiento define el concepto de *tarea* como un ejercicio, un problema, una actividad propuesta por un profesor y el concepto de *técnica* que puede entenderse como una manera de resolver o un saber-hacer una determinada tarea. En un segundo nivel vinculado al saber define a la *tecnología* como un discurso racional cuyo objetivo es justificar la técnica para asegurarse de que permite realizar las tareas y a la *teoría* en un grado superior de justificación de la tecnología.

Más allá de esta uniformidad en la decisión de incluir la cuenta de dividir, es importante señalar que cierta cantidad de alumnos propone para el ejemplo números diferentes a los que se eligieron en la escritura colectiva del afiche, tal como lo hizo Macarena en sus notas para estudiar (Figura 23), o como lo hace Victoria en el siguiente ejemplo:

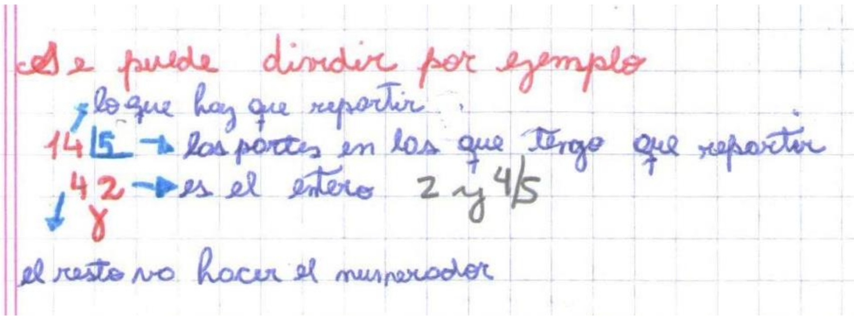


Figura 25: Detalle de "machete" de Victoria.

Es posible interpretar que los niños introducen modificaciones en el ejemplo porque la situación de sistematización escrita de lo aprendido potencia la reelaboración de algunas de sus ideas y favorece la toma de decisiones que apuntan a la generalización de sus conocimientos.

b.2) El procedimiento que los niños llaman "la rayita" para vincular la cantidad a repartir con la cantidad de partes en las que esta cantidad se reparte también aparece en la gran mayoría de los apuntes para la evaluación. En este caso no predominan las transcripciones textuales sino que varios alumnos lo expresan de diferentes maneras y con ejemplos propios.

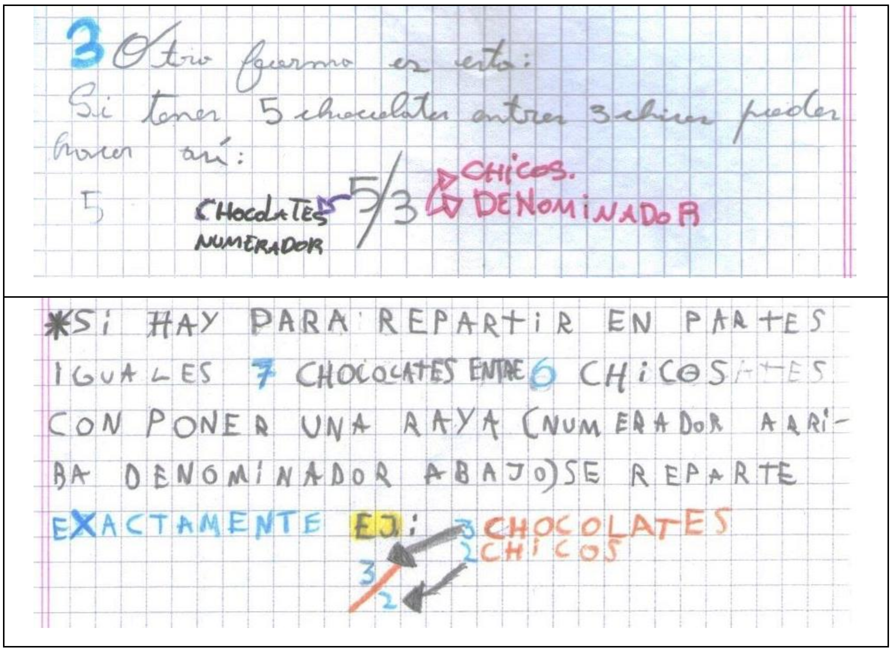


Figura 26: Detalles de “machetes” Catalina (1) y de Luca.

Podría pensarse que esta diversidad de maneras de expresar el procedimiento obedece a que la escritura del afiche resultó bastante extensa, “Si sabés la cantidad de veces entre las que tenés que repartir y la cantidad que tenés para repartir, después se transforma la cantidad de veces en el denominador y lo que tenés que repartir en el numerador”, y varios niños encontraron maneras más cortas y sencillas de explicarlo con un ejemplo.

b.3) Finalmente, resulta llamativo que muy pocos niños consideran los procedimientos gráficos. Del grupo que los incluye, solo algunos copian literalmente la primera parte del afiche en la que se describe la resolución gráfica sin ejemplificar, “Dibujar lo que tenés que repartir y dividirlo por las partes en que lo tenés que repartir”, el resto de los alumnos explica estos procedimientos con sus palabras y ofrece ejemplos propios.

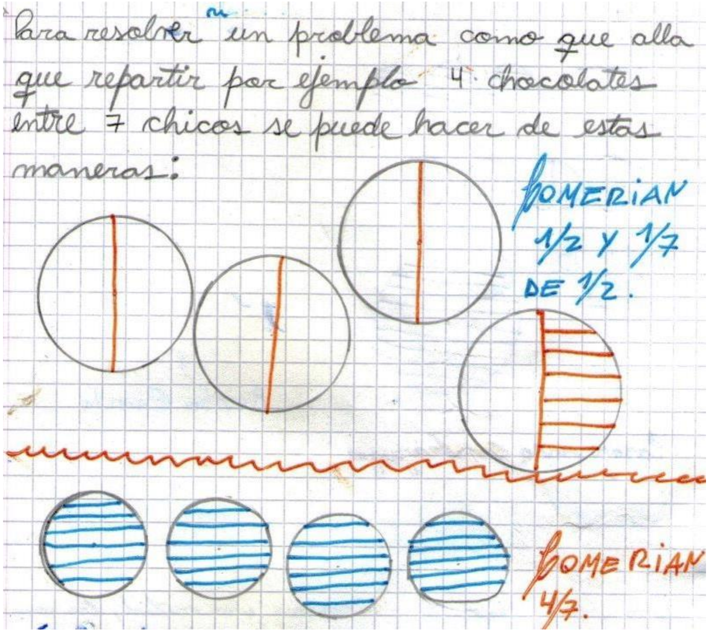


Figura 27: Detalle de “machete” de Pilar (1).

Es posible conjeturar que habiendo transitado las situaciones de toda la secuencia, la mayoría de los alumnos no necesita tener disponible en el momento de la evaluación el registro de estos procedimientos porque ya no los utiliza. Por otra parte, considerando que la elaboración del apunte para estudiar tiene el propósito de guardar memoria de aquello que puede ser necesario para resolver la evaluación pero a la vez, es una tarea escolar solicitada por la docente, cabe preguntarse si los niños que incluyen los procedimientos gráficos lo hacen para sí mismos o lo hacen para dar cuenta a la docente de haberse apropiado de este conocimiento.

c) Un aspecto interesante que encontramos es que varios niños incluyen la definición de fracción, 1/n, como aquella parte que entra n veces en el entero, aunque no esté expresada con estas palabras.

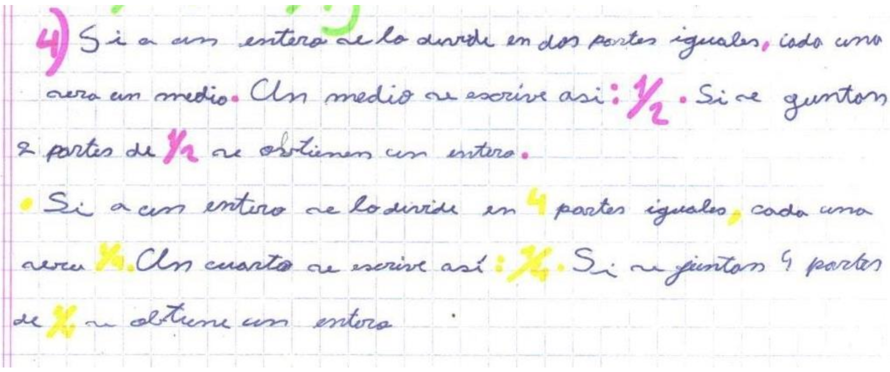


Figura 28: Detalle de “machete” de Morena (1).

La definición se puso en juego en las argumentaciones que dieron los niños para explicar la resolución de varios problemas de la secuencia, aunque no fue registrada en los afiches. Al revisar los carteles del libro de texto con información para recordar[39] algunos alumnos extrajeron esta idea e hicieron una reproducción textual. Nuevamente se pone en evidencia que se trata de una transcripción selectiva a través de la cual pueden recortar las partes del escrito que tienen sentido para ellos.

Otros niños incluyen la misma definición de fracción explicándola con sus propias palabras.

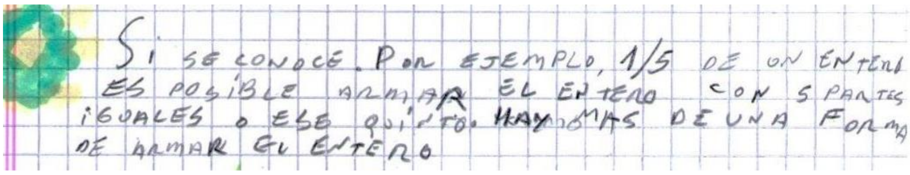


Figura 29: Detalle de "machete" de Lucas G.

d) Por último, resulta interesante resaltar la inclusión de algunas ideas originales de los alumnos que no figuran en los materiales de apoyo para elaborar sus apuntes para la evaluación. Por ejemplo, Catalina, al enumerar los procedimientos para resolver repartos afirma: "Otra forma es viendo cómo a una fracción la podés separar en otras fracciones. Ejemplo: 1 entero = ¼ + ¼ + ¼ + ¼ ó ½ + ½ y así sucesivamente."

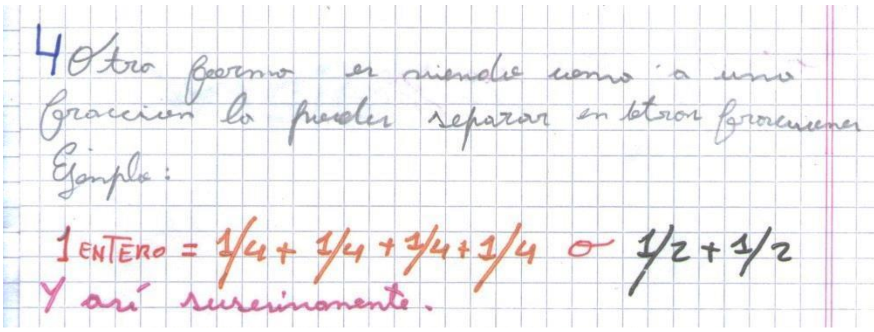


Figura 30: Detalle de "machete" de Catalina (2).

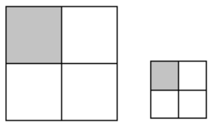
La equivalencia entre sumas de fracciones se había considerado para analizar las diferentes formas de expresar una misma cantidad en el afiche A1. Sin embargo,

[39] Broitman, C. y otros (2010). *Matemática en 5°*. Buenos Aires: Santillana (p.81)

esta alumna la propone como un modo de resolver repartos “separando” al entero en partes iguales.

Macarena (Figura 23), como fue mencionado anteriormente, especifica el uso que podría darse a las fracciones equivalentes en la comprobación de resultados: “Si tenés que resolver un problema y se tiene que verificar con otro si es lo mismo podés pasar las fracciones. Ej: ¼ = 2/8”, afirmación que no fue tomada de los materiales de consulta.

Joaquín B. (Figura 24) introduce una interesante idea que tampoco había sido discutida en ningún momento de la secuencia. Distingue entre el tamaño del chocolate y la fracción concebida como relación entre dos números: “El tamaño del chocolate no importa, las fracciones es lo mismo” e indica un cuarto en el dibujo de dos chocolates de distinto tamaño:



Otro ejemplo lo encontramos en Morena que introduce una restricción no considerada en los intercambios para resolver repartos usando la cuenta de dividir. Ella aclara que este procedimiento se utiliza para las fracciones “difíciles” y ofrece un ejemplo que supuestamente responde a este requisito.

