

# Objetos de Aprendizaje para la Interpretación Geométrica de Métodos Numéricos: Uso de GeoGebra

Claudia Allan<sup>1</sup>, Susana Parra<sup>1</sup>, Adair Martins<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Informática, Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina

[claudia.allan@fi.uncoma.edu.ar](mailto:claudia.allan@fi.uncoma.edu.ar); [susana.parra@fi.uncoma.edu.ar](mailto:susana.parra@fi.uncoma.edu.ar); [adair.martins@fi.uncoma.edu.ar](mailto:adair.martins@fi.uncoma.edu.ar)

Recibido: 13/01/2017 | Aceptado: 8/12/2017

## Resumen

El crecimiento que han tenido las nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), ha impulsado su incorporación y utilización en diferentes propuestas didácticas para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este contexto y en el marco del proyecto de investigación “Simulación y Métodos Computacionales en Ciencias y Educación”, del Departamento de Computación Aplicada, de la Facultad de Informática de la Universidad Nacional del Comahue (UNCo), dentro de la línea de investigación “Uso y desarrollo de TIC”, se continúa avanzando en el diseño de objetos de aprendizaje dinámicos (OA). En este trabajo se presentan dos OA interactivos desarrollados utilizando la herramienta GeoGebra con el propósito de ayudar en la comprensión de los conceptos teóricos y en la interpretación geométrica de distintos métodos numéricos. Particularmente se trabajó con el método de Newton Raphson para la resolución de ecuaciones no lineales y el método de los Trapecios para la resolución de integrales. Se muestra para cada OA desarrollado su diseño y sus funcionalidades. Los mismos serán utilizados como complemento de los recursos teóricos y prácticos en la materia “Métodos Computacionales para el Cálculo” de la carrera de Licenciatura en Ciencias de la Computación.

**Palabras clave:** Objetos de aprendizaje; Enseñanza y aprendizaje; GeoGebra; Interpretación geométrica; Métodos numéricos.

**Cita Sugerida:** C. Allan, S. Parra, A. Martins, “Objetos de Aprendizaje para la Interpretación Geométrica de Métodos Numéricos: Uso de GeoGebra” *Revista Iberoamericana de Educación en Tecnología y Tecnología en Educación*, N° 20, pp. 51-56, 2017.

**Licencia de distribución:** Esta obra se distribuye bajo Licencia Creative Commons CC-BY-NC

## Abstract

The rapid development of Information and Communication Technology (ICT) has fostered its incorporation and use within several educational projects in order to enhance teaching and learning processes. In this context and under the research project "Simulation and Computational Methods in Science and Education", from the Department of Applied Computing, Faculty of Computer Science at the National University of Comahue, within the line of research "Use and development of ICT", there is a continued progress in the design of dynamic learning objects (LO). In this paper, we present two interactive LO which were developed using the GeoGebra tool in order to aid the understanding of theoretical concepts and the geometric interpretation of various numerical methods. Particularly, the Newton Raphson method was used for solving nonlinear equations while the Trapezoidal Rule was used for solving integrals. The design and functionality of each LO is shown. LO will be used as a complementary tool in the theoretical and practical resources in the subject "Computational Methods for Calculus" of the Bachelor degree in Computer Science.

**Keywords:** Learning Objects; Teaching and learning; GeoGebra; Geometric interpretation; Numerical methods

## 1. Introducción

Actualmente las TIC están presentes casi en todas las áreas del conocimiento y principalmente con aplicaciones en las áreas de educación y de las ciencias. En la línea de investigación “Desarrollo y Uso de TIC” se vienen estudiando nuevas formas de comunicación e interacción con la computadora a través del diseño de Objetos de Aprendizaje (OA) para la organización de contenido educativo con el propósito de mejorar el aprendizaje [1].

Un aspecto especialmente importante a tener en cuenta en el diseño e implementación de un OA es que este objeto debe tener en sí mismo un valor añadido. Debe aportar valor en algún aspecto del aprendizaje, como la aclaración de un concepto o de un término, o debe proporcionar una interacción efectiva y útil al estudiante. Para el diseño de recursos didácticos que realmente sean útiles y efectivos para el aprendizaje es importante que cumplan con el objetivo para el que fueron concebidos y que permitan al estudiante apoyar su proceso de aprendizaje y retroalimenten los conocimientos adquiridos en clases o mediante materiales tradicionales.

