



UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE LA PLATA

ESPECIALIZACIÓN EN DOCENCIA UNIVERSITARIA

---

## **TRABAJO FINAL INTEGRADOR**

### *Diseño de Intervención Académica*

**TÍTULO:** Diseño de un material didáctico complementario sobre el tema trigonometría para los alumnos del Curso de Nivelación Modalidad B2 de la Facultad de Ingeniería de la UNLP

**ALUMNA:** Lic. María de las Mercedes Trípoli

**DIRECTORA:** Mg. Stella Maris Abate

**CO-DIRECTORA:** Mg. Ángela Maldonado

**2017**

# INDICE

<i>Resumen</i> .....	2
<i>Introducción</i> .....	2
<i>PARTE 1: Contexto de intervención</i> .....	4
<i>El Curso de Nivelación en la Facultad</i> .....	5
<i>Algunos posicionamientos conceptuales para el presente diseño de intervención</i> .....	7
<i>Propuestas de inclusión en la Facultad</i> .....	12
<i>¿Por qué se decide intervenir en trigonometría?</i> .....	14
<i>Objetivos</i> .....	16
<i>Resolución metodológica</i> .....	17
<i>PARTE 2: Materiales didácticos</i> .....	21
<i>Material complementario Ángulos y Relaciones Trigonométricas</i> .....	22
<i>Guía para el Docente</i> .....	42
<i>PARTE 3: Conclusiones y reflexiones</i> .....	48
<i>Agradecimientos</i> .....	51
<i>Referencias bibliográficas</i> .....	51

## *Resumen*

El presente trabajo de intervención consiste en el diseño de un material didáctico de estudio, complementario al texto existente, sobre algunos aspectos del tema trigonometría. Dicho material está dirigido a los alumnos que realizan por segunda vez el Curso de Nivelación de la Facultad de Ingeniería de la UNLP.

La aprobación del Curso de Nivelación habilita a los alumnos a cursar Matemática A, primera asignatura del trayecto de materias de matemática.

El libro de texto existente es de uso predominante en las clases y está indicado para las distintas instancias del Curso de Nivelación.

El material complementario contempla una nueva presentación del tema y una propuesta de actividades que promuevan a la reflexión y comprensión de los contenidos abordados. Además, se tiene en cuenta en su diseño la posibilidad de una mayor vinculación con el material de Matemática A, tanto en la presentación del tema como en el lenguaje utilizado.

## *Introducción*

La Cátedra de Ingreso de la Facultad de Ingeniería de la UNLP brinda un Curso de Nivelación en Matemática, cuyo objetivo es que los alumnos cuenten con una preparación inicial que les permita transitar con menos dificultades las materias del primer cuatrimestre de la carrera, sobre todo las de matemática. Acreditar este Curso de Nivelación habilita a los alumnos cursar Matemática A, asignatura que corresponde al primer semestre del primer año de los planes de estudio de todas las carreras que se dictan en la Facultad, y la primera materia de matemática.

La Cátedra cuenta con un libro diseñado para ser utilizado en el Curso de Nivelación. Dicho material es la base que organiza la exposición de los temas

en sus aspectos conceptuales, contiene ejemplos y propuestas de actividades que se desarrollan durante el curso.

En aquellos casos en que los estudiantes deben volver a realizar el Curso de Nivelación por no haberlo acreditado en instancias anteriores, se ha observado que los mismos saltean lecturas, razonamientos, sin discernir lo que realmente saben de lo que no, sólo repasan los ejercicios y, así, cometen los mismos errores.

Se ha optado por realizar el diseño de un material complementario al texto de uso en la Cátedra. Se hizo foco en algunos temas de trigonometría. Se espera de esta manera, ofrecer otra puerta de entrada para la construcción de saberes vinculados a los ángulos orientados, sistemas de medición, pasaje entre los sistemas y las relaciones trigonométricas. El diseño contempla las particularidades de los ingresantes y la importancia que reviste el tema elegido, tanto para las asignaturas de las ciencias básicas y en particular en Matemática A como para el manejo que del mismo necesita tener un futuro ingeniero.

Se ha organizado el trabajo en tres partes. En la primera se identifica el contexto de intervención, mediante una descripción del Curso de Nivelación, considerando algunos posicionamientos conceptuales, justificando la elección del tema trigonometría y exponiendo los objetivos y la manera en que se realizó el material complementario. En la segunda parte se presenta dicho material y la guía confeccionada para los docentes. Las conclusiones y reflexiones se muestran en la última parte.

# *PARTE 1*

## *Contexto de intervención*

- El Curso de Nivelación en la Facultad
- Algunos posicionamientos conceptuales para el presente diseño de intervención
- Propuestas de inclusión en la Facultad
- ¿Por qué se decide intervenir en trigonometría?
- Objetivos
- Resolución Metodológica

## *El Curso de Nivelación en la Facultad*

En el año 2001, de acuerdo a una propuesta presentada por un grupo de docentes en colaboración con el Área Pedagógica, la Facultad de Ingeniería de la UNLP pone en funcionamiento el ingreso 2002 (Ordenanza N°0034/01)<sup>1</sup>. La propuesta contempla, entre otras cosas, brindar a los alumnos la preparación inicial que les permita afrontar con otras posibilidades los contenidos de las materias del primer cuatrimestre de la carrera, destacando como aspectos fundamentales que pueden conducir al éxito, retraso o fracaso: los conocimientos básicos de matemática, la metodología de estudio y el desenvolvimiento dentro del ámbito de la Facultad. Se propone la realización de un Curso de Nivelación cuyo objetivo general es articular adecuadamente el pasaje de la Escuela Secundaria a la Universidad tratando de equiparar las oportunidades de los ingresantes, trabajando en la nivelación de los contenidos e incorporando una adecuada metodología de estudio. Se plantea hacer una revisión de los temas de matemática tratados en la Escuela Secundaria que tienen directa aplicación en las asignaturas básicas de las carreras de ingeniería, estableciendo estrategias didácticas que prepare a los ingresantes para una adecuación permanente e integrando los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas concretos de la ingeniería, a fin de fijar los conceptos interdisciplinarios. En cuanto a la propuesta didáctica en la clase, se propone motivar el tema con la presentación de un problema sencillo, orientando al alumno para que sea él quien proponga el camino de su resolución y remarcando los conceptos fundamentales que se aplican para la resolución de los distintos problemas propuestos.

Para implementar la propuesta mencionada anteriormente, se crea una Cátedra de Ingreso que se formaliza en el año 2004 mediante la Ordenanza N°089/04<sup>2</sup>. Esta Cátedra ofrece, para quienes estén interesados en seguir

---

<sup>1</sup> Digesto 2003. Régimen Orgánico Legal. Textos completos de la Normativa Vigente. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de La Plata. Ordenanza N°0034 (Ex Resolución N°410/01), págs. 111-119.

<sup>2</sup> Ordenanza 089: Reglamento para el Ingreso a la Facultad de Ingeniería.

alguna de las carreras que se dictan en la Facultad, distintas modalidades del Curso de Nivelación: Modalidad A y Modalidad B.

1. *Modalidad A*: se brinda durante el segundo semestre del año previo al ingreso. Pueden realizarlo aquellos alumnos que se encuentren cursando el último año de la Escuela Secundaria o que ya hayan egresado de la misma. Se ofrece de dos maneras distintas:

1.1. *Curso a Distancia*: se realiza desde septiembre hasta diciembre del año previo al ingreso, a través del entorno virtual educativo Aulas Web, pudiendo inscribirse sólo los alumnos que vivan a más de 60 Km de la Facultad.

1.2. *Curso Presencial*: consiste en clases de apoyo presenciales entre los meses de septiembre a diciembre, para aquellos alumnos que vivan a una distancia de la Facultad menor o igual a 60 Km.

2. *Modalidad B*: se dicta para todos los alumnos inscriptos en la Facultad. Quedan exceptuados de hacerlo los alumnos que hayan aprobado el Curso en la Modalidad A. Esta Modalidad consiste en dos posibilidades:

2.1. *Modalidad B1*: se desarrolla durante 5 semanas con clases diarias de lunes a viernes, a partir de enero.

2.2. *Modalidad B2*: se desarrolla entre marzo y julio, con clases de tres horas tres veces por semana.

Se establece como requisito de aprobación para la Modalidad B1 un 80% de asistencia a clases y aprobar las evaluaciones correspondientes. Los alumnos que no promocionan en esta modalidad pueden realizar el curso nuevamente, en la Modalidad B2.

Inicialmente, junto con la decisión acerca de los contenidos del curso, se diseñó un material didáctico abordando estos contenidos, con ejercitación propuesta, ejercicios resueltos, autoevaluaciones y sugerencias acerca de cómo trabajar, a modo de guía para el estudiante. Este material fue utilizado

tanto para el Curso a Distancia en la Modalidad A, como para los cursos presenciales de las otras modalidades hasta el año 2014<sup>3</sup>. En 2014 se implementó el uso de un nuevo material educativo diseñado para las clases presenciales, que es el Libro “Matemática. Curso de Nivelación” (Miloni, Giandini, & Maldonado, 2014), en el cual se presentan los distintos temas propuestos en el programa analítico del Curso de Nivelación<sup>4</sup>. Dicho material ha incorporado revisiones y es utilizado actualmente.

A partir del año 2016, de acuerdo a la Ordenanza N°1-2-027-01-2016 de la Facultad de Ingeniería, se creó la asignatura Matemática para Ingeniería, en reemplazo del Curso de Nivelación. Si bien se modificó el nombre de la asignatura y de las modalidades, se han mantenido los contenidos temáticos y el material de estudio como también la estructura general de la asignatura. Por lo tanto, esto no impacta en la factibilidad de realizar la propuesta que se presenta en este trabajo. En lo que sigue, se seguirá haciendo referencia a Cátedra de Ingreso, Curso de Nivelación y Modalidad B2 en vez de Matemática para Ingeniería Modalidad Trimestral.

### *Algunos posicionamientos conceptuales para el presente diseño de intervención*

Surge el cuestionamiento de qué es o qué se entiende por material didáctico. Según Gimeno Sacristán (2001), un **material didáctico** es cualquier “...instrumento u objeto que pueda servir como recurso para que, a través de su manipulación, observación o lectura se ofrezcan oportunidades de aprender algo, o bien con su uso se intervenga en el desarrollo de alguna función de la enseñanza”... “El material sirve no sólo para transmitir conceptos o ideales, sino también para avivar el interés del alumno, guiarlo en un determinado

---

<sup>3</sup> En el Curso a Distancia, a lo largo de los años, se implementaron otros materiales didácticos diseñados especialmente que no se describen en el presente trabajo porque la población a la que están destinados es minoritaria dentro de los cursos motivo de esta intervención.

<sup>4</sup> Programa Analítico de Matemática. Curso de Nivelación. Facultad de Ingeniería de la UNLP. <http://www.ing.unlp.edu.ar/contenidos>



proceso a seguir, facilitarle la sensación de que progresa, distinguirle lo fundamental de lo accesorio, ejercitarlo en destrezas específicas”,... entre otras (pág. 1). El material didáctico debe facilitar el desarrollo de una experiencia de aprendizaje.

La necesidad de diseñar un material complementario surge, entre otras motivaciones, por el hecho de que un buen material educativo debe estar contextualizado en un lugar y en un tiempo, y en la instancia de la Modalidad B2, ya pasó el lugar y el tiempo para el cual fue diseñado el libro de la Cátedra de Ingreso.

Se decide confeccionar un material complementario impreso por ser el recurso más usado en el sistema educativo, siendo en muchos casos el medio exclusivo, en numerosas aulas predominantes y en otros complementarios de medios audiovisuales y/o informáticos, pero en todas, de una forma u otra, están presentes (Area Moreira, 1994). Siguiendo al mismo autor, es un material elaborado desde la experiencia profesional, que posee características artesanales que puede no presentar la calidad técnica y pedagógica esperada, pero con el criterio de ser útil y adecuado a un contexto de enseñanza donde los alumnos tienen características específicas.