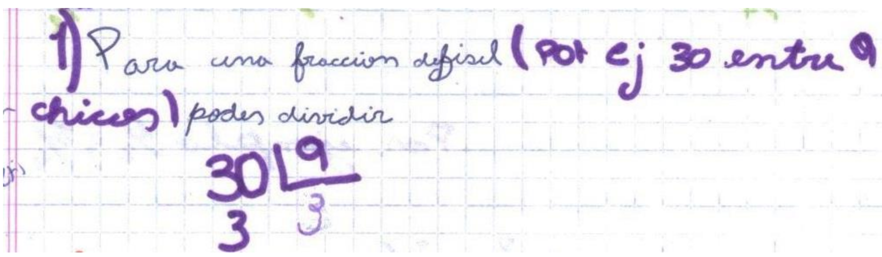


Figura 31: Detalle de “machete” de Morena (2).

El desafío que presenta la escritura para los alumnos los obliga a poner en palabras relaciones que fueron movilizadas por ellos, aunque no de manera explícita, a partir de la resolución de problemas y de los intercambios sucedidos a lo largo de la secuencia. Es posible interpretar que la textualización de estas ideas en la situación de escritura individual provocó ciertos avances conceptuales.

A continuación nos referiremos al punteo realizado en conjunto en el pizarrón con el propósito de enumerar los aspectos que “no podían faltar” en las anotaciones para la evaluación. La propuesta de elaborar este nuevo texto tenía la intención de que los niños incorporaran en una versión final lo que aún no habían considerado en la propia producción. La docente planteó una consigna en la que nuevamente explicitó algunas condiciones que daban sentido a lo que los niños debían hacer. Se trataba de que los diferentes asuntos incluidos en las notas para la evaluación circularan colectivamente con el propósito de que volvieran a enriquecer esas producciones individuales.

(C16,m9.22)
Docente: Vamos a hacer ahora entre todos un punteo de qué cosas yo no puedo no tener en cuenta al elaborar el machete, qué cosas no pueden faltar en un machete. Puede ser que lo que a alguno no se le ocurrió, se le ocurra a algún compañero.

Si bien estaba planificado que los niños dictaran a la docente a partir de las producciones individuales ya revisadas, esta escritura colectiva en el pizarrón incluyó algunas ideas nuevas y generó discusiones sobre aspectos que aún no estaban disponibles para todos los alumnos, por ejemplo, la idea de que 1/5 es el doble de 1/10.

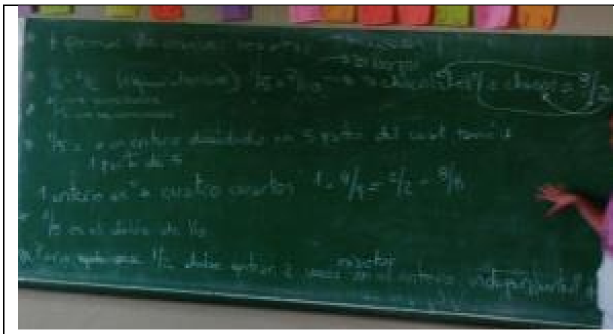
	**Transcripción de la escritura del punteo en el pizarrón:** * ≠ formas de resolver repartos →división →dibujos →3 chocolates e/2 chicos = 3/2 *1/6 = 2/12 (equivalencias) 1/5 = 2/10 →numerador *1/5→denominador *1/5 = a un entero dividido en 5 partes del cual tomé 1 1 parte de 5 1 entero es = a cuatro cuartos 1 = 4/4 = 2/2 = 8/8 *1/5 es el doble de 1/10 […]

Figura 32: Punteo realizado de manera colectiva sobre las cuestiones que “no pueden faltar” en ninguno de los “machetes” elaborados individualmente.

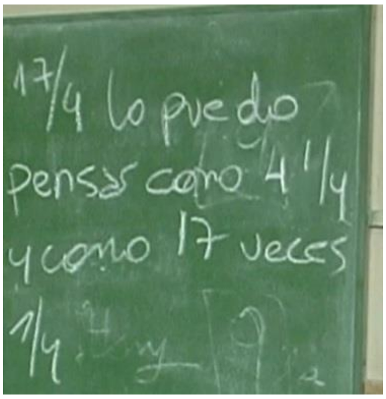


Figura 33: Punteo realizado de manera colectiva sobre las cuestiones que “no pueden faltar” en ninguno de los “machetes” elaborados individualmente (Continuación).

Otros aspectos que ya habían sido suficientemente detallados en registros realizados con anterioridad se plasmaron aquí de manera bien sintética. De este modo, el punteo sirvió para reorganizar y sintetizar las conclusiones precedentes en núcleos sustanciales del contenido en cuestión. Por ejemplo, en el primer ítem, “≠ formas de resolver repartos”, ya no era necesario especificar todas las formas gráficas de resolución. La palabra ‘dibujos’ evoca para este grupo de alumnos la diversidad de procedimientos analizados a propósito de cada uno de los problemas resueltos. O también, la palabra ‘división’ recupera la compleja trama de relaciones estudiadas entre dicha operación y los repartos. Por último, para el procedimiento que consiste en componer la fracción resultante del reparto considerando la cantidad a repartir en el numerador y la cantidad de partes entre las que se reparte en el denominador, solo necesitan consignar un ejemplo con flechas que explicitan la correspondencia.

Entre las cuestiones tenidas en cuenta en el punteo se incluyeron también las fracciones equivalentes para las que solo registraron dos ejemplos y anotaron entre paréntesis de qué concepto se trataba, ‘(equivalencias)’, sin justificar tal relación como sí lo hicieron en el afiche inicial A1. Además incluyeron los nombres de los componentes de la fracción, numerador y denominador, con flechas en un ejemplo.

Agrupar en clases a los procedimientos y denominarlos de algún modo exige una mayor profundización en los conocimientos que la que se requiere para solo listarlos. La clasificación implica análisis de las características comunes y diferentes que encuentran entre los procedimientos y, en consecuencia, cierto distanciamiento del caso particular.

Es interesante advertir que uno de los aspectos que se enumera colectivamente no había sido registrado en las conclusiones elaboradas a lo largo de la secuencia pero surgió de una idea que algunos niños habían incluido en sus producciones individuales, mencionada en el ítem c) del análisis de los contenidos de las anotaciones para el estudio. Se trata de la definición de la fracción 1/n como aquella parte que entra n veces en el entero y que es consignada aquí de manera sintética: “1/5 = a un entero dividido en 5 partes del cual tomé 1, 1 parte de 5”. A continuación los alumnos precisaron otra idea que se desprende de la anterior y que sí había sido registrada en los afiches: “1 entero es = a cuatro cuartos 1 = 4/4 = 2/2 = 8/8”.

Pareciera que la nueva producción conjunta -el punteo en el pizarrón- con el propósito de guardar memoria de la secuencia recorrida favoreció la circulación de los conocimientos que los niños habían registrado de manera individual y permitió ciertos avances en la profundidad de las ideas que quedaron plasmadas en el nuevo texto colectivo.

4.4. Conocimientos que se revisan y se transforman en situaciones de reescritura

Analizaremos dos situaciones de revisión y reescritura, la que se propone realizar entre pares y, más sucintamente, la que realizan los alumnos individualmente al elaborar la versión final de las notas para la evaluación.

La situación de revisión entre pares fue organizada por la docente intercambiando las producciones entre alumnos de las distintas mesas. En esta oportunidad también fue explícita la consigna; el alumno revisor debía agregar sugerencias por escrito en la misma hoja al final del apunte para la evaluación de su compañero y luego el autor evaluaría cuáles de ellas incorporar en su propia producción para elaborar la versión definitiva. Las indicaciones del revisor podían referirse tanto a contenidos para agregar como a aspectos de la escritura que se podrían mejorar:

(C15,m20.59)
Docente: Van a leer el machete para ver si hay alguna cosa que ustedes le sugieren al compañero que tiene que agregar, o bien hacerle alguna sugerencia respecto a cómo puso alguna idea que está en el machete. Las sugerencias van a ser por escrito. Van a poner quién revisó y las sugerencias. Nadie se va a enojar porque el machete esté escrito por otro porque es una tarea. No corresponde hacer las sugerencias en cualquier lado, debo poner debajo del machete que recibí, revisó fulanito de tal…

De algún modo, al hacer estas indicaciones la docente anuncia a los niños que las producciones propias son provisorias y enfatiza la potencia de las interacciones entre los niños para la mejora del propio escrito, asumiendo a priori que habrá una construcción social del conocimiento. Observamos que esta condición es tomada por los niños ya que, en su mayoría, las sugerencias están redactadas con verbo en segunda persona del singular, por ejemplo, “Yo Luca te sugiero que te puede ayudar lo del numerador y denominador” o “Lo único en la forma en la división es que explican que es cada cosa. Después, Joa la verdad no tengo nada para decir estuvo perfecto, rebien lo entendí todo. Buen trabajo”, interpelando así directamente al autor. Solo algunas que parecen más indicativas están redactadas con verbo en infinitivo, por ejemplo, “Poner que también se puede hacer con la división aunque sea lo mismo que repartir. Poner ejemplos (más). Explicaciones. Cuentas”. Otras directamente mencionan el contenido dando por supuesto que eso es lo que se debe agregar, “Un entero es igual a 1=4/4=2/2=8/8”.

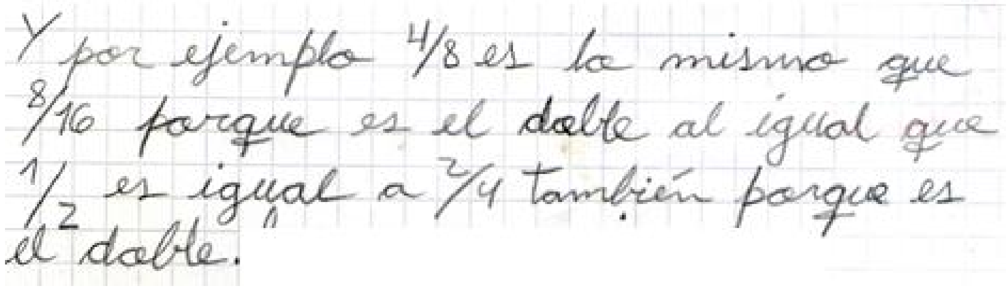
En el análisis de las revisiones[40] encontramos diferentes focos en las preocupaciones de los niños: algunas apuntan a que se agregue algún contenido puntual a los incluidos en el apunte para la evaluación, otras proponen mejorar la escritura involucrando aspectos conceptuales y otras, menos frecuentes, se centran en señalamientos de tipo gráfico.

Las propuestas de agregar contenidos se presentan con una frecuencia similar a las propuestas de mejorar la escritura. En general las sugerencias de inclusión de contenidos puntuales son pertinentes dado que refieren a aspectos que efectivamente no habían sido considerados por los autores y, además, suelen ser tenidas en cuenta por ellos al elaborar la versión definitiva. Algunos ejemplos son: “Para mí estaría bueno también que pongas que por ej: 3/6 es lo mismo que 6/12 porque es el doble”, “Para mí te faltaría poner lo de la rayita”, “Te falta agregar en la división esto. Si hay resto en una cuenta el resto se transforma en numerador y el divisor en denominador”. Las sugerencias de agregar contenidos que no indican a cuáles se refieren, por ejemplo: “Agregá más cosas” o “…muchas cosas habría que poner”, no son tenidas en cuenta por los autores al elaborar la versión final. Posiblemente esto obedezca a que dada la falta de precisión de la indicación, los niños no saben qué otro aspecto –además de los que ellos ya consideraron importantes- podrían incluir en la producción.

Algunas sugerencias que están vinculadas a la mejora de la escritura involucran aspectos conceptuales y señalan errores encontrados por los revisores en las versiones iniciales de las notas para el estudio. Por ejemplo, Pilar había escrito en su primera versión: “Y por ejemplo 4/8 es lo mismo que 8/16 porque es el doble al igual que ½ es igual a 2/4 también porque es el doble”. Al revisar, Camila escribe: “Para mí está mal que pongas que es el doble porque si es el doble no es lo mismo, aumenta el doble el numerador y el denominador”, haciendo clara referencia al error cometido por su par al justificar por qué las fracciones mencionadas eran equivalentes. En la versión definitiva, Pilar intenta tomar la sugerencia de su revisora y vuelve a escribir sobre fracciones equivalentes eliminando del texto la confusión de ser simultáneamente “lo mismo” y “el doble”: “Si yo tengo por ejemplo 1/6 igual que 2/12 al igual que 1/8 es igual 2/16 etc.”.

