



Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Tesis para obtener el grado académico de
licenciado en Astronomía

DINÁMICA DE PARTÍCULAS CARGADAS EN AGUJEROS
NEGROS DIÓNICOS

Tobías Canavesi

Director: Nicolás Grandi
Co-director: Ignacio Francisco Ranea Sandoval

LA PLATA, ARGENTINA
- MAYO DE 2017 -

Prefacio

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para obtener el grado académico de licenciado en Astronomía de la Universidad Nacional de La Plata. La misma contiene los resultados de los estudios desarrollados bajo la dirección del Dr. Nicolás Grandi y la co-dirección de el Dr. Ignacio Francisco Ranea Sandoval, junto con la colaboración de investigadores miembros del Grupo de Dualidad Gauge/Gravedad y Teoría de Cuerdas perteneciente al Instituto de Física la Plata y del Grupo de Gravitación, Astrofísica y Gravitación de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata.

Tobías Canavesi.
e-mail: tobiascanavesi@gmail.com
La Plata, Marzo 2017.

Resumen

En este trabajo se presenta una introducción de la dualidad gauge/gravedad, como así también del efecto Hall. En particular, se estudia un agujero negro diónico asintóticamente Anti-de Sitter (AdS), para el cual se calculan las trayectorias clásicas de partículas en la teoría de gravedad. Este cálculo servirá en el futuro para calcular la función de Green de la teoría de campos dada por un sistema de partículas cargadas sometidas a un campo de inducción magnética a potencial químico finito. Para eso, calculamos la acción *on-shell* para dicho agujero negro, y en algunos casos específicos resolvemos dicha acción en forma numérica. Este sistema holográfico comparte propiedades esenciales con los sistemas conocidos como efecto Hall.

Nuestro análisis resulta relevante en el marco astrofísico poniéndose de manifiesto especialmente en estrellas de neutrones, ya que algunos de los procesos que ocurren en estos objetos están ligados con la física de campos magnéticos intensos.

Abstract

In this work we present an introduction of the gauge/gravity duality, as well as the Hall effect. In particular, we study an asymptotically Anti-de Sitter (AdS) dyonic black hole, for which we calculate the classical trajectories of particles in the theory of gravity. This calculation will serve in the future to calculate the Green function of the field theory given by a system of charged particles subjected to a field of magnetic induction at finite chemical potential. For this we calculate the on-shell action for that black hole, which we solve numerically. This holographic system shares essential properties with systems known as Hall effect.

This analysis is valuable in the astrophysical framework evidencing especially in neutron stars, because some of the processes that occur in these objects are linked with the physics of intense magnetic fields.

Agradecimientos

Cuando tenía aproximadamente 6 años me encantaba desarmar cosas para armar otras nuevas, recuerdo que les sacaba los motorcitos a los autos a control remoto, a los cuales le ponía un palito de helado que hacía de hélice para mí un motor de avión. Recuerdo que por esos tiempos mi abuelo Hugo me enseñó a diseñar aviones con madera balsa, el descubrimiento de ese asombroso material, junto con algo que me encantaba, que eran los imanes me sirvió para hacer mi tren magnético.

Luego fui creciendo y me fui olvidando poco a poco de esa sensación que sentía cuando jugaba en mi “Laboratorio” (así le puse al altillo que tenía mi casa). Pero al llegar a la adolescencia todo volvió a resurgir, a eso de los 14 o 15 años comencé por algún motivo que no recuerdo, seguramente por la curiosidad que tenemos todos los seres humanos, motivada también por algunos profesores como el de biología (Rubén Antonio Antonello alias Rubi) de mi querido colegio Olivos del Sol. En sus clases nos preguntábamos cosas que nunca me había preguntado como ¿El amor existe? ¿Y la libertad? Creo que en ese momento comencé a comprarme los primeros libros de ciencia y filosofía, y a observar el universo de otra forma.

Llego el último año del colegio y con este una decisión que me resultaba bastante complicada ¿Qué voy a estudiar? Tengo memoria de haber realizado un test de orientación vocacional que nos brindaba el colegio que nos llevó varios meses, pero que me dio como resultado una lista de casi dos hojas de carreras que podían llegar a dar con mi “perfil”, algunas de ellas eran, luthier, abogado, economista, biólogo, medico, administrador de empresas y así continuaban. Esto en vez de aclarar mi panorama me confundió un poco más. Así que decidí tomar el camino que me pareció mas lógico que era estudiar administración de empresas (mi familia tiene una pyme, que distribuye carne a restaurantes y hoteles).

Al pasar unos meses en la carrera empecé a notar claramente, que no pertenecía a ese lugar. Ahí es donde volví a mis inquietudes mas básicas, esas que tenía de chico y comencé a darme cuenta, que lo que yo estaba buscando era una carrera científica. Pero eso me trajo más preguntas ¿Voy a poder estudiar una carrera científica? El estereotipo que yo tenía de un científico en ese momento era un poco el del profesor Frink (el científico de los simpsons). Esto sumado la preguntas que me hacían las personas a las que se lo comentaba, tales como ¿Y cuando te recibas de que vas a vivir? me hacían dudar mucho.

Hoy, tiempo después, no quiero dejar de agradecer a las personas que me dieron su apoyo y creyeron en que esto era posible, e hicieron que hoy me encuentre defendiendo mi tesis de licenciatura en astronomía.

Primero y principal quiero agradecer a mis papás por ayudarme de todas las maneras posibles para que pudiera estar acá y por enseñarme tantos valores. Son un gran ejemplo para mí.

A mis hermanos por estar siempre, y por compartir esa relación tan especial que solo nosotros entendemos.

A mis abuelos Raul y Chela por cuidarme tanto y confiar siempre en mí.

A mi abuela Bety por su alegría y sus bailes.

A mi abuelo Hugo por motivar mi curiosidad.

A mi abuelo Oscar por transmitirme la pasión por el café.

A todos mis amigos del colegio, por haber compartido tantos momentos geniales y también muy difíciles junto a mí durante más de 20 años. Son un gran sostén.

A Guido.

A todos mis amigos de la agrupación estudiantil INTI, que me enseñaron la importancia de la militancia y me demostraron, a lo largo de mis años en la Facultad, que se pueden lograr cosas realmente importantes en beneficio de todos los estudiantes.

A la educación pública.

Al tren de Ricky Fort (Peco y Laurean).

A Facu por compartir tantos años viviendo juntos. Miles de charlas y ningún problema (que no sea matemático). 2, 3, 5, 7, 11....

A Edgard, Alicia y Clau, por estar siempre dispuestos a ayudarme cuando los necesite.

A Nico por ayudarme con todo el trabajo y por confiar en que podía llevar adelante esta tesis.

A Nacho por sus consejos, sus buenas correcciones y estar siempre para juntarnos a charlar.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivos y metodología	2
2. Aspectos teóricos	5
2.1. Introducción al efecto Hall	5
2.1.1. El efecto Hall clásico	5
2.1.2. El modelo de Drude	6
2.1.3. El efecto Hall cuántico	9
2.1.4. El efecto Hall cuántico entero	9
2.1.5. El efecto Hall cuántico fraccionario	9
2.2. Sobrevolando la dualidad	10
2.2.1. ¿Qué tipo de sistemas se estudian utilizando la dualidad?	11
2.2.2. El espacio-tiempo AdS	11
2.2.3. La receta para el uso de la dualidad	14
3. Cálculo de la acción <i>on-shell</i> para un agujero negro diónico asintóticamente AdS	15
3.1. Introducción	15
3.2. Configuración general: Partícula electricamente cargada en un agujero negro diónico	15
3.2.1. La métrica de fondo	15
3.2.2. La acción para una partícula de prueba	17
3.3. Dinámica: Solución del problema y la acción <i>on-shell</i>	17
3.3.1. Solución	17
3.3.2. Acción Euclídea <i>on-shell</i>	23
3.3.3. Regularización y dependencia implícita	24
4. Conclusiones	27
4.1. Trabajo futuro	28
A.	29
A.1. Mapeo entre variedades	29
B.	32
B.1. La constante gravitacional de Newton en más de cuatro dimensiones	32
B.1.1. La longitud de Planck	32
C.	34
C.1. Ecuación de las geodésicas	34

Capítulo 1

Introducción

La dualidad gauge/gravedad relaciona teorías de gravitación y teorías de gauge. Originalmente surge de la teoría de cuerdas (Polchinski 1998; Maldacena 1999; Babichenko et al. 2010; Aharony et al. 2008) a partir de las dos descripciones efectivas de las Dp-branas (Johnson 2003). Al presente, una cantidad importante de cálculos no-perturbativos a ambos lados de la dualidad reproducen sus predicciones (Minahan & Zarembo 2003, 2008; Pestun 2012; Kapustin et al. 2010; Borsato et al. 2013), lo que la ha transformado en un paradigma.

Un aspecto interesante de la dualidad es que concuerda con la observación de 't Hooft sobre la expansión topológica de una teoría de gauge ('t Hooft 1974). Otra característica destacable es su carácter holográfico (Polyakov 1998), la teoría de gauge está definida en un espacio con una dimensión menos que aquél en el que se propaga la teoría de gravedad. Esto es algo que se esperaba desde el trabajo de Bekenstein y Hawking en el que se observa que la entropía de un agujero negro es proporcional al área del horizonte (Bekenstein 1973; Hawking 1975).

Otro punto sobresaliente de la dualidad es la relación entre los regímenes de acoplamiento débil y fuerte:

- Teorías de gauge fuertemente acopladas son duales a perturbaciones gravitatorias débilmente acopladas en espacio-tiempos de pequeña curvatura y, recíprocamente, la dinámica cuántica de espacio-tiempos fuertemente curvados es dual a teorías de gauge casi libres.

Un ingrediente central de la dualidad es la existencia, por cada operador de la teoría de gauge, de un campo dual en la teoría de gravedad. La función de partición de la gravedad, calculada con valores de borde fijos para sus campos, corresponde a la funcional generatriz de la teoría de gauge, donde dichos valores se identifican con las fuentes externas del operador asociado.

El enfoque *bottom-up* de la dualidad se basa en que, dado que la teoría de gauge está completamente definida por sus simetrías y sus grados de libertad, esa información debería ser suficiente para construir su dual gravitatorio. La temperatura de la teoría dual está dada por la temperatura de Bekenstein-Hawking de la solución gravitatoria, mientras que el potencial químico corresponde al valor de borde del campo electromagnético. Usando este enfoque, en los últimos años toda una rama de la investigación ha desarrollado la dualidad como herramienta para describir sistemas fuertemente acoplados en términos de gravedad clásica (J. Zaanen & Schalm 2012). Por ejemplo, se han propuesto entre otros, duales gravitatorios para los superconductores holográficos (Hartnoll et al. 2008), fermiones fuertemente acoplados (Hartnoll et al. 2010; Faulkner et al. 2010, 2011; Cubrovic et al. 2009; Gubser

et al. 2010a,b) y metales extraños holográficos (Hartnoll & Tavanfar 2011; Hartnoll & Petrov 2011; Hartnoll et al. 2011; Puletti et al. 2011), *quenches* holográficos (Balasubramanian et al. 2011), sistemas Hall holográficos (Hartnoll & Kovtun 2007a), etc. Este tipo de sistemas son relevantes para modelar materiales que exhiben fases superconductoras con alta temperatura crítica, como el plasma de quarks y gluones formado en colisiones de iones pesados o en el interior de objetos compactos.