De acuerdo a un análisis de textos de matemática utilizados en la escuela media, realizado por Llanos & Otero (2012), se observa que en los mismos hay ausencia de **argumentación**. En general, los libros no proponen “confrontaciones que tengan que ser resueltas por el lector, ni plantean soluciones alternativas que permitan generar contra argumentos que requieran de una solución por parte de los estudiantes. Los libros informan” (pág. 142). La concepción de la matemática que prevalece en ellos es más monumental que confrontativa, una matemática que se presenta como una obra acabada. Sin embargo, los libros pueden ser un instrumento más, a partir de los cuales puede generarse el proceso de construcción del conocimiento. En particular, un material didáctico puede ser una herramienta que contribuya a generar dicho proceso.

Según Llanos, Otero & Banks Leite (2007), "...en las aulas de matemática de hoy, no se trabaja deliberadamente en la argumentación, más bien se opta por la repetición de ejercicios, reduciendo el trabajo del alumno a copiar y reproducir el conocimiento propuesto por el profesor. Así propuesta, la matemática oculta el acceso a: el razonamiento, la prueba, la discusión, la posibilidad de compartir significados y la producción de un nuevo conocimiento" (pág. 40). En contraposición a este planteamiento, se busca que el estudiante sea el protagonista del proceso de enseñanza y aprendizaje, que se cuestione y reflexione, corriéndose del lugar de receptor pasivo. Dado que harán uso del material complementario los futuros ingenieros, los conceptos presentados debieran ser útiles, aplicados a la vida cotidiana, ofreciendo ejemplos, realizando preguntas para iniciar la argumentación, para que las definiciones surjan más adelante. La idea es construir un material que garantice...“una optimización pedagógica”...del mismo, "... y no una mera herramienta que facilita la labor de docentes y alumnos en el aula" (LLanos & Otero, 2012, pág. 121)

Se ha observado que un grupo considerable de estudiantes que realizan nuevamente el Curso de Nivelación en la Modalidad B2, al utilizar el mismo material que en la modalidad previa, creen que lo conocen y tienen tendencia a creer que ya saben. Saltean lecturas sin discernir lo que realmente saben de lo que no. Muestran falta de interés. A menudo simplemente repasan los ejercicios ya hechos y cometen los mismos errores. Es por ello que se considera necesario desarrollar estrategias didácticas alternativas para provocar interés y propiciar que los alumnos generen procesos de comprensión.

Ofrecer a los estudiantes un material de estudio no conocido por ellos, puede contribuir para revertir esa falta de interés y lograr buenos aprendizajes que posibiliten evitar el fracaso. En referencia a ello, Litwin (2005 ) cita a John Dewey, quien sostiene que "a menudo, los maestros a quienes se ha aconsejado que eviten temas extraños a la experiencia de los alumnos se sorprenden al descubrir que éstos son estimulados cuando se introduce algo

que está fuera de su comprensión, mientras que en la consideración de lo familiar permanecen apáticos” (pág. 47) .

La Cátedra de Ingreso tiene entre sus objetivos, realizar tareas tendientes a nivelar los conocimientos de los alumnos con el fin de equiparar las oportunidades educativas de los mismos y de esta manera favorecer su retención en la Facultad, evitando la deserción. Es por ello que se buscan alternativas para que los alumnos inicien con éxito sus estudios universitarios. Siguiendo a Litwin (2005 ), se debe tener en cuenta que “los estudiantes difieren en la manera de acceder al conocimiento en términos de intereses y estilos, **puertas de entradas diferentes** para que inicien el proceso del conocimiento” (pág. 56). Es en este sentido que, según Gardner citado por Litwin (2005 ), la aproximación a los conceptos puede hacerse de diferentes formas, entre otras, desde la historia del concepto en cuestión, mediante procesos de razonamiento deductivo, poniendo atención en aspectos sensoriales y valoraciones personales, o relacionando directamente con aspectos prácticos o de aplicación. No todos los estudiantes eligen las mismas puertas de entradas al conocimiento, hay algunas que son más apropiadas para unos y no para otros. Son los docentes los que pueden brindar a los alumnos las diferentes maneras de acercarse al conocimiento de un concepto, reconociendo las áreas de fortaleza de éstos para conocer riquezas de enfoques, entender incomprendidos y tratar de construir puentes entre estilos y posibilidades. Como el texto de la Cátedra es el material de estudio central en el Curso de Nivelación, una posibilidad es intervenir desde ese lugar. Como señala Baquero (2012), es necesario “recuperar la tensión entre sujeto y situación para comprender los procesos de desarrollo y aprendizaje (...) las posibilidades de aprendizaje de los sujetos se definen no sobre la sola base de las supuestas competencias y capacidades individuales, sino sobre esa combinatoria compleja que expresan las relaciones entre sujeto y situación” (págs. 16,18).

Los alumnos que cursan la Modalidad B2 necesitan acreditar sus conocimientos para poder cursar Matemática A. No todos están seguros de poder hacerlo y algunos ya abandonan antes de comenzar. Es por ello que es

necesario, como sugiere Baquero (2012), que los estudiantes se convenzan y los docentes puedan mostrarles que ellos pueden aprender, realizando el diseño de estrategias de sostén y seguimiento que atiendan los estados de los saberes de los estudiantes siendo la meta la obtención de aprendizajes significativos y teniendo en cuenta la recuperación de los saberes previos de los sujetos ya que el logro de aprendizajes significativos sería una de las claves para evitar el fracaso logrando buenos aprendizajes.

La producción de un material complementario para alumnos que, habiendo transitado por el Curso de Nivelación no llegaron a acreditar sus conocimientos, también se puede pensar como otra estrategia didáctica (alternativa) a favor de la de **inclusión**. ¿Qué queremos decir con esto? Como menciona Ezcurra<sup>5</sup>, la masificación en la educación superior se da desde hace aproximadamente 40 años en forma intensa y continua, y se estima que va a persistir. Dicha masificación implica procesos de inclusión social, de ingreso de sectores sociales antes excluidos, de franjas desfavorecidas en la distribución del capital económico y cultural. Esta masificación se asocia con tasas de deserción muy altas: esa población desfavorecida económica y culturalmente, logra ingresar a la universidad pero son las más afectadas por el abandono, siendo el primer año el momento en que más se observa ya que es el choque con la universidad. Ezcurra sostiene que el abandono es un fenómeno educativo, aunque sobre determinado por otros factores. Considera que las dificultades académicas son un factor causal dominante en el abandono pero no exclusivo, que operan en concurrencia con otros factores, un conjunto de barreras convergentes e inherentes a una posición social en desventaja. Sin embargo, el abandono responde, predominantemente, a dificultades educativas. La misma autora considera que las universidades son un condicionante primario, una determinación dominante en el desempeño académico, en la permanencia, en la graduación y, por lo tanto, en el abandono. Plantea como estrategia actuar sobre la enseñanza y sobre las instituciones, un proceso que comprometa la institución en su conjunto, dándoles la prioridad a los alumnos de primer año, con asignación importante de recursos, tantos humanos como financieros.

---

<sup>5</sup> “Hay un proceso de inclusión excluyente”. Entrevista a la investigadora Ana María Ezcurra, autora de igualdad en educación superior. Un desafío mundial. Por Javier Lorca. Página 12. 30 de abril de 2012.

## *Propuestas de inclusión en la Facultad*

En el sentido que se ha mencionado en el apartado anterior, la Facultad de Ingeniería, que año a año recibe más alumnos y de distintos sectores sociales y culturales, ha desplegado en los últimos años, una política de inclusión de la cual podemos mencionar algunas de las estrategias llevadas a cabo:

1. *Cátedra de Ingreso*. Su creación es uno de los planteamientos de la mencionada política de inclusión de la Facultad. Como ya hemos mencionado, la propuesta de dicha Cátedra contempla realizar una revisión de los temas de matemática tratados en el nivel medio con el objetivo de equiparar las oportunidades educativas de los mismos, colaborando en su adaptación a la vida universitaria, brindando oportunidades que permitan la retención del alumno en la Facultad para evitar la deserción. Ya hemos detallado las distintas modalidades que se ofrecen en la Cátedra de Ingreso; en particular, la Modalidad B2 refleja los objetivos de inclusión de la institución educativa.
2. *La asignatura Matemática A*. Surge en el marco de la Reforma del Plan de Estudios 2002 acaecido en la Facultad de Ingeniería dentro de un proceso de adecuación de los mismos, con el propósito de encuadrarlos dentro de los estándares definidos en los documentos del CONFEDI, para de esta manera posibilitar la acreditación de la misma por la CONEAU. La propuesta innovadora consiste esencialmente en transformar el aula de matemáticas en un espacio en el cual todos trabajan. Se opta por un modelo inclusivo con el postulado central de que todos pueden aprender, partiendo de una confianza amplia en las posibilidades del alumno y considerando que cuando se crean condiciones favorables para el trabajo, el alumno puede muy bien llevarlo adelante. Se considera que el escenario áulico tradicional (exposición/ejercitación) predispone al no compromiso de los alumnos con el aprendizaje. Se considera el hecho que un modelo inclusivo no sólo debe estar atento a las demandas de los alumnos sino que además debe interpretar críticamente las demandas institucionales (ubicar

la matemática como una herramienta en la resolución de problemas de ingeniería) y sociales (contribuir a la retención de los alumnos ingresantes y a la formación de egresados críticos). (Bucari, Abate, & Melgarejo, 2004) (Bucari, Abate, & Melgarejo, 2007)

3. *Sistema de Tutorías*. Es otro elemento con el que cuenta la Facultad desde el año 2006. Su objetivo apunta a promover estrategias de formación que favorezcan la permanencia de los inscriptos en la Facultad, minimizando los procesos de desgranamiento y deserción en los trayectos iniciales de la formación. En acuerdo con Ezcurra (2009), que sostiene que el primer año es un tramo crítico que demanda atención específica y prioritaria, el Sistema de Tutoría está orientado a apoyar la inserción y permanencia durante el primer año de los trayectos de formación en la Facultad, ocupándose de esta manera de aquellos alumnos que se encuentran cursando las materias del primer año y quieran reforzar sus competencias académicas y/o presenten dificultades en sus trayectos iniciales de formación o de los alumnos que no hay cumplimentado la totalidad de los requisitos del curso de ingreso. Las tutorías están orientadas a acompañar, apuntalar y sostener procesos formativos de los estudiantes. Dentro de sus acciones, se han conformado Grupos de Estudio que pueden ser comparable con los llamados Seminarios de Primer Año (Ezcurra, 2009), que son dispositivos de intervención diseñados en los años 80 dentro de un movimiento académico registrado en Estados Unidos como parte de la problemática de la deserción estudiantil en educación Superior. Entre los objetivos de estos Seminarios, podemos mencionar el desarrollo de habilidades académicas, el aporte de información sobre recursos y servicios de la institución, habilidades de estudio, planificación académica y manejo del tiempo.

Además de las estrategias de inclusión descriptas anteriormente, la Facultad también ha intervenido con el fin de mejorar la enseñanza de la Física, ha realizado un cambio en el trayecto de las matemáticas y posee un sistema de becas de tipo económico, entre otras.

## *¿Por qué se decide intervenir en trigonometría?*

Para el diseño objeto del presente trabajo se decide abordar algunos aspectos del tema Trigonometría, dada su importancia en las materias de ciencias básicas y en particular en Matemática A, así como el interés que reviste dicho tema para los ingenieros. Entre sus aplicaciones podemos mencionar, entre otras, el cálculo de la pendiente para cuencas de agua, la construcción de estructuras, el trazo de terrenos, y el diseño y medición de piezas para conocer el comportamiento en series y señales.

Además se consideraron los resultados del test diagnóstico<sup>6</sup> que se realiza en la Facultad de Ingeniería desde el año 2013 a los alumnos ingresantes, que muestran que es en el tema trigonometría donde los estudiantes más fallan. Un análisis comparativo de los resultados obtenidos en las cohortes 2013, 2014 y 2015, y la descripción del test se pueden encontrar en Maldonado, Giandini, & Di Domenicantonio (2015) .

A modo de síntesis, se presentan en la Figura 1 los resultados del test, teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- La unidad correspondiente a contenidos de trigonometría es la cuatro.
- Los estudiantes que en el año 2013 realizaron el test diagnóstico ya habían transitado parte del curso de nivelación, habiendo vistos los temas relacionados con las unidades 1, 2 y 5 (Números reales, Ecuaciones y Sistema de ecuaciones, Polinomios) y lo realizaron de forma voluntaria.
- En el año 2014 realizaron el test todos los alumnos del Curso de Nivelación en las primeras clases.