[40] Es necesario aclarar que los alumnos escribieron esta última versión como tarea en sus casas y dado que no todos la entregaron en la clase siguiente, no contamos con el corpus de información completo para analizar.

Versión inicial


Y por ejemplo 4/8 es lo mismo que 8/16 porque es el doble al igual que 1/2 es igual a 2/4 también porque es el doble.

Versión final

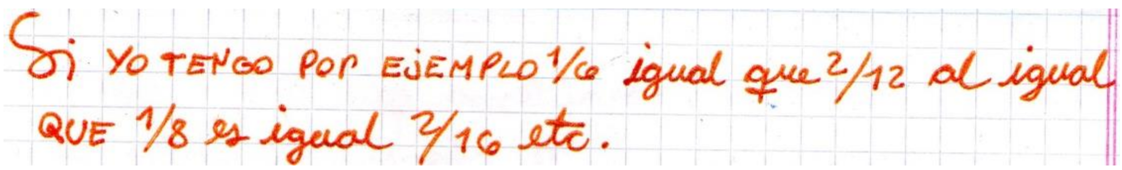
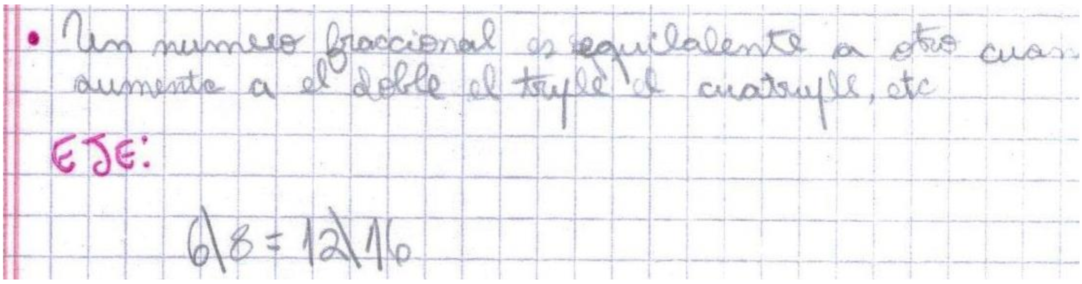

Si YO TENGO POR EJEMPLO 1/6 igual que 2/12 al igual QUE 1/8 es igual 2/16 etc.

Figura 34: Detalles de versión inicial y versión final del "machete" de Pilar (2).

Sobre el mismo contenido encontramos una corrección similar entre pares. Julieta había escrito en el primer ítem de su versión inicial: "Un número fraccional (sic) es equivalente a otro cuando aumenta a el doble el triple el cuatruple (sic), etc. Eje: 6/8 = 12/16". Frente a esta definición, su revisor, Luca, escribe: "En el primer punto no se multiplica se reparte en más partes". Podría interpretarse que Luca estaba advirtiendo que no era correcto afirmar que el número fraccionario completo se multiplica obteniendo el doble, el triple, el cuádruple, etcétera. Sin embargo, al intentar escribir sus indicaciones como revisor, no logra formular este señalamiento de manera correcta dado que, si bien es adecuado afirmar que si se multiplica el denominador se obtienen más partes, es necesario agregar que el numerador se multiplica por el mismo número para sostener la equivalencia. Para escribir la versión definitiva del apunte para estudiar, Julieta tomó la decisión de dejar el texto explicativo como estaba en la versión inicial, conservando el error conceptual, e intentar ser más clara en los ejemplos, por eso sustituyó el ejemplo original por: "Eje: ½ = 2/4 acá aumento al doble; ½ = 4/8 al cuatruple".

Versión inicial



Versión final

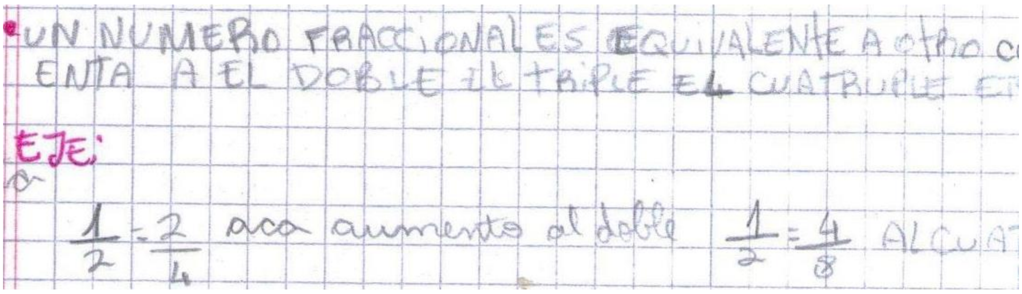


Figura 35: Detalles de versión inicial y versión final del “machete” de Julieta (1).

Algunas revisiones que también tienen la intención de que el autor mejore la escritura plantean que los textos deben ser más claros o explicativos e incluir ejemplos o dibujos. Por ejemplo, Sofía L., al revisar la producción de Marcos que era bastante sintética pero contundente, propone sin dar especificaciones sobre a qué contenido se refiere: “[…] explicar más claro y más cosas más dibujo, te faltan explicar muchas cosas”. En este caso Marcos no entregó la versión definitiva; es probable que, dado el grado de generalidad de la propuesta de la revisora, no haya sabido qué modificación hacer y haya entregado directamente la primera versión. En cambio Valentino, al revisar la producción de Sofía L., da indicaciones particulares sobre qué aspectos deben explicarse mejor: “Explicá un poco mejor lo de la división, explicá qué es cada número”. En este segundo caso la autora consideró pertinente la sugerencia y copió los significados de los números de la cuenta de dividir que habían sido registrados en el afiche A2.

La revisión de Fabricio sobre el apunte para la evaluación de Valentino también se enfoca en la claridad de la producción y da varias sugerencias específicas entre las que recuerda cuál es el propósito del escrito: “Cuando pusiste (dibujaste) los chocolates podrías haber aclarado, o sea poner por ejemplo 1 y 2 en las partes del chocolate y a los nenes. Podrías haber aclarado todo, no todo tan junto, y capaz que para un examen sería mejor poner menos aclaraciones y más formas de hacerlo [se refiere a formas de resolver repartos]”. En otro fragmento de la revisión, Fabricio hace una corrección referida al modo de expresar el significado del divisor en la cuenta de dividir: “También en la división que pusiste: ‘los objetos o seres vivos' para mí es 'las partes en que tengo que repartir´". Se trata de propuestas de modificación bien concretas que no podemos analizar si fueron incorporadas por el autor porque no contamos con la versión definitiva.

Otra sugerencia interesante es la de Juan C. al revisar la producción de Valentina: él se centra en algo que había sido objeto de discusión en las clases, el grado de generalidad de las formulaciones. Si bien la producción inicial de Valentina contenía formulaciones bastante generales, en su mayoría copiadas de los afiches, Juan C. propone: "Para mí, Valen, te estás especificando en un problema en especial. Tendrías que poner una idea en general, pero lo demás está bien". La autora no considera la sugerencia del revisor en su versión definitiva del registro de notas para el estudio y transcribe textualmente la versión inicial. Podríamos conjeturar que por las mismas razones que Marcos, los términos generales en que se enuncia la propuesta del revisor, no es posible para Valentina introducir modificaciones en su producción.

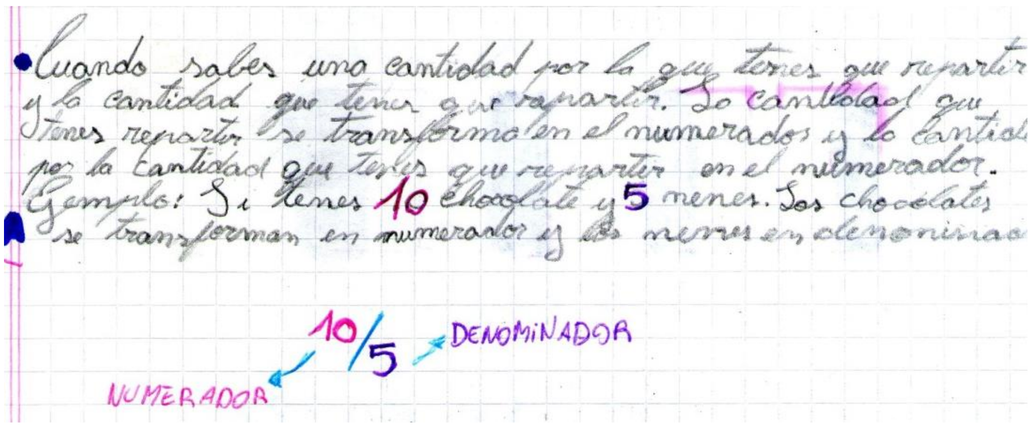
Por último, encontramos una sola revisión que se centra en algunos detalles de tipo gráfico de la escritura. Macarena advierte que la producción de Morena incluye una marca gráfica que no es clara e indica el modo en que debe expresarse una fracción: "No se entiende lo que dice 5L en violeta. Donde dice: 'Si a un entero se lo divide en 4 partes iguales, cada una será ¼. Un cuarto se escribe así: ¼'. [Saca una flecha del primer un cuarto y escribe] Esto tiene que estar en letra". Morena incorpora en su versión final, realizada en procesador de textos Word, la modificación particular sugerida por la revisora.

Si bien no contamos con todas las producciones finales de los apuntes para la evaluación, pareciera que los niños tienden a incorporar con mayor frecuencia las modificaciones sobre la escritura que el revisor propone de forma más específica y suelen no considerar las sugerencias de mejora formuladas de manera general. Por otra parte, es posible conjeturar que algunas producciones que son más sintéticas se apoyan en conocimientos aún no disponibles en el revisor y este sugiere mayores aclaraciones o ejemplos que no son considerados necesarios por el autor, poniéndose así en evidencia la diferencia en los niveles de conceptualización de ambos alumnos.

Es posible inferir que en esta situación de revisión se necesita un esfuerzo importante por parte de los alumnos revisores para interpretar lo que está escrito en la producción individual de su compañero, luego ponerlo en relación con todos los contenidos que ellos mismos aprendieron en el recorrido de la secuencia e identificar cuáles de estos son los que están ausentes en el escrito revisado para poder sugerir su inclusión. Del mismo modo, encontrar errores conceptuales en la producción del par y ponerlos en palabras para proponer su corrección requiere de la explicitación y cierta reorganización de los conocimientos del revisor. Por su parte, el autor del apunte para el estudio debe interpretar la sugerencia del compañero para decidir si considera pertinente la inclusión o corrección conceptual, en qué lugar de la versión definitiva es conveniente escribirlo y de qué modo lograr que guarde coherencia con la producción propia.

Independientemente de las sugerencias derivadas de la situación de revisión entre pares, al elaborar la versión final del registro de notas para la evaluación cada autor revisa su propia escritura y toma decisiones respecto de qué contenidos volver a incluir, cómo reescribirlos, cuáles descartar y cuáles modificar. Algunos niños hacen una copia textual de la versión inicial y a lo sumo agregan los ítems del punteo realizado colectivamente en el pizarrón, pero la mayoría de ellos introduce alguna modificación que mejora la escritura. Por ejemplo, Camila corrige errores de redacción en el siguiente fragmento:

Versión inicial



Versión final

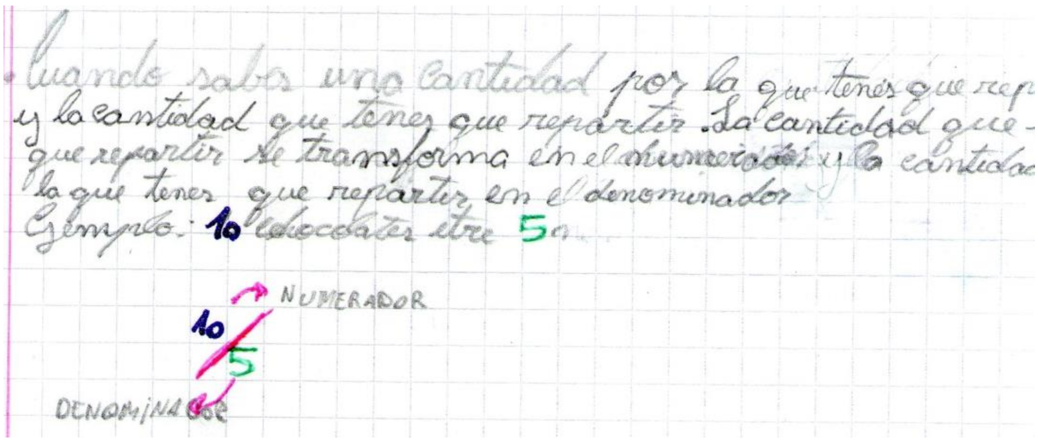
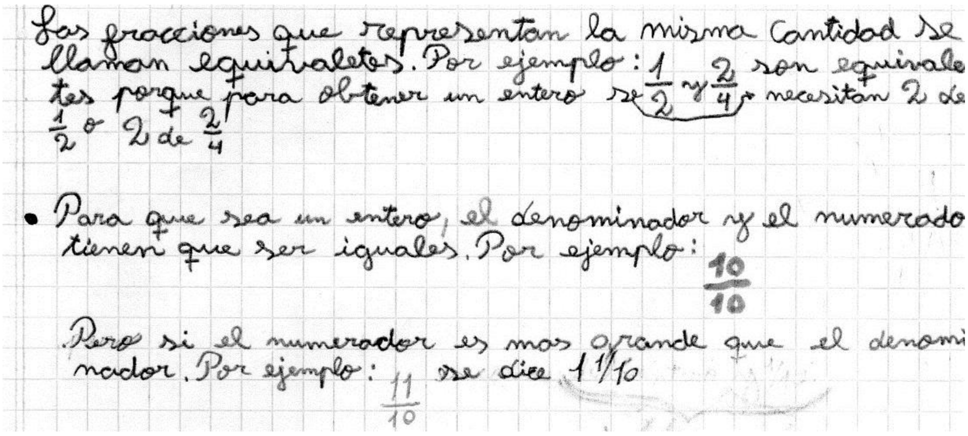


Figura 36: Detalles de versión inicial y versión final del “machete” de Camila.