La relevancia de la conductividad de Hall en el marco astrofísico se pone de manifiesto, principalmente, en el contexto de las estrellas de neutrones ya que estos objetos están íntimamente relacionados con la física de campos magnéticos intensos. El proceso de evolución del campo magnético en un objeto súper compacto como una estrella de neutrones (esté o no aislada) resulta muy interesante de comprender. En los casos en que estos objetos se encuentran aislados dicha evolución se debe, fundamentalmente, al efecto Hall y al decaimiento Ohm. Si bien en las regiones más externas de estrellas de neutrones el decaimiento del campo magnético por efecto Ohm es el de mayor importancia, existe una fase (luego de unos 1000 años) en la que el efecto Hall es dominante (Cumming et al. 2004). Comprender la evolución temporal de este tipo de objetos puede resultar relevante, entre otros, por los siguientes motivos. Estrellas de neutrones magnetizadas se deforman y, como se encuentran en rotación, son importantes emisores de ondas de gravedad (Friebe & Rezzolla 2012). Hace unos años se detectaron dos eventos en el que estrellas de neutrones sufrieron algún tipo de fenómeno que produjo un aumento repentino en sus períodos de rotación, estos eventos fueron denominados “anti-glitch” (Archibald et al. 2013). Diversas explicaciones para este evento fueron propuestas. La propuesta realizada en (García & Ranea-Sandoval 2015) explica este evento asociándolo con un cambio repentino en la estructura global de una estrella de neutrones deformada debido a un intenso campo magnético (solo como el asociado a magnetares). Se postuló, utilizando argumentos relacionados a la reacción de la materia de neutrones magnetizada, que el proceso de “anti-glitch” (Archibald et al. 2013) detectado hace unos años sólo puede darse en el marco de objetos compactos altamente magnetizados (García & Ranea-Sandoval 2015). De esta forma esta propuesta puede explicar el motivo por el cual los pulsares sólo sufren “glitches”.

1.1. Objetivos y metodología

Esta tesis se aboca al estudio de la dualidad gauge/gravedad, también conocida como correspondencia AdS/CFT, holografía, o conjetura de Maldacena. Esta dualidad relaciona la dinámica del espacio-tiempo en una variedad con borde con una teoría de campos de gauge definida en dicho borde. Durante su desarrollo fue necesario estudiar aspectos de las teorías cuánticas de campos y de la gravitación. La principal motivación para el estudio de esta dualidad es que en estos pares duales la dinámica gravitatoria está débilmente acoplada, mientras que la teoría de campos está fuertemente acoplada y no puede estudiarse mediante las técnicas perturbativas usuales.

El objetivo general de este trabajo consiste en el estudio de la dualidad gauge/gravedad en un sistema con correlato fenomenológico. En particular, se planea estudiar un agujero negro dionico, cuyo dual de campos realiza un sistema de partículas cargadas en un campo magnético a potencial químico finito. Este sistema holográfico comparte propiedades esenciales con los sistemas conocidos como efecto Hall, los cuales se realizan en laboratorio. El objetivo específico de este trabajo es la determinación de las trayectorias clásicas de partículas en la teoría de gravedad que luego nos servirá para calcular la función de Green de la teoría de campos. Esto permitiría, mediante el teorema de Kubo, determinar la conductividad Hall del sistema. Se planea enfocar el trabajo desde el punto de vista *bottom-up*, en el cual la geometría de la variedad se selecciona a partir de las simetrías y del contenido de campos de la

teoría del borde, sin necesidad de incurrir en ningún momento en cálculos de teoría de cuerdas.

La dualidad gauge/gravedad permite calcular funciones de correlación en la teoría de gauge, en términos de soluciones clásicas en el dual gravitatorio. Para cada operador de la teoría de gauge, existe un campo dual en la teoría de gravedad. Este campo dual satisface ecuaciones clásicas de movimiento en un espacio-tiempo curvo y, a su vez contribuye al tensor energía-momento que curva dicho espacio-tiempo. La ecuación de movimiento del campo dual se puede resolver, en el límite de masa grande, haciendo uso de la aproximación WKB. Esto permite reducir cualquier cálculo que involucre dicho campo al de las trayectorias clásicas de sus partículas. En el operador asociado de la teoría de gauge, este “límite de línea de mundo” se mapea en el límite de dimensión conforme grande. En conclusión, las funciones de correlación de operadores cuya dimensión conforme es lo bastante grande, se pueden obtener de modo simple mediante la solución analítica y/o numérica de trayectorias de partículas clásicas en el fondo gravitatorio.

En la primera parte del trabajo obtendremos en forma analítica una expresión para la acción, para luego obtener resultados más explícitos en forma numérica con programas escritos en diferentes lenguajes. Estos últimos permiten realizar predicciones físicas sobre el sistema dual. Por este motivo se obtuvieron soluciones clásicas para las trayectorias de partículas cargadas en un espacio-tiempo de fondo de un agujero negro diónico asintóticamente AdS. Intentamos comprender cómo se manifiestan los parámetros geométricos y topológicos de las trayectorias clásicas del sistema gravitatorio, en la función de correlación de dos puntos de la teoría del borde.

Capítulo 2

Aspectos teóricos

Esa trama de tiempos que se aproximan, se bifurcan, se cortan o que secularmente se ignoran, abarca todas las posibilidades. No existimos en la mayoría de esos tiempos; en algunos existe usted y no yo; en otros, yo, no usted; en otros, los dos.

Jorge Luis Borges, El jardín de senderos que se bifurcan.

2.1. Introducción al efecto Hall

Si permitimos a electrones moverse en un plano de dos dimensiones y aplicamos un campo magnético obtenemos un fenómeno muy particular y sorprendente para la física conocido como efecto Hall cuántico. Este fenómeno tiene la particularidad de que la llamada conductividad Hall toma valores cuantizados:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2 \nu}{2\pi\hbar}, \quad (2.1)$$

donde el parámetro ν toma valores enteros. Esto es extraordinario dado que este tipo de cuantización es algo que normalmente se da a nivel atómico pero que en este caso se manifiesta como una propiedad macroscópica del sistema.

2.1.1. El efecto Hall clásico

El efecto Hall clásico fue descubierto en 1879 por Edwin Herbert Hall. Dicho fenómeno es consecuencia del movimiento de partículas cargadas en un campo magnético. Empecemos por describir el sistema que da lugar al mismo. Supongamos que las partículas cargadas se pueden mover en un plano que llamaremos (x,y) y que encendemos un campo de inducción magnética constante \mathbf{B} en la dirección perpendicular al mismo. Asumamos además, una corriente en la dirección x que va de C a D (ver fig.2.1), esto induce una resistencia en la dirección y . Para el mismo se puede medir tanto la resistencia longitudinal como la transversal (resistencia Hall).

Para comenzar recordemos que en presencia de un campo de inducción magnética una partícula cargada se mueve en círculos. Las ecuaciones de movimiento en el caso de una partícula de masa m y de carga $-e$ son,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (2.2)$$

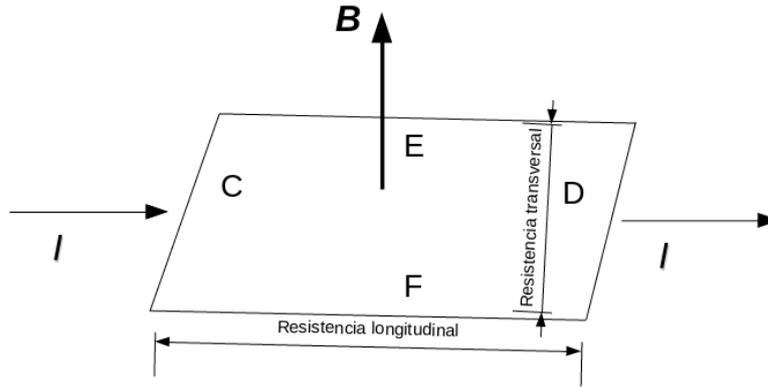


Figura 2.1. En la figura se observa el sistema de 2 dimensiones compuesto por electrones que da lugar al efecto Hall, en el mismo tenemos una corriente I , junto a un campo magnético perpendicular al plano. Vamos a tener una resistencia longitudinal de C a D y una transversal (resistencia Hall) de E a F.

donde $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$. Si consideramos $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ y que la partícula se mueve en el plano por lo que $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, 0) \equiv (\dot{x}, \dot{y}, 0)$, entonces las ecuaciones (2.2) se pueden escribir como,

$$ma_x = -ev_y B, \quad (2.3)$$

$$ma_y = ev_x B, \quad (2.4)$$

donde definimos al vector aceleración como $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$, entonces las soluciones están dadas por:

$$x(t) = x_o - R \sin\left(\frac{eBt}{m} + \phi\right) = x_o - R \sin(\omega_c t + \phi), \quad (2.5)$$

$$y(t) = y_o + R \cos\left(\frac{eBt}{m} + \phi\right) = y_o + R \cos(\omega_c t + \phi), \quad (2.6)$$

donde $\omega_c = \frac{eB}{m}$ es llamada frecuencia ciclotrón. El centro del círculo está ubicado en el punto (x_o, y_o) , R y ϕ denotan radio de dicho círculo y la fase inicial respectivamente. Estas cuatro constantes pueden obtenerse luego de resolver las dos ecuaciones diferenciales de segundo orden a partir de las condiciones iniciales. Se puede observar que las partículas se van a mover en un círculo, de manera anti-horaria si $B > 0$, y de manera horaria para $B < 0$.

2.1.2. El modelo de Drude

El modelo de Drude fue desarrollado por el físico alemán Paul Karl Ludwig Drude a comienzos del siglo XX. El mismo consiste en agregarle al básico modelo presentado anteriormente algunas nuevas consideraciones. Incluyamos un campo eléctrico y consideremos un término lineal de fricción para modelar los procesos que intentan impedir el avance de los electrones, ya sean impurezas en el material, el choque con otros electrones o los iones positivos que conforman la red cristalina. Con estos nuevos ingredientes, la ecuación de movimiento

para los electrones está dada por:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -e \mathbf{E} - e \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B} - \frac{m}{\tau} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2.7)$$

La letra τ representa el “tiempo de choque” y puede ser pensado como el tiempo medio entre colisiones. Busquemos soluciones de equilibrio para las cuales $\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = 0$,

$$0 = -e \mathbf{E} - e \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B} - \frac{m d\mathbf{x}}{dt \tau}, \quad (2.8)$$

luego de un poco de álgebra obtenemos

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{e\tau}{m} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B} = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E}. \quad (2.9)$$

La densidad de corriente \mathbf{J} está relacionada con la velocidad de la siguiente forma:

$$\mathbf{J} = -ne \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2.10)$$

Donde n es la densidad de portadores de carga e . Rescribiendo la ecuación (2.9) de forma matricial obtenemos:

$$\frac{e^2 n \tau}{m} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & \tau w_c \\ -\tau w_c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Con $w_c = \frac{eB}{m}$. Si invertimos la matriz, llegamos a:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.12)$$

Esta ecuación conocida como la ley de Ohm, fue propuesta por el alemán Geor Simon Ohm y expresa el modo en que cambia el flujo de corriente debido a un campo eléctrico, donde σ es la llamada constante de conductividad, que puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

En este modelo, la expresión explícita, toma la forma:

$$\sigma = \frac{\sigma_{sb}}{1 + w_c^2 \tau} \begin{pmatrix} 1 & -\tau w_c \\ \tau w_c & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

donde $\sigma_{sb} = \frac{ne^2 \tau}{m}$ representa la conductividad en ausencia del campo de inducción magnética. Los terminos fuera de la diagonal son los responsables del efecto Hall. Entonces en equilibrio una corriente en la dirección x , requiere un campo electrico en la dirección y .