---

<sup>6</sup> El test diagnóstico se enmarca en el Plan Estratégico de Formación de Ingenieros 2012 – 2016 y tiene por “objetivo evaluar las competencias y saberes de los alumnos en el área Matemática al egresar del secundario para aportar al objetivo de generar vocaciones tempranas y facilitar el tránsito entre sistema educativos. La iniciativa fue aprobada por el Consejo General de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) y cuenta con el apoyo de la Secretaría de Políticas Universitarias (SPU) y del Ministerio de Educación de la Nación” (Maldonado, Giandini, & Di Domenicantonio, 2015)

- En el 2015, fueron dos poblaciones las que la realizaron. La primer población fue de todos los ingresantes de Modalidad A y Modalidad B1 al inicio del curso. La segunda población fueron alumnos que en forma voluntaria decidieron realizarlo para precalificar para rendir el examen libre.

	<b>Ingresantes 2013</b>		<b>Ingresantes 2014</b>	
	Cantidad de respuestas	Porcentaje respuestas correctas	Cantidad de respuestas	Porcentaje respuestas correctas
Unidad 1	510	27,45%	936	26,56%
Unidad 2	509	49,71%	936	31,62%
Unidad 3	509	35,56%	936	24,89%
Unidad 4	511	29,16%	936	21,47%
Unidad 5	510	48,63%	936	28,42%

	<b>Ingresantes 2015 - Población 1</b>		<b>Ingresantes 2015 - Población 2</b>	
	Cantidad de respuestas	Porcentaje respuestas correctas	Cantidad de respuestas	Porcentaje respuestas correctas
Unidad 1	459	28,98%	434	39,49%
Unidad 2	459	37,25%	434	52,07%
Unidad 3	459	27,45%	434	41,24%
Unidad 4	459	20,70%	434	27,42%
Unidad 5	459	27,02%	434	45,85%

Figura 1 – Resultados test diagnóstico

Se puede observar que, a pesar de ser poblaciones distintas, fueron las preguntas correspondientes a la Unidad 4: Trigonometría las que presentan, en todos los casos, un porcentaje menor de respuestas correctas, evidenciando que es en dicho tema donde los estudiantes tienen mayores dificultades.

En el año 2016, el test muestra resultados similares a los años anteriores y la preocupación sobre las problemáticas de los alumnos que realizan el Curso de Nivelación en la Facultad de Ingeniería y, en particular, sobre el bajo nivel de



conocimiento en trigonometría fueron divulgados, inclusive, en el diario local Hoy.<sup>7</sup>

## *Objetivos*

El objetivo es diseñar un material didáctico complementario al existente en la Cátedra de Ingreso centrado en algunos aspectos del tema trigonometría, de manera de favorecer la mejor apropiación del conocimiento por parte de los alumnos que realizan el Curso de Nivelación en su Modalidad B2.

Se considera, como principal motivación de este trabajo, que intervenir (diseñando un material didáctico complementario) sobre los alumnos que cursan la Modalidad B2 del Curso de Nivelación es una estrategia didáctica alternativa de inclusión. Son los alumnos con mayores dificultades educativas los que llegan a esta instancia y es en ellos en los que también hay que invertir tiempo y energía para lograr un alumno que aprenda a estudiar y a pensar, y así transitar exitosamente la vida universitaria. Hay que darle señales de que son capaces de aprender y que pueden tener un buen desempeño.

Se intenta que el alumno acceda, de manera alternativa, al conocimiento de algunos temas de trigonometría, colaborando con los objetivos específicos:

- ✓ Revisar la concepción de ángulo e incorporar una manera más general de ángulo orientado que puede ser mayor que un giro (en cualquiera de los dos sentidos).
- ✓ Comprender que la medida en radianes de un ángulo está relacionada con la longitud de un arco de circunferencia.
- ✓ Diferenciar la medida del ángulo en radianes, que es un número real, de la medida del ángulo en grados y pueda resolver el pasaje de un sistema de medición a otro.

---

<sup>7</sup> <http://diariohoy.net/interes-general/ingresantes-universitarios-falencias-en-trigonometria-64619>

- ✓ A partir de un punto en el lado terminal del ángulo en posición normal, incorporar las definiciones de las relaciones trigonométricas (para poder pasar en forma natural a la definición de función circular, en Matemática A, como función de una variable real).

## *Resolución metodológica*

Como se ha mencionado, el diseño contempla las particularidades de los estudiantes de la Modalidad B2, la importancia que reviste el tema elegido, tanto para las asignaturas de ciencias básicas como para el manejo que del mismo necesita tener un futuro ingeniero y porque es donde existen más falencias por parte del estudiante.

Para confeccionar el material se consideraron libros utilizados en la escuela media que abordan el tema trigonometría<sup>8</sup> como así también bibliografía destinada a la enseñanza de nivel universitaria<sup>9</sup>.

En cuanto a los libros indagados, considerar con atención y cuidado distintos ejemplares propuestos para ser utilizados en la educación media permitió determinar los conocimientos que debieran poseer los estudiantes que llegan a la Universidad, en particular los alumnos que llegan a la Facultad de Ingeniería de la UNLP y así, al momento de diseñar el material, partir desde allí para

---

<sup>8</sup> Los libros analizados fueron los siguientes:

- Matemática Moderna. Trigonometría y Elementos de Análisis Matemático. Repetto & Fesquet. Editorial Kapelusz. 1968.
- Matemática 3. Cabrera & Medici. 1981.
- Matemática 2. Luis A. Santaló. Kapelusz Editora. 1993.
- Matemática, una mirada numérica. Aritmética, Probabilidades y Estadística. Gysin & Chemello. A-Z Editora. 1999.
- Matemática 1. Activa. Adriana Berio y otros. Puerto de Palos. Sin fecha de edición.
- Colección Libros y +. EGB 3. Cuadernillo 3. Carpeta de Matemática 9. Garaventa, Legorburu, Rodas & Turano. Aique. 2005.
- Actividades de Matemática 7. Santillana. Marina E. Andrés y otros. 2006.
- Matemática. Pablo Effenberger. Kapelusz Editora. 2010

<sup>9</sup> Los textos universitarios consultados son los que recomienda la Cátedra Matemática A:

- Smith y Minton. "Cálculo". Tomos I y II. Editorial Mac Graw Hill. 2000
- Thomas y Finney. "Cálculo, una variable". Editorial Pearson. 2000
- Stewart. "Cálculo, conceptos y contextos". Editorial Thompson. 1998
- Larson. "Cálculo I". Editorial Houghton Mifflin. 2002

trabajar sobre los conceptos previos que ellos ya poseen. En este sentido, la teoría cognitiva de aprendizaje significativo de Ausubel (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1976) sostiene la idea de combinar la información previa con la nueva para arribar a una comprensión más profunda. Esta idea de activar el conocimiento de estructuras existentes es la que se espera realizar en el alumno ingresante a la Facultad, específicamente en el estudiante que habiendo transitado una Modalidad del Curso de Nivelación, no alcanzó a acreditar los conocimientos requeridos para cursar Matemática A. Se intenta, además, presentar a la matemática como un saber útil, y no enfatizando los aspectos vinculados al rigor matemático y a la axiomática. Se pretende comunicar que la matemática es útil en el mundo de la vida. (LLanos & Otero, 2012)

Entre los libros de nivel medio analizados, se observó que los textos más antiguos poseen abundante contenido teórico incluyendo conceptos que los estudiantes de ingeniería estudian en Matemática A. Los demás textos consultados presentan, en general, poco contenido teórico (son preponderantemente prácticos). De esta manera, se entiende que es el docente el que decide los conceptos a impartir, el orden y forma de darlos. Se infiere, de lo leído, que los alumnos han estudiado los ángulos, las relaciones trigonométricas y han realizado ejercicios de aplicación.

El tema trigonometría ocupa, dentro del tiempo destinado en la Modalidad B2, dos semanas de tres clases en cada una de ellas (cada clase de tres horas). El material complementario diseñado ocupa tres clases. Esta distribución del tiempo permitió confeccionar un material compuesto por la presentación de algunos conceptos y actividades nuevas que promueven un uso diferente del libro del Curso de Nivelación, ofreciendo, como ya hemos mencionado, otras puertas de acceso a la comprensión de los conceptos. Entre los distintos encuentros áulicos, se incentiva al alumno a realizar actividades fuera de la clase, con el objeto de lograr una continuidad de estudio y afianzar los conceptos involucrados en el tema elegido para desarrollar. Asimismo, se propone la utilización del software matemático de visualización GeoGebra, herramienta que será utilizada luego en las clases de Matemática A. Se

proyectó incluir herramientas de comunicación para ese tiempo que existe entre las clases, como puede ser en foros mediante la Plataforma Educativa Virtual Moodle, Facebook, correo electrónico, entre otros. Esta última consideración como así también la de incentivar al alumno a realizar actividades extra áulicas, a pesar de no ser parte del material, forma parte de la utilización del mismo.

El diseño del material contempla también la forma en que se utilizará el mismo, mediante una “guía del docente”, un material orientativo que describe los objetivos del material complementario y la forma de trabajo propuesta en el mismo. La función de esta guía consiste en explicar al docente las “características y modos de uso didáctico del material del alumno” (Area Moreira, 1994, pág. 12), pues muchas veces, como los docentes “no reflexionan ni participan en la selección de contenidos, ni en su organización, ni en las estrategias utilizadas para su presentación, existe la posibilidad de que asuman y reproduzcan valores, intereses, ideologías, etc. que están ocultos, por trabajar unos temas y no otros, por presentarlos de una forma y no de otra, etc.” (Bautista, 1989, pág. 39). Esta guía es un material impreso para el docente como recurso complementario del material del alumno; según Area Moreira (1994), “estas guías del profesor no son elaboradas con la finalidad de facilitar al profesorado la comprensión y puesta en práctica de un proyecto o experiencia de cambio curricular, sino que son materiales que persiguen facilitar la comprensión y utilización de un material concreto. Si se me permite la expresión, estas guías vienen a ser un manual de instrucciones para usar "correctamente" otro medio instructivo” (pág. 12).

Como ya se ha mencionado, se ha observado que un grupo considerable de estudiantes que deben volver a realizar el Curso de Nivelación en la Modalidad B2, al utilizar el mismo material que en la modalidad previa, creen que lo conocen, y tienen tendencia a creer que ya saben, salteando lecturas sin discernir lo que realmente saben de lo que no, mostrando falta de interés, a menudo simplemente repasando los ejercicios ya hechos y cometiendo los mismos errores. Estas observaciones realizadas, la lectura de los libros de textos citados anteriormente y la experiencia docente, determinaron el recorte

del tema trigonometría a desarrollar, las ideas centrales que se abordan y el orden lógico de presentación de los contenidos con el objetivo de generar una nueva experiencia de aprendizaje. De esta manera se consideran los ejes conceptual y pedagógico del material, dos de los tres ejes considerados por Kaplún (2012) . El eje conceptual porque es el que se refiere a los contenidos, su selección y organización; y el eje pedagógico porque implica considerar los destinatarios del mensaje. Como menciona el autor, es a través del último eje mencionado que se establece “un camino que le invitamos a recorrer, una perspectiva nueva que queremos abrirle y que le proponemos descubrir. Al final del camino podrá o no haber efectivamente cambiado o enriquecido algunas de sus concepciones, percepciones, valores, etc. Pero al menos la posibilidad estará abierta” (pág. 3).

Volviendo al eje conceptual, se seleccionaron contenidos que corresponden a la primera parte del capítulo sobre trigonometría del Libro del Curso de Nivelación, ángulos, sistemas de medición de ángulos (sexagesimal y circular), definición de las relaciones trigonométrica e identidad trigonométrica fundamental, porque se consideró que era necesario abordar el material desde el comienzo del capítulo para introducir el tema recuperando la noción de ángulo que ellos ya traen consigo y además, porque uno de los objetivos propuestos era que el alumno diferencie la medida del ángulo en radianes, que es un número real, de la medida del ángulo en grados, que pueda resolver el pasaje de un sistema de medición a otro más naturalmente y que las identidades trigonométricas queden definidas desde un ángulo en su posición normal.