Joaquín R. descarta algunas palabras de las descripciones o explicaciones haciéndolas más simples, también agrega dibujos y ejemplos propios dando cuenta del dominio que ha logrado de los conceptos en juego.

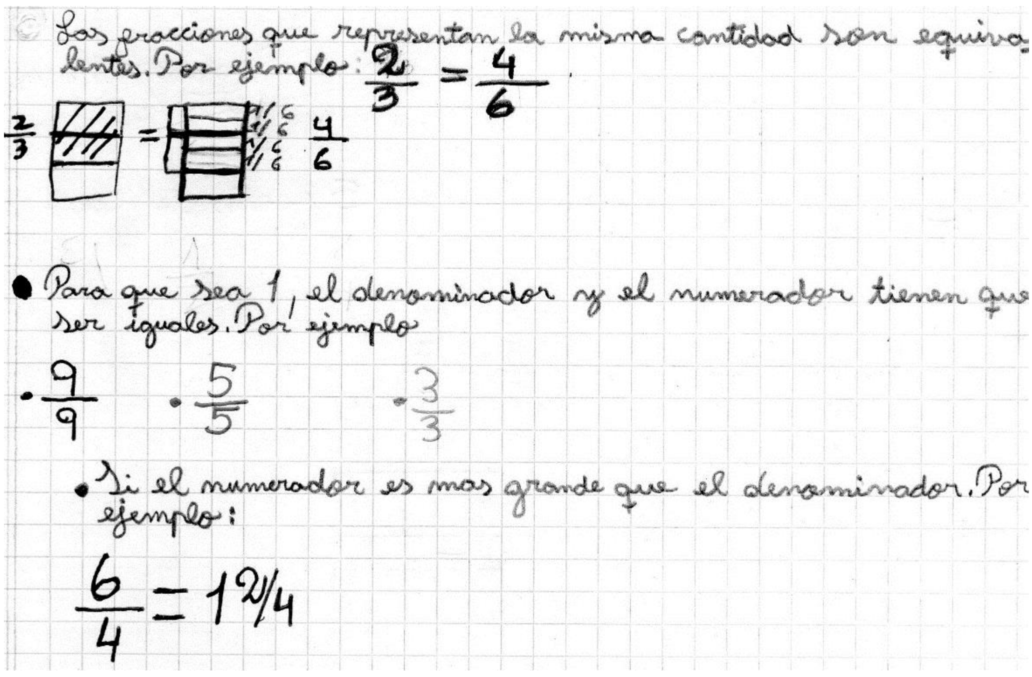
Versión inicial


Las fracciones que representan la misma cantidad se llaman equivaletes. Por ejemplo: $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son equivale tes porque para obtener un entero se $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ necesitan 2 de $\frac{1}{2}$ o 2 de $\frac{2}{4}$

• Para que sea un entero, el denominador y el numerado tienen que ser iguales. Por ejemplo: $\frac{10}{10}$

Pero si el numerador es mas grande que el denomi nador. Por ejemplo: $\frac{11}{10}$ se dice $1\,^{1}/_{10}$

Versión final


Los fracciones que representan la misma cantidad son equiva lentes. Por ejemplo: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

$\frac{2}{3}$ = 1/6 1/6 1/6 1/6 $\frac{4}{6}$

• Para que sea 1, el denominador y el numerador tienen que ser iguales. Por ejemplo

• $\frac{9}{9}$ • $\frac{5}{5}$ • $\frac{3}{3}$

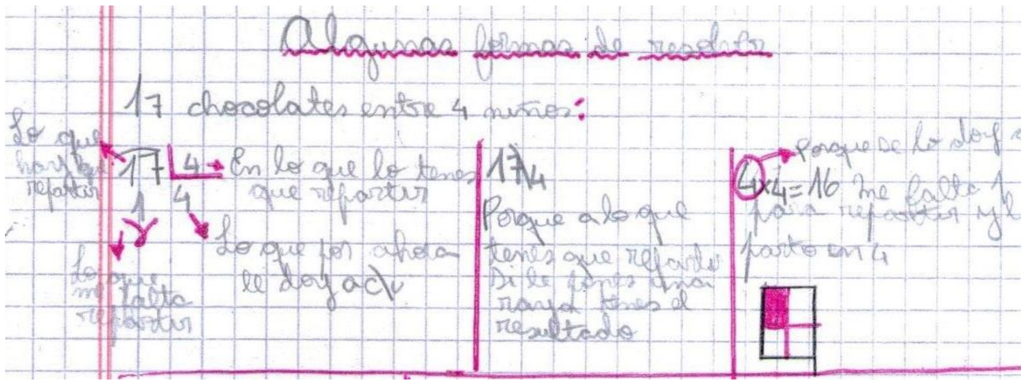
• Si el numerador es mas grande que el denominador. Por ejemplo:

$\frac{6}{4} = 1\,^{2}/_{4}$

Figura 37: Detalles de versión inicial y versión final del “machete” de Joaquín R.

Otros niños realizan modificaciones que suponen la reorganización de algunas ideas. Por ejemplo, Julieta escribe en la versión inicial “Algunas formas de resolver” y en diferentes cuadros expone resoluciones de repartos sin agruparlas de ningún modo. En la versión final distingue modos de resolver “haciendo cuentas” y allí incluye la división y la multiplicación. Separadamente describe procedimientos apoyados en dibujos y por último, como “otra forma de resolver fracciones", explica con un ejemplo que la cantidad a repartir corresponde al numerador y la cantidad de partes entre las que se reparte al denominador.

Versión inicial



Versión final

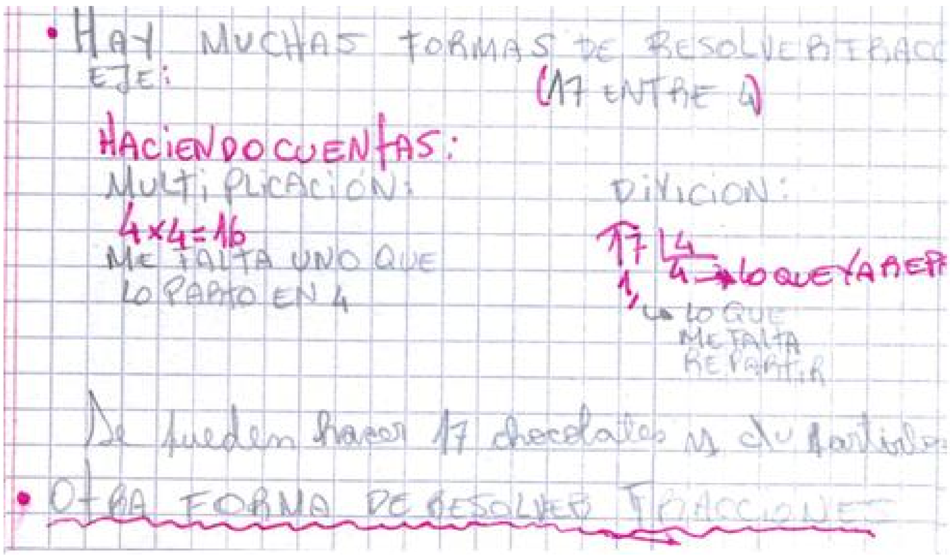


Figura 38: Detalles de versión inicial y versión final del "machete" de Julieta (2).

Es posible aseverar que a través de la revisión y de la reescritura que los niños realizan sobre sus propios textos, ellos intentan mejorar la redacción de manera autónoma y también logran ampliar y explicitar con mayor claridad sus conocimientos. El esfuerzo invertido en esta tarea promueve la profundización y ciertos avances en la conceptualización de las ideas allí desarrolladas.

Síntesis de algunos aspectos que se revisan y se reescriben en las notas individuales para la evaluación

	Autor	Revisor	Sugerencia (en palabras de los alumnos)	Inclusión de sugerencia del revisor en versión definitiva del "machete" / Modificaciones más importantes en relación con primera versión
1	Albertina	Lucas G.	"Arreglar. En vez de hacer un punteo, podrías poner las explicaciones de donde sacaste la información".	Toma sugerencias del revisor, aclara entre paréntesis "(lo saqué del machete anterior)", "(lo saqué del pizarrón)"
2	Antonio	Valentina	[No escribió]	Escasos cambios. Mejora algo la escritura y algunos errores.
3	Camila	Pilar	"Para mí estaría bueno también que pongas que por ej: 3/6 es lo mismo que 6/12 porque es el doble".	No toma sugerencias de la revisora. Mejora los textos.
4	Catalina	Martina	"No tengo ninguna sugerencia".	[No entregó]
5	Emilia	Natalí	"Emi, cuando decís que 'si es mayor es menor' podrías decir que si el numerador es mayor pero en fracción (número) es menor". [Pareciera que al escribir 'numerador', Natalí quiere significar denominador]	No toma sugerencias de la revisora. La versión definitiva es mucho más breve que la inicial.
6	Fabricio	Luciana	"Si hay resto en una cuenta el resto se transforma en numerador y el divisor en denominador".	Toma sugerencia de la revisora, agrega lo indicado. También agrega dibujos como ejemplos y agrega 'conclusión'
7	Joaquín B.	Lucas S.	"Lo único en la forma en la división es que explican que es cada cosa. Después, Joa la verdad no tengo nada para decir estuvo perfecto, rebien lo entendí todo. Buen trabajo".	Toma sugerencia del revisor, reescribe los componentes de la cuenta de dividir con mayor grado de generalidad. También reescribe otros fragmentos.
8	Joaquín R.	Yael	[No escribió]	Modifica escritura. Agrega dibujos y ejemplos.
9	Juan C.	Valentina	"Poner que también se puede hacer con la división aunque sea lo mismo que repartir. Poner ejemplos (más). Explicaciones. Cuentas".	[Realizado en procesador de textos Word. Pareciera que tuvo ayuda de un adulto] Toma sugerencias de la revisora, pone títulos en los modos de resolver, agrega explicaciones y ejemplos. Mejora la escritura
10	Juan M.	Victoria	"Podés poner que se puede hacer una multiplicación. Hay muchas formas de representar fracciones. Como podés representar ½".	[No entregó]
11	Julieta	Luca	"En el primer punto no se multiplica se reparte en más partes". [Se refiere a explicación de fracciones equivalentes en la que Julieta menciona dobles, triples, etc.]	Toma sugerencia del revisor, agrega aclaración con ejemplo. Reorganiza escritura.
12	Luca	Catalina	"Yo Luca te sugiero que te puede ayudar lo del numerador y denominador".	Escasos cambios. Mejora algo la escritura.
13	Lucas G.	Morena	"Poner los ejemplos. En el 1- punto poner	[No entregó]