Ahora podemos calcular la resistividad, la cual esta definida por la inversa de la conductividad,

$$\rho = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

teniendo en cuenta los cálculos realizados anteriormente para el modelo de Drude llegamos a:

$$\rho = \frac{1}{\sigma_{sb}} \begin{pmatrix} 1 & \tau w_c \\ -\tau w_c & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Observemos los elementos fuera de la diagonal, los mismos están dados por,

$$\rho_{xy} = \frac{w_c \tau}{\sigma_{sb}} = \frac{w_c m}{ne^2}, \quad (2.17)$$

$$\rho_{yx} = -\frac{w_c m}{ne^2}, \quad (2.18)$$

y son independientes del tiempo de choque. Otro factor importante de estos términos es que no difieren de la resistencia (que es la medida que obtenemos), como sí lo hacen las otras componentes de la matriz, en los cuales la resistencia R difiere de la resistividad ρ debido a factores geométricos. Imaginemos un conductor de longitud l en la dirección y , si queremos un potencial eléctrico en la dirección y y medimos una corriente en la dirección x vamos a tener la siguiente resistencia transversal:

$$R_{xy} = \frac{V_y}{I_x} = \frac{lE_y}{lJ_x} = \frac{E_y}{J_x} = -\rho_{yx}. \quad (2.19)$$

Ahora definamos el coeficiente Hall, R_h , para una corriente en la dirección x , I_x , y el campo eléctrico asociado en la dirección y , E_y ,

$$R_h = \frac{-E_y}{J_x B} = \frac{\rho_{xy}}{B}. \quad (2.20)$$

Remplazando (2.19) en (2.20)

$$R_h = \frac{w_c}{B \sigma_{sb}} = \frac{1}{ne}, \quad (2.21)$$

de donde se desprende que la resistencia Hall depende únicamente de propiedades microscópicas del material: La carga eléctrica, e y la densidad de los portadores de carga n . El mismo no es afectado por los procesos de fricción como vimos anteriormente. Por último llegamos a la expresión de la resistividad dada por,

$$\rho_{xy} = \frac{B}{ne} \quad (2.22)$$

que se muestra en la figura 2.2 (usando unidades arbitrarias).

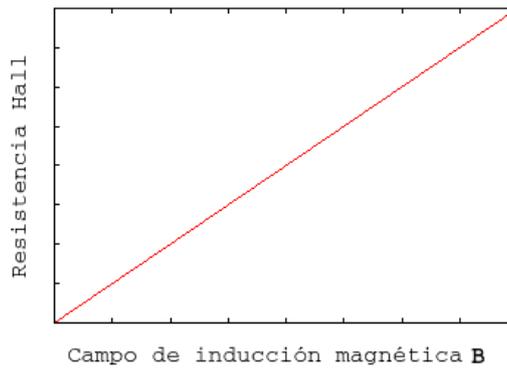


Figura 2.2. Resistencia Hall vs. Campo de inducción magnética B .

En este caso la resistividad longitudinal es constante y está dada por:

$$\rho_{xx} = \frac{m}{ne^2 \tau}. \quad (2.23)$$

2.1.3. El efecto Hall cuántico

Al considerar temperaturas en el orden del Kelvin y campos de inducción magnéticos de más de un Tesla, es necesario alejarse del análisis clásico presentado anteriormente y tener en cuenta efectos cuánticos. Hay dos tipos de efecto Hall cuántico, el fraccional y el entero, a continuación realizaremos una breve descripción de los mismos.

2.1.4. El efecto Hall cuántico entero

Los primeros acercamientos al efecto Hall cuántico fueron llevados a cabo por Gerhard Dorda, Michael Pepper y Klaus Von Klitzing (Klitzing et al. 1980). En su trabajo encuentran que para el sistema estudiado, la resistencia Hall toma valores fijos (enteros) que solo dependen de la constante de estructura fina y de la velocidad de la luz en el vacío, y no de la geometría del dispositivo en cuestión. Cinco años más tarde Klitzing fue galardonado con el premio Nobel por el descubrimiento del efecto Hall cuántico.

Lo más interesante de esto es que la resistividad Hall ρ_{xy} , toma valores constantes para diferentes rangos de campo de inducción magnética saltando de meseta en meseta, como se ilustra en la figura 2.3.

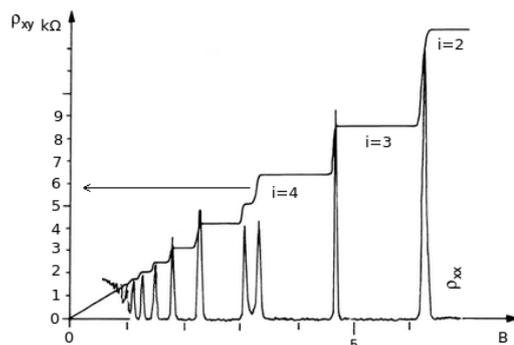


Figura 2.3. Las resistividades van tomando diferentes valores mientras aumenta el campo de inducción magnética B.

La misma esta dada por,

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2\nu}, \quad (2.24)$$

con $\nu \in \mathbb{Z}$. La resistividad longitudinal también tiene una particularidad, cuando ρ_{xy} está en una meseta $\rho_{xx} = 0$, se piensa en un sistema con $\rho_{xx} = 0$ como un conductor perfecto. Este efecto puede ser entendido considerando electrones libres, pero no lo realizaremos en este trabajo.

2.1.5. El efecto Hall cuántico fraccionario

El efecto Hall cuántico fraccionario fue descubierto por Daniel Tsui, Horst Störmer y Arthur Gossard (Tsui et al. 1982). En su trabajo observaron que la resistividad Hall toma valores como los que se tenían en el efecto Hall cuántico entero, dados por (2.24), pero en lugar de $\nu \in \mathbb{Z}$ tenemos $\nu \in \mathbb{Q}$. Lo interesante es que no aparecen todas las fracciones, las que más recurrentes son $\nu = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$.

El efecto Hall cuántico entero puede ser entendido usando el modelo de electrones libres, pero para poder explicar el efecto Hall cuántico fraccionario tenemos que considerar la interacción entre los mismos. La teoría fue explicada por Robert B. Laughlin en 1983. Por ello en 1998 fue galardonado junto a Horst L. Störmer y Daniel C. Tsui con el premio Nobel de física.

No nos adentraremos en la teoría detrás del efecto hall cuántico y su conexión con la dualidad ya que eso es parte de un trabajo futuro.

2.2. Sobrevolando la dualidad

Primero veamos que quieren decir estas siglas (AdS/CFT¹). AdS hace referencia al espacio-tiempo Anti-de Sitter y CFT a una teoría de campos conforme. Hablaremos de su significado de estos términos más adelante. La idea de la dualidad surge a partir de uno de los candidatos para unificar las cuatro leyes fundamentales de la naturaleza, el electromagnetismo, la gravedad, la fuerza débil y la fuerte; la teoría de supercuerdas.

¿Qué propone la dualidad? La dualidad plantea una equivalencia entre dos teorías, una teoría de gauge fuertemente acoplada en un espacio-tiempo n -dimensional y una teoría gravitacional $n + 1$ -dimensional en un espacio-tiempo Anti-de Sitter², este espacio-tiempo posee un borde n -dimensional que alojaría a la teoría de gauge. Esto da una idea de que la física que ocurre en un espacio n -dimensional esta relacionada con la física de un espacio $n + 1$ -dimensional, por este motivo es normalmente llamada una teoría holográfica.

La parte de la teoría de gauge describe todas las fuerzas excepto la gravedad, el problema surge cuando queremos entender la misma en un regimen de acoplamiento fuerte. Cuando la fuerza fuerte es, siendo redundantes, muy fuerte, no sabemos como tratarla adecuadamente, la dualidad nos da una forma de resolver este problema a través de un espacio-tiempo AdS. En la dualidad cuando una teoría está fuertemente acoplada la otra lo está débilmente. En el caso de la gravedad esto significa que la curvatura del espacio-tiempo es pequeña, y esto se satisface cuando la teoría de gauge está fuertemente acoplada.

Tabla 2.1

Teoría de gauge fuertemente acoplada	\iff	Teoría gravitacional débilmente acoplada
Teoría de gauge débilmente acoplada	\iff	Teoría gravitacional fuertemente acoplada

Todo esto corresponde a considerar el sistema a temperatura cero, para el caso de que tenemos una temperatura finita, la teoría de gauge que esta fuertemente acoplada a temperatura finita es equivalente a una teoría gravitacional que tiene como fondo un agujero negro AdS.

Jakob Bekenstein y Stephen Hawking construyeron una teoría en la que los agujeros negros, tienen una entropía y una temperatura bien definidas. Al tener temperatura, los agujeros

¹El nombre AdS/CFT no es el más apropiado ya que la dualidad también es aplicada a otras teorías de campo no solo las CFT, pero sí uno de los más utilizados en la bibliografía. Otro de los nombres más usados es “Teoría Holográfica” o “Dualidad gauge/gravedad”, esta última representa de manera más integral su rango de aplicación.

²En 1917 el astrónomo Willem De Sitter encontró una solución a las ecuaciones de Einstein con constante de curvatura positiva, conocida como espacio-tiempo de Sitter. El espacio-tiempo AdS posee en cambio una constante de curvatura negativa.

negros deben necesariamente emitir radiación. Pero el resultado de Bekenstein y Hawking es todavía más inesperado: la entropía de un agujero negro no es proporcional al volumen sino al área de la superficie que lo rodea. A esto es lo que llamamos comportamiento del tipo holográfico. Recordemos que normalmente, la entropía de un sistema es proporcional al volumen del mismo. Por lo tanto tendremos un agujero negro que vive en un espacio-tiempo $n + 1$ -dimensional que podrá ser descrito por una teoría de campos n -dimensional. Por último no quiero dejar de remarcar que la dualidad sigue siendo una conjetura, por más que existan evidencias fuertes de que podría ser correcta.

2.2.1. ¿Qué tipo de sistemas se estudian utilizando la dualidad?

Recordemos que la dualidad gauge/gravedad surge de la teoría de cuerdas, pero su análisis ha podido ir más allá de la física de partículas. La dualidad se ha convertido en una buena herramienta para tratar problemas realistas, algunos ejemplos de ello son la cromodinámica cuántica, la física nuclear y la materia condensada.

A continuación describimos algunos de los sistemas donde la dualidad puede ser utilizada para su tratamiento:

- La física teórica explica muy bien la fuerza fuerte a través de la cromodinámica cuántica, pero al utilizar una teoría perturbativa está falla, debido a esto uno puede realizar un análisis mediante la dualidad gauge/gravedad.
- De acuerdo con la cromodinámica cuántica, los neutrones y protones están compuestos por quarks y gluones que normalmente se encuentran confinados dentro de estas partículas. Pero a temperaturas o densidades lo suficientemente grandes se rompe el confinamiento y se forma el plasma de quark-gluones que se comporta de modo similar a un fluido viscoso. El plasma de quark-gluones está fuertemente acoplado lo que hace el análisis teórico resulte complicado. Los experimentos sobre la “viscosidad” del mismo dan un valor similar al que realizan las predicciones mediante la dualidad.
- Los superconductores también pueden ser estudiados utilizando la dualidad gauge/gravedad (Horowitz 2011).

2.2.2. El espacio-tiempo AdS

El espacio-tiempo AdS y el espacio-tiempo de Sitter (dS) son solución a las ecuaciones de Einstein con la adecuada constante cosmológica, negativa para el primero y positiva para el segundo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \pm \Lambda = 0, \quad (2.25)$$

donde $\Lambda = \frac{n(n+1)}{2l^2}$. Además el espacio-tiempo AdS es un espacio-tiempo con curvatura constante que posee $\frac{n(n+1)}{2}$ vectores de Killing y que por lo tanto es máximalmente simétrico.

