



Universidad Nacional de la Plata

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Física

Wilson loops en la Correspondencia

AdS/CFT

Tesis presentada para optar al grado de
Doctor de la Facultad de Ciencias Exactas

Jeremías Aguilera Damia

bajo la dirección de Diego H. Correa
y la co-dirección de Guillermo A. Silva

Resumen

Esta tesis comprende una serie de estudios realizados en el contexto de la conjetura AdS/CFT (o dualidad gauge/gravedad), haciendo particular énfasis en el estudio de valores esperados de operadores no locales denominados Wilson loops. En este escenario, se presentan análisis cuantitativos realizados tanto en teoría de gauge como en teoría de cuerdas. Los resultados obtenidos permiten establecer chequeos no triviales de precisión de la dualidad AdS/CFT, así como lograr una mejor comprensión de aspectos relevantes concernientes a la dinámica de teoría de gauge y teoría de cuerdas.

En el capítulo 1 se mencionan las motivaciones principales que llevan al estudio de estos problemas, junto con una introducción de los aspectos generales de la dualidad gauge/gravedad y de las teorías que conforman las realizaciones que serán relevantes en este trabajo. A su vez, se hará una breve introducción al conjunto de operadores no locales del tipo Wilson loop, los cuales desempeñan un rol central en el resto de los capítulos que conforman la tesis. Finalmente, se mencionarán algunos aspectos relevantes sobre métodos de evaluación exacta en teoría de gauge y sobre su rol en el contexto de la dualidad.

El capítulo 2 se aboca principalmente al estudio semiclásico de un conjunto particular de Wilson loops en la teoría $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons con materia (ABJM), denominados *latitude*, los cuales preservan 1/6 de las supersimetrías de la teoría. En la teoría dual, se resuelven las ecuaciones de movimiento para configuraciones de cuerdas que preservan 1/6 de las supersimetrías del espacio de fondo, identificándolas con estos operadores. Estos resultados permiten realizar un chequeo a acoplamiento fuerte de una propuesta hecha en estudios previos, la cual conjetura una relación entre el valor esperado de Wilson loops circulares y la función de Bremsstrahlung que resulta de deformar líneas de Wilson 1/2 BPS con un pequeño ángulo (*cusp*) geométrico. También se deriva una relación anaáloga entre valores esperados de ciertos operadores de Wilson 1/12 BPS y la función de Bremsstrahlung efecto de introducir un pequeño *cusp* interno sobre líneas de Wilson 1/6 BPS.

Luego, en el capítulo 3, se estudia la estructura de la contribución subdominante en la expansión semiclásica del valor esperado de ciertos operadores en el régimen de acoplamiento fuerte. En particular, se calcula la función de partición a 1-loop en una expansión en $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ para cuerdas en $AdS_4 \times CP^3$ cuya hoja de mundo está sujeta a una línea con un pequeño ángulo de *cusp* en el borde de AdS, duales a deformaciones tipo *cusp* de líneas Wilson. Se realiza el cálculo de los correspondientes determinantes mediante el método *on-shell*, que consta en calcular la energía de vacío para los modos de oscilador que satisfacen las ecuaciones de movimiento con signatura Lorentziana. Nuestros resultados fueron contrastados con la expansión a acoplamiento fuerte de la propuesta hecha por Lewkowycz y Maldacena para la evaluación exacta de la función de Bremsstrahlung. Se encontró

un perfecto acuerdo para deformaciones tipo *cusps* insertadas sobre líneas de Wilson 1/2 BPS y 1/6 BPS.

Por otro lado, en el capítulo 4, se analiza un sistema de D3 y D5-branas intersecantes, el cual es dual a una teoría conforme en 4d en presencia de un defecto de co-dimensión 1. Este defecto separa dos regiones en las cuales el rango del grupo de gauge difiere en un número entero k . La introducción de este nuevo parámetro permite definir el límite de “escaleo doble”, bajo el cual las correcciones cuánticas se organizan en potencias de λ/k^2 , permitiendo de esta manera extrapolar los resultados entre regímenes de acoplamiento débil y fuerte. En particular, se estudia un Wilson loop circular de radio R a una distancia L de la interfaz y acoplado en el espacio interno vía un ángulo χ . El análisis se realiza tanto en régimen de acoplamiento fuerte, haciendo uso del modelo dual gravitatorio, como en régimen de acoplamiento débil mediante un desarrollo perturbativo. Finalmente, se aplica el límite de escaleo doble y se verifica la convergencia de ambos resultados.

Finalmente, en el capítulo 5 se estudian realizaciones holográficas para el cálculo de correladores que involucran Wilson loops 1/2 BPS en representaciones “grandes” del grupo de gauge $SU(N)$ de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills. Estos operadores son duales a un determinado tipo de geometrías denominadas geometrías *bubbling*. En este contexto, se considera una cuerda fundamental sobre una geometría *bubbling* de género arbitrario. Bajo ciertas suposiciones razonables, se muestra que el valor mínimo de la acción para este tipo de configuraciones está en perfecto acuerdo con el resultado exacto para el correlador de un Wilson loop fundamental y uno en una representación “grande” arbitraria, calculado en la teoría gauge. En particular, se presenta un análisis explícito para el caso en el que la representación grande está asociada a un diagrama de Young rectangular, correspondiendo, desde el punto de vista dual, a una geometría *bubbling* de género uno. A su vez, se presentan resultados exactos explícitos en teoría de gauge mediante la resolución de los correspondientes modelos de matrices asociados al correlador de dos Wilson loops: uno en una representación “grande” arbitraria, y otro en la representación fundamental, totalmente simétrica y totalmente antisimétrica.

Por último, se dedica el capítulo 6 a la discusión de los resultados obtenidos en el transcurso de esta tesis, así como también a las conclusiones que se derivan de los mismos. A su vez, se delinear posibles investigaciones futuras que pueden realizarse a partir de estos resultados.

Con la intención de no entorpecer la lectura de este trabajo, se relegan a los apéndices algunos detalles concernientes a los cálculos realizados, los cuales se encuentran al final de esta tesis.

Índice General

1	Introducción	8
1.1	Aspectos generales de la dualidad gauge/gravedad	11
1.1.1	Teorías de gauge en el límite planar	12
1.1.2	Teoría de cuerdas	16
1.1.3	Correspondencia AdS/CFT	32
1.2	Espacios Anti de Sitter	38
1.3	$\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills	40
1.4	$\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons	44
1.5	Wilson loops	49
1.6	Métodos de evaluación exacta	58
2	Wilson loops 1/2 y 1/6 BPS en ABJM y función de Bremsstrahlung	64
2.1	Soluciones BPS duales a Wilson loops tipo <i>latitude</i>	65
2.1.1	Solución clásica	65
2.2	Operadores de Wilson duales	73
2.3	Función de Bremsstrahlung y Wilson loops <i>latitude</i>	78
3	Expansión semiclásica y función de Bremsstrahlung en acoplamiento fuerte	84
3.1	Función de partición de cuerdas y energía de vacío	86
3.1.1	Rescaleo de los operadores 1-loop	87
3.1.2	Cuerda que describe una línea recta	91
3.1.3	Cuerda que describe un <i>cusp</i> geométrico	93
3.1.4	Cuerda que describe una línea recta con un <i>cusp</i> interno	100
3.2	Expresión exacta para la función de Bremsstrahlung en ABJM	103
3.3	Deformaciones tipo <i>cusp</i> sobre líneas de Wilson 1/6 BPS	104
4	Defectos holográficos en teorías conformes	106
4.1	Cuerda clásica dual al Wilson loop circular	108

4.1.1	Solución para $c = 0$	110
4.1.2	Solución para $c \neq 0$	111
4.2	Cálculo perturbativo	113
5	Representaciones grandes, modelos de matrices y geometrías <i>bubbling</i>	122
5.1	Geometrías <i>bubbling</i> duales a Wilson loops $\frac{1}{2}$ -BPS	124
5.1.1	Cargas y parámetros de la representación	126
5.2	Cuerdas sobre geometrías <i>bubbling</i>	128
5.2.1	Aspectos generales del problema	129
5.2.2	Cuerdas sobre geometrías de género cero	130
5.2.3	Cuerdas sobre geometrías de género uno	132
5.2.4	Cuerdas sobre geometrías de género g	139
5.3	Correladores de Wilson loops $\frac{1}{2}$ -BPS en $\mathcal{N} = 4$ SYM	144
5.3.1	Wilson loop en una representación grande	145
5.3.2	Inserción de un Wilson loop en la representación fundamental	150
5.3.3	Wilson loops en las representaciones simétrica y antisimétrica	151
6	Discusión y conclusiones	160
A	Regularización y condiciones de contorno	168
B	Fijado de simetría kappa y supersimetría	174
B.1	Espinor de Killing para $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$	177
B.2	Matrices de Dirac y generadores de $SU(2)$	179
B.3	Supersimetría de las soluciones rotadas	180
B.4	Supersimetría del Wilson loop en presencia del defecto	182
B.4.1	Teoría de gauge	182
B.4.2	Teoría de cuerdas	184
B.5	Correladores supersimétricos	186
C	Correladores de una CFT y coordenadas proyectivas	188
D	Repaso de la solución clásica para el <i>cusp</i> general	190
D.1	Solución clásica	190
D.2	Espectro de fluctuaciones	191
D.2.1	Límite de ángulo pequeño	192
E	Expansiones para $c \neq 0$	196

F	Límite de prueba de la configuración de branas	198
G	Contribución de otros puntos estacionarios	200

Capítulo 1

Introducción

La Teoría Cuántica de Campos (TCC) a logrado establecer un estándar sin precedentes de acuerdo entre las predicciones teóricas y los datos experimentales. En particular, el Modelo Estándar (ME), desde su formulación en la segunda mitad del siglo XX, ha logrado proveer el mejor marco teórico conocido para la descripción microscópica de las interacciones entre las partículas fundamentales detectadas hasta la actualidad [1, 2]. Esto se refuerza en los últimos años con la detección del bosón de Higgs, el cual juega un rol central en el proceso de rompimiento espontáneo de simetría que da lugar al espectro de masas de las partículas [3, 4, 5, 6], cerrando así un ciclo muy fructífero de predicciones luego confirmadas por los experimentos.

A excepción de algunos casos especiales, que se discutirán a lo largo de esta tesis, el éxito de una descripción en términos de TCC recae en la posibilidad de obtener los distintos observables a partir un desarrollo perturbativo. Por lo tanto, las predicciones así obtenidas serán válidas en el rango de energías en el que los acoplamientos sean suficientemente pequeños. Para el caso de teorías de gauge no abelianas, como es el caso del ME, el cual describe las interacciones fundamentales en términos de un grupo de gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, la dinámica de las variables fundamentales a altas energías resulta débilmente acoplada [7, 8, 9], por lo que, a energías suficientemente altas, los quarks pueden aproximarse como partículas “asintóticamente libres”. Esto se verifica con el acuerdo de los datos experimentales y los resultados perturbativos. Sin embargo, a bajas energías, el acoplamiento entre los quarks crece, por lo que la descripción en términos de variables débilmente acopladas resulta obsoleta. Es en este régimen paramétrico que suceden muchos fenómenos interesantes, tales como el confinamiento de los quarks, el cual puede describirse, a grandes rasgos, como un crecimiento de la energía con la separación entre las partículas, formando entonces estados ligados estables a bajas energías, los cuales dan lugar a un espectro de partículas más pesadas conocidas como hadrones.

Este tipo de descripciones en términos de sistemas fuertemente correlacionados no son exclusivas de las teorías de partículas fundamentales, sino que también aparecen, por ejemplo, en sistemas de materia condensada. En este contexto, algunos fenómenos tales como la Superconductividad a

Temperaturas Críticas Altas o el Efecto Hall Fraccionario, se describen en términos de sistemas electrónicos fuertemente correlacionados. Por lo tanto, la dinámica de estos sistemas tampoco puede explorarse en términos de un desarrollo perturbativo.

A su vez, se han encontrado dificultades al momento de formular la teoría de Einstein de la gravedad en términos de una TCC consistente, es decir, renormalizable, por lo que se interpreta a la Relatividad General como una versión efectiva de una teoría más general. Comprender a nivel cuántico de la gravedad contribuiría ampliamente a resolver incógnitas vigentes en la actualidad de la física teórica, con importantes implicancias en campos que van desde la cosmología hasta teoría de la información. Para ello es necesario un esquema que permita operar más allá del régimen perturbativo.

Resulta entonces necesario desarrollar métodos no perturbativos, de manera de poder extender nuestro entendimiento a estos procesos complejos, los cuales no pueden ser descritos por las técnicas usuales de TCC. Un posible enfoque consiste en desarrollar métodos de evaluación exacta, de manera tal que se puedan capturar contribuciones no perturbativas a los elementos de matriz de determinados observables. La posibilidad de obtener resultados exactos suele estar relacionada con la presencia de alguna simetría global que restringe fuertemente las fuentes que contribuyen a un dado valor esperado. Esto es lo que ocurre en el caso de sistemas integrables, en los cuales es posible obtener resultados no perturbativos de manera algebraica, debido a la presencia de un número suficientemente grande de cargas conservadas. Para revisiones detalladas de estos aspectos consultar [10, 11].

Por otro lado, la presencia de supersimetría suele dar lugar a fenómenos muy interesantes. El carácter altamente restrictivo de esta simetría permite en muchos casos calcular funciones de partición o valores esperados de ciertos operadores de manera exacta, mediante el programa de “localización”. A grandes rasgos, el método consiste en deformar el integrando en el que se evalúa la integral funcional a partir de una supercarga preservada por el sistema en cuestión. De esta manera, es posible introducir un parámetro tal que el resultado permanece invariante ante variaciones del mismo, siendo posible tomar un límite conveniente en el que el cálculo se reduce a un cómputo semiclassical. Debido a que el valor esperado es el mismo, sea cual sea el valor que tome este parámetro, el resultado así obtenido es exacto. Este método nos permite, en ciertos casos, reducir un cálculo de un sistema infinito-dimensional (como es el espacio de funciones sobre el que se define usualmente la integral funcional) a uno realizado en un sistema de dimensión finita, por ejemplo un modelo de matrices (0-dimensional). A su vez, estos modelos de matrices han sido ampliamente estudiados en las últimas décadas, por lo que, en muchos casos, es posible obtener resultados exactos no triviales para algunos sistemas supersimétricos [12, 13, 14, 15].

Finalmente, otro enfoque muy difundido en los últimos años corresponde al establecimiento de dualidades no triviales entre distintas teorías. Es un hecho bien conocido que, en un sistema fuerte-

mente correlacionado, las excitaciones fundamentales se reorganizan formando modos colectivos. Estos modos permiten formular una descripción dual del mismo sistema en términos de una teoría débilmente acoplada. De esta manera, es posible obtener expansiones a acoplamiento fuerte, *i.e.* resultados altamente no perturbativos, para una dada teoría, en términos de un desarrollo perturbativo realizado en la teoría dual. Este tipo de correspondencias han sido establecidas previamente tanto en el contexto de teoría de campos como en el de materia condensada, [16, 17, 18, 19].

En particular, en esta tesis estudiaremos un caso muy particular de este tipo de dualidades, a saber, la correspondencia gauge/gravedad, o AdS/CFT. La misma se basa en la introducción de una coordenada adicional, denominada usualmente coordenada holográfica, que se adentra en una geometría cuya frontera se identifica con el dominio de una dada teoría conforme de gauge. De esta manera, se establece una correspondencia entre las variables de la teoría conforme en un régimen paramétrico particular y la dinámica de una teoría de gravedad que vive en el interior una geometría asintóticamente Anti de Sitter (*AdS*). El mecanismo subyacente en esta dualidad es esencialmente el mismo que se menciona en el párrafo anterior, con la particularidad de que las variables que describen los modos colectivos viven en un espacio más grande y son descritos por una teoría gravitatoria. En su formulación más fuerte, la correspondencia se establece entre los grados de libertad de la teoría de gauge y la dinámica de cuerdas sobre la misma geometría. Esta dualidad valdría, en principio, para cualquier valor de los parámetros de ambas teorías.

El establecimiento de la dualidad AdS/CFT tiene importantes implicaciones. Por un lado, como veremos más adelante, es una dualidad que relaciona regímenes opuestos en la constante de acoplamiento; es decir, cuando la teoría de gauge se encuentra fuertemente acoplada y la teoría de perturbaciones deja de ser válida, la teoría en el interior de *AdS* permite un desarrollo perturbativo en términos del acoplamiento dual, y viceversa. Este hecho permite tener acceso a la estructura no perturbativa de una teoría de gauge en términos de cálculos de gravedad clásica, los cuales son, en principio, realizables. A su vez, se puede ir en la dirección opuesta, y obtener resultados no triviales concernientes a la estructura cuántica de la gravedad, mediante el estudio de una teoría de gauge débilmente acoplada.

En lo que resta de este capítulo, presentaremos las ideas básicas que nos permiten introducir la dualidad AdS/CFT de una manera más precisa. A su vez presentaremos los aspectos generales de las realizaciones de esta dualidad que utilizaremos en el resto de la tesis. Finalmente, haremos algunos comentarios sobre métodos de evaluación exacta en teorías de gauge, haciendo particular énfasis en localización, ya que estos resultados jugarán un papel central en los chequeos de precisión de la dualidad.

1.1 Aspectos generales de la dualidad gauge/gravedad

En esta sección presentaremos los aspectos más relevantes de la correspondencia gauge/gravedad. Si bien este análisis no es desde ningún punto de vista exhaustivo, se expondrán los puntos más importantes, necesarios para comprender los conceptos presentados en el resto de los capítulos de esta tesis. Para más detalles, se recomienda ver [20, 21, 22, 23, 24, 25].

La dualidad gauge/gravedad establece una correspondencia entre los grados de libertad de una dada teoría de campos en espacio plano, con los correspondientes a una teoría de gravedad en un espacio-tiempo con una dimensión adicional. Una condición necesaria para que esto sea válido, es que el número de grados de libertad coincida en ambos lados de la correspondencia. Sin dar una prueba formal, esto puede entenderse de la siguiente manera. Para un determinado estado en teoría de campos, la cantidad de grados de libertad independientes queda determinada por la entropía. Consideraremos esta teoría de campos definida sobre un espacio-tiempo de dimensión d . Si, para un dado instante, el sistema se extiende sobre una región $(d - 1)$ -dimensional \mathcal{M}_{d-1} , la propiedad de extensividad de la entropía implica que

$$S_{TCC} \sim \text{Vol}(\mathcal{M}_{d-1}). \quad (1.1)$$

Por otro lado, de acuerdo a la dualidad, la teoría de gravedad se define en un espacio-tiempo $(d + 1)$ -dimensional. Si la entropía gravitatoria fuera extensiva, sería imposible encontrar un acuerdo entre el número de grados de libertad de sistemas con dimensionalidad distinta. De hecho, para un dado instante, en principio podríamos decir que para un estado extendido en una región d -dimensional \mathcal{M}_d , la entropía gravitatoria debería ser $S_G \sim \text{Vol}(\mathcal{M}_d)$, lo cual entraría en contradicción con (1.1). Sin embargo, esto es una suposición muy inocente, ya que la entropía de sistemas gravitatorios es subextensiva, o dicho de otra manera, no es proporcional al volumen que ocupa el sistema en un dado instante. Siendo un poco más precisos, consideremos un estado en una teoría de gravedad extendido sobre una variedad d -dimensional \mathcal{M}_d . La entropía de este estado está acotada por el estado de máxima entropía que ocupa el mismo volumen, a saber, un agujero negro que rodee la variedad \mathcal{M}_d . La entropía de un agujero negro está a su vez determinada por el área del horizonte de sucesos a través de la fórmula de Bekenstein-Hawking

$$S_G = \frac{1}{4G_N^{(d+1)}} A_H, \quad (1.2)$$

donde $G_N^{(d+1)}$ es la constante de Newton en $(d + 1)$ dimensiones y A_H denota el área del horizonte de sucesos. De esta manera, vemos que, en una teoría de gravedad, la entropía es proporcional al área que contiene al sistema en cuestión. Esto se conoce como principio holográfico [26, 27, 28, 29], y es una propiedad esencial para la validez de la dualidad AdS/CFT.

En conclusión, la entropía de un sistema gravitatorio extendido sobre una región d -dimensional satisface que

$$S_G \sim \text{Vol}(\partial\mathcal{M}_d) \sim \text{Vol}(\mathcal{M}_{d-1}), \quad (1.3)$$

y por lo tanto está en completo acuerdo con el comportamiento de la entropía para la teoría de campos en d dimensiones.

La formulación de la correspondencia *AdS/CFT* está inspirada en estudios realizados en teoría de cuerdas y teorías de gauge, encontrando que ambos esquemas poseen muchos puntos en común. Por lo tanto, antes de introducir la dualidad de una manera más precisa, haremos una breve introducción a los conceptos básicos de teorías de gauge y teoría de cuerdas que serán de gran utilidad en el resto de esta tesis.

1.1.1 Teorías de gauge en el límite planar

En el estudio de teorías de gauge, suele ser útil considerar determinados límites en los parámetros que caracterizan la teoría. De hecho, en general existen regiones en el espacio de parámetros en los que la teoría se simplifica drásticamente, haciendo posible la obtención de resultados no triviales para los observables relevantes de la teoría. Un caso particular de estos límites es aquel en que el número de grados de libertad independientes es muy grande. Este límite, el cual desempeñará un rol central en la formulación de la correspondencia gauge/gravedad y en el resto de esta tesis, fue originalmente propuesto en [30]. Para más detalles en este aspecto, existen muchas referencias muy útiles, de las cuales pueden mencionarse [31, 32, 33].

Este límite puede comprenderse desde un punto de vista diagramático, de hecho este es el enfoque que se adopta originalmente en [30]. Para ello, consideremos, por simplicidad, una teoría de Yang-Mills sin materia con grupo de gauge $U(N)$ cuyo Lagrangeano es de la forma

$$\mathcal{L} \sim \frac{1}{g_{YM}^2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

donde los campos toman valores en la representación adjunta del grupo de gauge y el tensor antisimétrico $F_{\mu\nu}$ se obtiene a partir del campo de gauge de la forma usual, *i.e.* $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$. El punto crucial aquí lo desempeña la naturaleza matricial del campo $A_\mu = A_\mu^a T^a$, donde T^a , $a = 1, \dots, N^2$, son los generadores del grupo de gauge $U(N)$, los cuales se toman en la representación fundamental. A su vez definimos el parámetro $\lambda = g_{YM}^2 N$, de manera que el Lagrangeano ahora posee un factor N/λ en frente de la traza. Por otro lado, se define la notación de doble línea, la cual es ideal al momento de definir la digramática de campos con estructura matricial. Para el propagador y los dos posibles vértices, la notación se indica en la Figura 1.1, donde el sufijo 0 en el propagador indica que es el correspondiente propagador libre. Como es usual en teoría de campos, el desarrollo perturbativo se organiza en términos de diagramas de Feynman.

$$\langle (A_\mu)_j^i (A_\nu)_k^l \rangle_0 = \begin{array}{c} i \text{---} \longrightarrow \text{---} k \\ j \text{---} \longleftarrow \text{---} l \end{array} \sim g_{YM}^2 = \frac{\lambda}{N}$$

$$\sim \frac{1}{g_{YM}^2} = \frac{N}{\lambda}$$

Figura 1.1: Notación de líneas dobles para la expansión diagramática, donde i, j, k, l denota los índices matriciales de los campos.

Consideremos el conjunto de diagramas conexos sin líneas externas, los cuales contribuyen, por ejemplo, en la expansión de la acción efectiva. Mediante consideraciones muy simples es posible calcular las potencias con las que aparecen los parámetros N y λ . En particular, cada propagador contribuye con un factor de λ/N . A su vez, cada vértice acarrea un factor de N/λ . Por último, cada línea cerrada representa una suma sobre los índices de color, por lo que contribuye con un factor de N . Denotando con D a la contribución correspondiente a un diagrama que posee F líneas cerradas, V vértices y E propagadores, tenemos que

$$D \sim \left(\frac{N}{\lambda}\right)^V \left(\frac{\lambda}{N}\right)^E N^F = N^{F-E+V} \lambda^{E-V}. \quad (1.5)$$

A su vez, a cada diagrama se le asocia un poliedro con V vértices, E y F caras. El teorema de Euler para poliedros implica una relación no trivial entre V , E y F y el número de huecos g del mismo, a saber

$$F - E + V = \chi = 2 - 2g \quad (1.6)$$

Desde un punto de vista análogo, χ corresponde a la característica de Euler de la superficie de Riemann de género mínimo en la que hay que embeber el diagrama de manera que ninguna línea se entrecruce, como se ve en la Figura 1.2. Ahora consideramos el régimen en el que $N \rightarrow \infty$ y $g_{YM} \rightarrow 0$ de manera tal que λ permanece fijo, conocido como límite de 't Hooft. De esta manera, la función de partición queda naturalmente definida en términos de una expansión topológica

$$\log Z = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} f_g(\lambda) \quad (1.7)$$

donde $f_g(\lambda)$ es la expansión en λ formada por todos los diagramas de género g . Vemos entonces que, en el límite de 't Hooft, la contribución dominante corresponde a los diagramas de género 0, es decir, los diagramas que pueden embeberse en una esfera, o equivalentemente en un plano. Por eso es que se suele referir a este límite como límite planar.

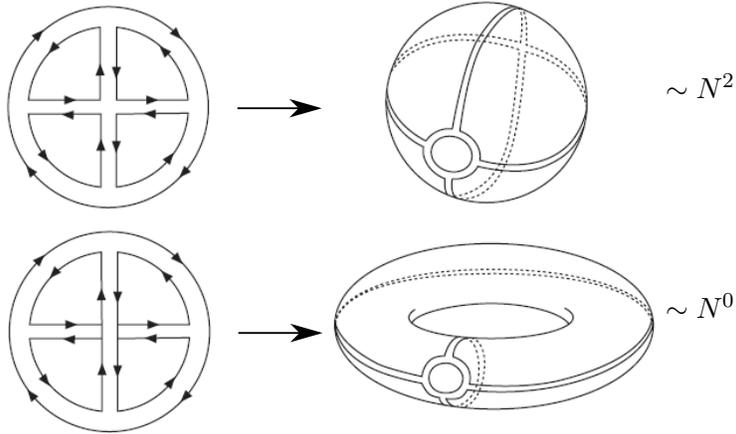


Figura 1.2: Cada diagrama puede embeberse en una superficie de Riemann de género g . La correspondiente potencia de N que acompaña a cada diagrama queda determinada por la característica de Euler de la superficie $\chi = 2 - 2g$.

En el estudio de teorías de gauge, tomar el límite planar posee una serie de implicaciones no triviales sobre los valores esperados de los distintos observables de la teoría. Una consecuencia obvia que se desprende de la expansión (1.7), es que el número de diagramas que contribuyen al valor esperado se reduce apreciablemente, debido a que todos los diagramas con topología no trivial quedan suprimidos por potencias de $1/N^2$. Otro efecto importante corresponde a la factorización de las funciones de correlación. Para entender de qué trata este fenómeno, consideremos dos observables \mathcal{O}_1 , \mathcal{O}_2 invariantes de gauge, es decir que se definen como $\mathcal{O} = \text{tr}(X^1 X^2 \dots X^n)$, con X^a operadores construidos a partir de los campos de la teoría. En particular, en el límite planar, se puede ver que la función de correlación se factoriza en los valores esperados para las correspondientes componentes invariantes de gauge

$$\langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \rangle = \langle \mathcal{O}_1 \rangle \langle \mathcal{O}_2 \rangle + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (1.8)$$

Este resultado se generaliza a su vez para funciones de correlación que involucren múltiples trazas, los cuales se factorizan en valores esperados de trazas simples. En este sentido, se suele decir que la teoría se vuelve “clásica” en el límite planar, debido a que la factorización de valores esperados se asocia con modelos de probabilidad clásica. Sin embargo, esto no debe confundirse con que la teoría no posea contribuciones en loops, de hecho, el término dominante $f_0(\lambda)$ en (1.7) da cuenta de la contribución de infinitos loops en la constante de acoplamiento de 't Hooft λ . Por lo tanto, si bien en este límite la teoría se simplifica drásticamente, aún está lejos de ser trivial. Un ejemplo muy instructivo para entender en qué sentido la teoría se vuelve “clásica” consiste en considerar

un modelo sigma no lineal para N campos escalares ϕ_i con acoplamientos cuárticos de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i^N ((\partial\phi_i)^2 + m^2\phi_i^2) + \frac{g}{8} \left(\sum_i^N \phi_i^2 \right)^2. \quad (1.9)$$

Mediante una transformación de Hubbard-Stratonovich, la integral funcional puede escribirse en términos de un campo auxiliar A de forma tal que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i^N (\partial\phi_i)^2 - \frac{1}{2g} A^2 + \frac{1}{2} (A + m^2) \left(\sum_i^N \phi_i^2 \right). \quad (1.10)$$

Notar que, integrando A , se obtiene $A = \frac{g}{2} \sum_i^N \phi_i^2$, recuperando entonces el Lagrangeano (1.9). Ahora bien, siendo la acción cuadrática en ϕ_i , estos campos pueden integrarse, obteniendo así una acción efectiva para el campo A . Definiendo $\lambda = gN$ y, debido a que hay N campos escalares ϕ_i , tenemos que

$$Z = \int \mathcal{D}A e^{NS_{\text{eff}}[A]} \quad (1.11)$$

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2\lambda} A^2 - \frac{1}{2} \log \det (-\partial^2 + m^2 + A) \quad (1.12)$$

De esta manera puede verse que, tomando el límite $N \rightarrow \infty$ con gN fijo, N desempeña el mismo papel que $1/\hbar$ en una expansión semiclásica. Por lo tanto, en el límite planar, la teoría puede resolverse exactamente en términos de la solución que minimiza la acción efectiva (1.12), a saber

$$A_{\text{cl}} = \frac{\lambda}{\det (-\partial^2 + m^2 + A_{\text{cl}})}. \quad (1.13)$$

A la solución A_{cl} se la suele denominar *campo maestro*. Por último, notar que esta teoría posee invariancia $O(N)$, por lo que en general, los observables serán funciones del invariante $\vec{\phi}^2 \sim A$. Entonces, a menos de correcciones $\mathcal{O}(1/N)$, los valores esperados de estos observables quedan completamente determinados por el campo maestro

$$\langle X(A) \rangle = X(A_{\text{cl}}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \quad (1.14)$$

Es entonces en este sentido que decimos que la teoría se vuelve “clásica”, a pesar de que, como se menciona arriba, incluye infinitas contribuciones de loops en λ . Un repaso más detallado de estos argumentos y de cómo se simplifica la acción efectiva en este tipo de modelos puede encontrarse en [31, 34, 35, 36, 24]. En el contexto de la correspondencia gauge/gravedad, se suele decir que el campo maestro en función del cual se resuelve la teoría en el límite planar posee una dinámica determinada por una teoría gravitatoria con una dimensión adicional. A su vez, cuando introduzcamos la teoría de cuerdas, veremos que expansiones topológicas del tipo de (1.7) aparecen naturalmente en la definición de la función de partición. Estos han sido algunos de los indicios claves que han inspirado la formulación de la conjetura entre ambos esquemas.

Finalmente, es importante aclarar que el alcance de los conceptos va más allá de los ejemplos descritos en esta sección. En el caso de teorías de Yang-Mills, es posible añadir materia bosónica y fermiónica, viendo que la expansión en loops también se organiza en términos de una expansión topológica de la forma de (1.7). Por otro lado, como mencionaremos más adelante, estos argumentos pueden aplicarse también a teorías de gauge de tipo Chern-Simons, en donde el nivel k juega el papel del inverso del acoplamiento de Yang-Mills, por lo que la constante de 't Hooft se define como $\lambda = N/k$. Volveremos a este punto cuando presentemos la realización holográfica para la teoría $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons con materia.

1.1.2 Teoría de cuerdas

En esta sección presentaremos algunos aspectos básicos de teoría de cuerdas de una manera muy esquemática. La mayor parte de los conceptos que se mencionan aquí se pueden encontrar desarrollados en la bibliografía básica referente al tema, entre la que mencionaremos [35, 37, 38, 39, 40, 41, 42].

Una cuerda es un objeto unidimensional relativista que se mueve en el espacio-tiempo. Antes de introducir la acción que determina la dinámica de una cuerda, recordemos brevemente la descripción relativista de una partícula puntual, cuyo movimiento describe una línea de mundo parametrizada por un parámetro afín τ . Consideremos una partícula relativista de masa m moviéndose en un espacio-tiempo de dimensión d descrito por coordenadas X^m y métrica $G_{mn}(X)$. La acción es proporcional a la longitud de la línea de mundo, medida en unidades de $1/m$, es decir

$$S_{\text{part}} = m \int d\tau \sqrt{G_{mn} \dot{X}^m \dot{X}^n}. \quad (1.15)$$

donde $\dot{X} = \frac{dX}{d\tau}$. Notar que esta acción es invariante frente a reparametrizaciones del parámetro afín que describe la línea de mundo. Ahora bien, la cuerda es un objeto extendido en una dimensión, por lo que describirá una hoja de mundo al desplazarse en el espacio-tiempo, descrita por dos coordenadas $\{\sigma^\alpha\} = \{\tau, \sigma\}$. En analogía a la partícula relativista, la acción para la cuerda será proporcional al área de la hoja de mundo, obteniendo entonces lo que se conoce como acción de Nambu-Goto

$$S_{NG} = T \int d^2\sigma \sqrt{\det(G_{mn} \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n)} = T \int d^2\sigma \sqrt{g}. \quad (1.16)$$

donde $g = \det g_{\alpha\beta}$ es el determinante de la métrica inducida $g_{\alpha\beta}$, la cual es el *pull-back* de la métrica del espacio-tiempo G_{mn} sobre la hoja de mundo

$$g_{\alpha\beta} = G_{mn} \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n. \quad (1.17)$$

Notar que, al igual que en el caso de la partícula relativista, esta acción también es invariante frente a difeomorfismos, *i.e.* reparametrizaciones de las coordenadas de la hoja de mundo de la forma $\sigma^\alpha \rightarrow \tilde{\sigma}^\beta(\sigma^\alpha)$. A su vez, el rol que jugaba la masa de la partícula relativista ahora lo juega

la tensión de la cuerda T , la cual se puede expresar en términos de la pendiente de Regge α' de manera tal que $T = (2\pi\alpha')^{-1}$.

En general, hay dos tipos de cuerdas, a saber, cuerdas cerradas y cuerdas abiertas. Esta distinción depende de las condiciones de contorno que se imponen sobre una de las coordenadas de la hoja de mundo, digamos σ . La cuerda cerrada corresponde a imponer condiciones de contorno periódicas, *i.e.* $\sigma \simeq \sigma + 2\pi$. Por otro lado, la cuerda abierta se obtiene al imponer condiciones de contorno tipo Neumann (cuerda libre) o Dirichlet (en presencia de D-branas).

A su vez, existe una descripción análoga en términos de una acción cuadrática en los campos, la denominada acción de Polyakov. Para escribir la acción de la cuerda en esta formulación, es necesario introducir un campo adicional $h_{\alpha\beta}$, el cual es un tensor simétrico que identificaremos con la métrica de la hoja de mundo. De esta manera la acción de Polyakov se escribe en términos de un modelo sigma no lineal para las coordenadas X^m

$$S_P = \frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} G_{mn} \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n. \quad (1.18)$$

Notar que la acción de Polyakov (1.18) es manifiestamente invariante ante difeomorfismos $\delta\sigma^\alpha = \xi^\alpha$ tales que generen un rescaleo conforme de la métrica $h_{\alpha\beta}$. Adicionalmente, la acción también es invariante frente a transformaciones de Weyl de la métrica, esto es, rescaleos de la misma por una función arbitraria. Volveremos a este punto en breve.

Variando (1.18) respecto de $h_{\alpha\beta}$ se obtiene la siguiente ecuación¹

$$G_{mn} \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} G_{mn} \partial_\gamma X^m \partial_\delta X^n = 0. \quad (1.19)$$

Esta última ecuación implica que la métrica de la hoja de mundo es esencialmente la métrica inducida (1.17) a menos de una transformación de Weyl, a saber

$$h_{\alpha\beta} = f(\sigma) g_{\alpha\beta} \quad , \quad f(\sigma) = \frac{1}{2} h^{\gamma\delta} g_{\gamma\delta} \quad (1.20)$$

Debido a la invariancia de la acción de Polyakov frente a transformaciones de Weyl, a nivel clásico, tenemos que el factor que relaciona ambas métricas es irrelevante. Finalmente, reemplazando (1.20) en (1.18), es fácil ver que se recupera la acción de Nambu-Goto (1.16), por lo que ambas descripciones son equivalentes a nivel clásico.

A pesar de esta equivalencia a nivel clásico, el tratamiento cuántico es mucho más directo en la formulación de Polyakov. Esto se debe a que, si bien no es libre debido a la presencia de vínculos derivados de las ecuaciones de movimiento para $h_{\alpha\beta}$, la acción es cuadrática en los campos X^m , a diferencia de (1.16), la cual posee una raíz cuadrada.

En este punto, es importante realizar algunas consideraciones respecto al papel que juega la métrica $h_{\alpha\beta}$ en el contexto de la formulación de Polyakov:

¹Aquí hemos utilizado que $\delta h = h h^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta}$ y que $h^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta} = -\delta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$.

- La acción (1.18) es invariante frente a difeomorfismos que generan un rescaleo conforme de la métrica. A este conjunto de transformaciones se la conoce como grupo conforme de simetría. A nivel infinitesimal, un difeomorfismo arbitrario es generado por un vector 2-dimensional $\xi^\alpha(\sigma)$ tal que $\delta\sigma^\alpha = \xi^\alpha(\sigma)$. A su vez, estas transformaciones actúan sobre la métrica de la siguiente manera

$$\delta h_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha \quad (1.21)$$

con ∇_α la derivada covariante definida sobre la métrica $h_{\alpha\beta}$. En particular, nos interesan los difeomorfismos que generan un rescaleo conforme de la métrica, esto es $h_{\alpha\beta} \rightarrow f(\sigma)h_{\alpha\beta}$, con $f(\sigma)$ alguna función. Es fácil ver que, en 2 dimensiones, los vectores de Killing que generan estas transformaciones satisfacen la siguiente ecuación, denominada *Ecuación de Killing Conforme*

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha - h_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \xi^\gamma = 0. \quad (1.22)$$

En $d = 2$, como es el caso de la cuerda, las soluciones a las ecuaciones (1.22) generan un grupo infinito de simetría local (gauge), denominado grupo de Virasoro. En coordenadas complejas (z, \bar{z}) , la ecuación (1.22) toma una forma muy simple, a saber

$$\partial_{\bar{z}} \xi_z = 0 \quad , \quad \partial_z \xi_{\bar{z}} = 0, \quad (1.23)$$

por lo que las soluciones son simplemente transformaciones holomorfas (anti-holomorfas) sobre la variable z (\bar{z}), $z \rightarrow f(z)$ ($\bar{z} \rightarrow g(\bar{z})$). Por su parte, cualquier función holomorfa posee un desarrollo de Laurent en potencias enteras de z . Se definen entonces los generadores del grupo de Virasoro L_m como las cargas de Noether asociados a las transformaciones generadas por los monomios z^{m+1} . Estos generadores satisfacen, a nivel clásico, el álgebra clásica de Virasoro

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n}, \quad (1.24)$$

y análogamente se definen los generadores \tilde{L}_m para las transformaciones anti-holomorfas. En este esquema, es posible descomponer los campos en las correspondientes partes holomorfa y anti-holomorfa. En términos de los mismos, el grupo de Virasoro actúa independientemente sobre cada uno de los sectores. En este lenguaje, se establece una diferencia entre una cuerda cerrada, en la cual ambos sectores son independientes y por lo tanto se poseen dos copias del grupo de Virasoro, y una cuerda abierta, la cual posee solamente un sector independiente. Finalmente, solo mencionaremos que el álgebra (1.24) se ve modificada a nivel clásico por un término anómalo. Este término anómalo es proporcional a la carga central del contenido de campos de la teoría y se relaciona con la anomalía de Weyl que se evidencia a nivel cuántico.

- Adicionalmente, la acción (1.18) es invariante frente a transformaciones de Weyl sobre la métrica. Más precisamente, una transformación de Weyl da cuenta de un rescaleo de la

métrica de la hoja de mundo con una función arbitraria, el cual lo definimos como $h_{\alpha\beta} \rightarrow e^{\varphi} h_{\alpha\beta}$. Por lo tanto, para una transformación infinitesimal, la variación de la métrica resulta

$$\delta h_{\alpha\beta} = \varphi(\sigma) h_{\alpha\beta}. \quad (1.25)$$

Es fácil ver que las identidades de Ward que se derivan de esta simetría de Weyl imponen una condición sobre el tensor de energía momento, a saber que debe tener traza nula, $h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0$. Esto es válido a nivel clásico, de hecho, $T_{\alpha\beta}$ es proporcional a la expresión que está a la izquierda en (1.19), la cual posee traza nula. Más adelante veremos que esto no se cumplirá, en general, a nivel cuántico, a menos que la dimensión del espacio-tiempo sea $d = 26$ (cuerda bosónica) o bien $d = 10$ (cuerda supersimétrica).

- A nivel clásico, esta simetría de gauge nos permite fijar completamente los tres grados de libertad de $h_{\alpha\beta}$, siendo manifiesto entonces el carácter auxiliar de este campo. Por lo tanto, la dinámica de la métrica de la hoja de mundo es trivial a nivel clásico, por lo que es posible constreñir la forma de $h_{\alpha\beta}$ mediante un fijado de gauge conveniente. Una vez fijado el gauge, la independencia de la acción respecto a $h_{\alpha\beta}$ impone una condición muy fuerte, a saber que el tensor de energía momento debe ser nulo $T_{\alpha\beta} = 0$, dando lugar a las condiciones de Virasoro.
- En particular, los generadores $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$ (y su contraparte anti-holomorfa en el caso de cuerdas cerradas) forman un subálgebra que se asocia al grupo conforme global en 2 dimensiones. El grupo formado por estos generados es $SL(2, \mathbb{C})$ para cuerdas cerradas, y $SL(2, \mathbb{R})$ para cuerdas abiertas. En el contexto de teoría de campos, las simetría conforme conlleva a simplificaciones drásticas en la dinámica [43], ya que las identidades de Ward imponen condiciones fuertes sobre las funciones de correlación de los distintos operadores de la teoría.
- Por último, cabe aclarar que estas consideraciones no son válidas para cualquier geometría G_{mn} del espacio de fondo. En particular, estos resultados son válidos para cuerdas moviéndose en espacio plano. Sin embargo, es posible extender muchos de estos conceptos para geometrías que poseen invariancia conforme, como es el caso de los espacios Anti de Sitter.

A nivel cuántico, la teoría de cuerdas da lugar a fenómenos muy interesantes. Aquí haremos una breve descripción, para nada exhaustiva, de algunos de estos resultados, en particular lo que serán importantes en el contexto de la correspondencia gauge/gravedad. Para ello, nos concentraremos en cuerdas sobre espacio plano ($G_{mn} = \eta_{mn}$). La acción de Polyakov en espacio plano puede resolverse exactamente a nivel cuántico mediante los métodos usuales. Esto es, se resuelven las ecuaciones de movimiento, obteniendo un espectro de modos de oscilador, sujetos a su vez a las condiciones de Virasoro; luego, el espectro de estados cuánticos se obtiene expandiendo los campos en estos modos y promoviendo los coeficientes del desarrollo a operadores de creación y destrucción que

actúan sobre un espacio de Fock. Aquí se obtiene el primer resultado remarcable: para una única cuerda, se obtiene un espectro infinito de estados. A su vez, las masas de estos estados se acomodan en un torre infinita, así también como el espín de los mismos. Lo realmente interesante aquí es la obtención de una enorme variedad de estados cuánticos correspondientes a distintas partículas, todo a partir de un único objeto, a saber, la cuerda.

La estructura del espectro de estados cuánticos dependerá, a su vez, del tipo de cuerda que se está estudiando. En particular, mencionaremos algunas propiedades interesantes:

- Para cuerdas cerradas, el espectro de estados no-masivos da lugar a una teoría de gravedad sobre el espacio de fondo. Esto coloca a la teoría de cuerdas como uno de los candidatos a proveer una descripción cuántica consistente de la gravedad.
- Para cuerdas abiertas, la dinámica de los estados no-masivos se corresponde con una teoría de Yang-Mills. Este hecho jugará un papel central en la formulación de la correspondencia.
- Estas consideraciones han sido presentadas para cuerdas bosónicas. Lo que no hemos mencionado es que el espectro de estas cuerdas posee un estado taquiónico, es decir con masa $m^2 < 0$, el cual atenta contra la estabilidad del vacío de este tipo de teorías. Sin embargo, este inconveniente queda completamente saneado al introducir la supercuerda. Debido a que en esta tesis consideraremos cuerdas supersimétricas, la presencia del taquión para la cuerda bosónica no será discutido en lo que sigue.

Cuerdas supersimétricas

En este trabajo, estudiaremos realizaciones supersimétricas de la dualidad AdS/CFT , por lo que es necesario introducir la teoría de supercuerdas. Una formulación posible de esta teoría corresponde a una extensión de la acción (1.18), la cual se obtiene mediante la introducción de campos fermiónicos ψ_α^m definidos sobre la hoja de mundo, es decir fermiones 2-dimensionales (2 componentes) que transforman como vectores ante el grupo de Poincaré del espacio *target*. Esto se conoce como formulación de Ramond-Neveu-Schwartz (RNS). En esta descripción, la supersimetría se realiza como una simetría global que actúa sobre los campos 2-dimensionales definidos sobre la hoja de mundo.

Nuevamente, el espectro cuántico puede resolverse en espacio plano. Destacaremos dos características importantes de este espectro. En primer lugar, que no posee modo taquiónico, garantizando así la estabilidad del vacío supersimétrico. Por otro lado, el vacío, conformado por los estados de masa nula, está compuesto por dos sectores: el sector de Neveu-Schwartz, cuyo estado fundamental es un bosón del *target*, y el sector de Ramond, cuyo estado fundamental es un fermión del *target*. Los campos que conforman la teoría de bajas energías se obtienen entonces actuando con

los modos de oscilador de X^m y ψ_α^m sobre los estados fundamentales de ambas teorías. Se puede ver, sin embargo, que los grados de libertad bosónicos y fermiónicos así generados no están en pie de igualdad, por lo que la supersimetría no queda realizada a nivel del espacio *target*. Para sanear esto, es necesario realizar una proyección, denominada proyección GSO², la cual elimina la mitad de los grados de libertad fermiónicos, obteniendo así una teoría supersimétrica en el *target*. Realizada esta proyección, el espectro no-masivo es el correspondiente a una teoría de supergravedad.

Sin embargo, para algunas aplicaciones, resulta más conveniente una descripción en la que la supersimetría se realice explícitamente en el espacio *target*. En el caso de cuerdas, esto corresponde a la formulación de Green-Schwartz (GS), la cual fue introducida inicialmente para espacio plano en [44]. Explícitamente, la teoría se define en un super-espacio. La introducción del super-espacio está lejos del alcance de esta tesis, sólo mencionaremos que esta descripción ha sido una herramienta muy poderosa en el estudio de teorías supersimétricas, ya que promueve la supersimetría a una isometría de un espacio extendido. Para mayor detalle sobre las técnicas de super-espacio aplicadas a teorías de gauge y gravedad se recomienda ver [45, 46, 47, 48, 49]. Introducimos entonces la coordenada fermiónica $\theta = \theta^1 + \theta^2$, donde los θ^I son espinores de Majorana-Weyl en $d = 10$, es decir, poseen 16 componentes reales cada uno. Estos grados de libertad juegan el rol compañeros supersimétricos de las coordenadas usuales X^m del espacio-tiempo de *target*. En esta formulación, las transformaciones de supersimetría de la teoría se traducen simplemente en traslaciones en el superespacio ($\theta \rightarrow \theta + \epsilon$). Definimos entonces la acción de GS sobre un espacio *target* plano de la siguiente manera

$$S_{GS} = T \int d^2\sigma \left[\frac{1}{2} \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \eta_{mn} (\partial_\alpha X^m - i\bar{\theta}^I \Gamma^m \partial_\alpha \theta^I) (\partial_\beta X^n - i\bar{\theta}^I \Gamma^n \partial_\beta \theta^I) + i\epsilon^{\alpha\beta} s^{IJ} \bar{\theta}^I \Gamma_m \partial_\alpha \theta^J \left(\partial_\beta X^m - \frac{1}{2} \bar{\theta}^I \Gamma^m \partial_\beta \theta^I \right) \right]. \quad (1.26)$$

donde $s^{11} = -s^{22} = 1$ y $s^{12} = s^{21} = 0$. Notar que (1.26) es manifiestamente invariante frente a transformaciones de supersimetría³ generadas por un espinor de Killing infinitesimal ϵ^I

$$\delta X^m = i\bar{\epsilon}^I \Gamma^m \theta^I, \quad \delta \theta^I = \epsilon^I, \quad \delta \bar{\theta}^I = \bar{\epsilon}^I. \quad (1.27)$$

La extensión de esta descripción a espacios *target* curvos es, en general, un problema altamente no-trivial. Sin embargo, para espacios *target* homogéneos es posible obtener la acción de GS en términos de un modelo sigma no lineal para el super-vielbein del correspondiente super-espacio. Este es el caso, por ejemplo, de los factores que conforman los espacios producto $AdS_5 \times S^5$ y $AdS_4 \times CP^3$. Los detalles de estas construcciones y su relación con estructuras integrables a nivel clásico están fuera

²Es justamente esta proyección la que se encarga de eliminar el modo taquiónico.