			1 o 2 ejemplos. En el 2- punto explicar qué es el 4”.	
14	Lucas S.	Joaquín B.	“Yo pondría por ejemplo 1/3=2/6 o sea 1/6+1/6=1/3 pero está muy bien”.	Toma sugerencia del revisor, la agrega en el fragmento sobre fracciones equivalentes. Agrega el punteo colectivo. El resto sin cambios.
15	Luciana	(no entregó primera versión)	---	---
16	Macarena	Albertina	“Una sugerencia sería poner de los numeradores y denominadores. Ej 1/5” [con flechas indicando numerador y denominador]	Escasos cambios. Agrega punteo del pizarrón que incluye sugerencia de la revisora.
17	Marcos	Sofía L.	“Agregar más cosas y explicar más claro y más cosas más dibujo, te faltan explicar muchas cosas habría que poner”.	[No entregó]
18	Martina	Marcos	“Para mí te faltaría poner lo de la rayita”.	Escasos cambios. Agrega punteo del pizarrón que incluye sugerencia del revisor.
19	Morena	Macarena	“No se entiende lo que dice 5L en violeta.” “Donde dice: ‘Si a un entero se lo divide en 4 partes iguales, cada una será ¼. Un cuarto se escribe así: ¼’. [Saca flecha del primer un cuarto y escribe:] Esto tiene que estar en letra.” “En el 3 DE RESTA: Sí pero tenés que saber la cuenta porque algunas veces no se puede.” “Agregá más cosas”.	[Realizado en procesador de textos Word] Toma algunas sugerencias de la revisora.
20	Natalí	Emilia	“No entiendo el 6-6=0 y después está bien. Después me pareció poner una manera de repartir cuando sirve y cuando NO”.	[No entregó]
21	Pilar	Camila	“Para mí está mal que pongas que es el doble porque si es el doble no es lo mismo, aumenta el doble el numerador y el denominador.[…]otra cosa es que podés saber una fragción [sic] así 10 entre 5, 10/5 [con flechas indicando numerador y denominador] ponelo”.	Toma algunas sugerencias de la revisora, agrega un contenido indicado y cambia los ejemplos en el error que ella marca. Mejora la escritura.
22	Ramiro	Sofía O.	“Que cuando pusiste [fragmento equivalencias] tenías que poner que fracción era 6/8, 12/16, 24/32”.	Toma una sugerencia de la revisora, agrega un ejemplo para aclarar. El resto sin cambios.
23	Rodrigo	Juan M.	“Te falta agregar en la división esto. Si hay resto en una cuenta el resto se transforma en numerador y el divisor en denominador”.	[No entregó]
24	Sofía L.	Valentino	“Explicá un poco mejor lo de la división, explicá qué es cada número”.	Sin cambios
25	Sofía O.	Ramiro	[No escribió]	[No entregó]
26	Valentina	Juan C.	“Para mí, Valen, te estás especificando en un problema en especial. Tendrías que poner una idea en general, pero lo demás está bien”.	Sin cambios

27	Valentino	Fabricio	"Cuando pusiste (dibujaste) los chocolates podrías haber aclarado, o sea poner por ejemplo 1 y 2 en las partes del chocolate y a los nenes. Podrías haber aclarado todo, no todo tan junto, y capaz que para un examen sería mejor poner menos aclaraciones y más formas de hacerlo. También en la división que pusiste: 'los objetos o seres vivos' para mí es 'las partes en que tengo que repartir'. El resto de la división, también, se transforma en numerador. En divisor, también se transforma en denominador".	[No entregó]
28	Victoria	Rodrigo	[No escribió]	[No entregó]
29	Yael	Joaquín R.	"Un entero es igual a 1=4/4=2/2=8/8"	[No entregó]

En este capítulo hemos intentado comunicar cómo se transformaron los conocimientos matemáticos de los alumnos en las situaciones de escritura ligadas al proceso de institucionalización en una secuencia de problemas de reparto, de qué modo ellos retornan al propio escrito para reutilizar sus ideas en nuevos problemas o para agregar conocimientos que no habían sido incluidos en conclusiones anteriores, cómo sucede el pasaje de los escritos individuales a las producciones colectivas y qué conocimientos se revisan y se transforman en las situaciones de reescritura.

Pasemos ahora a las palabras finales sobre este trabajo.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este estudio hemos diseñado e implementado una secuencia de enseñanza de los números racionales en la que se intercalaron situaciones de escritura para explicitar, sistematizar y reorganizar lo aprendido. Nos interesaba comprender cómo se transformaban los conocimientos matemáticos de los niños en esas escrituras, individuales, en parejas o colectivas realizadas en el marco del proceso de institucionalización. A continuación pondremos en diálogo las preguntas iniciales con los datos que fuimos construyendo e interpretando en el desarrollo y posterior análisis de la secuencia. Seguidamente reflexionaremos sobre las posibles contribuciones a futuras investigaciones, así como sobre los interrogantes que quedan abiertos al concluir esta indagación y, por último, esbozaremos algunos aportes que este trabajo podría ofrecer a las aulas del nivel primario.

5.1. SÍNTESIS DE LOS DATOS EN DIÁLOGO CON LAS PREGUNTAS INICIALES

Para indagar cómo se transforman los conocimientos matemáticos en las situaciones de escritura colectiva confrontamos las formulaciones orales que realizaron los alumnos durante el intercambio sobre los problemas ya resueltos con las que realizaron durante la composición escrita. Para que fuera posible analizar cómo habían variado estas formulaciones fue necesario distinguir aquellos asuntos que habían sido tratados en ambos momentos de aquellos que habían sido tratados solo en la puesta en común o solo en la situación de escritura colaborativa.

En primer lugar, encontramos que en las situaciones de escritura de conclusiones, los alumnos mostraron cierta tendencia al uso de formulaciones más generales y descontextualizadas que las utilizadas en las discusiones sobre los problemas. Si bien en diferentes oportunidades a lo largo de la secuencia, el uso de formulaciones con algún grado de generalidad fue “traccionado” por la docente que proponía a los niños escribir ideas que les sirvieran para varias situaciones, consideramos que fue el propósito del escrito el que los convocó a producir numerosos enunciados que no remitían al contexto del problema. El intento por componer un texto en colaboración que incluyera las ideas aprendidas hizo posible cierta profundización en las reflexiones y el establecimiento de algunas nuevas razones o relaciones matemáticas que propiciaron avances en los conocimientos respecto de los que circulaban en la puesta en común de los problemas.

Una tensión que encontramos referida a este tipo de formulaciones sobre las que la docente maniobró en la gestión de los intercambios se vincula con el hecho de que escribir para guardar memoria de lo aprendido tiene sentido si se trata de ideas matemáticas o procedimientos de resolución que trascienden los pocos casos que los alumnos analizan en los problemas que resuelven. Sin embargo, el salto en la exigencia de precisión que implican las formulaciones escritas respecto de las que plantean las formulaciones orales ubica a los niños frente a la necesidad de dar argumentos o de demostrar por qué una idea es válida siempre o por qué lo es en ciertos casos. A esta altura de la escolaridad, en reiteradas oportunidades, ellos no cuentan con los recursos suficientes para demostrar matemáticamente la validez de una idea o procedimiento y se ven obligados a volver a la comprobación empírica que los aleja de la generalidad. Sobrevolando esta tensión, la docente intervino para que los niños inicien un camino hacia los enunciados generales, propuso que los expliquen, que den razones y que argumenten a favor de ellos, sin esperar que logren elaborar una demostración acabada de su validez.

En algunas situaciones de escritura, las intervenciones que los niños realizaron al describir diferentes procedimientos de resolución recuperaron relaciones discutidas en la puesta en común del problema pero las formularon de manera sintética, en un nivel mayor de abstracción, y las usaron para hacer agrupamientos o una clasificación de los modos de hallar soluciones, o bien, para poner límites a un modo de resolver analizado y establecer su dominio de validez, desplegando así prácticas matemáticas próximas a la modelización de diferentes tipos de problemas.

La organización espacial de la producción colectiva también puede haber generado la necesidad de incluir ideas en el escrito no consideradas en la puesta en común de la resolución del problema. Por ejemplo, la inclusión de la cuenta de dividir con flechas en las que se definiría cada uno de sus componentes exigió a los niños ser precisos en la caracterización de cada uno de ellos para que la información quedara completa. De este modo la situación de escritura provocó intercambios acerca de aspectos que no habían sido objeto de discusión en la puesta en común y produjo un avance significativo en los conocimientos de los niños.

No obstante, encontramos también situaciones en las que las ideas que los niños incluyeron en la escritura colectiva tenían menor nivel de profundidad que las que formularon en el momento del intercambio sobre el problema. Si bien en esta investigación partimos del supuesto de que la escritura propicia la transformación de conocimientos, coincidimos con otros estudios sobre escrituras al servicio del aprendizaje de contenidos escolares (Aisenberg, 2012; Perelman, 2008) que afirman que las producciones escritas no siempre viabilizan el acceso a los conocimientos de los alumnos en forma completa. Nos permitimos conjeturar que en ciertas ocasiones la preocupación por el proceso redaccional los descentra del contenido que intentan incluir en el texto. Incluso pudimos documentar que, para algunos niños, continuar el dictado de una oración iniciada por un compañero intentando sostener su coherencia revistió una complejidad particular, aun habiendo expresado un momento antes en forma oral el contenido a incluir.

Otro aspecto que nos parece importante subrayar es la preocupación que mostraron los niños en algunos momentos por el modo de escribir. Si bien los textos que produjeron consistían en escrituras intermedias (Chabanne y Bucheton, 2002), cuyo propósito era facilitar el propio estudio, los tenían a ellos mismos como destinatarios y solo serían publicados en el aula, ellos propusieron hacer pequeños ajustes en la escritura que les permitieron profundizar en la conceptualización. Por ejemplo, podemos hipotetizar que la tendencia a homogeneizar los verbos en su forma impersonal resultó un efecto de compartir el conocimiento y hacerlo público en la comunidad del aula. De esta manera iniciaron un proceso de despersonalización (Chevallard, 1997), necesario para distanciarse del saber que estaban produciendo y reorganizarlo de una manera cada vez más explícita y objetiva. Los conocimientos que los niños pusieron en circulación con el fin de hacer más preciso el sentido del texto que estaban escribiendo contribuyeron a profundizar la comprensión del contenido involucrado.

Resaltamos también que los avances suscitados a través de estas prácticas de escritura tuvieron lugar bajo ciertas condiciones didácticas (Lerner, 1996) sostenidas por la docente. Por ejemplo, si bien no todas las propuestas de los niños pudieron ser incluidas en la producción colectiva, ella habilitó la palabra para que se expusieran y las hizo circular permanentemente para que fueran consensuadas por todos. O intervino en ocasiones proponiendo a los alumnos que se representen a sí mismos como futuros lectores del texto que estaban escribiendo y se pregunten si les habían quedado conceptos implícitos que sería necesario desarrollar para comprender su contenido. De esta manera provocó que los niños consideren la necesidad de incluir información o ejemplos para aclarar conceptos que no parecían haber sido suficientemente definidos.

Un aspecto no previsto con el que nos encontramos en la implementación de la secuencia fue el modo en que las decisiones que tomaba la docente durante la situación de dictado incidían sobre el proceso de validación tanto de los conocimientos matemáticos como de las formas de expresarlo que usaban los alumnos. Entre la diversidad de textos intentados (Camps et al., 2007) que proponían los niños, la docente iba seleccionando los más avanzados en términos de relaciones matemáticas involucradas, o enunciados de manera más general, o los que más se aproximaban a lo que se esperaba que produjeran, para textualizar en el escrito colectivo. Haber anticipado este modo de validar surgido en las clases nos hubiera permitido prever intervenciones del docente que tuvieran el propósito de tematizar las diferencias entre las propuestas de los niños con la intención de que la validación se produjera a partir del análisis colectivo de las mismas. Sin duda, en futuros estudios, el atravesamiento de la validación de los conocimientos matemáticos en la textualización del docente podrá ser tenido en cuenta con mayor detalle y profundidad para que las decisiones no queden implícitas y mejorar así las condiciones de producción.

En esta investigación también nos interrogamos acerca de los propósitos con los que era posible promover el retorno sobre las conclusiones colectivas y sobre las escrituras realizadas en la carpeta del alumno en forma individual. Teníamos un interés particular en averiguar si los niños podían retornar al propio escrito de manera autónoma o si lo hacían solo bajo la indicación de la docente. Por último nos preguntábamos qué tipo de informaciones recuperaban los alumnos de estas producciones escritas para ser reutilizadas en problemas diferentes a los ya resueltos, o bien, para agregar nuevas conclusiones colectivas que no se hubieran incluido con anterioridad.