Antes de hablar del espacio tiempo AdS pensemos un poco qué significa un espacio con curvatura constante, un ejemplo de esto es la famosa esfera S^2 . Si consideramos un espacio Euclideo tridimensional la métrica está dada por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.26)$$

junto con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ tendremos una esfera de radio l . Si ahora transformamos a coordenadas esféricas ($x = l \sin \theta \cos \phi$, $y = l \sin \theta \sin \phi$, $z = l \cos \theta$) la métrica sobre

la esfera toma la siguiente forma:

$$ds^2 = l^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \quad (2.27)$$

Podemos ver que tiene como grupo invariante a $SO(3)$ (grupo de rotaciones, representable por el conjunto de matrices ortogonales de 3×3 y con determinante igual la unidad), y posee un escalar de Ricci dado por:

$$R = \frac{2}{l^2}. \quad (2.28)$$

Si en vez de considerar un espacio con curvatura positiva consideramos uno con curvatura negativa estamos en presencia de un espacio hiperbolico. Su visualización es más complicada que la de la esfera ya que el mismo no puede ser embebido en un espacio euclideo tridimensional pero si en un espacio Minkowski tridimensional cuya métrica es:

$$ds^2 = -dw^2 + dy^2 + dx^2 \quad (2.29)$$

junto con la restricción $-w^2 + x^2 + y^2 = -l^2$. Considerando el siguiente cambio de coordenadas:

$$x = l \text{senh } r \cos \phi, y = l \text{sinh } r \text{sen } \phi, w = l \cosh r, \quad (2.30)$$

la métrica sobre el hiperboloide toma la siguiente forma:

$$ds^2 = l^2(dr^2 + \text{senh}^2 r d\phi^2). \quad (2.31)$$

En la misma no observamos una dirección tipo tiempo, por lo tanto estamos hablando de un espacio no de un espacio-tiempo. Su escalar de Ricci es igual que la de la esfera pero con signo cambiado

$$R = -\frac{2}{l^2}. \quad (2.32)$$

Normalmente l es considerado como el radio AdS.

Siguiendo el trabajo de (Bayona & Braga 2007) podemos escribir el espacio-tiempo AdS_{n+1} dimensional en coordenadas de Poincare de la siguiente forma:

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2}(dz^2 + (d\bar{x})_{n-1}^2 - dt^2). \quad (2.33)$$

El grupo de isometrías de AdS_{n+1} para el espacio en el caso Lorentziano es $SO(2, n)$ mientras que en el caso Euclideo es $SO(1, n + 1)$. En la dualiad gauge/gravedad el grupo conforme de la teoría de borde es isomorfo al grupo de isometrías de la teoría de gravedad en el *bulk*. Entonces las teorías conformes no son iguales. Se puede probar que el borde de los espacios AdS Lorentzianos y Euclideanos donde las teorías conformes estan difinidas son diferentes (Bayona & Braga 2007).

Como dijimos anteriormente el espacio AdS es maximalmente simétrico, este tipo de espacios poseen el maximo número de generadores de simetría. El tensor de Riemann para estos espacios puede escribirse de la siguiente forma:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \pm \frac{1}{l^2}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \quad (2.34)$$

El $+$ es para el caso de curvatura positiva y el $-$ para el caso de curvatura negativa. El tensor de Ricci y su escalar toman la forma:

$$R_{\mu\nu} = \pm \frac{n}{l^2}g_{\mu\nu}, \quad (2.35)$$

$$R = \pm \frac{n(n+1)}{l^2}. \quad (2.36)$$

Para entender porqué utilizamos el espacio-tiempo AdS debemos recordar que estamos interesados en teorías cuánticas de gauge que sean invariantes de escala. Clásicamnete uno está acostumbrado a trabajar con teorías de gauge como la de Maxwell que tienen invarianza de escala. Pero no todas las teorías cuánticas de gauge son invariantes de escala. Ahora veamos que consecuencia trae considerar una invarianza de escala en una métrica con invarianza de Poincaré $ISO(1, n)$.

$$ds^2 = e^{\frac{-2w}{\ell}} (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + dw^2, \quad (2.37)$$

sean $(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) = (t, x, y, z, w)$ y considerando una transformación de escala de la forma $x^\mu \rightarrow \eta x^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. La misma toma la forma,

$$ds^2 = e^{\frac{-2w}{\ell}} (-\eta^2 dt^2 + \eta^2 dx^2 + \eta^2 dy^2 + \eta^2 dz^2) + dw^2, \quad (2.38)$$

tomando factor común η^2 ,

$$ds^2 = e^{\frac{-2w}{\ell}} \eta^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + dw^2, \quad (2.39)$$

y realizando el cambio,

$$w \Rightarrow w + \ell \ln(\eta) \quad (2.40)$$

donde la cantidad ℓ se agrega para darle unidades de longitud. Vemos que la métrica toma su forma original,

$$ds^2 = e^{\frac{-2w}{\ell}} (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + dw^2, \quad (2.41)$$

realizando un último cambio de variables de la forma $u = \ell e^{\frac{-w}{\ell}}$ y remplazando en (2.41) obtenemos que,

$$ds^2 = \left(\frac{u}{\ell}\right)^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + \ell^2 \frac{du^2}{u^2}. \quad (2.42)$$

Métrica conocida como AdS cinco dimensional.

Este análisis permite observar de manera un poco intuitiva porque hablamos de *AdS* como espacio-tiempo dual a una teoría conforme.

Este espacio-tiempo admite soluciones de agujeros negros, el mas simple de ellos es el llamado agujero negro de Schwarzschild AdS (SAdS), cuya métrica toma la siguiente forma:

$$ds^2 = - \left(\frac{u}{\ell}\right)^2 dt^2 f(u) + \left(\frac{u}{\ell}\right)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{du^2}{\left(\frac{u}{\ell}\right)^2 f(u)} \quad (2.43)$$

con $f(u) = 1 - \left(\frac{u_h}{u}\right)^4$. Cuyo horizonte de eventos se encuentra en $u = u_h$. Si hacemos $u_h = 0$ volvemos a obtener AdS cinco dimensional en coordenadas de Poincaré.

2.2.3. La receta para el uso de la dualidad

Ya que hemos visto, aunque sea de manera tangencial, los ingredientes para trabajar con la dualidad. A continuación daremos una breve explicación de las dos teorías.

Tabla 2.2

Función de partición de una teoría de cuerdas en espacio-tiempo AdS	\iff	Funcional generatriz de una teoría de gauge con invarianza de escala.
---------------------------------------------------------------------	--------	-----------------------------------------------------------------------

Las mismas se relacionan mediante lo que conoce como “diccionario de la dualidad” o “diccionario AdS/CFT”. Esto se da mediante la relación:

$$N_c^2 \sim \frac{\ell^3}{G_5} \qquad \Lambda \sim \left(\frac{\ell}{\ell_s}\right)^4 \qquad (2.44)$$

donde N_c es el número de grados de libertad en cada punto, G_5 es la constante de Newton en cinco dimensiones (ver apéndice B), $\Lambda := ct e^2$ (de acomplamiento) N_c , ℓ_s representa la medidad caracteristica de la cuerda y ℓ proviene de plantear la invarianza de escala en AdS (2.37).

Gracias al trabajo de Steven Gubser, Igor Klebanov y Alexander Markovich Polyakov (Gubser et al. 1998) e independientemente de Edward Witten (Witten 1998) no es necesario evaluar de manera completa la función de partición de la teoría de cuerdas sino que para el límite de N_c grande se utiliza la teoría gravitacional clásica (ver tabla 2.2), y mediante algunas aproximaciones llegar a la siguiente relación para $\Lambda \gg 1$ y $N_c \gg \Lambda$,

$$e^{-S_{on-shell}} \iff \begin{array}{l} \text{Funcional generatriz} \\ \text{de una teoría de gauge} \\ \text{con invarianza de escala (CFT)} \end{array}$$

donde $S_{on-shell}$ es la acción, que surge de reemplazar la solución de la métrica AdS. Obtener la parte derecha de la relación es muy difícil inclusive en el límite de N_c grande, pero uno puede evaluar la parte izquierda usando únicamente la teoría de general de la relatividad.

Establezcamos una última relación, como vimos anteriormente existen los agujeros negros en AdS, los mismos pueden ser considerados sistemas termodinámicos con una teoría de gauge a temperatura finita, mientras que el espacio-tiempo AdS se relaciona con una teoría de gauge pero a temperatura cero.

En este capítulo realizamos una introducción del efecto Hall clásico a través del modelo de Drude, y una descripción del efecto Hall cuántico explicando un poco sus dos regímenes entero y fraccionario. También vimos que la dualidad plantea una equivalencia entre dos teorías, una teoría de gauge fuertemente acoplada en un espacio-tiempo n -dimensional y una teoría gravitacional $n + 1$ -dimensional en un espacio-tiempo Anti-de Sitter. El espacio-tiempo AdS es solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa, con curvatura constante y máximalmente simétrico. Por último vimos que no es necesario evaluar de manera completa la función de partición de la teoría de cuerdas, sino que para el límite de N_c grande se puede utilizar una teoría gravitacional clásica.

Capítulo 3

Cálculo de la acción *on-shell* para un agujero negro diónico asintóticamente AdS

La puerta del salón, y entonces el puñal en la mano, la luz de los ventanales,
el alto respaldo de un sillón de terciopelo verde,
la cabeza del hombre en el sillón leyendo una novela.
Julio Cortázar, Continuidad de los parques.

3.1. Introducción

En este capítulo presentamos la solución obtenida para la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar cargado, en un agujero negro diónico asintóticamente AdS. Resolvimos la ecuación para el límite de masa grande, usando la aproximación WKB (para más detalles ver (Giordano et al. 2015)). El objetivo de este cálculo es obtener la acción *on-shell* ya que la misma nos servirá para evaluar la conductividad de Hall en la teoría dual (fuertemente acoplada) de frontera.

3.2. Configuración general: Partícula electricamente cargada en un agujero negro diónico

3.2.1. La métrica de fondo

El espacio-tiempo de fondo que utilizaremos es el de un agujero negro diónico asintóticamente AdS (Hartnoll & Kovtun 2007b; Gubankova et al. 2013). La métrica y campo electromagnético están dados por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{L^2}{z^2} \left(-f dt^2 + \frac{1}{f} dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 \right), \\ A &= A_t dt + A_\theta d\theta, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde

$$\begin{aligned} f &= 1 - (1 + Q^2 + B^2)z^3 + (Q^2 + B^2)z^4, \\ A_t &= L(\mu - Qz), \\ A_\theta &= \frac{LB}{2} r^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

CAPÍTULO 3. CÁLCULO DE LA ACCIÓN *ON-SHELL* PARA UN AGUJERO NEGRO DIÓNICO ASINTÓTICAMENTE ADS

Para poder tener una continuación Euclidea suave, necesitamos definir la temperatura de Bekenstein-Hawking y el potencial químico. Para la temperatura desarrollamos f a primer orden alrededor de z_0 , siendo este el radio del horizonte,

$$f = f'_{z_0}(z - z_0), \quad (3.3)$$

definimos $\rho = \sqrt{f'_{z_0}(z - z_0)}$ diferenciando,

$$d\rho = \frac{f'_{z_0} dz}{2\sqrt{f'_{z_0}(z - z_0)}}, \quad (3.4)$$

$$d\rho^2 = \frac{f'_{z_0} dz^2}{4(z - z_0)}, \quad (3.5)$$

entonces,

$$\frac{1}{f} dz^2 = \frac{1}{f'_{z_0}(z - z_0)} \frac{4(z - z_0)}{f'_{z_0}} d\rho^2 = \frac{4}{f'^2_{z_0}} d\rho^2, \quad (3.6)$$

reemplazando en (3.1) con $t = i\tau$ llegamos a,

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left(\rho^2 d\tau^2 + \frac{4}{f'^2_{z_0}} d\rho^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 \right), \quad (3.7)$$

si el diferencial de longitud es,

$$dl = \frac{2}{f'_{z_0}} d\rho, \quad (3.8)$$

integrando y usando $\tau \rightarrow \tau + \frac{1}{T}$,

$$2\pi l = \frac{4\pi}{f'_{z_0}} \rho = \frac{\rho}{T}, \quad (3.9)$$

$$\frac{4\pi}{f'_{z_0}} = \frac{1}{T}. \quad (3.10)$$

Derivando f de (3.2),

$$f' = -3(1 + Q^2 + B^2)z^2 + 4(Q^2 + B^2)z^3, \quad (3.11)$$

reemplazando el radio del horizonte $z_0 = 1$ en (3.11),

$$f'_{z_0} = -3(1 + Q^2 + B^2)z_0^2 + 4(Q^2 + B^2)z_0^3, \quad (3.12)$$

$$f'_{z_0} = Q^2 + B^2 - 3, \quad (3.13)$$

por lo tanto de (3.10),

$$T = \frac{Q^2 + B^2 - 3}{4\pi}, \quad (3.14)$$

donde Q y B son la carga eléctrica y magnética del agujero negro respectivamente. Y el potencial químico lo definimos como $\mu = Q$.