³En esta presentación estamos interesados en teorías con $\mathcal{N} = 2$ supersimetrías. Para realizaciones con $\mathcal{N} = 1$, sólo es cuestión de tomar alguno de los $\theta^I = 0$.

del alcance de este trabajo, por lo que recomendamos ver [50, 51, 52, 53, 54, 55, 56]. En general, la acción para estos modelos estará compuesta de un término cuadrático en el super-vielbein, junto un término topológico (independiente de $h_{\alpha\beta}$) que incluye acoplamientos con los flujos del espacio *target*. En general, la acción incorpora términos no triviales en potencias de los campos fermiónicos θ . Sin embargo, en una expansión semiclásica, solamente nos interesarán los términos cuadráticos en estos campos.

Adicionalmente, además de ser invariante frente a transformaciones de supersimetría, la acción de Green-Schwartz posee una simetría local fermiónica, denominada simetría kappa, la cual actúa de la siguiente manera

$$\delta\theta = (1 + \Gamma)\kappa \tag{1.28}$$

con κ un parámetro fermiónico local y Γ es un proyector que depende de los campos bosónicos. Notar que, a diferencia de la formulación RNS, en la que se debía introducir de manera *ad hoc* la proyección GSO, esta libertad de gauge permite reducir el número de grados de libertad fermiónicos a la mitad, igualando el número de grados de libertad bosónicos y fermiónicos, en acuerdo con los corolarios usuales en teorías supersimétricas. En el Apéndice B presentamos algunos detalles relativos al fijado de gauge de simetría kappa y su relación con supersimetría.

En este contexto, es conveniente introducir la distinción entre las dos posibles teorías de cuerdas supersimétricas que pueden obtenerse para el caso de $\mathcal{N} = 2$. Como se menciona arriba, las coordenadas fermiónicas del super-espacio se escriben en términos de dos fermiones 10-dimensionales de Majorana-Weyl θ^I , $I = 1, 2$. En particular, podemos tomar θ^1 y θ^2 con quiralidades opuestas, obteniendo la teoría de cuerdas tipo IIA. El sector no-masivo de esta teoría corresponde a supergravedad tipo IIA, y será el tipo de teorías en el que nos concentraremos al establecer el dual gravitatorio para la teoría ABJM. Alternativamente, podemos tomar θ^1 y θ^2 con la misma quiralidad, lo que resulta en la denominada teoría de cuerdas tipo IIB. Lógicamente, el sector no-masivo de esta teoría corresponde a supergravedad tipo IIB, como es, por ejemplo, el dual gravitatorio de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills.

Por último, cabe aclarar que la acción de GS posee las mismas simetrías que fueron mencionadas en la descripción de la cuerda bosónica en términos de la acción (1.18), *i.e.* difeomorfismos y transformaciones de Weyl. En este punto, volveremos brevemente al fijado de gauge correspondiente a estas simetrías. Consideremos de momento la acción de GS para una configuración clásica, para la cual los campos fermiónicos son nulos. Como se mencionó previamente, esta libertad de gauge nos permite fijar, a nivel clásico, los tres grados de libertad, correspondientes a la métrica de la hoja de mundo $h_{\alpha\beta}$ o a las coordenadas X^m . Dos posibles elecciones son el *gauge estático* y el *gauge conforme*. Ambas opciones son equivalentes a nivel clásico. Sin embargo, el tratamiento cuántico suele ser más directo en el gauge conforme.

En el caso del gauge estático, se identifica la métrica $h_{\alpha\beta}$ con la métrica inducida en la hoja de

mundo ($P[G]$) y, a su vez, se identifican dos coordenadas del espacio *target* con las dos coordenadas de la hoja de mundo. En este esquema, la acción de GS toma la forma de la acción de Nambu-Goto (1.16) para las coordenadas X^m restantes. El espectro de fluctuaciones cuánticas (cuadráticas en los campos), una vez fijado este gauge, solamente posee fluctuaciones bosónicas transversales a la hoja de mundo y la correspondiente acción para los campos *ghost* es trivial.

La otra opción estándar corresponde a fijar el gauge conforme, en el que se eliminan los grados de libertad auxiliares fijando $h_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ ⁴. De esta manera, la acción para las coordenadas X^m toma la forma de la acción de Polyakov (1.18), con $h_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. En este gauge, además de las fluctuaciones bosónicas transversales, existen dos direcciones longitudinales. A su vez, los campos de *ghost* poseen una acción cuadrática no trivial, la cual es formalmente idéntica a la de los modos longitudinales. El hecho de que haya una cancelación precisa entre estos modos es un tema que todavía no está del todo entendido.

Dimensión crítica

Hasta ahora, hemos visto que la acción de una cuerda bosónica depende de los campos X^m y de la métrica de la hoja de mundo $h_{\alpha\beta}$. A su vez, vimos que, a nivel clásico, la acción es invariante frente a rescaleos de Weyl de la métrica $h_{\alpha\beta} \rightarrow e^\varphi h_{\alpha\beta}$. Sin embargo, se puede ver que esta simetría no se conserva nivel cuántico, es decir, es anómala. Esto se debe a que, si bien la acción es invariante de Weyl, la medida de integración que define la integral funcional no lo es. Consideremos una cuerda en espacio plano d -dimensional, y en particular las fluctuaciones cuánticas alrededor del vacío $X^m = 0$. La función de partición se obtiene de integrar sobre todas las configuraciones posibles. Denotando con $S[X, h]$ a la acción de Polyakov, tenemos que

$$Z \sim \int \mathcal{D}X \mathcal{D}h e^{-S[X, h]}. \quad (1.29)$$

Donde el símbolo \sim da cuenta de una normalización que no es relevante en esta discusión. Ahora bien, la integral en $h_{\alpha\beta}$ no es una integral sobre grados de libertad independientes, ya que, como ya se discutió, existen redundancias debido a la simetría frente a difeomorfismos y transformaciones de Weyl. En particular, podemos hacer uso de esta libertad de gauge para reescribir la integración en el espacio de métricas. Para ello, definimos una métrica de referencia $\hat{h}_{\alpha\beta}$, a partir de la cual puede obtenerse una métrica arbitraria $h_{\alpha\beta}$ aplicando difeomorfismos y transformaciones de Weyl, generados por un vector de Killing ξ^α y un campo escalar φ respectivamente⁵. Por lo tanto, tenemos que una variación infinitesimal en el espacio de métricas puede escribirse de la siguiente manera

$$\delta h_{\alpha\beta} = \varphi h_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha. \quad (1.30)$$

⁴En general, a lo largo de esta tesis trabajaremos en signatura Euclídea, a menos que se indique lo contrario

⁵Notar que fijar el gauge conforme correspondería a tomar $\hat{h}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$.

Este procedimiento es completamente análogo al mecanismo de Fadeev-Popov para el fijado de gauge en teoría cuántica de campos. Por lo tanto, este cambio de variables trae asociado consigo un Jacobiano, o determinante de Fadeev-Popov, mediante el cual reescribir el elemento de integración de la siguiente manera

$$\mathcal{D}h \rightarrow \mathcal{D}\xi^\alpha \mathcal{D}\varphi (\det \mathcal{O}_{\text{gh}})^{\frac{1}{2}}, \quad (1.31)$$

con \mathcal{O}_{gh} definido de la siguiente manera

$$\mathcal{O}_{\text{gh}} = P_1^\dagger P_1, \quad (1.32)$$

con P_1 un operador diferencial que mapea el espacio de vectores en el espacio de tensores simétricos de la siguiente manera

$$(P_1 \epsilon)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \epsilon_\beta + \nabla_\beta \epsilon_\alpha - h_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \epsilon^\gamma. \quad (1.33)$$

Por otro lado, P_1^\dagger es un operador que actúa sobre el espacio de tensores simétricos y posee imagen sobre el espacio de vectores. En particular, dado un tensor simétrico τ , se tiene que $(P_1^\dagger \tau)_\alpha = \nabla^\beta \tau_{\alpha\beta}$. En general, el Jacobiano de Fadeev-Popov se exponentia en términos de campos de Grassman vectoriales, conocidos como campos de *ghost*.

Definimos entonces⁶

$$\begin{aligned} S_{\text{bos}}[X, h] &= \frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^m \partial_\beta X_m \\ S_{\text{gh}}[\epsilon, h] &= \frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{\gamma\alpha} \epsilon_\alpha \nabla^\beta (\nabla_\alpha \epsilon_\beta + \nabla_\beta \epsilon_\alpha - h_{\alpha\beta} \nabla_\delta \epsilon^\delta) \end{aligned} \quad (1.34)$$

donde, en la primera línea, está implícita la suma en m a través de la métrica plana. La función de partición será entonces la integral funcional de $\exp(-S_{\text{bos}} + S_{\text{gh}})$ en los grados de libertad X^m , ϵ^α y $h_{\alpha\beta}$.

Ahora bien, en el espíritu del mecanismo de Fadeev-Popov, una vez reescrita la medida sobre el espacio de métricas $h_{\alpha\beta}$ de la forma (1.31), debería procederse a factorizar la integral en los grados de libertad redundantes. En particular, se puede ver que los dos grados de libertad generados por los difeomorfismos conformes ξ^α efectivamente se factorizan. Esto ocurre porque tanto las acciones (1.34) como las medidas de integración son invariantes frente a esta simetría. Por lo tanto, la integración en los grados de libertad de gauge ξ^α da lugar a un factor de volumen del grupo de gauge. Este volumen es infinito y se suele absorber en la normalización de la función de partición. Podemos entonces fijar estos grados de libertad escribiendo $h_{\alpha\beta} = e^\varphi \hat{h}_{\alpha\beta}$ con $\hat{h}_{\alpha\beta}$ una métrica de referencia fija. Si la simetría frente a rescaleos de Weyl fuera una simetría de la teoría a nivel cuántico, entonces la función de partición no debería depender del campo ϕ o, dicho de otra manera, la integral en h no tendría ningún efecto en Z . Sin embargo, se puede ver que

⁶En este análisis no incluiremos factores de α' en pos de simplificar la notación.

tanto la medida de integración de los campos X^m como la de ϵ^α es anómala frente a este tipo de transformaciones [57, 58]. La contribución de los campos escalares a la anomalía puede calcularse en términos de $\langle T^\alpha_\alpha \rangle$. Este tipo de contribuciones, conocidas como anomalías de traza, se relacionan con la ausencia de simetría conforme a nivel cuántico, y han sido ampliamente estudiadas. Por otro lado, la anomalía conforme proveniente de la integración en los campos de *ghost* también puede ser calculada explícitamente. Presentaremos aquí los resultados, si bien no expondremos una derivación de los mismos. Por simplicidad, fijaremos la métrica de referencia de manera tal que $\hat{h}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, por lo que $h_{\alpha\beta} = e^\varphi \delta_{\alpha\beta}$. De esta manera, se puede ver que

$$\int \mathcal{D}X^m \mathcal{D}\varphi \exp[-S_{\text{bos}}[X, e^\varphi \delta]] = \int \mathcal{D}X^m \mathcal{D}\varphi \exp\left[-S_{\text{bos}}[X, \delta] + \frac{d}{48\pi} \int d^2\sigma \left(\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \mu^2 e^\varphi\right)\right], \quad (1.35)$$

donde μ es una escala que aparece en el proceso de regularización de divergencias. Notar que la presencia de esta escala da cuenta de la ruptura explícita de la simetría conforme. Por otro lado, tenemos que

$$\int \mathcal{D}\epsilon^\alpha \mathcal{D}\varphi \exp[S_{\text{gh}}[\epsilon, e^\varphi \delta]] = \int \mathcal{D}\epsilon^\alpha \mathcal{D}\varphi \exp\left[S_{\text{gh}}[\epsilon, \delta] - \frac{13}{24\pi} \int d^2\sigma \left(\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \mu^2 e^\varphi\right)\right]. \quad (1.36)$$

La acción que se obtiene para φ en ambos casos se conoce como acción de Liouville. En particular, la escribimos en espacio plano, sin embargo, para una dada métrica de referencia $h_{\alpha\beta}$, se habría obtenido la acción de Liouville definida sobre esta geometría. En conclusión, tenemos que

$$Z \sim \int \mathcal{D}X^m \mathcal{D}\varphi e^{-S_{\text{bos}}[X, \hat{h}] + S_{\text{gh}}[\epsilon, \hat{h}]} e^{-\frac{26-d}{48\pi} S_L[\varphi, \hat{h}]}. \quad (1.37)$$

Por lo tanto, el requerimiento de simetría conforme a nivel cuántico fija la dimensión del espacio *target* en el cual se define la teoría de cuerdas. Esta dimensión se conoce como *dimensión crítica*. En particular, para la cuerda bosónica vemos que la dimensión crítica es $d = 26$.

Este mismo análisis también fue realizado para teorías de cuerdas supersimétricas [59, 60], obteniéndose que la dimensión crítica es $d = 10$.

Finalmente, haremos algunos comentarios adicionales:

- En este análisis esquemático han pasado desapercibidos muchos detalles, algunos de los cuales pueden llegar a ser relevantes a la hora de hacer un cálculo explícito. En particular, mencionaremos que la expresión (1.31) en términos del determinante del operador (1.32) no es del todo correcta. Esto se debe a que el operador P_1 definido en (1.33) posee modos no triviales con autovalores nulos, *i.e.* modos cero. Notar que estos modos corresponden a soluciones de la Ecuación de Killing Conforme (1.22). Esto posee una interpretación simple. La acción de este tipo de difeomorfismos resulta en un rescaleo de la métrica $h_{\alpha\beta}$, el cual puede ser

deshecho mediante una transformación de Weyl apropiada. Por lo tanto, los modos cero corresponden a transformaciones cuya acción es trivial en la órbita de gauge. Ahora bien, de las infinitas soluciones que posee la ecuación (1.22), sólo contribuirán las que sean normalizables en la hoja de mundo. El número de modos cero normalizables depende en general de la topología de la hoja de mundo, estando presentes en general solamente para el caso de topologías triviales (disco o esfera). La presencia de estos modos exige extraer previamente su contribución antes de definir la medida. De manera tal que el buen Jacobiano de Fadeev-Popov es $\det' P^\dagger P_1$, donde el símbolo $'$ denota que sólo deben tenerse en cuenta los autovalores no nulos. Lamentablemente, aún no se posee un mecanismo sistemático y libre de ambigüedades para obtener explícitamente la contribución de estos modos a la función de partición.

- Análogamente, la presencia de modos no triviales en el núcleo de P_1^\dagger también posee consecuencias importantes a la hora de definir la función de partición. En particular, a la hora de definir la integración sobre el espacio de métricas, en algunos casos resulta necesario introducir una integración en un parámetro modular, conocido como módulo de Teichmüller. Este parámetro da cuenta de la presencia de dominios disconexos en el espacio de métricas, es decir, elementos que no pueden conectarse mediante difeomorfismos y transformaciones de Weyl. Este efecto se vuelve importante al considerar hojas de mundo con topologías no triviales. Sin embargo, no será relevante en los cálculos presentados en esta tesis.

Finalmente, es importante recalcar que los resultados presentados en esta sección son válidos para cuerdas definidas sobre un espacio *target* plano ($G_{mn} = \eta_{mn}$). Sin embargo, se pueden extender para algunos casos particulares de geometrías más complejas. Esto puede verse de una manera relativamente simple. Para ello, consideremos una cuerda supersimétrica con $\mathcal{N} = 2$. Como ya fue mencionado, el sector no-masivo del espectro de este tipo de cuerdas corresponde al multiplete de supergravedad tipo IIA o IIB. Para una configuración de vacío no trivial de estos campos, la cuerda se acopla a los mismos a través de la acción, ya sea en la formulación de GS o RNS. Consideremos el sector bosónico en la formulación de RNS, cuya acción será de la forma

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{h} \left[\left(h^{\alpha\beta} G_{mn}(X) + \epsilon^{\alpha\beta} B_{mn}(X) \right) \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n + \alpha' \Phi(X) R^{(2)} \right] \quad (1.38)$$

donde hemos incluido el acoplamiento conforme del dilatón $\Phi(X)$ con la curvatura escalar de la métrica de la hoja de mundo $R^{(2)}$. Análogamente, el sector fermiónico Ψ_α^m también se acopla con la geometría del espacio *target*, sin embargo no presentaremos aquí los detalles de la acción.

En este contexto, los campos de gravedad $G_{mn}(X)$, $B_{mn}(X)$ y $\Phi(X)$ se pueden interpretar como acoplamientos efectivos de la teoría. Por lo tanto, es posible calcular las correspondientes funciones

β , las cuales se pueden obtener orden a orden en una expansión en α' [61]

$$\beta_{mn}^G = \frac{1}{2}R_{mn} - \frac{1}{8}H_{mpq}H_n{}^{pq} + \partial_m\Phi\partial_n\Phi + \mathcal{O}(\alpha') \quad (1.39)$$

$$\beta_{mn}^B = -\frac{1}{2}D_p H^p{}_{mn} + \partial_p H^p{}_{mn} + \mathcal{O}(\alpha') \quad (1.40)$$

$$\beta^\Phi = \frac{1}{6}(d-10) + \alpha' \left(2\partial_m\Phi\partial_n\Phi - 2\nabla^m\partial_m\Phi + \frac{1}{2}R - \frac{1}{24}H_{mnp}H^{mnp} \right) + \mathcal{O}(\alpha'), \quad (1.41)$$

donde $H = dB$. A orden $(\alpha')^0$, estas son las ecuaciones de movimiento que se derivan de la acción de supergravedad. Los órdenes subdominantes corresponderían a correcciones en α' a este tipo de teorías.

La presencia de simetría conforme a nivel cuántico implica que las funciones β deben ser nulas, ya que no es consistente con la aparición de una escala típica frente a la cual corren los acoplamientos. Notablemente, del primer término en β^Φ , vemos que esta condición fija nuevamente la dimensión crítica, a saber $d = 10$. Adicionalmente, notemos que el dilatón siempre aparece derivado (se puede ver que esto es válido incluso para órdenes mayores en α'). En la mayor parte de esta tesis consideraremos, geometrías que poseen dilatón constante $\Phi = \phi_0$, por lo que en general estos términos son nulos. En particular, es importante mencionar que los espacios Anti de Sitter, no solo poseen la propiedad de tener dilatón constante, sino que se puede ver que son soluciones exactas de las ecuaciones de supergravedad a todo orden en α' . Por lo tanto, la simetría conforme se preservará a nivel cuántico para fluctuaciones sobre este tipo de vacíos.

Por último, es importante aclarar que en todo este análisis hemos considerados fluctuaciones sobre el vacío de la teoría. Si, en cambio, queremos estudiar la teoría de fluctuaciones cuánticas alrededor de una solución clásica no trivial (solitón), es necesario evaluar la ausencia de términos anómalos para cada solución clásica particular. Esto jugará un rol importante más adelante, por lo que volveremos a este punto en el capítulo 3.

Interacciones entre cuerdas

Las interacciones entre cuerdas dan cuenta de los efectos debidos a, por ejemplo, una hoja de mundo que se dividen formando dos nuevas, o por el contrario, dos que se unen para formar una. Este tipo de interacciones da lugar a hojas de mundo con agujeros, es decir de género no trivial, como se ve en la Figura 1.3. Por lo tanto, definiendo la constante de acoplamiento de cuerdas g_s , es razonable esperar que el desarrollo perturbativo en g_s de las funciones de correlación se organice en términos de una expansión topológica. Para ver esto, consideremos cuerdas moviéndose en una dada geometría, sobre la que especificaremos en breve. Por simplicidad, consideraremos solamente el sector bosónico de la teoría. Como se mencionó previamente, el sector no-masivo de la cuerda cerrada supersimétrica corresponde a una teoría de supergravedad, ya sea tipo IIA o IIB. La forma de la acción de la cuerda en presencia de campos gravitatorios de fondo no triviales es (1.38).

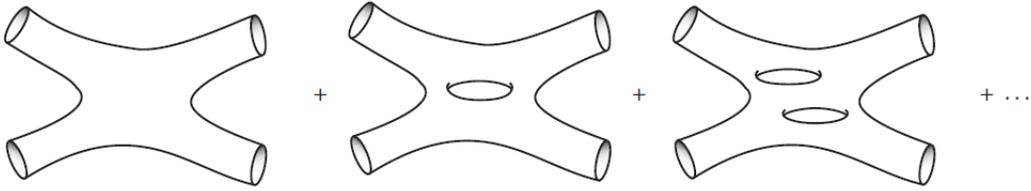


Figura 1.3: Expansión de la función de correlación con 4 inserciones.

Esquemáticamente, se compone de un funcional de área y un término de acoplamiento conforme con el dilatón. En general, la métrica del espacio *target* posee una escala típica L a la que nos referimos como el radio de la geometría. Factorizando esta escala fuera del funcional de área podemos escribir

$$S = \frac{L^2}{\alpha'} S_A + \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \Phi R^{(2)}, \quad (1.42)$$

donde S_A denota al funcional de área una vez rescaleado el factor de L^2 y escribimos la tensión de la cuerda en función de la pendiente de Regge α' , $T = (2\pi\alpha')^{-1}$. Ahora bien, para la geometría de fondo, nos concentraremos en soluciones de supergravedad con dilatón constante $\Phi = \Phi_0$, ya que esta es una condición necesaria para que la simetría conforme se preserve a nivel cuántico. Vemos entonces que

$$e^{-S} \sim e^{-\frac{\phi_0}{4\pi} \int R^{(2)}} e^{-\frac{L^2}{\alpha'} S_A}. \quad (1.43)$$

Por otro lado, el teorema de Riemann-Roch garantiza que la integral de la curvatura escalar para una superficie de Riemann está completamente determinada por la topología de la misma, a saber $\int R^{(2)} = 4\pi\chi$, donde χ es la característica de Euler⁷. Por ejemplo, para una superficie de Riemann de género g (g agujeros) y b bordes, se tiene que

$$\chi = 2 - 2g - b. \quad (1.44)$$

La función de partición de cuerdas debe considerar todas configuraciones posibles, incluyendo las que poseen topología no trivial. Para ser concretos, consideremos la función de partición de cuerdas cerradas, la cual corresponde a sumar todas las superficies de Riemann que no posean bordes, obteniéndose

$$Z = \sum_g e^{\phi_0(2g-2)} f_g \left(\frac{L^2}{\alpha'} \right) \quad (1.45)$$

donde g denota el género de la superficie de Riemann y $f_g \left(\frac{L^2}{\alpha'} \right)$ da cuenta de la contribución de la integral funcional sobre hojas de mundo de género g . Por lo tanto, la constante de acoplamiento

⁷Para hojas de mundo con bordes, debemos añadir términos de acoplamiento con la curvatura extrínseca, los cuales dan lugar nuevamente a la característica de Euler χ para una superficie con borde.

de cuerdas se identifica naturalmente con el valor del dilatón, específicamente

$$e^{\phi_0} = g_s, \quad (1.46)$$

por lo que la función de partición queda naturalmente escrita en términos de una expansión topológica de la forma

$$Z = \sum_g g_s^{2g-2} f_g \left(\frac{L^2}{\alpha'} \right) \quad (1.47)$$

Vemos entonces que en el contexto de cuerdas también aparece naturalmente una expansión topológica, de la misma manera que aparece al considerar el límite de 't Hooft en teorías de gauge. Comparando las expansiones (1.7) y (1.47), vemos los primeros indicios del diccionario holográfico que estableceremos en breve, a saber

$$g_s \sim \frac{1}{N}, \quad (1.48)$$

mientras que el cociente adimensional L^2/α' se relacionará naturalmente con la constante de acoplamiento de 't Hooft λ .

Notar que la inclusión de inserciones en el cálculo de amplitudes corresponde a agregar una determinada cantidad b de bordes a la hoja de mundo (ver Figura 1.3). Esto solamente introduce una potencia de g_s^b enfrente de la expansión topológica (1.47).

Por último, cabe aclarar que para el caso de cuerdas abiertas también se obtiene este tipo de expansiones, con la diferencia que la constante de acoplamiento de cuerdas abiertas g_s^a se relaciona con la correspondiente a cuerdas cerradas de la siguiente manera

$$g_s^a = g_s^2 \Leftrightarrow e^{\phi_0} = \sqrt{g_s^a}. \quad (1.49)$$

En general, no haremos una distinción explícita entre ambas constantes de acoplamiento, ya que no será relevante para ningún argumento presentado en esta tesis.

D-branas

Consideremos ahora una cuerda abierta. Como se mencionó previamente, para este tipo de cuerdas es posible imponer condiciones tipo Neumann o Dirichlet en sus extremos. Condiciones tipo Neumann en alguna dirección X^m indican que el extremo de la cuerda está libre en esa dirección. Por otro lado, al imponer condiciones tipo Dirichlet en alguna coordenada, el extremo de la cuerda se ve obligado a permanecer en una posición fija en esa dirección. Más explícitamente, consideremos una teoría de cuerdas sobre un espacio *target* 10-dimensional e impongamos condiciones Dirichlet para alguno de los extremos de la cuerda en $9 - p$ de las direcciones espaciales. Por lo tanto, este extremo estará constreñido a moverse libremente en un espacio reducido $p + 1$ -dimensional. A este objeto extendido en $p + 1$ dimensiones se lo denomina Dp -brana.

En resumen, una D-brana es una hipersuperficie extendida en el espacio *target* en donde las cuerdas abiertas terminan. Sin embargo, a pesar de esta naturaleza en apariencia simple, estos objetos poseen propiedades muy interesantes. De hecho, podemos interpretarlos como objetos solitónicos (es decir, no perturbativos) de la teoría de cuerdas, los cuales poseen su propia dinámica. Para profundizar un poco más en este concepto, empecemos por preguntarnos qué grados de libertad poseen estos objetos. En particular, estará extendido en $p+1$ direcciones ζ^μ , $\mu = 0, \dots, p$, las cuales conforman el denominado *volumen de mundo*. A su vez, la posición del volumen de mundo en el espacio *target* estará determinada por el valor que tomen las $9-p$ coordenadas restantes, a las que denominaremos Φ^i , $i = 1, \dots, 9-p$, y que serán, en principio, funciones de las coordenadas del volumen de mundo ζ^μ . La dependencia de los campos transversales Φ^i respecto de las coordenadas ζ^μ induce naturalmente una métrica sobre el volumen de mundo, en términos del *pull-back* de la métrica del espacio *target*

$$g_{\alpha\beta} = G_{ij} \partial_\alpha \Phi^i \partial_\beta \Phi^j . \quad (1.50)$$

Estos campos escalares correspondientes a las coordenadas transversales no son, sin embargo, los únicos grados de libertad que determinan la dinámica de una Dp -brana. En particular, puede verse que los extremos de las cuerdas abiertas están cargados frente a un campo de gauge $U(1)$, A_μ , definido en el volumen de mundo de la D-brana. Definiendo la fuerza de campo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, la dinámica de los grados de libertad de una Dp -brana queda entonces determinada por la acción de Dirac-Born-Infeld (DBI)

$$S_{DBI} = T_{Dp} \int d^{p+1} \zeta \sqrt{\det (g_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})} , \quad (1.51)$$

con la tensión de la Dp -brana definida como

$$T_{Dp} = \frac{1}{g_s (2\pi)^p (\alpha')^{\frac{p+1}{2}}} . \quad (1.52)$$

Notar que la presencia del factor g_s^{-1} en la tensión indica el carácter no perturbativo de estos objetos.

Adicionalmente, las D-branas están cargadas frente a los flujos de q -formas C_q de la geometría del espacio *target*. Este tipo de interacciones da lugar al término de Wess-Zumino, el cual se escribe formalmente de la siguiente manera

$$S_{WZ} = T_{Dp} \int e^F \sum_q P [C_q] , \quad (1.53)$$

donde F es la 2-forma correspondiente a la fuerza de campo de $F_{\mu\nu}$ y $e^F = 1 + F + F \wedge F \dots$, mientras que $P [C_q]$ denota el *pull-back* de la q -forma sobre el volumen de mundo

$$P [C_q] = C_{i_1 \dots i_q} \partial_{\mu_1} \Phi^{i_1} \dots \partial_{\mu_{(p+1)}} \Phi^{i_q} d\zeta^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d\zeta^{\mu_{(p+1)}} . \quad (1.54)$$

A modo de ejemplo, consideremos el caso de una D3-brana. Suponiendo que no hay una 0-forma no nula, este objeto se acoplará entonces a las 2-formas y 4-formas de la geometría de fondo, obteniendo

$$S_{WZ}^{D3} = T_{D3} \int C_4 + T_{D3} \int F \wedge C_2. \quad (1.55)$$

Por otro lado, consideremos un ejemplo que será particularmente importante en la formulación de la correspondencia. Sea una D p -brana en espacio plano. La solución más simple de las ecuaciones de movimiento corresponde a un hiperplano sin flujo de campo de gauge, es decir $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu} = 0$. Consideremos ahora las fluctuaciones cuánticas sobre esta configuración. Siendo α' el parámetro de expansión semiclásica, definimos

$$\phi^i = \Phi_0^i + (2\pi\alpha')\Phi^i(\zeta) \quad , \quad A_\mu = A_\mu^0 + (2\pi\alpha')A_\mu, \quad (1.56)$$

por lo que la acción de DBI resulta

$$S_{DBI} = T_{Dp} \int d^{p+1}\zeta \sqrt{\det(\eta_{\mu\nu} + (2\pi\alpha')^2 \partial_\mu \Phi^i \partial_\nu \Phi^j + (2\pi\alpha') F_{\mu\nu})}, \quad (1.57)$$

mientras que la acción cuadrática resulta en la correspondiente a una teoría de Yang-Mills con materia escalar⁸

$$S^{(2)} = \frac{1}{g_{YM}^2} \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu \Phi^i \partial_\mu \Phi^i + \dots \right), \quad (1.60)$$

donde hacemos la siguiente identificación

$$g_{YM}^2 = 2(2\pi)^{p-2} g_s(\alpha')^{\frac{p-3}{2}}. \quad (1.61)$$

Notar que, para $p = 3$, g_{YM} es independiente de α' , y por lo tanto adimensional. Esto será importante en en breve.

Objetos solitónicos de este tipo ya habían sido considerados en el contexto de supergravedad. Los mismos corresponden a soluciones de las ecuaciones de movimiento correspondientes a objetos extendidos, los cuales están cargados respecto de los flujos de p -formas de supergravedad. La métrica correspondiente a este tipo de soluciones jugará un rol central en la formulación de la correspondencia.

Una distinción importante que se establece entre las teorías de supergravedad IIA y IIB concierne al espectro de p -formas de RR. Esto afecta al tipo de soluciones de D-branas que pueden encontrarse

⁸Esto puede obtenerse reescribiendo

$$\sqrt{\det(g + F)} = \sqrt{\det(\bar{g} + \bar{F}) \det(1 + X)} \quad , \quad X = (\bar{g} + \bar{F})^{-1} (g + F) \quad (1.58)$$

con \bar{g} y \bar{F} la métrica y el campo de gauge a nivel clásico. Finalmente, hacemos uso de la siguiente expansión

$$\sqrt{\det(1 + X)} = 1 + \frac{1}{2} \text{tr} X - \frac{1}{4} \text{tr} X^2 + \frac{1}{8} (\text{tr} X)^2 + \mathcal{O}(X^3) \quad (1.59)$$

en cada caso, ya que las mismas funcionan como fuentes de estos flujos. La teoría IIA posee un espectro de flujos pares (F_2, F_4), por lo que contiene soluciones de Dp -branas con p par. Al contrario, la teoría IIB posee flujos impares (F_1, F_3, F_5) por lo que en esta teoría se consideran soluciones de Dp -branas con p impar.

Por último, es posible extender la dinámica de estos objetos solitónicos para el caso de teorías de cuerdas supersimétricas [62, 63, 64, 65, 66, 67, 68]. Si bien no entraremos en los detalles de este tipo de descripciones, haremos algunos comentarios importantes. En particular, se puede ver que esta acción es invariante frente a transformaciones de simetría kappa, en analogía a la acción de GS, con un proyector que ahora involucra los flujos de RR ante los cuales está cargada la D-brana. Por otro lado, la acción efectiva a bajas energías para una D-brana en teoría IIB corresponde a super Yang-Mills con grupo de gauge $U(1)$.

1.1.3 Correspondencia AdS/CFT

En su propuesta original [20], Maldacena considera una arreglo de N D3-branas en teoría de cuerdas supersimétricas tipo IIB sobre espacio plano en $d = 10$, similares a las que consideramos en la sección anterior (ver Figura 1.4). Cada una de las D-branas se extiende sobre $(3 + 1)$ de las $(9 + 1)$ direcciones del espacio *target*. Como se adelantó en la sección anterior, la dinámica de estos objetos solitónicos puede ser estudiada simultáneamente desde dos puntos de vista: el de las excitaciones de cuerdas abiertas con condiciones Dirichlet sobre el arreglo de D-branas, o bien desde el punto de vista gravitatorio, es decir, estudiando la geometría que genera el arreglo.

El punto central de la correspondencia consiste en establecer una dualidad entre dos sectores particulares de ambos esquemas, conjeturando que son esencialmente descripciones equivalentes del mismo sistema. En lo siguiente, si bien esquemáticamente, intentaremos presentar de una manera un poco más explícita este argumento.

En primer lugar, tomaremos el punto de vista de las excitaciones de cuerdas abiertas sobre el arreglo de D3-branas. Consideremos primero estas hipersuperficies separados por una dada distancia ℓ . Las cuerdas que se mueven en este arreglo estarán cargadas frente al campo de gauge de cada una de estas D-branas. En particular, cada cuerda tendrá un extremo sobre la D3-brana a y otro sobre la D-brana b , $a, b = 1, \dots, N$. Por lo tanto, para cada cuerda, queda asociado naturalmente un par (a, b) , conocido como factor de Chan-Paton. En este contexto, consideraremos dos tipos de cuerdas:

- Cuerdas que empiezan y terminan en la misma D3-brana y por lo tanto poseen un factor de Chan-Paton diagonal (a, a) . Estas cuerdas poseen un sector no-masivo a bajas energías. El espectro correspondiente a este sector es el que se obtiene de expandir la acción de DBI, de la misma manera que se hizo en la sección anterior, obteniendo la teoría correspondiente al

supermultiplete vectorial de $\mathcal{N} = 4$ en $(3 + 1)$ dimensiones, con grupo de gauge $U(1)$.

- Cuerdas que terminan en D3-branas distintas, es decir con factores de Chan-Paton (a, b) , $a \neq b$. Debido a que la cuerda se extiende entre dos D-branas separadas, posee una longitud mínima ℓ . Por lo tanto, el espectro no posee estados no-masivos y el *gap* es proporcional a $T\ell$, con T la tensión de la cuerda. Estos modos no contribuyen a la dinámica de bajas energías.

Ahora bien, seamos un poco más explícitos con el concepto de “bajas energías”. Los estados masivos del espectro de cuerdas poseen masas del orden de $1/\alpha'$, por lo que tomar este límite corresponde a hacer una expansión en $\alpha' \rightarrow 0$, manteniendo fijos el resto de los parámetros, a saber, g_s y N . Esto también se conoce como límite de Maldacena. En el caso discutido aquí, en este régimen se obtiene una teoría $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills con grupo de gauge $U(1)^N$. Las correcciones subdominantes en α' dan cuenta, por ejemplo, de términos superiores en potencias de $F_{\mu\nu}$, e.g. $\text{tr}(F^4)$.

Supongamos ahora que tomamos el límite en el que la distancia ℓ entre las D3-branas tiende a cero, resultando en un arreglo de N D3-branas coincidentes. En este límite, la longitud mínima de las cuerdas cuyos factores de Chan-Paton son no diagonales tiende a cero. Esto resulta en un aumento significativo en el contenido de campos de la teoría efectiva a bajas energías. Se puede ver que la teoría resultante es $\mathcal{N} = 4$ SYM con grupo de gauge $U(N)$, mas correcciones en α' . A su vez, el factor $U(1)$ presente en la descomposición de $U(N) = U(1) \times SU(N)$ se asocia con la posición del arreglo de D3-branas y es posible ver que se desacopla de la dinámica del resto del sistema. Por lo tanto, el espectro de bajas energías resulta ser el correspondiente a la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM con grupo de gauge $SU(N)$. En este lenguaje, vemos que una separación no nula ℓ entre las D3-branas es análoga a un mecanismo de Higgs en el que parte del espectro adquiere masa, obteniendo como resultado la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en la rama de Coulomb ($SU(N) \rightarrow U(1)^N$).

Por otro lado, las cuerdas abiertas definidas sobre el arreglo de D3-branas interactúan con el espectro de cuerdas cerradas que viven en el espacio *target*. En el límite de bajas energías, este espectro corresponde esencialmente a un supermultiplete de supergravedad tipo IIB. La naturaleza de las interacciones con el espectro de cuerdas abiertas sobre las D-branas es entonces de naturaleza gravitatoria. Sin embargo, tomar el límite de $\alpha' \rightarrow 0$ es equivalente a considerar excitaciones con longitudes de onda grandes, y es sabido que la intensidad de las interacciones gravitatorias decae con la distancia (esto se ve más explícitamente en la ecuación (1.63), donde se ve que efectivamente $G_N^{(10)} \sim \alpha'$). Por lo tanto, en el límite de Maldacena, se obtienen dos teorías desacopladas: por un lado un supermultiplete vectorial de $\mathcal{N} = 4$ SYM en $(3 + 1)$ dimensiones, y por otro una teoría de supergravedad IIB en espacio plano 10-dimensional.

Análogamente, el arreglo de D3-branas puede ser estudiado desde el punto de vista de gravedad. Estos objetos extendidos corresponden a soluciones de supergravedad, cargadas ante determinados

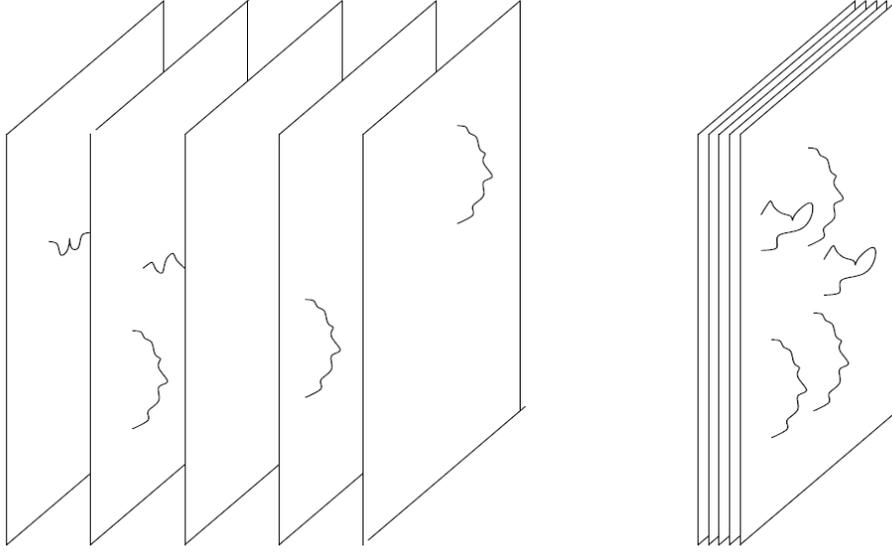


Figura 1.4: Arreglo de D3-branas con los posibles estados de cuerdas abiertas que terminan en las mismas. Lado izquierdo: D-branas separadas. Lado derecho: D-branas coincidentes.

flujos de RR. De hecho, como se mencionó previamente, el espectro no-masivo de teoría de cuerdas corresponde a una teoría de supergravedad. Recordemos que las D-branas se introducen en el contexto de cuerdas abiertas, mientras que las teorías de gravedad corresponden al sector no-masivo de cuerdas cerradas. El hecho de que una solución de D-branas pueda al mismo tiempo ser fuente de cuerdas cerradas, es decir, generar una geometría, se entiende naturalmente a la luz de la dualidad que se establece entre la hoja de mundo de cuerdas abiertas y cerradas. En particular, las D3-branas consideradas aquí son soluciones 1/2 BPS de supergravedad tipo IIB en $d = 10$, acopladas al flujo de 5-forma $F_5 = dC_4$. Más aún, nos interesan las soluciones que poseen dilatón constante. Este tipo de configuraciones debe minimizar la siguiente acción

$$S_{\text{gr}} = \frac{1}{16\pi G_N^{(10)}} \int d^{10}X \sqrt{G} \left(R - \frac{2}{5!} F_5^2 \right), \quad (1.62)$$

en la cual se ha hecho uso de que el dilatón es constante, $\Phi = \phi_0$ y se introdujo en la definición de la constante de Newton 10-dimensional. Debido a que esta acción se obtiene como límite de bajas energías de teoría de cuerdas, y escribiendo $e^{\Phi_0} = g_s$, tenemos que la constante de Newton queda naturalmente definida en términos de las escalas de la teoría de cuerdas

$$16\pi G_N^{(10)} = \ell_P^8 = (2\pi)^7 g_s^2 (\alpha')^4, \quad (1.63)$$

con ℓ_P la longitud de Planck que determina la escala típica de los efectos cuánticos en la teoría

gravitatoria. Consideremos el siguiente conjunto de coordenadas para el espacio 10-dimensional

$$\{X^0, \dots, X^3, X^4, X^5, \dots, X^9\} = \{\{x^\mu\}, y, \{y^2\theta^i\}\} \quad (\mu = 0, \dots, 3), (i = 1, \dots, 5). \quad (1.64)$$

A su vez, las D3-branas se extienden sobre las coordenadas x^μ . En esta notación, la solución de N D3-branas que minimiza la acción (1.62) posee la siguiente métrica.

$$ds^2 = H^{-\frac{1}{2}}(y)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + H^{\frac{1}{2}}(y)(dy^2 + y^2 d\Omega^5) \quad , \quad H(y) = \left(1 + \frac{L^4}{y^4}\right) \quad (1.65)$$

con L definido de la siguiente manera

$$L^4 = 4\pi g_s N (\alpha')^2. \quad (1.66)$$

Adicionalmente, esta solución posee axión C_0 constante, campos antisimétricos $B_2 = C_2 = 0$ y flujo de 5-forma no trivial

$$(F_5)_{\mu\nu\rho\sigma\tau} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\tau} \partial^y H(y) \quad (1.67)$$

con $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\tau}$ el elemento de volumen del espacio generado por las direcciones $\{x^\mu, y\}$. Se puede ver que el flujo magnético está cuantizado de la siguiente manera

$$\int_{S^5} *F_5 = N. \quad (1.68)$$

Consideremos ahora dos límites particulares de esta geometría. Por un lado, para $y \gg L$, tenemos que $H \sim 1$ y la geometría se reduce a la de espacio plano. Escribiendo la métrica en este límite, es fácil ver que el correspondiente potencial de Newton es de la forma $\varphi \sim L^4/y^4$, por lo que la masa del arreglo de D3-branas resulta $G_N^{(10)} M \sim L^4$.

Otro límite más interesante corresponde al límite de horizonte cercano (NH), en el que $y \ll L$. Definiendo la variable $u = L^2/y$, la geometría resulta de la forma

$$ds_{NH}^2 = L^2 \left(\frac{du^2}{u^2} + \frac{1}{u^2} dx^\mu dx_\mu + d\Omega^5 \right), \quad (1.69)$$

la cual corresponde a la métrica del espacio producto $AdS_5 \times S^5$ con radio L^2 tanto para el factor AdS como para la esfera.

Consideremos ahora el límite de $\alpha' \rightarrow 0$, manteniendo fijos g_s y N . Un resultado remarcable de esto es que los modos que viven en ambos sectores de la geometría, a saber, la región asintóticamente plana y la región NH, se desacoplan. Dicho de otra manera, la dinámica de las excitaciones del arreglo de D3-branas en este régimen queda completamente determinada por los modos que viven en la geometría del NH, *i.e.* $AdS_5 \times S^5$. Mas aún, es posible argumentar que los modos que viven en la región del NH corresponden al espectro completo de la teoría de cuerdas, no solamente al sector gravitatorio (no-masivo). Para ver esto, consideremos un modo de energía finita en unidades de

longitud de la cuerda, a saber $\sqrt{\alpha'} E_y \sim \text{cte}$, localizado a una distancia y del arreglo de D3-branas. Sin embargo, la buena energía es la medida desde la región asintóticamente plana, la cual da cuenta del corrimiento al rojo, es decir $E \sim H^{-\frac{1}{4}}(y) E_y$. Ahora bien, dado que estamos considerando modos en la región del NH, $H^{-\frac{1}{4}}(y) \sim \frac{y}{\sqrt{\alpha'}}$, por lo que, para y suficientemente pequeño manteniendo y/α' fijo, tenemos que $E \sim \sqrt{\alpha'} E_y \frac{y}{\alpha'} \sim \text{cte}$. Por lo que, aún en el límite de $\alpha' \rightarrow 0$, la dinámica de la teoría en la región del NH (cerca de las D3-branas) tiene en cuenta el espectro completo de la teoría de cuerdas. Notar que mantener y/α' implica que es más natural describir la geometría en términos de la coordenada $u = L^2/y \sim \alpha'/y$ introducida previamente. De hecho, en términos de estas coordenadas, es posible formalizar un poco más el argumento recién expuesto. Consideremos la métrica (1.65) en las coordenadas u

$$ds^2 = L^2 \left(1 + \frac{L^4}{u^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2} dx^\mu dx_\mu + L^2 \left(1 + \frac{L^4}{u^4}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{du^2}{u^2} + d\Omega^5\right), \quad (1.70)$$

Y el correspondiente modelo sigma no-lineal que determina la dinámica de las cuerdas en esta geometría

$$S = \frac{L^2}{4\pi\alpha'} \int d^\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \bar{G}_{mn}(X; L) \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n, \quad (1.71)$$

donde \bar{G}_{mn} es la métrica (1.70) una vez rescaleado el factor de L^2 y se ha hecho explícita la dependencia de \bar{G}_{mn} con L . En particular, tenemos que cuando $\alpha' \rightarrow 0$, $L \rightarrow 0$, y por lo tanto $\bar{G}_{mn}(X; L) \rightarrow G_{mn}^{AdS}(X)$ con G_{mn}^{AdS} la métrica de $AdS_5 \times S^5$ con radio unitario. A su vez, de la definición (1.66) e introduciendo $\lambda = 4\pi g_s N$, tenemos que

$$S = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} \int d^\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} G_{mn}^{AdS}(X) \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n, \quad (1.72)$$

concluyendo entonces que, como λ es finito, la teoría en este límite aún considera el espectro completo de la teoría de cuerdas. No sólo eso, sino que además, la geometría en la que viven estos estados es la del NH, $AdS_5 \times S^5$, manifestando el hecho de que los grados de libertad de la región asintóticamente plana se desacoplan en este límite

En resumen, para esta descripción análoga de la dinámica del arreglo de D3-branas en el límite de Maldacena, obtenemos nuevamente dos teorías desacopladas: por un lado la teoría de cuerdas tipo IIB sobre $AdS_5 \times S^5$, y por otro una teoría de supergravedad IIB en espacio plano 10-dimensional, correspondiente a la región asintótica.

El resultado de este análisis hecho simultáneamente en ambos esquemas se resume en el siguiente diagrama

Teoría de cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$	\oplus	Supergravedad IIB en $d = 10$	\Leftrightarrow	$\mathcal{N} = 4$ SYM con grupo de gauge $SU(N)$	\oplus	Supergravedad IIB en $d = 10$
---	----------	----------------------------------	-------------------	--	----------	----------------------------------

(1.73)

Notar que ambas descripciones comparten la presencia de una teoría de supergravedad IIB en espacio plano 10-dimensional. El paso no trivial consiste entonces en identificar las teorías que acompañan a supergravedad en ambas descripciones. Esto lleva a la conjetura originalmente propuesta por Maldacena para la dualidad *AdS/CFT*:

Teoría de cuerdas IIB	$\mathcal{N} = 4$ SYM	\Leftrightarrow	con grupo	de gauge $SU(N)$	(1.74)
en					
$AdS_5 \times S^5$					

Esta identificación conlleva a la siguiente identificación entre los parámetros de ambas teorías

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s \quad L^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2 \quad (1.75)$$

Esta es la formulación más fuerte de la dualidad. Sin embargo, existen límites que pueden tomarse a ambos lados de la correspondencia, permitiendo establecer dualidades más accesibles, y por lo tanto sensibles a chequeos no triviales. En particular, podemos tomar el límite planar en la teoría de gauge, definiendo $\lambda = g_{YM}^2 N$, y expresando los observables en términos de una expansión topológica de las diagramas. En este límite, identificamos

$$\lambda = \frac{L^4}{\alpha'^2} \quad (1.76)$$

mientras que las correcciones $1/N$ se relacionan directamente con el desarrollo perturbativo en g_s para hojas de mundo con topología no trivial. A su vez, para cada orden en N , la expansión en $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ da cuenta de los efectos de considerar cuerdas en lugar de campos locales. Esto conlleva a la versión más débil de la conjetura, a saber, que en el límite de $N \rightarrow \infty$ y $\lambda \rightarrow \infty$ (con $\lambda \ll N$), la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM es dual a supergravedad clásica IIB en $AdS_5 \times S^5$.