Al indagar sobre el retorno al propio escrito para consultar información que sirviera a los alumnos para resolver problemas nuevos, propusimos situaciones en las que la docente explicitaba que podían usar las conclusiones escritas y otras situaciones en las que los afiches estaban disponibles pero la docente no hacía indicaciones respecto de la posibilidad de leer la información registrada con el propósito de indagar si los consultaban autónomamente. Encontramos que en ninguno de los dos casos los niños leían el cartel pero sí, en un diálogo posterior a la resolución, reconocieron haber usado las conclusiones allí desplegadas porque las recordaban sin necesidad de leerlas. Lo que los niños manifestaban haber reutilizado del cartel de conclusiones en la resolución de los nuevos problemas eran, en general, los procedimientos más avanzados o más económicos. No tenemos elementos suficientes para asegurar si lo que recordaban eran las ideas que usaron en la resolución de los problemas y se discutieron en la puesta en común, o bien, si eran las ideas que se intercambiaron y registraron en la situación de escritura. Si se tratara de este último caso, se constata una vez más que lo sustancial de la escritura no estaría en la producción final sino en las interacciones, en las revisiones, en el potencial epistémico de "estar escribiendo" (Lerner, Aisenberg y Espinoza, 2012).

Sobre las relecturas de las conclusiones para recordar lo ya escrito y decidir si se sumaban o no las ideas a las que los niños arribaron en otras instancias de resolución, examinamos los aspectos que se iban modificando o agregando en los sucesivos retornos sobre las producciones escritas. Encontramos nuevamente que los alumnos no tenían necesidad de volver a leer los carteles para decidir si ya estaba incluida alguna nueva idea porque recordaban su contenido, aun en los casos en que la escritura se había realizado varias clases antes. Aquí el problema del alcance de las formulaciones volvió a hacerse presente; la situación resultó ser una nueva oportunidad para discutir el grado de generalidad o de descontextualización que tenían los enunciados que decidían agregar. Se evidenció una tendencia, en varias ocasiones propiciada por la docente, a incluir aquellas formulaciones válidas para diferentes situaciones y no solo para el caso del problema analizado. Una vez acordado que iban a incluir cierta información, la preocupación principal giró en torno a la forma en que debería enunciarse para poder ser inserta de manera coherente en lo que ya estaba escrito en el afiche.

Para analizar los conocimientos que se incluían en las escrituras de conclusiones colectivas en relación con los que se incluían en las escrituras de conclusiones individuales, se propuso un conjunto de situaciones que tenían la intención de sistematizar el trabajo realizado a lo largo de la secuencia. Los niños produjeron individualmente dos versiones de notas o apuntes -con una revisión intermedia entre pares- que tenían el propósito de guardar memoria de los contenidos trabajados para tenerlos disponibles en una futura evaluación. Para hacerlo se apoyaron en los textos que habían sido elaborados por ellos mismos de manera colectiva. En estas producciones individuales examinamos cómo se manifestaba una de las tensiones utilizadas por Lerner, Larramendy y Benchimol (2010) en su estudio sobre las escrituras en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de contenidos históricos: la tensión entre transcripción y construcción del conocimiento. El análisis nos condujo a diferenciar grados de distanciamiento en relación con las producciones colectivas entre los que distinguimos tres grupos.

En primer lugar, encontramos algunos alumnos que seleccionaban fragmentos pertinentes de los afiches disponibles en la clase y los copiaban de manera casi textual. Estos niños no necesariamente mostraron un bajo nivel de apropiación de los contenidos; las intervenciones que varios de ellos habían realizado en las diferentes situaciones de la secuencia y los resultados que obtuvieron en la evaluación final permitían inferir el alto grado de comprensión que habían logrado sobre los conceptos en juego. Es posible interpretar que al haber participado activamente como autores de las conclusiones colectivas, varios de estos alumnos comprendían muy bien el sentido de ciertos fragmentos y decidieron transcribir en sus producciones individuales los que mejor explicaban algunos conceptos. Las autoras mencionadas reconocen que la transcripción puede resultar una copia literal de los textos fuente que los niños toman como referencia y combinarse con una reapropiación del contenido en el proceso de producción del nuevo texto. En segundo lugar, otros alumnos combinaban la transcripción textual de fragmentos con la reelaboración de algunas ideas y la introducción de ejemplos propios. Consideramos que inventar casos similares a los propuestos en los afiches colectivos pero utilizando números diferentes implica un avance en términos de apropiación de conocimientos matemáticos, dado que estos niños están partiendo de una idea general y proponiendo casos que cumplan la misma condición. Por último, pudimos documentar que varios alumnos reelaboraban las escrituras colectivas e incluían sus ideas y ejemplos originales. La reelaboración podía incluir ideas que no habían sido discutidas en las puestas en común o no estaban escritas en los afiches, ejemplos propios de problemas completos para explicar algún procedimiento, las mismas ideas de los carteles escritas con sus propias palabras, o bien, dar función comunicativa al texto -por ejemplo, hacer recomendaciones al lector sobre los casos en que era conveniente utilizar cierto procedimiento o usar los verbos en segunda persona-, entre otros.

También nos detuvimos en los contenidos que los niños seleccionaban para incluir en las anotaciones individuales para la prueba. Una primera cuestión a señalar es que este escrito tenía el propósito de guardar memoria de aquello que podría ser necesario para resolver la evaluación pero, a la vez, no dejaba de ser una tarea escolar solicitada por la docente. Es por eso que no tenemos elementos suficientes para distinguir si los niños incluían ciertas ideas o procedimientos para sí mismos o para dar cuenta a la docente de haberse apropiado de ese conocimiento.

Todos los alumnos incluyeron, por ejemplo, el procedimiento para obtener fracciones equivalentes. Posiblemente esto obedezca a que hacían una valoración de la técnica que ya dominaban y querían dejar constancia de este conocimiento frente a la docente, aunque no necesitaran tenerla disponible al momento de resolver los problemas de la evaluación porque ya la recordaban. También incluyeron de manera recurrente los diferentes modos de resolver repartos que fue el asunto al que se le dedicaron más clases en la secuencia implementada. Entre ellos, la cuenta de dividir con la explicación del significado de cada uno de sus componentes no faltó en ninguna de las producciones. Tal vez esto se deba a la potencia de esa representación para mostrar sintéticamente las relaciones entre el reparto y el resultado con sus partes entera y fraccionaria. Otro procedimiento que estuvo presente en la gran mayoría de los apuntes individuales fue el que vincula la cantidad a repartir con el numerador de la fracción resultante y la cantidad de partes entre las que esta cantidad se reparte con el denominador de la fracción. En este caso no predominaron las copias textuales sino que los niños lo expresaron de diversas maneras, posiblemente porque la escritura de este procedimiento en el afiche resultó sumamente extensa y ellos encontraron maneras más cortas y sencillas de explicarlo con un ejemplo. Una cuestión llamativa fue que muy pocos niños consideraron los procedimientos gráficos para incluir en sus notas. En este caso, es posible conjeturar que habiendo transitado las situaciones de toda la secuencia, predominó el criterio de no incluirlos porque ya no los utilizaban para resolver repartos y no necesitaban tenerlos disponibles en el momento de la evaluación. Por último, los alumnos incluyeron ideas en sus notas que no estaban en los afiches de producción colectiva. Es el caso de la definición de fracción -1/n, como aquella parte que entra n veces en el entero- que se puso en juego en las discusiones sobre los problemas de reparto aunque no fue incluida en las conclusiones colectivas. Muchos niños copiaron esta definición del libro de texto, uno de los materiales de consulta, poniéndose en evidencia una vez más el uso de la transcripción de manera selectiva que les permitió recortar las partes del escrito con sentido para ellos. O también el caso de la distinción entre el tamaño de lo que se reparte y la fracción concebida como relación entre dos números, idea que no estaba escrita en ninguno de los materiales de consulta. Resulta claro que el desafío que presentó la escritura para estos alumnos los obligó a poner en palabras relaciones que fueron movilizadas por ellos, aunque de manera implícita, a partir de la resolución de problemas y de los intercambios sucedidos a lo largo de la secuencia. Es posible interpretar que la textualización de estas ideas en la situación de escritura individual provocó la necesidad de explicitarlas y, en consecuencia, propició ciertos avances conceptuales.

Por último, después de realizar las escrituras individuales, se propuso elaborar un punteo en conjunto en el pizarrón con el propósito de enumerar los aspectos que no podían estar ausentes en las anotaciones para la evaluación. Esta nueva escritura no se restringió a una sumatoria de ideas elaboradas de manera individual, sino que fue una nueva oportunidad para incluir nuevas ideas y generó discusiones sobre aspectos de las fracciones que no estaban disponibles para todos los alumnos. Además, encontramos que algunos aspectos que ya habían sido suficientemente detallados en registros realizados con anterioridad se plasmaron aquí de manera bien sintética. De este modo, el punteo sirvió para reorganizar y sintetizar las conclusiones precedentes en núcleos sustanciales del contenido en cuestión. Por ejemplo, en uno de los ítems de este punteo escribieron solo la palabra 'división' recuperando así la compleja trama de relaciones estudiadas entre dicha operación y los repartos, o en otro ítem escribieron solo el término 'dibujos', evocando toda la diversidad de procedimientos gráficos analizados a lo largo de la secuencia. Consideramos que agrupar en clases a los procedimientos y denominarlos de algún modo exige una mayor profundización en los conocimientos que la que se requiere para describirlos. Esta nueva producción conjunta favoreció la circulación de las ideas registradas en las anotaciones individuales y promovió un enriquecimiento de los conocimientos que quedaron plasmados en el nuevo texto colectivo.

Finalmente, en las situaciones de revisión de textos producidos individualmente o en forma colectiva para volver a escribirlos indagamos cuáles fueron los conocimientos que se revisaron y los que se transformaron en las situaciones de reescritura. Analizamos dos situaciones de revisión y reescritura, la que se propuso realizar entre pares y, más sucintamente, la que realizaron los alumnos individualmente al elaborar la versión final de las notas para la evaluación.

La situación de revisión entre pares fue organizada por la docente intercambiando las producciones entre los niños. El alumno revisor agregó sugerencias por escrito en la misma hoja al final de las anotaciones de su compañero y luego el autor evaluó cuáles de ellas incorporar en su propia producción para elaborar la versión definitiva. En el análisis de las revisiones encontramos diferentes focos en las preocupaciones de los niños: algunas apuntaban a que se agregara algún contenido puntual a los incluidos en el registro de notas para el estudio, otras proponían mejorar la escritura involucrando aspectos conceptuales y otras, menos frecuentes, se centraban solo en señalamientos de tipo gráfico.

Las propuestas de agregar contenidos se presentaron con una frecuencia similar a las propuestas de hacer modificaciones en el escrito. En general las sugerencias de inclusión de contenidos puntuales fueron pertinentes dado que referían a aspectos que efectivamente no habían sido considerados por los autores y, además, fueron tenidas en cuenta por ellos al elaborar la versión definitiva. Aquellas sugerencias que proponían agregar contenidos pero no indicaban a cuáles se referían, no fueron tenidas en cuenta por los autores. Posiblemente esto obedezca a que, dada la falta de precisión de la indicación, los niños no pudieron encontrar otro aspecto –además de los ya considerados- para incluir en la producción.

Las sugerencias vinculadas a la mejora de la escritura que involucraban aspectos conceptuales fueron diversas. Algunas señalaban errores particulares encontrados por los revisores en las versiones iniciales de los apuntes para la evaluación y otras, planteaban que los textos debían ser más claros o explicativos e incluir ejemplos o dibujos. En este último caso, no daban especificaciones sobre cuáles eran los conceptos que necesitaban una explicación más profunda o que requerían ofrecer más ejemplos para ser más claros. Si bien no contamos con todas las producciones finales de las notas para estudiar, pareciera que los niños tienden a incorporar con mayor frecuencia las modificaciones sobre la escritura sugeridas por el revisor de forma más específica y suelen no considerar las propuestas de mejora formuladas de manera general. Por otra parte, entendemos que en las sugerencias que hacen los revisores referidas a la claridad de la producción o a la incorporación de ejemplos o dibujos se pone en juego la diferencia en el nivel de conceptualización entre el autor y el revisor. Puede suceder que una producción sintética se apoye en conocimientos que el revisor aún no tiene disponibles y este proponga entonces incluir aclaraciones o ampliaciones que no son aceptadas por el autor por no considerarlas pertinentes o necesarias.