3.2.2. La acción para una partícula de prueba

La acción para una partícula de prueba moviéndose en un espacio-tiempo curvo en presencia de un campo electromagnético está dada por:

$$S = -m \int d\tau \left(\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} + q A_\mu \dot{x}^\mu \right), \quad (3.15)$$

donde con el punto ($\dot{\cdot}$) estamos indicando a la derivada con respecto al parámetro tiempo propio, τ , y $q \equiv e/m$, siendo e la carga eléctrica y m la masa de la partícula de prueba. Realizando una rotación de Wick para el tiempo propio tal que $\tau_E = i\tau$ y $q_E = -iq$, la acción Euclidea puede ser escrita como:

$$S^E = m \int d\tau_E \left(\sqrt{g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu} + q_E A_\mu x'^\mu \right), \quad (3.16)$$

donde el primado ($'$) denota la derivada con respecto al parámetro tiempo propio Euclideo τ_E .

3.3. Dinámica: Solución del problema y la acción *on-shell*

La forma más común de describir las trayectorias seguidas por las partículas de prueba, en relatividad general es mediante el uso de la ecuación geodésica. Pero esto lleva a ecuaciones diferenciales de segundo orden, cuya resolución es bastante complicada (ver apéndice C). Por este motivo tomamos un camino alternativo para obtenerlas.

3.3.1. Solución

Para encontrar soluciones para la partícula Euclidea que se mueve en la geometría de la sección anterior, elegimos el ángulo θ como el parámetro tiempo propio euclideo $\tau_E = \theta$, que implica $x^\mu(\tau_E) = x^\mu(\theta) = (t(\theta), z(\theta), r(\theta), \theta)$. Insertando esto en la acción Euclidea (3.16) obtenemos,

$$S^E = mL \int d\theta \left[\frac{1}{z} \sqrt{r^2 - ft'^2 + r'^2 + \frac{z'^2}{f}} + \frac{q_E B}{2} r^2 + q_E (\mu - Qz) t' \right]. \quad (3.17)$$

Los impulsos canónicos resultantes son,

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{r'}{zR}, \\ p_t &= \frac{-ft'}{zR} + q_E (\mu - Qz), \\ p_z &= \frac{z'}{zRf}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde reescalamos al factor mL , y definimos R como:

$$R = \sqrt{r^2 - ft'^2 + r'^2 + \frac{z'^2}{f}}. \quad (3.19)$$

Notemos que como la acción no depende de t , su correspondiente momento p_t es una primera integral de las ecuaciones de movimiento. Por otra parte, dado que la acción no depende

explícitamente en θ , también hay una “energía” conservada dada por la transformada de Legendre del Lagrangiano,

$$p_\theta = p_t t' + p_r r' + p_z z' - L = r^2 \left(\frac{-1}{zR} - \frac{q_E B}{2} \right). \quad (3.20)$$

Utilizaremos estas primeras integrales con el fin de simplificar las ecuaciones de movimiento restantes. Para ello, en primer lugar resolvemos la ecuación (3.20) para obtener:

$$\frac{1}{zR} = - \left(\frac{p_\theta}{r^2} + \frac{q_E B}{2} \right), \quad (3.21)$$

introduciendo (3.21) en los momentos canónicos (3.18) obtenemos:

$$\begin{aligned} p_r &= -r' \left(\frac{p_\theta}{r^2} + \frac{q_E B}{2} \right), \\ p_t &= f t' \left(\frac{p_\theta}{r^2} + \frac{q_E B}{2} \right) + q_E (\mu - Qz) \\ p_z &= -\frac{z'}{f} \left(\frac{p_\theta}{r^2} + \frac{q_E B}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

De este modo, la ecuación de movimiento para la coordenada radial r , puede ser escrita como:

$$\left(\frac{p_\theta}{r} - \frac{q_E B}{2} r \right)'' + \frac{p_\theta}{r} - \frac{q_E B}{2} r = 0. \quad (3.23)$$

Cuya solución puede expresarse como:

$$\frac{p_\theta}{r} - \frac{q_E B}{2} r = -2p_\theta a \cos(\theta - \phi), \quad (3.24)$$

donde a y ϕ son constantes de integración. Introducimos el factor $-2p_\theta$ en la parte derecha por motivos que más adelante quedarán más claros.

Resolviendo el comportamiento de la coordenada radial r obtenemos,

$$r = a \cos(\theta - \phi) \pm \sqrt{\frac{2p_\theta}{q_E B} + a^2 \cos^2(\theta - \phi)}. \quad (3.25)$$

Esto corresponde a un círculo en el plano polar (r, θ) , centrado en las coordenadas polares (a, ϕ) y con radio $R_c = \sqrt{a^2 + 2p_\theta/q_E B}$.

Sin perder generalidad, podemos usar la invarianza traslacional en el plano para anular la constante de integración a de esta forma (3.25) se reduce a:

$$r^2 = \frac{2p_\theta}{q_E B}. \quad (3.26)$$

Esta ecuación nos permite eliminar p_θ en favor de r , el radio θ -independiente de la trayectoria:

$$\frac{1}{zR} = -q_E B. \quad (3.27)$$

El momento canónico restante puede expresarse como:

$$\begin{aligned} p_t &= q_E B f t' + q_E (\mu - Qz), \\ p_z &= -q_E B \frac{z'}{f}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Podemos resolver t' llegando a:

$$t' = \frac{p_t - q_E (\mu - Qz)}{q_E B f} \quad (3.29)$$

Ahora usando (3.27) y la expresión explícita para R (3.19), podemos resolver z' , obteniendo que,

$$z' = \pm \frac{1}{q_E B} \sqrt{\left(\frac{1}{z^2} - (q_E B r)^2\right) f + (p_t - q_E (\mu - Qz))^2}. \quad (3.30)$$

Las ecuaciones (3.26), (3.29) y (3.30), representan una solución completa del problema que hemos reducido a cuadraturas. Las constantes de integración están dadas por el radio r y por el momento p_t .

Para obtener una interpretación geométrica, definamos el máximo de la trayectoria como z_* , donde la velocidad se hace cero obteniendo:

$$p_t = \sqrt{f_* \left((q_E B r)^2 - \frac{1}{z_*^2} \right)} + q_E (\mu - Qz_*), \quad (3.31)$$

donde $f_* = f(z_*)$. Notemos que para tener momentos reales necesitamos $1 > z_* > 1/|q_E B|r$.

En las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 se pueden observar 6 diferentes trayectorias desde distintos ángulos, que varían según los distintos valores asignados a la carga positiva q . Tomemos una de las tres figuras mencionadas anteriormente para analizarla, por ejemplo la 3.2, en ella vemos como la partícula sale del borde AdS y se introduce en el *bulk*. En color azul tenemos representadas las trayectorias para los valores de la carga $q = 0.1, 0.5$ y 0.7 , con $q = 0.1$ la que se encuentra en el centro de la imagen y $q = 0.7$ la línea azul más exterior, y con colores rojo, naranja y amarillo los valores $0.9, 0.95$ y 0.98 respectivamente, vemos que a medida que aumenta la carga la trayectoria empieza a enroscarse más.

En las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 aumentamos la carga considerando $q = 0.99, 0.995$ y 1 . Se percibe que las trayectorias completan una vuelta entera antes de concluir, esto se debe a la repulsión electrostática generada por el agujero negro.

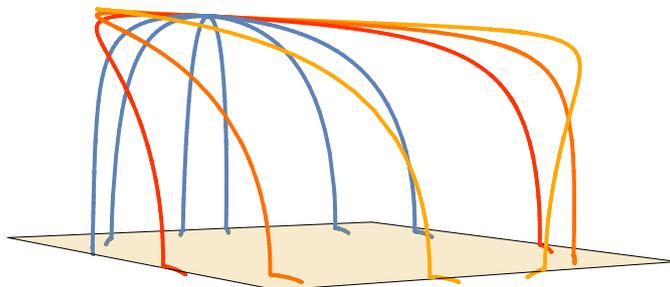


Figura 3.1. Trayectorias para valores diferentes de carga positiva con $\mu \rightarrow 1, B \rightarrow 1, z_* \rightarrow .999, r \rightarrow 1, q \rightarrow 0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95, 0.98$

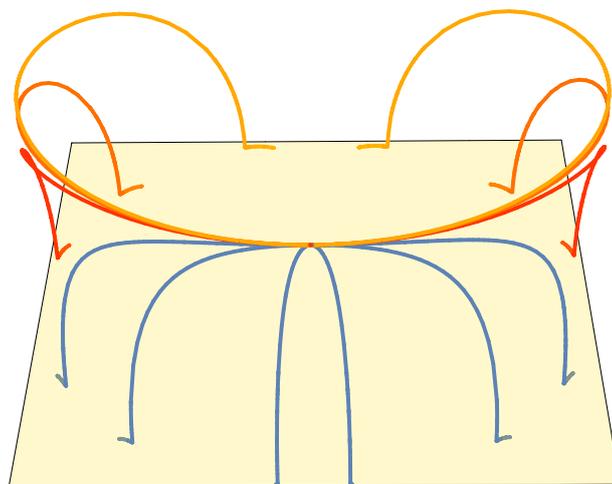


Figura 3.2. Trayectorias para valores diferentes de carga positiva con $\mu \rightarrow 1, B \rightarrow 1, z_* \rightarrow .999, r \rightarrow 1, q \rightarrow 0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95, 0.98$

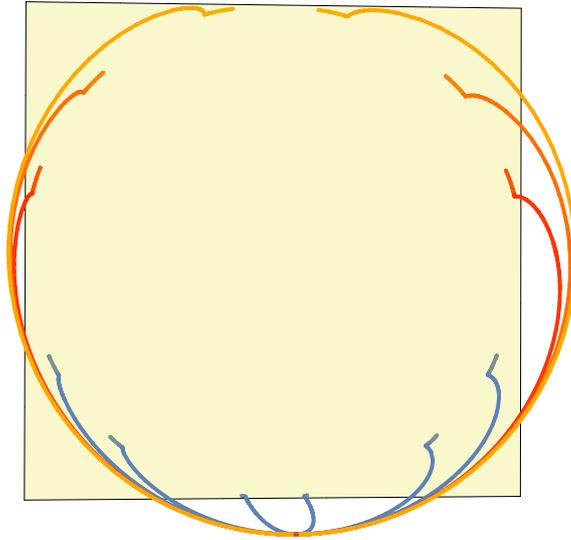


Figura 3.3. Trayectorias para valores diferentes de carga positiva con $\mu \rightarrow 1, B \rightarrow 1, z_* \rightarrow .999, r \rightarrow 1, q \rightarrow 0.1, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95, 0.98$

