



## Un modelo fractal para estimar la permeabilidad a partir de la porosidad

M. Soldi<sup>1,2</sup>, L. Guarracino<sup>1,2,3</sup>, y D. Jougnot<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, UNLP. [msoldi@fcaglp.unlp.edu.ar](mailto:msoldi@fcaglp.unlp.edu.ar)

<sup>2</sup> Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Argentina.

<sup>3</sup> Facultad de Ciencias Naturales y Museo, UNLP.

<sup>4</sup> CNRS, Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS, EPHE, UMR 7619 METIS, Paris, Francia.

### Resumen

*En este trabajo se presenta un modelo fractal para estimar la permeabilidad de una roca en función de su porosidad. El modelo asume que el medio poroso se puede representar mediante un conjunto de tubos capilares constrictivos con una distribución fractal de tamaño de poro. La relación obtenida es una ley de potencias que depende de tres parámetros independientes con significado físico o geométrico. Cabe resaltar que el exponente de la relación propuesta depende de la dimensión fractal y resulta siempre mayor a 3. En el caso límite de un exponente igual a 3, la relación propuesta es similar al modelo semi-empírico de Kozeny-Carman (KC). El modelo fractal se validó con datos experimentales de la literatura obteniéndose un buen ajuste para distintas texturas de suelo. La comparación con datos experimentales muestra que la relación propuesta predice mejor los valores de permeabilidad que la ecuación de KC para todo el rango de magnitudes.*

**Palabras clave:** permeabilidad, Kozeny-Carman, distribución fractal.

### Introducción

El estudio de las propiedades hidráulicas del flujo en medios porosos resulta de interés para diversas disciplinas como, por ejemplo: hidrología, química ambiental, ingeniería de suelos y de reservorios. La permeabilidad es una de las propiedades hidráulicas más importantes en la descripción del flujo ya que se encuentra directamente relacionada con el campo de velocidades del fluido. Desafortunadamente su medición tanto en laboratorio como en campo resulta compleja y costosa. Es por ello que la permeabilidad suele estimarse a partir de la porosidad utilizando distintas fórmulas empíricas y semi-empíricas. Uno de los modelos más utilizados para obtener la permeabilidad en función de la porosidad es la conocida ecuación de Kozeny-Carman (KC) (Kozeny, 1927; Carman, 1937) que propone una ley de potencia entre ambos parámetros.

En este trabajo se deriva una expresión analítica cerrada utilizando un modelo fractal simple, que permite estimar la permeabilidad en función de la porosidad. La relación propuesta se validó con datos experimentales de la literatura obteniéndose un buen ajuste para diferentes texturas de suelo. Además, se encontró que bajo condiciones simplificadas la relación propuesta es similar a la ecuación de KC pero

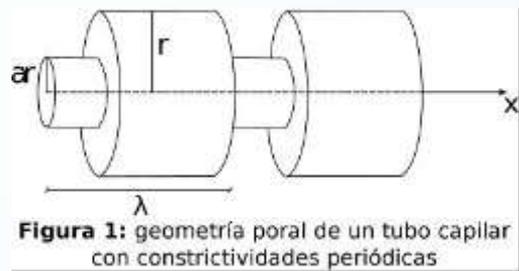
predice mejor los valores de permeabilidad para todo el rango de valores de porosidad.

### Materiales y métodos

El medio poroso se representa por un conjunto de tubos capilares constrictivos. Cada poro se conceptualiza como un tubo cilíndrico de radio  $r$  y longitud  $L$  con constrictividades periódicas representadas por un segmento del tubo con un radio menor, como se muestra en la Figura 1. Asumiendo que la geometría del poro tiene una longitud de onda  $\lambda$  y que el tubo contiene un número entero  $N$  de longitudes de onda, el radio del poro puede describirse como:

$$r(x) = \begin{cases} ar & \text{si } x \in [0 + 2\pi n, \lambda c + 2\pi n] \\ r & \text{si } x \in [\lambda c + 2\pi n, \lambda + 2\pi n] \end{cases} \quad (1)$$

siendo  $a$  ( $0 \leq a \leq 1$ ), y  $c$  ( $0 \leq c \leq 1$ ) parámetros geométricos que definen la constrictividad, y  $n = 0, 1, \dots, N-1$ .