Quizás el aspecto más relevante de esta dualidad concierne al régimen de validez de los esquemas propuestos. Como se mencionó anteriormente, la masa del arreglo de D-branas satisface $G_N^{(10)} M \sim L^4 = \lambda \alpha'^2$. Consideremos el caso en el que el radio de *AdS*, L , es mucho menor que la longitud típica de cuerdas $\ell_s = \sqrt{\alpha'}$, teniendo por lo tanto $L^4/\alpha' = \lambda \ll 1$. En este límite, el arreglo de D-branas no *backreacta* en la geometría, por lo que la descripción en términos de la CFT en espacio plano (en este caso $\mathcal{N} = 4$ SYM) resulta la más apropiada. Notar que, como $\lambda \ll 1$, el desarrollo perturbativo de los observables es válido. Por otro lado, en el régimen opuesto, a saber $L^4/\alpha' \gg 1$, no se pueden despreciar los efectos del arreglo de D-branas sobre la geometría, por lo que la descripción gravitatoria es la más adecuada en este límite. Notar que esto ocurre para $\lambda \gg 1$, por lo que el desarrollo perturbativo en la teoría de campos no es válido. Sin embargo, en la teoría de gravedad este límite permite aproximar la función de partición mediante una expansión semiclassical. En conclusión, esta dualidad relaciona dos teorías en regímenes opuestos de la constante

de acoplamiento, siendo esta característica la que determina el gran poder computacional de la correspondencia.

Por último, haremos algunos comentarios:

- El hecho de que la teoría de gravedad este definida en 10 dimensiones no significa realmente que la misma posea 6 dimensiones adicionales respecto de la teoría de campos. De hecho, los operadores en la teoría de gauge son duales a modos de Kaluza-Klein que se propagan en AdS_5 , resultante de compactificar la teoría en la esfera S^5 . Por lo tanto, la descripción holográfica efectiva de la teoría de gauge se realiza en términos de una teoría gravitatoria definida en un espacio con una dimensión adicional. Esto es consistente con las consideraciones hechas al principio de este capítulo.
- En esta línea de razonamiento, la correspondencia gauge/gravedad se aplica a casos más generales. De hecho, el cálculo de funciones de correlación en términos de la dinámica clásica de modos de Kaluza-Klein en una teoría de gravedad en AdS_{d+1} ha dado lugar a predicciones consistentes con los resultados esperados en teorías conformes en dimensión d . Más aún, se han realizado cálculos holográficos incluso en el contexto de teorías que no poseen simetría conforme. Por último, este tipo de técnicas también ha sido ampliamente explorado en el estudio holográfico de sistemas de materia condensada, permitiendo, por ejemplo, calcular coeficientes de transporte en sistemas con densidad de carga finita, así como también estudiar el comportamiento de ciertos sistemas a temperatura finita [69].

En esta tesis consideraremos dos realizaciones particulares de esta correspondencia. Uno de ellos es el caso recién descrito concerniente a la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM. Por otro lado, también se trabajará en el contexto de la realización holográfica dual a $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons, conocida como teoría ABJM. Antes de presentar algunos aspectos relevantes de estas teorías, haremos una breve descripción de los espacios Anti de Sitter.

1.2 Espacios Anti de Sitter

Los espacios Anti de Sitter (AdS) juegan un papel muy importante en el contexto de la correspondencia gauge/gravedad. Esto se debe a que las isometrías de estos espacios en $(d + 1)$ dimensiones son generadas por el grupo de simetría conforme en d dimensiones, correspondiendo entonces a la geometría dual de teorías que posean esta simetría (por ejemplo, teorías que describan puntos fijos en el flujo del grupo de renormalización).

En general, los espacios AdS son espacios hiperbólicos con curvatura negativa constante, correspondientes a soluciones de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa. Consideremos el caso de espacios AdS_{d+1} en signatura Lorentziana. Una forma de estudiar estas geometrías

consiste en embeberlos en un espacio más grande $\mathbb{R}^{(d+2)}$ con signatura $(2, d)$, descrito por coordenadas $\{Y_{-1}, Y_0, Y_i\}$, con $i = 0, \dots, d$. En este lenguaje, AdS_{d+1} se identifica con el subespacio hiperbólico $(d+1)$ -dimensional definido por la siguiente ecuación

$$-Y_{-1}^2 - Y_0^2 + Y_1^2 + \dots + Y_d^2 = -L^2. \quad (1.77)$$

Notar que, descrito de esta manera, la isometría $SO(2, d)$ es manifiesta. A su vez, este es un espacio homogéneo, lo que implica que puede describirse como el espacio cociente del grupo de isometría por el subgrupo de estabilidad alrededor de un punto arbitrario. En este caso, eso corresponde a tomar $SO(2, d)/SO(1, d)$.

Análogamente, la descripción Euclídea de este tipo de espacios se obtiene al considerar el siguiente subespacio embebido en $\mathbb{R}^{(d+2)}$

$$-Y_{-1}^2 + Y_0^2 + Y_1^2 + \dots + Y_d^2 = -L^2. \quad (1.78)$$

El grupo de isometrías es ahora $SO(1, d+1)$, y la descripción en términos de un espacio cociente corresponde a tomar $SO(1, d+1)/SO(d+1)$.

Como acabamos de ver, estos espacios poseen grupos de isometría $SO(2, d)$ o $SO(1, d+1)$, los cuales a su vez corresponden a los grupos generados por la simetría conforme para CFTs en d dimensiones con signatura Lorentziana o Euclídea respectivamente. Es por ello que los espacios AdS juegan un rol central en la formulación de este tipo de dualidades.

Por último, especificaremos dos realizaciones explícitas de los espacios AdS , las cuales serán particularmente útiles en lo que resta de esta tesis.

Consideremos el caso de signatura Lorentziana junto con la siguiente parametrización

$$\begin{aligned} Y_{-1} &= L \frac{t}{z} \\ Y_0 &= \frac{z}{2} \left(1 + \frac{-t^2 + \vec{x}^2 + L^2}{z^2} \right) \\ Y_d &= \frac{z}{2} \left(1 + \frac{-t^2 + \vec{x}^2 - L^2}{z^2} \right) \\ Y_i &= L \frac{x_i}{z} \quad , \quad i = 1, \dots, d-1 \end{aligned}$$

bajo la cual, la métrica $ds^2 = -dY_{-1}^2 + dY_0^2 + dY^i dY_i$ resulta

$$ds^2 = L^2 \frac{-dt^2 + dz^2 + d\vec{x}^2}{z^2}. \quad (1.79)$$

A este parche de coordenadas se lo denomina representación de Poincaré. Notar que esta realización no cubre todo el espacio, ya que solo se consideran valores de $z > 0$, por lo que no se cubre todo el hiperboloide (1.77). Es fácil ver que, en estas coordenadas, la topología de la frontera $\partial AdS_{(d+1)}$, la cual se encuentra en $z \rightarrow 0$, es la correspondiente a un espacio Minkowski en d dimensiones.

Otra posible realización corresponde al sistema de coordenadas globales, el cual se obtiene a través de la siguiente parametrización

$$\begin{aligned} Y_{-1} &= L \cosh \rho \sin \tau \\ Y_0 &= L \cosh \rho \cos \tau \\ Y_i &= L \sinh \rho \theta_i \quad , \quad i = 1, \dots, d \end{aligned}$$

donde las coordenadas θ_i parametrizan una esfera S^{d-1} , i.e. $\sum_i \theta_i^2 = 1$. En estas coordenadas, la métrica inducida toma la siguiente forma

$$ds^2 = L^2 \left(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-1}^2 \right) . \quad (1.80)$$

Notar que, a diferencia del parche de Poincaré, este sistema de coordenadas cubre completamente el hiperboloide (1.77) si consideramos el cubrimiento universal, el cual se obtiene al descompactificar la coordenada temporal τ , es decir $-\infty < \tau < \infty$. A su vez, la frontera se encuentra en $\rho \rightarrow \infty$ y posee topología $\mathbb{R} \times S^{d-1}$.

Finalmente, la versión Euclídea ($EAdS$) de estas realizaciones puede obtenerse mediante una rotación de Wick $t \rightarrow it_E$ en Poincaré, o $\tau \rightarrow i\tau_E$ en globales, obteniendo ahora

$$ds^2 = L^2 \frac{dt_E^2 + dz^2 + d\vec{x}^2}{z^2} , \quad EAdS \text{ Poincaré} \quad (1.81)$$

o bien

$$ds^2 = L^2 \left(\cosh^2 \rho d\tau_E^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-1}^2 \right) , \quad EAdS \text{ Global} \quad (1.82)$$

En esta signatura, la topología de la frontera es $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$ o S^d respectivamente.

En general, la diferencia en la topología de la frontera en uno y otro sistema de coordenadas es importante al momento de considerar realizaciones holográficas para teorías de gauge. En estos casos, la teoría estará definida en espacios distintos. En muchos casos, como por ejemplo el de teorías que pueden localizarse, las mismas deben definirse en espacios compactos de topología S^d , por lo que la descripción holográfica más adecuada se obtiene en la representación global de AdS .

Finalmente, solo mencionaremos que la existencia de una frontera que se extiende en la dirección temporal resulta en un problema de Cauchy mal definido, a menos que se impongan condiciones de contorno adecuadas en la frontera. Estas condiciones de contorno juegan un papel central en el contexto de la dualidad AdS/CFT.

1.3 $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills

La teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM puede obtenerse como compactificación sobre un T^6 (toro de dimensión 6) de un multiplete vectorial $\mathcal{N} = 1$ en 10 dimensiones. En particular, es posible ver que esta es la

única teoría en $d = 4$ con cuatro supersimetrías e invariante CPT. El contenido de campos consiste en un campo de gauge A_μ , con grupo de gauge que consideraremos $SU(N)$, seis escalares reales Φ^I y 4 fermiones de Weyl λ_a . Todos los campos toman valores en la representación adjunta del grupo de gauge, por ejemplo, $A_\mu = A_\mu^c T_c$, con T_c los generadores de $SU(N)$ en la representación fundamental, $c = 1, \dots, N^2 - 1$. El correspondiente Lagrangeano es⁹

$$\mathcal{L} = \text{tr} \left\{ \frac{1}{g_{YM}^2} \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_a i \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda_a + \sum_I D_\mu \Phi^I D^\mu \Phi^I \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{a,b,I} C_I^{ab} \lambda_a [\Phi^I, \lambda_b] + \sum_{a,b,I} \bar{C}_{Iab} \bar{\lambda}^a [\Phi^I, \bar{\lambda}^b] + \frac{1}{2} \sum_{I,J} [\Phi^I, \Phi^J]^2 \right] + \frac{\theta_{YM}}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right\}. \quad (1.84)$$

donde $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ y θ_{YM} es el ángulo instantónico. En este punto es importante aclarar que el álgebra de supersimetría de $\mathcal{N} = 4$ SYM posee una componente bosónica denominada simetría R , la cual actúa a través de rotaciones entre las cuatro supercargas complejas, dando lugar a una simetría interna $SU(4)_R$. Los índices I, J, a, b en los campos escalares y fermiónicos transforman ante esta simetría interna. En particular, los I, J son índices de la representación $\mathbf{6}$ de $SO(6)_R \sim SU(4)_R$, mientras que los a, b pertenecen a la representación $\mathbf{4}$ y $\mathbf{4}^*$ de $SU(4)_R$. Por otro lado, los coeficientes C_I^{ab} y \bar{C}_{Iab} se obtienen a partir de las matrices del álgebra de Clifford de $SO(6)_R \sim SU(4)_R$. Las supercargas Q_α^a y $\bar{Q}_{a\dot{\alpha}}$ transforman en la representación $\mathbf{4}$ y $\mathbf{4}^*$ de $SU(4)_R$ respectivamente y las correspondientes transformaciones de supersimetría son de la forma

$$\begin{aligned} \delta \Phi^I &= [Q_\alpha^a, \phi^I] = C^{Iab} \lambda_{b\alpha} \\ \delta \lambda_{b\beta} &= \{Q_\alpha^a, \lambda_{b\beta}\} = F_{\mu\nu}^+ (\sigma^{\mu\nu})_\beta^\alpha \delta_b^a + [\Phi^I, \Phi^J] \epsilon_{\alpha\beta} (C_{IJ})_b^a \\ \delta \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}^b &= \{Q_\alpha^a, \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}^b\} = C_I^{ab} \bar{\sigma}_{\alpha\dot{\beta}}^\mu D_\mu \Phi^I \\ \delta A_\mu &= [Q_\alpha^a, A_\mu] = (\sigma_\mu)_\alpha^{\dot{\beta}} \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}^a \end{aligned}$$

donde F^+ es la fuerza de campo autodual y los $(C_{IJ})_b^a$ se construyen a partir de bilineales en el álgebra de Clifford de $SO(6)$.

Esta teoría es un caso particular de las teorías de gauge discutidas al principio de este capítulo, por lo que posee un límite planar bien definido, en el cual los valores esperados de los observables se organizan en una expansión topológica de diagramas de Feynman, en términos de los parámetros N y $\lambda = g_{YM}^2 N$. A su vez, como se mencionó previamente, la dualidad AdS/CFT establece una correspondencia entre esta teoría y una teoría de cuerdas tipo IIB sobre $AdS_5 \times S^5$, la cual se

⁹Aquí estamos escribiendo las matrices de Dirac en la representación Weyl, en la cual la matriz de quiralidad es diagonal y tenemos que

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Espinores de Dirac } \psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (1.83)$$

realiza explícitamente mediante la identificación de los parámetros de ambas teorías, a saber

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s \quad , \quad \lambda = g_{YM}^2 N = \frac{L^4}{\alpha'^2} \quad (1.85)$$

Asignando las dimensiones clásicas usuales, a saber $[A_\mu] = [\phi^I] = 1$, $[\lambda_a] = \frac{3}{2}$, $[g_{YM}] = [\theta_{YM}] = 0$, es fácil ver que la teoría posee invariancia de escala a nivel clásico. Más aún, se puede ver que, a nivel cuántico, las funciones de correlación de los campos canónicos no poseen divergencias UV, por lo que se concluye que la invariancia de escala es una simetría exacta de la teoría, es decir $\beta = 0$ ¹⁰. Esta simetría se combina con la invariancia frente al grupo de Poincaré en $d = 4$ y con las transformaciones conformes especiales para formar el grupo de simetría conforme en $d = 4$, $SO(2,4) \sim SU(2,2)$. A su vez, en combinación con el grupo de supersimetría Poincaré $\mathcal{N} = 4$, estas simetrías cierran el grupo de simetría superconforme $SU(2,2|4)$. Este supergrupo posee los subgrupos bosónicos $SO(2,4)$ y $SU(4)_R$, cuyos generadores son $\{P_\mu, K_\mu, L_{\mu\nu}, D\}$ y $\{T^A, A = 1, \dots, 15\}$ respectivamente. Notar que, en el contexto de la correspondencia gauge/gravedad, estos grupos de simetría se asocian naturalmente a las isometrías de AdS_5 y la esfera S^5 . Esta identificación entre las simetrías globales es de vital importancia al momento de identificar los observables entre las teorías duales. Por otro lado, las cargas fermiónicas son $Q_\alpha^a, \bar{S}_\alpha^a$ y $\bar{Q}_{a\dot{\alpha}}, S_{a\alpha}$, las cuales transforman en las representaciones $\mathbf{4}$ y $\mathbf{4}^*$ de $SU(4)_R$ respectivamente¹¹. Debido a que posee 4 cargas super-Poincaré junto con 4 cargas superconformes, las cuales son generadas por los espinores de Weyl $\{Q^a, S_a\}$, la teoría tiene en total 32 supersimetrías reales.

Si bien no presentaremos aquí los detalles del álgebra superconforme, haremos mención a algunos puntos importantes. Se define un *operador primario superconforme*, el cual es aniquilado por las cargas superconformes S , $[S, \mathcal{O}]_\pm = 0$, donde \pm indica que se evalúa el conmutador o anticonmutador según corresponda. Estos operadores son también operadores primarios, en el sentido que también satisfacen $[K, \mathcal{O}] = 0$, sin embargo el razonamiento inverso no es cierto. A partir de los operadores primarios superconformes, es posible armar los multipletes en términos de los *operadores descendientes superconformes*, los cuales se obtienen de aplicar las cargas Q sobre los operadores primarios superconformes. Se puede ver que el espectro de operadores primarios superconformes para $\mathcal{N} = 4$ SYM puede obtenerse a partir de múltiples trazas de productos de campos escalares Φ^I . Este tipo de operadores se construyen a partir de los operadores de traza simple, los cuales son de la forma

$$\mathcal{O}_{\text{st}} = \text{tr} [\Phi^{I_1} \dots \Phi^{I_n}] \quad , \quad (1.87)$$

¹⁰Esta afirmación es en principio una conjetura, verificada en los primeros órdenes en el desarrollo perturbativo, aunque la evidencia sugiere fuertemente que esta simetría es exacta.

¹¹Las dimensiones de escala para los generadores son las siguientes

$$[D] = [L_{\mu\nu}] = [T^A] = 0, \quad [P^\mu] = 1, \quad [K_\mu] = -1, \quad [Q] = \frac{1}{2}, \quad [S] = -\frac{1}{2}. \quad (1.86)$$

Debido a que $\text{tr}\Phi^I = 0$, los ejemplos más simples de este tipo de operadores son $\text{tr}\Phi^{\{I}\Phi^{J\}}$ y $\sum_I \text{tr}\Phi^I\Phi^I$ (operador de Konishi).

A su vez, también existen operadores que, además de ser primarios superconformes, son aniquilados por algún subconjunto de las supercargas Q , *i.e.* $[S, \mathcal{O}]_{\pm} = [Q, \mathcal{O}]_{\pm} = 0$. Estos operadores se denominan *operadores superconformes quirales* o simplemente operadores BPS¹². Los multipletes construidos a partir de estos operadores primarios saturan la cota Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield (BPS) y por lo tanto son más “cortos” (en el sentido de que hay menos operadores de creación para generar descendientes). En general, la condición de ser un operador BPS conlleva a relaciones entre sus números cuánticos, es decir, los autovalores respecto del subálgebra de Cartan $SO(1,3) \times SO(1,1) \times SU(4)_R \rightarrow \{(s_+, s_-), \Delta, [r_1, r_2, r_3]\}$. Esto se debe a que, si \mathcal{O}_{BPS} es un operador BPS, entonces cumple que, para alguna supercarga Q_{α}^a

$$0 = [\{Q_{\alpha}^a, S_{b\beta}\}, \mathcal{O}_{BPS}] = \left[\epsilon_{\alpha\beta} (\delta_b^a D + T_b^a) + \frac{1}{2} \delta_b^a L_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu}, \mathcal{O}_{BPS} \right]. \quad (1.88)$$

Para casos en los que se preserven muchas simetrías, como es el caso de los operadores 1/2 BPS, 1/4 BPS y 1/8 BPS, es posible identificar los números cuánticos de los mismos. Notar que, al preservar supersimetrías de la teoría, los números cuánticos de estos operadores suelen estar protegidos, es decir que no reciben correcciones cuánticas. Esto puede verse fácilmente de (1.88). De hecho, esta condición impone un relación entre los correspondientes autovalores Δ , s_{\pm} y r_i . Si bien Δ es un parámetro continuo, s_{\pm} y r_i solo pueden tomar valores (semi)enteros. Por lo tanto, debido a que la condición (1.88) debe satisfacerse, Δ no puede recibir correcciones cuánticas, es decir, está protegido por supersimetría. Vemos entonces que estos operadores poseen características de naturaleza altamente no-perturbativa, siendo entonces candidatos ideales para realizar chequeos no triviales de la dualidad AdS/CFT. En este contexto, los operadores primarios quirales poseen una realización holográfica en términos de modos de Kaluza-Klein, resultantes de compactificaciones en la esfera S^5 de $AdS_5 \times S^5$.

Finalmente, es importante mencionar que $\mathcal{N} = 4$ SYM posee una simetría discreta, derivada de la dualidad S [16, 70, 17]. Para ello se introduce el parámetro complejo τ definido como

$$\tau = \frac{\theta_{YM}}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g_{YM}^2}. \quad (1.89)$$

La teoría es entonces invariante frente a transformaciones $SL(2, \mathbb{Z})$ que actúan sobre el parámetro

¹²En el resto de esta tesis el término BPS se utilizará mucho, pero no siempre con el mismo significado. En este caso, BPS implica que un dado operador es aniquilado por una carga super-Poincaré (Q). En el contexto de Wilson loops se suele hablar de operadores BPS en el sentido de que preservan supersimetrías de la teoría, si bien las mismas no son necesariamente cargas super-Poincaré puras, como en el caso de Wilson loops circulares. A lo largo de esta tesis intentaremos ser claros respecto al sentido en el que usa el término BPS en cada ocasión.

τ de la siguiente manera

$$\tau \rightarrow \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad , \quad ad - bc = 1 \quad , \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}. \quad (1.90)$$

Notablemente, la teoría de cuerdas tipo IIB también posee una simetría $SL(2, \mathbb{Z})$. Esta simetría da cuenta de la invariancia de supergravedad IIB ante transformaciones modulares del siguiente campo complejo

$$\tau = C_0 + i e^{-\Phi} \quad (1.91)$$

donde C_0 es el campo axiónico (0-forma de RR) y Φ es el dilatón. Para el caso de $AdS_5 \times S^5$, estos campos poseen un valor constante. En conclusión, esta simetría modular en teoría de cuerdas es la realización holográfica de la simetría S en $\mathcal{N} = 4$ SYM, dada la siguiente identificación

$$\frac{\theta_{YM}}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g_{YM}^2} = \frac{C_0}{2\pi} + \frac{i}{g_s} \quad (1.92)$$

donde hemos usado que $e^\Phi = e^{\phi_0} = g_s$.

En resumen, es posible hacer una identificación precisa de las geometrías en un lado y el otro de la dualidad propuesta por Maldacena, a saber

- La simetría conforme $SO(2, 4)$ se identifica con el grupo de isometría de AdS_5 .
- La simetría R , $SU(4)_R \sim SO(6)_R$ se identifica a su vez con el grupo de isometrías de la S^5 .
- Las 32 supersimetrías reales de $\mathcal{N} = 4$ SYM se asocian con las 32 supersimetrías de la teoría tipo IIB, generadas por dos espinores de Killing, los cuales son de Majorana-Weyl en 10 dimensiones.
- La simetría discreta $SL(2, \mathbb{Z})$ derivada de la dualidad S se identifica con el grupo de transformaciones modulares del campo complejo $\tau = C_0 + i e^{-\Phi}$.

1.4 $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons

Hasta aquí hemos presentado algunos aspectos de la dualidad AdS/CFT casi exclusivamente en el contexto de la correspondencia establecida entre $\mathcal{N} = 4$ SYM y teoría de cuerdas tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$. Sin embargo, existen otras realizaciones interesantes de este tipo de dualidades. En esta sección nos concentraremos en la correspondencia propuesta en [71], la cual relaciona una teoría $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons en $d = 3$ (usualmente denominada teoría ABJM por Aharony, Bergman, Jafferis y Maldacena) con una teoría de cuerdas tipo IIA sobre $AdS_4 \times \mathbb{C}P^3$.

La teoría ABJM es, estrictamente, una teoría efectiva a bajas energías, la cual se obtiene integrando los campos masivos de teorías con menos supersimetría ($\mathcal{N} = 3$ o $\mathcal{N} = 4$) en $d =$

3. En particular, consideremos dos multipletes vectoriales con campos de gauge A_μ y \hat{A}_μ en la adjunta de grupos $U(N)$, por lo que el grupo de gauge es $U(N) \times U(N)$. La dinámica de estos campos de gauge estará dictada por acoplamientos de tipo Chern-Simons (CS), es decir, de la forma $A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A + \dots$, donde \dots denota términos adicionales para las componentes auxiliares del supermultiplete¹³. A su vez, los niveles de CS son k para el campo A_μ y $(-k)$ para el campo \hat{A}_μ . En general, para una teoría de CS pura en $d = 3$, el campo de gauge no posee grados de libertad locales, ya que las ecuaciones de movimiento imponen $F = 0$, por lo que es una teoría puramente topológica. Sin embargo, al acoplarlos con materia, los campos de gauge adquieren una dinámica no trivial. Consideraremos entonces dos hipermultipletes A_a y B_a , $a = 1, 2$, en la representación bifundamental $(\mathbf{N}, \bar{\mathbf{N}})$ y anti-bifundamental $(\bar{\mathbf{N}}, \mathbf{N})$ del grupo de gauge. Para ser más precisos, un campo A en la bifundamental $(\mathbf{N}, \bar{\mathbf{N}})$ de $U(N) \times U(N)$ posee índices i en la representación fundamental \mathbf{N} de uno de los $U(N)$ e \hat{i} en la antifundamental $\bar{\mathbf{N}}$ del otro factor $U(N)$, $A^i_{\hat{i}}$, $i, \hat{i} = 1, \dots, N$; mientras que un campo B en la anti-bifundamental $(\bar{\mathbf{N}}, \mathbf{N})$ (representación conjugada), se escribe como $B^{\hat{i}}_i$. De esta manera, se pueden construir bilineales en la representación adjunta de uno u otro grupo de gauge, esquemáticamente $\Phi^i_j = A^i_{\hat{i}} B^{\hat{i}}_j$ o $\hat{\Phi}^{\hat{i}}_{\hat{j}} = B^{\hat{i}}_i A^i_{\hat{j}}$. En principio, esta teoría posee un grupo $SU(2)_R$ de simetría R manifiesto, consistente con teorías $\mathcal{N} = 3$ en $d = 3$. La acción de este grupo da cuenta de rotaciones que mezclan A_a con B_a^* . Sin embargo, una vez que se integran las componentes auxiliares del multiplete de gauge, el superpotencial resultante posee una simetría adicional $SU(2) \times SU(2)$, la cual consta de rotaciones sobre los campos A y B por separado. Este grupo adicional de simetría no conmuta con $SU(2)_R$, y juntos forman un $SU(4)_R$. Este “alargamiento” del grupo de simetría R da cuenta de la presencia de un grupo de supersimetría. De hecho, este tipo de construcciones poseen supersimetría $\mathcal{N} = 6$. En conclusión, si bien empezamos con una formulación que posee 3 supersimetrías manifiestas, la teoría resultante da cuenta de un grupo de supersimetría mayor. A su vez, en adición a $SU(4)_R$, la teoría posee una simetría global interna $U(1)_b$, asociada usualmente al número bariónico, frente a la cual los campos (anti)bifundamentales poseen carga $+1$ (-1) y los campos en la adjunta poseen carga nula. Existen varios tipos de construcciones análogas, haciendo uso del lenguaje de superespacio $\mathcal{N} = 2$, $\mathcal{N} = 3$ y $\mathcal{N} = 4$, e incluso formulaciones en las que el la simetría $SU(4)_R$ se realiza manifiestamente [72, 73, 74, 75].

En este punto, es conveniente presentar de una manera más concisa el contenido de campos de la teoría, junto con las simetrías que posee. Para ello, es conveniente definir los campos escalares complejos C_I y \bar{C}^I , $I = 1, 2, 3, 4$, en la representación bifundamental $(\mathbf{N}, \bar{\mathbf{N}})$ y anti-bifundamental $(\bar{\mathbf{N}}, \mathbf{N})$ de $U(N) \times U(N)$ respectivamente, a saber $C_I = \{A_1, A_2, B_1^*, B_2^*\}$ y $\bar{C}^I = \{A_1^*, A_2^*, B_1, B_2\}$ ¹⁴.

¹³En la formulación $\mathcal{N} = 4$, los campos de gauge poseen también términos cinéticos tipo Yang-Mills. Al deformar la teoría a través de un acoplamiento de CS con nivel k , se establece una escala natural de masa $m = g_{YM}^2 k / 4\pi$. Para escalas de energía menores a esta masa, los términos cinéticos tipo Yang-Mills se tornan irrelevantes en el IR.

¹⁴En un abuso de notación, aquí A_a y B_a denotan las componentes escalares de los hipermultipletes.

Estos campos transforman en la representación $\mathbf{4}$ y $\bar{\mathbf{4}}$ de $SU(4)_R$ respectivamente. A su vez, denotamos con ψ_I^α y $\bar{\psi}_\alpha^I$, los cuales son espinores de Weyl complejos y transforman de la misma forma que C_I y \bar{C}^I ante $SU(4)_R$. Por último, como se menciona arriba, los campos de gauge A_μ y \hat{A}_μ poseen acciones tipo CS con niveles $(k, -k)$. Con todo esto, la acción de la teoría resulta¹⁵

$$S_{\text{ABJM}} = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \left[\epsilon^{\mu\nu\lambda} \text{tr} \left(A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \frac{2i}{3} A_\mu A_\nu A_\lambda - \hat{A}_\mu \partial_\nu \hat{A}_\lambda - \frac{2i}{3} \hat{A}_\mu \hat{A}_\nu \hat{A}_\lambda \right) - \text{tr} (\overline{D_\mu C})^I (D^\mu C)_I - i \text{tr} \bar{\psi}^I \not{D} \psi_I - V_{\text{bos}} - V_{\text{ferm}} \right] \quad (1.93)$$

donde las derivadas covariantes para campos bifundamentales definida como

$$D_\mu C = \partial_\mu C + i A_\mu C - i \hat{A}_\mu C \quad (1.94)$$

A su vez, los potenciales son de la forma

$$V_{\text{bos}} = -\frac{1}{12} \text{tr} \left[C_I \bar{C}^I C_J \bar{C}^J C_K \bar{C}^K + \bar{C}^I C_I \bar{C}^J C_J \bar{C}^K C_K + 4 C_I \bar{C}^J C_K \bar{C}^I C_J \bar{C}^K - 6 C_I \bar{C}^J C_J \bar{C}^I C_K \bar{C}^K \right], \quad (1.95)$$

$$V_{\text{ferm}} = \frac{i}{2} \text{tr} \left[\bar{C}^I C_I \bar{\psi}^J \psi_J + C_I \bar{C}^I \psi_J \bar{\psi}^J + 2 C_I \bar{C}^J \psi^I \bar{\psi}_J - 2 \bar{C}^I C_J \bar{\psi}_I \psi^J + \epsilon^{IJKL} C_I \bar{\psi}_J C_K \bar{\psi}_L - \epsilon_{IJKL} \bar{C}^I \psi^J \bar{C}^K \psi^L \right]. \quad (1.96)$$

Notar que el potencial V_{bos} posee interacciones de seis escalares, por lo que la teoría es renormalizable en $d = 3$.

Asignando las dimensiones clásicas $[A_\mu] = [\hat{A}_\mu] = [\psi] = 1$ y $[C] = 1/2$, vemos que la teoría es invariante de escala, por lo que es una teoría conforme. De hecho, al igual que en el caso de $\mathcal{N} = 4$ SYM, se conjetura que la teoría posee simetría conforme a nivel cuántico a todo orden en loops. Por lo tanto, el parámetro k no recibe correcciones. Por otro lado, la invariancia de gauge de la integral funcional impone que el nivel de CS k toma valores en los enteros. Para los casos $k = 1$ y $k = 2$ la teoría acusa una supersimetría mayor, a saber $\mathcal{N} = 8$. Sin embargo, en esta tesis nos concentraremos en valores muy grandes de k , por lo que no profundizaremos en estos casos particulares.

En general, este tipo de teorías que poseen múltiples grupos de gauge con materia en la bifundamental de los mismos, corresponde a un conjunto denominado usualmente teorías tipo *quiver*, debido a la representación del contenido de campos en términos de diagramas *quiver*. En la figura 1.5 se ve el correspondiente diagrama para ABJM.

Al igual que $\mathcal{N} = 4$ SYM, estas teorías poseen simetría superconforme, con grupo, para $k > 2$, es $OSP(6|4)$, junto con el $U(1)_b$ bariónico mencionado arriba. A su vez, el subgrupo bosónico de

¹⁵Aquí la acción se presenta en signatura Lorentz. Al pasar a signatura Euclídea, los términos de CS adquieren un factor de i en frente, debido que sólo poseen una derivada temporal.

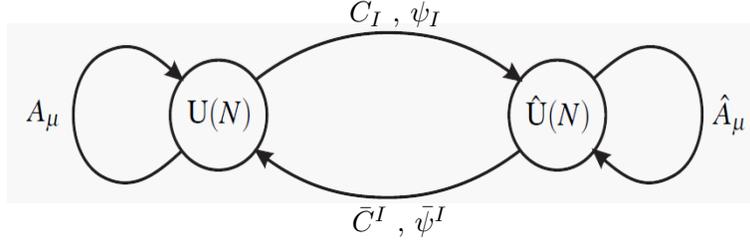


Figura 1.5: Diagrama *quiver* correspondiente a ABJM.

$Osp(6|4)$ está conformado por $SO(2,3)$ y $SU(4)_R$, correspondientes al grupo de simetría conforme en el espacio-tiempo y al grupo de simetría R respectivamente. Por su parte, $SO(2,3)$ posee un subgrupo $U(1)_\Delta$ correspondiente a las dilataciones, por lo que su acción determina la dimensión de escala de los operadores de la teoría conforme. Finalmente, la teoría posee invariancia ante transformaciones de paridad. Respecto a esto último, notar que, en general, los términos de CS cambian de signo frente a una transformación de paridad, sin embargo, la teoría ABJM es invariante si esta transformación es acompañada por un intercambio entre los grupos de gauge.

Por otro lado, si comparamos los términos cinéticos en (1.93) con la acción de Yang-Mills, vemos que el nivel de CS k juega el papel del inverso del acoplamiento g_{YM} , *i.e.* $g^2 = \frac{1}{k}$. En analogía con lo presentado para teorías de Yang-Mills en la sección 1.1.1, en este tipo de teorías también es posible definir un límite planar, $N \rightarrow \infty$, manteniendo fija la constante de acoplamiento de 't Hooft definida de la siguiente manera

$$\lambda = g^2 N = \frac{N}{k}. \quad (1.97)$$

En este régimen, como se explica en la sección 1.1.1, los observables se organizan en expansiones topológicas del estilo de (1.7). Notar que tomar este límite implica que el nivel de CS k debe escalar con N , por lo que debe ser muy grande. De hecho, es en este límite en el que la teoría dual es efectivamente un teoría de cuerdas tipo IIA. Volveremos a este punto en breve.

En este punto cabe mencionar que existe una generalización directa de este tipo de teorías, la cual se obtiene al considerar un grupo de gauge $U(N) \times U(M)$. Esta teoría usualmente se denomina teoría ABJ y también posee un dual holográfico en términos de M-branas [76]. Debido a lo mencionado arriba, es claro que estas teorías más generales no son invariantes frente a paridad. A su vez, en el límite planar, los observables se organizan en potencias de dos acoplamientos de 't Hooft $\lambda = N/k$ y $\hat{\lambda} = M/k$. En general, no haremos mención a este tipo de teorías en el resto de esta tesis.

Debido a la mayor variedad que posee el sector de materia, en comparación con $\mathcal{N} = 4$ SYM, el espectro de operadores quirales posee una estructura más compleja. El caso más simple corresponde

a operadores simple traza que alternan inserciones de campos escalares en las representaciones $(\mathbf{N}, \bar{\mathbf{N}})$ y $(\bar{\mathbf{N}}, \mathbf{N})$, como por ejemplo, $\text{tr}(C_1 \bar{C}^4 C_1 \bar{C}^4 \dots)$. Estos operadores son el análogo a los operadores quirales $\text{tr}(Z^L)$ de $\mathcal{N} = 4$, y se asocian a la superposición de dos cadenas de espín integrables. El espectro de excitaciones que pueden insertarse sobre estas cadenas de espín forma varios sectores cerrados, para muchos de los cuales se ha probado la presencia de integrabilidad en el límite planar, para los primeros órdenes en loops del desarrollo perturbativo. De la misma manera que en $\mathcal{N} = 4$ SYM, se conjetura que la integrabilidad de la teoría se mantiene a todo orden en loops, al menos para algunos sectores. Para más detalles sobre estos aspectos y su correlato holográfico, se puede consultar [77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84].

El espacio de configuraciones de vacío (espacio *moduli*) de la teoría ABJM corresponde a un espacio complejo con k identificaciones no triviales (*orbifolding*) $(\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k)^N/S_N$, con S_N el grupo de permutaciones de N elementos. De hecho, esta variedad también corresponde al espacio *moduli* de un arreglo de N M2-branas sobre una singularidad $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k$ en teoría M en $d = 11$. Esta última teoría es una generalización de la teoría de cuerdas en la cual los objetos fundamentales son objetos extendidos en $p + 1$ direcciones, a saber, Mp -branas. Los aspectos generales de esta teoría, y en particular de este tipo de realizaciones holográficas, está muy por encima del alcance de esta presentación. De hecho, los estudios presentados en esta tesis se concentrarán en la realización dual que se obtiene en el límite $k \rightarrow \infty$, en términos de teoría de cuerdas tipo IIA en $d = 10$.

En [71], se considera inicialmente un arreglo complicado de D3-, D5- y NS5-branas en teoría de cuerdas tipo IIB, la cual posee una teoría efectiva en el IR con acoplamientos de CS, supersimetría $\mathcal{N} = 6$ y acoplamiento a materia bifundamental, es decir, ABJM. Los detalles de esta construcción no serán discutidos aquí. En analogía con el caso de $\mathcal{N} = 4$ SYM presentado en la sección 1.1.3, el dual holográfico de esta teoría se obtiene mediante el análisis del mismo sistema desde un punto de vista distinto, en particular estudiando la geometría que genera. El camino que debe recorrerse para llegar a esta descripción análoga es mucho más complejo que en el caso discutido en la sección 1.1.3, por lo que no lo detallaremos en esta presentación. Solamente mencionaremos que, a través de T-dualidad, se construye una descripción análoga en teoría de cuerdas tipo IIA la cual, a través de la descompactificación de una dirección, se lleva a teoría M en $d = 11$. Es en el lenguaje de esta última teoría en el que se establece el dual gravitatorio.

De hecho, el límite de $N \rightarrow \infty$, la geometría del NH generada por el arreglo de M2-branas corresponde a $AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$. Para valores del nivel de CS tales que $k^5 \ll N$, estas geometrías poseen una curvatura pequeña, por lo que la descripción dual se realiza en términos de supergravedad en $d = 11$. Para valores grandes de k , tales que N/k permanece constante, una de las direcciones en S^7/\mathbb{Z}_k colapsa. Como resultado de compactificar en esta dirección se obtiene una teoría de cuerdas en $d = 10$. Específicamente, el límite planar de la teoría ABJM posee una descripción holográfica en términos teoría de cuerdas tipo IIA sobre $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$. Notemos que, en esta construcción se

evidencia un fenómeno de “alargamiento” del grupo de supersimetría, similar al que ocurre en la teoría de gauge. De hecho, la teoría que vive en el volumen de mundo del arreglo de M2-branas, preserva naturalmente $\mathcal{N} = 3$ supersimetrías. Sin embargo, la geometría del NH (análogo a tomar el límite de bajas energías), preserva 12 supercargas Poincaré, correspondiendo entonces a una teoría $\mathcal{N} = 6$ en $d = 3$.

Como ya hemos mencionado, nos concentraremos en la descripción holográfica válida en el límite planar, correspondiente a teoría de cuerdas tipo IIA sobre $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ con métrica

$$ds^2 = \frac{L^2}{4} (ds_{AdS_4}^2 + 4ds_{\mathbb{CP}^3}^2) . \quad (1.98)$$

donde el factor 4 relativo entre los radios de AdS_4 y \mathbb{CP}^3 es requerido por supersimetría. En el capítulo 2 se presenta una versión explícita de la métrica (1.98), junto con los correspondientes flujos. Como solución de supergravedad tipo IIA, esta geometría preserva 24 de las 32 supersimetrías de la teoría, es decir que, a diferencia de $AdS_5 \times S^5$, no es maximalmente supersimétrica. Este es el mismo número de supercargas que generan el grupo superconforme de la teoría ABJM. Por otro lado, el factor AdS_4 posee isometría $SO(2,3)$, mientras que \mathbb{CP}^3 posee isometría $U(1) \times SU(4)$, en consistencia con las simetrías globales de la teoría de gauge dual. La acción de GS para una cuerda sobre esta geometría puede obtenerse a partir de un modelo sigma no-lineal sobre el espacio cociente correspondiente a $OSp(6|4)/(SO(1,3) \times U(3))$. Construcciones explícitas de estos modelos y su relación con sistemas integrables pueden encontrarse, por ejemplo, en [85, 86, 53, 55, 87, 88, 89]. La parte bosónica de la acción de GS corresponde a la acción de Polyakov (o Nambu-Goto) definida sobre $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$.

Por último, el diccionario holográfico correspondiente a esta realización establece la siguiente relación entre los parámetros de ambas teorías

$$g_s \sim \left(\frac{N}{k^5} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\lambda^{\frac{5}{4}}}{N} , \quad \frac{L^2}{\alpha'} = 4\pi\sqrt{2\lambda} . \quad (1.99)$$

Notar que, en el límite en el que es válida la descripción en términos de cuerdas, es decir $k^5 \gg N$, las mismas están débilmente acopladas, $g_s \ll 1$. Por otro lado, de la misma manera que ocurre en la realización presentada en la sección 1.1.3, en el límite de acoplamiento fuerte $\lambda \gg 1$, el radio del espacio *target* es muy grande en comparación con la longitud típica de cuerdas, por lo que es válida la descripción semiclásica.

1.5 Wilson loops

En teorías de gauge, es posible definir operadores no locales invariantes de gauge, determinados por la fase de Aharonov-Bohm que adquiere una partícula muy masiva al recorrer una curva cerrada.

Estos operadores se denominan Wilson loops y, en general, poseen la forma

$$W(\mathcal{C})_{\mathbf{R}} = \frac{1}{\dim \mathbf{R}} \text{tr}_{\mathbf{R}} \mathcal{P} e^{i \int_{\mathcal{C}} d\tau \dot{x}^{\mu} A_{\mu}} \quad (1.100)$$

donde $x^{\mu} = x^{\mu}(\tau)$ determina la curva \mathcal{C} y $\dot{x}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau}$, siendo τ el parámetro afín que parametriza la curva. A su vez, la traza se toma en alguna representación \mathbf{R} del grupo de gauge. El Wilson loop queda entonces determinado por la curva \mathcal{C} y la representación \mathbf{R} . El valor esperado $\langle W(\mathcal{C}) \rangle$ puede interpretarse como la amplitud para un proceso de creación de un par partícula-antipartícula y su posterior aniquilación. En particular, cuando decimos que estamos considerando muy masivos, lo decimos en el sentido de que su interacción con los campos de la teoría no deforma la curva. Volveremos a esto en breve.

Este tipo de operadores desempeña un rol central en el estudio de teorías de gauge. Por ejemplo, para teorías de Chern-Simons puras, los únicos operadores no triviales invariantes de gauge se construyen a partir de holonomías del campo de gauge, es decir, Wilson loops. De hecho, el álgebra que cierran estos operadores depende de aspectos puramente topológicos y determina completamente el espacio de Hilbert, resolviendo entonces la teoría. En teorías más generales, los Wilson loops también poseen interesantes propiedades. En general, su valor esperado se relaciona naturalmente con observables relevantes en el estudio de teoría. Uno de los más importantes es, quizás, el potencial quark-antiquark, el cual se obtiene de considerar a \mathcal{C} un rectángulo extendido en la dirección temporal, de ancho R y longitud T . A su vez, consideremos la representación fundamental, es decir $\mathbf{R} = \square$, de manera que podemos identificar la partícula con lo que usualmente llamamos quark¹⁶. En general, se puede ver que, para extensiones temporales muy grandes, $T \gg R$, se tiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle W(\mathcal{C}) \rangle \simeq e^{-TE} \simeq e^{-TM} e^{-TV(R)}, \quad (1.101)$$

donde E es la energía del sistema y M es la masa de los quarks. Debido a que consideramos quarks muy masivos, esta contribución es en general divergente, y se asocia con la divergencia proporcional a la masa de cuerdas cuya longitud típica es muy grande (volveremos sobre este punto en breve). A su vez, $V(R)$ es el correspondiente potencial quark-antiquark. La dependencia de $V(R)$ con la distancia R da cuenta de las posibles fases que puede desarrollar la teoría en una dado régimen. En particular, si $V(R) \sim R$, estamos en presencia de una fase confinante, en la cual

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle \simeq e^{-TR}. \quad (1.102)$$

Esto se conoce como *Ley de área*, y es una característica típica que satisfacen los operadores de Wilson en una fase confinante de la teoría de gauge. Por otro lado, si por ejemplo la teoría se

¹⁶En lo siguiente, nos concentraremos en Wilson loops en la representación fundamental, por lo que no haremos más referencia a la representación \mathbf{R} en nuestra notación, a menos que sea necesario.

encuentra en un punto crítico, la simetría conforme fija

$$V(R) = \frac{f}{R}, \quad (1.103)$$

donde f es alguna función de las constantes de acoplamiento. En la sección anterior, vimos que $\mathcal{N} = 4$ posee simetría conforme exacta, es decir, a todo orden en la constante de acoplamiento¹⁷ En el límite planar, $f = f(\lambda) + \mathcal{O}(N^{-1})$. Mediante un desarrollo perturbativo, es posible ver que, a primer orden, $f(\lambda) \sim \lambda$. Por otro lado, es posible obtener predicciones para $f(\lambda)$ que son válidas en el régimen de acoplamiento fuerte ($\lambda \rightarrow \infty$), haciendo uso de la dualidad AdS/CFT [90]

$$f(\lambda) = -\frac{4\pi^2\sqrt{\lambda}}{\Gamma(\frac{1}{4})^4} + \mathcal{O}(1). \quad (1.104)$$

Antes de introducir otros tipos de Wilson loops, haremos una breve descripción de la prescripción holográfica para calcular $\langle W(\mathcal{C}) \rangle$ en el régimen de acoplamiento fuerte [90, 91]. Recordar que, a menos que especifiquemos lo contrario, nos concentraremos en el caso de $\mathbf{R} = \square$. Como se mencionó previamente, un Wilson loop da cuenta de la fase adquirida por un quark muy masivo. Del lado de teoría de cuerdas, existe un mecanismo para proveer de masa a los campos, el cual consiste simplemente en separar algunas de las D3-branas que conforman el arreglo. Se considera entonces un arreglo de $N + 1$ D3-branas, se toma una de ellas y se la lleva muy lejos, como se indica en la Figura 1.6. Para una cuerda que se extiende entre esta brana y el resto del arreglo, el espectro posee un *gap*, es decir, un valor mínimo para la masa de los estados cuánticos. Esta masa M es

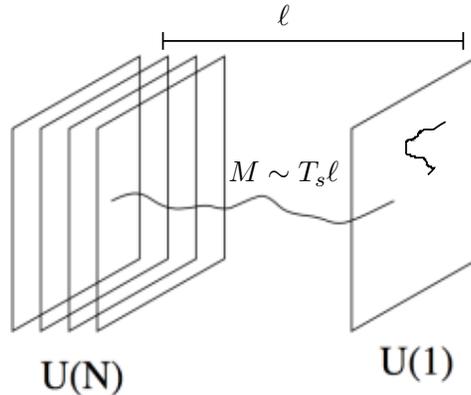


Figura 1.6

esencialmente proporcional a la separación ℓ de las branas, $M \sim T_s \ell$, con T_s la tensión de la cuerda. En el límite planar, $T_s \ell \sim \sqrt{\lambda} \ell$. Para separaciones muy grandes, esta masa será cada vez mayor. En particular, si se lleva la D3-brana a la frontera de la geometría *AdS*, M diverge. Entonces, este

¹⁷En realidad esta teoría posee una fase de Coulomb, en la que algunos campos adquieren masa, rompiendo entonces la simetría conforme a nivel cuántico. Sin embargo no discutiremos esta fase en esta tesis.

esquema se asocia naturalmente a la descripción holográfica de quarks muy masivos. Entonces, para calcular $\langle W(\mathcal{C}) \rangle$, se consideran cuerdas que describan la curva \mathcal{C} sobre la D3-brana que está separada del resto del arreglo. Específicamente, se tiene que

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle = Z_c[\mathcal{C}], \quad (1.105)$$

donde $Z_c[\mathcal{C}]$ es la función de partición de cuerdas cuyos extremos describen la curva \mathcal{C} en la D3-brana, localizada en la frontera de AdS . Esta función de partición da cuenta de las contribuciones correspondientes a distintas topologías para la hoja de mundo, pesadas por la constante de acoplamiento g_s

$$Z_c[\mathcal{C}] = \sum_{\{\text{top}\}} g_s^{-\chi} Z[\mathcal{C}] \quad , \quad Z[\mathcal{C}] = \int_{\partial X = \mathcal{C}} \mathcal{D}X \mathcal{D}(\dots) e^{-S[X, \dots]}, \quad (1.106)$$

donde X denota las coordenadas de la cuerda en el espacio *target* y $\partial X = \mathcal{C}$ denota la condición de contorno que se impone en el borde de AdS . A su vez, (\dots) denota el resto de los campos que determinan la dinámica de la cuerda. En particular, se consideran cuerdas supersimétricas, por lo que (\dots) incluye la integración en los campos fermiónicos. Finalmente, en el límite planar, las contribuciones provenientes de topologías no triviales quedan suprimidas, obteniendo

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle = Z[\mathcal{C}] = \int_{\partial X = \mathcal{C}} \mathcal{D}X \mathcal{D}(\dots) e^{-S[X, \dots]} \simeq e^{-S_{\text{cl}}[X_{\text{cl}}]}, \quad (1.107)$$

con $S_{\text{cl}}[X_{\text{cl}}]$ la acción evaluada en la configuración clásica X_{cl} , es decir, aquella para la cual el área de la hoja de mundo es mínima. Esta última aproximación es válida cuando $\lambda \rightarrow \infty$, en donde la contribución dominante proviene de la acción evaluada en la configuración clásica. A su vez, la contribución subdominante en este límite corresponde a la expansión semiclásica a 1-loop de la función de partición. Específicamente, sea $X_{\text{cl}}^m(\sigma)$ la correspondiente solución clásica, a partir de la cual expandimos los campos a primer orden en $\lambda^{-\frac{1}{4}}$

$$X^m(\sigma) \simeq X_{\text{cl}}^m(\sigma) + \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{4}}} \tilde{X}^m. \quad (1.108)$$

Debido a que la acción de cuerdas posee un factor de $\sqrt{\lambda}$ en frente, la contribución $\mathcal{O}(1)$ se obtiene de expandir la misma a orden cuadrático en las fluctuaciones \tilde{X}^m

$$Z[\mathcal{C}] \simeq e^{-S_{\text{cl}}[X_{\text{cl}}]} \int \mathcal{D}\tilde{X} \mathcal{D}(\dots) e^{-\int \tilde{X}^m S_{mn}^{(2)} \tilde{X}^n} \quad , \quad S_{mn}^{(2)} = \left. \frac{\delta S}{\delta X^m \delta X^n} \right|_{X=0}, \quad (1.109)$$

donde el operador $S^{(2)}$ da cuenta de una serie de operadores diferenciales de segundo orden definidos sobre la métrica inducida en la hoja de mundo.