Es posible inferir que en esta situación de revisión se necesita un esfuerzo importante por parte de los alumnos revisores para interpretar lo que está escrito en la producción individual de su compañero, luego ponerlo en relación con todos los contenidos que ellos mismos aprendieron en el recorrido de la secuencia e identificar cuáles de estos son los que están ausentes en el escrito revisado para poder sugerir su inclusión. Del mismo modo, encontrar errores conceptuales en la producción del par y ponerlos en palabras para proponer su corrección requiere de la explicitación y cierta reorganización de los conocimientos del revisor. Por su parte, el autor del apunte debe interpretar la sugerencia del compañero para decidir si considera pertinente la inclusión o corrección conceptual, en qué lugar de la versión definitiva es conveniente escribirlo y de qué modo lograr que guarde coherencia con la producción propia.

La segunda situación de revisión y reescritura que examinamos es la que realizaron los alumnos individualmente al elaborar la versión final de las anotaciones propias para la evaluación. En esta situación, cada autor revisó su escritura y tomó decisiones respecto de qué contenidos volver a incluir, cómo reescribirlos, cuáles descartar y cuáles modificar. Varios niños hicieron una copia textual de la versión inicial y en algunos casos agregaron los ítems del punteo realizado colectivamente en el pizarrón, pero la mayoría de ellos introdujo alguna modificación para mejorar la escritura. Por ejemplo, corregir errores de redacción, descartar palabras de las descripciones o explicaciones haciéndolas más simples, o agregar dibujos y ejemplos propios para que cierta idea sea más comprensible. Algunos alumnos realizaron modificaciones que suponían la reorganización de algunos conceptos. Por ejemplo, reagrupar y categorizar los diferentes modos de resolver.

Es claro que bajo las condiciones didácticas sostenidas por la docente en las situaciones de revisión y reescritura de los propios textos propuestas en la secuencia, los niños lograron mejorar la redacción de manera autónoma y pudieron ampliar y explicitar con mayor claridad sus conocimientos matemáticos, asumiendo así que sus propias producciones eran provisorias y que las interacciones con sus pares podían resultar potentes para mejorar sus escritos.

5.2. REFLEXIONES FINALES SOBRE LOS APORTES POSIBLES DE ESTE ESTUDIO

El trabajo realizado que consistió en la reconstrucción e interpretación de algunas situaciones de escritura sucedidas en el marco del proceso de institucionalización de una secuencia de enseñanza de las fracciones en un aula de 5° año de Educación Primaria nos condujo a los resultados recién expuestos que claramente se circunscriben a un caso particular. Se trata del estudio de una secuencia singular de situaciones que nos permitió ampliar nuestro conocimiento sobre los asuntos planteados como objeto de indagación, pero que a la vez, nos habilitó a formularnos preguntas acerca de qué podría tener este caso en común con otros y en qué sentido este trabajo podría contribuir a la comprensión de cuestiones más generales.

Hemos documentado en este conjunto de clases que los niños pudieron avanzar en su conceptualización sobre un objeto matemático determinado al participar en situaciones diversas de escritura que formaban parte del proceso de institucionalización y que se articulaban con la resolución de problemas que involucraban ese objeto. No estamos afirmando que el modo de organizar la propuesta de enseñanza de las fracciones, desarrollado aquí, sea el más adecuado ni el único, estamos intentando mostrar que bajo estas condiciones didácticas específicas, fue posible generar estos avances en los conocimientos de estos alumnos.

No obstante, es probable que el caso estudiado revista cierta potencia para diseñar situaciones de enseñanza que se incluyan en nuevos estudios o en diferentes propuestas didácticas. Por ejemplo, la sucesión de situaciones de resolución de problemas matemáticos, puesta en común y escritura colectiva sobre lo discutido, que se repitió en varias oportunidades a lo largo de la secuencia, puede resultar fértil para delinear otras secuencias de enseñanza de otros contenidos matemáticos en diferentes años de la escolaridad primaria, o bien, algunas de las intervenciones docentes que se registraron en situaciones de intercambio a propósito de la escritura en este estudio pueden constituir una referencia para anticipar intervenciones en otras situaciones similares. Asimismo, algunas de las cuestiones que surgieron en la implementación de las situaciones de producción, revisión o reescritura, como la inclusión de formulaciones generales en las conclusiones, fue una preocupación de este grupo particular de niños aunque nos atrevemos a suponer que este interés puede ser compartido por otros alumnos en otras situaciones porque justamente responde a una de las exigencias a la que los enfrenta la escritura. En suma, creemos que la especificidad del caso que hemos indagado puede resultar iluminadora para estudiar otros casos y abrir líneas de investigación hacia la construcción de conocimientos didácticos más generales.

Nos preguntamos en qué sentido este trabajo puede resultar un aporte a la Didáctica de la Escritura, a la Didáctica de la Matemática y a la producción codidáctica. Numerosos estudios sobre la escritura (Teberosky, 2001; Miras, 2000) y sobre la escritura al servicio de la apropiación de contenidos escolares, especialmente de ciencias naturales y ciencias sociales (Vérin, 1988, 2004; García-Debanc, 1995; Aisenberg y Lerner, 2008; Aisenberg, 2012; Lerner, Aisenberg y Espinoza, 2012, entre otros), han planteado que esta práctica está asociada a la transformación de los conocimientos y que facilita tanto el aprendizaje en estas áreas curriculares como el reconocimiento de los propios procesos de escritura. Esta investigación retoma esas ideas y muestra cómo es posible instalar condiciones didácticas en el aula para que las escrituras favorezcan, del mismo modo, el avance de los niños en sus conocimientos sobre un objeto matemático.

La Didáctica de la Matemática viene produciendo en los últimos años teorías, conceptos, materiales curriculares, que se ocupan de aspectos metacognitivos ligados al estudio, a la toma de conciencia y reflexión sobre el propio saber, así como a los distintos tipos de intervenciones didácticas que propician la explicitación, reorganización y sistematización de los conocimientos (Brousseau, 1986, 1988, 2007; Chevallard, 1991; Margolinas, 1993; Perrin-Glorian, 1995; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). El presente trabajo se inscribe en la línea de estos estudios y profundiza en el diseño de situaciones de enseñanza de objetos matemáticos que involucran además, como un componente importante, situaciones de escritura orientadas a la reconstrucción e institucionalización de los conocimientos.

Asimismo, consideramos que esta indagación puede aportar a los estudios didácticos que se ocupan de la inclusión educativa y el trabajo con la diversidad (Peltier-Barbier, 2006; Butlen, 1996; Perrin-Glorian, 1995, entre otros). En la secuencia implementada, los conocimientos matemáticos se van “amasando” y se retoman una y otra vez en las sucesivas situaciones de escritura dando así oportunidad a todos los niños para la toma de conciencia de los aprendizajes involucrados, especialmente a aquellos con menor avance en la apropiación de ese contenido. La posibilidad de retornar sobre las propias conclusiones para revisarlas y reescribirlas o de incluir en ellas aproximaciones al saber formuladas con creciente nivel de generalidad se sustenta en el reconocimiento de la provisoriedad y el largo plazo en el recorrido de los alumnos en relación con los conceptos matemáticos. Esta concepción epistemológica piagetiana (Piaget, 1970; García, 2001; Vergnaud, 1990) es punto de partida del presente trabajo y se sostiene en las instancias de documentación y análisis para dar cuenta empíricamente de un proceso de transformación colectiva de conocimientos en una génesis artificial.

Sabemos que quedan pendientes numerosas preguntas para futuras investigaciones sobre las escrituras en las clases de matemática en el marco del proceso de institucionalización que podrían ubicarse en el espacio de confluencia entre la Didáctica de la Matemática y la Didáctica de la Escritura. Por eso, se requiere de estudios codidácticos que no surjan de la combinación o sumatoria de saberes aislados de cada una de estas disciplinas sino que resulten de los aportes realizados en colaboración por estas didácticas específicas. Por ejemplo, creemos que es necesario continuar profundizando en la naturaleza de los conocimientos que se transforman en las situaciones de escritura de conclusiones en torno a objetos matemáticos diferentes al de la secuencia aquí implementada y, también, seguir indagando sobre las intervenciones docentes que podrían favorecer la reflexión más profunda sobre las relaciones entre el contenido matemático y la forma de producir estos "escritos de trabajo" (Chabanne y Bucheton, 2002).

Asimismo, somos conscientes de los aspectos que no llegamos a distinguir con claridad en este estudio por habernos centrado en el conocimiento construido de manera colectiva. Pudimos documentar algunas ideas matemáticas producidas por los niños que se hacían observables en el momento de la escritura aunque no tenemos elementos suficientes para diferenciar en todos los casos si estos avances surgieron de los intercambios a propósito de la escritura o si la situación de escritura fue una oportunidad para poner en palabras ideas que habían sido elaboradas en las instancias previas de resolución y discusión sobre los problemas matemáticos. Es por ello que creemos necesario seguir investigando la génesis de los progresos individuales de los niños y la potencia de la escritura de conclusiones en las clases de matemática para su reconstrucción y sistematización.

Para finalizar, nos interesa esbozar algunos aportes posibles de este estudio a las aulas del nivel primario. La enseñanza de la escritura como herramienta de aprendizaje de distintas disciplinas está prescripta en numerosas propuestas curriculares, aunque sabemos que no siempre está presente en las prácticas escolares y menos aún en las clases de matemática. Nos parece primordial continuar insistiendo en la necesidad de valorar la potencia de la escritura en la transformación del conocimiento matemático para que se incluyan sistemáticamente situaciones de producción, retorno y revisión en las secuencias de enseñanza del área. Además, creemos que vale la pena el esfuerzo de desnaturalizar y de intentar comprender los obstáculos que enfrentan los niños al escribir en esta disciplina particular para poder planificar y sostener condiciones de enseñanza en las que la escritura se presente como un verdadero problema por resolver y los conduzca a mejores aprendizajes.

Lograr que los alumnos se apropien de la escritura al servicio de la adquisición de conocimientos –matemáticos, entre otros- constituye un objetivo irrenunciable de la escolarización, pero difícilmente se hará posible si esta preocupación no se incluye en las diferentes instancias de formación docente y de producción curricular. Consideramos que resulta indispensable la continuidad en el trabajo con los docentes para profundizar en el estudio de la vinculación entre la escritura y los contenidos disciplinares y para implementar propuestas de enseñanza que interpelen la segmentación del saber, contemplando los conocimientos que se ponen en juego en las distintas áreas sin perder la especificidad.

Por otra parte, enfatizamos que las situaciones de escritura acerca de un contenido matemático, documentadas y analizadas aquí, parten del supuesto de que participando en ellas todos los alumnos pueden transformar sus conocimientos bajo ciertas condiciones didácticas. Es preciso que la escuela haga suyo este supuesto para poder proponer a sus alumnos situaciones de escritura incluidas en una secuencia de problemas matemáticos en las que les ofrezcan oportunidades de explicitar sus conocimientos, volver sobre ellos y reformularlos. Se haría cargo así de enseñar a estudiar contenidos matemáticos, apuntando al establecimiento de mejores relaciones con el saber y a la elaboración de un pensamiento cada vez más autónomo, al que todos los alumnos tienen derecho a acceder.

BIBLIOGRAFÍA

- ✓ Aisenberg, B. y Lerner, D. (2008). Escribir para aprender Historia. En *Lectura y Vida, Revista Latinoamericana de Lectura, 29*(3), 24-43.
- ✓ Aisenberg, B. (2012). Usos de la escritura en la enseñanza de la Historia. En *Clío & Asociados* (16), ISSN 0328-820X, UNL–UNLP, 99-105.
- ✓ Alvarado, M. y Brizuela, B. (2013). Herramientas notacionales en la solución de problemas aditivos con niños de primer año de primaria. En Broitman, C. (comp.) *Matemáticas en la escuela primaria [II]. Saberes y conocimientos de niños y docentes*. Buenos Aires: Paidós.
- ✓ Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- ✓ Artigue, M. (1986). Epistemología y Didáctica. En *Recherches en Didactique des Mathématiques,* (10). Traducido en 1993 por el PTFD Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Buenos Aires.
- ✓ Bednarz, N. (2000). *Formación continua de los docentes de matemática: una necesaria consideración del contexto*. Universidad de Quebec, Montreal. Traducción mimeografiada.
- ✓ Block, D. y Solares, D. (2001). Las fracciones y la división en la escuela primaria: Análisis didáctico de un vínculo. En *Revista Educación Matemática, 13*(2), 5–30.
- ✓ Block, D. (1987). *Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria*. Tesis de Maestría en Ciencias en la Especialidad de Educación. Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- ✓ Broitman, C. y Torres, M. (2007, septiembre). *Leer y Escribir en las clases de matemática*. Conferencia dictada en las Jornadas sobre Enseñanza de la Matemática, organizadas por 12(ntes) y la Red Latinoamericana de Alfabetización –Argentina-, Buenos Aires.
- ✓ Broitman, C. (1999). La noción de obstáculo epistemológico: un problema didáctico. Ficha de cátedra de Didáctica de la Matemática, FaHCE, UNLP. Inédito.
- ✓ Broitman, C., Itzcovich, H., Parra, C. y Sadovsky, P. (1997). *Matemática. Documento de Trabajo N° 4*. Actualización Curricular. EGB. Dirección de Curriculum. Secretaría de Educación. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- ✓ Brousseau, G. (1980) [2012a]. *Problemas de la Enseñanza de los Decimales*. Serie “B”, Trabajos de Enseñanza, N°2. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.