Bajo las hipótesis anteriores, el volumen de un tubo puede calcularse mediante la integración de las áreas transversales del mismo:

$$V_p(r) = \int_0^L \pi r^2(x) dx = N \left[ \int_0^{\lambda c} \pi r^2 dx + \int_{\lambda c}^{\lambda} \pi (ar)^2 dx \right] = L \pi r^2 (a^2 c + 1 - c). \quad (2)$$

Por otra parte, la permeabilidad del tubo  $k_p(r)$  se obtiene a partir de (Reis y Acock, 1994):

$$k_p(r) = \left[ \frac{1}{L} \int_0^L \frac{8}{r^2(x)} dx \right]^{-1} = \frac{r^2}{8 [c + a^2(1-c)]} \quad (3)$$

donde  $r^2/8$  es la permeabilidad de un tubo recto de radio  $r$ .

Para derivar el modelo de  $k(\phi)$  se considera un volumen representativo elemental (REV) de medio poroso conceptualizado por un cilindro de radio  $R$  y longitud  $L$ . La porosidad del REV se representa por un conjunto de tubos como los descritos anteriormente con una distribución fractal. Además, se considera que el radio de los poros varía entre un valor mínimo  $r_{min}$  y un valor máximo  $r_{max}$ .

El número total de poros del REV con radio mayor a  $r$ , se asume que obedece la siguiente ley (e.g. Yu y otros, 2003):

$$N(r) = \left( \frac{r}{R} \right)^{-D} \quad (4)$$

donde  $D$  ( $1 < D < 2$ ) es la dimensión fractal. El número de poros cuyo tamaño se encuentra en el rango  $(r, r+dr)$  se obtiene diferenciando la Ec. 4:



$$dN(r) = -DR^D r^{-D-1} dr. \quad (5)$$

La porosidad  $\phi$  del REV está dada por la contribución de todos los tubos:

$$\phi = \frac{\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} V_p(r) dN(r)}{\pi R^2 L} = \frac{DR^D}{R^{(2-D)(2-D)}} (a^2 c + 1 - c) [r_{\max}^{2-D} - r_{\min}^{2-D}]. \quad (6)$$

Para obtener la permeabilidad a escala del REV, se calcula el flujo volumétrico a partir de las contribuciones de cada uno de los poros (escala microscópica). Por otro lado, el flujo volumétrico se lo puede calcular a partir de la ley de Darcy (escala macroscópica). Mediante la comparación de ambas expresiones es posible obtener la siguiente fórmula para la permeabilidad  $k$ :

$$k = \frac{a^2}{8[c+a^2(1-c)]} \frac{D}{R^{(2-D)(4-D)}} [r_{\max}^{4-D} - r_{\min}^{4-D}]. \quad (7)$$

Para la mayoría de los medios porosos se observa que  $r_{\min}/r_{\max} \approx 10^{-2}$  (Yu y otros, 2003), lo que permite asumir que  $r_{\min} \ll r_{\max}$ . Bajo esta hipótesis, las Ecs. 6 y 7 pueden combinarse en una única relación que permite estimar  $k$  a partir de  $\phi$ :

$$k(\phi) = C \phi^{\left(\frac{4-D}{2-D}\right)}. \quad (8)$$

Donde

$$C = \frac{a^2}{8[c+a^2(1-c)]} \frac{DR^2}{(4-D)} \left[ \frac{2-D}{D(a^2 c + 1 - c)} \right]^{\left(\frac{4-D}{2-D}\right)}. \quad (9)$$

El exponente de la porosidad en la Ec. 8 es siempre mayor a 3, y en el caso límite de un exponente cúbico es similar a la ecuación de KC.

También resulta interesante notar que los factores que controlan la constrictividad ( $a$  y  $c$ ) producen distintos cambios en  $\phi$  y  $k$  (Ecs. 6 y 7). Estos parámetros permiten obtener medios con alta porosidad y baja permeabilidad. Este tipo de suelos no puede representarse correctamente con modelos de tubos rectos ni con la ecuación de KC.

## Resultados y discusión

En esta sección se realizará un ajuste de la relación propuesta (Ec. 8) y la ecuación de KC con datos experimentales correspondientes a distintas texturas de suelo. Para ello se seleccionaron 4 series de datos de Luffel y otros (1991), Hirst y otros (2001) y, Chilindar (1964).