Existen en la actualidad diversas herramientas informáticas de diseño de autor que facilitan el proceso de construcción de objetos de aprendizaje como eXe Learning, Reload, Hot Potatoes, GeoGebra, entre otros [2,3,4,5]. Algunas de estas herramientas de autoría permiten la exportación en diversos formatos de los recursos generados, y por tanto facilitan la incorporación efectiva en diversas plataformas de aprendizaje y la reusabilidad.

En los conceptos matemáticos como objetos de enseñanza y aprendizaje se pueden distinguir tres dimensiones: La dimensión semántica (significativa) que hace referencia a los significados que se vinculan al concepto; la dimensión sintáctica (representativa) que hace referencia a las representaciones del concepto, que incluye los distintos modos de representar el concepto, y las posibles traducciones entre ellas; y la dimensión procedimental (algorítmica) donde se incluyen los algoritmos que se vinculan al concepto.

Las tres dimensiones consideradas están interrelacionadas, por ejemplo, en los procesos de traducción entre modos de representación, en los que hay una traducción formal y una traducción de los significados entre las representaciones; o bien, en el aprendizaje de los algoritmos, éstos deben estar vinculados a los significados. A partir de esta forma de “ver” los conceptos matemáticos como objetos de enseñanza aprendizaje, podemos dar sentido a los propósitos del uso de los objetos de aprendizaje [6].

En este trabajo hemos trabajado dos métodos numéricos, uno de ellos iterativo, para mostrar cómo articulamos las ideas de OA y los propósitos de su uso.

## 2. Conceptos de Objetos de Aprendizaje

Existen diversas consideraciones y definiciones planteadas por diversos autores acerca de los OA, entre ellos, Wiley, Polsani [7,8]. En base a lo mencionado anteriormente, se pueden definir los OA como: “recursos didácticos e interactivos en formato digital, desarrollados con el propósito de ser reutilizados en diversos contextos educativos que

respondan a la misma necesidad instruccional, siendo ésta su principal característica, todo esto con el objetivo de propiciar el aprendizaje” [9].

La necesidad de reutilizar los materiales en distintas plataformas y tipos de estudiantes ha provocado la creación de estándares que permitan la documentación, búsqueda y distribución de los contenidos educativos que se generan. ADL Initiative es un programa del Departamento de Defensa de los Estados Unidos y de la Oficina de Ciencia y Tecnología de la Casa Blanca, que reúne los avances de proyectos como: ARIDANE, AICC, IEEE, IMS. A partir de ellos se creó el modelo de referencia SCORM (Sharable Content Object Reference Model). Se caracteriza por posibilitar la creación de contenidos que pueden importarse dentro de diferentes Entornos Virtuales de Enseñanza y Aprendizaje (EVEA), incluyendo Moodle. Establece un estándar de comunicación entre el OA y la plataforma [10].

## 3. Software GeoGebra

GeoGebra es un software libre de matemática dinámica para la educación en todos sus niveles, disponible en múltiples plataformas. Permite el trazado dinámico de construcciones geométricas, así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

Las herramientas creadas utilizando GeoGebra permiten manipular parámetros de una forma libre y dinámica, lo que ayuda a visualizar los diferentes comportamientos dados en las gráficas que se forman. A través de la manipulación, exploración y experimentación el estudiante va extrayendo sus propias conjeturas, ideas y conclusiones, logrando un aprendizaje más duradero y significativo [11,12].

Los proyectos creados con GeoGebra pueden ser exportados en diversos formatos como páginas web, hojas dinámicas e imágenes. Los objetos exportados se pueden publicar directamente en GeoGebraTube o en una página web y pueden luego ser incluidos en ambientes educativos virtuales como Moodle.

GeoGebraTube es el nombre de la plataforma para materiales educativos de GeoGebra. Permiten subir archivos para compartirlos con docentes y estudiantes o para conservarlos exclusivamente para acceder desde cualquier vía de conexión propia [13].

La elección de esta herramienta se debe a sus facilidades para la construcción de objetos independientes, con interfaz gráfica que permite al estudiante interactuar con los mismos, sumado a la ventaja de ser un software libre.

## 4. Diseño e implementación de los OA

Para el diseño de un OA deben considerarse las características pedagógicas, tecnológicas y de interacción con el usuario, debido a que se tiene un producto de software y educativo al mismo tiempo.