El tercer eje considerado es el comunicacional, referido al modo concreto de relación del material con los destinatarios. Como dice Kaplún (2012), es donde entra en juego el oficio de comunicador del docente. Se utiliza un lenguaje coloquial pero a la vez formal para invitar al estudiante a sentirse parte del material. Se elige usar las puertas (puertas propiamente dichas) como un instrumento u objeto que puede relacionarse con los conceptos que se trabajan a lo largo del material complementario.

# *PARTE 2*

## *Materiales didácticos*

- Material complementario: Ángulos y Relaciones Trigonómicas
- Guía para el Docente



# Material complementario

## Ángulos y Relaciones Trigonométricas

2017

## 1. Introducción

Este material complementa la Unidad IV del libro “Matemática. Curso de Nivelación. Edición 2017”. El objetivo del mismo es brindarles otra manera de abordar algunos de los conceptos estudiados sobre trigonometría. Les proponemos que comiencen a desarrollar el tema con este material y consulten el libro en los puntos que les iremos indicando.

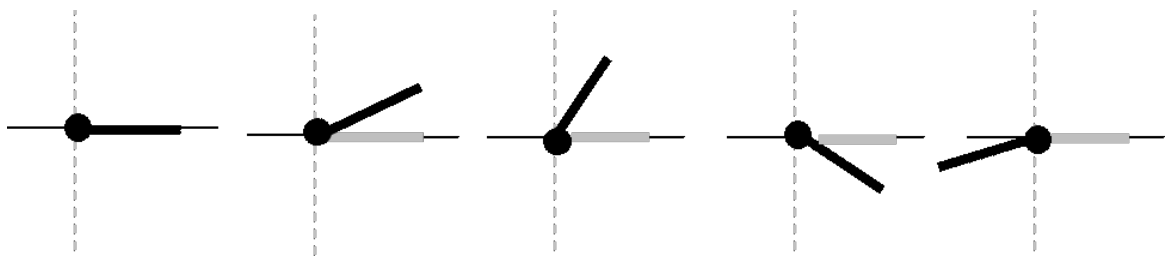
## 2. Puertas que abren y cierran...

En las imágenes siguientes observamos puertas:



Si las mirásemos desde arriba, ¿qué veríamos?

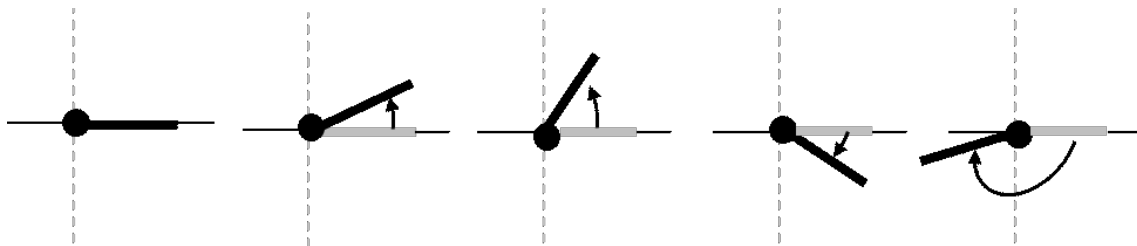
¿Están de acuerdo en que el siguiente podría ser un esquema?



Nota: las líneas horizontales representan las líneas de las paredes, mientras las líneas verticales sólo son líneas de referencias. Los círculos representan el eje de giro de la puerta.

Si quisiéramos indicar cómo abrimos las puertas, podríamos esquematizarlo agregando un arco orientado simulando el “recorrido” de la puerta que se abrió:



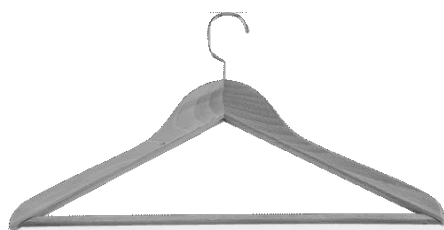
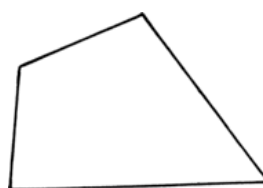
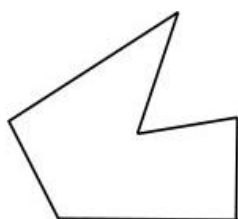


Esta mirada de las “puertas”, ¿remite al concepto que tienen de ángulo?. Discutan con sus compañeros en su mesa de trabajo la siguiente actividad (pueden sumar a sus docentes a esta discusión):

### Actividad 1:

a) Si miramos a nuestro alrededor, podemos descubrir ángulos, no sólo en puertas que abren y cierran, ¿dónde les parece que pueden encontrar ángulos en cosas cotidianas?. Den al menos tres ejemplos de ángulos que puedan observar o esquematizar a partir de los objetos que encuentran en su aula.

b) Señalen los ángulos que observan en las siguientes figuras:

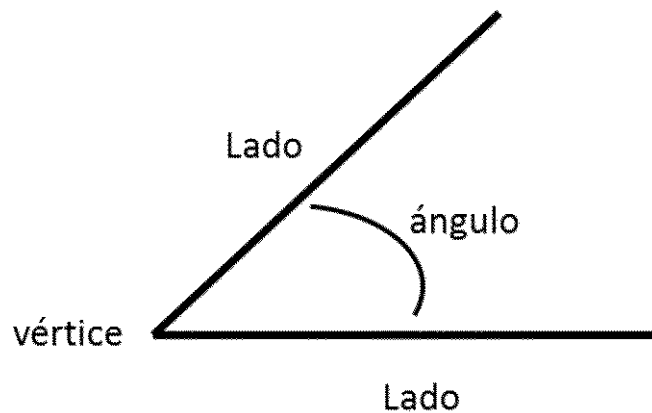


Ahora que ya estamos trabajando con ángulos, daremos en lo que sigue, más precisiones acerca del dicho concepto, ¿qué es?, ¿hay un único concepto de ángulo en todos los ejemplos que estuvimos trabajando?. Pueden discutirlo antes de avanzar con la lectura.

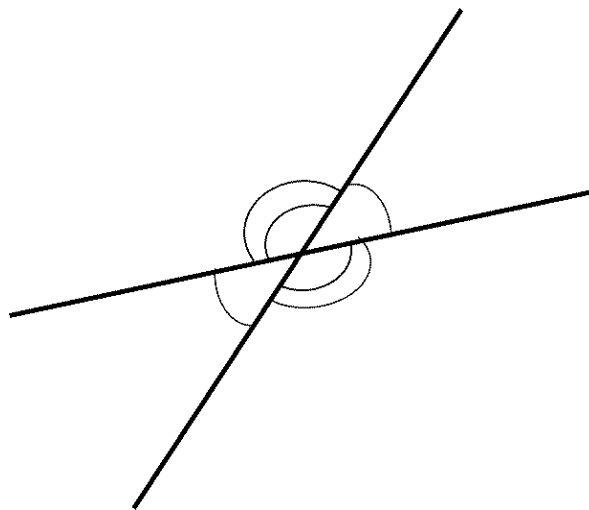
## 2.1 ¿Qué es un ángulo?

La siguiente es la definición de ángulo que han trabajado en su paso por la escuela y que usaron en la Actividad 1:

**Definición:** Un **ángulo** es la región comprendida entre dos semirrectas que tienen un origen en común, donde las semirrectas son los lados del ángulo y el origen en común recibe el nombre de vértice.

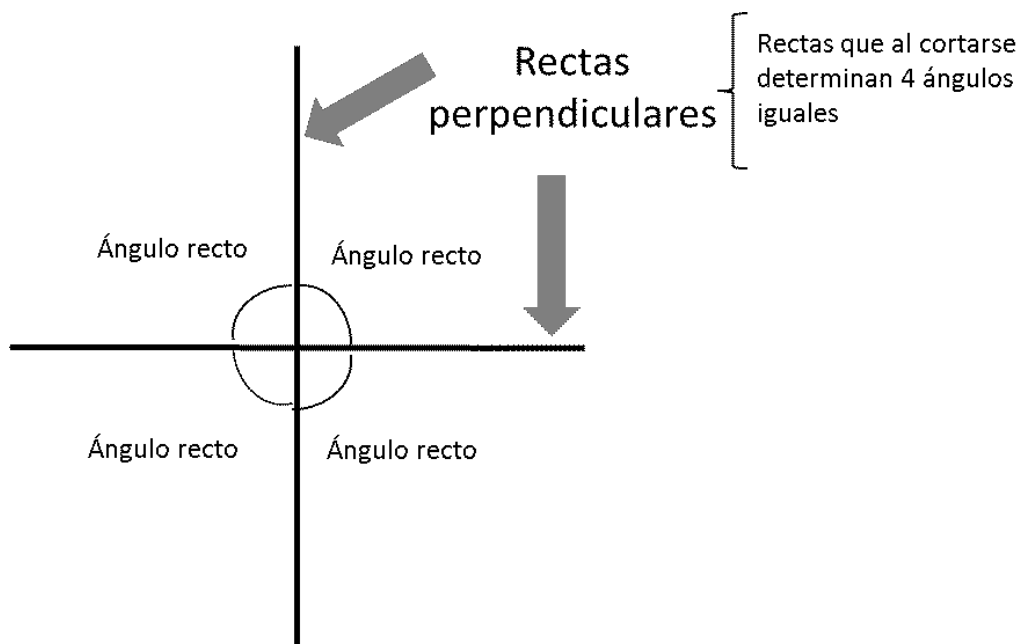


A partir de la definición anterior, es claro que dos rectas al cortarse, como se muestra en la figura siguiente, determinan 4 ángulos. Se llaman congruentes (de igual amplitud) los que se oponen por el vértice.

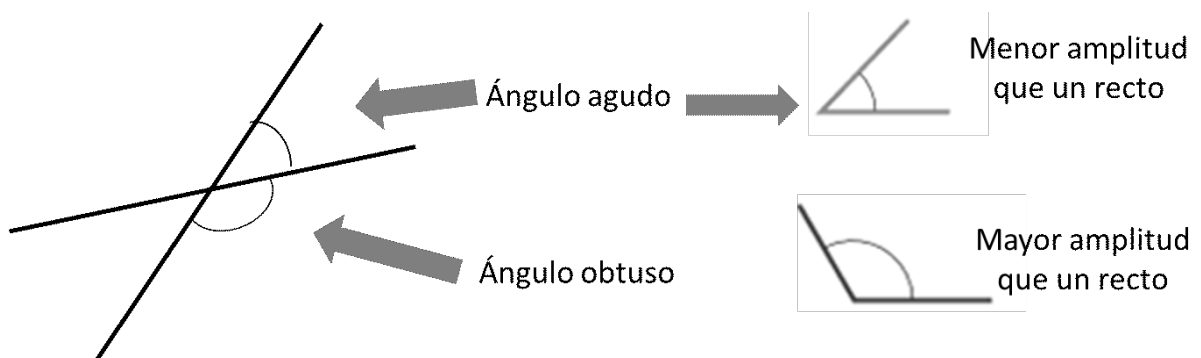


Es muy importante recordar lo siguiente:

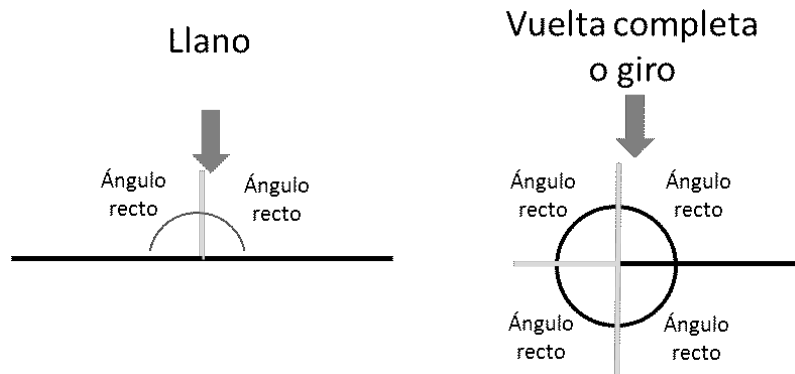
**Definición:** Si dos rectas se cortan formando cuatro ángulos iguales se dice que **las rectas son perpendiculares** y, en ese caso, se dice también que cada uno de los ángulos es un **ángulo recto**



Y teniendo por comparación al ángulo recto, tenemos los agudos y los obtusos:



Además, con dos ángulos rectos tenemos un llano y con cuatro rectos una vuelta completa o giro:



A partir de los ángulos rectos y llanos, hay otra clasificación de ángulos (complementarios y suplementarios), en la página 187 del libro “Matemática. Curso de Nivelación. Edición 2017”. Les sugerimos leerla y realizar la siguiente actividad:

**Actividad 2:**

Representen cada una de las siguientes situaciones y completen la frase:

- 1) Si  $\alpha$  es agudo, su complemento es ..... y su suplemento .....
- 2) El suplemento de un recto es .....
- 3) En un triángulo equilátero todos sus ángulos son .....
- 4) En un triángulo rectángulo, un ángulo es recto y los otros dos son .....
- 5) Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son .....
- 6) Dos de los ángulos de un paralelogramo no rectángulo son ..... y los otros dos son .....
- 7) En un hexágono regular inscrito en una circunferencia, sus ángulos interiores son .....