Como en general consideraremos cuerdas supersimétricas, se realiza una expansión similar para los campos fermiónicos θ^I que aparecen en la acción de GS. Estos últimos son nulos a nivel clásico y, en analogía con los modos bosónicos, se definen las fluctuaciones cuadráticas a través de una

expansión en $\lambda^{-\frac{1}{4}}$. En este capítulo no entraremos en los detalles de este proceso, solamente mencionaremos que, en ciertos casos, mediante el fijado de gauge asociado a simetría kappa y una representación conveniente del álgebra de Clifford en 10 dimensiones, es posible descomponer al campo fermiónico 10-dimensional en 8 campos espinoriales de dos componentes, es decir definidos en 2 dimensiones. La acción cuadrática fermiónica resulta en un conjunto de operadores tipo Dirac, definidos sobre la geometría inducida, actuando sobre estos campos.

Debido a que la acción es cuadrática en los campos, es posible realizar la integral funcional Gaussiana en las fluctuaciones. La función de partición a 1-loop queda entonces escrita en términos de los correspondientes determinantes

$$Z[\mathcal{C}] \Big|_{1\text{-loop}} = a \frac{\prod_i \det \mathcal{O}_i^F}{\prod_i \det^{\frac{1}{2}} \mathcal{O}_i^B}, \quad (1.110)$$

donde \mathcal{O}_i^F y \mathcal{O}_i^B son los correspondientes operadores de fermiónicos (Dirac) y bosónicos (segundo orden). La constante a da cuenta de posibles contribuciones resultantes del fijado de gauge. La posibilidad de determinar este factor numérico dependerá del solitón (solución clásica) sobre el cual se realiza la expansión semiclásica. En general, la evaluación de (1.110) es un proceso sutil, el cual muchas veces no está libre de ambigüedades. A su vez, existen numerosos métodos para evaluar los correspondientes determinantes, mientras que la elección del más adecuado suele depender del caso particular que se esté considerando. Volveremos a esto en el capítulo 3.

La contribución de la cuerda que se extiende entre la D3-brana separada y el resto del arreglo será esencialmente divergente y corresponde a la divergencia que aparece en (1.101) debido a la masa de los quarks. En el lenguaje holográfico, esta divergencia se relaciona con el volumen infinito del espacio AdS y puede ser regularizada mediante una elección apropiada de contratérminos, ver Apéndice A. Por otro lado, la parte finita será la que determine el potencial quark-antiquark. En conclusión, la realización holográfica del potencial quark-antiquark corresponde a calcular la función de partición de cuerdas que, en el borde de AdS , describen un rectángulo muy largo, es decir dos líneas paralelas. De hecho, el resultado (1.104) se obtiene justamente de evaluar (1.107) en el límite clásico ($\lambda \rightarrow \infty$) [90].

En general, estaremos interesados en realizaciones que, al menos en algún límite, preserven algún subconjunto de las supersimetrías de la teoría. Es claro que un operador como el que se define en (1.100) no puede poseer esta característica. Sin embargo, en el contexto de AdS/CFT, el tipo de operadores que naturalmente aparece involucra un acoplamiento adicional con el sector escalar de la teoría. Como se menciona previamente, la realización holográfica de una partícula muy masiva se obtiene separando una de la D3-branas que conforman el arreglo, generando el rompimiento $U(N+1) \rightarrow U(N) \times U(1)$. En términos de la teoría efectiva sobre las D3-branas, este proceso resulta en un valor esperado no trivial para los campos ϕ^I , $I = 1, \dots, 6$ del multiplete de gauge del factor $U(1)$, asociados con las coordenadas transversales de la D3-brana, los cuales, a través

del mecanismo de Higgs, dan lugar a un bosón W masivo, cuya masa es proporcional a $|\vec{\phi}|$. Este bosón W toma valores en la representación fundamental del grupo de gauge, y lo identificaremos con el correspondiente quark masivo. Consideremos entonces Wilson loop definido por uno de estos quarks masivos sobre una curva $\mathcal{C} : x^\mu(\tau)$. En general, cuando $|\vec{\phi}| \rightarrow \infty$, se puede extraer una divergencia proporcional a $|\vec{\phi}|\ell_{\mathcal{C}}$, con $\ell_{\mathcal{C}}$ el perímetro de la curva. Notar que este es el análogo al término MT que discutimos para el caso del potencial quark-antiquark. En general, ignoraremos la presencia de esta divergencia. Ahora bien, el valor esperado de los campos ϕ^I define naturalmente una coordenada unitaria $\theta^I = \frac{\phi^I}{|\phi|}$. Por otro lado, se puede ver que, una vez extraída la divergencia, y debido a la ecuación de movimiento que satisface el bosón W masivo, el operador de Wilson correspondiente es de la forma¹⁸

$$W[\mathcal{C}] = \frac{1}{\mathcal{N}} \text{tr} \mathcal{P} \exp \left\{ \int_{\mathcal{C}} d\tau [iA_\mu \dot{x}^\mu(\tau) + \theta^I(\tau) \Phi_I |\dot{x}|] \right\}, \quad (1.111)$$

donde Φ_I corresponde al sector escalar de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM asociada al grupo de gauge $U(N)$ ($SU(N)$). Vemos que entonces, además de la curva en el espacio “geométrico” $x^\mu(\tau)$, se debe especificar una curva en el espacio interno $\theta^I(\tau)$. Desde el punto de vista holográfico, esto es natural, ya que, para calcular la función de partición, es necesario especificar la posición de la cuerda en la esfera S^5 . Los operadores definidos en (1.111) ahora pueden preservar supersimetrías de la teoría, dependiendo de la curva \mathcal{C} en la que se los evalúa.

En lo siguiente, introduciremos tres tipos de Wilson loops que serán particularmente útiles en lo que resta de esta tesis. El más simple corresponde a una recta infinita extendida en la dirección temporal, junto con un acoplamiento constante en el espacio interno, $\vec{\theta} = \vec{\theta}_0$. Se puede ver que este operador preserva la mitad de las supersimetrías de la teoría, es decir que es 1/2 BPS. Más aún, preserva cargas super-Poincaré puras, por lo que pertenece a un multiplete corto y su valor esperado está protegido¹⁹

$$\langle W_{\text{rec}} \rangle = 1, \quad (1.112)$$

donde hemos extraído la divergencia proporcional a la masa de los quarks. Cabe aclarar que el resultado (1.112) es exacto, es decir válido a todo orden en la constante de acoplamiento. La realización holográfica de este Wilson loop corresponde a una cuerda que se extiende en la dirección temporal en la frontera de AdS , mientras que se mantiene fija en un punto en la esfera S^5 , *i.e.* $\vec{\theta} = \vec{\theta}_0$. La correspondiente solución clásica es particularmente simple y la acción inducida sobre la hoja de mundo es AdS_2 . A su vez, puede verse que la acción evaluada en la misma es divergente y no posee parte finita. Para ello se regulariza el volumen de infinito de la hoja de mundo mediante la introducción de un cut-off $\epsilon \rightarrow 0^+$, ver Apéndice A. La acción resultante es entonces

$$S_{\text{cl}}^{\text{rec}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\epsilon}. \quad (1.113)$$

¹⁸En general, los operadores serán definidos en signatura Euclídea, a menos que se especifique lo contrario.

¹⁹Esto implica que el operador también es BPS en el sentido que se discute en la sección 1.3.

Este término divergente se asocia a la masa del quark y por lo tanto no contribuye a la parte finita del valor esperado del Wilson loop. Una vez sustraída la divergencia, vemos que la función de partición es trivial a nivel clásico, en completo acuerdo con (1.112). Por otro lado, es posible calcular el espectro 1-loop expandiendo alrededor de esta solución clásica, encontrando que la función de partición es trivial también a este orden.

Otro caso interesante resulta de considerar una curva circular de radio R , por ejemplo $x^\mu = (0, R \sin \tau, R \cos \tau, 0)$, con acoplamiento constante en el espacio interno. Estos operadores también son 1/2 BPS, sin embargo, las cargas preservadas son combinaciones no triviales de cargas super-Poincaré y superconformes, por lo que posee un valor esperado no trivial. Geométricamente, la curva circular se relaciona con la línea recta a través de una transformación conforme. Esta transformación es anómala, ya que mapea el infinito a un punto. Por lo tanto, si bien la teoría posee invariancia conforme, los valores esperados para ambos operadores no coinciden. Notablemente, $\langle W_{\text{circ}} \rangle$ puede ser calculado de manera exacta a todo orden en λ , mediante su identificación con un modelo de matrices [92, 93]

$$\langle W_{\text{circ}} \rangle = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda}) \quad , \quad (N \rightarrow \infty), \quad (1.114)$$

donde $I_1(z)$ es la función de Bessel. Más aún, es posible calcular $\langle W_{\text{circ}} \rangle$ de manera exacta incluso más allá del límite planar, obteniendo un resultado exacto tanto en λ como en N [94]

$$\begin{aligned} \langle W_{\text{circ}} \rangle &= \frac{1}{N} L_{N-1}^1 \left(-\frac{\lambda}{4N} \right) \exp \left[\frac{\lambda}{8N} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda}) + \frac{\lambda}{48N^2} I_2(\sqrt{\lambda}) + \frac{\lambda^2}{1280N^4} I_4(\sqrt{\lambda}) + \dots \end{aligned} \quad (1.115)$$

Es debido a este tipo de resultados que estos operadores son tan estudiados en el contexto de la dualidad AdS/CFT, ya que permiten realizar chequeos no triviales de la correspondencia. De hecho, el cálculo holográfico a nivel clásico (en el límite planar) es fácil de realizar, obteniendo

$$Z_{\text{circ}} \simeq e^{\sqrt{\lambda}}, \quad (1.116)$$

lo cual está en perfecto acuerdo con la expansión a acoplamiento fuerte de (1.114). En cuanto a la corrección a 1-loop del resultado holográfico, se ha intentado calcular esta contribución y contrastarla con el orden subdominante de la expansión de (1.114) [95]. Sin embargo, el acuerdo a este orden no se ha podido verificar hasta el momento. Esto se debe a ciertas sutilezas que aparecen al intentar calcular estas contribuciones en teoría de cuerdas, las cuales aún no están del todo entendidas.

Finalmente, consideraremos deformaciones tipo cuña, o *cusp*, de Wilson loop rectos. Una curva con un *cusp* geométrico consiste en dos líneas rectas que se unen formando un ángulo ϕ (ver Figura 1.7). La relevancia de este tipo de operadores reside en su relación con la dimensión anómala de

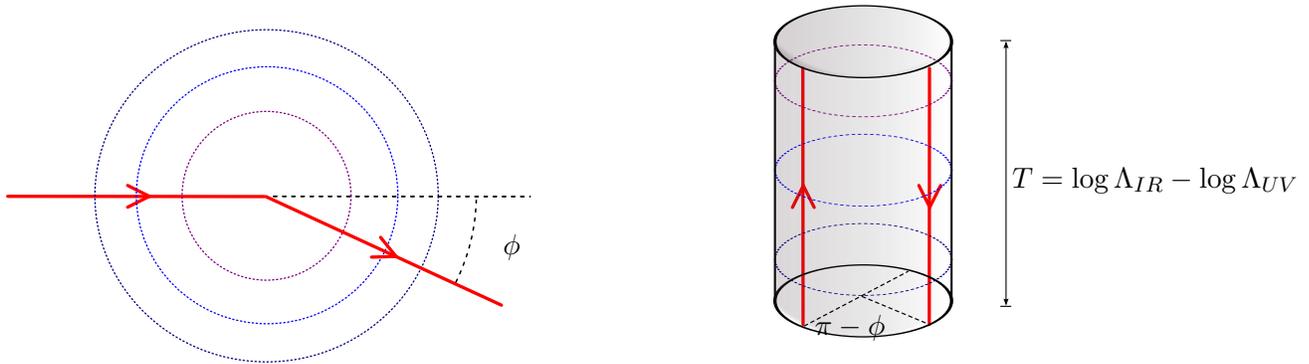


Figura 1.7: Izquierda: línea recta con un *cusp* geométrico ϕ . Derecha: En el cilindro el *cusp* se mapea a dos líneas paralelas separadas por un ángulo $\pi - \phi$.

cusp Γ_{cusp} . De hecho, debido a la singularidad introducida por la desviación de la trayectoria recta, el valor esperado de estos operadores poseen divergencias logarítmicas, identificándose a Γ_{cusp} con el coeficiente que acompaña a las mismas. Más específicamente

$$\langle W_{\text{cusp}} \rangle = e^{-\Gamma_{\text{cusp}} \log \frac{\Lambda_{IR}}{\Lambda_{UV}}}, \quad (1.117)$$

con Λ_{IR} y Λ_{UV} los correspondientes *cutoffs* infrarrojo y ultravioleta respectivamente. La dimensión anómala de *cusp* posee información importante sobre el comportamiento de la teoría de gauge. Un aspecto interesante resulta de mapear el plano \mathbb{R}^4 al cilindro $\mathbb{R} \times S^3$. Esto se logra identificando la coordenada radial en el plano con la coordenada temporal en el cilindro, $\log r = t$. Como se ve en la Figura 1.7, esta transformación mapea el *cusp* a dos líneas paralelas en el cilindro. Por lo tanto, puede relacionarse con el potencial quark-antiquark en la esfera. Incluso, considerando una pequeña separación entre las líneas, es decir $\phi \rightarrow \pi$, se recupera el potencial quark antiquark en el plano.

Por otro lado, en el límite de *cusp* pequeño, $\phi \ll 1$, el primer orden en la expansión de Γ_{cusp} se identifica con la función de Bremsstrahlung $B(\lambda)$. Esta última da cuenta de la energía radiada por una partícula acelerada²⁰. De hecho

$$\Gamma_{\text{cusp}} \sim -B(\lambda)\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^4). \quad (1.118)$$

A su vez, podemos introducir otro tipo de *cusp*, a saber, uno interno. Esto corresponde a considerar acoplamientos constantes $\vec{\theta} = \vec{\theta}_0$ distintos para cada uno de los dos tramos rectos que conforman

²⁰De hecho, es el coeficiente que aparece en la fórmula de Larmor para la radiación de una partícula acelerada, a saber

$$E = 2\pi B \int dt (\dot{v})^2.$$

la curva. Por ejemplo, consideremos a $\vec{\theta}$ en uno de los polos de la esfera S^5 , $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, para la mitad del trayecto, luego saltando a $\vec{\theta} = (\cos \theta, \sin \theta, 0, 0, 0, 0)$. La introducción de este tipo de deformaciones permite construir Wilson loops supersimétricos. De hecho, los operadores que poseen ambos tipos de *cusp* son 1/2 BPS cuando $\theta = \pm\phi$. Más aún, en estos casos, las cargas preservadas son super-Poincaré puras, por lo que el valor esperado es trivial. En particular, esto último implica que, para ángulos pequeños,

$$\Gamma_{\text{cusp}} \sim B(\lambda)(\phi^2 - \theta^2) + \dots \quad (1.119)$$

Para finalizar esta sección, haremos algunos comentarios

- En general, hemos hecho referencia a Wilson loops en la representación fundamental, cuya representación holográfica se obtiene en términos de una cuerda fundamental. Sin embargo, como se mencionó al principio de esta sección, estos operadores pueden definirse en una representación arbitraria \mathbf{R} del grupo de gauge. En particular, cuando \mathbf{R} es la representación totalmente simétrica, la realización holográfica consiste en una D3-brana en $AdS_5 \times S^5$ con flujo de campo eléctrico en el volumen de mundo. Análogamente, cuando \mathbf{R} es la representación totalmente antisimétrica, el dual holográfico corresponde a una D5-brana, la cual también posee flujo eléctrico. También se pueden construir realizaciones holográficas para representaciones más generales. Estos últimos casos serán discutidos en el capítulo 5.
- Los Wilson loops rectos y circulares presentados aquí pueden generalizarse a operadores tipo *latitude*, los cuales incorporan una trayectoria no trivial en el espacio interno $\vec{\theta}(\tau)$. En $\mathcal{N} = 4$ SYM, es posible relacionar este tipo de operadores con la función de Bremsstrahlung, lo que permite obtener una expresión exacta para esta función [96]. Aspectos similares para este tipo de operadores en teoría ABJM se discuten en el capítulo 2.
- A lo largo de esta sección se ha hecho referencia a Wilson loops en $\mathcal{N} = 4$ SYM. La construcción en teoría ABJM es un poco más complicada. En particular, el Wilson loop puede acoplarse o bien al campo de gauge A_μ en la adjunta de $U(N)$, o bien al \hat{A}_μ en la adjunta de $U(M)$. Por otro lado, el acoplamiento al sector escalar se realiza en términos de bilineales de los escalares en la representación (anti)bi-fundamental $C_I \bar{C}^J$ o $\bar{C}^I C_J$. Estos bilineales se acoplan a través de las matrices M_J^I y \hat{M}_I^J respectivamente. Por último, es posible construir Wilson loops con acoplamiento a la materia fermiónica. Para ello se define el Wilson loop en términos de una superconexión $U(N|M)$. La mayor parte de los resultados presentados en esta sección se generalizan fácilmente para el caso de teoría ABJM, y muchos de los detalles relativos a la construcción de Wilson loops en esta teoría se presentan en el capítulo 2.

1.6 Métodos de evaluación exacta

Toda la información concerniente al comportamiento cuántico de una teoría de campos local está codificada en la integral funcional. Generalmente, calcular este tipo de integrales es muy difícil, debido a que el dominio de integración corresponde a un espacio de dimensión infinita. Las técnicas usuales en teoría de campos nos permiten expandir sistemáticamente esta integral en potencias de la constante de acoplamiento. Sin embargo, estos métodos son válidos solamente en el régimen en el que la teoría está débilmente acoplada. Por lo tanto, ha sido necesario desarrollar otras técnicas que permitan acceder al comportamiento no-perturbativo de la teoría, entre la cuales se encuentra la denominada *localización supersimétrica*. En esta sección haremos un resumen muy breve de la idea principal de este método y luego presentaremos algunos resultados relevantes para la comprensión de esta tesis. Para un enfoque más detallado, se recomienda ver [97, 98, 99].

El principio de localización fue previamente estudiado en el contexto de cohomología equivariante y teorías topológicas. Inicialmente fue probado en el contexto de variedades simplécticas [100], para luego ser generalizado a integrales más generales sobre variedades compactas [101]. Esquemáticamente, este principio declara que, dada una integral sobre una variedad compacta \mathcal{M} (de dimensión $2n$) de una forma α equivariantemente cerrada ante una acción $U(1)$, generada por un campo vectorial V_μ , entonces la integral está completamente determinada por los puntos fijos de la acción $U(1)$ sobre \mathcal{M}

$$\int_{\mathcal{M}} \alpha = \sum_i \frac{\pi^n \alpha_0(x_i)}{\sqrt{\det(\partial^\mu V_\mu(x_i))}}, \quad (1.120)$$

con α_0 la componente 0-forma de α . Notar que este resultado posee rasgos reminiscentes a una aproximación semiclásica, en el sentido de que consiste en evaluar el integrando en un conjunto de puntos $\{x_i\}$, junto con la evaluación de un determinante que depende de esos puntos. Un ejemplo ilustrativo de este tipo de fenómenos consiste en evaluar la siguiente integral sobre la esfera S^2 , parametrizada de manera tal que $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\varphi d\theta \sin \theta e^{it \cos \theta} = 4\pi \frac{\sin t}{t} = \frac{2\pi i}{t} (-e^{it} + e^{-it}), \quad (1.121)$$

donde vemos explícitamente que la integral está determinada por la evaluación de integrando en los puntos en los que $\sin \theta = -\partial_\theta \cos \theta = 0$, es decir los dos polos de la esfera. Es decir que la aproximación de fase estacionaria es, en este caso, exacta. En el lenguaje del principio de localización, esto se debe a que tanto el integrando como la medida de integración son invariantes ante rotaciones en φ , lo cual define una acción $U(1)$. Por lo tanto, la integral se localiza sobre los puntos fijos (invariantes) frente a esta acción, en este caso los polos de la esfera. Para el caso de teorías de campos, veremos que el método de localización efectivamente evalúa la integral funcional de manera exacta a través de su evaluación en un punto estacionario. Sin embargo, la constante

que determina la aproximación de punto estacionario ya no será la constante de acoplamiento de la teoría, sino una variable auxiliar mediante la cual se deforma el integrando.

El programa de localización supersimétrica consta en generalizar estos aspectos a integrales funcionales, es decir que la variedad \mathcal{M} corresponde ahora al espacio de dimensión infinita sobre el que toman valores los campos. Esquemáticamente, el argumento es el siguiente.

Consideremos una acción $S[\phi]$, invariante ante una carga fermiónica Q , es decir $QS = 0$. Aquí ϕ denota el contenido de campos de la teoría supersimétrica. La carga Q será en general alguna combinación de las supercargas de la teoría, eventualmente junto con cargas BRST, y le pediremos que satisfaga, o bien $Q^2 = 0$, o bien $Q^2 = \delta_B$, con δ_B alguna transformación de simetría bosónica de la teoría, por ejemplo una transformación de simetría R . Consideremos entonces la siguiente deformación de la función de partición

$$Z(t) = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]-tQV}, \quad (1.122)$$

donde t es un parámetro real y V una funcional invariante ante δ_B , *i.e.* $\delta_B V = 0$. De esta manera, tenemos que

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \int \mathcal{D}\phi QV e^{-S[\phi]-tQV} = \int \mathcal{D}\phi Q \left(V e^{-S[\phi]-tQV} \right). \quad (1.123)$$

Por otro lado, en el espacio de funciones, Q da cuenta de una redefinición de los campos, específicamente una traslación (de la misma manera que el operador de momento P_μ genera traslaciones en el espacio-tiempo). Por lo tanto, si la medida es invariante frente a Q , es decir que no es una simetría anómala, el lado derecho de (1.123) es nulo²¹.

En este punto, es importante aclarar que, para que este proceso esté bien definido, la teoría debe definirse en un espacio compacto. El método más efectivo para lograr esto consiste en definir los campos de la teoría como parte de un multiplete de supergravedad, luego fijando un valor esperado de vacío para los campos de gravedad. Para que la teoría resultante sea supersimétrica, el espacio curvo resultante debe poseer un espinor covariantemente constante, de tal manera que la variación del gravitino sea nula. En general, encontrar este tipo de espacios puede ser altamente no-trivial. Un caso particularmente simple es el de la esfera S^d . En los casos que nos interesan en esta tesis, las teorías están definidas sobre este tipo de variedades.

En conclusión, $Z(t)$ es en realidad independiente de t , por lo que podemos darle un valor arbitrario a este parámetro. Notar que $Z(0)$ no es más que al función de partición que queremos calcular.

De este resultado puede derivarse algunos corolarios interesantes. En primer lugar, que la integral funcional no dependerá de los acoplamientos que precedan a términos Q -exactos, es decir que pueden escribirse como la acción de Q sobre algún operador. Por otro lado, debido a que, para

²¹Este punto se torna un poco más sutil si el espacio de campos posee bordes. Sin embargo será válido siempre y cuando e^{-QV} decaiga suficientemente rápido en estos bordes.

una acción S cerrada ante la acción de Q ($QS = 0$), mostramos que el resultado es invariante ante deformaciones $S \rightarrow S + QV$, concluimos que la integral funcional está determinada por las clases de cohomología de Q^{22} . Estas observaciones son indicios claros de una reducción apreciable del dominio de integración que determina la integral funcional.

En este punto, es importante aclarar que estos argumentos son también válidos si consideramos inserciones de operadores \mathcal{O} invariantes frente a la acción de Q , es decir $Q\mathcal{O} = 0$. En particular, esto permite aplicar esta técnica para la evaluación exacta de Wilson loops.

Consideremos a V tal que el operador $QV \geq 0$ sobre el espacio de campos bosónicos de la teoría. En ese caso, al tomar el límite $t \rightarrow \infty$, las configuraciones de campos que posean $QV \neq 0$ quedarán exponencialmente suprimidas. Por lo tanto, en este límite la integral se localiza sobre las configuraciones bosónicas ϕ_0 sobre las cuales $QV[\phi_0] = 0$. Al subdominio de campos ϕ_0 que cumple esta condición se lo denomina usualmente *locus*.

De esta manera, la integral puede evaluarse a partir de la expansión de los campos alrededor del *locus*

$$\phi = \phi_0 + t^{-\frac{1}{2}}\tilde{\phi}, \quad (1.124)$$

donde, si bien el *locus* ϕ_0 es bosónico, $\tilde{\phi}$ denota campos fermiónicos y bosónicos (puede pensarse como la expansión de un supercampo alrededor de una configuración puramente bosónica). La acción deformada resulta entonces

$$S[\phi] + tQV[\phi] \simeq S[\phi_0] + (QV)^{(2)}[\tilde{\phi}] + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}}), \quad (1.125)$$

donde $(QV)^{(2)}$ denota la expansión a nivel cuadrático del funcional QV alrededor de ϕ_0 . En el límite $t \rightarrow \infty$, la integral en las fluctuaciones ϕ es cuadrática, por lo que puede realizarse fácilmente, obteniendo

$$Z(t \rightarrow \infty) = \int \mathcal{D}\phi_0 e^{-S[\phi_0]} \text{Sdet} (QV)^{(2)} \quad (1.126)$$

donde Sdet denota el cociente entre los determinantes de los operadores fermiónicos y bosónicos. El hecho remarcable aquí es que, efectivamente, la expresión (1.126) es exacta. Este es el principal resultado de este método: el dominio de integración, inicialmente definido sobre todas las posibles configuraciones de campos, se reduce a un dominio mucho menor, a saber, el *locus* definido por $QV[\phi_0] = 0$.

En algunos casos es posible definir a V de manera tal que $V \sim (Q\psi)^\star\psi$, con $Q^2 = \delta_B = 0$ y donde \star da cuenta de alguna operación que garantice que la parte bosónica de QV es definida positiva. En estos casos, el *locus* consistirá en el conjunto de configuraciones BPS, $Q\psi = 0$.

Ahora bien, (1.126) no es más que la función de partición de un modelo definido para el campo ϕ_0 , el cual toma valores en algún dominio particular, y donde $\text{Sdet} (QV)^{(2)}$ (el cual será en general

²²Se define la clase de cohomología ante la acción de Q como el conjunto de formas Q -cerradas que difieren entre sí por la adición de una forma Q -exacta.

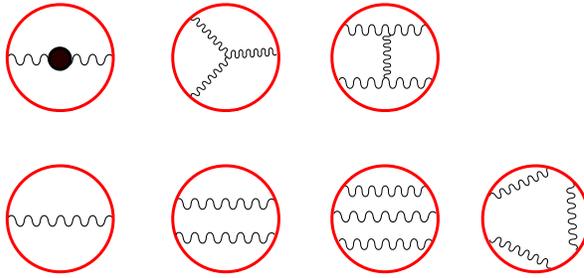


Figura 1.8: Arriba: diagramas *no-ladder*, los cuales incluyen vértices. Abajo: diagramas *ladder*.

un funcional de ϕ_0) define la medida de integración sobre este dominio. Sin embargo, si bien esto representa una simplificación apreciable al momento de calcular la integral funcional, no siempre resulta en un modelo resoluble.

Un caso que tomó particular relevancia en los últimos años corresponde a cuando el *locus* $\{\phi_0\}$ toma valores sobre configuraciones constantes. Por lo tanto, (1.126) se reduce a una integral usual sobre un espacio 0-dimensional. En el caso de teorías no-abelianas, esto corresponde a un modelo de matrices. Este tipo de modelos es, en muchos casos, resoluble, por lo que permite obtener una expresión exacta para la función de partición de la teoría, e incluso también para algunos operadores supersimétricos.

En el caso de $\mathcal{N} = 4$ SYM, la expresión de ciertos observables en términos de modelos de matrices, ya había sido conjeturada incluso antes de probarla mediante localización [92]. De hecho, en el cálculo del valor esperado de Wilson loops circulares supersimétricos en el límite planar, se observó que, para los primeros órdenes en loops, los únicos diagramas que contribuyen al valor esperado $\langle W \rangle$ son un de un tipo muy particular, usualmente denominados diagramas *ladder*. Este tipo de diagramas se caracteriza por no incluir vértices de interacción, es decir construyen solamente a partir de propagadores insertados en la curva. De hecho, se encontró que las contribuciones de los diagramas con vértices se cancelan entre sí orden a orden en el desarrollo perturbativo. Más aún, se verificó que el integrando involucrado en el cálculo de estos diagramas es constante, por lo que la integral en la curva es trivial. Si bien esto se verificó para los primeros órdenes en el desarrollo perturbativo, se conjeturó que debería ser válido a todo orden en loops. De esta manera, fue posible resumir la contribución perturbativa al valor esperado de estos observables, obteniendo una expresión exacta en λ . Finalmente, se notó que el resultado obtenido podía ser equivalentemente obtenido a través de un modelo de matrices gaussiano. Luego, en [94], esta conjetura se extiende más allá del régimen planar, obteniendo entonces una expresión exacta en λ y N para $\langle W \rangle$.

Afortunadamente, y principalmente debido a los estudios realizados en [102, 93], este efecto pudo ser comprendido gracias al programa de localización supersimétrica. De hecho, mediante argumentos similares a los que se presentan en esta sección, en [93] se demuestra que la contribución

perturbativa al valor esperado de este tipo de operadores puede ser localizado a una integral sobre un modelo de matrices Gaussiano. Con respecto a la contribución no-perturbativa (instantónica), haciendo uso de las técnicas desarrolladas en [102], se puede ver que, en este caso, su contribución es trivial. Esto representa una prueba formal de la conjetura derivada de la resumación de diagramas ladder, abriendo las puertas al cálculo exacto de una gran variedad de observables. Estas expresiones exactas pueden obtenerse resolviendo, en caso de ser posible, los correspondientes modelos de matrices. Como ya mencionamos, para el caso de $\mathcal{N} = 4$ SYM, el valor esperado de un Wilson loop circular 1/2 BPS queda determinado por el siguiente modelo de matrices gaussiano

$$\langle W \rangle_{\mathcal{N}=4} = \int dM e^{-\frac{2N}{\lambda} \text{tr} M^2} \text{tr}_{\mathbf{R}} e^M, \quad (1.127)$$

donde M es una matriz hermítica en la representación adjunta del grupo de gauge $U(N)$ (o $SU(N)$). A su vez, la traza en la exponencial se toma en la representación fundamental, mientras que $\text{tr}_{\mathbf{R}}$ indica que la traza se toma en la representación \mathbf{R} en la que se define el Wilson loop.

La simpleza del resultado 1.127 se debe principalmente a que la contribución de los determinantes ($Z_{1\text{-loop}}$ en la notación de [93]) es trivial, debido a una cancelación entre los modos fermiónicos y bosónicos. Esto se debe a la gran cantidad de supersimetría que posee la teoría. De hecho, en [93], se estudian teorías de SYM con menos supersimetría ($\mathcal{N} = 2$), las cuales se pueden obtener como deformaciones masivas de $\mathcal{N} = 4$, encontrando que en estos casos la contribución de los determinantes es no trivial.

En general, es útil trabajar en la base en la que estas matrices son diagonales, con autovalores a_r , $r = 1, \dots, N$. Este cambio de base introduce un Jacobiano, el denominado determinante de Vandermonde. Por ejemplo, para el caso en el que \mathbf{R} es la representación fundamental, se obtiene

$$\langle W \rangle = \int \prod_r da_r \Delta e^{-\frac{2N}{\lambda} \sum_s a_s^2} \sum_s e^{a_s}, \quad \Delta = \prod_{r < s} (a_r - a_s). \quad (1.128)$$

Estos resultados no son exclusivos de teorías de Yang-Mills en $d = 4$, sino que han sido extendidos a una gran variedad de teorías en diversas dimensionalidades [103, 104, 14, 105, 106, 107, 108]. De estos resultados, solamente mencionaremos los obtenidos para teorías de super Chern-Simons con materia en $d = 3$. Previo a los resultados derivados a través de localización, la descripción de teorías de super Chern-Simons en términos de modelos de matrices ya había sido estudiada en [109, 110]. Luego, en [14], haciendo uso del programa de localización supersimétrica, se derivan una serie de resultados para inserciones de Wilson loops en teorías de super Chern-Simons con materia, entre las cuales se encuentra ABJM. En general, para el contenido de materia dado por multipletes quirales definidos en las representaciones $R_1, R_1^*, R_2, R_2^*, \dots$, el modelo de matrices resulta

$$\langle W \rangle_{\text{CSm}} = \int dM e^{-i\pi k \text{tr} M^2} \text{tr}_{\mathbf{R}} e^{2\pi M} \frac{\det_{\text{Ad}}(2 \sinh \pi M)}{\det_{R_1}(2 \cosh \pi M) \det_{R_2}(2 \cosh \pi M) \dots}, \quad (1.129)$$

donde M está en el álgebra de Cartan de $U(N) \times U(N)$ y se define $\det_R f(M) = \prod_\rho f(\rho(M))$, con $\rho(M)$ el correspondiente peso del elemento M en la representación R . Para teoría ABJM, tenemos que la materia se encuentra en la representación bi-fundamental $(\mathbf{N}, \bar{\mathbf{N}})$ y anti-bifundamental $(\bar{\mathbf{N}}, \mathbf{N})$. En la base diagonal, $M = \text{diag}(a_1, \dots, a_N, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_N)$. Para un Wilson loop circular en la representación fundamental con acoplamiento al sector escalar, es decir $W \sim \exp(\int A + M^I_J C_I \bar{C}^J)$, se tiene que

$$\langle W \rangle_{\text{ABJM}} = \int \prod_r da_r \prod_s da_s e^{-i\pi k \text{tr} \sum_t a_t^2 - \hat{a}_t^2} \sum_t e^{2\pi a_t} \frac{\prod_{t \neq u} 2 \sinh \pi(a_t - a_u) \prod_{t \neq u} 2 \sinh \pi(\hat{a}_t - \hat{a}_u)}{\prod_{t,u} (2 \cosh \pi(a_t - \hat{a}_u))^2}. \quad (1.130)$$

Notar que, a diferencia de (1.127), el modelo (1.130) es bastante más complicado. Esto se debe principalmente a que el término de determinantes posee una contribución no trivial en este caso. La solución de este tipo de modelos ha sido ampliamente estudiada, [111, 112, 113, 114]. Si bien no es posible obtener una expresión cerrada como función del acoplamiento de 't Hooft, se obtiene una fórmula integral, la cual puede ser expandida orden a orden, tanto para $\lambda \ll 1$ como para $\lambda \gg 1$. Cabe aclarar que estos resultados corresponden a Wilson loops que se acoplan exclusivamente al sector bosónico de materia, los cuales no son duales a una cuerda clásica (ver capítulo 2). Sin embargo, a partir de resultados obtenidos para este tipo de operadores definidos sobre esferas deformadas [115], es posible obtener una expresión exacta válida para Wilson loops con acoplamiento al sector fermiónico [15].

Capítulo 2

Wilson loops 1/2 y 1/6 BPS en ABJM y función de Bremsstrahlung

En teorías $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons y grupo de gauge $U(N) \times U(M)$ [71, 76] es posible construir Wilson loops supersimétricos en términos de una superconexión $U(N|M)$, la cual incluye acoplamiento con la materia escalar y fermiónica [116]. El acoplamiento se realiza a través de las matrices M_J^I y \hat{M}_J^I y los espinores η_I^α y $\bar{\eta}_\alpha^I$, los cuales pueden depender de la curva sobre la que se define el Wilson loop. Los casos supersimétricos más simples consisten en Wilson loops rectos y circulares con M_J^I y \hat{M}_J^I matrices constantes. Los ejemplos típicos corresponden al Wilson loop 1/6 BPS, el cual no se acopla al sector fermiónico (en general nos referiremos a este tipo de operadores como Wilson loops bosónicos), y posee $M_J^I = \hat{M}_J^I = \text{diag}(-1, 1, -1, 1)$ [117, 118, 119]; y al Wilson loop 1/2 BPS con $M_J^I = \hat{M}_J^I = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ y un acoplamiento no trivial con el sector fermiónico [116]. Para estos casos, el valor esperado $\langle W \rangle$ se conoce de manera exacta. Para el caso recto, tanto el 1/6 BPS como el 1/2 BPS poseen valor esperado trivial ($\langle W \rangle = 1$), mientras que para el caso circular, $\langle W \rangle$ se puede calcular en términos de un modelo de matrices [116, 14, 111].

Estos casos, los cuales deben su simpleza a la gran cantidad de simetrías que preservan, pueden deformarse, generando operadores más complejos. Para el caso del Wilson loop recto, la deformación natural es introducir un ángulo de cuña, o *cusp*, cuyo valor esperado está determinado por la dimensión anómala de *cusp*. Excepto para la deformación de *cusp* pequeño del Wilson loop 1/6 BPS [15], no se conocen resultados exactos para el valor esperado de estos operadores.

En tanto a los Wilson loop circulares, es posible generalizarlos permitiendo que los acoplamientos M_J^I , \hat{M}_J^I , η_I^α y $\bar{\eta}_\alpha^I$ posean una dependencia no trivial respecto del parámetro de la curva. En particular, se consideran Wilson loops que describen una trayectoria circular tanto en el espacio-tiempo como en el espacio interno. Estos se conocen como Wilson loops tipo *latitude*. Estos son los análogos a los Wilson loop tipo *latitude* construidos en $\mathcal{N} = 4$ SYM [120], para los cuales la

trayectoria circular en el espacio interno está circunscrito a una esfera $S^2 \subset S^5$, y cuyo radio está determinado por un ángulo polar θ_0 . Estos operadores 1/4 BPS definidos en $\mathcal{N} = 4$ SYM forman parte de una familia más amplia, a saber los Wilson loops DGRT [121, 122, 123]. En $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons, estos Wilson loop *latitude* se pueden definir como generalizaciones de tanto Wilson loops circulares 1/2 BPS [124] como de 1/6 BPS [125, 126]. Los correspondientes valores esperados han sido calculados a nivel perturbativo en el régimen de acoplamiento débil en [126].

En el caso de $\mathcal{N} = 4$ SYM, se encuentra una relación no trivial entre los Wilson loop tipo *latitude* y la función de Bremsstrahlung, permitiendo obtener una expresión exacta para esta última [96]. Para $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons se propone una relación particular, chequeada a nivel perturbativo [126]. Esto motivó nuestro trabajo, en busca de un chequeo no trivial en el régimen de acoplamiento fuerte.

En este capítulo, estudiaremos configuraciones de cuerdas en $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$, duales a Wilson loops tipo *latitude* en $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons. A su vez analizaremos las propiedades supersimétricas de estas configuraciones. Por último estudiaremos la posibilidad de establecer una relación con la función de Bremsstrahlung en este contexto.

2.1 Soluciones BPS duales a Wilson loops tipo *latitude*

En esta sección se estudian configuraciones clásicas de cuerdas en $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ que son interpretadas como el dual de Wilson loops tipo *latitude*, *i.e.* definidos sobre una curva circular y cuyo acoplamiento con los campos de materia varía a lo largo de la curva, en particular describe un círculo en el espacio interno (reservamos los detalles sobre estos operadores en la teoría de gauge para la siguiente sección). Por lo tanto nos concentraremos en soluciones a las ecuaciones de movimiento para cuerdas cuyos extremos describen un círculo dentro de \mathbb{CP}^3 .

2.1.1 Solución clásica

La geometría dual a la teoría ABJM es $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ [71], cuya métrica puede escribirse de la siguiente manera

$$ds^2 = L^2 (ds_{AdS_4}^2 + 4ds_{\mathbb{CP}^3}^2) . \quad (2.1)$$

La métrica en AdS en coordenadas globales es

$$ds_{AdS_4}^2 = -\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\psi^2) , \quad (2.2)$$

mientras que la parametrización canónica en el plano complejo proyectivo corresponde a usar la métrica de Fubini-Study. Esta última puede obtenerse explícitamente embebiendo el espacio proyec-

tivo en \mathbb{C}^4 , parametrizado con coordenadas homogéneas $\mathbf{Z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ tales que

$$\begin{aligned} z_1 &= r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_1} e^{\frac{i}{4}(\chi+\xi)}, & z_3 &= r \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi_2} e^{\frac{i}{4}(\xi-\chi)}, \\ z_2 &= r \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_1} e^{\frac{i}{4}(\chi+\xi)}, & z_4 &= r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi_2} e^{\frac{i}{4}(\xi-\chi)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Explícitamente tenemos

$$ds_{\mathbb{C}^4}^2 = dz_I d\bar{z}_I = dr^2 + r^2 d\Omega_7^2, \quad (2.4)$$

con

$$d\Omega_7^2 = ds_{\mathbb{CP}^3}^2 + \frac{1}{16} (d\xi + A)^2, \quad (2.5)$$

$$A = \cos \alpha d\chi + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos \theta_1 d\varphi_1 + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \theta_2 d\varphi_2. \quad (2.6)$$

El espacio proyectivo \mathbb{CP}^3 está definido vía la relación de equivalencia $\mathbf{Z} \sim c \mathbf{Z}$ con $c \in \mathbb{C}^*$. Identificando $c = r e^{i\xi}$, esto implica “descartar” la dependencia en estas coordenadas de la métrica de \mathbb{C}^4 , resultando así

$$\begin{aligned} ds_{\mathbb{CP}^3}^2 &= \frac{1}{4} \left[d\alpha^2 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\varphi_1^2) + \sin^2 \frac{\alpha}{2} (d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\varphi_2^2) \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} (d\chi + \cos \theta_1 d\varphi_1 - \cos \theta_2 d\varphi_2)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

con los ángulos definidos en los rangos $0 \leq \alpha, \theta_1, \theta_2 \leq \pi$, $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi$ y $0 \leq \chi \leq 4\pi$. En este sentido (2.5) hace manifiesto el enunciado de que las esferas de dimensión impar pueden ser entendidas como una fibración $U(1)$ sobre espacios proyectivos.

La geometría (5.1) es solución de supergravedad IIA con los siguientes flujos

$$e^{2\phi} = 4 \frac{L^2}{k^2}, \quad F^{(4)} = \frac{3}{2} k L^2 \text{vol}(AdS_4), \quad F^{(2)} = \frac{k}{4} dA, \quad (2.8)$$

donde $\text{vol}(AdS_4) = \cosh \rho \sinh^2 \rho \sin \vartheta dt \wedge d\rho \wedge d\vartheta \wedge d\psi$. La constante de acoplamiento de 't Hooft en $\mathcal{N} = 6$ es $\lambda = N/k$ y se relaciona de la manera usual con el radio de curvatura de la geometría, $L^2 = \pi \sqrt{2\lambda}$, por lo que la aproximación de supergravedad es válida en el régimen de curvatura pequeña $L^4 \sim \lambda \gg 1$ y despreciando las interacciones entre las cuerdas, $\lambda^{5/2}/N^2 \ll 1$ (a menos que se aclare lo contrario, trabajaremos con $\alpha' = 1$).

El dual para teoría ABJ es una deformación de esta geometría correspondiente a encender un flujo de tensor antisimétrico $B^{(2)}$ en un subespacio $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^3$ [76]

$$B^{(2)} = \frac{M - N}{2k} dA, \quad (2.9)$$

En [76] se sugiere que si $|N - M| \leq k$ entonces se preserva la unitariedad de la teoría.

Nuestro objetivo consiste en encontrar una solución para la hoja de mundo que describa un círculo tipo espacio en el borde de AdS , mientras que al mismo tiempo describa un círculo dentro de \mathbb{CP}^3 . Para ello resolvemos las ecuaciones de movimiento que se derivan de la acción de Polyakov

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} G_{mn}(X) \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n, \quad (2.10)$$

donde X^m representa las coordenadas de la cuerda en el espacio *target*, cuya métrica G_{mn} fue presentada en (5.1) y $h_{\alpha\beta}$ es un campo auxiliar que asegura la equivalencia a nivel clásico entre las formulaciones de Polyakov y Nambu-Goto. Se propone el siguiente *ansatz* is

$$t = 0, \quad \rho = \rho(\sigma), \quad \vartheta = \pi/2, \quad \psi = \tau, \quad \theta_1 = \theta(\sigma), \quad \varphi_1 = \tau, \quad \alpha = 0. \quad (2.11)$$

con $\tau \in (0, 2\pi)$. De (2.11) se puede leer que el círculo en AdS se ubica a lo largo del ecuador en la esfera S^2 . Por otro lado, la condición de contorno que se impone en $\rho \rightarrow \infty$ es

$$\theta_1 \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \theta_0. \quad (2.12)$$

La acción de Polyakov posee invariancia explícita frente a difeomorfismos ($\sigma^\alpha \rightarrow \sigma^\beta \tilde{\sigma}^\alpha$) y transformaciones de Weyl ($h_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega(\sigma) h_{\alpha\beta}$). Como se menciona en el capítulo 1, esto permite fijar tres grados de libertad. En particular trabajaremos en el gauge conforme. Introduciendo el *ansatz* en la acción obtenemos

$$S = \frac{L^2}{4\pi} \int d\tau d\sigma [\rho'^2 + \sinh^2 \rho + \theta'^2 + \sin^2 \theta]. \quad (2.13)$$

Por lo tanto las ecuaciones de movimiento son

$$\rho'' = \sinh \rho \cosh \rho, \quad (2.14)$$

$$\theta'' = \sin \theta \cos \theta. \quad (2.15)$$

A su vez, la invariancia conforme de la teoría requiere imponer las condiciones de Virasoro,

$$T_{\alpha\beta} = G_{mn}(X) \partial_\alpha X^m \partial_\beta X^n - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} \mathcal{L} = 0, \quad (2.16)$$

que resultan equivalentes a satisfacer la siguiente relación no lineal

$$\rho'^2 + \theta'^2 = \sinh^2 \rho + \sin^2 \theta. \quad (2.17)$$

La ecuación (2.14) puede integrarse obteniendo

$$\rho'^2 = \sinh^2 \rho + A. \quad (2.18)$$

Para obtener una hoja de mundo que se cierre de manera suave en el interior del espacio (es decir que sea monovaluada y no desarrolle ninguna singularidad cónica) correspondiente a realizar una

única vuelta al círculo descrito en el borde, la constante de integración A debe ser nula. De las ecuaciones (2.17) y (2.18) se infiere

$$\theta'^2 = \sin^2\theta. \quad (2.19)$$

Finalmente, las soluciones a las ecuaciones (2.18) y (2.19) son de la forma

$$\begin{aligned} \rho(\sigma) &= \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\sinh\sigma}\right), \\ \theta(\sigma) &= \arcsin\left(\frac{1}{\cosh(\sigma_0 \pm \sigma)}\right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde hemos elegido la constante de integración en ρ de manera tal que el rango de la coordenada σ sea $\sigma \in [0, \infty)$, con el borde ubicado en $\sigma = 0$. A su vez, la constante de integración $\sigma_0 \geq 0$ en (2.20) está determinada por la condición de contorno en el borde $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\sin\theta_0 = \frac{1}{\cosh\sigma_0}. \quad (2.21)$$

Notar que el perfil obtenido para la coordenada θ describe un *embedding* para la cuerda en \mathbb{CP}^3 con forma de copa, tal que alcanza $\theta_1 = 0$ o $\theta_1 = \pi$ en el interior de AdS ($\sigma \rightarrow \infty$) dependiendo del signo que se elija en (2.20) (ver Figura 2.1).