Para cada textura se ajustaron los parámetros de la Ec. 8 a partir de los datos experimentales por medio del método de búsqueda exhaustiva. El error medio cuadrático (RMSD) se calcula considerando el logaritmo de las permeabilidades debido al amplio rango de variación de esta variable. En la Tabla 1 se listan los parámetros ( $C$  y  $D$ ) y los RMSD de ambos modelos. Resulta importante destacar que el RMSD de la relación propuesta es menor que el que se obtiene para la ecuación de KC para todos los casos. En la Figura 2 se muestran los ajustes obtenidos donde

puede observarse que la relación propuesta logra predecir los valores medidos de permeabilidad para un rango de 4 a 10 órdenes de magnitud.

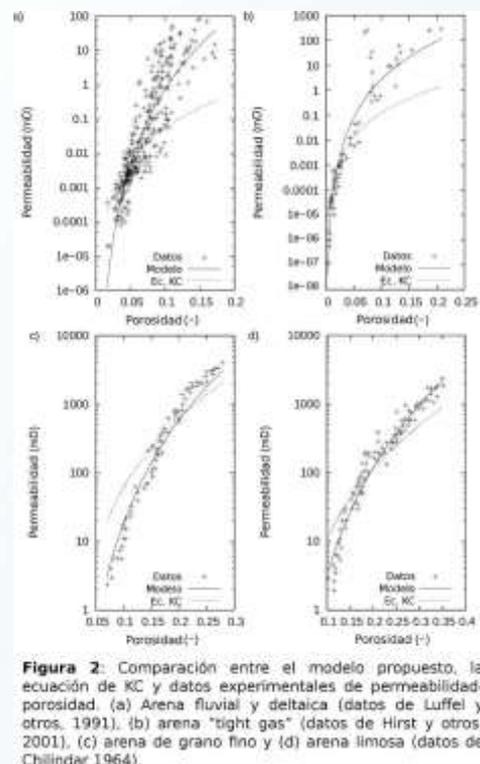
**Tabla 1.** Valores de los parámetros ajustados ( $D$  y  $C$ ) y los RMSD.

Textura de suelo	$D$	$C$ [mD]	RMSD (Ec. 8) [log (mD)]	RMSD KC [log (mD)]
Arena fluvial y deltaica	1.68	$1.336 \times 10^7$	1.1386	1.3856
Arena "tight gas"	1.512	$3.452 \times 10^5$	1.1894	1.3942
Arena de grano fino	1.498	$1.797 \times 10^6$	0.5988	0.8910
Arena limosa	1.524	$5.1 \times 10^5$	0.5478	0.7680

### Conclusiones

En este trabajo se propone utilizar un modelo fractal para estimar la permeabilidad en función de la porosidad. El medio poroso se representa mediante un conjunto de tubos cilíndricos con constrictividades periódicas y con una distribución fractal de tamaño de poro. La presencia de estas constrictividades afecta de forma diferente a la porosidad y a la permeabilidad. Esto permite describir medios con alta porosidad y baja permeabilidad (como las arcillas) los cuales no pueden ser descritos correctamente mediante la ecuación de Kozeny - Carman.

El modelo propuesto proporciona un mejor ajuste a los datos experimentales para todo el rango de porosidades.



### Referencias

- Carman, P.C., 1937. Fluid flow through granular beds. Transactions-Institution of Chemical Engineers, 15, 150-166.
- Chilindar, G.V., 1964. Relationship between porosity, permeability and grain size distribution of sands and sandstones, in Deltaic and Shallow Marine Deposits, vol. I, pp.7175. Elsevier, New York.



---

Hirst, J.P.P., N. Davis, A.F. Palmer, D. Achache and F.A. Riddiford, 2001. The tight gas challenge: appraisal results from the Devonian of Algeria: *Petrol. Geosci.*, vol. 7, pp. 13-21.

Kozeny, J., 1927. ijber kapillare Leitung des Wassers im Boden. *Sitzungsber. Kais. Akad. Wiss. Wien.* v136, 271-306.

Luffel, D.L., W.E. Howard and E.R. Hunt, 1991. Travis Peak core permeability and porosity relationships at reservoir stress: *Society of Petroleum Engineers Formation Evaluation*, v. 6, n.3, pp. 310-318.

Reis, J.C. and A.M. Acock, 1994. Permeability reduction models for the precipitation of inorganic solids in Berea sandstone. *J. Geophys. Res.*, No. 18, 347-68.

Yu, B., J. Li, Z. Li and M. Zou, 2003. Permeabilities of unsaturated fractal porous media. *Int. J. Multiphas. Flow*, 29(10), 1625-1642.