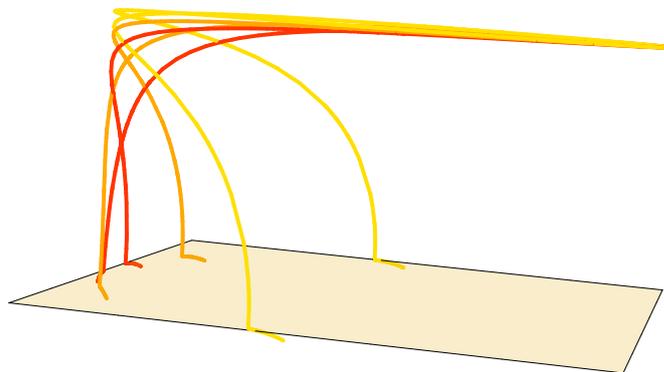


Figura 3.4. Trayectorias para valores diferentes de carga positiva con $\mu \rightarrow 1, B \rightarrow 1, z_* \rightarrow .999, r \rightarrow 1, q \rightarrow 0.99, 0.995, 1$

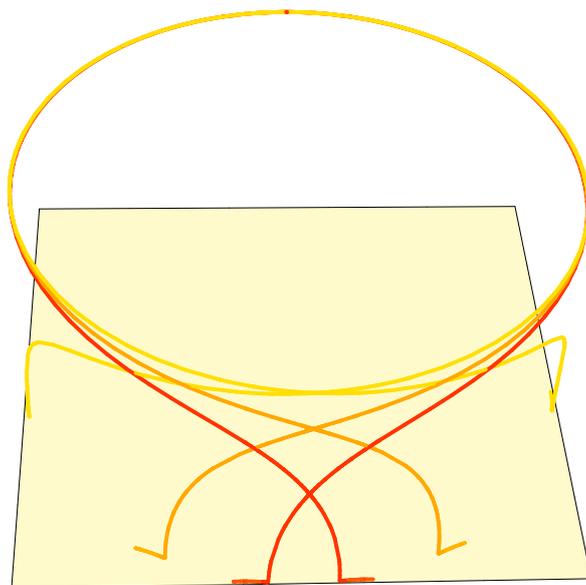


Figura 3.5. Trayectorias para valores diferentes de carga positiva con $\mu \rightarrow 1, B \rightarrow 1, z_* \rightarrow .999, r \rightarrow 1, q \rightarrow 0.99, 0.995, 1$

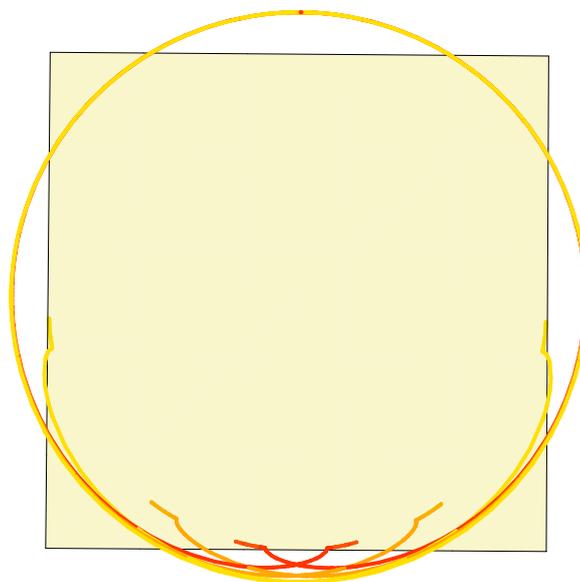


Figura 3.6. Trayectorias para valores diferentes de carga positiva con $\mu \rightarrow 1, B \rightarrow 1, z_* \rightarrow .999, r \rightarrow 1, q \rightarrow 0.99, 0.995, 1$

3.3.2. Acción Euclidea *on-shell*

Haciendo uso de (3.27) y (3.29), podemos escribir la acción Euclidea *on-shell* como:

$$S_{on-shell}^E = \frac{mL}{q_E B} \int d\theta \left\{ -\frac{1}{z^2} + \frac{(q_E B r)^2}{2} + \frac{\mu - Qz}{f} \sqrt{f_* \left((q_E B r)^2 - \frac{1}{z_*^2} \right)} \right\} \quad (3.32)$$

Podemos hacer el cambio de variables de integración $d\theta = dz/z'$ con z' dada por (3.30). Este cambio de variables es singular en el parte superior de la trayectoria donde $z' = 0$. Entonces eligiendo el signo $+$ de (3.30) para la parte de trayectoria que entra en el *bulk*, y el signo $-$ para la parte que deja el *bulk*. Finalmente tenemos:

$$S_{on-shell}^E = \frac{2mL}{q_E B} \int_0^{z_*} \frac{dz}{z'} \left\{ -\frac{1}{z^2} + \frac{(q_E B r)^2}{2} + \frac{\mu - Qz}{f} \sqrt{f_* \left((q_E B r)^2 - \frac{1}{z_*^2} \right)} \right\} \quad (3.33)$$

Este resultado nos da la acción Euclidea *on-shell* como una integral ordinaria en la variable z . La misma depende de los parametros Q, B (para tener un horizonte Euclideo suave imponemos $\mu = Q$), y la carga de prueba q_E . También depende de los parámetros geométricos de la trayectoria, el r y el z_* en la parte más alta de la trayectoria (con la relación p_t dada por (3.31)).

Por último para un posible trabajo futuro queremos tener una expresión para las distancias espaciales y temporales separando los puntos iniciales y finales de la trayectoria. Para la primera, calculamos el cambio total en θ como:

$$\Delta\theta = \int d\theta = 2 \int_0^{z_*} \frac{dz}{z'}. \quad (3.34)$$

Con esto, encontramos la separación espacial dada por:

$$\Delta l = 2r \sin \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right). \quad (3.35)$$

Y para la parte temporal:

$$\Delta t = \int dt = \int t' d\theta = s \int_0^{z_*} t' \frac{dz}{z'}. \quad (3.36)$$

3.3.3. Regularización y dependencia implícita

La integral de la acción Euclidiana *on-shell* (3.33) diverge en el límite $z \rightarrow 0$. Para regularizar esta divergencia, realizaremos los cálculos introduciendo un corte z_ϵ . Entonces escribimos:

$$S_{on-shell}^E = \frac{2mL}{q_E B} \int_{z_\epsilon}^{z_*} \frac{dz}{z'} \left\{ -\frac{1}{z^2} + \frac{(q_E B r)^2}{2} + \frac{\mu - Qz}{f} \sqrt{f_* \left((q_E B r)^2 - \frac{1}{z_*^2} \right)} \right\} \quad (3.37)$$

Podemos usar el mismo corte en (3.34) y (3.36), de la siguiente manera:

$$\Delta\theta = \int d\theta = 2 \int_{z_\epsilon}^{z_*} \frac{dz}{z'} \quad (3.38)$$

En cuanto a la separación temporal, podemos poner:

$$\Delta t = \int dt = \int t' d\theta = \int_{z_\epsilon}^{z_*} t' \frac{dz}{z'} \quad (3.39)$$

Con todo esto, tenemos nuestras funciones $S_{on-shell}^E(z_*, r)$, $\Delta l(z_*, r)$, $\Delta t(z_*, r)$, que definen la función implícita $S_{on-shell}^E(\Delta l, \Delta t)$. Esto es todo lo que necesitamos para calcular la función de Green retardada del operador dual.

A continuación podemos ver algunos de los gráficos obtenidos para nuestra función $S_{on-shell}^E(z_*, r)$, $\Delta l(z_*, r)$, $\Delta t(z_*, r)$.

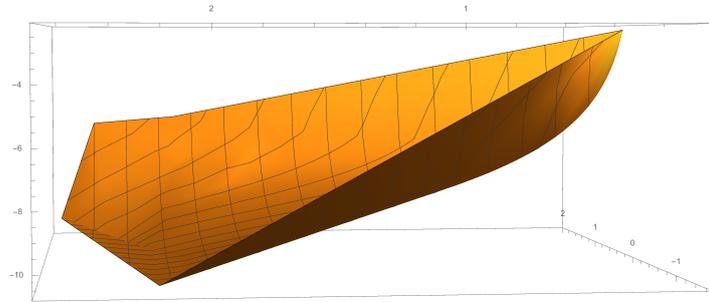


Figura 3.7. $S_{on-shell}^E(z_*, r)$, $\Delta l(z_*, r)$, $\Delta t(z_*, r)$

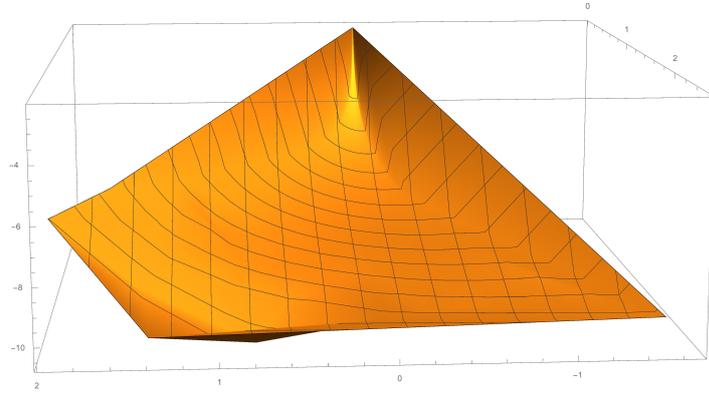


Figura 3.8. $S_{on-shell}^E(z_*, r), \Delta l(z_*, r), \Delta t(z_*, r)$

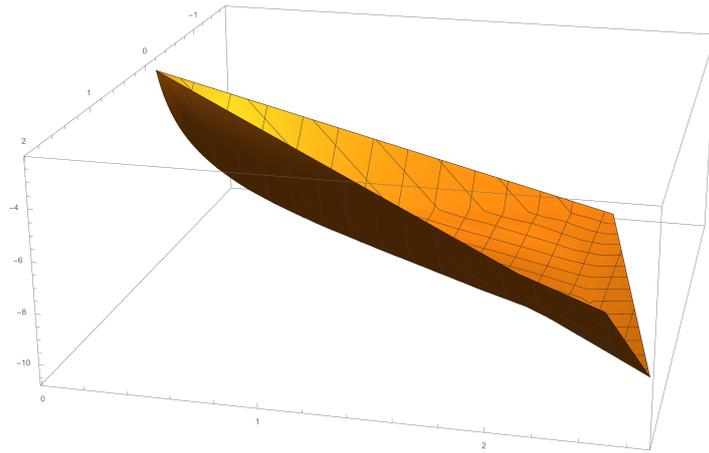


Figura 3.9. $S_{on-shell}^E(z_*, r), \Delta l(z_*, r), \Delta t(z_*, r)$

En este capítulo calculamos la acción *on-shell* utilizando de fondo un espacio-tiempo dado por un agujero negro diónico asintóticamente AdS. Graficamos las trayectorias seguidas por las partículas de prueba en la geometría mencionada anteriormente y en ellas observamos como la partícula sale del borde AdS, se introduce en el *bulk*, y a medida que aumentamos la carga la misma empieza a enroscarse cada vez más. Por último obtuvimos gráficos de la función $S_{on-shell}^E(z_*, r), \Delta l(z_*, r), \Delta t(z_*, r)$. Todo este análisis nos servirá en futuros trabajos para evaluar la conductividad de Hall en la teoría dual (fuertemente acoplada) de frontera.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo introducimos las herramientas necesarias para comprender como funciona la dualidad gauge/gravedad. También realizamos de manera heurística una descripción del efecto Hall. La importancia del mismo remite en que este resulta valioso en el marco astrofísico, esto se pone de manifiesto especialmente en estrellas de neutrones, ya que algunos de los procesos que ocurren en estos objetos están ligados con la física de campos magnéticos intensos. En virtud de lo antes expuesto, la compresión de sistemas Hall holográficos puede ser de gran importancia tanto para corroborar resultados que se encuentran en la bibliografía como también para generar nuevos aportes.