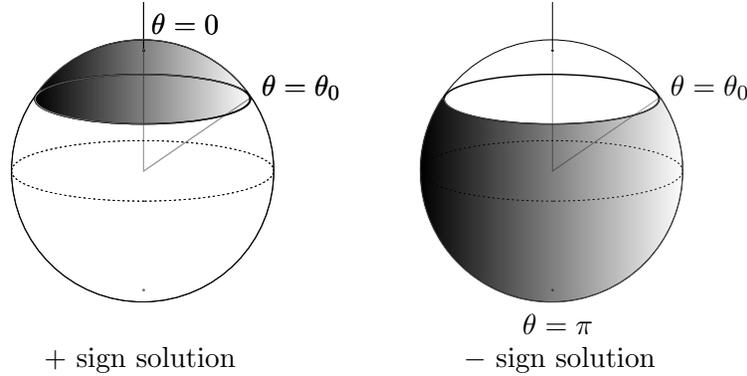


Figura 2.1: Hoja de mundo en el espacio interno para las dos soluciones clásicas

La acción evaluada en la solución clásica resulta entonces

$$\begin{aligned} S^{on-shell} &= \pi\sqrt{2\lambda} \int_{\sigma_{min}}^{\infty} d\sigma \left(\frac{1}{\sinh^2\sigma} + \frac{1}{\cosh^2(\sigma_0 \pm \sigma)} \right) \\ &= \pi\sqrt{2\lambda} (\cosh\rho_{max} \mp \cos\theta_0), \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde λ es la constante de acoplamiento de 't Hooft en ABJM y hemos usado que $L^2/\pi = \sqrt{2\lambda}$. Por otro lado, dado que el área de la hoja de mundo es naturalmente divergente, se regularizó en el borde definiendo $\rho_{max} = \rho(\sigma_{min})$. Como se detalla en el Apéndice A, la elección correcta de las condiciones de contorno asociadas a la coordenada holográfica permite sustraer esta divergencia

mediante la introducción de un término de borde que (lógicamente no afecta a las ecuaciones de movimiento) y obtener así una acción finita. En este caso, el resultado final es

$$S_{\text{on-shell}} = \mp \pi \sqrt{2\lambda} \cos \theta_0 . \quad (2.23)$$

En este punto es lícito preguntarse si la configuración de cuerdas encontrada preserva alguna supersimetría. En particular, estamos trabajando en la formulación de Green-Schwarz, en la que la supersimetría del espacio *target* es manifiesta. Este tipo de acciones se introdujo brevemente en la sección 1.1.2.

Las supercargas preservadas por una dada configuración de cuerdas son las transformaciones generadas por ϵ que dejan la configuración invariante y que, a su vez, no pueden ser “deshechas” por una transformación κ . Para más detalles, ver Apéndice B, donde puede verse que esto se traduce a buscar soluciones de la siguiente ecuación

$$(1 - \Gamma)\epsilon = 0 . \quad (2.24)$$

con

$$\Gamma = i \frac{\partial_\tau X^m \partial_\sigma X^n}{\sqrt{g}} \Gamma_{mn} \gamma_{11} . \quad (2.25)$$

En lo siguiente, estudiaremos la proyección (2.24) para el caso particular de las configuraciones de cuerdas presentadas arriba. Insertando la solución (2.20) en (2.25) se obtiene

$$\Gamma = \frac{i\gamma_{11}}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \theta} \left(-\sinh \rho \rho' \gamma_{13} + \sinh \rho \theta' \gamma_{35} - \sin \theta \rho' \gamma_{17} - \sin \theta \theta' \gamma_{57} \right) , \quad (2.26)$$

mientras que el espinor de Killing (B.21) resulta

$$\epsilon = \mathcal{M} \epsilon_0 = e^{\frac{\theta}{4}(\hat{\gamma}_{75} - \gamma_{71})} e^{\frac{\rho}{2} \hat{\gamma}_{71}} e^{\frac{\pi}{4} \gamma_{12}} e^{\frac{\pi}{4}(-\hat{\gamma}_{11} + \gamma_{57} + 2\gamma_{23})} \epsilon_0 . \quad (2.27)$$

con ϵ_0 un espinor constante. Para estudiar las soluciones de (2.24) y por conveniencia a la hora de comparar con la teoría de gauge, es útil expandir el espinor de Killing ϵ_0 en términos de los autovectores del conjunto de bilineales mutuamente conmutantes $\{\gamma_{01}, i\hat{\gamma}_{11}, i\gamma_{57}, i\gamma_{49}, i\gamma_{68}, i\gamma_{23}\}$ cuyos autovalores son $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ ($s_i = \pm 1$) (ver Apéndice B). Por lo tanto, escribimos

$$\epsilon_0 = \sum_{s_i} \theta_{(s_0, s_5)}^{(s_1, s_2, s_3, s_4)} \epsilon_{(s_0, s_5)}^{(s_1, s_2, s_3, s_4)} , \quad (2.28)$$

donde $\epsilon_{(s_0, s_5)}^{(s_1, s_2, s_3, s_4)}$ y $\theta_{(s_0, s_5)}^{(s_1, s_2, s_3, s_4)}$ denotan a un elemento de la base y al coeficiente de la expansión respectivamente. Notemos que el índice s_1 es redundante, ya que $s_1 = s_2 s_3 s_4$ ¹ Debido a que (2.26)

¹La elección de la base $\{\hat{\gamma}_{11}, \gamma_{57}, \gamma_{49}, \gamma_{68}\}$ está motivada por la presencia de estos bilineales en el espinor de Killing (B.22), asociados con las fases ξ_i de las coordenadas complejas z_I .

no depende de la coordenada de hoja de mundo τ , la dependencia del espinor de Killing en esta coordenada debe cancelarse. Esto último impone las siguientes condiciones sobre ϵ_0

$$\begin{aligned}(1 + \gamma_{23}\hat{\gamma}\gamma_{11})\epsilon_0 &= 0, \\ (1 - \gamma_{23}\gamma_{57})\epsilon_0 &= 0.\end{aligned}\tag{2.29}$$

En términos de los autovalores (s_1, s_2, s_3, s_4) , estas proyecciones implican $s_1 = -s_2$ y, debido a (B.27), $s_3 = -s_4$. Los únicos elementos presentes en la expansión (2.28) que satisfacen estas proyecciones son: $(+, -, +, -)$, $(+, -, -, +)$, $(-, +, +, -)$ y $(-, +, -, +)$. Notar que (2.29) relaciona los autovalores de γ_{23} y $\hat{\gamma}\gamma_{11}$, a saber, $s_5 = s_1$. En consecuencia, estas condiciones preservan $4 \times 2 = 8$ de las 24 supersimetrías que tiene originalmente la teoría.

Una vez impuestas las condiciones (2.29), la ecuación (2.24) se reescribe como la siguiente condición sobre el espinor constante ϵ_0

$$(1 - \mathcal{M}_P^{-1}\Gamma\mathcal{M}_P)\epsilon_0 = 0,\tag{2.30}$$

donde \mathcal{M}_P denota la acción de \mathcal{M} sobre el subespacio proyectado. Específicamente, esto implica fijar a 1 el término exponencial que depende de τ en (2.27), obteniendo

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_P^{-1}\Gamma\mathcal{M}_P &= \frac{i\gamma_{11}}{\sinh^2\rho + \sin^2\theta_1} \left(-\sinh\rho\rho' e^{\theta_1\hat{\gamma}\gamma_5} e^{-\frac{\pi}{2}\gamma_{12}}\gamma_{13} + \sinh\rho\theta_1' e^{\theta_1\hat{\gamma}\gamma_5}\gamma_{35} \right. \\ &\quad \left. - \sin\theta_1\rho' e^{-\frac{\pi}{4}\gamma_{12}} e^{\rho\hat{\gamma}\gamma_1} e^{-\frac{\pi}{4}\gamma_{12}}\gamma_{17} - \sin\theta_1\theta_1' e^{-\frac{\pi}{4}\gamma_{12}} e^{\rho\hat{\gamma}\gamma_1} e^{\frac{\pi}{4}\gamma_{12}}\gamma_{57} \right) \\ &= i\gamma_{11}(\sin\theta_0\gamma_{27} - \cos\theta_0\gamma_{57}).\end{aligned}\tag{2.31}$$

donde, en la última línea, hemos hecho uso explícito de la solución (2.20). Notar que la proyección obtenida es independiente de las coordenadas. Adicionalmente, resulta independiente del signo que se elija en (2.20), lo que implica que ambas configuraciones preservan el mismo subconjunto de supersimetrías. Debido a que (2.31) conmuta con las proyecciones (2.29), podemos diagonalizar simultáneamente ambos operadores. Ahora bien, de los 8 autovectores que satisfacen (2.29), sólo la mitad satisfacen simultáneamente (2.30), preservando entonces 4 supercargas de las 24 que preserva la teoría. Por lo tanto, concluimos que estas configuraciones descritas por la solución (2.20) son 1/6 BPS. Notar que la última línea de (2.31) puede reescribirse de la siguiente manera

$$i\gamma_{11}(\sin\theta_0\gamma_{27} - \cos\theta_0\gamma_{57}) = -i\gamma_{11}\gamma_{57}e^{\theta_0\gamma_{25}},\tag{2.32}$$

por lo que, definiendo $\tilde{\epsilon}_0 = e^{\frac{\theta_0}{2}\gamma_{25}}\epsilon_0$, tenemos que

$$(1 + i\gamma_{11}\gamma_{57})\tilde{\epsilon}_0 = 0.\tag{2.33}$$

Dado que γ_{25} conmuta con las condiciones (2.29), $\tilde{\epsilon}_0$ las satisface también. Adicionalmente, $\tilde{\epsilon}_0$ satisface (2.33), por lo que la solución resulta

$$\tilde{\epsilon}_0 = \omega_1\epsilon_{\binom{-+++}{--}} + \omega_2\epsilon_{\binom{+---}{++}} + \omega_3\epsilon_{\binom{-+-+}{--}} + \omega_4\epsilon_{\binom{+--+}{++}},\tag{2.34}$$

con ω_i coeficientes complejos. Sin embargo, la condición de Majorana establece relaciones entre estos coeficientes, resultando en 4 supercargas reales, en consistencia con que el operador es 1/6 BPS. En términos de los coeficientes de la expansión (2.28), la solución resulta

$$\begin{aligned}
\theta_{(+ -)}^{(- + + -)} &= \sqrt{1 + \nu} \omega_1, & \theta_{(- -)}^{(- + + -)} &= -\sqrt{1 - \nu} \omega_2, \\
\theta_{(+ +)}^{(+ - + -)} &= -\sqrt{1 - \nu} \omega_1, & \theta_{(- +)}^{(+ - + -)} &= \sqrt{1 + \nu} \omega_2, \\
\theta_{(+ -)}^{(- + - +)} &= \sqrt{1 + \nu} \omega_3, & \theta_{(- -)}^{(- + - +)} &= -\sqrt{1 - \nu} \omega_4, \\
\theta_{(+ +)}^{(+ - - +)} &= -\sqrt{1 - \nu} \omega_3, & \theta_{(- +)}^{(+ - - +)} &= \sqrt{1 + \nu} \omega_4.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

donde hemos introducido el parámetro $\nu = \cos \theta_0$. Ahora bien, definiendo los espinores de dos componentes

$$\epsilon^1 = \begin{pmatrix} \theta_{(+ -)}^{(- + + -)} \\ \theta_{(- -)}^{(- + + -)} \end{pmatrix}, \quad \epsilon^2 = \begin{pmatrix} \theta_{(+ +)}^{(+ - + -)} \\ \theta_{(- +)}^{(+ - + -)} \end{pmatrix}, \quad \epsilon^3 = \begin{pmatrix} \theta_{(+ -)}^{(- + - +)} \\ \theta_{(- -)}^{(- + - +)} \end{pmatrix}, \quad \epsilon^4 = \begin{pmatrix} \theta_{(+ +)}^{(+ - - +)} \\ \theta_{(- +)}^{(+ - - +)} \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

tenemos que

$$\epsilon_0 = \epsilon^1 + \epsilon^2 + \epsilon^3 + \epsilon^4. \tag{2.37}$$

En términos de este espinor constante, el generador de transformaciones de supersimetría sobre la hoja de mundo se obtiene actuando con el operador \mathcal{M} evaluado en la configuración clásica. La forma explícita de este espinor de Killing no es relevante en esta discusión. Sin embargo, es interesante analizar las propiedades de este parámetro ante las simetrías globales preservadas por la hoja de mundo. Este tipo de análisis sería relevante si se quisiera estudiar el espectro de fluctuaciones cuánticas alrededor de esta configuración clásica. De hecho, los modos que conforman este espectro deben acomodarse en multipletes del grupo de simetrías globales preservado por la hoja de mundo. En particular, para las configuraciones estudiadas en este capítulo, el grupo de simetría R , que en la descripción dual da cuenta del grupo de isometrías de \mathbb{CP}^3 , se rompe a un $U(1)_R \times SU(2)$, que da cuenta de las direcciones en las que no se extiende la curva en el espacio interno. Adicionalmente, aparece una simetría de gauge que actúa sobre el espectro de fluctuaciones. Esta simetría se relaciona con las rotaciones sobre las direcciones en las que se extiende la curva, por lo que son dependientes del parámetro de la misma (por eso es que esta es una simetría local). Finalmente, hay un grupo $U(1)_A$ que corresponde a rotaciones en las direcciones 2 – 3 de AdS_4 . En resumen

$$\begin{aligned}
\text{Rotaciones en el plano 2-3 (AdS)} &\rightarrow U(1)_A \\
\text{Rotaciones en la } S^2 \text{ colapsada y en } \chi &\rightarrow U(2) = U(1)_R \times SU(2) \\
\text{Parte global del grupo de gauge} &\rightarrow U(1)_G
\end{aligned} \tag{2.38}$$

De hecho, es posible ver que las cargas de un espinor respecto a estas simetrías globales pueden escribirse en términos de los autovalores (s_2, s_3, s_4) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
U(1)_G &= \frac{1}{4}(s_3 + s_4) - \frac{1}{2}s_2 \\
U(1)_A &= \frac{1}{2}s_2s_3s_4 \\
SU(2) &= \frac{1}{4}(1 - s_3s_4) \\
U(1)_R &= \frac{1}{4}(s_3 + s_4)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Vemos entonces que los espinores de Killing ϵ^i , al poseer $s_3 = -s_4$, son neutros respecto de $U(1)_R$, mientras que poseen carga $-\frac{1}{2}s_2 = \frac{1}{2}s_5$ respecto de $U(1)_A$ y $U(1)_G$. A su vez, forman un doblete del grupo $SU(2)$. El álgebra de este $SU(2)$ está cerrada por los generadores preservados de $SU(4)$, a saber, $R_4^3 = L_+$, $R_3^4 = L_-$ y $\frac{1}{2}(R_3^3 - R_4^4) = L_3$. Para algunos comentarios adicionales respecto a estas simetrías ver Apéndice B.

Estas consideraciones deberían jugar un papel importante al momento de construir el álgebra de supersimetría de la teoría cuántica definida sobre la hoja de mundo. En particular, las cargas de los espinores de Killing determinan que modos pueden mezclarse entre sí ante la acción de una transformación de supersimetría. A su vez, la forma explícita del espinor de Killing debería permitir establecer un conjunto de condiciones de contorno que garanticen la invariancia de la teoría ante este tipo de transformaciones. Sin embargo, el espectro de fluctuaciones cuánticas correspondiente a estas realizaciones no está del todo entendido hasta el momento, por lo que no formará parte del contenido de esta tesis.

Por último, recordemos que la solución en la que se evaluó el espinor de Killing (2.27) corresponde a tomar $\theta_2 = 0$ y $\varphi_2 = 0$. Sin embargo, debido a que la esfera descrita por θ_2 y φ_2 está colapsada ($\alpha = 0$), podríamos suponer una posición arbitraria en esta esfera, es decir $\theta_2 = \theta_1$ y $\varphi_2 = \varphi_1$, aún manteniendo $\alpha = 0$. Claramente, las ecuaciones de movimiento no se ven afectadas y por lo tanto estas son soluciones igualmente válidas. A su vez, el proyector Γ permanece invariante, dado por (2.26), mientras que el espinor de Killing ahora resulta

$$\mathcal{M} = e^{\frac{\theta_1}{4}(\hat{\gamma}_5 - \gamma_7\gamma_{11} + \gamma_{98} + \gamma_{46})} e^{\frac{\rho}{2}\hat{\gamma}_1} e^{\frac{\pi}{4}\gamma_{12}} e^{\frac{\tau}{2}\gamma_{23}} e^{-\frac{\tau}{4}(\hat{\gamma}_{11} - \gamma_{57} + \gamma_{49} - \gamma_{68})}. \tag{2.40}$$

A primera vista, esto puede parecer problemático, debido a que pareciera que no podemos deshacernos de la dependencia con respecto a la variable τ mediante una proyección sobre ϵ_0 . Sin embargo, esto no es un problema real, ya que lo importante es que esta dependencia desaparezca del operador $\mathcal{M}^{-1}\Gamma\mathcal{M}$, una vez impuesta la proyección (2.24). Dado que γ_{98} , γ_{46} , γ_{49} y γ_{68} conmutan con Γ encontramos que, luego de imponer (2.29), el operador $\mathcal{M}_P^{-1}\Gamma\mathcal{M}_P$ resulta igual al que se obtiene en (2.31), sin importar si se utiliza el operador \mathcal{M} definido por (2.27) o por (2.40). Por lo tanto la proyección de simetría κ resultante es la misma, concluyendo que todas estas configuraciones preservan el mismo subconjunto de supersimetrías.

2.2 Operadores de Wilson duales

En esta sección veremos que las configuraciones clásicas de cuerdas encontradas arriba son duales a un cierto tipo de operadores BPS, denominados usualmente Wilson loops tipo *latitude*. Este término fue usado en [126] para referirse a una deformación particular del Wilson loop circular dada por dos trayectorias azimutales: una geométrica, en la esfera $S^2 \subset AdS_4$, y otra en el espacio interno en alguna esfera $S^2 \subset \mathbb{CP}^3$. Se observa que el valor esperado de este tipo de operadores depende de una combinación precisa de los parámetros que determinan estas trayectorias, a saber $\nu = \sin \theta_{geo} \cos \theta_{int}$. Por simplicidad (y sin pérdida alguna de generalidad), ubicamos la trayectoria geométrica en el ecuador de la esfera $S^2 \subset AdS_4$, *i.e.* $\theta_{geo} = \frac{\pi}{2}$, y denotamos con θ_0 al ángulo polar θ_{int} de la trayectoria interna.

En el caso de la teoría $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons con materia, se define una serie de operadores de Wilson loop BPS (es decir, que preservan algunas de las supersimetrías de la teoría) en términos de una superconexión $U(N|M)$, [116, 124]. En particular, definiendo la superconexión

$$L = \begin{pmatrix} A_\mu \dot{x}^\mu - \frac{2\pi i}{k} |\dot{x}| M_J^I C_I \bar{C}^J & -i \sqrt{\frac{2\pi}{k}} |\dot{x}| \eta_I^\alpha \bar{\psi}_\alpha^I \\ -i \sqrt{\frac{2\pi}{k}} |\dot{x}| \psi_I^\alpha \bar{\eta}_\alpha^I & \hat{A}_\mu \dot{x}^\mu + \frac{2\pi i}{k} |\dot{x}| \hat{M}_J^I \bar{C}^J C_I \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

tenemos que

$$W_F = \frac{1}{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} \text{STr} \left[P e^{i \oint_{\mathcal{C}} L d\tau} \mathcal{T} \right], \quad (2.42)$$

donde $\mathcal{N}_{\mathcal{T}} = \text{STr}(\mathcal{T})$ es un factor de normalización y \mathcal{T} es una matriz de *twisting* que depende de $M_J^I, \hat{M}_J^I, \eta_I^\alpha$ y $\bar{\eta}_\alpha^I$. Esta matriz de *twisting* resulta imprescindible para que el operador sea invariante de gauge.

Ahora bien, nuestro interés recae en identificar estos operadores con las configuraciones de cuerdas descritas en la sección anterior 2.1. Por lo tanto, se considera al contorno \mathcal{C} descrito por $\vec{x}(\tau) = (0, \cos \tau, \sin \tau)$, es decir, un círculo de radio unitario. A su vez, proponemos una elección específica para $M_J^I, \hat{M}_J^I, \eta_I^\alpha$ y $\bar{\eta}_\alpha^I$, inspirados en propiedades geométricas de la solución de cuerdas. En el caso particular de *ABJM*, tenemos que $M = N$, y por lo tanto $M_J^I = \hat{M}_J^I$. En este caso, este tipo de acoplamiento posee una interpretación geométrica bastante clara, propuesta en [119]. Para el tipo de operadores que nos interesan tenemos que

$$M_J^I = \hat{M}_J^I = \delta_J^I - \frac{2\dot{z}_J \dot{z}^I}{|\dot{z}|^2}, \quad (2.43)$$

donde identificamos $z_I(\tau)$ con la trayectoria descrita por los extremos de la cuerda en el espacio interno \mathbb{CP}^3 , expresada en términos de las coordenadas complejas descritas en (2.3). Para la solución clásica (2.11),(2.20) tenemos que

$$z_1 = \cos \frac{\theta_0}{2} e^{i\frac{\tau}{2}}, \quad z_2 = \sin \frac{\theta_0}{2} e^{-i\frac{\tau}{2}}, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 0, \quad (2.44)$$

y por lo tanto

$$M_J^I = \hat{M}_J^I = \begin{pmatrix} -\nu & e^{-i\tau}\sqrt{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ e^{i\tau}\sqrt{1-\nu^2} & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

Estas matrices, junto con los acoplamientos espinoriales determinados por

$$\eta_I^\alpha = \frac{e^{\frac{i\nu\tau}{2}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\nu} \\ -\sqrt{1-\nu}e^{i\tau} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_I (1, -ie^{-i\tau})^\alpha, \quad \bar{\eta}_I^\alpha = i(\eta_I^\alpha)^\dagger, \quad (2.46)$$

da lugar a una familia de operadores 1/6 BPS. Las supersimetría preservada está determinada por los parámetros $\bar{\Theta}^{IJ} = \bar{\theta}^{IJ} - (x \cdot \gamma)\bar{\epsilon}^{IJ}$, los cuales se infieren en [126], y son tales que²

$$\begin{aligned} \zeta_{-1}^{13} &= \frac{1}{2}(\bar{\theta}_1^{13} - i\bar{\epsilon}_1^{13}) = \sqrt{1-\nu}\omega_1, & \zeta_{-2}^{23} &= \frac{1}{2}(i\bar{\theta}_2^{23} - \bar{\epsilon}_2^{23}) = \sqrt{1+\nu}\omega_1, \\ \zeta_{+1}^{13} &= \frac{1}{2}(\bar{\theta}_1^{13} + i\bar{\epsilon}_1^{13}) = \sqrt{1+\nu}\omega_2, & \zeta_{+2}^{23} &= \frac{1}{2}(i\bar{\theta}_2^{23} + \bar{\epsilon}_2^{23}) = \sqrt{1-\nu}\omega_2, \\ \zeta_{-1}^{14} &= \frac{1}{2}(\bar{\theta}_1^{14} - i\bar{\epsilon}_1^{14}) = \sqrt{1-\nu}\omega_3, & \zeta_{-2}^{24} &= \frac{1}{2}(i\bar{\theta}_2^{24} - \bar{\epsilon}_2^{24}) = \sqrt{1+\nu}\omega_3, \\ \zeta_{+1}^{14} &= \frac{1}{2}(\bar{\theta}_1^{14} + i\bar{\epsilon}_1^{14}) = \sqrt{1+\nu}\omega_4, & \zeta_{+2}^{24} &= \frac{1}{2}(i\bar{\theta}_2^{24} + \bar{\epsilon}_2^{24}) = \sqrt{1-\nu}\omega_4, \end{aligned} \quad (2.47)$$

Haciendo uso de la identificación entre $\zeta_{\pm\alpha}^{IJ}$ y $\theta_{(s_0, s_5)}^{(s_1, s_2, s_3, s_4)}$ sugerida en el Apéndice B, vemos que estas supercargas coinciden con las encontradas en (2.35) para la configuración de cuerdas.

Concluimos esta sección estudiando otro tipo de Wilson loops, los cuales poseen un correlato más cercano con los operadores estudiados en $\mathcal{N} = 4$ SYM, ya que sólo se acoplan al sector escalar de la teoría, por lo que, en general, nos referiremos al mismo como Wilson loop bosónico. En particular, estos operadores corresponden a una deformación tipo *latitude* de un caso bien conocido, a saber, los Wilson loops circulares bosónicos 1/6 BPS en $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons³

$$W_B = \frac{1}{N} \text{Tr} \left[P e^{i \oint (A_\mu \dot{x}^\mu - \frac{2\pi i}{k} |\dot{x}| M_J^I C_I \bar{C}^J) d\tau} \right], \quad (2.48)$$

² $\bar{\theta}_\alpha^{IJ}$ y $\bar{\epsilon}_\alpha^{IJ}$ generan transformaciones super Poincaré y super conformes respectivamente, donde α es un índice espinorial e IJ es un par antisimetrizado de índices en la representación fundamental de $SU(4)$.

³Análogamente podemos definir un Wilson loop para el factor $U(M)$ del grupo de gauge de la siguiente manera

$$\hat{W}_B = \frac{1}{M} \text{Tr} \left[P e^{i \oint (\hat{A}_\mu \dot{x}^\mu - \frac{2\pi i}{k} |\dot{x}| \hat{M}_J^I \hat{C}^J C_I) d\tau} \right],$$

donde $\hat{M}_J^I = M_J^I$.

donde

$$M_J^I = \begin{pmatrix} -\nu & e^{-i\tau}\sqrt{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ e^{i\tau}\sqrt{1-\nu^2} & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Las supercargas preservadas por este Wilson loop bosónico pertenecen a un subconjunto de las supercargas dadas en (2.47). Específicamente, son las obtenidas al imponer la condición $\omega_1 = \omega_4 = 0$ en (2.47), dejando ahora sólo 2 parámetros libres, por lo que se concluye que estos operadores son 1/12 BPS.

Con respecto al dual gravitatorio de estos operadores bosónicos, nos interesa establecer una prescripción precisa en términos de las variables de la teoría dual, en analogía con lo hecho previamente para el operador 1/6 BPS tipo *latitude*. En este punto nos encontramos con una dificultad propia de los Wilson loop bosónicos en $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons, a saber, que no es posible en general asignar una configuración de cuerdas a estos operadores. Para comprender por qué ocurre ésto, nos concentramos en el acoplamiento con el sector escalar, definido por la matriz unitaria M_J^I . Para los operadores estudiados anteriormente, vimos que M_J^I posee la forma (2.45), la cual puede diagonalizarse localmente y posee autovalores $\{-1, 1, 1, 1\}$. Vemos entonces que, localmente, este operador preserva un subgrupo $SU(3) \times U(1)$ del grupo $SU(4)$ de simetría R . Esto es consistente con la representación dual en términos de una cuerda, cuyo extremo traza una trayectoria en el espacio interno: de esta manera, en cada punto, el extremo de la cuerda marca una dirección preferencial en el espacio interno, generando un rompimiento local del grupo de isometrías de \mathbb{CP}^3 de la forma $SU(4) \rightarrow SU(3) \times U(1)$. Esta prescripción se manifiesta en la relación directa (2.43) que se establece entre la matriz M_J^I y la parametrización de una trayectoria en \mathbb{CP}^3 en términos de las coordenadas $z^I(\tau)$ ⁴. Ahora bien, para el operador bosónico, la matriz M_J^I es de la forma (2.49), la cual puede diagonalizarse localmente y posee autovalores $\{-1, 1, -1, 1\}$. En consecuencia, el grupo de simetría R se rompe de la forma $SU(4) \rightarrow SU(2) \times SU(2)$. Sin embargo, es claro que este fenómeno no puede realizarse en términos de una cuerda describiendo una trayectoria en el espacio interno, ya que esto, como se explicó arriba, siempre lleva a $SU(4) \rightarrow SU(3) \times U(1)$.

Existen sin embargo algunas ideas respecto a cuál debería ser el dual gravitatorio de estos Wilson loops bosónicos. Para introducir estos conceptos, repasaremos brevemente los argumentos dados en [117], concernientes a Wilson loops 1/2 BPS y Wilson loops bosónicos 1/6 BPS. Cabe aclarar que estos operadores no describen ninguna trayectoria en el espacio interno, por lo que M_J^I es exactamente $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ para el 1/2 BPS, y $\text{diag}(-1, 1, -1, 1)$ para el 1/6 BPS bosónico. Dado que los Wilson loops estudiados en este capítulo son deformaciones tipo *latitude* de estos casos más simples, los argumentos presentados aquí se podrán generalizar fácilmente. En particular, para

⁴En general, puede verse que cualquier matriz de la forma $\delta_J^I - \frac{2\hat{z}_J\hat{z}^I}{|\hat{z}|^2}$ siempre posee autovalores $\{-1, 1, 1, 1\}$.

el caso de Wilson loops 1/2 BPS y Wilson loops bosónicos 1/6 BPS, se propone una relación entre ambos operadores en términos de un “promedio” geométrico, o *smearing*. En este punto cabe aclarar que la naturaleza de esta relación no es del todo clara aún: un punto de vista razonable corresponde a pensar en el dual gravitatorio como un “ensamble” de configuraciones de cuerdas duales al Wilson loop 1/2 BPS, de tal manera que la integral funcional ahora incluye una integración sobre algún parámetro que caracteriza a estas configuraciones; las configuraciones duales a operadores 1/2 BPS poseen una posición angular fija en el espacio interno \mathbb{CP}^3 , por lo que este ángulo es el principal candidato para definir el parámetro de integración. Por lo tanto, la propuesta consiste en que el dual gravitatorio de estos operadores bosónicos ya no es una única configuración de cuerdas, sino una distribución de configuraciones localizadas en un punto en \mathbb{CP}^3 , promediada a lo largo de un $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^3$. En cuanto a la supersimetría preservada por esta distribución, corresponderá al subconjunto de cargas preservadas simultáneamente por todas las configuraciones de cuerdas que la componen. Específicamente, consideremos una configuración dual a un Wilson loop 1/2 BPS, es decir, localizada en un punto en el espacio interno. En general, el resto de las configuraciones presentes en la distribución, pueden ser obtenidas aplicando una rotación a lo largo de un $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^3$. Ahora bien, de las 12 supercargas preservadas por cada configuración individual, algunas de ellas dependerán de los parámetros del \mathbb{CP}^1 , y por lo tanto se verán afectadas por esta rotación, mientras que otras serán independientes, permaneciendo entonces invariantes ante la rotación propuesta. Por lo tanto, es precisamente este último conjunto de cargas preservadas por la distribución. Más aún, estas supercargas pueden identificarse con las supersimetrías preservadas por el Wilson loop bosónico 1/6 BPS (ver [117]).

Ahora bien, analicemos la posibilidad de establecer una relación análoga entre los operadores 1/6 BPS *latitude* y 1/12 BPS *latitude* bosónicos estudiados en este capítulo, es decir, identificar al dual del operador 1/12 BPS *latitude* bosónico como una distribución de configuraciones de cuerdas duales al operador 1/6 BPS *latitude*. Dado que, para $\nu = 1$, la curva en el espacio interno se comprime a un punto, entonces, en este límite, se reobtiene el caso discutido en el párrafo anterior. Por lo tanto, es razonable proponer una distribución de configuraciones duales al operador 1/6 *latitude* promediada sobre un $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^3$. En particular, podemos preguntarnos si esta distribución preserva alguna supersimetría. Para responder esta incógnita, definimos una familia bi-paramétrica de configuraciones de cuerdas, obtenidas a partir de la encontrada en la sección 2.1 a través de una rotación $SU(4)$ sobre las coordenadas de \mathbb{CP}^3 .

Escribimos entonces

$$\mathbf{Z} = (z_1, z_2, z_3, z_4) = (\vec{z}, \vec{w})$$

donde $\vec{z} = (z_1, z_2)$ y $\vec{w} = (z_3, z_4)$. La solución presentada en la sección anterior posee $\alpha = 0$ y

corresponde por lo tanto a

$$\vec{z}_0 = \left(\cos \frac{\theta(\sigma)}{2} e^{i\frac{\tau}{2}}, \sin \frac{\theta(\sigma)}{2} e^{-i\frac{\tau}{2}} \right), \quad \vec{w}_0 = 0$$

Actuando con el siguiente elemento de $SU(2) \subset SU(4)$

$$g(\alpha_0, \phi_0) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha_0}{2} & -\sin \frac{\alpha_0}{2} e^{i\frac{\phi_0}{2}} \\ \sin \frac{\alpha_0}{2} e^{-i\frac{\phi_0}{2}} & \cos \frac{\alpha_0}{2} \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$\mathbf{Z} = (\vec{z}_0, 0) \rightarrow \mathbf{Z}' = \left(\cos \frac{\alpha_0}{2} \vec{z}_0, \sin \frac{\alpha_0}{2} e^{-i\frac{\phi_0}{2}} \vec{z}_0 \right) \quad (2.50)$$

Es fácil ver que esta configuración rotada satisface las ecuaciones clásicas de Euler-Lagrange. Esta nueva solución se escribe como

$$t = 0, \quad \rho = \rho(\sigma), \quad \vartheta = \pi/2, \quad \psi = \tau, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta(\sigma), \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \tau, \quad \chi = \phi_0 \quad (2.51)$$

Dado que este tipo de rotaciones en el espacio interno conforman una simetría global de la acción, el valor de la acción clásica evaluada en estas nuevas soluciones es el mismo que para la configuración sin rotar.

Se relega el análisis detallado de la supersimetría preservada por estas configuraciones al Apéndice B. El resultado principal de este análisis es que la ecuación obtenida de la proyección de simetría κ posee la misma forma que (2.30), pero escrita en una base rotada para el espinor de Killing. Por lo tanto, todas estas configuraciones preservan la misma cantidad de supercargas, a saber 1/6 del total de supersimetrías de la teoría. Desafortunadamente, no existe un subespacio común de supercargas preservadas simultáneamente por todas las configuraciones de esta familia bi-paramétrica. Por lo tanto, una distribución obtenida a partir de este conjunto de soluciones, obtenidas a partir de la rotación (2.50), no puede ser el dual gravitatorio del Wilson loop bosónico 1/12 BPS *latitude*, definido por (2.48)-(2.49).

Dado que, como se mencionó previamente, el conjunto de supercargas preservado por el Wilson loop 1/12 BPS bosónico es un subconjunto de las supersimetrías preservadas para el operador 1/6 BPS *latitude*, entonces es aún posible interpretar al dual del primero como una distribución más general del dual del segundo. Recordemos que, en términos de las variables de la teoría de gauge, vimos que este subconjunto se obtiene de imponer $\omega_1 = \omega_4 = 0$. En el esquema dual, esto implica pedir $s_0 - s_3 = 0$, lo cual, a su vez, equivale a imponer la siguiente proyección

$$(1 - i\gamma_{01}\gamma_{49})\epsilon_0 = 0. \quad (2.52)$$

Sin embargo, de momento no poseemos una interpretación de (2.52) en términos de un promedio geométrico. Notar que una proyección que relaciona s_0 y s_3 no pareciera poder ser obtenida a partir de una rotación en \mathbb{CP}^3 únicamente.

2.3 Función de Bremsstrahlung y Wilson loops *latitude*

Nuestra motivación para estudiar deformaciones tipo *latitude* de Wilson loops se debe, en parte, a la posibilidad de relacionar el valor esperado de estos operadores con la función de Bremsstrahlung, en analogía con lo que ocurre para $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills [96]. La posibilidad de establecer una relación similar en $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons fue inicialmente considerada en [126]. En esta sección elaboraremos un argumento sólido para probar que esto efectivamente ocurre.

La función de Bremsstrahlung se relaciona directamente con el valor esperado de un Wilson loop recto, luego de introducir una pequeña cuña, o *cusp*. En particular, se identifica a la dimensión anómala de *cusp* con el coeficiente que acompaña a la divergencia logarítmica del valor esperado de estos operadores. Específicamente, si consideramos una línea en \mathbb{R}^3 con un pequeño *cusp* en algún punto, tenemos que [127, 128]

$$\langle W_{\text{cusp}} \rangle = e^{-\Gamma_{\text{cusp}} \log \frac{\Lambda_{IR}}{\Lambda_{UV}}}, \quad (2.53)$$

donde Λ_{IR} y Λ_{UV} son el *cutoff* infrarrojo y ultravioleta respectivamente, con los que se regularizan las divergencias. Por su parte, la función de Bremsstrahlung $B(\lambda)$ es en general una función no trivial del acoplamiento λ , y puede obtenerse expandiendo Γ_{cusp} para ángulos de *cusp* pequeños. Esquemáticamente

$$\Gamma_{\text{cusp}} \sim -B(\lambda)\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^4) \quad (2.54)$$

Denotaremos con $B_{1/2}$ y $B_{1/6}$ a las funciones de Bremsstrahlung correspondientes a insertar un pequeño ángulo de *cusp* sobre Wilson loops rectos 1/2 BPS y 1/6 BPS (bosónico) respectivamente.

En este punto cabe aclarar que la deformación puede lograrse tanto mediante la inserción de un ángulo de *cusp* en el espacio geométrico (*i.e.* sobre la curva en \mathbb{R}^3) como en el espacio interno (*i.e.* sobre el acoplamiento con el sector escalar). En lo que sigue, denotaremos con ϕ al ángulo de *cusp* geométrico y con θ al interno.

En particular, el Wilson loop recto 1/2 BPS preserva cargas super-Poincaré⁵, y por lo tanto es un operador protegido por supersimetría, implicando esto que su valor esperado sea trivial e igual a 1. A su vez, una deformación de un Wilson loop recto 1/2 BPS tal que $\theta = \pm\phi$ da resultado a un operador que también posee esta propiedad, por lo que se tiene que $\Gamma_{\text{cusp}}(\phi = \theta) = 0$, y la expansión para $\theta, \phi \ll 1$ resulta

$$\Gamma_{\text{cusp}} = (\theta^2 - \phi^2)B_{1/2}(\lambda). \quad (2.55)$$

Esto último no ocurre para el caso del operador bosónico. De hecho, la deformación resultante de insertar *cusps* geométricos y/o internos sobre un Wilson loop recto 1/6 BPS no preserva ninguna supercarga, ni siquiera en el caso $\theta = \pm\phi$. Por lo tanto, resulta necesario distinguir entre las

⁵En general, las supercargas conservadas serán una combinación de cargas super-Poincaré y superconformes.

correspondientes funciones de Bremsstrahlung, obteniendo, para $\theta, \phi \ll 1$,

$$\Gamma_{\text{cusp}} = \theta^2 B_{1/6}^\theta(\lambda) - \phi^2 B_{1/6}^\phi(\lambda). \quad (2.56)$$

Ahora bien, analizaremos la relación entre estas funciones de Bremsstrahlung y las deformaciones *latitude* de Wilson loops circulares estudiadas en las secciones previas. En particular, en [126], se propone una relación para las deformaciones de operadores 1/2 BPS, a saber

$$B_{1/2}(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \left. \frac{\partial}{\partial \nu} \log \langle W_F \rangle \right|_{\nu=1}. \quad (2.57)$$

Esta relación fue chequeada hasta orden λ^2 en la expansión perturbativa para el régimen de acoplamiento débil, con $\langle W_F \rangle$ calculado a *framing* 0. Debido a que se carece de una prueba general para la relación (2.57), un chequeo de la misma en el régimen de acoplamiento fuerte puede interpretarse como una evidencia muy fuerte de la validez de la misma a todo orden en λ . En particular, la $B_{1/2}(\lambda)$ fue calculado en el régimen de acoplamiento fuerte en términos de una cuerda clásica que en el borde de *AdS* recorre una línea con un pequeño *cusp* [129], obteniendo a primer orden

$$B_{1/2} = \frac{\sqrt{2\lambda}}{4\pi} + \mathcal{O}(1). \quad (2.58)$$

Para chequear (2.57) en este límite necesitamos $\langle W_F \rangle$, el cual a primer orden en la expansión de acoplamiento fuerte resulta

$$\langle W_F \rangle = e^{-S^{\text{on-shell}} + \mathcal{O}(1)} = e^{\pi\sqrt{2\lambda}\nu + \mathcal{O}(1)} \quad (2.59)$$

donde la acción clásica fue evaluada en (2.23). Cabe aclarar que se eligió el signo que minimiza la acción y por lo tanto domina la correspondiente aproximación de punto estacionario. Haciendo uso de (2.59) para calcular el lado derecho de (2.57), observamos un perfecto acuerdo con (2.58).

Ahora nos concentramos en las otras funciones de Bremsstrahlung. Para $B_{1/6}^\phi(\lambda)$, en [126] se prueba que no existe una relación análoga a (2.57); de hecho, la misma falla ya a primer orden en la expansión perturbativa en el régimen de acoplamiento débil. Por completitud, diremos que existe una expresión exacta propuesta para $B_{1/6}^\phi(\lambda)$ en términos de las derivadas del valor esperado de un Wilson loop circular con un “enrollamiento” múltiple [15].

Por otro lado, una relación análoga para $B_{1/6}^\theta(\lambda)$,

$$B_{1/6}^\theta(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \left. \frac{\partial}{\partial \nu} \log \langle W_B \rangle \right|_{\nu=1}, \quad (2.60)$$

puede chequearse a acoplamiento débil hasta orden λ^2 haciendo uso de los resultados perturbativos obtenidos en [130] y [126]. En lo que resta de esta sección y mediante un análisis similar al presentado en [96], argumentaremos que la relación (2.60) es válida a todo orden en λ .

Consideremos el Wilson loop bosónico con un *cusp* interno θ de la forma

$$W_c = \frac{1}{N} \text{Tr} \left[P e^{i \oint_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} (A_\mu \dot{x}^\mu - \frac{2\pi i}{k} |\dot{x}| M_c^I{}_J C_I \bar{C}^J) d\tau} \right], \quad (2.61)$$

donde \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son dos líneas radiales en \mathbb{R}^3 . Si bien no hay una desviación geométrica entre ambas curvas, es decir $\phi = 0$, el acoplamiento escalar cambia al pasar de \mathcal{C}_1 a \mathcal{C}_2

$$M_c = \begin{cases} M(0) & \text{si } x(\tau) \in \mathcal{C}_1, \\ M(\theta) & \text{si } x(\tau) \in \mathcal{C}_2, \end{cases} \quad (2.62)$$

con

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Parametrizamos ambas semirrectas en términos del logaritmo de la distancia radial, el cual se relaciona con el tiempo global cuando mapeamos \mathbb{R}^3 a $\mathbb{R} \times S^2$. Por ejemplo, para la semirrecta \mathcal{C}_2 usamos $x^\mu = (e^\tau, 0, 0)$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sim \Delta T = \log \frac{\Lambda_{IR}}{\Lambda_{UV}}$. Expandiendo en el régimen de θ muy pequeño obtenemos, a primer orden

$$\begin{aligned} \langle \delta W_c \rangle &= \langle W_c \rangle - \langle W_c \rangle_{\theta=0} = -\theta^2 B_{1/6}^\theta \log \frac{\Lambda_{IR}}{\Lambda_{UV}} \\ &= \frac{\theta^2}{2} \left(\frac{2\pi}{k} \right)^2 \int_{\mathcal{C}_2} d\tau_1 \int_{\mathcal{C}_2} d\tau_2 (m_c)_J^I (m_c)_L^K e^{\tau_2} e^{\tau_1} \langle\langle \Phi(\tau_1)_I^J \Phi(\tau_2)_K^L \rangle\rangle_{\text{recto}}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde $\phi(\tau)_I^J = C(x(\tau))_I \bar{C}(x(\tau))^J$ es un operador en la representación adjunta de $U(N)$ y m_c proviene del primer orden en la expansión de la matriz M_c ,

$$m_c = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Notar que en (2.3) introdujimos la notación de doble *bracket*, el cual denota una función de correlación a lo largo del Wilson loop recto (sin el *cusp*). En general, definimos

$$\langle\langle \mathcal{O}(\tau_1) \mathcal{O}(\tau_2) \rangle\rangle_c = \frac{\langle \text{Tr} \left[P \mathcal{O}(\tau_1) \mathcal{O}(\tau_2) e^{i \oint_{\mathcal{C}} (A_\mu \dot{x}^\mu - \frac{2\pi i}{k} |\dot{x}| M_c^I{}_J C_I \bar{C}^J) d\tau} \right] \rangle}{\langle \text{Tr} \left[P e^{i \oint_{\mathcal{C}} (A_\mu \dot{x}^\mu - \frac{2\pi i}{k} |\dot{x}| M_c^I{}_J C_I \bar{C}^J) d\tau} \right] \rangle} \quad (2.66)$$

Al representar funciones de correlación en una teoría 1-dimensional que posee invariancia conforme, la estructura de los doble *bracket* se ve constreñida por esta simetría. En particular, la invariancia traslacional impone que la función de un punto es nula, cosa de la que se ha hecho uso

al derivar . Por otro lado, las funciones de dos puntos están completamente determinadas por las identidades de Ward a menos de una constante multiplicativa (ver Apéndice C)

$$\langle\langle\phi(\tau_1)_I^J\phi(\tau_2)_K^L\rangle\rangle_{\text{recto}} = \frac{\gamma e^{-\tau_1} e^{-\tau_2} \delta_K^J \delta_I^L}{2(\cosh(\tau_1 - \tau_2) - 1)}, \quad (I, J, K, L = 1, 2). \quad (2.67)$$

Insertando (2.67) en (2.3) y usando $\Delta T = \log \frac{\Lambda_{IR}}{\Lambda_{UV}}$ para eliminar una de las integrales, obtenemos

$$B_{1/6}^\theta = -\frac{2\pi^2\gamma}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\cosh \tau - 1} = \frac{4\pi^2\gamma}{k^2} \quad (2.68)$$

donde esta última integral fue regularizada y la divergencia UV fue descartada al escribir el resultado final.

Hasta ahora, hemos establecido una relación precisa entre la función de Bremsstrahlung $B_{1/6}^\theta$ y el coeficiente γ en la función de dos puntos de doble *bracket* definida sobre el Wilson loop recto 1/6 BPS. Ahora bien, esgrimiendo un argumento similar podemos encontrar una relación análoga entre las derivadas del valor esperado de la deformación *latitude* del Wilson loop circular 1/6 BPS (bosónico), y el coeficiente γ de la función de dos puntos de doble *bracket* definida sobre el mismo.

De hecho, consideremos el Wilson loop *latitude* con un pequeño valor del ángulo polar θ_0 tal que

$$\begin{aligned} \theta_0^2 \frac{\partial \log \langle W_B \rangle |_{\theta_0=0}}{\partial \theta_0^2} &\simeq \frac{\langle W_B \rangle - \langle W_B \rangle |_{\theta_0=0}}{\langle W_B \rangle |_{\theta_0=0}} \\ &\simeq \frac{\theta_0^2}{2} \left(\frac{2\pi}{k} \right)^2 \int_{\mathcal{C}} d\tau_1 \int_{\mathcal{C}} d\tau_2 m(\tau_1)_J^I m(\tau_2)_L^K \langle\langle\phi(\tau_1)_I^J\phi(\tau_2)_K^L\rangle\rangle_{\text{circle}}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde \mathcal{C} es un círculo de radio unitario y la matriz $m(\tau)$ es de la forma

$$m(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\tau} & 0 & 0 \\ e^\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Notemos que ahora la integración en el doble *bracket* se realiza sobre un contorno circular, para el cual (ver Apéndice C)

$$\langle\langle\Phi(\tau_1)_I^J\Phi(\tau_2)_K^L\rangle\rangle_{\text{circle}} = \frac{\gamma \delta_K^J \delta_I^L}{2(1 - \cos(\tau_1 - \tau_2))}, \quad (I, J, K, L = 1, 2). \quad (2.71)$$

Dado que la línea recta y el círculo están relacionados por una transformación conforme, y que (2.66) posee invariancia conforme, entonces concluimos que el coeficiente γ presente en (2.71) es exactamente el mismo que el que aparece en (2.67). Introduciendo (2.71) en (2.69) obtenemos

$$\frac{\partial \log \langle W_B \rangle |_{\theta_0=0}}{\partial \theta_0^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{k} \right)^2 \gamma \int_0^{2\pi} d\tau_1 \int_0^{2\pi} d\tau_2 \frac{\cos(\tau_1 - \tau_2)}{1 - \cos(\tau_1 - \tau_2)} = -\frac{8\pi^4\gamma}{k^2}, \quad (2.72)$$

donde, de nuevo, hemos descartado el término de divergente que se obtiene luego de regularizar la integral. Comparando con (2.68), concluimos que

$$B_{1/6}^\theta = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial \theta_0^2} \log \langle W_B \rangle |_{\theta_0=0}, \quad (2.73)$$

o en términos del parámetro $\nu = \cos \theta_0$

$$B_{1/6}^\theta = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \log \langle W_B \rangle |_{\nu=1}. \quad (2.74)$$

Capítulo 3

Expansión semiclásica y función de Bremsstrahlung en acoplamiento fuerte

La aparición de resultados exactos para el valor esperado de Wilson loops en teorías de gauge supersimétricas allanó el camino para realizar chequeos de precisión no triviales de la dualidad AdS/CFT. En muchos casos, se han contrastado las expansiones a acoplamiento fuerte de estos resultados exactos con resultados explícitos obtenidos mediante una expansión semiclásica en teoría de cuerdas, encontrando acuerdo entre ambos. Por ejemplo, como ya hemos mencionado en esta tesis, el valor esperado de un Wilson loop con un pequeño ángulo de *cusp* puede ser calculado de manera exacta debido a su relación con un Wilson loop circular en $\mathcal{N} = 4$ SYM [96, 131]. Estos resultados se mostraron en acuerdo con los cálculos a 1-loop realizados en la teoría de cuerdas dual. Por otro lado, también se han obtenido resultados exactos para un Wilson loop con un pequeño *cusp* en ABJM, debido a su relación con un Wilson loop que se enrolla múltiples veces en una trayectoria circular [15]. Sin embargo, algunos trabajos previos han mostrado cierto desacuerdo entre éstos y los resultados de cálculos semiclásicos en teorías de cuerdas. Por lo tanto, el objeto central de estudio en este capítulo serán Wilson loops con pequeños ángulos de *cusp* en teoría ABJM. En particular, intentaremos elucidar una posible causa para el desacuerdo entre [15] y [129] y, a su vez, propondremos un método que remedie esta discrepancia.