Retomando ahora el tema de las puertas, supongamos que queremos señalar, de alguna manera, si una puerta abre para adentro o afuera de una habitación, ¿nos sirve la definición que vimos anteriormente?

Tomemos, por ejemplo, las puertas 3 y 4 del inicio. Supongamos que ustedes están, frente a la puerta, dentro de una habitación. Entonces, la primera puerta abrirá para afuera y la segunda para adentro de la misma.

La imagen esquematiza lo que expresamos anteriormente:



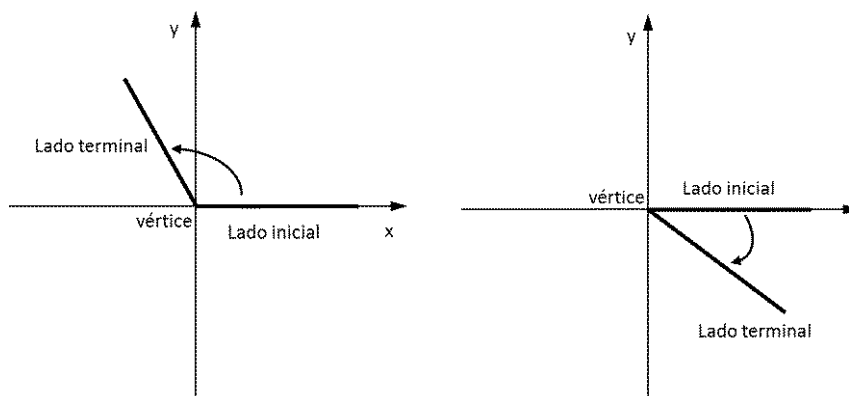
Aparecen aquí, algunos aspectos que la definición de ángulo, que vimos antes, no tuvo en cuenta:

- 1) Que uno de los lados del ángulo queda fijo mientras el otro lado, en este caso la puerta, es el que está “girando”.
- 2) Que el sentido en el que “gira” la puerta (el lado del ángulo que no está fijo) es distinto en cada caso.

Para tener en cuenta estos aspectos, vamos a dar una nueva definición de ángulo.

**Definición:** Diremos que un **ángulo orientado** está en **posición normal** si su vértice se ubica en el origen de coordenadas y está generado por la rotación de una semirrecta que parte desde un **lado inicial** coincidente con el semieje positivo de las abscisas y gira manteniendo fijo su origen hasta llegar a una posición que marca su **lado terminal**.

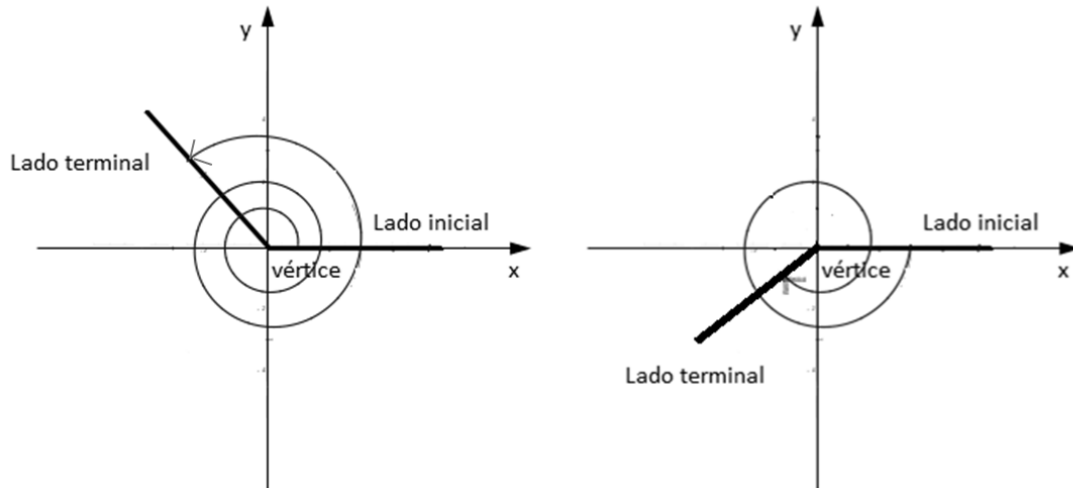
Lo podemos ver en los siguientes esquemas:



*Observación:* diremos que el ángulo es **positivo** cuando está generado en sentido contrario a las agujas del reloj (como el primer gráfico de la figura anterior) y **negativo** cuando está generado en sentido horario (como el segundo gráfico de la figura anterior).

Volviendo al esquema de las puertas de la página del principio, miradas desde arriba, ¿cuáles ángulos son positivos y cuáles negativos? Cuando la puerta está cerrada, ¿hay ángulo? Discute con tus compañeros estos interrogantes. Es importante que las ideas que surjan las conversen con sus docentes.

Es importante mencionar que la rotación del lado terminal puede ser mayor que un giro, tanto en un sentido como en el otro:



Es claro que el esquema anterior no representa la apertura de cualquier puerta. Observen la siguiente figura:

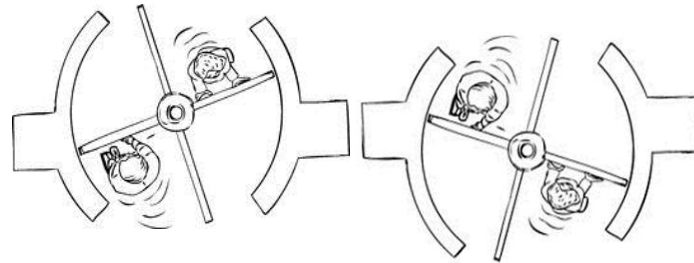


¿Qué tipo de puerta es?

*Seguramente han estado en lugares donde hay puertas giratorias y han pasado por ellas. Si todavía no lo han hecho, busquen algún lugar dónde haya alguna y pasen por ella! Vale la pena la experiencia!!!*

**Actividad 3:**

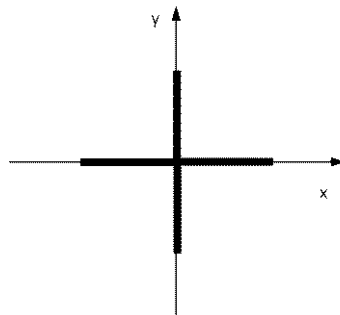
a) Si mirásemos desde arriba el tipo de puertas de la imagen anterior, ¿están de acuerdo que veríamos algo así?



¿En qué sentido se mueve la puerta de la derecha? ¿Y la de la izquierda?

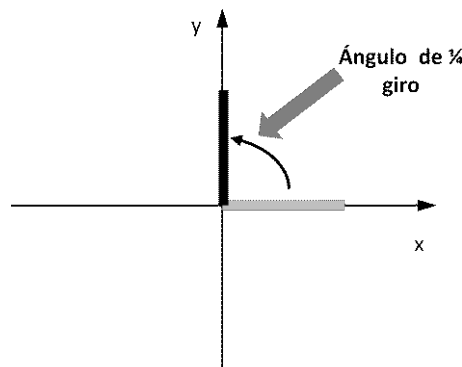
.....  
.....

Detengámonos en la puerta de la izquierda, la que gira en sentido positivo. Podemos hacer un esquema simplificado de la puerta giratoria, dibujando un sistema de ejes cartesianos y haciendo coincidir una de las 4 hojas de la puerta giratoria con el semieje positivo de las x.

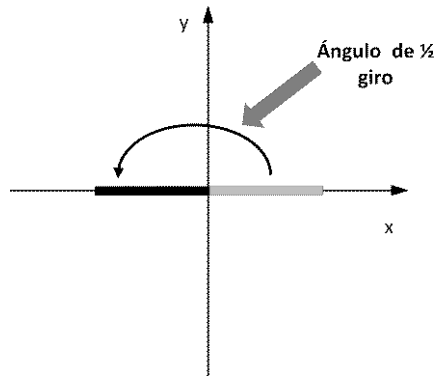


Si ahora prestamos atención sólo a esa hoja (dejando de tener en cuenta las otras 3) podemos interpretar lo siguiente:

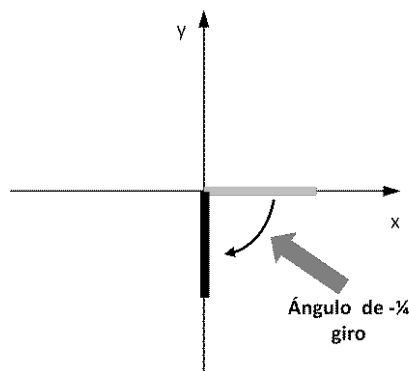
Cuando una persona entra por la puerta que gira en el sentido positivo, describe un ángulo de un cuarto de giro. Podemos escribir “ $\frac{1}{4}$  giro”.



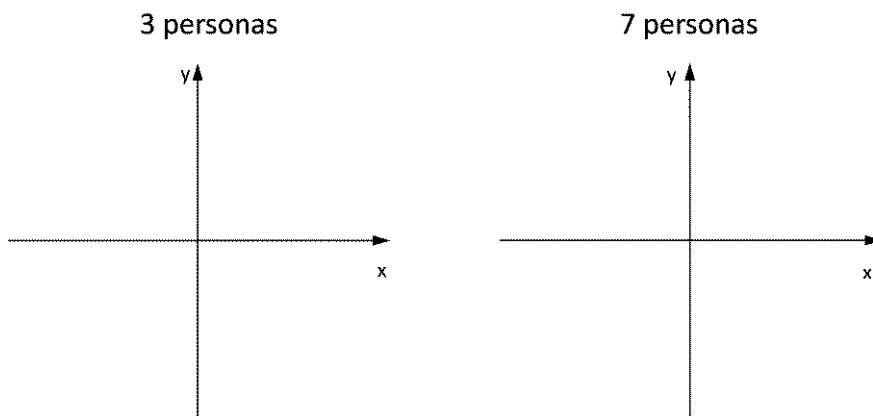
Si entran dos personas, el ángulo que se describe es de “1/2 giro” y coincide con esta situación:



Si tomamos el ejemplo de la puerta que gira en sentido negativo, cuando ingresa una persona el ángulo que describe es el que muestra la figura y decimos que el mismo es “-1/4 giro”.



b) Teniendo en cuenta la puerta que gira en sentido positivo, dibujen en los siguientes sistemas de ejes coordenados, el ángulo determinado para el ingreso de 3 personas y establezcan a qué fracción de giro corresponde. Realicen lo mismo si ingresan 7 personas.

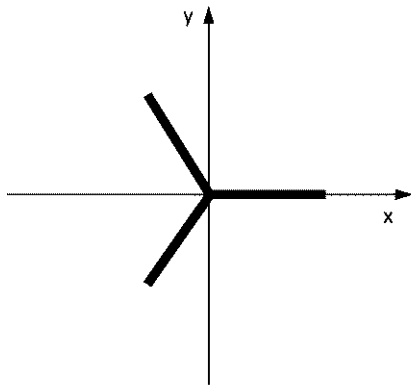


c) Realizar la misma consigna del inciso anterior pero teniendo en cuenta la puerta que gira en sentido negativo.