La selección de las actividades para diseñar un OA debe tender a la formación de alumnos autónomos en la construcción del conocimiento, debiéndose priorizar la elección de aquellas que lleven al aprender haciendo y que favorezcan al aprendizaje en forma colaborativa.

Para la construcción de un material utilizando GeoGebra, se deben determinar qué objetos serán utilizados en el mismo, distinguir aquellos objetos libres, que el usuario de la herramienta podrá manipular, de aquellos objetos dependientes que se irán creando a partir de su vinculación con los parámetros. Los objetos dependientes se trabajan diseñando los Scripts correspondientes.

Se describen a continuación los OA que se han diseñado e implementado, para ayudar en la comprensión de conceptos relacionados con dos métodos numéricos en particular: Método de Newton Raphson para el cálculo de raíces de ecuaciones no lineales y Método de los Trapecios para el cálculo de Integrales Numéricas.

### 4.1 OA para el método de Newton Raphson

El método numérico de Newton Raphson es utilizado para calcular en forma aproximada la raíz de una ecuación no lineal. Básicamente consiste en partir de una aproximación inicial  $x(0)$  de la raíz buscada  $x$  y mediante la evaluación de la función en este punto se determina el punto  $(x(0), f(x(0)))$  por el cual se traza la tangente geométrica a la función, que en su intersección con el eje  $x$  encuentra una aproximación  $x(1)$ . Este proceso se repite hasta que se cumpla con un error preestablecido que se compara con el valor de  $f(x(1))$ . El valor final encontrado es la raíz buscada de la función  $f(x)$  con la aproximación deseada [14,15].

Se diseñó un OA con el objetivo de permitir la visualización por parte de los estudiantes del comportamiento del método gráficamente para lograr una correcta interpretación geométrica del mismo. Los objetos libres de GeoGebra que se utilizaron para la implementación del OA son la función analizada, la aproximación inicial y la tolerancia permitida o error. Estas tres variables se representaron utilizando casillas de entrada con las cuales los estudiantes podrán interactuar, favoreciendo la comprensión de la interrelación que existe entre los mismos y el significado de cada variable involucrada en la ecuación general del método.

A partir de los objetos libres mencionados que cumplen la función de parámetros de entrada, el OA muestra un gráfico de la función, del punto inicial, la construcción de la recta tangente a la función que pasa por el punto inicial y su intersección con el eje  $X$  que generará el valor de la nueva aproximación correspondiente a la primera iteración. Para construir estos objetos dependientes se utilizan las herramientas de GeoGebra, recta tangente y punto de intersección.

Para permitir al estudiante interactuar con el OA se utilizó el objeto de GeoGebra “botón”, que al ser seleccionado calculará y mostrará una nueva aproximación recalculando la recta tangente y el punto de intersección. Esta funcionalidad se trabaja a partir del guión del objeto. En la figura 1 se muestra el proceso de construcción del OA. Se puede apreciar la vista algebraica, el protocolo de construcción y Script correspondiente a uno de los objetos.

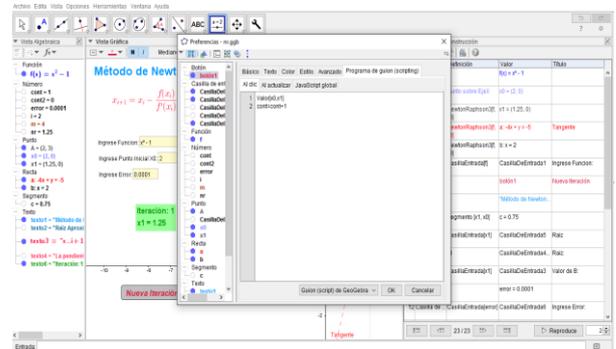


Figura 1. Proceso de construcción del OA

Cuando se cumple con el error preestablecido el objeto muestra la raíz aproximada obtenida por el método y la cantidad de iteraciones que fueron necesarias. Para mostrar estos resultados se utilizaron objetos del tipo texto de GeoGebra, teniendo como parámetros los cálculos realizados. En la figura 2 se muestra el OA implementado, donde pueden apreciarse los elementos descriptivos.