Este tipo de operadores en ABJM han sido sujeto de estudio en varios trabajos realizados tanto desde la teoría de campos como desde su dual gravitatorio [130, 124, 129, 132], así como su relación con Wilson loops circulares [15, 116, 126, 133].

En analogía a lo mencionado en el capítulo 1, las líneas de Wilson deformadas por un ángulo de *cusp* ϕ en \mathbb{R}^3 se pueden mapear a líneas paralelas en $\mathbb{R} \times S^2$ separadas por un ángulo $\pi - \phi$, a

través de una transformación conforme. El valor esperado de estos operadores queda determinado por la dimensión anómala de *cusp*

$$\langle W_{\text{cusp}} \rangle = e^{-\Gamma_{\text{cusp}} T}, \quad (3.1)$$

donde T es la extensión temporal de las líneas antiparalelas en el cilindro. Esta cantidad, mide a su vez el potencial establecido entre dos partículas muy masivas en la esfera. Consideraremos líneas de Wilson que, en ausencia de *cusps*, se tornan 1/2 BPS (como las discutidas en el capítulo 1). Se introducirá un *cusp* geométrico ϕ , así como también uno interno θ , el cual da cuenta de un salto repentino en el acoplamiento con el sector de materia [130]. En general, estos operadores son 1/2 BPS cuando $\theta = \pm\phi$ [130, 124]. Por lo tanto, para $\theta, \phi \ll 1$, la dimensión anómala de *cusp* toma la forma

$$\Gamma_{\text{cusp}} \approx (\theta^2 - \phi^2) B(\lambda). \quad (3.2)$$

con $B(\lambda)$ la función de Bremsstrahlung.

La dimensión anómala de *cusp* para ambos tipos de deformación fue calculada perturbativamente en teoría ABJM en hasta 2-loops [130]. En el límite de acoplamiento fuerte, como se menciona en el capítulo 1, el valor esperado de un Wilson loop definido sobre una curva \mathcal{C} puede calcularse haciendo uso de la dualidad AdS/CFT. Esto corresponde a calcular la función de partición de cuerdas cuyos extremos describan la curva en la frontera de Anti de Sitter. En este caso, el dual gravitatorio de $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons corresponde a teoría de cuerdas tipo IIA sobre $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$, y la función de partición para un Wilson loop con este tipo de *cusps* fue calculada a orden 1-loop en [129]. Sin embargo, las funciones de Bremsstrahlung encontradas allí para un *cusp* geométrico y uno interno no coinciden, entrando en contradicción con la condición (3.2) que implica que el operador es BPS para $\phi = \pm\theta$ [130]. Esta es la principal motivación que nos lleva a revisar el cálculo a 1-loop de la función de partición de cuerdas que describen un *cusp* general en $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$.

Por otro lado, en [15] se propone una expresión exacta para la función de Bremsstrahlung en teoría ABJM, la cual puede obtenerse en términos de derivadas del valor esperado de un Wilson loop circular

$$B(\lambda, N) = \frac{1}{4\pi^2} \partial_n \log |\langle W_n \rangle|_{n=1}. \quad (3.3)$$

Aquí, W_n denota un Wilson loop circular BPS que recorre n veces una trayectoria circular. Esta curva se define sobre un círculo maximal en la esfera S^3 en la que se define la teoría¹. Para el caso de un *cusp* geométrico deformando una línea 1/6 BPS (bosónico), la correspondiente expresión exacta para el Wilson loop circular 1/6 BPS fue calculada en [14, 111, 13]. Estas expresiones fueron utilizadas en [15] para obtener expansiones explícitas para $B(\lambda)$, válidas en ambos regímenes del acoplamiento. Para el caso de un *cusp* geométrico sobre una línea de Wilson 1/2 BPS, el uso

¹Para localizar el valor esperado a un modelo de matrices es necesario definir la teoría sobre la esfera S^3 .

de (3.3) para calcular $B(\lambda, N)$ fue brevemente discutida en [15]. Luego, en [126] se obtuvieron expansiones explícitas para este caso, observando un desacuerdo con los resultados a 1-loop en acoplamiento fuerte calculados en [129]. Tratar de comprender esta discrepancia ha sido otra motivación importante para realizar el análisis presentado en este capítulo.

Además, para entender el origen del desacuerdo entre el resultado exacto [15] y el cómputo semiclásico [129], emplearemos un método alternativo para el cálculo de la función de partición de cuerdas que describen un *cusp* (geométrico e interno) en la frontera de $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$. Luego compararemos los resultados obtenidos con las correspondientes expresiones exactas.

3.1 Función de partición de cuerdas y energía de vacío

El cómputo de la función de partición a 1-loop sobre un espacio-tiempo estático con métrica g implica calcular determinantes de ciertos operadores \mathcal{O}_g . Típicamente, esto se logra obteniendo el espectro de autofunciones de \mathcal{O}_g , en signatura Euclídea, y para un dado conjunto de condiciones de contorno. A este procedimiento lo denominamos método *off-shell*. Alternativamente, para espacios-tiempos estáticos, existe otro camino posible: en signatura Lorentziana, \mathcal{O}_g provee una ecuación de onda cuyas soluciones dan lugar un espectro de estados. Es un resultado bien conocido que la energía de vacío de este sistema, es decir, la suma de las frecuencias que componen el espectro de soluciones de la ecuación de onda, coincide con el determinante de \mathcal{O}_g , siempre y cuando $g^{00} = 1$ [134]. A este procedimiento se lo denomina método *on-shell*. Por lo tanto, para aplicar el método *on-shell* es necesario rescalear el operador \mathcal{O}_g tal que esta última condición sea satisfecha. En general, la energía de vacío estará relacionada al determinante del operador $\tilde{\mathcal{O}}_g = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{O}_g$, con $\mathcal{M} = g^{00}$. El análisis realizado en [135], difiere del original por un término anómalo. Sin embargo, en [136] se observa que el método *on-shell* aún puede ser aplicado para calcular la función de partición a 1-loop siempre y cuando haya una cancelación entre los términos de anomalía conforme provenientes del rescaleo de los operadores correspondientes a los distintos modos.

Como se explica en [136], esta cancelación ocurre para el caso del espectro 1-loop correspondiente a una cuerda que describe una línea recta en el borde de $AdS_5 \times S^5$, por lo que la corrección 1-loop a la función de partición puede calcularse mediante el método *on-shell*. En esta sección mostraremos que este procedimiento también aplica para el caso de una cuerda describiendo una línea recta en el borde de $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$. Incluso veremos que la cancelación de anomalías también ocurre para una configuración de cuerdas que describe una recta con un *cusp*, tanto en el espacio geométrico como en el espacio interno.

3.1.1 Rescaleo de los operadores 1-loop

En resumen, queremos probar si, en analogía con algunos Wilson loops en teoría de cuerdas tipo IIB sobre $AdS_5 \times S^5$, es posible calcular la corrección 1-loop para la función de partición en términos de la energía de vacío, *i.e.* la suma de los modos de oscilador correspondientes a los operadores que actúan sobre las fluctuaciones 1-loop. Para que este resultado sea correcto, debemos rescalear los operadores cuadráticos por un factor $\mathcal{M} = g^{00}$ [134]. Esto puede lograrse mediante una redefinición del producto interno, equivalente a una transformación de Weyl de la métrica. A nivel cuántico, un rescaleo conforme de la métrica da lugar a una anomalía conforme, la cual depende de los campos involucrados y de las ecuaciones de movimiento que satisfacen, [135, 58, 60].

Consideremos un operador general de segundo orden actuando sobre un campo escalar

$$(\phi, \Delta^B \phi) = \int d^2\sigma \sqrt{g} (g^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi + X \phi^2), \quad (3.4)$$

donde el término de “masa” X puede ser una función arbitraria de σ .

A su vez, definimos la medida en el espacio de funciones escalares de tal modo que escalea con una función arbitraria \mathcal{M}

$$(\phi, \phi') = \int d^2\sigma \sqrt{g} \mathcal{M} \phi \phi', \quad (3.5)$$

el determinante que naturalmente resulta de la interacción gaussiana en la integral funcional es entonces

$$\det \Delta_{\mathcal{M}}^B = \det \mathcal{M}^{-1} (-\nabla_g^2 + X), \quad (3.6)$$

donde ∇_g^2 es el Laplaciano escalar para la métrica arbitraria g_{ij} .

La anomalía conforme que resulta de este rescaleo puede calcularse mediante la expansión del *Heat Kernel* correspondiente al operador

$$\log \det \Delta_{\mathcal{M}}^B = - \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{dt}{t} \text{Tr} \exp(-t \Delta_{\mathcal{M}}^B), \quad (3.7)$$

donde Λ^{-2} es un cut-off introducido para regularizar la divergencia de la integral en $t \rightarrow 0$. Haciendo uso de $\delta \Delta_{\mathcal{M}}^B = -\delta \log \mathcal{M} \Delta_{\mathcal{M}}^B$ se obtiene

$$\delta \log \det \Delta_{\mathcal{M}}^B = \text{Tr} (\exp(-t \Delta_{\mathcal{M}}^B) \delta \log \mathcal{M}) |_{\Lambda^{-2}}^{\infty}. \quad (3.8)$$

Para un operador definido positivo, no hay contribución del límite $t \rightarrow \infty$, por lo que sólo debemos considerar el límite $t \rightarrow 0$. En este régimen, la expansión del *Heat Kernel* resulta

$$\text{Tr} (\exp(-t \Delta_{\mathcal{M}}^B) \delta \log \mathcal{M}) \sim \frac{1}{t^{d/2}} \sum_n a_n (\delta \log \mathcal{M} | \Delta_{\mathcal{M}}^B) t^n, \quad (3.9)$$

donde d es la dimensión de la variedad donde se define el operador y a_n denota los coeficientes de Seeley. Dado que la variedad en nuestro problema de interés posee frontera, n toma valores sobre los enteros y semienteros positivos.

Para $d = 2$, las contribuciones divergentes son proporcionales a Λ^2 , Λ y $\log \Lambda$, e involucran los coeficientes a_0 , $a_{1/2}$ y a_1 . Se puede ver que estos términos no dependen de la función de rescaleo \mathcal{M} , [135, 136], por lo que no son relevantes en este análisis. Por otro lado, la contribución importante proviene del término finito, el cual depende únicamente de a_1 (mas términos de borde irrelevantes). Concluimos entonces que

$$\delta \log \det \Delta_{\mathcal{M}}^B = -a_1 (\delta \log \mathcal{M} | \Delta_{\mathcal{M}}^B) . \quad (3.10)$$

El coeficiente de Seeley a_1 para este tipo de operadores es conocido, obteniéndose la anomalía conforme en términos de una acción tipo Liouville para \mathcal{M}

$$\log \det \Delta_{\mathcal{M}}^B - \log \det \Delta^B = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \left(\log \mathcal{M} \left(\frac{1}{6} R^{(2)} - X \right) + \frac{1}{12} \partial^i \log \mathcal{M} \partial_i \log \mathcal{M} \right) , \quad (3.11)$$

donde $R^{(2)}$ es la curvatura escalar para la métrica g_{ij} . Para $\mathcal{M} = \frac{1}{\sqrt{g}}$ podemos integrar por partes y reescribir (3.11) de la forma

$$\log \det \Delta_{\mathcal{M}}^B - \log \det \Delta^B = +\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \left(\log \mathcal{M} X + \frac{1}{12} \partial^i \log \mathcal{M} \partial_i \log \mathcal{M} \right) . \quad (3.12)$$

Consideremos ahora la acción para un operador fermniónico D_F

$$\int d^2\sigma \sqrt{g} \bar{\psi} D_F \psi , \quad (3.13)$$

con la medida en el espacio de funciones definida

$$(\psi, \psi') = \int d^2\sigma \sqrt{g} \mathcal{K} \bar{\psi} \psi' . \quad (3.14)$$

En este caso, el operador de segundo orden relevante en el cálculo de la función integral es $\Delta_{\mathcal{K}}^F = (\mathcal{K}^{-1} D_F)^2$, cuya variación es

$$\delta \log \Delta_{\mathcal{K}}^F = \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} dt \text{Tr} \exp(-t \Delta_{\mathcal{K}}^F) (\delta \mathcal{K}^{-1} D_F \mathcal{K}^{-1} D_F + \mathcal{K}^{-1} D_F \delta \mathcal{K}^{-1} D_F) . \quad (3.15)$$

Debido a la presencia de la traza, ambos términos conmutan, obteniendo

$$\delta \log \Delta_{\mathcal{K}}^F = -2 \text{Tr} \exp(-t \Delta_{\mathcal{K}}^F) \delta \log \mathcal{K} |_{\Lambda^{-2}}^{\infty} . \quad (3.16)$$

Como se hizo para el caso bosónico, podemos calcular la anomalía en términos de los coeficientes de Seeley de $\Delta_{\mathcal{K}}^F$

$$\delta \log \det \Delta_{\mathcal{K}}^F = -2a_1 (\delta \log \mathcal{K} | \Delta_{\mathcal{K}}^F) . \quad (3.17)$$

Notar que, para funciones \mathcal{K} no triviales, esto es en general diferente de $\mathcal{K}^{-2} D_F^2$ debido a los términos lineales en derivadas actuando sobre \mathcal{K}^{-1} . Por lo tanto, es necesario calcular los coeficientes de Seeley para $(\mathcal{K}^{-1} D_F)^2$, los cuales son en general distintos de los correspondientes a $\mathcal{K}^{-2} D_F^2$.

Consideremos

$$D_F^2 = -\hat{\nabla}^2 + \frac{1}{4}R^{(2)} + Y, \quad (3.18)$$

donde $\hat{\nabla}$ involucra la conexión de espín e Y es un potencial arbitrario. Para esta clase de operadores, el coeficiente de Seeley a_1 también se conoce [136]. Por lo tanto, la anomalía resulta

$$\log \det \Delta_{\mathcal{K}}^F - \log \det \Delta^F = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \left(\log \mathcal{K} \left(\frac{1}{6}R^{(2)} + 2Y \right) + \frac{1}{6} \partial^i \log \mathcal{K} \partial_i \log \mathcal{K} \right), \quad (3.19)$$

y para $\mathcal{K} = \frac{1}{(\sqrt{g})^{1/2}}$ lo podemos reescribir como

$$\log \det \Delta_{\mathcal{K}}^F - \log \det \Delta^F = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \left(\log \mathcal{K}(2Y) - \frac{1}{6} \partial^i \log \mathcal{K} \partial_i \log \mathcal{K} \right). \quad (3.20)$$

Esta última expresión es válida para operadores fermiónicos 2-dimensionales, es decir, actuando sobre campos que satisfacen las propiedades de transformación usuales de un campo fermiónico 2-dimensional bajo transformaciones de Lorentz o conformes. Sin embargo, en la formulación de Green-Schwartz (GS), los campos fermiónicos son escalares anticonmutantes de la hoja de mundo, en el sentido de que, ante transformaciones de Lorentz y conformes sobre la hoja de mundo, transforman como escalares. En este caso, el término proporcional a $R^{(2)}$ es cuatro veces el correspondiente a un fermión 2-dimensional estándar [136]. Teniendo esto en cuenta obtenemos

$$\log \det \Delta_{\mathcal{K}}^F - \log \det \Delta^F = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \left(\log \mathcal{K}(2Y) - \frac{2}{3} \partial^i \log \mathcal{K} \partial_i \log \mathcal{K} \right). \quad (3.21)$$

Ahora que podemos cuantificar la contribución individual de escalares y fermiones de GS a la anomalía conforme, estamos en posición de derivar una condición que garantice que la función de partición es invariante ante este tipo de rescaleos.

Con este propósito, consideremos las fluctuaciones escalares sobre una dada configuración clásica de cuerdas. En general, la acción puede escribirse de la forma

$$S_{1-loop}^B = \int d^2\sigma \sqrt{g} \left(g^{ij} \partial_i \phi^a \partial_j \phi^a + X_{ab} \phi^a \phi^b \right), \quad (3.22)$$

donde está implícita la suma sobre $a = 1, \dots, 10$ y g_{ij} es la métrica inducida para una configuración clásica general. Todos los posibles potenciales y términos de masa están contenidos en la matriz X_{ab} . Dado que trabajamos en el gauge conforme, este Lagrangeano contiene tanto las fluctuaciones de los modos transversales como las de los longitudinales.

Por otro lado, el Lagrangeano para los modos fermiónicos es

$$S_{1-loop}^F = \int d^2\sigma \sqrt{g} \bar{\psi}^a (D_F)_{ab} \psi^b, \quad (3.23)$$

donde $a = 1, \dots, 8$ recorre los 8 modos fermiónicos de GS, los cuales poseen a su vez 2 componentes cada uno. Los correspondientes operadores cuadráticos resultan

$$(D_F)_{(ab)}^2 \psi^b = (D^2 \delta_{ab} + Y_{ab}) \psi^b, \quad (3.24)$$

donde D^2 es el cuadrado del término cinético estándar para cada fermión de GS y la matriz Y_{ab} da cuenta de todos los posibles potenciales y términos de masa.

Finalmente, para los campos de *ghost* que resultan de fijar el gauge conforme, y usando $\mathcal{K} = (\sqrt{g})^{-1/2}$, la anomalía resulta

$$\log \det \Delta_{\mathcal{K}}^{gh} - \log \det \Delta^{gh} = -\frac{26}{12} \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \partial^i \log \mathcal{K} \partial_i \log \mathcal{K}. \quad (3.25)$$

Dados los términos anómalos (3.12), (3.21) y (3.25) podemos ver que la cancelación de la anomalía total es equivalente a la condición , [136],

$$\text{Tr}X = \text{Tr}Y. \quad (3.26)$$

Los resultados presentados en el Apéndice D fueron calculados en [129] en el gauge estático (formulación de Nambu-Goto). Para evaluar la ecuación (B.27) en esta configuración debemos notar que, siendo \bar{X} la matriz de “masa” que se obtiene en el gauge estático, se relaciona con la correspondiente matriz X en el gauge conforme de la siguiente manera

$$\text{Tr}\bar{X} = \text{Tr}X - \text{Tr}^{long}X. \quad (3.27)$$

Debido a que $\text{Tr}^{long}X = -R^{(2)}$, la condición (B.27) puede ser expresada como

$$\text{Tr}\bar{X} - \text{Tr}Y = R^{(2)}. \quad (3.28)$$

En este punto, es importante recalcar que los argumentos que dan lugar a esta condición de invariancia frente a rescaleos son válidos para cualquier configuración de cuerdas. En particular, para la configuración correspondiente a una línea recta ($R^{(2)} = -2$), el espectro de fluctuaciones da lugar a una teoría de campos 2-dimensional sobre AdS_2 con 2 fermiones no-masivos, 6 con $Y_{aa} = m_F^2 = 1$, y

$$\bar{X}_{ab} = \text{diag} \left(R^{(2)} + 4, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right). \quad (3.29)$$

Por lo tanto la condición (3.28) se satisface, por lo que es posible calcular la función de partición a 1-loop mediante la energía de vacío (método *on-shell*).

Finalmente, para la configuración correspondiente al *cusps*, se puede ver que (3.28) es también válida, por lo que la anomalía total se cancela. Notar que este análisis es válido para valores arbitrarios de los parámetros que caracterizan el *cusps*. Esto justifica entonces el uso del método *on-shell* y en particular el cálculo de la energía de vacío para calcular la función de partición a 1-loop correspondiente a una cuerda dual a un Wilson loop con *cusps* geométrico e interno, siendo esto justamente lo que haremos en las siguientes secciones.

3.1.2 Cuerda que describe una línea recta

Consideramos primero el caso de un Wilson loop sobre una línea recta, es decir, sin *cusp*. Expandiendo a segundo orden en las fluctuaciones de los campos sobre la solución clásica obtenemos la contribución 1-loop a la función de partición² [129]

$$Z_{1-loop} = \frac{\prod_j \det^{1/2}(i\tilde{\gamma}^a D_a - \tilde{\gamma}_* m_j)}{\det^{6/2}(-\nabla^2) \det^{1/2}(-\nabla^2 + R^{(2)} + 4) \det^{1/2}(-\nabla^2 + 2)}. \quad (3.30)$$

donde $\tilde{\gamma}^a$ representa las matrices gamma para la métrica inducida en la hoja de mundo 2-dimensional, $\tilde{\gamma}_* = \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\gamma_{ab}$ es la matriz quiral covariante y D_a la correspondiente derivada covariante espinorial (para más detalles, ver Apéndice D). En ausencia de *cusps*, la métrica inducida corresponde a una geometría AdS_2 , cuya curvatura es $R^{(2)} = -2$. El espectro de masas m_j ($j = 1, \dots, 8$) para los fermiones se relaciona directamente con los autovalores de la matriz M_F , proveniente de la expansión del Lagrangeano de GS, la cual puede expresarse en términos de las matrices de Dirac planas Γ en 10-dimensiones

$$M_F = \frac{i}{4} [(\Gamma_{49} - \Gamma_{57} + \Gamma_{68})\Gamma_{11} - 3\Gamma_{0123}]. \quad (3.31)$$

Elegimos una base para los espinores de 32 componentes de la forma $\Psi_{s_1, s_2, s_3, s_4}$, con $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ los autovalores de el conjunto conmutativo de bilineales $\{i\Gamma_{49}, i\Gamma_{57}, i\Gamma_{68}, i\Gamma_{23}\}$. A su vez, fijamos el gauge de simetría kappa tal que $\frac{1}{2}(1 + \Gamma_{01}\Gamma_{11})\Psi = \Psi$. Con todo esto, y eligiendo una base conveniente para las matrices de Dirac tal que los bilineales recién mencionados sean diagonales, es posible descomponer el espinor de Majorana de 32 componentes en 8 espinores de Majorana de 2 componentes cada uno con términos “quirales” de masa m_j tales que

$$m_j = 3s_1 s_2 s_3 + s_1 - s_2 + s_3, \quad (s_i = \pm 1), \quad (3.32)$$

Como resultados se obtienen: dos fermiones no-masivos, tres con masa $m_F = 1$, y 3 con masa $m_F = -1$. Por otro lado, notar que en (3.30) tenemos seis modos bosónicos no-masivos y dos con $m_B^2 = 2$. A su vez, la relación entre el espectro de masas de fermiones y bosones en una teoría supersimétrica en AdS_2 es $m_B^2 = m_F^2 - m_F$ [137]. Por lo tanto, inocentemente, uno hubiera esperado un espectro con dos modos fermiónicos no-masivos, cuatro modos con $m_F = 1$ y dos con $m_F = -1$ (o combinaciones consistentes con la relación de masas). Sin embargo, como se menciona en [136], la relación $m_B^2 = m_F^2 - m_F$ es válida para multipletes de supersimetría $\mathcal{N} = 1$, mientras que, para supersimetría extendida en AdS_2 , como es nuestro caso, la relación $m_B^2 = m_F^2 + m_F$ también es posible.

²Aquí hemos hecho uso de la cancelación entre los modos longitudinales y los provenientes de los *ghost*, por lo que los escalares corresponden a los modos transversales

En particular, estamos interesados en calcular la energía de vacío de los modos *on-shell*, en lugar de calcular directamente los determinantes que aparecen en (3.30). Esto corresponde al cociente de determinantes de operadores bosónicos rescaleados por $g^{1/2}$ y operadores fermiónicos rescaleados con $g^{1/4}$. Como se mencionó previamente, los términos de anomalía se cancelan, por lo que este método es válido para calcular (3.30).

Para obtener la energía de vacío debemos sumar sobre las frecuencias de los modos de oscilador *on-shell*, es decir, el espectro de soluciones de la ecuación de ondas en signatura Lorentziana. Para campos escalares y fermiónicos con masas m_B y m_F sobre AdS_2 , estas frecuencias fueron calculadas en [137]

$$\omega_n^B = n + \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4m_B^2} \right). \quad (3.33)$$

$$\omega_n^F = \begin{cases} n - m_F + \frac{1}{2}, & \text{if } m_F < \frac{1}{2}, \\ n + m_F + \frac{1}{2}, & \text{if } m_F > -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.34)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$. En general, estas sumas son divergentes, pero pueden ser diagonalizadas mediante continuación analítica usando la función zeta de Hurwitz

$$\zeta_H(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{-s}. \quad (3.35)$$

En el presente caso, solamente necesitamos la función zeta de Hurwitz evaluada en $s = -1$, cuyo resultado es regular e igual a

$$\zeta_H(-1, x) = -\frac{1}{2} \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right). \quad (3.36)$$

Por lo tanto, para el caso del Wilson loop recto, se obtiene

$$\frac{1}{T} \log Z_{1-loop} = \frac{1}{2} \left(6\zeta_H(-1, \frac{3}{2}) + 2\zeta_H(-1, \frac{1}{2}) - 2\zeta_H(-1, 2) - 6\zeta_H(-1, 1) \right) = 0. \quad (3.37)$$

Notar que este resultado para la función de partición es el esperado, ya que una cuerda que describe una línea recta en la frontera es una configuración 1/2 BPS que preserva cargas super-Poincaré puras, por lo que la función de partición está protegida por supersimetría (a diferencia del Wilson loop circular, que preserva combinaciones no triviales entre cargas super-Poincaré y superconformes).

En [129], sin embargo, se encuentra una función de partición no trivial a 1-loop para la línea recta, lo que contradice el resultado esperado por consideraciones de supersimetría. Presumiblemente, el resultado obtenido en [129] se debe a una simplificación entre los determinantes correspondientes a los modos fermiónicos no-masivos y dos de los modos bosónicos no-masivos (ver (D.26)). De hecho, si en (3.37) omitimos la contribución de los modos que se simplifican en [129], habríamos obtenido

$$\frac{1}{2} \left(6\zeta_H(-1, \frac{3}{2}) - 2\zeta_H(-1, 2) - 4\zeta_H(-1, 1) \right) = -\frac{1}{8}, \quad (3.38)$$

que coincide justamente con el resultado reportado en [129].

El cálculo descrito por las expresiones (3.33)-(3.37) muestra, como es de esperarse, que los determinantes para modos no masivos fermiónicos y bosónicos no se cancelan entre sí cuando se definen para distintas condiciones de contorno. De hecho, este es el caso cuando las excitaciones forman un multiplete supersimétrico [137].

3.1.3 Cuerda que describe un *cusp* geométrico

Consideremos ahora la hoja de mundo de una cuerda que termina en una recta con un *cusp* geométrico con ángulo ϕ y sin *cusp* interno, *i.e.* $\theta = 0$ (ver Apéndice D). La contribución a 1-loop a la función de partición está dada formalmente por (3.30), sólo que ahora las derivadas covariantes y la curvatura escalar serán los de la correspondiente métrica inducida sobre la hoja de mundo

$$ds^2 = \frac{1 - k^2}{\text{cn}^2(\sigma|k^2)} (-d\tau^2 + d\sigma^2), \quad \text{con} \quad -\mathbb{K}(k^2) < \sigma < \mathbb{K}(k^2). \quad (3.39)$$

En esta última expresión $\text{cn}(\sigma|k^2)$ denota la función elíptica de Jacobi, mientras que $\mathbb{K}(k^2)$ es la integral elíptica completa del primer tipo [138]. El parámetro k^2 se relaciona directamente con el ángulo del *cusp* geométrico ϕ de la solución clásica. Para ángulos pequeños, es decir $\phi \ll 1$, esta relación se simplifica drásticamente, a saber $\phi \approx \pi k$. Para simplificar la notación, omitiremos la dependencia en k^2 en las funciones elípticas. La curvatura escalar para la métrica inducida (3.39) es

$$R^{(2)} = -2 \left(1 + \frac{k^2}{1 - k^2} \text{cn}^4(\sigma) \right). \quad (3.40)$$

Del mismo modo que se hizo para la línea recta, estudiaremos la energía de vacío de los modos *on-shell* correspondiente al cociente de los operadores debidamente rescaleados. Para reducir el problema a un problema unidimensional, transformamos Fourier en la variable temporal y obtenemos los siguientes operadores:

- Los ocho fermiones satisfacen³

$$\left(i \left(\partial_\sigma + \frac{\text{sn}(\sigma)\text{dn}(\sigma)}{2\text{cn}(\sigma)} \right) \gamma^1 + \omega_n \gamma^0 - m_F \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\text{cn}(\sigma)} \right) \Psi_n = 0. \quad (3.41)$$

donde γ^a son las matrices de Dirac para espacio plano 2-dimensional. Seis de estos campos fermiónicos poseen $m_F = \pm 1$ y los otros dos poseen $m_F = 0$.

- Siete de los modos escalares satisfacen

$$\left(\partial_\sigma^2 + \omega_n^2 - \frac{m_B^2(1 - k^2)}{\text{cn}^2(\sigma)} \right) \phi_n = 0, \quad (3.42)$$

³Aquí hemos reabsorbido la matriz quiral presente en (3.30) mediante una redefinición de los campos fermiónicos y de las matrices de Dirac 2-dimensionales.

seis de los cuales poseen $m_B^2 = 0$ y uno $m_B^2 = 2$. La ecuación para el octavo escalar, cuyo potencial depende de la curvatura escalar de la hoja de mundo $R^{(2)}$, es de la forma

$$\left(\partial_\sigma^2 + \omega_n^2 - \frac{2(1-k^2)}{\text{cn}^2(\sigma)} + 2k^2 \text{cn}^2(\sigma) \right) \phi_n = 0. \quad (3.43)$$

Para $k = 0$, estos operadores se reducen a los correspondientes modos de Dirac y Klein-Gordon sobre AdS_2 que conforman el espectro del Wilson loop recto discutido anteriormente.

Presentaremos ahora las soluciones para las correspondientes ecuaciones de onda para los modos en AdS_2 ($k = 0$), las cuales han sido obtenidas en [137], ya que serán útiles en lo que sigue.

Fermiones: Dependiendo del valor de la masa, existen dos posibles soluciones pertenecientes a multipletes supersimétricos⁴:

(I) Para $m_F < 1/2$, denotamos al fermión por $\Psi_{m,n}^T = (\psi_{m,n}^1, \psi_{m,n}^2)$ tal que

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}^1(\sigma) &= \frac{[n!\Gamma(n-2m+1)]^{\frac{1}{2}}}{2^{-m}\Gamma(n-m+\frac{1}{2})} \cos^{-m+\frac{1}{2}}(\sigma) \cos\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\pi}{4}\right) P_n^{(-m+\frac{1}{2}, -m-\frac{1}{2})}(\sin \sigma), \\ \psi_{m,n}^2(\sigma) &= -\frac{[n!\Gamma(n-2m+1)]^{\frac{1}{2}}}{2^{-m}\Gamma(n-m+\frac{1}{2})} \cos^{-m+\frac{1}{2}}(\sigma) \sin\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\pi}{4}\right) P_n^{(-m-\frac{1}{2}, -m+\frac{1}{2})}(\sin \sigma), \end{aligned} \quad (3.44)$$

donde P_n representa a los polinomios de Jacobi.

(II) Para $m_F > -1/2$, escribimos al fermión como $X_{m,n}^T = (\chi_{m,n}^1, \chi_{m,n}^2)$ y sus componentes resultan

$$\begin{aligned} \chi_{m,n}^1(\sigma) &= \frac{[n!\Gamma(n+2m+1)]^{\frac{1}{2}}}{2^m\Gamma(n+m+\frac{1}{2})} \cos^{m+\frac{1}{2}}(\sigma) \sin\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\pi}{4}\right) P_n^{(m-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2})}(\sin \sigma), \\ \chi_{m,n}^2(\sigma) &= \frac{[n!\Gamma(n+2m+1)]^{\frac{1}{2}}}{2^m\Gamma(n+m+\frac{1}{2})} \cos^{m+\frac{1}{2}}(\sigma) \cos\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\pi}{4}\right) P_n^{(m+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2})}(\sin \sigma). \end{aligned} \quad (3.45)$$

El espectro de frecuencias para estas funciones de onda están dadas por (3.34) y la normalización es tal que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\cos \sigma} \Psi_{m,n}^\dagger \Psi_{m,n'} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\cos \sigma} X_{m,n}^\dagger X_{m,n'} = \delta_{nn'}. \quad (3.46)$$

Bosones: Las soluciones a la ecuación de Klein-Gordon en AdS_2 pueden escribirse de la siguiente manera

$$\phi_{\lambda,n}(\sigma) = \frac{\sqrt{n!(2n+2\lambda)\Gamma(n+2\lambda)}}{2^\lambda\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})} \cos^\lambda \sigma P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\sin \sigma), \quad (3.47)$$

con frecuencias $\omega_n = n + \lambda$ y $\lambda = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4m^2})$ (cf. (3.33)). Estas funciones de onda están normalizadas de manera tal que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\sigma \phi_{\lambda,n}^* \phi_{\lambda,n'} = \delta_{nn'}. \quad (3.48)$$

Todos estos modos satisfacen condiciones de contorno tipo Dirichlet en la frontera de AdS_2 .

⁴La base de matrices gamma utilizadas en(3.41) es $\gamma^a = (\sigma^1, i\sigma^3)$.

Para la ecuación escalar no-masiva ($\lambda = 1$), existe una segunda solución que satisface condiciones de contorno tipo Neumann para $\sigma = \pm\pi/2$ [137]

$$\phi_{0,n}(\sigma) = \frac{\sqrt{n!(n-1)!2n}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\sin \sigma), \quad (3.49)$$

y las correspondientes frecuencias son $\omega_n = n$.

Ahora bien, dado que estamos considerando configuraciones de cuerdas localizadas en un punto particular en el espacio interno \mathbb{CP}^3 , impondremos a los 6 modos escalares no-masivos que satisfagan condiciones tipo Dirichlet, ya que estos modos corresponden a las fluctuaciones en el espacio interno. De esta manera, utilizaremos los modos dados por (3.47). En el caso de las excitaciones fermiónicas no-masivas, en principio hay dos posibilidades permitidas, a saber $\Psi_{0,n}$ o $X_{0,n}$. Sin embargo, sólo para una elección específica, el espectro de excitaciones conforma un multiplete de $\mathcal{N} = 6$. Volveremos a este punto más adelante.

Para el caso de la línea recta 1/6 BPS (Wilson loop bosónico, para más detalles sobre estos operadores ver capítulo 2), la configuración dual corresponde a un promedio de cuerdas (*smearing*) realizado a lo largo de un $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^3$ [117, 118, 119]. Esto implica que, para estas direcciones en el espacio interno, la cuerda no está localizada, lo que se traduce en que dos de los modos escalares no-masivos satisfagan condiciones tipo Neumann. Si repitiéramos el cálculo realizado en (3.37), pero ahora con dos de los modos escalares no-masivos dados por (3.49), el resultado aún sería nulo debido a que $\sum_{n=0} (n+1) = \sum_{n=0} n$. En la sección 3.3 consideraremos la posibilidad de utilizar (3.49) para estudiar un promedio de Wilson loops deformados por un *cusp* geométrico.

Para $k \neq 0$, las ecuaciones (3.41)-(3.43) pueden ser resueltas en términos de autofunciones de una ecuación de Lamé. Sin embargo, como sólo nos interesa el comportamiento dominante en el límite de k pequeño, haremos uso de las autofunciones correspondientes a AdS_2 ($k = 0$) (3.44), (3.45) y (3.47), y haremos un desarrollo estándar en teoría de perturbaciones.

Límite de ángulo de *cusp* pequeño

Ahora encendemos el parámetro k . Notar que esto no sólo transforma el término de masa constante en un potencial no trivial para las ecuaciones de Dirac y de Klein-Gordon en AdS_2 , sino que también afecta el rango del dominio de la coordenada σ . En este punto, es conveniente redefinir la variable de manera que el rango no dependa de k

$$\tilde{\sigma} = \frac{\pi\sigma}{2\mathbb{K}}, \quad \tilde{\sigma} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.50)$$

e introducir las frecuencias rescaleadas de manera acorde $\omega = \frac{\pi\tilde{\omega}}{2\mathbb{K}}$. Dadas esta definiciones, por ejemplo, la ecuación (3.42) toma la forma

$$\begin{aligned} & \left(\partial_{\tilde{\sigma}}^2 + \tilde{\omega}_n^2 - \left(\frac{2\mathbb{K}}{\pi}\right)^2 \frac{m_B^2(1-k^2)}{\text{cn}^2\left(\frac{2\mathbb{K}}{\pi}\tilde{\sigma}\right)} \right) \phi_n = 0 \\ & \xrightarrow{k \rightarrow 0} \left(\partial_{\tilde{\sigma}}^2 + \tilde{\omega}_n^2 - \frac{m_B^2}{\cos \tilde{\sigma}} + k^2 \frac{m_B^2}{2} + \mathcal{O}(k^4) \right) \phi_n = 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Las frecuencias perturbadas resultan

$$\tilde{\omega}_n^2 = (n + \lambda)^2 - k^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\tilde{\sigma} \phi_{\lambda,n}^* \frac{m_B^2}{2} \phi_{\lambda,n} = (n + \lambda)^2 - k^2 \frac{m_B^2}{2}. \quad (3.52)$$

Por lo que, para los 6 modos escalares no-masivos, tenemos

$$\omega_n = (n + 1) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) + \mathcal{O}(k^4), \quad (3.53)$$

y cada uno contribuye a la energía de vacío con

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \zeta_H(-1, 1) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) + \mathcal{O}(k^4). \quad (3.54)$$

La perturbación de la frecuencia del modo escalar con $m_B^2 = 2$ es de la forma

$$\omega_n = (n + 2) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) - \frac{k^2}{2} \frac{1}{n + 2} + \mathcal{O}(k^4), \quad (3.55)$$

y la contribución a la energía de vacío resulta

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \zeta_H(-1, 2) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) - \frac{k^2}{4} \zeta_H(1, 2) + \mathcal{O}(k^4). \quad (3.56)$$

El término $\zeta_H(1, 2) = \zeta_H(1, 1) - 1$ proveniente del segundo término en (3.55) es naturalmente divergente. Sin embargo, como veremos en breve, esta divergencia se cancelará con otras divergencias provenientes de los otros modos.

Por su parte, el último modo escalar, cuya ecuación es (3.43), toma la forma

$$\left(\partial_{\tilde{\sigma}}^2 + \tilde{\omega}_n^2 - \frac{2}{\cos^2 \tilde{\sigma}} + k^2 (1 + 2 \cos^2 \tilde{\sigma}) + \mathcal{O}(k^4) \right) \phi_n = 0, \quad (3.57)$$

donde

$$\tilde{\omega}_n^2 = (n + 2)^2 - k^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\tilde{\sigma} \phi_{2,n}^* (1 + 2 \cos^2 \tilde{\sigma}) \phi_{2,n} = (n + 2)^2 - k^2 \frac{2(n + 2)^2}{(n + 1)(n + 3)}, \quad (3.58)$$

implicando que

$$\omega_n = (n + 2) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) - \frac{k^2}{n + 1} + \frac{k^2}{(n + 1)(n + 3)} + \mathcal{O}(k^4). \quad (3.59)$$

La contribución de este modo a la energía de vacío es entonces

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \zeta_H(-1, 2) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) - \frac{k^2}{2} \zeta_H(1, 1) + \frac{3k^2}{8} + \mathcal{O}(k^4). \quad (3.60)$$

Ahora nos concentraremos en las fluctuaciones fermiónicas. Expandiendo la ecuación (3.41) se obtiene

$$\left(i \left(\partial_{\tilde{\sigma}} + \frac{1}{2} \tan \tilde{\sigma} \right) \gamma^1 + \tilde{\omega}_n \gamma^0 - \frac{m_F}{\cos \tilde{\sigma}} + i \frac{k^2}{8} \sin 2\tilde{\sigma} \gamma^1 + \frac{k^2}{4} m_F \cos \tilde{\sigma} + \mathcal{O}(k^4) \right) \Psi_n = 0. \quad (3.61)$$

Ahora bien, usando las autofunciones para $k = 0$, las frecuencias perturbadas resultan

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_n = n - m_F + \frac{1}{2} - i \frac{k^2}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tilde{\sigma}}{\cos \tilde{\sigma}} \sin 2\tilde{\sigma} \Psi_{m_F, n}^\dagger \gamma^{01} \Psi_{m_F, n} \\ - \frac{k^2}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tilde{\sigma}}{\cos \tilde{\sigma}} m_F \cos \tilde{\sigma} \Psi_{m_F, n}^\dagger \gamma^0 \Psi_{m_F, n}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

para los modos fermiónicos con $m_F < 1/2$, o bien

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_n = n + m_F + \frac{1}{2} - i \frac{k^2}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tilde{\sigma}}{\cos \tilde{\sigma}} \sin 2\tilde{\sigma} X_{m_F, n}^\dagger \gamma^{01} X_{m_F, n} \\ - \frac{k^2}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tilde{\sigma}}{\cos \tilde{\sigma}} m_F \cos \tilde{\sigma} X_{m_F, n}^\dagger \gamma^0 X_{m_F, n}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

para los modos fermiónicos con $m_F > -1/2$.

La contribución de la perturbación de la conexión de espín se anula debido a que

$$\Psi_{m_F, n}^\dagger \gamma^{01} \Psi_{m_F, n} = X_{m_F, n}^\dagger \gamma^{01} X_{m_F, n} = 0. \quad (3.64)$$

Calculando la integral, para $m_F = \pm 1$, obtenemos

$$\tilde{\omega}_n = n + \frac{3}{2} - \frac{k^2}{8} \frac{2n+3}{(n+2)(n+1)}, \Rightarrow \omega_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) - \frac{k^2}{4} \frac{1}{n+1} + \frac{k^2}{8} \frac{1}{(n+2)(n+1)}. \quad (3.65)$$

Entonces, cada uno de estos modos contribuye a la energía de vacío con

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \zeta_H\left(-1, \frac{3}{2}\right) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) - \frac{k^2}{8} \zeta_H(1, 1) + \frac{k^2}{16} + \mathcal{O}(k^4). \quad (3.66)$$

Finalmente, para los modos fermiónicos con $m_F = 0$, las frecuencias son $\tilde{\omega} = n + \frac{1}{2}$ y la corrección a las misma proviene esencialmente del cambio en el rango de la variable σ . Su contribución a la energía de vacío es entonces

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \zeta_H\left(-1, \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) + \mathcal{O}(k^4). \quad (3.67)$$

Ahora recolectamos todas las contribuciones para evaluar la función de partición a 1-loop. Tenemos 2 fluctuaciones fermiónicas no-masivos (3.67), 6 modos fermiónicos con masas $m_F = \pm 1$ (3.66), 6 fluctuaciones escalares no masivas (3.54) y dos modos escalares con $m_B^2 = 2$ (3.56) y (3.60),

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \log Z_{1-loop} = & 6 \left[\frac{1}{2} \zeta_H(-1, \frac{3}{2}) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) - \frac{k^2}{8} \zeta_H(1, 1) + \frac{k^2}{16} \right] + \frac{2}{2} \zeta_H(-1, \frac{1}{2}) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) \\ & - \frac{6}{2} \zeta_H(-1, 1) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) - \left[\frac{1}{2} \zeta_H(-1, 2) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) - \frac{k^2}{2} \zeta_H(1, 1) + \frac{3}{8} k^2 \right] \\ & - \left[\frac{1}{2} \zeta_H(-1, 2) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) - \frac{k^2}{4} \zeta_H(1, 2) \right] = -\frac{k^2}{4}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Recalcamos que, en este límite, $k^2 = \frac{\phi^2}{\pi^2}$ y la dimensión anómala a 1-loop resulta

$$\Gamma_{\text{cusp}}^{1-loop} = \frac{\phi^2}{4\pi^2} + \mathcal{O}(\phi^4). \quad (3.69)$$

Notar que este resultados difiere del obtenido en [129]. Volveremos brevemente a este punto al final de esta sección.

A esta altura, y para verificar que el cálculo de la energía de vacío da lugar a la contribución correcta a la función de partición, usaremos los resultados obtenidos arriba para reproducir la función de Bremsstrahlung a 1-loop para una cuerda en $AdS_5 \times S^5$. En este caso, todas las fluctuaciones fermiónicas tendrían $m_F = \pm 1$, 5 fluctuaciones escalares serían no-masivas, mientras que los tres modos bosónicos restantes tendrían $m_B^2 = 2$. De estos últimos, dos contribuyen con (3.56) y el tercero con (3.60). En este caso, la función de partición a 1-loop resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \log Z_{1-loop} = & 8 \left[\frac{1}{2} \zeta_H(-1, \frac{3}{2}) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) - \frac{k^2}{8} \zeta_H(1, 1) + \frac{k^2}{16} \right] \\ & - \frac{5}{2} \zeta_H(-1, 1) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) - \left[\frac{1}{2} \zeta_H(-1, 2) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) - \frac{k^2}{2} \zeta_H(1, 1) + \frac{3}{8} k^2 \right] \\ & - 2 \left[\frac{1}{2} \zeta_H(-1, 2) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) - \frac{k^2}{4} \zeta_H(1, 2) \right] = -\frac{3k^2}{8}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

por lo que, dada la relación $\log Z = -\Gamma_{\text{cusp}} T$, y haciendo uso de (D.23), se obtiene

$$\Gamma_{\text{cusp}}^{1-loop} = \frac{3\phi^2}{8\pi^2} + \mathcal{O}(\phi^4), \quad \text{para } AdS_5 \times S^5, \quad (3.71)$$

lo cual está en perfecto acuerdo con los resultados presentados en [138].

Finalmente, haremos algunos comentarios relacionados a los resultados obtenidos aquí, en comparación con otros obtenidos anteriormente. En estudios previos realizados sobre sistemas similares, los determinantes fueron calculados para pequeños ángulos de *cusp* mediante la reducción

a operadores diferenciales ordinarios 1-dimensionales y utilizando el método de Gelfand-Yaglom [139, 140, 138, 129, 141]. En el caso de cuerdas en $AdS_5 \times S^5$, nuestro resultado coincide con los obtenidos en [138]. Por otro lado, para cuerdas en $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$, nuestros resultados difieren de los encontrados [129]. Esta discrepancia puede entenderse debido a la imposición de diferentes condiciones de contorno para los modos no-masivos. En 2 dimensiones, el operador de Dirac puede reducirse a la forma correspondiente a espacio plano mediante un rescaleo del espinor con $g^{1/4}$. De los modos fermiónicos en AdS_2 (3.44), luego de este rescaleo, se obtiene la siguiente solución espinorial para la ecuación de Dirac no-masiva en espacio plano

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{0,n}^1(\sigma) &\equiv g^{1/4}\psi_{0,n}^1(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\sigma - \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right) \\ \tilde{\psi}_{0,n}^2(\sigma) &\equiv g^{1/4}\psi_{0,n}^2(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\sigma - \left(n + \frac{5}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\quad (3.72)$$

Cada componente de estas soluciones, con $\omega = n + \frac{1}{2}$, satisface condiciones de contorno tipo Dirichlet en uno de los extremos de AdS y condiciones tipo Neumann en el otro. A su vez, se puede ver que estas soluciones cierran un multiplete de supersimetría en AdS_2 junto con los correspondientes modos escalares que se utilizaron en nuestro cálculo. Existen también otras soluciones con $\omega = n$. Estas últimas, en cambio, satisfacen condiciones de contorno tipo Dirichlet en ambos extremos para una de las componentes, y condiciones tipo Neumann en ambos extremos para la otra componente. Sin embargo, estas soluciones alternativas no forman un multiplete supersimétrico en AdS_2 con los modos escalares que tuvimos en cuenta en este capítulo.