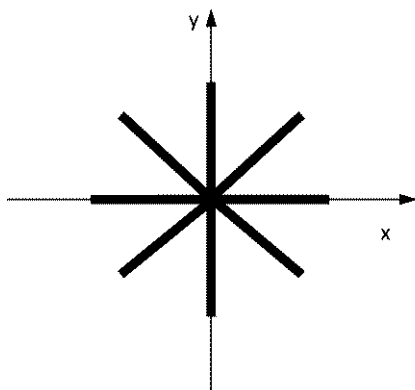


**Actividad 4:**

a) Piensen en estos otros esquemas de puerta giratoria (siempre los espacios entre cada hoja de las puertas son iguales) y completen las siguientes tablas, suponiendo que la puerta gira en sentido antihorario (positivo):



Número de personas que ingresan	Dibujo del ángulo	Fracción del giro que respresenta
2		
7		
		4/3 giro
		6/3 giro



Número de personas que ingresan	Dibujo del ángulo	Fracción del giro que respresenta
9		
1		
		6/8 giro
		11/8 giro



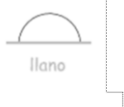


b) Desarrollen la misma actividad pero con la puerta girando en sentido horario (negativo).

## 2.2 Midiendo ángulos...

Ya hemos mencionado que los ángulos pueden compararse de acuerdo a su amplitud, por ejemplo, un ángulo agudo es menor que un recto y éste a su vez es menor que un obtuso o un llano. Volviendo a las puertas, podemos pensar en cuán abiertas están las puertas; si queremos hacer una comparación más precisa, necesitamos una manera de medir ángulos ¿cómo lo hacemos?

A esta altura todos han escuchado hablar de grados. Si nos preguntan cuánto mide un ángulo recto nadie dudaría en decir  $90^\circ$  (donde esto lo leemos como noventa grados). Sin entrar en detalles sobre qué significa medir un ángulo en grados y teniendo en cuenta la clasificación de ángulos mencionada anteriormente, resuelvan la actividad siguiente:

**Actividad 5:** Unan con flechas según corresponda.

	→	$90^\circ$
		$360^\circ$
		Menos de $90^\circ$
		$180^\circ$
		Más de $90^\circ$

Medir un ángulo con grados es una de las formas que hay, más formalmente, uno de los sistemas de medición de ángulos que recibe el nombre de sistema sexagesimal y es el más usado en la vida cotidiana. Por ejemplo, se mencionan los grados sexagesimales cuando se indica que el auto debe estacionar a  $45^\circ$ , entre otras cosas.



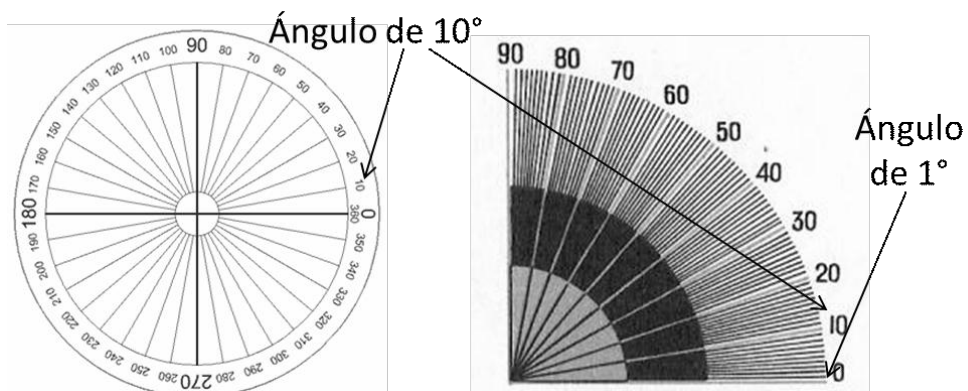
Recordemos algunas definiciones y conceptos sobre este sistema.

## 2.2.1 Sistema sexagesimal

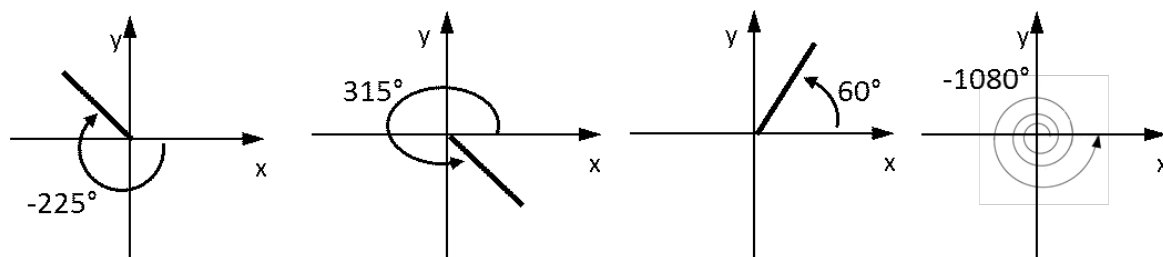
¿Cuál es la unidad de medida del sistema sexagesimal? El grado.

¿Qué es el grado? Un grado sexagesimal es la medida del ángulo, con vértice en el centro de un círculo, de amplitud igual a la 360ava parte del mismo. Por lo tanto, si el lado terminal realiza una rotación completa, en el sentido contrario a las agujas del reloj, el ángulo generado mide  $360^\circ$ .

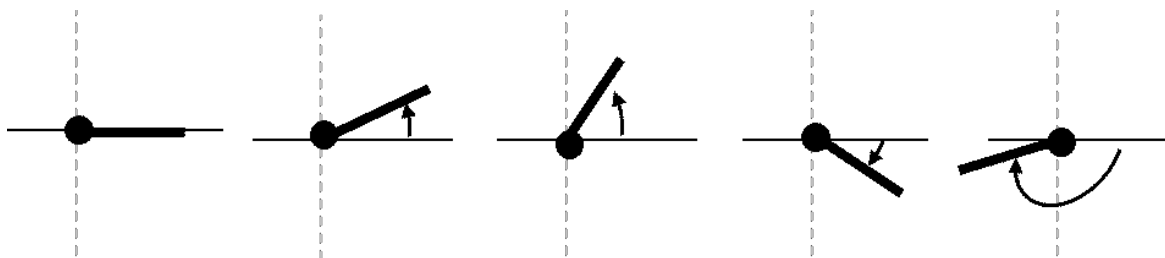
En el esquema de abajo se puede observar, a la izquierda, un círculo dividido cada 10 grados. A la derecha se señala un ángulo de  $1^\circ$  comparado con uno de  $10^\circ$  para visualizar qué sería un grado gráficamente. Observen que se dividió un ángulo de  $10^\circ$  en 10 partes iguales!



Algunos ejemplos de ángulos con su medida en grados serían:



Estimen, para cada una de las puertas de la página del inicio, cuál es la medida en grados que indica su apertura. No olviden tener en cuenta la orientación de cada ángulo. Marquen directamente en el esquema de abajo! Corroboen sus sospechas con un transportador.



#### Actividad 6:

Les sugerimos realizar los ejercicios 1 al 4 de la pág.207 del libro del Curso de Nivelación.

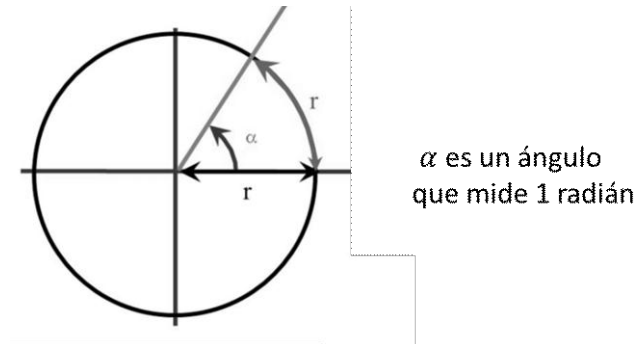
### 2.2.2 Sistema circular

La unidad de medida del sistema radial es el radián. Para definirlo vamos a realizar una actividad en el software GeoGebra. Para ello sólo tienen que ir al siguiente link y tus docentes te guiarán en la actividad.

Link: <https://www.geogebra.org/m/tY336Hwm>

Con la actividad anterior realizamos una construcción que nos permite dar la siguiente definición de radián:

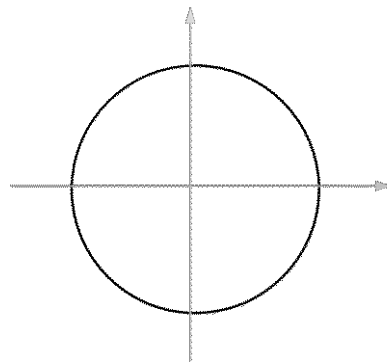
Un radián es la medida del ángulo con vértice en el centro de un círculo de radio  $r$ , cuyos lados determinan sobre la circunferencia un arco de longitud igual al radio.



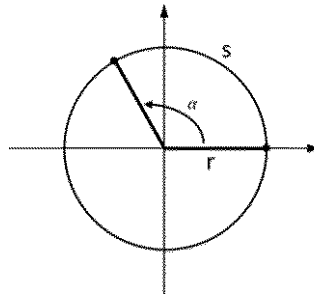
*Esta definición nos dice que el ángulo medido en radianes, no depende del radio de la circunferencia, sólo relaciona la longitud de un arco con el radio de la circunferencia.*

### Actividad 7:

Piensen cómo sería un ángulo que mide 2 radianes y gráfiquenlo en la circunferencia de abajo. ¿Cuántos radianes les parece que tiene una circunferencia completa? ¿Por qué?



**Definición:** Si  $\alpha$  es un ángulo en posición normal como muestra la figura:



La medida en radianes de  $\alpha$  es:

$$\alpha = \frac{s}{r} = \frac{\text{longitud del arco en la circunferencia de radio } r}{\text{radio de la circunferencia}}$$

Esto nos permite ver cuántos radianes mide un ángulo  $\alpha$  de un giro:

$$\alpha = \frac{\text{Longitud de la circunferencia}}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radianes}$$

#### Actividad 8:

- 1) Si el ángulo determinado por una circunferencia completa es  $2\pi$  radianes, ¿cuánto mide en radianes un ángulo llano? ¿Y un ángulo recto?
- 2) Supongamos que estamos en una habitación que tiene dos puertas de 70cm de ancho y queremos salir de ella. Una de las puertas se abre  $1^\circ$  y la otra 1 radián, ¿por cuál intentarían pasar?, ¿pueden hacerlo? ¿Es necesario saber la medida de la puerta? Discutan con sus compañeros y docentes.

#### Actividad 9:

Regresen a la Actividad 4 y agreguen en cada cuadro dos columnas. En una de ellas determinen la medida en grados de los ángulos involucrados y en la otra, la medida en radianes.

### 2.2.3 Cómo pasar de un sistema a otro...

Según sobre lo que estemos trabajando, a veces es necesario medir los ángulos en grados y otras veces es necesario medirlo en radianes. A esta altura hay varios ángulos de los cuales ya conocen su medida, tanto en grados como en radianes.

Completen el siguiente cuadro:

Grados	0		360	45		270
Radianes		$\pi/2$			$\pi$	

Pero, ¿cómo pasamos en general una medida de un ángulo que está en grados a radianes? ¿y viceversa?

Para pensar en esto tenemos que conocer alguna equivalencia entre grados y radianes, por ejemplo, sabemos que un ángulo que mide  $180^\circ$  mide  $\pi$  radianes. Además, sabemos que la relación entre las medidas en grados y las medidas en radianes de un ángulo se conserva.

Lo veremos mediante un ejemplo:

Supónganse que sabemos que la medida de un ángulo en grados es  $30^\circ$  y queremos saber cuál es la medida de ese ángulo en radianes:

Si llamamos  $\alpha$  a la medida en radianes del ángulo dado (de  $30^\circ$ ) podemos afirmar la siguiente proporción (que expresa la igualdad entre la relación de las medidas en grados de los ángulos de  $180^\circ$  y de  $30^\circ$  y sus correspondientes medidas en radianes):

$$\frac{180^\circ}{30^\circ} = \frac{\pi}{\alpha}$$

Entonces:  $180^\circ \times \alpha = \pi \times 30^\circ$

Luego,  $\alpha = \frac{\pi \times 30^\circ}{180^\circ}$ . Y así resulta que  $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Así llegamos a que un ángulo que en grados mide  $30^\circ$  equivale a  $\frac{\pi}{6}$  radianes.