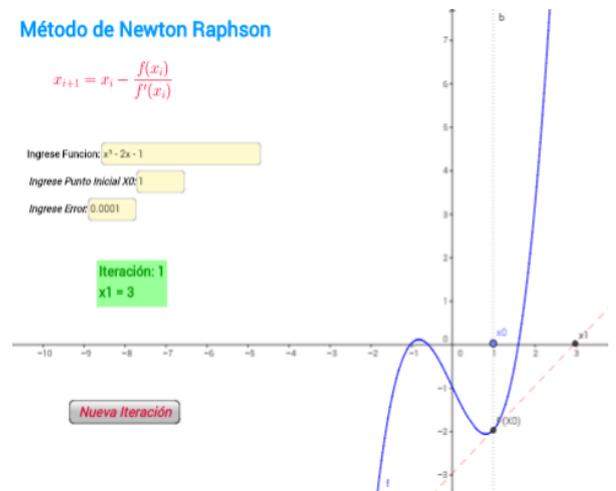


Figura 2. OA para visualizar la interpretación geométrica del método de Newton Raphson

El método iterativo de Newton Raphson puede presentar problemas de convergencia causados por el

comportamiento de la derivada de la función. Por ejemplo derivadas de la función cercanas a cero o nulas. En estos casos el método no obtendrá la raíz de la función, y para poder interpretar una de estas causas de divergencia, se muestra gráficamente el caso en que la pendiente de la recta tangente se hace cero. En la figura 3 se muestra el comportamiento del OA cuando se verifica la condición mencionada. Se puede observar en la gráfica que la recta tangente es paralela al eje X.

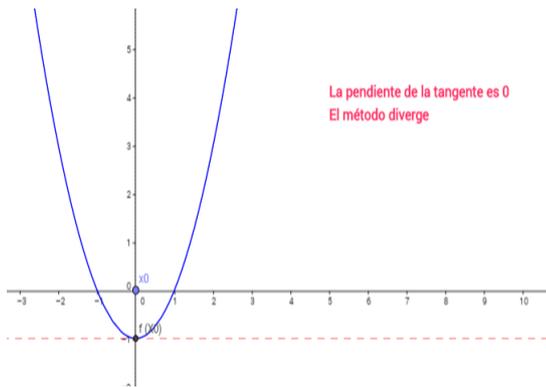


Figura 3. Ejemplo de divergencia del método

### 4.2 OA para el método de los Trapecios

El cálculo de la integral definida de una función  $f(x)$  entre los extremos  $a$  y  $b$ , en muchos casos no se puede obtener en forma exacta. En este caso se parte de la definición de una integral como el límite de una suma de áreas y se trabaja con métodos que aproximan el valor de esta suma con una precisión deseada. Dentro de estos métodos se encuentra el método de los trapecios que consiste en subdividir el intervalo de integración  $a$  y  $b$  en  $n$  partes, y se realiza la suma de las áreas elementales de los trapecios formados. Esta suma nos proporciona el valor aproximado de la integral [13,14].

Se diseñó un OA con el objetivo de lograr que los estudiantes comprendan el funcionamiento del método a través de su interpretación geométrica. Se pretende que a través de la manipulación del parámetro que determina la cantidad de particiones del intervalo, los estudiantes puedan comprender cómo, a medida que se aumenta ese parámetro, disminuye el error cometido en el cálculo de la aproximación a una integral definida.

En la implementación se utilizó el objeto de GeoGebra, casilla de entrada para el ingreso de la función y los límites del intervalo de integración. La cantidad de subdivisiones del intervalo  $n$  se representó utilizando el objeto de GeoGebra deslizador asociando al parámetro  $n$ . Este objeto puede ser seleccionado con el botón izquierdo del mouse y al arrastrarlo se va modificando el valor del parámetro.

Los objetos libres mencionados representan los parámetros de entrada del OA. En función de ellos se utilizan como objetos dependientes las secuencias para calcular las subdivisiones del intervalo de integración y la evaluación de la función en estos puntos y los polígonos que representarán los trapecios de las áreas elementales del método. Una vez construidos los polígonos se calcula la suma del área de los mismos y se muestra este resultado utilizando el objeto de GeoGebra del tipo texto.

En la figura 4 podemos observar el OA implementado que muestra el elementos descriptos a través de un ejemplo.