Al aplicar el método *off-shell* para calcular los determinantes a 1-loop, la elección de las condiciones de contorno que se imponen sobre el espectro lógicamente impacta en el resultado obtenido. En [129], se imponen condiciones de contorno de Dirichlet para las fluctuaciones fermiónicas. Por lo tanto, el determinante de los correspondientes operadores cuadráticos, cuyo espectro es $\lambda_n = \tilde{\omega}^2 + n^2$, se simplifica entonces con el determinante de los modos no-masivos escalares, los cuales satisfacen también condiciones de tipo Dirichlet.

Analicemos brevemente cómo se modificaría el resultado de [129] si los determinantes para los modos fermiónicos no-masivos se calcularan con condiciones de contorno Dirichlet-Neumann. El correspondiente espectro sería entonces de la forma $\lambda_n = \tilde{\omega}^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, por lo que esta contribución no se cancelaría ahora con la de los modos escalares. Haciendo uso de

$$\frac{\det(\partial_\sigma^2 - \tilde{\omega}^2)_{DN}}{\det(\partial_\sigma^2 - \tilde{\omega}^2)_{DD}} = \tilde{\omega} \coth(\tilde{\omega}\pi), \quad (3.73)$$

es fácil ver que el cambio en el resultado final para la dimensión anómala de *cusp* en el límite de $\phi \ll 1$ sería entonces

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_\phi &= -\frac{T}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \log(\coth^2(2K\omega)) = -\frac{T\pi}{16K} \\ &= -T \left(\frac{1}{8} - \frac{k^2}{32} + \mathcal{O}(k^4) \right).\end{aligned}\quad (3.74)$$

Notar que el resultado reportado en [129], una vez corregido por (3.74), estaría en completo acuerdo con nuestro resultado.

3.1.4 Cuerda que describe una línea recta con un *cusp* interno

En este límite, la métrica inducida es nuevamente (3.39), sin embargo, los términos de masa en los operadores cuadráticos son distintos. Las ecuaciones para las fluctuaciones fermiónicas son de la forma

$$\left(i \left(\partial_\sigma + \frac{\text{sn}(\sigma)\text{dn}(\sigma)}{2\text{cn}(\sigma)} \right) \gamma^1 + \omega_n \gamma^0 - m_F(\sigma) \frac{\sqrt{1-k^2}}{\text{cn}(\sigma)} \right) \Psi_n = 0. \quad (3.75)$$

donde ahora

$$m_F(\sigma) = \frac{1}{4} \left(s_1 - s_2 + \frac{\text{dn}(\sigma)}{\sqrt{1-k^2}} s_3 \right) + \frac{3}{4} \frac{\text{dn}(\sigma)}{\sqrt{1-k^2}} s_1 s_2 s_3. \quad (3.76)$$

Tres de los modos escalares satisfacen la ecuación

$$\left(\partial_\sigma^2 + \omega_n^2 - \frac{m_B^2(1-k^2)}{\text{cn}^2(\sigma)} - k^2 \right) \phi_n = 0, \quad (3.77)$$

dos con $m_B^2 = 2$ y uno con $m_B^2 = 0$. Por su parte, cuatro de los campos escalares restantes satisfacen

$$\left(\partial_\sigma^2 + \omega_n^2 - \frac{k^2}{4} \right) \phi_n = 0, \quad (3.78)$$

mientras que el último obedece la siguiente ecuación

$$\left(\partial_\sigma^2 + \omega_n^2 + 2k^2 \text{cn}^2(\sigma) - k^2 \right) \phi_n = 0. \quad (3.79)$$

Límite de ángulo de *cusp* pequeño

En el límite de k^2 pequeño, la Eq. (3.77) toma la forma

$$\left(\partial_{\tilde{\sigma}}^2 + \tilde{\omega}_n^2 - \frac{m_B^2}{\cos^2 \tilde{\sigma}} - k^2 \left(1 - \frac{m_B^2}{2} \right) + \mathcal{O}(k^4) \right) \phi_n = 0, \quad (3.80)$$

Por lo tanto, los dos modos con $m_B^2 = 2$ quedan sin perturbar a este orden, obteniendo entonces

$$\omega_n = (n+2) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right). \quad (3.81)$$

Su contribución a la energía de vacío es entonces

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \zeta_H(-1, 2) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right). \quad (3.82)$$

Por su parte, para el modo con $m_B^2 = 0$ se tiene que

$$\omega_n = (n+1) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) + \frac{k^2}{2} \frac{1}{n+1}, \quad (3.83)$$

y, sumando estas frecuencias corregidas, obtenemos la contribución correspondiente a la energía de vacío

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \zeta_H(-1, 1) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) + \frac{k^2}{4} \zeta_H(1, 1). \quad (3.84)$$

Similarmente, para los cuatro modos que satisfacen (3.78)

$$\omega_n = (n+1) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) + \frac{k^2}{8} \frac{1}{n+1}, \quad (3.85)$$

cada uno dando la lugar a la siguiente contribución

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \zeta_H(-1, 1) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) + \frac{k^2}{16} \zeta_H(1, 1). \quad (3.86)$$

Por otro lado, la expansión de (3.79) da

$$(\partial_{\tilde{\sigma}}^2 + \tilde{\omega}_n^2 + k^2 \cos 2\tilde{\sigma} + \mathcal{O}(k^2)) \phi_n = 0, \quad (3.87)$$

para el cual

$$\tilde{\omega}_n^2 = (n+1)^2 - k^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\tilde{\sigma} \phi_{1,n}^* \cos^2 \tilde{\sigma} \phi_{1,n} = (n+1)^2 - \frac{k^2}{2} \delta_{n0}, \quad (3.88)$$

y su contribución a la energía de vacío resulta

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \zeta_H(-1, 1) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) - \frac{k^2}{8} + \mathcal{O}(k^4). \quad (3.89)$$

Para obtener la contribución de los modos fermiónicos, expandimos (3.76) en el límite k pequeño, para las 8 combinaciones etiquetadas por (s_1, s_2, s_2) . Tenemos cuatro modos con $m_F = \pm 1$, para los cuales la ecuación perturbada en la variable rescaleada es⁵

$$\left(i \left(\partial_{\tilde{\sigma}} + \frac{\tan \tilde{\sigma}}{2}\right) \gamma^1 + \tilde{\omega}_n \gamma^0 - \frac{m_F}{\cos \tilde{\sigma}} - k^2 \frac{m_F}{4} \cos \tilde{\sigma}\right) \Psi_n = 0. \quad (3.90)$$

Las frecuencias corregidas son entonces

$$\omega_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) + \frac{k^2}{4} \frac{1}{n+1} - \frac{k^2}{8} \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad (3.91)$$

por lo que la suma sobre las frecuencias de oscilador resulta

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \zeta_H(-1, \frac{3}{2}) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) + \frac{k^2}{8} \zeta_H(1, 1) - \frac{k^2}{16}. \quad (3.92)$$

Para los dos modos restantes, con $m_F = \pm 1$, el potencial se anula

$$\left(i \left(\partial_{\tilde{\sigma}} + \frac{\tan \tilde{\sigma}}{2}\right) \gamma^1 + \tilde{\omega}_n \gamma^0 - \frac{m_F}{\cos \tilde{\sigma}}\right) \Psi_n = 0, \quad (3.93)$$

⁵De aquí en adelante omitiremos la perturbación de la conexión de espín debido a que su contribución a las frecuencias corregidas es nula.

y las frecuencias son simplemente

$$\omega_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right), \quad (3.94)$$

cuya suma resulta en

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \zeta_H(-1, \frac{3}{2}) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right). \quad (3.95)$$

Por su parte, para los dos modos no-masivos

$$\left(i(\partial_{\tilde{\sigma}} + \frac{\tan \tilde{\sigma}}{2}) \gamma^1 + \tilde{\omega}_n \gamma^0 \pm \frac{k^2}{4} \cos \tilde{\sigma}\right) \Psi_n = 0, \quad (3.96)$$

donde el signo \pm corresponde a $(s_1 s_2 s_3)$ igual a $(+-+)$ y $(-+-)$ respectivamente. En este punto, es necesario decidir cuál de los dos modos fermiónicos presentados ($\Psi_{0,n}$ o $X_{0,n}$) debemos utilizar para calcular la corrección perturbativa a las frecuencias. Como fue anticipado, sólo para una elección particular se tiene que el conjunto de fluctuaciones forma un multiplete de supersimetría $\mathcal{N} = 6$. En adición a esto, y como se mencionó previamente, la configuración clásica para la cuerda con ángulos de *cusp* $\theta = \pm\phi$ preserva cargas super-Poincaré, por lo que la dimensión anómala de *cusp* debe depender, genéricamente, de $(\phi^2 - \theta^2)$. Por o tanto, de todas las elecciones posibles, tomaremos la que de lugar al mismo resultado, a menos de un signo, que se obtuvo para la dimensión anómala de *cusp* en el caso geométrico. Para que esto ocurra, debemos tomar $X_{0,n}$ para $(+-+)$ y, por otro lado, $\Psi_{0,n}$ para $(-+-)$, lo que nos lleva a la siguiente contribución para ambos modos

$$\omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) - \frac{k^2}{8} \delta_{n0}, \quad (3.97)$$

y entonces

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \zeta_H(-1, \frac{1}{2}) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) - \frac{k^2}{16}. \quad (3.98)$$

Por último, sumamos todas las contribuciones a la energía de vacío a orden k^2

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \log Z_{1-loop} &= 4 \left[\frac{1}{2} \zeta_H(-1, \frac{3}{2}) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) + \frac{k^2}{8} \zeta_H(1, 1) - \frac{k^2}{16} \right] + 2 \left[\frac{1}{2} \zeta_H(-1, \frac{1}{2}) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) - \frac{k^2}{16} \right] \\ &\quad + \frac{2}{2} \zeta_H(-1, \frac{1}{2}) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) \\ &\quad - \frac{2}{2} \zeta_H(-1, 2) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) - \left[\frac{1}{2} \zeta_H(-1, 1) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) - \frac{k^2}{8} \right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{2} \zeta_H(-1, 1) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) + \frac{k^2}{4} \zeta_H(1, 1) \right] - 4 \left[\frac{1}{2} \zeta_H(-1, 1) \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) + \frac{k^2}{16} \zeta_H(1, 1) \right] \\ &= -\frac{k^2}{4}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

En este límite, $k^2 = -\frac{\theta^2}{\pi^2}$. Por lo tanto, al dimensión anómala de *cusp* resulta

$$\Gamma_{cusp}^{1-loop} = -\frac{\theta^2}{4\pi^2} + \mathcal{O}(\theta^4). \quad (3.100)$$

Esto es consistente con el hecho de que el Wilson loop con un *cusp* tal que $\theta = \pm\phi$, preserva cagas super-Poincaré [130], por lo que su valor esperado está protegido a todo orden en la constante de acoplamiento. En otras palabras, la función de Bremsstrahlung a 1-loop en la expansión a acoplamiento fuerte es

$$B^\phi = B^\theta = \frac{\sqrt{2\lambda\pi^2}}{4\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^{-1/2}). \quad (3.101)$$

De la misma manera que se hizo en la sección anterior, podemos usar este método para obtener la función de partició a 1-loop para una cuerda que describe un *cusp* interno en $AdS_5 \times S^5$. En este caso, tenemos ocho fermiones con $m_F = \pm 1$, contribuyendo cada uno con (3.92), cuatro modos escalares no-masivos para los que usamos (3.84), tres escalares con $m_B^2 = 2$ dando lugar a (3.82) y finalmente un modo escalar acoplado a la curvatura de la hoja de mundo cuya contribución es (3.89)

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \log Z_{1-loop} = & 8 \left[\frac{1}{2} \zeta_H(-1, \frac{3}{2}) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) + \frac{k^2}{8} \zeta_H(1, 1) - \frac{k^2}{16} \right] \\ & - 4 \left[\frac{1}{2} \zeta_H(-1, 1) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) + \frac{k^2}{4} \zeta_H(1, 1) \right] - \frac{3}{2} \zeta_H(-1, 2) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) \\ & - \left[\frac{1}{2} \zeta_H(-1, 1) \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) - \frac{k^2}{8} \right] = -\frac{3k^2}{8}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

De la relación $\log Z = -\Gamma_{cusp} T$ y de (D.30) tenemos que

$$\Gamma_{cusp}^{1-loop} = -\frac{3\theta^2}{8\pi^2} + \mathcal{O}(\theta^4), \quad \text{para } AdS_5 \times S^5, \quad (3.103)$$

en total acuerdo con los resultados a 1-loop obtenidos en [138].

3.2 Expresión exacta para la función de Bremsstrahlung en ABJM

La dimensión anómala de *cusp* en el límite de ángulo pequeño está dada por la función de Bremsstrahlung

$$\Gamma_{cusp} = -B(\lambda, N)\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^4). \quad (3.104)$$

Esta función de Bremsstrahlung ha sido relacionada al valor esperado de ciertos operadores BPS, específicamente Wilson loops circulares, para los cuales se conocen resultados exactos [15]

$$B(\lambda, N) = \frac{1}{4\pi^2} \partial_n \log |\langle W_n \rangle|_{n=1}, \quad (3.105)$$

donde W_n es un Wilson loop definido sobre una trayectoria que se enrolla n veces sobre el círculo maximal en la esfera S^3 .

En esta sección, repasaremos la expansión a acoplamiento fuerte de la función de Bremsstrahlung, la cual puede obtenerse de (3.105). En primer lugar, para el Wilson loop circular 1/6 BPS (bosónico) que se enrolla múltiples veces, la expansión a acoplamiento fuerte es [13],

$$\langle W_n \rangle = \frac{i^n e^{\pi n \sqrt{2\lambda}}}{\lambda} \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{4\pi n} - \frac{H_n}{4\pi^2 n} - \frac{i}{8\pi n} - \frac{1}{96} + \left(\frac{i}{192} + \frac{\pi n}{4608} + \frac{H_{n-1}}{96\pi} \right) \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \right), \quad (3.106)$$

donde H_n denota a los números armónicos. Introduciendo esta expansión en (3.105) da la función de Bremsstrahlung que se obtiene de deformar el Wilson loop recto 1/6 BPS con un pequeño *cusp* [15]

$$B^{1/6}(\lambda) = \frac{\sqrt{2\lambda\pi^2}}{4\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} + \left(\frac{1}{4\pi^2} - \frac{5}{96} \right) \frac{1}{\sqrt{2\lambda\pi^2}} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}). \quad (3.107)$$

Para obtener el resultado correspondiente a deformar el Wilson loop recto 1/2 BPS con un pequeño *cusp*, debemos hacer uso del valor esperado exacto para el Wilson loop 1/2 BPS que se enrolla múltiples veces sobre una trayectoria circular [13]

$$\langle W_n^{1/2} \rangle = \langle W_n \rangle - e^{in\pi} \langle \overline{W}_n \rangle, \quad (3.108)$$

donde W_n corresponde al resultado anterior para el Wilson loop 1/6 BPS y $\langle \overline{W}_n \rangle$ es el complejo conjugado de $\langle W_n \rangle$. Introduciendo este valor esperado en (3.105), obtenemos entonces

$$B^{1/2}(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \partial_n \log(\langle W_n \rangle + \langle \overline{W}_n \rangle) \Big|_{n=1} - \frac{i}{8\pi} \frac{\langle W_1 \rangle - \langle \overline{W}_1 \rangle}{\langle W_1 \rangle + \langle \overline{W}_1 \rangle}. \quad (3.109)$$

Notar que la derivada $\partial_n(\langle W_n \rangle + \langle \overline{W}_n \rangle)$ se anula para $n = 1$, teniendo que

$$B^{1/2}(\lambda) = \frac{1}{8\pi} \frac{\text{Im}(\langle W_1 \rangle)}{\text{Re}(\langle W_1 \rangle)}. \quad (3.110)$$

A su vez, usando la expansión (3.106), se obtiene [126]

$$B^{1/2}(\lambda) = \frac{\sqrt{2\lambda\pi^2}}{4\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{96} \frac{1}{\sqrt{2\lambda\pi^2}} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}). \quad (3.111)$$

Remarcablemente, los primeros dos órdenes en (3.111) están en completo acuerdo con el resultado (3.101), obtenido en la sección 3.1.

3.3 Deformaciones tipo *cusp* sobre líneas de Wilson 1/6 BPS

Los resultados obtenidos para la dimensión anómala para un *cusp* geométrico en la sección 3.1.3 y para un *cusp* interno en la sección 3.1.4, son consistentes con la cancelación de la dimensión anómala

esperada para el caso supersimétrico $\theta = \pm\phi$. A su vez, la función Bremsstrahlung encontrada en este límite de acoplamiento fuerte (3.101) está en perfecto acuerdo con la correspondiente expansión del resultado exacto (3.111) que se presenta en la sección 4.24.

Finalmente, haremos algunos comentarios sobre la función de Bremsstrahlung resultante para la inserción de un pequeño *cusp* geométrico sobre el Wilson loop bosónico recto 1/6 BPS. Desde el punto de vista de teoría de cuerdas, este tipo de Wilson loops se interpreta en términos de un conjunto de configuraciones promediadas sobre un $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^3$. Esto correspondería a imponer condiciones de contorno tipo Neumann para las fluctuaciones escalares a en las direcciones del \mathbb{CP}^1 [15].

Por lo tanto, para calcular Z_{1-loop} para una deformación de *cusp* geométrico sobre una línea de Wilson 1/6 BPS, deberíamos repetir el cálculo perturbativo realizado en las secciones anteriores, sólo que reemplazando dos de los modos escalares con condiciones de contorno tipo Dirichlet por los correspondientes modos con condiciones tipo Neumann. A su vez, deberíamos reemplazar los modos fermiónicos no masivos $\Psi_{0,n}$ por los $X_{0,n}$ y viceversa. Sin embargo, en este caso, la perturbación de los modos escalares no-masivos es nula, ya se use (3.47) o (3.49). Lo mismo ocurre para los modos no-masivos fermiónicos por lo que, al orden considerado, el resultado para Z_{1-loop} es el mismo que se obtiene para la deformación de *cusp* de una línea de Wilson 1/2 BPS

$$B_{1/6}^\phi = \frac{\sqrt{2\lambda\pi^2}}{4\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^{-1/2}), \quad (3.112)$$

lo cual está en perfecto acuerdo con (3.107).

Para un *cusp* interno, en cambio, la configuración dual de cuerdas posee un perfil no trivial dentro de \mathbb{CP}^3 . El promedio de este tipo de configuraciones no posee aún una interpretación geométrica clara [133].

Capítulo 4

Defectos holográficos en teorías conformes

En el contexto de la dualidad AdS/CFT, el estudio de intersecciones de D3-D p branas ha dado lugar a la realización de teorías conformes más que interesantes. En el límite de horizonte cercano (NH) una única D p -brana no afecta la geometría, la cual corresponde a $AdS_5 \times S^5$. En este capítulo nos concentraremos en descripciones duales de este tipo de arreglos. En particular, las mismas dan cuenta de teorías de campos en presencia de una interfaz (o defecto) que separa dos dominios descritos por teorías $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills con grupo de gauge $SU(N)$ y $SU(N - k)$ respectivamente.

En general, para una intersección del tipo D3-D5, el defecto posee co-dimensión 1, es decir, es una superficie 3-dimensional. En este caso, esta superficie estará localizada en $x_3 = 0$. Consideremos ahora k D3-branas, pertenecientes al arreglo de N D3-branas que genera la geometría (ver sección 1.1.3), las cuales terminan sobre un arreglo de M D5-branas en $x_3 = 0$. Esto conlleva a un rompimiento del grupo de gauge de la teoría dual. De hecho, el grupo de gauge será $SU(N - k)$ para $x_3 > 0$, mientras que será $SU(N)$ para $x_3 < 0$ [142]. A su vez, la teoría dual introduce M hipermultipletes fundamentales que viven en el defecto 3-dimensional, los cuales interactúan con los campos del multiplete vectorial de $\mathcal{N} = 4$ SYM. Esta teoría es en general superconforme para cualquier valor de M [143]. Sin embargo, en el límite NH, la realización en términos de M D5-branas en $AdS_5 \times S^5$ es válida para $M \ll N$, de tal manera que el arreglo de D5-branas no afecte la geometría del espacio *target*. En particular, en este capítulo nos concentraremos en el caso $M = 1$. El grupo de supersimetría se rompe a $OSp(4|4) \subset PSU(2, 2|4)$ y, en consecuencia, el multiplete vectorial de $\mathcal{N} = 4$ se descompone en un multiplete vectorial y un hipermultiplete en 3 dimensiones. Análogamente, el grupo de simetría R se rompe de la siguiente manera $SU(4) \rightarrow SO(3)_V \times SO(3)_H$, donde los subíndices V y H indican sobre el multiplete que actúa el correspondiente $SO(3)$.

Estas construcciones de branas intersecantes extendieron el campo de acción y permitieron generalizar todo el conjunto de herramientas desarrolladas en realizaciones previas de la dualidad AdS/CFT. En particular, la correspondencia estado-operador fue establecida en el límite BMN [144], mientras que el operador de dilatación fue mapeado a una cadena de espín integrable en el sector escalar [145]. A su vez, la integrabilidad de estas realizaciones, tanto desde el punto de vista de la teoría de gauge como en teoría de cuerdas, fue extensamente estudiada mediante la construcción del correspondiente *ansatz* de Bethe y la obtención de configuraciones de cuerdas que terminen en la D5-brana [146, 147, 148, 149].

Por otro lado, existe una característica novedosa e inherente a estas construcciones, a saber, que el rompimiento de la simetría de gauge es inducido por el valor esperado no-trivial adquirido por k componentes de los campos escalares [150, 151, 152]¹. De hecho, existe una prescripción precisa para calcular estos objetos del lado de la teoría de gravedad. Los valores esperados de este tipo de operadores han sido estudiados tanto en el límite de acoplamiento débil como para acoplamiento fuerte, tanto para realizaciones D3-D7 no-supersimétricas [153] como para realizaciones D3-D5 supersimétricas [154, 155]. Más aún, las funciones de un punto correspondientes a operadores no BPS de traza simple han sido estudiadas en términos de cadenas de espín integrables [156, 157, 158].

Finalmente, el hecho de poseer un parámetro adicional, a saber k , permite explorar nuevos regímenes paramétricos en este tipo de teorías con defectos. De hecho, una característica remarcable se observa al tomar cierto límite de escaleo doble [159, 160, 161]. Específicamente, los cálculos de gravedad, válidos para valores grandes de la constante de 't Hooft λ , pueden ser realizados para $k \rightarrow \infty$, de manera tal que λ/k^2 sea pequeño, por lo que los resultados se organizan en potencias de λ/k^2 . Por lo tanto, en este régimen es posible realizar una comparación directa con el desarrollo perturbativo realizado en la teoría de gauge, dando lugar a valiosos chequeos de precisión de la correspondencia gauge/gravedad.

En este capítulo, nos concentraremos en el cálculo de Wilson loops en el contexto de teorías con defectos, concentrándonos en la posibilidad de tomar el límite de escaleo doble, de manera tal de comparar resultados perturbativos con los correspondientes a teoría de cuerdas. Este tipo de cálculos de Wilson loops en presencia de defectos fue considerado inicialmente en [159, 160]. En particular, consideraremos Wilson loops circulares, análogos a los casos supersimétricos en $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills, los cuales han sido estudiados mediante técnicas de localización [93].

Específicamente, calcularemos el valor esperado de un Wilson loop circular de radio R localizado a una distancia L del defecto. Consideraremos el siguiente Wilson loop Euclídeo

$$W = \text{tr} \mathcal{P} \exp \left\{ \oint d\tau [iA_\mu \dot{x}^\mu - |\dot{x}|(\sin \chi \Phi_3 + \cos \chi \Phi_6)] \right\}, \quad (4.1)$$

¹Recordemos que, en una teoría que posee invariancia traslacional en todas las direcciones, las funciones de un punto son en general nulas.

donde χ es un parámetro angular que toma valores sobre el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Si parametrizamos el círculo de la siguiente manera

$$x^\mu(\tau) = (0, R \cos \tau, R \sin \tau, L) , \quad (4.2)$$

tenemos que

$$W = \text{tr} \mathcal{P} \exp \left\{ R \int_0^{2\pi} d\tau [-iA_1 \sin \tau + iA_2 \cos \tau - \sin \chi \Phi_3 - \cos \chi \Phi_6] \right\} = \text{tr} \mathcal{P} \exp \left\{ R \int d\tau \mathcal{A}(\tau) \right\} . \quad (4.3)$$

Notar que, por invariancia conforme, $\langle W \rangle$ sólo puede depender de R y L a través del cociente R/L . Dicho esto, el valor esperado $\langle W \rangle$ depende de los parámetros de la teoría de gauge λ , N y k , así como de los parámetros R/L y χ del Wilson loop. Exploraremos diferentes regímenes para estos parámetros: en el límite de acoplamiento débil a través de un desarrollo perturbativo en término de diagramas de Feynman, mientras que en el límite de acoplamiento fuerte se logrará mediante cálculos en teoría de cuerdas. A su vez, para el límite de escaleo doble, extrapolaremos los resultados obtenidos para acoplamiento débil y fuerte, tomando a su vez χ y L/R pequeños. También analizaremos los requerimientos que el operador debe satisfacer para compartir un subconjunto de las supersimetrías de la teoría preservadas por la interfaz. Este análisis de supersimetría se encuentra en el Apéndice B.4, donde se obtiene como condición que $\chi = 0$.

4.1 Cuerda clásica dual al Wilson loop circular

La realización holográfica de la teoría de gauge con el defecto consiste en teoría de cuerdas tipo IIB sobre $AdS_5 \times S^5$ en presencia de una D5-brana que, en la frontera de AdS , está localizada sobre la posición de la interfaz (*i.e.* $x_3 = 0$). Esta configuración de D5-brana corresponde a la solución extendida a lo largo de $AdS_4 \times S^2$ y con $\kappa = \frac{\pi k}{\sqrt{\lambda}}$ unidades de flujo magnético, que minimiza la acción de Dirac-Born-Infeld. Con esta definición, en el límite de escaleo doble en el cual $k \rightarrow \infty$ con $\frac{\lambda}{k^2}$ fijo y pequeño, el parámetro κ está fijo y toma valores grandes.

En este capítulo, consideraremos la métrica de AdS en el parche de Poincaré

$$ds_{AdS}^2 = \frac{1}{y^2} (-dt^2 + dy^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dx_3^2) , \quad (4.4)$$

mientras que para la esfera tenemos

$$ds_{S^5}^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_2^2 + \cos^2 \theta d\tilde{\Omega}_2^2 , \quad (4.5)$$

donde Ω_2 y $\tilde{\Omega}_2$ denotan dos esferas S^2 . En estas coordenadas, la solución para la D5-brana es

$$y = \frac{1}{\kappa} x_3 , \quad \mathcal{F} = -\kappa \epsilon_{\text{Vol}}(S^2) , \quad \theta = \frac{\pi}{2} . \quad (4.6)$$

donde \mathcal{F} denota el campo de gauge en el volumen de mundo y $\epsilon_{\text{Vol}}(S^2)$ es la forma ed volumen en la esfera S^2 .

En lo siguiente, consideraremos una cuerda fundamental que se extiende entre la frontera de AdS y la D5-brana. Para que esta cuerda sea dual al Wilson loop circular, impondremos que, sobre la frontera de AdS , la hoja de mundo describa un círculo de radio R localizado en $x_3 = L$.

Se propone el siguiente *ansatz*

$$y = y(\sigma), \quad r = r(\sigma), \quad \phi = \tau, \quad x_3 = x_3(\sigma), \quad \theta = \theta(\sigma). \quad (4.7)$$

Entonces, la acción de Polyakov en el gauge conforme toma la forma

$$S = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} \int d\tau d\sigma \frac{1}{y^2} (y'^2 + r'^2 + r^2 + x_3'^2 + y^2 \theta'^2), \quad (4.8)$$

mientras que la condición de Virasoro resulta

$$y'^2 + r'^2 + x_3'^2 + y^2 \theta'^2 = r^2. \quad (4.9)$$

Las ecuaciones de movimiento para x_3 y θ dan lugar a dos constantes de movimiento

$$x_3' = -cy^2, \quad \theta' = m, \quad (4.10)$$

y las ecuaciones para $y(\sigma)$ y $r(\sigma)$ son

$$yy'' + r'^2 + r^2 - y'^2 + c^2 y^4 = 0, \quad yr'' - 2r'y' - yr = 0. \quad (4.11)$$

Como queremos que la cuerda termine sobre la D5-brana, a las ecuaciones (4.11) se las complementa con las siguientes condiciones de contorno sobre la D5-brana

$$\begin{aligned} y'(\tilde{\sigma}) - \kappa cy^2(\tilde{\sigma}) &= 0, & r'(\tilde{\sigma}) &= 0, \\ y(\tilde{\sigma}) - \frac{1}{\kappa} x_3(\tilde{\sigma}) &= 0, & \theta(\tilde{\sigma}) &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde $\tilde{\sigma}$ denota el valor máximo que toma la variable σ . Por otro lado, las condiciones sobre la frontera de AdS , localizada en $\sigma \rightarrow 0$, son

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, & r(0) &= R, \\ x_3(0) &= L, & \theta(0) &= \chi. \end{aligned} \quad (4.13)$$

En función de la ecuación (4.10), se encuentra que la solución para θ

$$\theta(\sigma) = m\sigma + \chi, \quad (4.14)$$

donde $\chi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, es el valor de θ en la frontera, y se corresponde con el parámetro χ del Wilson loop (4.3).

Para valores generales de c y m , encontrar una solución exacta a estas ecuaciones es un problema muy complicado. Empezaremos por presentar la solución para $c = 0$ y luego haremos una expansión alrededor de la misma.

4.1.1 Solución para $c = 0$

En este límite, χ deja de ser un parámetro independiente. De hecho, pasará a depender de una manera no trivial del parámetro m . Eventualmente, estaremos interesados en tomar el límite de k grande, lo que equivale a m grande y $\chi \rightarrow 0$. Incluso en este límite, estableceremos una comparación no trivial con resultados provenientes de teoría de gauge. Para $c = 0$, x_3 es constante y se desacopla de las ecuaciones de movimiento para $y(\sigma)$ y $r(\sigma)$, las cuales toman la forma²

$$yy'' + 2(r')^2 + m^2y^2 = 0, \quad yr'' - 2y'r' - yr = 0. \quad (4.15)$$

Debido a que será conveniente más adelante, definimos una nueva variable

$$x = \sqrt{1 + m^2}\sigma, \quad (4.16)$$

y las ecuaciones (4.15) resultan

$$yy'' + 2(r')^2 + \frac{m^2}{1 + m^2}y^2 = 0, \quad yr'' - 2y'r' - \frac{yr}{1 + m^2} = 0, \quad (4.17)$$

donde ahora ' denota derivadas respecto a la variable x . Las soluciones a estas ecuaciones, una vez impuestas las condiciones de contorno (4.13), pueden ser expresadas en términos de las funciones elípticas de Jacobi, a saber

$$y(x) = y_0(x) = \frac{R}{\sqrt{1 + m^2}} \operatorname{sn}\left(x, \frac{1}{1 + m^2}\right), \quad (4.18)$$

$$r(x) = r_0(x) = R \operatorname{dn}\left(x, \frac{1}{1 + m^2}\right). \quad (4.19)$$

A su vez, es fácil ver que $y^2 + r^2 = R^2$ y que también satisfacen la condición de Virasoro (4.9). La primer condición de contorno en (4.12) impone

$$\operatorname{cn}\left(\tilde{x}_0, \frac{1}{1 + m^2}\right) \operatorname{dn}\left(\tilde{x}_0, \frac{1}{1 + m^2}\right) = 0, \quad (4.20)$$

la cual relaciona $\tilde{x}_0 = \sqrt{1 + m^2}\tilde{\sigma}_0$, el valor máximo que puede tomar la variable x , con el parámetro m . Tanto cn como dn son funciones bi-locales y poseen ceros en $(2n + 1)\mathbb{K}\left(\frac{1}{1 + m^2}\right) + i2n'\mathbb{K}\left(\frac{m^2}{1 + m^2}\right)$ y $(2n + 1)\mathbb{K}\left(\frac{1}{1 + m^2}\right) + i(2n' + 1)\mathbb{K}\left(\frac{m^2}{1 + m^2}\right)$ respectivamente, donde \mathbb{K} denota la integral elíptica completa del primer tipo y $n, n' \in \mathbb{Z}$. El primer cero real ocurre para $n = n' = 0$, obteniendo entonces

$$\tilde{x}_0 = \mathbb{K}\left(\frac{1}{1 + m^2}\right). \quad (4.21)$$

La última ecuación (4.12) establece la relación entre los parámetros χ y m

$$\chi = \frac{\pi}{2} - m\tilde{\sigma}_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}\mathbb{K}\left(\frac{1}{1 + m^2}\right) \quad (4.22)$$

²Notar que hemos usado la condición de Virasoro en la ecuación para $y(\sigma)$.

Dado que eventualmente tomaremos el límite κ grande, deberíamos antes establecer la relación entre κ y m . Esta relación se obtiene de la tercera ecuación en (4.12), la cual implica

$$m = \sqrt{\left(\frac{\kappa R}{L}\right)^2 - 1}. \quad (4.23)$$

Para evaluar la acción *on-shell*, debemos regularizar el volúmen de la hoja de mundo mediante la introducción de un cut-off ϵ en el límite inferior de integración de la variable σ . El término divergente se cancela mediante la introducción de un término de borde. Por lo tanto, la acción regularizada resulta

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+m^2}} \int_{\text{reg}}^{\tilde{x}_0} dx \frac{r_0^2}{y_0^2} = \frac{\sqrt{\lambda}}{1+m^2} \left(m^2 \mathbb{K}\left(\frac{1}{1+m^2}\right) - (1+m^2) \mathbb{E}\left(\frac{1}{1+m^2}\right) \right) \\ &= \frac{\pi k R}{L} \left(1 - \frac{\lambda L^2}{\pi^2 k^2 R^2} \right) \mathbb{K}\left(\frac{\lambda L^2}{\pi^2 k^2 R^2}\right) - \frac{\pi k R}{L} \mathbb{E}\left(\frac{\lambda L^2}{\pi^2 k^2 R^2}\right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde \mathbb{E} la integral elíptica completa del segundo tipo. Para valores grandes de $\kappa = \frac{\pi k}{\sqrt{\lambda}}$ se obtiene un expansión en potencias de $\frac{\lambda L^2}{k^2 R^2}$

$$S_0 = -\frac{k R \pi^2}{L} \left(\frac{1}{4} \frac{\lambda L^2}{\pi^2 k^2 R^2} + \frac{1}{32} \frac{\lambda^2 L^4}{\pi^4 k^4 R^4} + \frac{3}{256} \frac{\lambda^3 L^6}{\pi^6 k^6 R^6} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda L^2}{k^2 R^2}\right)^4 \right). \quad (4.25)$$

Notar que el parámetro efectivo de esta expansión puede ser pequeño, incluso cuando λ es grande, siempre y cuando $\frac{k^2 R^2}{L^2}$ sea mucho más grande. Como veremos en la sección 4.2, el desarrollo perturbativo para valor esperado del Wilson loop en el régimen de acoplamiento débil también se organiza naturalmente en una expansión en potencias de $\frac{\lambda L^2}{k^2 R^2}$. Por lo tanto, la acción clásica (4.25) es entonces una predicción para la contribución de los sucesivos órdenes en loops para el valor esperado de un Wilson loop circular de radio R , a una distancia L del defecto, con el acoplamiento escalar χ dado por

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \sqrt{1 - \frac{\lambda L^2}{\pi^2 k^2 R^2}} \mathbb{K}\left(\frac{\lambda L^2}{\pi^2 k^2 R^2}\right) = \left(\frac{1}{8} \frac{\lambda L^2}{k^2 R^2 \pi^2} + \frac{7}{128} \frac{\lambda^2 L^4}{k^4 R^4 \pi^4} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda L^2}{k^2 R^2}\right)^3 \right). \quad (4.26)$$

El primer término en la expansión (4.25) será contrastado con un cálculo perturbativo a 1-loop en el régimen de acoplamiento débil, verificando el resultado obtenido aquí.

4.1.2 Solución para $c \neq 0$

En la subsección anterior, hemos encontrado una expansión en potencias λ/k^2 para el valor esperado de un Wilson loop circular acoplado en el espacio interno con un ángulo χ muy específico (4.26). Lógicamente, una solución más general que incluya correcciones en potencias del parámetro c resulta en un arreglo mucho más interesante. De hecho, luego mostraremos que (4.26) no se corresponde con ninguna configuración supersimétrica, lo cual es otra motivación para buscar soluciones con valores más generales de χ .

Sin embargo, debido a que encontrar una solución exacta para c y m arbitrario es muy difícil, propondremos una expansión en c alrededor de $c = 0$ de la forma³

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + cy_1(x) + c^2y_2(x) + \mathcal{O}(c^3), \\ r(x) &= r_0(x) + cr_1(x) + c^2r_2(x) + \mathcal{O}(c^3), \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde y_0 y r_0 fueron definidos en (4.19).

Por otro lado, los parámetros \tilde{x} , κ que entran en las condiciones de contorno (4.12), serán también funciones de c y m . Entonces, consideraremos las siguientes expansiones

$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 + c\tilde{x}_1 + c^2\tilde{x}_2 + \mathcal{O}(c^3), \quad (4.28)$$

$$\kappa = \kappa_0 + c\kappa_1 + c^2\kappa_2 + \mathcal{O}(c^3), \quad (4.29)$$

donde cada \tilde{x}_a y κ_a es una función de m . A su vez, el parámetro χ es también una función de c y m definida a través de

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} (\tilde{x}_0 + c\tilde{x}_1 + c^2\tilde{x}_2) + \mathcal{O}(c^3). \quad (4.30)$$

Eventualmente, nos gustaría reescribir todo en términos de κ y χ , en lugar de c y m , ya que son los parámetros naturales de la teoría de gauge. Esto puede ser logrado mediante una inversión, orden a orden, de las relaciones (4.29) y (4.30). El orden dominante para esta expansión es justamente la configuración presentada en la subsección anterior, la cual es exacta en m . Para los órdenes subsiguientes, obtener una expresión exacta en m es más difícil. Las expansiones obtenidas se presentan en el Apéndice E.

En estas expansiones, el límite de m grande corresponde a κ tomando valores grandes, lo cual es justamente el régimen en el que podemos comparar con los resultados perturbativos en acoplamiento débil. A su vez, se puede ver que el régimen de m grande y c pequeño implica también $\chi \rightarrow 0$, incluyendo por lo tanto el caso $\chi = 0$, el cual es particularmente interesante debido a que preserva supersimetría. Encontramos entonces que

$$\begin{aligned} m &= \left(\frac{R\kappa}{L} - \frac{L}{2R\kappa} - \frac{L(16L^2 + 4\pi^2R^2 + 5\pi^2L^2)}{128R^3\kappa^3} + \mathcal{O}(\kappa^{-5}) \right) \\ &\quad + \chi \left(\frac{\pi(2R^2 + 3L^2)}{8LR\kappa} + \frac{\pi L(92R^2 + 107L^2)}{128R^3\kappa^3} + \mathcal{O}(\kappa^{-5}) \right) - \chi^2 \left(\frac{R\kappa}{2L} + \frac{6R^2 + 7L^2}{4LR\kappa} + \mathcal{O}(\kappa^{-3}) \right), \\ c &= - \left(\frac{\pi L}{8R^2\kappa^2} + \frac{15\pi L^3}{128R^4\kappa^4} + \mathcal{O}(\kappa^{-6}) \right) + \chi \left(\frac{1}{L} + \frac{L}{2R^2\kappa^2} + \frac{3L(4L^2 + \pi^2R^2 + 2\pi^6L^2)}{32R^4\kappa^4} + \mathcal{O}(\kappa^{-6}) \right) \\ &\quad - \chi^2 \left(\frac{\pi(R^2 + 4L^2)}{8LR^2\kappa^2} + \frac{3\pi L(19R^2 + 34L^2)}{64R^4\kappa^4} + \mathcal{O}(\kappa^{-6}) \right) + \mathcal{O}(\chi^3), \end{aligned} \quad (4.32)$$

³Resulta conveniente introducir el parámetro rescaleado \tilde{c} tal que $c = \tilde{c}\sqrt{1+m^2}$. De aquí en adelante, la expansión se organizará en potencias de \tilde{c} , sin embargo omitiremos el símbolo $\tilde{\cdot}$ en la notación.

Usando las expansiones para calcular la acción *on-shell* regularizada se obtiene

$$S = -\frac{\pi Rk\chi}{L} - \frac{\lambda L}{8Rk} \left[1 - \frac{4\chi}{\pi} + \chi^2 \left(\frac{R^2}{L^2} + \frac{5}{2} \right) + \mathcal{O}(\chi^3) \right] \quad (4.33)$$

$$- \frac{\lambda^2 L^3}{128\pi^2 k^3 R^3} \left[5 - \frac{4\chi}{\pi} \left(4 + \pi^2 \left(\frac{R^2}{L^2} + \frac{7}{4} \right) \right) + \chi^2 \left(\frac{94R^2}{L^2} + \frac{233}{2} \right) + \mathcal{O}(\chi^3) \right] + k\mathcal{O} \left(\frac{\lambda^3}{k^6} \right)$$

En (4.33) hemos expandido hasta λ^2 y hasta χ^2 . Para obtener resultados válidos más allá del orden χ^2 es necesario resolver para órdenes superiores en c . La primera línea en (4.33) será contrastada con los resultados perturbativos a 1-loop.

4.2 Cálculo perturbativo

Ahora nos concentramos en la teoría de gauge para calcular el valor esperado del Wilson loop en el régimen de acoplamiento débil en teoría de perturbaciones. Algunos de los resultados obtenidos en esta sección son similares a los obtenidos en [159] para el caso de la línea recta en presencia de una interfaz.

La interfaz localizada en $x_3 = 0$ conecta dos teorías de gauge con grupos $SU(N)$ (para $x_3 < 0$) y $SU(N - k)$ (para $x_3 > 0$). Esto se logra permitiendo que 3 de los campos escalares de $\mathcal{N} = 4$ SYM, en particular Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 , adquieran un valor esperado no trivial en k de sus componentes a nivel clásico. Esto lógicamente resulta en un rompimiento de la simetría de gauge a uno de los lados del defecto, a través del mecanismo de Higgs. Para lograr esto de un modo consistente con supersimetría, los valores esperados a nivel clásico corresponden a las soluciones de “canal difuso” (*fuzzy funnel*) [152] de las ecuaciones de Nahm [162].

$$\langle \Phi_i \rangle_{cl} = -\frac{1}{x_3} t_i \oplus 0_{(N-k) \times (N-k)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.34)$$

donde el conjunto $\{t_i\}$ forma una representación k -dimensional del álgebra de $SU(2)$ [152, 160]. En particular, tenemos que, definiendo las matrices E_j^i de $k \times k$ tales que

$$E_j^i E_l^k = \delta_j^k E_l^i, \quad (4.35)$$

podemos representarlas de la siguiente manera

$$(E_j^i)_{ab} = \delta_{ia} \delta_{jb}. \quad (4.36)$$

En términos de estas matrices, podemos representar el álgebra de $SU(2)$ de la forma

$$t_+ = \sum_{i=1}^{k-1} c_{k,i} E_{i+1}^i, \quad t_- = \sum_{i=1}^{k-1} c_{k,i} E_i^{i+1}, \quad t_3 = \sum_{i=1}^k d_{k,i} E_i^i, \quad (4.37)$$

con

$$c_{k,i} = \sqrt{i(k-i)}, \quad d_{k,i} = \frac{1}{2}(k-2i+1). \quad (4.38)$$

Ahora bien, como es usual, se definen los campos cuánticos expandiendo alrededor de la solución clásica (4.34). La principal consecuencia de esto es la aparición de términos tipo “masa”, es decir cuadráticos en los campos, para algunas de las componentes de los campos cuánticos. En general, la matriz que involucra estos términos cuadráticos es no-diagonal en los índices de color de los campos. Sin embargo, esta estructura puede diagonalizarse definiendo una base adecuada [154, 155]. En la siguiente tabla presentamos la información concerniente a los términos de masa para los modos que usaremos en esta sección

Multiplicidad	$\nu(\Phi_{4,5,6}, A_{0,1,2}, c)$	$m(\psi_{1,2,3,4})$	$\nu(\Phi_{1,2,3}, A_3, c)$
j	$j + \frac{1}{2}$	$j + 1$	$j + \frac{3}{2}$
$j + 1$	$j + \frac{1}{2}$	$-j$	$j - \frac{1}{2}$
$(k - 1)(N - k)$	$\frac{k}{2}$	$\frac{k+1}{2}$	$\frac{k+2}{2}$
$(k + 1)(N - k)$	$\frac{k}{2}$	$-\frac{k-1}{2}$	$\frac{k-2}{2}$
$(N - k)(N - k)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

(4.39)

Tabla 4.1: Espectro de masas para los campos cuánticos.

donde $j = 1, \dots, k - 1$ y

$$\nu = \sqrt{m^2 + \frac{1}{4}}. \quad (4.40)$$

Por lo tanto, la ecuación resultante para el propagador escalar es de la forma⁴

$$\left(-\partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2}{(x_3)^2}\right) K(x, y) = \frac{g_{YM}^2}{2} \delta(x - y), \quad (4.41)$$

donde $\frac{m}{x_3}$ es el término de masa correspondiente a los modos escalares, provenientes del valor esperado clásico de los escalares en términos de la solución (4.34). En este contexto, m no debe confundirse con el parámetro m introducido en el cálculo gravitatorio de la sección 4.1. El valor de la masa m para cada modo escalar se reporta en la Tabla 4.39. La ecuación para el propagador puede resolverse en términos del propagador en AdS_4 , el cual satisface

$$(-\nabla^\mu \nabla_\mu + \tilde{m}^2) K_{AdS}(x, y) = \frac{\delta(x - y)}{\sqrt{g}}. \quad (4.42)$$

De esta manera, definimos

$$K(x, y) = \frac{g_{YM}^2 K_{AdS}(x, y)}{2x_3 y_3}, \quad (4.43)$$

⁴Dado que los modos fermiónicos no contribuyen al cálculo a 1-loop, no presentaremos el correspondiente propagador para estos modos.

la cual es solución para

$$\left(-\partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2}{(x_3)^2}\right) K(x, y) = \frac{g_{YM}^2}{2} \delta(x - y), \quad (4.44)$$

siempre y cuando $\tilde{m}^2 = m^2 - 2$. Usaremos la siguiente representación integral para el propagador

$$K_\nu(x, y) = \frac{g_{YM}^2 \sqrt{x_3 y_3}}{2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} I_\nu(|\vec{k}|x_3) K_\nu(|\vec{k}|y_3), \quad (4.45)$$

donde \vec{k} , \vec{x} y \vec{y} son vectores en 3 dimensiones en las direcciones (x_0, x_1, x_2) , I_ν y K_ν son funciones de Bessel y el parámetro ν se relaciona con la masa tal como se define en (4.40).

En particular, nos interesa calcular la corrección a 1-loop para el operador (4.1), el cual se inserta sobre una curva circular de radio R a una distancia L del defecto. Debido a la presencia de Φ_3 , el exponente posee un valor esperado no trivial a nivel clásico. Expandiendo alrededor del mismo y reteniendo términos a orden 1-loop tenemos que

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \langle W \rangle_{(0)} + \langle W \rangle_{(1)} + \langle W \rangle_{(2)} \\ &= \text{tr} U^{cl}(0, 2\pi) + R \int_0^{2\pi} d\alpha \langle \text{tr} U^{cl}(0, \alpha) \mathcal{A}(\alpha) U^{cl}(\alpha, 2\pi) \rangle \\ &\quad + R^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_\alpha^{2\pi} d\beta \langle \text{tr} U^{cl}(0, \alpha) \mathcal{A}(\alpha) U^{cl}(\alpha, \beta) \mathcal{A}(\beta) U^{cl}(\beta, 2\pi) \rangle, \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde

$$U^{cl}(\alpha, \beta) = \exp\left(-R \sin \chi \int_\alpha^\beta d\tau \langle \Phi_3 \rangle_{cl}\right) = \exp\left(\frac{(\beta - \alpha)R \sin \chi}{L} t_3\right). \quad (4.47)$$

Para la contribución clásica (nivel árbol) $\langle W \rangle_{(0)}$ debemos realizar la traza de (4.47) con $\alpha = 0$ y $\beta = 2\pi$. Haciendo uso de las convenciones para los generadores presentadas arriba, podemos ver que $E_i^i E_j^j = \delta_{ij} E_i^i$ y $\text{tr} E_j^i = \delta_{ij}$, por lo tanto

$$\langle W \rangle_{(0)} = (N - k) + \sum_{l=1}^k e^{\frac{2\pi R \sin \chi}{L} d_{k,l}} = (N - k) + \frac{\sinh\left(\frac{\pi R \sin \chi}{L} k\right)}{\sinh\left(\frac{\pi R \sin \chi}{L}\right)}. \quad (4.48)$$

El segundo término en (4.46), al cual nos referimos como $\langle W \rangle_{(1)}$, resulta

$$\langle W \rangle_{(1)} = R \int_0^{2\pi} d\alpha \left(e^{\frac{\alpha R \sin \chi}{L} t_3}\right)_{ab} \langle \mathcal{A}(\alpha) \rangle_{bc}^{1\text{-loop}} \left(e^{\frac{(2\pi - \alpha)R \sin \chi}{L} t_3}\right)_{ca}, \quad (4.49)$$

donde los índices a, b, c toman valores de 1 hasta k y está implícita la suma sobre índices repetidos. Notar que, debido a que la interfaz rompe la invarianza frente a traslaciones en x_3 , esta teoría posee funciones de 1 punto no triviales. En particular, la corrección a 1-loop para la función de un punto que aparece en (4.49) fue obtenida en [154], donde se encuentra que, luego de regularizar, el resultado es nulo

$$\langle \mathcal{A}(\alpha) \rangle^{1\text{-loop}} = 0. \quad (4.50)$$

Por lo tanto, $\langle W \rangle_{(1)}$ se cancela trivialmente.