Estudiamos la solución del agujero negro diónico y la determinación de las trayectorias clásicas en ese fondo de manera totalmente analítica y sin uso de herramientas informáticas, esto llevo a realizar estudios en relatividad general, entre los que se encuentran los agujeros negros, y la dinámica de partículas electricamente cargadas en los mismos. También se trabajo con temas de teoría de campos lo cual sera valioso para futuros trabajos, por ejemplo para conectar los cálculos realizados en esta tesis con la otra parte de la dualidad correspondiente a la teoría de campos sobre el borde.

Por último logramos calcular la acción *on-shell* obtenida de manera analítica y de forma numérica. También obtuvimos las trayectorias para partículas cargadas en el fondo de agujero negro diónico, las cuales obtuvimos realizando un programa computacional. Se puede observar en las figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 que cuanto más intenso es el campo de inducción magnético, éste se acopla más con la carga de prueba, lo mismo ocurre al aumentar la carga de la misma, este comportamiento se percibe en las trayectorias de las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 las cuales completan una vuelta entera antes de concluir su trayectoria, esto se debe a la repulsión electrostática generada por el agujero negro.

4.1. Trabajo futuro

En cuanto a posibles desarrollos hacia el futuro de los temas explorados en esta tesis, se podrían explorar los siguientes:

- Una posibilidad es utilizar la función de Green que hemos obtenido para calcular coeficientes de transporte en la teoría dual. En este contexto, se podría calcular la conductividad Hall para verificar que se obtiene la forma predicha en base a principios generales de invarianza de Lorentz.
- Otra posible vía de desarrollo es usar aproximación de línea de mundo para describir superconductores holográficos en un campo magnético. En efecto, la partícula clásica cargada cuya trayectoria hemos estudiado corresponde al cuanto de un campo escalar complejo en la geometría de AdS, que desde el punto de la teoría dual se mapea en el parámetro de orden de una fase superconductora. Así, podríamos estudiar los efectos del campo magnético en la inestabilidad superconductora.
- Finalmente, los efectos de termalización en teorías fuertemente acopladas han sido estudiados en la aproximación de línea de mundo en la literatura. Una opción sería aplicar nuestros resultados al estudio de la termalización en presencia de un campo magnético.

Apéndice A

Todo problema tiene una solución,
aunque esa solución este en otro problema.
T.C.

A.1. Mapeo entre variedades

En este apéndice introduciremos los mapeos entre diferentes variedades, y como se pueden componer. Seguiremos el análisis realizado por Carroll, S. en el libro “Space time and Geometry”. Además veremos como llevar campos tensoriales de una variedad a otra. La variedad en cuestión tiene que terminar siendo una subvariedad de un espacio mayor en la que está embebida, o podemos tener dos copias diferentes de la misma variedad siendo mapeada una a otra.

Consideremos dos variedades M y N , que pueden tener dimensiones diferentes, con sistemas coordinados x^u e y^u , respectivamente. Imaginemos que tenemos un mapeo $\phi : M \rightarrow N$ y una función $f : N \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos construir un mapeo de la composición $(f \circ \phi) : M \rightarrow \mathbb{R}$, que es una función de M . Esta construcción es muy útil y la definimos como *pullback* de f a través de ϕ , y la denotamos $\phi^* f$.

$$\phi^* f = (f \circ \phi) \tag{A.1}$$

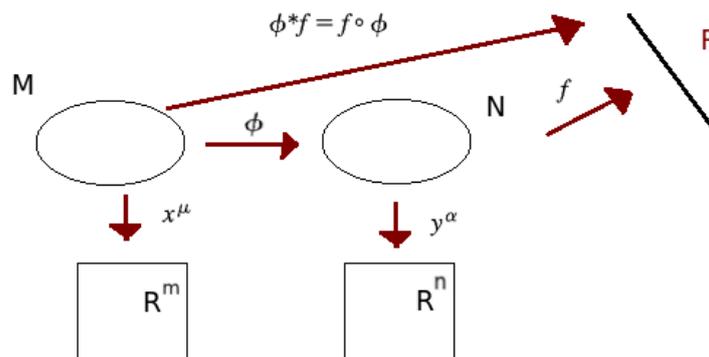


Figura A.1. El *pullback* de una función f de N a M mediante el mapeo $\phi : M \rightarrow N$, es simplemente la composición de ϕ con f .

Podemos definir también un *pushforward* de un vector. Si $V(p)$ es un vector en un punto p de M entonces definimos el *pushforward* de un vector ϕ_*V en el punto $\phi(p)$ en N que acciona sobre funciones de N :

$$(\phi_*V)(f) = V(\phi^*f). \quad (\text{A.2})$$

Veamos de manera un poco más concreta esto que venimos describiendo. Sabemos que una base para vectores en M esta dada por el conjunto de derivadas parciales $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, y una base de N esta dada por el conjunto de derivadas parciales $\partial_\alpha = \partial/\partial y^\alpha$. Entonces si queremos relacionar las componentes de $V = V^\mu \partial_\mu$ con aquellas dadas por $(\phi_*V) = (\phi_*V)^\alpha \partial_\alpha$. (Utilizando $\frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial y^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial y^b}$ sumado sobre b):

$$(\phi_*V)f = (\phi_*V)^\alpha \partial_\alpha f = V^\mu \partial_\mu(\phi^*f) = V^\mu \partial_\mu(f \circ \phi) = V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \partial_\alpha f. \quad (\text{A.3})$$

Esta fórmula nos hace pensar en la operación de *pushforward* ϕ_* como un operador matricial $(\phi_*V)^\alpha = (\phi_*)^\alpha{}_\mu V^\mu$, con la matriz dada por:

$$(\phi_*)^\alpha{}_\mu = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}. \quad (\text{A.4})$$

El comportamiento de un vector bajo la aplicación de un *pushforward* nos hace recordar a la transformación de un vector bajo el cambio de coordenadas. En realidad es una generalización, si M y N son la misma variedad, la construcción es idéntica. Pero ojo, la matriz no tiene porque tener siempre inversa.

Como las uno-formas son duales a los vectores, puede realizarse un *pullback* (pero en general no un *pushforward*). Para hacer esto, recordemos que las uno-formas son mapeos lineales que me llevan de los vectores a los números reales. El *pullback* $\phi^*\omega$ de una uno-forma ω en N puede entonces ser definida como su acción sobre un vector V de M , igualandola con la acción de la misma ω en el *pushforward* con V :

$$(\phi^*\omega)(V) = \omega(\phi_*V). \quad (\text{A.5})$$

Haciendo el mismo análisis, encontramos el operador matricial sobre las uno-formas, $(\phi^*\omega)_\mu = (\phi^*)_\mu{}^\alpha \omega_\alpha$. Entonces:

$$(\phi^*)_\mu{}^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}. \quad (\text{A.6})$$

Esta es la misma matriz que en el *pushforward* pero obviamente con un índice diferente contraído, cuando la matriz actua para realizar un *pullback* sobre las uno-formas.

También podemos realizar estas operaciones con tensores. Empecemos con un tensor $(0, l)$ (uno con l subíndices y sin supraíndices), este es un mapeo lineal del producto directo de l vectores a \mathbb{R} . Por lo tanto podemos realizar un *pullback* no solo con uno-formas sino también con tensores con un número arbitrario de subíndices. La definición es simplemente la acción del tensor original sobre el *pushforward* aplicado sobre los vectores:

$$(\phi^*T)(V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(l)}) = T(\phi_*V^{(1)}, \phi_*V^{(2)}, \dots, \phi_*V^{(l)}). \quad (\text{A.7})$$

Donde $T_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l}$ es un tensor $(0, l)$ de N . De manera similar podemos realizar un *pushforward* sobre cualquier tensor $(k, 0)$ S^{μ_1, \dots, μ_k} haciendo actuar este sobre el *pullback* de las uno-formas:

$$(\phi_* S)(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(k)}) = S(\phi^* \omega^{(1)}, \phi^* \omega^{(2)}, \dots, \phi^* \omega^{(k)}). \quad (\text{A.8})$$

Podemos escribir la matriz de representación de un *pushforward* (A.4) y la de un *pullback* (A.6) extendiéndolo para tensores de rangos mayores solamente asignando una matriz para cada índice, para el *pullback* de un tensor $(0, l)$ tenemos:

$$(\phi^* T)_{\mu_1 \dots \mu_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_l}}{\partial x^{\mu_l}} T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l}. \quad (\text{A.9})$$

Mientras que para el *pushforward* de un tensor $(k, 0)$ tenemos:

$$(\phi_* S)^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}. \quad (\text{A.10})$$

Nuestra imagen completa se ve en la siguiente ilustración. Notemos que los tensores que tengan supraíndices y subíndices, normalmente no se les puede aplicar un *pushforward* ni un *pullback*.

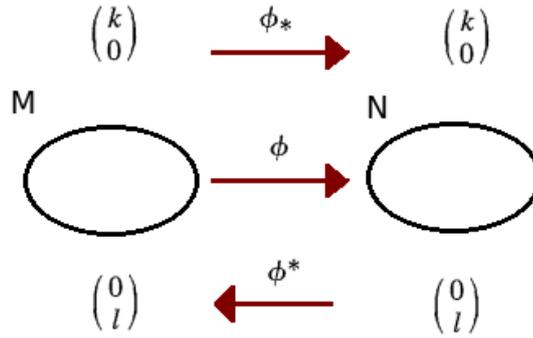


Figura A.2. Un mapeo $\phi : M \rightarrow N$ nos permite realizar un *pullback* sobre tensores $(0, l)$ y un *pushforward* sobre tensores $(k, 0)$.

Apéndice B

¿Hay que convertirse en uno más? No quiero recorrer el camino que todos recorren, no quiero perder lo que siento, lo que creo. No quiero ser solo un pensamiento más. No quiero leer un día esto y pensar que linda era la libertad.
T.C.

B.1. La constante gravitacional de Newton en más de cuatro dimensiones

En este apéndice describiremos como cambia la constante gravitacional de Newton G en un espacio-tiempo de dimensiones arbitrarias. Para ello utilicemos la ecuación de Poisson:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho, \tag{B.1}$$

donde Φ es el potencial gravitacional, ρ es la densidad de masa y G la constante gravitacional de Newton en 4-D.

Si analizamos la parte izquierda de la ecuación (B.1), las unidades de Φ son siempre las mismas (energía sobre masa) y en Δ siempre tenemos dividiendo una longitud al cuadrado. Por lo tanto la parte derecha de la ecuación (B.1) debe también poseer las mismas unidades en cualquier número de dimensiones. Pero ρ es una densidad de masa y tiene diferentes unidades dependiendo de la dimensión, y, como consecuencia de esto las unidades de G deben cambiar al modificar la cantidad de dimensiones.

En N dimensiones podemos escribir (B.1) como,

$$\Delta\Phi^{(N)} = 4\pi G^{(N)}\rho, \tag{B.2}$$

donde ahora $\Phi^{(N)}$ y $G^{(N)}$ son el potencial gravitacional y la constante gravitacional de Newton en un espacio-tiempo N dimensional, con $N = n + 1$ donde n es el número de coordenadas espaciales.

La ecuación (B.2) nos deja definida la gravitación newtoniana en un número de dimensiones arbitrario. El campo gravitacional de una masa puntual cae de la forma $\frac{1}{r^{n-1}}$, si tenemos n dimensiones espaciales. Esto nos deja definido que la fuerza entre dos masas puntuales separadas una distancia radial r cae con $\frac{1}{r^{n-1}}$, para 3-D obtenemos la dependencia clásica de $\frac{1}{r^2}$ para la fuerza gravitacional.