- ✓ Brousseau, G. (1981) [2012b]. *Problemas de Didáctica de los Decimales*. Serie “B”, Trabajos de Enseñanza, N°3. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.
- ✓ Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- ✓ Brousseau, G. (1994a, abril). *La memoria del sistema educativo y la memoria del docente*. Conferencia organizada por la Embajada de Francia en la Argentina y la Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Buenos Aires.
- ✓ Brousseau, G. (1988) [1994b]. Los diferentes roles del maestro. En Parra, C. y Saiz, I. (comps.) *Didáctica de matemáticas. Aportes y Reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.
- ✓ Brousseau, G. (1986) [1993]. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. En *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-116. Traducción de la Universidad Nacional de Córdoba.
- ✓ Brousseau G. y Centeno J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l’enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 11*(2/3), 167-210.
- ✓ Bucheton, D. y Chabanne, J.-Ch. (2002). L’activité réflexive dans les écrits intermédiaires: quels indicateurs? En *L’écrit et l’oral réflexifs*. París: P.U.F.
- ✓ Burns, M. (2004). Writing in math. En *Educational Leadership, 62*(2), 30-33.
- ✓ Butlen, D. (1996). *Dos ejemplos de situaciones de enseñanza de la matemática dirigida a alumnos con dificultades*. IUFM de Créteil. En Documentos para la formación de profesores de escuela en didáctica de la matemática, COPIRELEM tomo V, IREM Paris-VII.
- ✓ Camps, A.; Guasch, O.; Milian, M. y Ribas, T. (2007). El escrito en la oralidad: el texto intentado. Archivos de Ciencias de la Educación, 1(1). ISSN 2346-8866. Disponible en: http://www.archivosdeciencias.fahce.unlp.edu.ar
- ✓ Castedo, M. (2003). *Procesos de revisión de textos en situación didáctica de intercambio entre pares*. Tesis de Doctorado del Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- ✓ Centeno Pérez, J. (1988). *Números decimales, ¿por qué?, ¿para qué?* Madrid: Síntesis.
- ✓ Charlot, B. (1991). *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas*. Traducción en versión mimeo de la conferencia publicada en Bkouche, R.; Charlot, B.; Rouche, N.: *Faire des mathematiques: le plaisir du sens*. Paris: Armand Colin.
- ✓ Charnay, R. (1994). Aprender por medio de la resolución de problemas. En Parra, C. y Saiz, I. (comp.) *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y Reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

- Charnay, R. (1990). Del análisis de los errores en matemática a los dispositivos de remediación; algunas pistas... INRP. En *Grand N*, (48), París. Traducido en 1994 por el PTFD Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Buenos Aires.
- Chartier, A.-M. y Hébrard, J. (2000). Saber leer y escribir: unas “herramientas mentales” que tienen su historia. En *Infancia y aprendizaje,* (89), 11- 24.
- Chevallard, Y. (1991) [1997]. *La Transposición Didáctica*. Buenos Aires: Aique.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE - Horsori Editorial.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. En *La gaceta de la RSME, 9*(1), 143–168.
- DGCyE. de la Pcia. de Buenos Aires. Dirección Provincial de Educación Primaria (2008). Diseño Curricular para la Educación Primaria. Segundo Ciclo. Área Prácticas del Lenguaje.
- Etchemendy, M. y Zilberman, G. (2013). Hablar y escribir en la clase de matemática: interacciones entre alumnos y maestros. En Broitman, C. (comp.) *Matemáticas en la escuela primaria [II]. Saberes y conocimientos de niños y docentes*. Buenos Aires: Paidós.
- Ferreiro, E. (1991). La construcción de la escritura en el niño. En *Lectura y Vida, Revista Latinoamericana de Lectura, 12*(3), 30-61.
- Ferreiro, E. y Teberosky, A. (1979). *Los sistemas de escritura en el desarrollo del niño*. México: Siglo XXI.
- García, R. (2001). Epistemología: Raíz y Sentido de la obra de Piaget. En Castorina (comp.) *Desarrollos y problemas en Psicología Genética*. Buenos Aires: Eudeba.
- García-Debanc, C. y Fayol, M. (2002-2003). Des modèles psycholinguistiques du processus rédactionnel pour une didactique de la production écrite. Quelles collaborations entre psycholinguistes et didacticiens? En *Repères, recherches en didactique du français langue maternelle,* (26/27), 293-315.
- García-Debanc, C., Sanz-Lecina, E. y Margotin, M. (2001-2002). Les compétences et les difficultés d’une enseignante débutante à gérer une situation d’oral dans le cadre d’activités scientifiques: étude de cas. En *Repères, recherches en didactique du français langue maternelle,* (24/25), 201-236.
- García-Debanc, C. (1995). Interactions et construction des apprentissages dans le cadre d'une démarche scientifique. En *Repères, recherches en didactique du français langue maternelle,* (12), 79-103.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México DF: Mc Graw -Hill.
- Lemke, J. (1997). *Aprender a hablar ciencia*. Barcelona: Paidós.

- ✓ Lerner, D. (s/f). Acerca de la explicitación. Reflexiones desde la Didáctica de la Matemática. Versión Mimeografiada. Inédito.
- ✓ Lerner, D., Aisenberg, B. y Espinoza, A. (2012). La lectura y la escritura en la enseñanza de Ciencias Naturales y de Ciencias Sociales. Una investigación en didácticas específicas. En *Anuario de Investigaciones en Ciencias de la Educación*. 2010-2011, 529-541. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.
- ✓ Lerner, D., Larramendy, A. y Benchimol, K. (2010). Tensiones de la escritura en el contexto escolar. Análisis desde una investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de contenidos históricos. En Vázquez, A., Novo, M., Jakob, I. y Pelliza, L. (comps.): *Lectura, escritura y aprendizaje disciplinar*, 41-86. Compilación de trabajos presentados en las Jornadas sobre Lectura, escritura y aprendizaje disciplinar, realizadas el 9 y 10 de septiembre de 2010. Facultad de Ciencias Humanas. Universidad de Río Cuarto.
- ✓ Lerner, D., Lorente, E., Lotito, L., Levy, H., Lobello, S., Natali, N. y Zenobi, C. (1996). *Lengua Documento de trabajo N°2*. Actualización Curricular. EGB. Primer ciclo. Dirección de Curriculum. Secretaría de Educación. Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires.
- ✓ Margolinas C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage. Versión traducida y mimeografiada.
- ✓ Martí, E. (2005). Las primeras funciones de las notaciones numéricas. Una mirada evolutiva. En Alvarado, M. y Brizuela, B. (Comp.) *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia*. México: Paidós Mexicana.
- ✓ Miras, M. (2000). La escritura reflexiva. Aprender a escribir y aprender acerca de lo que se escribe. En *Infancia y aprendizaje,* (89), 65-80.
- ✓ Morillo, M.J. (2010). La escritura autónoma de conclusiones en el área de matemática. En *La enseñanza de las prácticas del lenguaje.* Buenos Aires: 12ntes.
- ✓ Olson, D. (1995). La cultura escrita como actividad metalingüística. En Olson, D. y Torrance, N. *Cultura escrita y oralidad*. Barcelona: Gedisa.
- ✓ Peltier-Barbier, M. (2006). *Comment les professeurs enseignants les mathématiques a des élèves des milieux socialement défavorisés résolvent-ils la contradiction entre réussite immédiate et apprentissage?* Documento de DIDIREM, Université de Paris 7, IUFM de l'Académie de Rouen. Traducción mimeografiada.
- ✓ Perelman, F. (2008). *El resumen sobre el papel. Condiciones didácticas y construcción de conocimientos.* Buenos Aires*:* Miño y Dávila.
- ✓ Perrin-Glorian, M-J. (1995). *Condicionamientos de Funcionamiento de los docentes en el colegio secundario: lo que nos enseña el estudio de "cursos flojos"*. Ficha mimeografiada

entregada en el Seminario de Didáctica de la Matemática de la autora, Facultad de Ciencias Exactas, UBA.

- Piaget, J. (1970) [1992]. *Psicología y epistemología*. Buenos Aires: Emecé.
- Pontecorvo, C. (2002). Las prácticas de alfabetización escolar: ¿es aún válido el "hablar bien para escribir bien"? En Ferreiro, E. (comp.) *Relaciones de (in)dependencia entre oralidad y escritura*. Barcelona: Gedisa.
- Pugalee, D. K. (2001). Writing, Mathematics, and Metacognition: Looking for Connections Through Students' Work in Mathematical Problem Solving. En *School Science and Mathematics, 101*(5), 236-45.
- Pugalee, D. K. (2005). Writing to develop mathematical understanding. En *Newport.* MA: Christopher Gordon Publishers.
- Quaranta, M. E. y Wolman, S. (2000). Procedimientos numéricos de resolución de problemas aditivos y multiplicativos: relaciones entre aspectos psicológicos y didácticos. En *Revista del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, (16), 50-57.
- Rockwell, E. (2009). *La experiencia etnográfica. Historia y Cultura en los procesos educativos*. Buenos Aires: Paidós.
- Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En Alagia, H., Bressan, A. y Sadovsky, P. *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Sadovsky, P. y Sessa, C. (2005). La Conformación de una Comunidad Matemática en un Proceso de Formación de Maestros: un Ejemplo Privilegiado para Conocer Complejidades Acerca de la Clase de Matemática. En *Yupana*, (2), 11-24, Santa Fe, Universidad Nacional del Litoral.
- Sadovsky, P., Sessa, C., Napp, C. y Novembre, A. (2000). *La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar Matemática*. Serie: Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio. Documento curricular de la Secretaría de Educación del GCBA.
- Sardá Jorge, A. y Sanmartí Puig, N. (2000). Enseñar a argumentar científicamente: un reto de las clases de ciencias. En *Enseñanza de las ciencias, 18*(3), 405- 422.
- Sessa, C. y Giuliani, D. (2008). Mirar la historia de la matemática para pensar en el aprendizaje y la enseñanza. En Broitman, C. (comp.) *12(ntes) Enseñar matemática Nivel Inicial y Primaria n°4*, 17-40. ISBN 978-987-23626-7-6. Buenos Aires: 12(ntes).
- Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos* (4a ed.). Madrid: Ediciones Morata.
- Teberosky, A. (2007). El texto académico. En Castelló, M. (coord.), Miras, M., Solé, I., Teberosky, A., Iñesta, A. y Zanotto, M. En *Escribir y comunicarse en contextos científicos y académicos. Conocimientos y estrategias*. Barcelona: Graó.

- ✓ Teberosky, A. (2001). Las prácticas de escritura desde un enfoque constructivista. En Castorina, J.: *Desarrollos y problemas en psicología genética*. Buenos Aires: Eudeba.
- ✓ Teberosky, A. y Fabbretti, D. (1993). Escribir en voz alta. En *Cuadernos de Pedagogía*, N° 216, 54-57.
- ✓ Vérin, A. (2004). Los lenguajes en la organización de la clase de Ciencias. En Belmonte Gómez, J.M. y otros: *Los lenguajes de las ciencias.* Serie: Aulas de Verano. ISFP. Ministerio de Educación, cultura y deporte. España.
- ✓ Vérin, A. (1988). Apprendre à écrire pour apprendre les sciences. En *Aster, recherches en didactique des sciences expérimentales*, (6), 15-46.
- ✓ Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. En *Recherches en didactique des Mathématiques, 10*(2/3), 133-170. Traducción mimeografiada.
- ✓ Wolman, S. (2010). La escritura en los procedimientos de resolución de problemas de suma y resta: un proceso constructivo. En *Revista del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación*. Año XVII, (28), Facultad de Filosofía y Letras. Buenos Aires.
- ✓ Yin, R. (2001). *Estudo de caso: planejamento e métodos* (2da ed.). Porto Alegre: Bookman.