Supongamos ahora que un ángulo mide  $\frac{\pi}{6}$  radianes, ¿cuál es la medida de ese ángulo en grados?

Si llamamos  $\beta$  a la medida en grados del ángulo dado (de  $\frac{\pi}{6}$  radianes) , podemos afirmar la siguiente proporción (que expresa la igualdad entre la relación de las medidas en radianes de los ángulos de medida  $\pi$  y de  $\frac{\pi}{6}$  y sus correspondientes medidas en grados):

$$\frac{\pi}{\pi/6} = \frac{180^\circ}{\beta}$$

Entonces,  $\pi \times \beta = 180^\circ \times \frac{\pi}{6}$

Luego,  $\beta = \frac{180^\circ \times \frac{\pi}{6}}{\pi}$  . Y así resulta que  $\beta = 30^\circ$

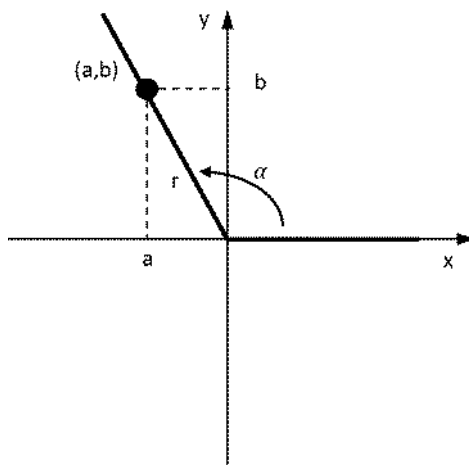
Así llegamos a que un ángulo que mide  $\frac{\pi}{6}$  radianes equivale a  $30^\circ$  (como era de esperar...)

#### Actividad 10:

Les sugerimos realizar los ejercicios 5 al 10 del libro del Curso de Nivelación (pág.207)

### 3. Relaciones trigonométricas de un ángulo

Supongamos que tenemos un ángulo  $\alpha$  en su posición normal y un punto (a,b) en el lado terminal como muestra la figura:





**Definición:** Se definen las **relaciones trigonométricas seno, coseno y tangente** de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{b}{r} = \frac{\text{ordenada del punto } (a, b)}{\text{distancia del punto } (a, b) \text{ al } (0,0)}$$

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{a}{r} = \frac{\text{abscisa del punto } (a, b)}{\text{distancia del punto } (a, b) \text{ al } (0,0)}$$

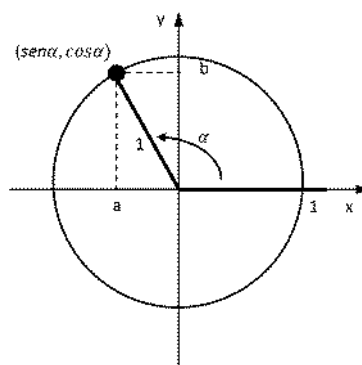
$$\text{tang}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} = \frac{b}{a} = \frac{\text{ordenada del punto } (a, b)}{\text{distancia del punto } (a, b) \text{ al } (0,0)}$$

De la misma manera que pasaba con los radianes, las definiciones anteriores no dependen del punto perteneciente al lado terminal. Discute con tus compañeros y consulta con tus docentes.

Existen otras relaciones trigonométricas que se definen a partir de las anteriores. Les sugerimos leerlas del libro del Curso de Nivelación, en la pág. 193.

Mirando la figura de la página anterior y la definición de las relaciones trigonométricas, observamos que:

Si la distancia del punto  $(a,b)$  al  $(0,0)$  es 1, entonces  $\text{cos}\alpha = a$  y  $\text{sen}\alpha = b$ . Además, la ecuación de la circunferencia de radio 1 está dada por  $a^2+b^2=1$ , entonces  $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$ .

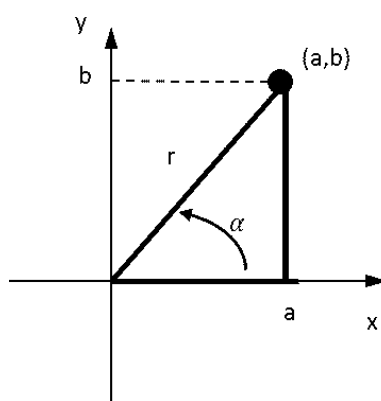


La igualdad anterior dada por  $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$   
recibe el nombre de **Identidad Fundamental**

A partir de esta identidad y de las definiciones de las relaciones trigonométricas se pueden obtener otras identidades; algunas de ellas puedes encontrarlas en las págs. 195 y 196 del libro del Curso de Nivelación. Tanto la relación fundamental como las que derivan de ellas, son muy usadas en trigonometría.

**Actividad 11:** Les sugerimos realizar los ejercicios 11 al 20 del libro del Curso de Nivelación (págs.207-208)

*Observación: si el ángulo está ubicado en el primer cuadrante (ángulo agudo), entonces las relaciones trigonométricas de un ángulo se relacionan con los lados de un triángulo rectángulo construido como se indica en la figura siguiente:*



Por ejemplo, el  $\text{sen}(\alpha) = \frac{b}{r}$ , donde  $b$  es el cateto opuesto al ángulo  $\alpha$  y  $r$  la hipotenusa del triángulo rectángulo.

**Actividad 12:** Les sugerimos realizar el ejercicio 21 del libro del Curso de Nivelación (pág.208).

**Hasta aquí hemos trabajado sobre algunos de los conceptos estudiados en el capítulo de trigonometría mediante una propuesta diferente de acercarse al conocimiento, con actividades que complementan el texto de la Cátedra.**

**Para completar los conceptos no abordados en este material, retomen la lectura del libro del Curso de Nivelación a partir de la pág. 197.**

# *Guía para el Docente*

## Material complementario Tema: Ángulos y Relaciones Trigonométricas

### **¿Cómo fue pensado este material?**

#### **1. Introducción**

Cuando se trabaja con materiales educativos diseñados por otras personas, se generan dudas; por ejemplo, el orden elegido para abordar los conceptos involucrados o la elección de ejemplos y/o ejercicios. Esta “guía para el Docente” es un material orientativo que describe los objetivos del material complementario y la forma de trabajo propuesta en el mismo. La función de esta guía consiste en explicar al docente las “características y modos de uso didáctico del material del alumno” (Area Moreira, 1994, pág. 12), pues muchas veces, como los docentes “no reflexionan ni participan en la selección de contenidos, ni en su organización, ni en las estrategias utilizadas para su presentación, existe la posibilidad de que asuman y reproduzcan valores, intereses, ideologías, etc. que están ocultos, por trabajar unos temas y no otros, por presentarlos de una forma y no de otra, etc.” (Bautista, 1989, pág. 39). Se persigue facilitar la comprensión y utilización del material complementario sobre Ángulos y Relaciones Trigonométricas destinado a los alumnos.

El material complementario fue desarrollado para complementar la Unidad IV del Libro: “Matemática. Curso de Nivelación. Edición 2017”. El objetivo del mismo es brindar a los alumnos de la Modalidad B2 otra manera de abordar algunos de los conceptos estudiados sobre trigonometría, para ayudar a que puedan incorporar esos conocimientos que todavía necesitan revisar. El diseño contempla las particularidades de los ingresantes y la importancia que reviste el tema elegido, tanto para las asignaturas de las ciencias básicas y en particular de Matemática A como para el manejo que del mismo necesita tener un futuro ingeniero.

Se espera ofrecer otra puerta de entrada para la construcción de saberes vinculados a algunos temas de trigonometría, colaborando con los siguientes objetivos:

- ✓ Revisar la concepción de ángulo e incorporar una manera más general de ángulo orientado que puede ser mayor que un giro (en cualquiera de los dos sentidos).
- ✓ Comprender que la medida en radianes de un ángulo está relacionada con la longitud de un arco de circunferencia.

- ✓ Diferenciar la medida del ángulo en radianes, que es un número real, de la medida del ángulo en grados y pueda resolver el pasaje de un sistema de medición a otro.
- ✓ A partir de un punto en el lado terminal del ángulo en posición normal, incorporar las definiciones de las relaciones trigonométricas (para poder pasar en forma natural a la definición de función circular, en Matemática A, como función de una variable real).

Se prevé, según el cronograma de la Cátedra, que el tema trigonometría ocupe dos semanas de tres clases cada una. En particular, este material está previsto para tres de esas clases:

Clase 1	Trabajo con el texto desde el inicio hasta la Actividad 3 inclusive
Trabajo en casa	Actividad 4
Clase 2	Hasta el pasaje entre los sistemas de medición (sin incluir)
Trabajo en casa	Actividad 9
Clase 3	Hasta el final del texto

A continuación se describe el propósito y las decisiones tomadas en cada sección del material.

## 2. Puertas que abren y cierran...

La idea de este párrafo es introducir el concepto de “ángulo orientado” y “ángulo en la posición normal” desde la observación y esquematización de una situación cotidiana.

El esquema de la apertura de las puertas agrega a la noción de ángulo no orientado (que el alumno ha trabajado en la escuela observando ángulos de polígonos, por ejemplo) la idea de que uno de sus lados (lado inicial) quede fijo, pudiendo interpretarse así que el ángulo es el “barrido o giro” que el otro lado hace hasta llegar a una posición final (lado terminal). De este modo, quedará en claro que el sentido del giro puede ser en dos direcciones, el sentido contrario a las agujas del reloj (positivo) o el sentido de las agujas del reloj (negativo).

La idea es que antes de definir formalmente un ángulo, piensen en la vida diaria, en dónde pueden encontrar ángulos, por eso incluimos la Actividad 1.

Los interrogantes planteados al final de la sección sobre qué es un ángulo y si hay un único concepto de ángulo en los ejemplos que se estuvieron trabajando, tienen la finalidad que el estudiante note la diferencia entre los ángulos “orientados” como en el ejemplo de las puertas y los de la Actividad 1.

## **2.1 ¿Qué es un ángulo?**

Comenzar con la definición tradicional de ángulo permite recuperar las concepciones que los alumnos traen desde la escuela media y por lo tanto pareciera ser una buena manera de comenzar, para luego, retomando la idea de las puertas del párrafo anterior y la discusión sobre los interrogantes finales de la sección, introducir el concepto de un ángulo (orientado) en posición normal (con ejes cartesianos).

Se aprovecha este párrafo para recuperar las nociones de ángulos determinados por dos rectas que se cortan. Esto permite (antes de incorporar la idea de medir) definir y clasificar los ángulos en: recto, agudo, obtuso, llano y giro o vuelta completa. También se aprovecha para notar que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Se sugiere que el alumno retome el Libro: “Matemática. Curso de Nivelación. Edición 2017” para trabajar con la clasificación de ángulos complementarios, suplementarios, etc. y se incluye la Actividad 2 para que afiance y repase las clasificaciones mencionadas.

A continuación de la definición de ángulo orientado en posición normal, se presentan algunas preguntas que simplemente se hacen para que el estudiante comprenda a qué llamamos ángulo positivo y negativo. Mirando esto en las puertas cobra sentido esta diferenciación ya que permite, justamente, hablar de si una puerta (en este caso) abre hacia afuera o hacia adentro de la habitación. La idea de preguntar sobre la posibilidad de existencia de ángulo en la puerta cerrada, es para instalar el ángulo nulo.

Como se ha dejado entrever que un ángulo puede tener más de un giro, se recurrió a la puerta giratoria. La idea es hacer preguntas que hagan que el alumno piense todo lo que aporta el esquema de una puerta giratoria a la noción de ángulo orientado en la posición normal. En las Actividades 3 y 4 se propone, mediante esquemas sencillos de posibles puertas giratorias, que el alumno trabaje e identifique fracciones de un giro. Esto está pensado para el trabajo posterior con radianes, ya que son las fracciones del giro las que inicialmente aparecen. La Actividad 4 está planteada para que los alumnos la realicen en sus casas y discutan sobre las fracciones de giro en el inicio de la próxima clase.