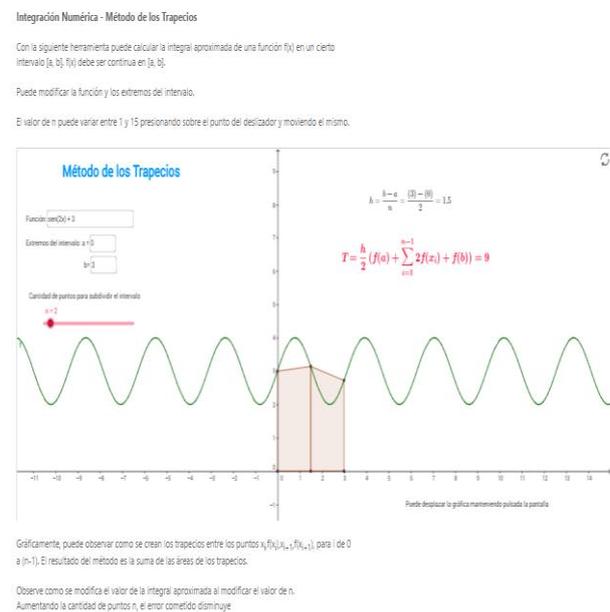


Figura 4. OA para visualizar la interpretación geométrica del Método de los Trapecios

Los OA implementados fueron exportados desde GeoGebra en el formato “Hoja dinámica como página Web”. En la figura 5 se muestra el cuadro de dialogo de GeoGebra que ofrece esta opción.

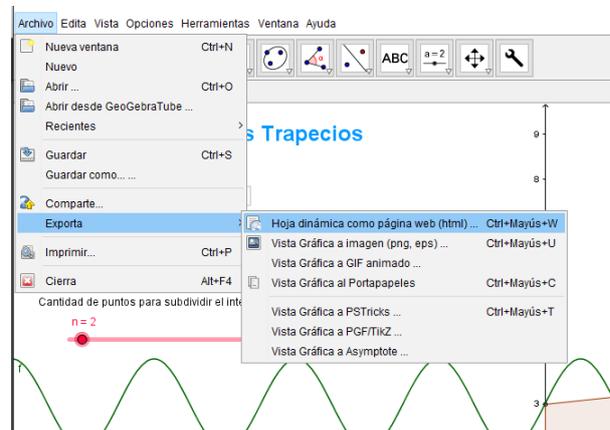


Figura 5. Opciones para exportar la herramienta implementada desde GeoGebra

Automáticamente el OA exportado se almacena en la cuenta particular de GeoGebraTube [12]. En esta operación se establecen los permisos de utilización del material didáctico creado.

Los enlaces a los OA creados fueron compartidos con los estudiantes a través de la Plataforma de Educación a Distancia de la UNCo (PEDCo) [15], dentro de la página de la materia Métodos Computacionales para el Cálculo de la carrera de Licenciatura en Ciencias de la Computación. Con la utilización de los OAs se observó un gran incremento del interés y de la motivación por parte de los estudiantes. La interfaz gráfica les permitió interactuar modificando parámetros de los métodos para observar su comportamiento, logrando de esta forma una mejor comprensión de los conceptos teóricos e interpretación geométrica de los distintos métodos numéricos vistos en la materia.

Los OA creados se encuentran disponibles en:

- <https://www.geogebra.org/m/gBqNNfCD>
- <https://www.geogebra.org/m/U2nM96pV>

Su utilización cuenta con permisos de “compartir mediante enlace”, bajo los términos de GeoGebraTube, Creative Commons.

## Conclusiones

Se presentó el diseño y la implementación de los Objetos de Aprendizaje para la interpretación geométrica del cálculo de raíces de ecuaciones no lineales por el método de Newton Raphson y de integrales numéricas por el método de los Trapecios.

Se describieron las herramientas de construcción del software GeoGebra utilizadas para la implementación de los OAs, tendiente a satisfacer los objetivos planteados para cada uno de ellos.

Se lograron OAs interactivos, que permitieron a los estudiantes la modificación de parámetros para observar el comportamiento de los distintos métodos. Con esta funcionalidad se logró apoyar y fortalecer el proceso de aprendizaje de los mismos.

Se puede destacar que la utilización de la página GeoGebraTube para almacenar el material didáctico implementado contribuye a una de las características importantes de los OAs que es su reutilización.

Actualmente en el Proyecto de Investigación “Simulación y Métodos Computacionales en Ciencias y Educación”, se continúa trabajando en el diseño e implementación de nuevos OAs para todas las unidades de la asignatura. También se está implementando para otras asignaturas que se dictan desde el departamento de Computación Aplicada.