B.1.1. La longitud de Planck

La longitud de Planck (ℓ_p) es la única longitud que se puede construir con potencias de las constantes G , c (velocidad de la luz en el vacío) y \hbar (constante de Planck), la misma queda

B.1. LA CONSTANTE GRAVITACIONAL DE NEWTON EN MÁS DE CUATRO DIMENSIONES

definida como:

$$\ell_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}. \quad (\text{B.3})$$

Para poder calcular ℓ_p en más dimensiones debemos determinar las unidades de $G^{(N)}$. Por lo que tenemos que pedir que las unidades de $G^{(N)}\rho$ sean las mismas en cualquier dimensión. Comencemos por escribir $G^{(5)}$ en función de G ,

$$[G^{(5)}] \frac{M}{L^4} = [G] \frac{M}{L^3} \rightarrow [G^{(5)}] = L[G], \quad (\text{B.4})$$

donde $[]$ denota unidades. Volviendo a la ecuación (B.1) si escribimos G en términos de unidades de longitud y unidades de c y \hbar :

$$[G] = \frac{[c]^3 L^2}{[\hbar]} \rightarrow [G^{(5)}] = \frac{[c]^3 L^3}{[\hbar]}, \quad (\text{B.5})$$

como la longitud de Planck se constituye únicamente con G , c y \hbar podemos quitar los corchetes de la ecuación (B.5) y definir la longitud de Planck 5-D ($\ell_p^{(5)}$),

$$\left(\ell_p^{(5)}\right)^3 = \frac{\hbar G^{(5)}}{c^3} = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right) \frac{G^{(5)}}{G} = (\ell_p)^2 \frac{G^{(5)}}{G}. \quad (\text{B.6})$$

Llegamos entonces a la conclusión que la constante $G^{(5)}$ y G no pueden ser comparadas directamente, pero sí podemos hacerlo con la longitud de Planck. Si es la misma para 4 dimensiones y 5 dimensiones entonces $\frac{G^{(5)}}{G} = \ell_p$, y la constante gravitacional de Newton difiere en un factor ℓ_p . Generalizando,

$$\left(\ell_p^{(N)}\right)^{N-2} = \frac{\hbar G^{(N)}}{c^3} = (\ell_p)^2 \frac{G^{(N)}}{G}. \quad (\text{B.7})$$

Para más detalles ver Zwiebach (2009).

Apéndice C

La disyuntiva es clara, o bien se cultiva la ciencia, la técnica y la investigación y el país es próspero, poderoso y adelanta; o bien no se la práctica debidamente y el país se estanca y retrocede, vive en la pobreza y la mediocridad.
Bernardo Houssay

C.1. Ecuación de las geodésicas

En relatividad general las geodésicas son las trayectorias seguidas por partículas de prueba no aceleradas. Una partícula de prueba es aquella que no modifica la geometría del espacio-tiempo en el que se mueve, pero esto claramente es una aproximación.

Para partículas cargadas en presencia de un campo electromagnético, las ecuaciones a resolver son las siguientes:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (\text{C.1})$$

donde $\mu = t, z, r, \theta$ y $(x^t, x^z, x^r, x^\theta) = (t, z, r, \theta)$.

Los símbolos de Christoffel, que salen de considerar la métrica (3.1) distintos de cero son los siguientes,

$$\Gamma_{tt}^z = -\frac{1}{2} \left(\frac{-1+z}{z} \right) (z^3 Q^2 + z^3 B^2 - z^2 - z - 1) (-2 - z^3 - z^3 Q^2 - z^3 B^2 + 2z^4 Q^2 + 2z^4 B^2), \quad (\text{C.2})$$

$$\Gamma_{zt}^t = \frac{1}{2} \frac{(-2 - z^3 - z^3 Q^2 - z^3 B^2 + 2z^4 Q^2 + 2z^4 B^2)}{z(-1+z)(z^3 Q^2 + z^3 B^2 - z^2 - z - 1)}, \quad (\text{C.3})$$

$$\Gamma_{zt}^t = -\Gamma_{tz}^t, \quad (\text{C.4})$$

$$\Gamma_{zz}^z = -\frac{1}{2} \frac{(2 - 5z^3 - 5z^3 Q^2 - 5z^3 B^2 + 6z^4 Q^2 + 6z^4 B^2)}{z(-1+z)(z^3 Q^2 + z^3 B^2 - z^2 - z - 1)}, \quad (\text{C.5})$$

$$\Gamma_{rz}^r = -\Gamma_{zr}^r = \frac{1}{z}, \quad (\text{C.6})$$

$$\Gamma_{\theta z}^\theta = -\Gamma_{z\theta}^\theta = \frac{1}{z}, \quad (\text{C.7})$$

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = -\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \quad (\text{C.8})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^z = -\left(\frac{-1+z}{z} \right) (z^3 Q^2 + z^3 B^2 - z^2 - z - 1) r^2, \quad (\text{C.9})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = r. \quad (\text{C.10})$$

Y las componentes del tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ distintas de cero son,

$$F_{tz} = -F_{zt} = LQ, \quad (\text{C.11})$$

$$F_{r\theta} = -F_{\theta r} = LB. \quad (\text{C.12})$$

Contrayendo con la métrica obtenemos que:

$$F^t_z = -F^z_t = -\frac{Qz^2}{fL}, \quad (\text{C.13})$$

$$F^r_\theta = -F^\theta_r = \frac{Bz^2}{r^2L}. \quad (\text{C.14})$$

Por lo tanto las ecuaciones a resolver son:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + \Gamma^t_{zt} \left(\frac{dz}{d\tau}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right) + \Gamma^t_{tz} \left(\frac{dt}{d\tau}\right) \left(\frac{dz}{d\tau}\right) = \frac{q}{m} F^t_z \left(\frac{dz}{d\tau}\right), \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + \Gamma^z_{tt} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^z_{zz} \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^z_{\theta\theta} \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = \frac{q}{m} F^z_t \left(\frac{dt}{d\tau}\right), \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \Gamma^r_{rz} \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \left(\frac{dz}{d\tau}\right) + \Gamma^r_{zr} \left(\frac{dz}{d\tau}\right) \left(\frac{dr}{d\tau}\right) + \Gamma^r_{\theta\theta} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{q}{m} F^r_\theta \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right), \quad (\text{C.17})$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \Gamma^\theta_{\theta z} \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right) \left(\frac{dz}{d\tau}\right) + \Gamma^\theta_{z\theta} \left(\frac{dz}{d\tau}\right) \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right) + \Gamma^\theta_{\theta r} \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right) \left(\frac{dr}{d\tau}\right) + \Gamma^\theta_{r\theta} \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right) = \frac{q}{m} F^\theta_r \left(\frac{dr}{d\tau}\right). \quad (\text{C.18})$$

Llegamos a un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales acopladas en derivadas parciales de segundo orden. Notemos que este camino nos lleva a tener que resolver un sistema de ecuaciones muy complicado, por lo cual optamos por utilizar otro método para llegar a las trayectorias.

Para ver soluciones analíticas para geodésicas en este espacio-tiempo ver (Flathmann & Grunau 2016).

Bibliografía

- Aharony, O., Bergman, O., Jafferis, D. L., & Maldacena, J. 2008, JHEP, 10, 091
- Archibald, R. F., Kaspi, V. M., Ng, C. Y., et al. 2013, Nature, 497, 591
- Babichenko, A., Stefanski, Jr., B., & Zarembo, K. 2010, JHEP, 03, 058
- Balasubramanian, V., Bernamonti, A., de Boer, J., et al. 2011, Phys. Rev., D84, 026010
- Bayona, C. A. & Braga, N. R. F. 2007, Gen. Rel. Grav., 39, 1367
- Bekenstein, J. D. 1973, Phys. Rev., D7, 2333
- Borsato, R., Ohlsson Sax, O., & Sfondrini, A. 2013, JHEP, 04, 116
- Cubrovic, M., Zaanen, J., & Schalm, K. 2009, Science, 325, 439
- Cumming, A., Arras, P., & Zweibel, E. 2004, The Astrophysical Journal, 609, 999
- Faulkner, T., Horowitz, G. T., McGreevy, J., Roberts, M. M., & Vegh, D. 2010, JHEP, 03, 121
- Faulkner, T., Liu, H., McGreevy, J., & Vegh, D. 2011, Phys. Rev., D83, 125002
- Flathmann, K. & Grunau, S. 2016, Phys. Rev., D94, 124013
- Frieben, J. & Rezzolla, L. 2012, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 427, 3406
- García, F. & Ranea-Sandoval, I. F. 2015, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, 449, L73
- Giordano, A., Grandi, N. E., & Silva, G. A. 2015, JHEP, 05, 016
- Gubankova, E., Brill, J., Cubrovic, M., et al. 2013, Lect. Notes Phys., 871, 555
- Gubser, S. S., Klebanov, I. R., & Polyakov, A. M. 1998, Phys. Lett., B428, 105
- Gubser, S. S., Rocha, F. D., & Talavera, P. 2010a, JHEP, 10, 087
- Gubser, S. S., Rocha, F. D., & Yarom, A. 2010b, JHEP, 11, 085
- Hartnoll, S. A., Herzog, C. P., & Horowitz, G. T. 2008, Phys. Rev. Lett., 101, 031601
- Hartnoll, S. A., Hofman, D. M., & Tavanfar, A. 2011, Europhys. Lett., 95, 31002
- Hartnoll, S. A. & Kovtun, P. 2007a, Phys. Rev., D76, 066001

BIBLIOGRAFÍA

- Hartnoll, S. A. & Kovtun, P. 2007b, Phys. Rev., D76, 066001
- Hartnoll, S. A. & Petrov, P. 2011, Phys. Rev. Lett., 106, 121601
- Hartnoll, S. A., Polchinski, J., Silverstein, E., & Tong, D. 2010, JHEP, 04, 120
- Hartnoll, S. A. & Tavanfar, A. 2011, Phys. Rev., D83, 046003
- Hawking, S. 1975, Commun. Math. Phys., 43
- Horowitz, G. T. 2011, Lect. Notes Phys., 828, 313
- J. Zaanen, Y.W. Sun, Y. L. & Schalm, K. 2012, The AdS/CMT manual for plumbers and electricians
- Johnson, C. 2003, D-branes (Cambridge Univ. Pr)
- Kapustin, A., Willett, B., & Yaakov, I. 2010, JHEP, 03, 089
- Klitzing, K. v., Dorda, G., & Pepper, M. 1980, Phys. Rev. Lett., 45, 494
- Maldacena, J. M. 1999, Int. J. Theor. Phys., 38, 1113, [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)]
- Minahan, J. A. & Zarembo, K. 2003, JHEP, 03, 013
- Minahan, J. A. & Zarembo, K. 2008, JHEP, 09, 040
- Pestun, V. 2012, Commun. Math. Phys., 313, 71
- Polchinski, J. 1998, String theory (Cambridge Univ. Pr.)
- Polyakov, A. M. 1998, Nucl. Phys. Proc. Suppl., 68, 1
- Puletti, V. G. M., Nowling, S., Thorlacius, L., & Zingg, T. 2011, JHEP, 01, 117
- 't Hooft, G. 1974, Nucl. Phys., B72, 461
- Tsui, D. C., Stormer, H. L., & Gossard, A. C. 1982, Phys. Rev. Lett., 48, 1559
- Witten, E. 1998, Adv. Theor. Math. Phys., 2, 253
- Zwiebach, B. 2009, A First Course in String Theory (Cambridge Univ. Pr)