## **2.2 Midiendo ángulos...**

Sin nombrar formalmente el sistema de medición sexagesimal, se consideró natural introducir los grados sexagesimales ya que es algo que aparece cotidianamente (por ejemplo en el estacionamiento a  $45^\circ$ ) y los estudiantes lo usan sin pensar siquiera qué significa ese sistema de medición. Como ya se había hecho mención al ángulo recto, se considera que el alumno no tiene dificultad en relacionar al mismo con  $90^\circ$ . Aprovechando esta situación, se plantea la Actividad 5.

### **2.2.1 Sistema sexagesimal**

En este apartado se da formalidad al sistema de sexagesimal.

Se propone la visualización de un ángulo de  $1^\circ$  pues se considera que el estudiante, a pesar de conocer esta unidad de medición, no siempre logra entender qué amplitud tiene un ángulo de  $1^\circ$ . Además, más adelante la idea es compararlo con un ángulo de un radián.

Antes de la Actividad 6, se plantea volver nuevamente a las puertas iniciales y proponer una posible medida en grados de los ángulos que allí aparecen. Se espera que el estudiante, no sólo pueda dar una buena aproximación de la medida de los ángulos sino también, considere la orientación y, por lo tanto, el signo de las medidas. Se propone al alumno que coteje su suposición con un transportador.

### **2.2.2 Sistema circular**

Se introduce el radián, que es la otra unidad de medida de ángulos utilizada y es la que más usarán en otras asignaturas, en particular las de matemática.

Se consideró oportuno, en este momento del material complementario, introducir el software GeoGebra (que utilizarán en Matemática A) y realizar una construcción que favorezca al entendimiento del concepto de radián.

Para que el uso del software no sea un impedimento para avanzar, directamente se ofrece un link donde el alumno puede realizar la actividad solicitada. La idea es que a partir de una circunferencia de radio 1, se haga una animación de manera de señalar un arco de medida 1 y así marcar el ángulo resultante. Luego, la animación ofrece la posibilidad de armar una circunferencia de otro radio, hacer una animación que señale un arco con esa medida y se ve que el ángulo determinado es el mismo. La actividad permite ir cambiando el radio de la segunda circunferencia y así observar que el ángulo resultante siempre es el mismo. Se expresa la conclusión que el ángulo medido

en radianes, no depende del radio de la circunferencia, sólo relaciona la longitud de un arco con el radio de la circunferencia.

Se incluyó el inciso 2) de la Actividad 8 pues se consideró importante que el estudiante comprenda la diferencia entre un grado y un radián ya que más adelante, cuando trabajen con relaciones trigonométricas y se les plantee, por ejemplo determinar el  $\sin(1)$ , el alumno utiliza la calculadora en grados y el resultado no les llama la atención. Trabajar esta diferencia acá (como diferencia de amplitud), permite retomar el tema al momento de trabajar con las relaciones trigonométricas y la calculadora.

Se espera además que el estudiante observe que, si la puerta se abre  $1^\circ$ , no podría pasar, pero en el caso de 1 radián podría hacerlo sin problemas (en una puerta clásica). También podría pensar que la medida de la puerta puede influir, cuán grande tendría que ser?

Estos interrogantes se pueden trabajar para afianzar o entender un poco más sobre qué representan las medidas en distintos sistemas de medición. Podrían surgir otras cuestiones, pero será el docente quien decida hasta qué punto avanzar en la discusión.

Se propone, en la Actividad 9, que retomen las tablas que completaron en la Actividad 4 y agregue dos columnas en las cuales indique las medidas en grados y radianes de los ángulos involucrados. Esta Actividad permite que el tema de la subsección siguiente sea más natural para el estudiante y serían casos particulares del caso general que se plantea en el apartado siguiente.

### **2.2.3 Cómo pasar de un sistema a otro...**

Para la realización del pasaje de un sistema a otro, en primer lugar se propone al alumno completar una tabla en la que estará estableciendo la medida en grados y radianes de ciertos ángulos a partir de conocer qué fracción de un giro representan (ya que en este momento el alumno conoce la medida en grados y radianes de un giro) para luego generalizar el pasaje de un sistema a otro estableciendo una proporción entre la medida en grados y la medida en radianes del ángulo dado (del cual conoce una de las medidas) con la respectiva medida en grados y en radianes de un ángulo del cual conoce ambas medidas (por ejemplo un recto, un llano o un ángulo de un giro). El objetivo es que el estudiante no repita una fórmula perdiendo de esta manera la idea que está detrás.

## **3. Relaciones trigonométricas de un ángulo**

Se da la definición de las relaciones trigonométricas con un ángulo dado en su posición normal, ya que se considera que esto ayudará, en Matemática A, que el estudiante comprenda el seno y el coseno como funciones de una variable

real. Por tal motivo se explicitó al escribir en texto, por ejemplo, la ordenada del punto  $(a,b)$  sobre la distancia del punto  $(a,b)$  al  $(0,0)$  (en el caso del seno de un ángulo).

Se hace hincapié en la arbitrariedad del punto que se elige del punto terminal para definir las relaciones trigonométricas.

Para terminar, se menciona la identidad fundamental dada su importancia en trigonometría y se muestra que lo conocido por ellos, definición de las relaciones trigonométricas cuando se tiene un triángulo rectángulo, se desprende de la definición más general que dimos.

Se completan los temas, retomando el Libro del Curso de Nivelación.



## *PARTE 3*

### *Conclusiones y reflexiones*

Empezaré a realizar una reseña sobre qué significó realizar este trabajo, desde pensar el proyecto hasta esta instancia de elaboración del Trabajo Final.

Como docente considero que los materiales didácticos deben poseer alguna componente de novedad cuando los alumnos ya lo han utilizado en la asignatura y deben volver a cursarla, sobre todo si el material constituye el “eje troncal” de las clases, sirviendo de guía en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En particular, en el Curso de Ingreso de la Facultad de Ingeniería de la UNLP como en Matemática A, donde fui y soy docente actualmente, en ambas materias existen textos cuyo uso es predominante.

Cuando tuve que decidir qué hacer en el trabajo final, teniendo en cuenta esa inquietud de contar con otro material, consideré que podía realizar un trabajo de intervención que consistiera en armar un material didáctico para alguna población de alumnos que tuviera las características antes mencionadas.

Desde que me aboqué a realizar el proyecto para el taller, pude encontrar fundamentos con respecto a esa inquietud que tenía de contar con materiales educativos para utilizar con poblaciones de alumnos con características particulares, principalmente en lo que se refiere a la necesidad de desarrollar alternativas de inclusión para los estudiantes. Diseñar el Material Complementario, me permitió valorar el trabajo realizado por aquellos docentes que se embarcan en la tarea de elaboración de materiales educativos pues, pude corroborar, como menciona Area Moreira (1994), que “la producción de materiales por parte del profesorado es una actividad altamente costosa en tiempo y esfuerzo” (pág. 6). A pesar del costo mencionado, la experiencia fue gratificante y el trabajo colaborativo fue esencial en el desarrollo del material. Fue muy enriquecedor embarcarse en la producción de un material educativo, pasando por las diferentes etapas que conlleva la misma: el decidir qué conceptos considerar como los más pertinentes para intervenir, qué vocabulario utilizar, qué actividades son las más convenientes, entre otras. Decisiones que a veces cambian mientras se confecciona el material.

Otra inquietud que he tenido a lo largo de los años de docente (desde mis inicios como Ayudante Alumno) es la siguiente: tengo el material diseñado por alguien y es el que voy a utilizar, porque así lo determina la cátedra, como una “guía” de las clases...pero entonces... ¿por qué el orden de los contenidos?, ¿por qué empieza con cierta actividad?, ¿por qué se eligió este ejercicio en este lugar?, ¿por qué no están las demostraciones de los teoremas?, ¿por qué esto?, ¿por qué lo otro?. Seguro que estos interrogantes tienen su respuestas pero... ¿dónde las encuentro?. Entonces, no podía este diseño de intervención no tener la que llamé “guía del docente”!!

Con respecto al material complementario producido, espero que ofrezca otra “puerta de entrada” que posibilite el desarrollo de una nueva experiencia de aprendizaje para los estudiantes de la Modalidad B2 del Curso de Nivelación, como considera Kaplún (2012), “una experiencia de cambio y enriquecimiento en algún sentido: conceptual o perceptivo, axiológico o afectivo, de habilidades o actitudes, etc. (pág. 1)”

Considero factible la utilización del material complementario y espero poder realizar una evaluación de la misma, ya que tengo interés en ir desarrollando materiales educativos de distintos temas (tanto para el Curso de Nivelación como para Matemática A) que puedan ser utilizados en distintas situaciones de enseñanza.

Por último, cursar la Especialización fue parte del proceso de formación que estoy y seguiré transitando, y ha influido positivamente en mi formación profesional como docente.

## Agradecimientos

A Stella y Ángela, por sus ideas, recomendaciones, sugerencias y buen criterio. Ha sido un privilegio poder contar con su ayuda y guía.

En particular a Ángela, por su dedicación y paciencia. Sin su colaboración este trabajo hubiese sido más largo y complicado, menos enriquecedor.

Al personal de la Especialización por su amabilidad y atención en lo referente a mi tránsito como alumna de la misma.

A Laura del Río por compartir sus conocimientos de GeoGebra.

A Mabel por compartir sus ejemplares de textos de la escuela media y por alegrarse de mi progreso.

A Silvia, por su apoyo y colaboración constante.

A todas las personas que de alguna u otra manera han formado y forman parte de mi carrera como docente.

A mi papá y mis suegros por creer en mí.

A Fer, Naty y Cora, mis amigas, por escucharme y brindarme su cariño, comprensión y apoyo.

A Fernando, mi esposo, por apoyarme permanentemente y acompañarme.

A Valentino e Isabella, mis hermosos hijos, por permitir que su madre les haya quitado parte de su valioso tiempo para poder realizar este trabajo.

## Referencias bibliográficas

(s.f.).

Area Moreira, M. (1994). Los medios y materiales impresos en el currículo. En J. M. Sancho, *Para una tecnología educativa*. Barcelona: Horsori.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1976). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Baquero, R. J. (2012). Alcances y límites de la mirada psicoeducativa sobre el aprendizaje escolar: algunos giros y perspectivas. *Polifonías Revista de Educación*, 9-21.

Bautista, A. (1989). El uso de los medios del curriculum desde los modelos del curriculum. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 39-52.

- Bucari, N., Abate, S. M., & Melgarejo, A. (2004). Un cambio en la enseñanza de las matemáticas en la carreras de ingeniería de la UNLP: propuestas, criterios y alcances. *IV CAEDI*, (págs. 104-111). Buenos Aires.
- Bucari, N., Abate, S. M., & Melgarejo, A. (2007). Estructura Didáctica e Innovación en Educación Matemática. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería*, 17-28.
- Cortés, C. E. (1993). *Herramientas para validar*. San José de Costa Rica: Mimeo.
- Ezcurra, A. M. (2009). Educación Universitaria: una Inclusión Excluyente. *Tercer Encuentro Nacional sobre Ingreso Universitario*. Río Cuarto: Universidad Nacional de Río Cuarto.
- Gimeno Sacristán, J. (2001). Los materiales y las condiciones de enseñanza. En J. Gimeno Sacristán, *Docencia y cultura escolar*. Buenos Aires: Lugar.
- Kaplún, G. (2012). Contenidos, itinerarios y juegos: tres ejes para el análisis y construcción de mensajes educativos. *VI ALAIC*. Bolivia.
- Litwin, E. (2005 ). *Las configuraciones didácticas. Una nueva agenda para la enseñanza superior*. 1° ed. e° reimp. Buenos Aires: Paidós.
- LLanos, V. C., Otero, M. R., & Banks Leite, L. (2007). Argumentación matemática en los libros de texto de la enseñanza media. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 39-53.
- LLanos, V., & Otero, M. (2012). Una análisis de las características de los libros de matemática para la Enseñanza Secundaria con relación a la argumentación y las imágenes. *Perspectiva Educativa*, 119-148.
- Maldonado, Á., Giandini, V., & Di Domenicantonio, R. (2015). Una propuesta de inclusión de instancia en los ejercicios del test diagnóstico para ingresantes basada en la experiencia de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. *XIX EMCI Nacional y VII Internacional* (págs. 191-200). San Nicolás de los Arroyos: UTN.
- Milioni, O., Giandini, V., & Maldonado, Á. (2014). *Matemática. Curso de Nivelación*. Facultad de Ingeniería. UNLP.