## Referencias

- [1] Allan, C., Parra, S., Martins, A., Una Experiencia en la Enseñanza de la Matemática con Objetos de Aprendizaje. X Congreso sobre Tecnología en Educación & Educación en Tecnología (TE & ET). Corrientes, 2015.
- [2] <http://www.exelearning.org>.
- [3] <https://www.reload.ac.uk>
- [4] <https://hotpot.uvic.ca/>
- [5] <http://geogebra.org>
- [6] Gavilán Izquierdo, J., Barroso Campos, R., “GeoGebra como instrumento de la Práctica del Profesor”. [http://www.aloj.us.es/rbarroso/Pruebas/COM1GE\\_OGEBRAENLAPRACTICADELPROFESOR.pdf](http://www.aloj.us.es/rbarroso/Pruebas/COM1GE_OGEBRAENLAPRACTICADELPROFESOR.pdf) . Consultado: 16/04/2016
- [7] Willey, D.; Connecting learning objects to instructional design theory: a definition, a metaphor, and taxonomy, 2000. Disponible en: <http://reusability.org/read/chapters/willey.doc>
- [8] Polsani, P., Use and abuse o reusable learnig journal of digital information, 2003. Disponible en: <http://jodi.ecs.soton.ac.uk/articles/v03/i04/Polisani>. Consultado: 27/04/2015
- [9] Hernandez Bieliukas, Y.; Silva Sprock, A., Una experiencia en el desarrollo de objetos de aprendizaje como apoyo a los ambientes virtuales de enseñanza y aprendizaje: integrando el conocimiento entre disciplinas, 1º Jornadas Internacionales de Educación a Distancia, ISBN 978-980-402-063-6, Universidad de Zulia, 2011.
- [10] ADL (2002) Advanced Distributed Learning Emerging and Enabling Technologies for the design of Learning Object Repositories Report. <http://xml.coverpages.org/ADLRepositoryTIR.pdf>.
- [11] Gámez Mellado, A., Marín Trechera, L., “Taller de Diseño de Recursos Didácticos Interactivos para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Estadística utilizando GeoGebra”. II Jornadas para la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística e Investigación Operativa, 2011. [http://seio.es/grupos/GENAEIO/ACTAS\\_II\\_JOR\\_NADAS.pdf#page=77](http://seio.es/grupos/GENAEIO/ACTAS_II_JOR_NADAS.pdf#page=77). Consultado: 16/04/2016
- [12] <https://tube.geogebra.org/>
- [13] Chapra S. C, Canale, R. P., Métodos Numéricos para Ingenieros con Programas de Aplicación, Mc Graw Hill, 2005.
- [14] Burden, R. L., Faires, J. D., Análisis Numérico, Cengage Learning, 2011.L. Frazier, J. D. Fodor, The sausage machine: A new two-stage parsing model. Cognition, 6 (1978), pp. 291-325

- [15] Plataforma de Educación a Distancia del Comahue (PEDCO). <http://pedco.uncoma.edu.ar>

*Dirección de Contacto del Autor/es:*

**Claudia Allan**

Buenos Aires 1400

Neuquén

Argentina

e-mail: [claudia.allan@fi.uncoma.edu.ar](mailto:claudia.allan@fi.uncoma.edu.ar)

**Susana Parra**

Buenos Aires 1400

Neuquén

Argentina

e-mail: [susana.parra@fi.uncoma.edu.ar](mailto:susana.parra@fi.uncoma.edu.ar)

**Adair Martins**

Buenos Aires 1400

Neuquén

Argentina

e-mail: [adair.martins@fi.uncoma.edu.ar](mailto:adair.martins@fi.uncoma.edu.ar)

---

**Claudia Allan**

Analista en Computación, docente del Depto de Computación Aplicada, Facultad de Informática Universidad Nacional del Comahue (UNCo).

---

**Susana Parra**

Profesora en Informática, docente del Depto de Computación Aplicada, Facultad de Informática Universidad Nacional del Comahue (UNCo).

---

**Adair Martins**

Ingeniera Electricista y Master en Ciencias en Ingeniería, Universidad Federal de Itajubá (UNIFEI), Brasil. Profesora Asociada del Depto de Computación Aplicada, Facultad de Informática (UNCo).

---