La última columna presente en (4.46) es $\langle W \rangle_{(2)}$. Haciendo uso de la estructura del espectro de masas presentado en la Tabla 4.39, podemos descomponer esta contribución de la siguiente manera

$$\langle W \rangle_{(2)} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \quad (4.51)$$

donde

$$T_1 = R^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_\alpha^{2\pi} d\beta \left\langle \left(e^{\frac{\alpha \sin \chi}{L} t_3} \right)_{ab} \mathcal{A}_{bc}(\alpha) \left(e^{\frac{(\beta-\alpha) \sin \chi}{L} t_3} \right)_{cd} \mathcal{A}_{de}(\beta) \left(e^{\frac{(2\pi-\beta) \sin \chi}{L} t_3} \right)_{ea} \right\rangle, \quad (4.52)$$

$$T_2 = R^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_\alpha^{2\pi} d\beta \left\langle \left(e^{\frac{\alpha \sin \chi}{L} t_3} \right)_{ab} \mathcal{A}_{bi}(\alpha) \mathcal{A}_{ic}(\beta) \left(e^{\frac{(2\pi-\beta) \sin \chi}{L} t_3} \right)_{da} \right\rangle, \quad (4.53)$$

$$T_3 = R^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_\alpha^{2\pi} d\beta \left\langle \mathcal{A}_{ia}(\alpha) \left(e^{\frac{(\beta-\alpha) \sin \chi}{L} t_3} \right)_{ab} \mathcal{A}_{bi}(\beta) \right\rangle, \quad (4.54)$$

$$T_4 = R^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_\alpha^{2\pi} d\beta \langle \mathcal{A}_{ij}(\alpha) \mathcal{A}_{ji}(\beta) \rangle, \quad (4.55)$$

donde $a, b, c, d, e = 1, \dots, k$ y $i, j = k+1, \dots, N$.

El término T_1 sólo involucra elementos de matriz del bloque $(k+1) \times (k-1)$ de las matrices de color. El número total de modos corresponde a la dimensión de la representación adjunta de $SU(k)$. Por lo tanto, este término es, como mucho, de orden k^2 , por lo que será subdominante en comparación con los otros términos en el límite de N grande⁵. Por otro lado, T_4 da cuenta de la contribución de los modos no-masivos, por lo que reproduce el resultado a 1-loop bien conocido para $\mathcal{N} = 4$, sólo que con N reemplazado por $(N-k)$. Desde el punto de vista de la teoría de cuerdas dual, esta contribución proviene de cuerdas que no terminan en la D5-brana. Como estamos interesados en correcciones dependientes de $\frac{\lambda}{k^2}$, no nos concentraremos en este tipo de contribuciones, ya que no jugarán ningún papel cuando tomemos el límite de escaleo doble.

Los argumentos que acabamos de exponer nos dejan con T_2 y T_3 como las únicas posibles fuentes de correcciones en $\frac{\lambda}{k^2}$. Entonces, nos concentraremos en estos términos a la hora de comparar con los resultados clásicos obtenidos en teoría de cuerdas en la sección 4.1. Notar que estos términos involucran los bloques no-diagonales en los índices de color. Haremos uso de los propagadores y el espectro de masas presentados previamente en esta sección. Usando también la forma del generador t_3 encontramos que

$$T_2 = R^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_\alpha^{2\pi} d\beta \sum_{a=1}^k e^{\frac{2\pi-\beta+\alpha}{L} R \sin \chi d_{k,a}} \langle \mathcal{A}_{ai}(\alpha) \mathcal{A}_{ia}(\beta) \rangle, \quad (4.56)$$

$$T_3 = R^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_\alpha^{2\pi} d\beta \sum_{a=1}^k e^{\frac{\beta-\alpha}{L} R \sin \chi d_{k,a}} \langle \mathcal{A}_{ia}(\alpha) \mathcal{A}_{ai}(\beta) \rangle. \quad (4.57)$$

⁵En el lenguaje de la teoría dual, este término es orden $g_s \sim g_{YM}^2$, lo que implica que debería venir de correcciones que involucran topologías no-triviales de la hoja de mundo. Por lo tanto, no esperamos encontrar esta contribución en el resultado clásico para la cuerda.

Escribiendo los campos en la base diagonal y usando el espectro de masas de la Tabla (4.39), el correspondiente valor esperado resulta

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_{ai}(\alpha) \mathcal{A}_{ib}(\beta) \rangle &= \langle \mathcal{A}_{ia}(\alpha) \mathcal{A}_{bi}(\beta) \rangle = \delta_{ab} (N - k) (1 - \cos(\beta - \alpha)) K_{\frac{k}{2}}(\alpha, \beta) \\ &+ \delta_{ab} \frac{(N - k)}{2k} \sin^2 \chi \left((k - 1) K_{\frac{k+2}{2}}(\alpha, \beta) + (k + 1) K_{\frac{k-2}{2}}(\alpha, \beta) \right), \end{aligned} \quad (4.58)$$

donde $K_\nu(\alpha, \beta)$ es el propagador definido en (4.45). La integral angular en (4.45) puede calcularse haciendo uso de $|\vec{x}(\alpha) - \vec{x}(\beta)| = 2R \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$ y definiendo $r = |\vec{k}|$

$$K_\nu(\alpha, \beta) = \frac{g_{YM}^2 L}{8\pi^2 R} \int_0^\infty dr r \frac{\sin \left(2Rr \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\beta - \alpha}{2}} I_\nu(rL) K_\nu(rL). \quad (4.59)$$

A su vez, no es difícil realizar las sumas en a y una de las integrales angulares debido a que los integrandos en (4.56) y (4.57) dependen de α y β a través de la diferencia. Recolectando ambas contribuciones se obtiene

$$T_2 + T_3 = (N - k) \frac{g_{YM}^2 R}{4\pi L} \int_0^\infty dr r \int_0^\pi d\delta \left(\frac{\sinh \left(\frac{(\pi - \delta) R \sin \chi}{2L} k \right)}{\sinh \left(\frac{(\pi - \delta) R \sin \chi}{2L} \right)} + \frac{\sinh \left(\frac{(\pi + \delta) R \sin \chi}{2L} k \right)}{\sinh \left(\frac{(\pi + \delta) R \sin \chi}{2L} \right)} \right) (\mathcal{I}_1 + \sin^2 \chi \mathcal{I}_2) \quad (4.60)$$

donde

$$\mathcal{I}_1 = 2 \cos \frac{\delta}{2} \sin \left(\frac{2Rr}{L} \cos \frac{\delta}{2} \right) I_{\frac{k}{2}}(r) K_{\frac{k}{2}}(r), \quad (4.61)$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{\sin \left(\frac{2Rr}{L} \cos \frac{\delta}{2} \right)}{\cos \frac{\delta}{2}} \left(\frac{k - 1}{2k} I_{\frac{k+2}{2}}(r) K_{\frac{k+2}{2}}(r) + \frac{k + 1}{2k} I_{\frac{k-2}{2}}(r) K_{\frac{k-2}{2}}(r) - I_{\frac{k}{2}}(r) K_{\frac{k}{2}}(r) \right), \quad (4.62)$$

y hemos rescaleado la dependencia en L en las funciones de Bessel.

Las integrales involucradas en (4.60) son en general difíciles de resolver analíticamente. En el límite de $L/R \rightarrow 0$, el problema, si bien es aún no trivial, toma una forma más simple. En este límite tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\sinh \left(\frac{\pi R \sin \chi}{L} k \right)}{\sinh \left(\frac{\pi R \sin \chi}{L} \right)} &\sim e^{2\pi\eta}, \\ \left(\frac{\sinh \left(\frac{(\pi - \delta) R \sin \chi}{2L} k \right)}{\sinh \left(\frac{(\pi - \delta) R \sin \chi}{2L} \right)} + \frac{\sinh \left(\frac{(\pi + \delta) R \sin \chi}{2L} k \right)}{\sinh \left(\frac{(\pi + \delta) R \sin \chi}{2L} \right)} \right) &\sim e^{(\pi + \delta)\eta}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde, convenientemente, hemos definido $\eta = \frac{R \sin \chi}{2L} (k - 1)$. Por lo tanto, en este límite, (4.60) se reduce a

$$T_2 + T_3 \sim (N - k) \frac{g_{YM}^2 R}{4\pi L} e^{\pi\eta} \int_0^\infty dr r \int_0^\pi d\delta e^{\eta\delta} (\mathcal{I}_1 + \sin^2 \chi \mathcal{I}_2). \quad (4.64)$$

En este punto es conveniente introducir las siguientes propiedades que satisfacen las funciones de Bessel,

$$\begin{aligned} I_{\nu \pm 1}(z) &= I'_\nu(z) \mp \left(\frac{\nu}{z} \right) I_\nu(z), \\ K_{\nu \pm 1}(z) &= -K'_\nu(z) \pm \left(\frac{\nu}{z} \right) K_\nu(z), \end{aligned} \quad (4.65)$$

por lo que la combinación de funciones de Bessel que aparecen en el integrando de \mathcal{I}_2 pueden ser llevadas a una derivada total,

$$z \left(I_\nu(z) K_\nu(z) - \frac{\nu-\frac{1}{2}}{2\nu} I_{\nu+1}(z) K_{\nu+1}(z) - \frac{\nu+\frac{1}{2}}{2\nu} I_{\nu-1}(z) K_{\nu-1}(z) \right) = (z I'_\nu(z) K_\nu(z) + \frac{1}{2} I_\nu(z) K_\nu(z))'$$

Por lo tanto, en \mathcal{I}_2 , podemos integrar por partes para la variable r obteniendo

$$\begin{aligned} T_2 + T_3 &\sim (N-k) \frac{g_{YM}^2 R}{2\pi L} e^{\pi\eta} \int_0^\infty dr r I_{\frac{k}{2}}(r) K_{\frac{k}{2}}(r) \int_0^\pi d\delta e^{\eta\delta} \cos \frac{\delta}{2} \sin \left(\frac{2Rr}{L} \cos \frac{\delta}{2} \right) \\ &\quad - (N-k) \frac{g_{YM}^2 R}{2\pi L} \sin^2 \chi e^{\pi\eta} \int_0^\infty dr \left(\frac{1}{2} - r I'_{\frac{k}{2}}(r) K_{\frac{k}{2}}(r) - \frac{1}{2} I_{\frac{k}{2}}(r) K_{\frac{k}{2}}(r) \right) \int_0^\pi d\delta e^{\eta\delta} \cos \left(\frac{2Rr}{L} \cos \frac{\delta}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.66)$$

Ahora evaluamos las integrales en el régimen $\eta \rightarrow \infty$. Para ello haremos uso de que, en el límite de η grande,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\delta e^{\eta\delta} \cos \left(\frac{2Rr}{L} \cos \frac{\delta}{2} \right) &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi d\delta \frac{(-1)^n \left(\frac{2Rr}{L} \right)^{2n}}{(2n)!} e^{\eta\delta} \cos^n \frac{\delta}{2}, \\ &\sim \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \left(\frac{Rr}{L} \right)^{2n} e^{\eta\pi}}{\eta^{2n+1}} = \frac{\eta e^{\eta\pi}}{\left(\frac{Rr}{L} \right)^2 + \eta^2}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Mientras que, por su parte, derivando (4.67) respecto de r , se obtiene

$$\int_0^\pi d\delta e^{\eta\delta} \cos \frac{\delta}{2} \sin \left(\frac{2Rr}{L} \cos \frac{\delta}{2} \right) \sim \frac{\frac{Rr}{L} \eta e^{\eta\pi}}{\left(\left(\frac{Rr}{L} \right)^2 + \eta^2 \right)^2}, \quad (4.68)$$

Por lo tanto, en este límite tenemos que

$$\begin{aligned} T_2 + T_3 &\sim \frac{\lambda R}{2\pi L} e^{2\pi\eta} \left[\left(\frac{L}{R} \right)^3 \int_0^\infty dr \frac{\eta r^2}{\left(r^2 + \left(\frac{\eta L}{R} \right)^2 \right)^2} I_{\frac{k}{2}}(r) K_{\frac{k}{2}}(r) \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 \chi \left(\frac{L}{R} \right) \int_0^\infty dr \frac{\eta}{r^2 + \left(\frac{\eta L}{R} \right)^2} \left(\frac{1}{2} - r I'_{\frac{k}{2}}(r) K_{\frac{k}{2}}(r) - \frac{1}{2} I_{\frac{k}{2}}(r) K_{\frac{k}{2}}(r) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.69)$$

donde hemos tomado el límite planar ($N \rightarrow \infty$) e introdujimos la constante de acoplamiento de 't Hooft $\lambda = g_{YM}^2 N$. Notar que la segunda línea lleva al resultado obtenido en [159], correspondiente a un Wilson loop recto, luego de hacer el reemplazo $T \rightarrow 2\pi$.

Ahora rescaleamos la variable de interacción definiendo $u = \frac{2r}{k}$ y expandimos para k grande. El primer término en (4.69) resulta

$$\frac{\lambda}{\pi k} \left(\frac{L}{R} \right)^2 e^{2\pi\eta} \int_0^\infty dr \frac{\eta u^2}{\left((u^2 + \left(\frac{2\eta L}{Rk} \right)^2)^2 \sqrt{1+u^2} \right)} = \frac{\lambda L}{4\pi Rk} \frac{e^{\frac{(k-1)\pi R}{L} \sin \chi}}{\cos^3 \chi} \left(\frac{\pi}{2} - \chi - \frac{1}{2} \sin 2\chi \right), \quad (4.70)$$

donde hemos reemplazado $\eta = \frac{\sin \chi(k-1)R}{2L}$. El término restante en (4.69), expandido para k muy grande, es de la forma

$$\frac{\lambda R}{4\pi L k^2} \eta e^{2\pi\eta} \int_0^\infty \frac{du}{\left(u^2 + \left(\frac{2\eta L}{Rk}\right)^2\right) (1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda R}{4\pi L k} e^{\frac{(k-1)\pi R}{L} \sin \chi} \frac{\sin^2 \chi}{\cos^3 \chi} \left(\frac{\pi}{2} - \chi - \frac{1}{2} \sin 2\chi\right) \quad (4.71)$$

Finalmente, estamos en posición de recolectar todas las contribuciones a $\langle W \rangle$. En este punto, resulta instructivo distinguir entre las diferentes fuentes que dan lugar a estas contribuciones. A nivel árbol, para R/L y k grandes, definimos

$$\langle W \rangle_{(0)}^I = N - k, \quad \langle W \rangle_{(0)}^{II} = e^{\frac{(k-1)\pi R}{L} \sin \chi}. \quad (4.72)$$

Análogamente, para las contribuciones a 1-loop se define

$$\langle W \rangle_{(2)}^I = T_4, \quad \langle W \rangle_{(2)}^{II} = T_2 + T_3. \quad (4.73)$$

Comparando con los resultados obtenidos en teoría de cuerdas, concluimos que $\langle W \rangle^I$ y $\langle W \rangle^{II}$ corresponden a las contribuciones de puntos estacionarios distintos en la aproximación semiclásica. Específicamente $\langle W \rangle^I$ da cuenta de la configuración usual asociada al Wilson loop circular en $\mathcal{N} = 4$ SYM, la cual se extiende hacia el interior de *AdS* sin terminar en ninguna D5-brana. Lógicamente, esta configuración no contiene ningún tipo de información sobre la interfaz. Por otro lado $\langle W \rangle^{II}$, da cuenta de la contribución debida a la configuración encontrada en 4.1, la cual termina en la D5-brana dual a la interfaz⁶. Recolectando todas las contribuciones provenientes de (4.48), (4.70) and (4.71) se tiene entonces que, para R/L y k grandes,

$$\log \langle W \rangle^{II} \simeq \frac{k\pi R}{L} \left(\sin \chi + \frac{\lambda}{4\pi^2 k^2} \frac{1}{\cos^3 \chi} \left(\frac{\pi}{2} - \chi - \frac{1}{2} \sin 2\chi\right) \left(\sin^2 \chi + \left(\frac{L}{R}\right)^2 \right) \right). \quad (4.74)$$

Para comparar con el resultado a acoplamiento fuerte obtenido en la sección (4.1), expandimos (4.74) para pequeños valores del ángulo χ , obteniendo

$$\log \langle W \rangle^{II} \simeq \frac{\pi R k}{L} \left[\chi + \frac{\lambda}{8\pi} \left(\frac{L}{Rk}\right)^2 \left(1 - \frac{4\chi}{\pi} + \chi^2 \left(\frac{R^2}{L^2} + \frac{3}{2}\right) \right) \right]. \quad (4.75)$$

Comparando esta última expresión con (4.33), la única diferencia entre ambos resultados recae en el $\frac{3}{2}$ presente en el término de orden χ^2 en (4.75). Sin embargo, esta contribución es subdominante en la

⁶ Denotando con S_I y S_{II} a las correspondientes acciones clásicas, tenemos que

$$\langle W \rangle^I + \langle W \rangle^{II} \simeq (N - k)e^{S_I} + e^{S_{II}}.$$

De acuerdo a la realización holográfica para Wilson loops, el término e^{S_I} proviene de una cuerda que se extiende entre una D3-brana en la frontera y un arreglo de $(N - k)$ D3-branas, lo que explicaría el factor $(N - k)$ frente a esta contribución.

expansión a R/L grande y por lo tanto está fuera del rango de validez del cálculo perturbativo. Las correcciones provenientes de los diagramas de Feynman subsiguientes en el desarrollo perturbativo deberían reproducir todos los términos de la contribución orden χ^2 provenientes de teoría de cuerdas. Concluimos entonces que, en el rango de validez de las aproximaciones utilizadas, el resultado perturbativo (4.75) y el obtenido en teoría de cuerdas (4.33), en el límite de escaleo doble, están en completo acuerdo.

Capítulo 5

Representaciones grandes, modelos de matrices y geometrías *bubbling*

En los ejemplos más estudiados de la correspondencia AdS/CFT, y en particular en todos los estudiados hasta ahora en esta tesis, la descripción gravitatoria se realiza en términos de cuerdas y D-branas en espacios Anti de Sitter con dilatón constante, reflejando de esta manera la simetría conforme de la teoría de campos dual. Sin embargo, la presencia de objetos “pesados” del lado de gravedad da lugar a efectos de *backreaction*, es decir, que estos objetos de gran masa afectan naturalmente a la geometría del espacio *target*. En estos casos, las isometrías del espacio AdS se preservan solamente de manera asintótica y el dilatón posee en general un perfil no trivial. Típicamente, del lado de la teoría de campos dual, esta situación corresponde a calcular funciones de correlación que involucran estados cuyos números cuánticos son grandes, en comparación con el rango N del grupo de gauge. Esta situación, en general, rompe la simetría conforme de la teoría.

Al apartarnos de espacios estrictamente Anti de Sitter, no se dispone en general de muchos resultados exactos. Como se discute en la mayor parte de esta tesis, para las realizaciones conformes, estos resultados han permitido establecer comparaciones explícitas con los cálculos realizados en teoría de cuerdas, permitiendo realizar valiosos chequeos de precisión de la dualidad. Uno de los pocos ejemplos de evaluación exacta en ausencia de simetría conforme corresponde al caso de $\mathcal{N} = 2^*$ super Yang-Mills y su dual holográfico, en donde se evalúa la función de partición, el valor esperado de Wilson loops y de correladores [163, 164, 165, 166, 167].

En este capítulo exploraremos otra realización de la dualidad AdS/CFT en situaciones no-conformes, a saber, el cálculo de correladores de Wilson loops, en los cuales uno de ellos se define en una representación cuyo rango es muy grande en comparación con N . Del lado de la teoría gravitatoria este tipo de Wilson loops definidos en representaciones “grandes” son descritos en términos de espacios 1/2-BPS, con grupo de isometría $SO(2, 1) \times SO(3) \times SO(5)$ y dilatón y flujos

no triviales en el interior. Estos espacios se denominan usualmente geometrías *bubbling*, en alusión a las geometrías estudiadas en [168], duales a operadores quirales, las cuales quedan especificadas por diagramas *droplet*. Para el caso de Wilson loops, la construcción del dual geométrico fue producto de una serie de trabajos [169, 170], culminando en [171]. Estas geometrías se obtienen resolviendo las ecuaciones de supersimetría para el espinor de Killing en supergravedad tipo IIB, luego de imponer que la solución preserve 1/2 de las supersimetrías y que posea la correspondiente isometría $SO(2, 1) \times SO(3) \times SO(5)$. Un aspecto interesante de este tipo de soluciones es que pueden escribirse en términos de dos funciones holomorfas definidas sobre una superficie de Riemann Σ , sobre el borde de la cual está codificada la información concerniente a la representación del Wilson loop dual. Estas geometrías son altamente no triviales, por lo que es en general difícil trabajar de manera explícita con ellas. En particular, se han estudiado cuerdas y áreas mínimas en estas geometrías *bubbling* [172, 173], para analizar el comportamiento del potencial gravitatorio entre cuerdas abiertas y calcular entropías de manera holográfica.

El valor esperado de Wilson loops circulares 1/2 BPS definidos en representaciones arbitrarias pueden ser calculadas en términos de un modelo de matrices Gaussiano. Esto fue conjeturado inicialmente por Erickson, Semenoff y Zarembo en [92], y Drukker y Gross en [94], siendo finalmente probado por Pestun a través de localización supersimétrica [93]. En particular, para la representación fundamental es posible resolver el correspondiente modelo de matrices en términos de polinomios ortogonales, obteniendo una expresión exacta tanto en λ como en N , [94], tal como se mostró en (1.115). Para representaciones de mayor rango, el diccionario holográfico fue establecido en [174, 175]; sin embargo, excepto para algunos casos [176], una expresión exacta en λ y N parece fuera de alcance. A pesar de ello, para las representaciones totalmente simétrica y totalmente antisimétrica, es posible obtener expresiones válidas en el límite planar y para λ grande [177], las cuales permitieron chequear exitosamente las predicciones de AdS/CFT obtenidas a través de cálculos con D-branas [178, 179]. Luego, mediante el uso de técnicas de localización supersimétrica, se han obtenido expresiones válidas para Wilson loops definidos sobre curvas más generales, preservando por lo tanto menos supersimetría [180, 181, 182, 183, 184]; sin embargo la mayoría de estos resultados han sido obtenidos para la representación fundamental.

Cuando la representación en la que se define el Wilson loop es más grande, como, por ejemplo, cuando el diagrama de Young asociado posee un número de casilleros fundamentales de orden N^2 , la descripción dual involucra un número muy grande de D-branas, las cuales, como se menciona arriba, deforman la geometría. El modelo de matrices correspondiente se puede resolver en el límite planar por medio de una aproximación de punto estacionario, siempre y cuando los parámetros del diagrama de Young $\{n_i, k_i\}$ sean de orden N [185]. A su vez, la densidad de autovalores se determina en base a la información geométrica codificada en la curva espectral, la cual se identifica a su vez con la superficie hiperelíptica que caracteriza la geometría *bubbling* [186].

En particular, en este capítulo estudiaremos correladores $\langle W_{\mathbf{R}} W_{\mathbf{r}} \rangle$, en los cuales \mathbf{R} es una representación “grande”, es decir que los parámetros $\{n_i, k_i\}$ del diagrama de Young son de orden N . A su vez, para la representación “pequeña” \mathbf{r} , consideraremos la fundamental, totalmente simétrica y totalmente antisimétrica. A su vez, definiremos ambos operadores sobre curvas circulares coincidentes y acoplados de la misma manera al sector escalar, de forma tal que preserven las mismas supersimetrías. Esto último permite reducir el valor esperado del correlador a un cálculo en un modelo de matrices Gaussiano, por medio de localización. El punto crucial en el cálculo del modelo de matrices es que el Wilson loop en la representación “pequeña” no afecta a la distribución de autovalores. Por lo tanto, el valor esperado del correlador se obtiene calculando valores medios sobre la distribución de autovalores determinada por el Wilson loop en la representación “grande”.

Por otro lado, de acuerdo a la correspondencia AdS/CFT, en el límite en el que la constante de acoplamiento de 't Hooft λ es muy grande, el valor esperado del correlador $\langle W_{\mathbf{R}} W_{\text{fund}} \rangle$ corresponde a calcular la acción clásica de una cuerda sobre las geometrías *bubbling* encontradas en [171]. Entre todas las posibles configuraciones de cuerdas propagándose en estas geometrías, sólo contribuirán al correlador las que preserven las mismas isometrías y supersimetrías que preserve el espacio *target*. En particular, mostraremos que los resultados obtenidos de esta manera son consistentes con los que resultan del cálculo en el modelo de matrices.

5.1 Geometrías *bubbling* duales a Wilson loops $\frac{1}{2}$ -BPS

En esta sección realizaremos un repaso de los aspectos generales de las geometrías *bubbling*. Estas geometrías corresponden a las soluciones más generales que preservan $1/2$ de las supersimetrías de supergravedad tipo IIB y a su vez poseen una isometría $SO(2,1) \times SO(3) \times SO(5)$. Un análisis detallado de la resolución de las ecuaciones que dan lugar a este tipo de soluciones se encuentra en [171]. La métrica resultante es la correspondiente a una fibración \mathbb{H}_2, S^2, S^4 sobre una superficie de Riemann compleja 2-dimensional Σ , cuya forma en el *frame* de Einstein es la siguiente

$$ds^2 = G_{MN}^E dx^M dx^N = f_1^2 ds_{\mathbb{H}_2}^2 + f_2^2 ds_{S^2}^2 + f_4^2 ds_{S^4}^2 + d\Sigma^2. \quad (5.1)$$

donde f_1, f_2 y f_4 son funciones de las coordenadas complejas que parametrizan Σ .

Un aspecto remarcable de este tipo de soluciones consiste en que tanto las funciones geométricas como los flujos están completamente determinados por dos funciones holomorfas \mathcal{A} y \mathcal{B} definidas en la superficie de Riemann Σ . Equivalentemente, la geometría puede escribirse en términos de cuatro funciones reales armónicas definidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} h_1 &= \mathcal{A} + \bar{\mathcal{A}}, & \tilde{h}_1 &= i (\mathcal{A} - \bar{\mathcal{A}}), \\ h_2 &= \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}}, & \tilde{h}_2 &= i (\mathcal{B} - \bar{\mathcal{B}}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Existen diversas formas de describir funciones sobre una superficie de Riemann [187]. Por ejemplo, como funciones definidas en el semiplano superior con $g + 1$ cortes de ramificación sobre el eje real. Esta formulación suele ser conveniente a la hora de describir propiedades generales de la geometría. Alternativamente, las funciones h_1 y h_2 se pueden representar en términos funciones *hiperelípticas* sobre una superficie de Riemann de género g sin bordes. En este caso, las coordenadas (z, \bar{z}) son $2g$ -periódicas. De aquí en adelante alternaremos entre ambas descripciones. Asimismo nos referimos a una geometría genérica con métrica de la forma (5.1) como solución de género g .

Consideremos la descripción en la que Σ es el semiplano descrito por coordenadas complejas (u, \bar{u}) . Las propiedades generales de una solución arbitraria de género g están codificadas en las condiciones de contorno que satisfacen las funciones armónicas sobre el eje real. En particular, mientras que h_2 satisface condiciones tipo Dirichlet a lo largo de todo el eje real, h_1 alterna entre condiciones tipo Dirichlet y Neumann. Denotaremos con \tilde{e}_a a los puntos donde las condiciones de contorno cambian. Estos puntos determinan la posición de los cortes de ramificación. Para una solución de género g , la superficie de Riemann Σ posee $2g + 2$ de estos puntos de ramificación a lo largo del borde. Debido a la simetría conforme del problema, siempre es posible establecer el ordenamiento $\tilde{e}_{2g+2} < \dots < \tilde{e}_2 < \tilde{e}_1$ junto con $\tilde{e}_{2g+2} \rightarrow -\infty$. A su vez, se impone la condición de que el resto de los puntos de ramificación sume a cero, *i.e.* $\sum_{a=1}^{2g+1} \tilde{e}_a = 0$.

La solución más general que posee estas propiedades satisface las siguientes ecuaciones

$$\partial_u h_1(u) = \frac{i P(u)}{(u - u_0)^2 s(u)}, \quad \partial_u h_2(u) = -\frac{i}{(u - u_0)^2}, \quad (5.3)$$

donde u_0 es un punto singular donde la geometría es asintóticamente $AdS_5 \times S^5$, $P(u)$ es un polinomio de grado $g + 1$ y

$$s(u)^2 = (u - \tilde{e}_1) \prod_{i=1}^g (u - \tilde{e}_{2i})(u - \tilde{e}_{2i+1}). \quad (5.4)$$

Equivalentemente, es posible rescalear el comportamiento singular de las funciones h_1 y h_2 en el punto u_0 . Denotaremos con (v, \bar{v}) a este parche de coordenadas. En esta representación, se establece una relación directa entre la geometría y el modelo de matrices dual, debido a que puede relacionarse a la resolvente $w(x)$ directamente con la función h_1 [171, 186]. Explícitamente

$$h_1(v, \bar{v}) = \frac{i(v - \bar{v})}{2} - \frac{i}{4} [w(v) - w(\bar{v})], \quad h_2(v, \bar{v}) = \frac{i(v - \bar{v})}{4}. \quad (5.5)$$

Para ser consistente con la notación usual en la literatura, en particular [186], denotaremos con e_a a los puntos de ramificación en las coordenadas (v, \bar{v}) . Claramente, el uso de las coordenadas u o v es una cuestión de preferencia y no afecta a la física del problema.

Consideremos ahora la descripción en término de las variables (z, \bar{z}) , en las cuales podemos escribir

$$d\Sigma^2 = 4\sigma^2 dz d\bar{z}, \quad (5.6)$$

donde el radio σ es una función real de (z, \bar{z}) . Para una solución genérica, las funciones de f_1, f_2, f_4, σ y el dilatón Φ se escriben de la siguiente manera en términos de h_1 y h_2 ¹

$$f_1^4 = -4e^\Phi h_1^4 \frac{W}{N_1}, \quad f_2^4 = 4e^{-\Phi} h_2^4 \frac{W}{N_2}, \quad f_4^4 = 4e^{-\Phi} \frac{N_2}{W}, \quad \sigma^8 = -\frac{W N_1 N_2}{h_1^4 h_2^4}, \quad e^{2\Phi} = -\frac{N_2}{N_1}, \quad (5.7)$$

donde

$$\begin{aligned} N_1 &= 2 h_1 h_2 |\partial h_1|^2 - h_1^2 W, & W &= \partial h_1 \bar{\partial} h_2 + \partial h_2 \bar{\partial} h_1, \\ N_2 &= 2 h_1 h_2 |\partial h_2|^2 - h_2^2, & V &= \partial h_1 \bar{\partial} h_2 - \partial h_2 \bar{\partial} h_1. \end{aligned} \quad (5.8)$$

y $\partial = \partial_z, \bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$. A su vez, los flujos de NS y RR pueden escribirse de la siguiente manera

$$H_3 = dB_2, \quad F_2 = dC_2, \quad F_5 = \star F_5 = dC_4 + \frac{1}{8} (b_1 \wedge db_2 - b_2 \wedge db_1), \quad (5.9)$$

cuyos potenciales son

$$B_2 = b_1 \hat{e}_{\mathbb{H}_2}, \quad C_2 = b_2 \hat{e}_{S^2}, \quad C_4 = -4 j_1 \hat{e}_{\mathbb{H}_2} \wedge \hat{e}_{S^2} + 4 j_2 \hat{e}_{S^4}, \quad (5.10)$$

donde $\hat{e}_{\mathbb{H}_2}, \hat{e}_{S^2}$ y \hat{e}_{S^4} denotan los elementos de volumen de \mathbb{H}_2, S^2 y S^4 respectivamente, y

$$\begin{aligned} b_1 &= -2i \frac{h_1^2 h_2 V}{N_1} - 2\tilde{h}_2 - b_1^0, \\ b_2 &= -2i \frac{h_1 h_2^2 V}{N_1} + 2\tilde{h}_1 - b_2^0, \\ j_2 &= i h_1 h_2 \frac{V}{W} - \frac{3}{2} (\tilde{h}_1 h_2 - h_1 \tilde{h}_2) + 3i (\mathcal{C} - \bar{\mathcal{C}}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Las constantes de integración b_1^0 y b_2^0 son arbitrarias debido a la invariancia de gauge. Esta redundancia será fijada imponiendo que los flujos de 2-formas se anulen en el punto singular donde la geometría es asintóticamente AdS , *i.e.* $b_1(z_0) = b_2(z_0) = 0$. Finalmente, la función j_1 puede determinarse haciendo uso de la propiedad autodual de la 5-forma F_5

$$\partial j_1 = -i \frac{f_1^2 f_2^2}{f_4^4} \partial j_2 + \frac{1}{8} (b_1 \partial b_2 - b_2 \partial b_1). \quad (5.12)$$

5.1.1 Cargas y parámetros de la representación

Para completar esta breve descripción de estas soluciones, es conveniente volver a la formulación del semiplano con coordenadas (u, \bar{u}) . La función armónica h_1 satisface condiciones de contorno tipo Dirichlet a lo largo de los intervalos $(\tilde{e}_{2i+1}, \tilde{e}_{2i})$ y Neumann sobre los intervalos $(\tilde{e}_{2i}, \tilde{e}_{2i-1})$ para $i, j = 1, \dots, g$. Más aún, las esferas S^2 y S^4 alternativamente colapsan a lo largo de los intervalos Neumann y Dirichlet respectivamente, como puede verificarse de la relación entre las funciones f_i y las funciones h_i dada por (5.7).

¹En las convenciones de [171, 172], $\phi = \Phi/2$.

Como es de esperarse, los parámetros libres de las soluciones, es decir, las posiciones y longitudes de los cortes de ramificación, se mapean a las longitudes de las filas y columnas del diagrama de Young asociado a la representación del Wilson loop dual. Sin embargo, esta relación es en general muy complicada y se establece en términos de integrales de los flujos a lo largo de los ciclos no triviales de la geometría. Mencionaremos aquí algunos aspectos generales para soluciones de género arbitrario, mientras que se presentará una discusión más detallada del caso particular de género uno en la sección 5.2. Para un análisis más profundo de estos aspectos se recomiendan los artículos [171, 172], los cuales seguiremos de cerca en lo que resta de esta sección.

La estructura geométrica descrita hasta ahora posee una serie de 3-ciclos y 5-ciclos no triviales, los cuales envuelven intervalos tipo Dirichlet o Neumann respectivamente, a lo largo del borde de Σ^2 . Estos 3- y 5-ciclos poseen topología S^3 y S^5 respectivamente y están cargados respecto de los flujos de 3- y 5-formas de RR. Precisamente, definimos los 5-ciclos γ_i como la fibrición de una S^4 sobre un contorno que rodea el intervalo tipo Neumann $(\tilde{e}_{2i}, \tilde{e}_{2i-1})$. Análogamente, el 3-ciclo $\tilde{\gamma}_j$ corresponde a una fibrición S^2 sobre un contorno que rodea el intervalo tipo Dirichlet $(\tilde{e}_{2j+1}, \tilde{e}_{2j})$. Las cargas correspondientes se obtienen a través de las siguientes integrales de los flujos

$$Q_{D3}^i = \oint_{\gamma_i} dC_4, \quad (5.13)$$

$$Q_{D5}^j = \oint_{\tilde{\gamma}_j} H_3. \quad (5.14)$$

Por el teorema de Cauchy y expandiendo los flujos cerca del borde, las integrales de arriba pueden deformarse a las siguientes integrales sobre los cortes de ramificación [172]:

$$Q_{D3}^i = 12i \text{Vol}(S^4) \int_{\tilde{e}_{2i}}^{\tilde{e}_{2i-1}} dC + \text{c.c.}, \quad (5.15)$$

$$Q_{D5}^j = 2i \text{Vol}(S^2) \int_{\tilde{e}_{2j+1}}^{\tilde{e}_{2j}} dA + \text{c.c.}, \quad (5.16)$$

donde

$$dC = \mathcal{B}\partial\mathcal{A} - \mathcal{A}\partial\mathcal{B}. \quad (5.17)$$

Las cargas de D3 y D5 dadas por estas integrales están naturalmente asociadas a los parámetros que determinan la representación del Wilson loop (ver Fig. 5.1) de la siguiente manera

$$Q_{D3}^i = (4\pi^2\alpha')^2 n_i, \quad Q_{D5}^j = -(4\pi^2\alpha') k_j. \quad (5.18)$$

²También pueden definirse 7-ciclos no triviales dados por los productos $S^2 \times \gamma_i$ y $S^4 \times \tilde{\gamma}_j$ los cuales dan una medida de las cargas de cuerdas fundamentales de la configuración de branas [172]

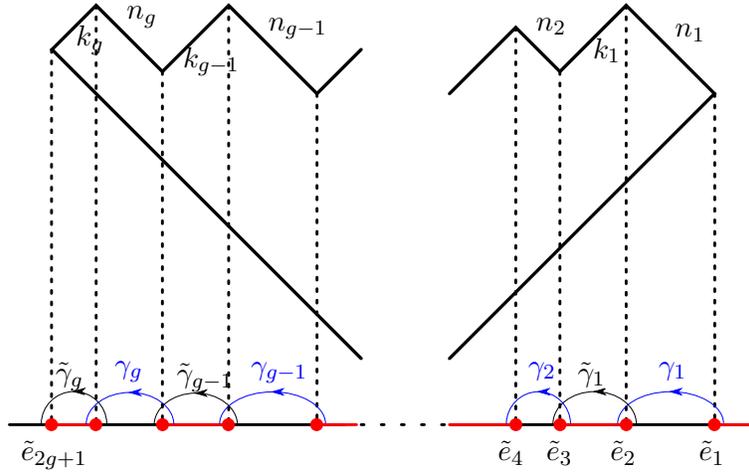


Figura 5.1: Cortes de ramificación y diagrama de Young asociado a una representación genérica del Wilson loop dual. Los parámetros de la representación $\{k_j, n_i\}$ se conectan con los parámetros geométricos mediante integrales de flujo sobre los 3- y 5- ciclos no triviales, $\tilde{\gamma}_j$ y γ_i respectivamente.

5.2 Cuerdas sobre geometrías *bubbling*

Consideremos ahora la dinámica de una cuerda fundamental en el *background* geométrico descrito en la sección anterior, en busca de soluciones de área mínima. Nuestro interés en estas configuraciones recae en el hecho que la correspondiente acción clásica puede ser relacionada con el valor esperado de un correlador de dos Wilson loops; uno en la representación fundamental (dual a la cuerda fundamental) y el otro en una representación *grande* (dual a la geometría *bubbling*). Específicamente, en el límite planar y tomando la constante de 't Hooft λ muy grande, tenemos que

$$\langle W_{\text{fund}} \rangle_{\mathbf{R}} = \frac{\langle W_{\mathbf{R}} W_{\text{fund}} \rangle}{\langle W_{\mathbf{R}} \rangle} \simeq \sum_i e^{-S_{\text{cl},i}}, \quad (5.19)$$

relacionando de esta manera el correlador de dos Wilson loops con la función de partición de cuerdas evaluada en los puntos de mínima acción (indexados por i) para la hoja de mundo en el *background* de la geometría *bubbling*. En general, existen varias configuraciones clásicas de cuerdas en una geometría de género g , correspondientes a diferentes especificaciones para W_{fund} , es decir, diferentes curvas y orientaciones en el espacio interno.

Debido a que eventualmente se quieren comparar los resultados de teoría de cuerdas con los obtenidos en en teoría de *gauge*, nos concentraremos en configuraciones susceptibles a ser capturadas por el modelo de matrices. En particular, esto implica considerar configuraciones supersimétricas. Una condición necesaria para ello es que ambos operadores preserven el mismo grupo de isometría $SO(2,1) \times SO(3) \times SO(5)$. Esta restricción condiciona las posibles curvas y orientaciones en el espacio interno que puede tomar el Wilson loop fundamental. Más precisamente, impone que ambas

curvas sean círculos coincidentes (parametrizados en el mismo sentido o el opuesto) y con orientaciones iguales o antipodales en el espacio interno. Por lo tanto nos restringiremos a configuraciones bien específicas.

Para realizar comparaciones explícitas con los resultados del modelo de matrices, encontraremos casos particulares de este tipo de configuraciones y evaluaremos la acción clásica correspondiente. Para generar una intuición del problema en cuestión, se presentará primero una aproximación al caso general y luego se estudiarán en detalle ejemplos explícitos para género cero y género uno.

5.2.1 Aspectos generales del problema

El objetivo consta en resolver las ecuaciones de movimiento que derivan de la acción de Nambu-Goto

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\det(G_{MN}^{(S)} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N)} + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int P[B_2], \quad (5.20)$$

donde $G_{MN}^{(S)}$ es la métrica en el *frame* de cuerdas. Es importante recalcar que la métrica (5.1) fue introducida en el *frame* de Einstein. Por lo tanto, es necesario rescalear con el dilatón, explícitamente, $G^{(S)} = e^{\frac{\Phi}{2}} G^{(E)}$. Por otro lado, $P[B_2]$ es el *pull-back* de la 2-forma de NS sobre la hoja de mundo³.

Se considerarán hojas de mundo de cuerdas extendidas en \mathbb{H}_2 , parametrizado en coordenadas globales (ρ, ϕ) tales que $ds_{\mathbb{H}_2}^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2$, y ubicadas en un punto arbitrario en las esferas S^2 y S^4 . Notar que, dada esta parametrización para el factor \mathbb{H}_2 , la cuerda describe un contorno circular en la frontera de AdS ⁴. Se trabajará en la formulación en la que Σ es una superficie de Riemann de género g descrita por las coordenadas complejas (z, \bar{z}) , las cuales se supone que sólo dependen de la coordenada ρ . Introduciendo esta propuesta en (5.20) y usando las formas explícitas de la métrica y los flujos, dadas por las expresiones (5.1) y (5.10), se obtiene

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\phi d\rho \sinh \rho e^{\frac{\Phi}{2}} f_1^2 \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{f_1^2} |z'|^2} + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\phi d\rho \sinh \rho b_1, \quad (5.21)$$

con $z' = dz/d\rho$. La ecuación de Euler-Lagrange entonces resulta

$$\partial_z \left(e^{\frac{\Phi}{2}} f_1^2 \right) \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2 |z'|^2}{f_1^2}} + e^{\frac{\Phi}{2}} f_1^2 \partial_z \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2 |z'|^2}{f_1^2}} + \partial_z b_1 = \frac{1}{\sinh \rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{2e^{\frac{\Phi}{2}} \sigma^2 \bar{z}'}{\sqrt{1 + \frac{4\sigma^2 |z'|^2}{f_1^2}}} \right). \quad (5.22)$$

Si bien encontrar una solución general a estas ecuaciones parece un problema altamente no trivial, existe un conjunto particularmente simple de soluciones. De hecho, dado un punto en la

³Notar que, al ser independiente de la métrica, el término de acoplamiento de la cuerda al campo B en la acción permanece invariante al cambiar al *frame* de Einstein.

⁴Como se menciona en el Apéndice A, en coordenadas globales, el volumen regularizado de \mathbb{H}_2 es igual a -2π . Si, en cambio, hubiéramos descrito el factor \mathbb{H}_2 en el parche de Poincaré, tendríamos que el volumen regularizado sería nulo. Esta última parametrización se asocia con un Wilson loop recto, el cual posee valor esperado trivial en el vacío.

superficie de Riemann $z = z^*$ tal que

$$\partial_z \left(e^{\frac{\Phi}{2}} f_1^2 \right) \Big|_{z=z^*} = \partial_z b_1 \Big|_{z=z^*} = 0, \quad (5.23)$$

entonces las configuraciones con z constante, *i.e.* $z' = 0$, y en particular $z = z^*$, son soluciones a las ecuaciones de movimiento. Afortunadamente, y como veremos más adelante, esta clase de soluciones satisface las restricciones de simetría explicadas anteriormente. La acción clásica para estas configuraciones formalmente resulta

$$S_{\text{on-shell}} = \frac{\text{vol}(AdS_2)}{2\pi\alpha'} \left(e^{\frac{\Phi}{2}} f_1^2 + b_1 \right) \Big|_{z=z^*} = -\frac{1}{\alpha'} \left(e^{\frac{\Phi}{2}} f_1^2 + b_1 \right) \Big|_{z=z^*}, \quad (5.24)$$

donde hemos usado el volumen regularizado de Anti de Sitter, $\text{Vol}(AdS_2) = -2\pi$.

En este punto, es importante hacer algunos comentarios sobre el fijado de gauge. Como se mencionó previamente, estas geometrías son invariantes frente a transformaciones de gauge de los flujos. En particular, una transformación de gauge del campo B modifica la acción de la cuerda añadiendo un término de borde. De esta manera, las ecuaciones de movimiento permanecen invariantes, por lo que tampoco se ve afectada la configuración clásica. Sin embargo, este término de borde puede afectar, en general, al valor de la acción una vez evaluada en la configuración clásica, por lo que es necesario establecer un criterio para fijar esta redundancia debido a la invariancia de gauge. Como se mencionó anteriormente, se fijará el gauge de manera tal que el campo B se anule en el punto singular z_0 , es decir, se impone $b_1(z_0) = 0$. En este punto singular, la geometría se reduce a $AdS_5 \times S^5$, usualmente asociada al dual del vacío en la teoría conforme. Al contrario, si el campo B no se anulara en este límite, entonces se estaría en presencia de una fuente no trivial en el borde. Esta fuente generaría valores esperados no nulos para determinados operadores en la teoría conforme y por lo tanto no correspondería al estado de vacío.

En las siguientes subsecciones se encontrarán soluciones a las ecuaciones de Euler-Lagrange y se evaluará la acción clásica para cuerdas sobre geometrías de género cero y género uno.

5.2.2 Cuerdas sobre geometrías de género cero

Para familiarizar al lector con los detalles de las soluciones, se repasará el cálculo de hojas de mundo con área mínima para cuerdas en $AdS_5 \times S^5$, geometría correspondiente al caso de género cero. A pesar de ser un resultado bien conocido, reformular este problema en el lenguaje geométrico introducido en la sección anterior permitirá comprender algunos aspectos importantes que luego serán extendidos a casos de género mayor.

En la formulación descripta por coordenadas (v, \bar{v}) (Eq. (5.5)), la métrica correspondiente a $AdS_5 \times S^5$ se obtiene tomando

$$h_1 = -\frac{e^{-\frac{\Phi_0}{2}} L^2}{4} \left(\sqrt{1-v^2} + \sqrt{1-\bar{v}^2} \right), \quad h_2 = i \frac{e^{\frac{\Phi_0}{2}} L^2}{4} (v - \bar{v}). \quad (5.25)$$

Notar que h_1 satisface condiciones de contorno del tipo Neumann a lo largo del segmento real $(-1, 1)$ y tipo Dirichlet en los segmentos restantes que conforman el eje real. Una vez fijado el gauge, el campo B es nulo en todo el espacio. Respecto a las funciones involucradas en la métrica, se tiene que

$$f_1^2 - f_2^2 = L^2, \quad \sigma^2 = \frac{L^2}{4|1-v^2|}, \quad e^\Phi = e^{\Phi_0}, \quad (5.26)$$

donde L y Φ son el radio y el dilatón usuales en $AdS_5 \times S^5$, los cuales están relacionados con la tensión y la constante de acoplamiento de las cuerdas de la siguiente manera⁵

$$L^4 = 4\pi N \alpha'^2, \quad e^{\Phi_0} = g_s. \quad (5.27)$$

Notar que, de la primera relación en (5.26), se deduce que f_1 es constante siempre y cuando f_2 se anule. Esto último ocurre para cualquier punto $v^* \in [-1, 1]$, por lo que cualquier configuración extendida sobre \mathbb{H}_2 y con $v = v^* \in [-1, 1]$ es solución de la ecuación de movimiento $\partial f_1 = 0$. A su vez, todas estas soluciones poseen la misma acción clásica

$$S_{\text{on-shell}} = -\frac{e^{\frac{\Phi_0}{2}} f_1^2(z^*)}{\alpha'} = -\frac{\sqrt{g_s} L^2}{\alpha'} = -\sqrt{\lambda}, \quad (5.28)$$

donde se usó la definición usual de la constante de 't Hooft $\lambda = g_s L^4 / \alpha'^2$.

Dada la estructura de la métrica en esta representación, es claro que la superficie de Riemann provee la coordenada radial que permite escribir AdS_5 como una foliación de $AdS_2 \times S^2$, así como también la coordenada angular que permite escribir a la esfera S^5 como una foliación de la esfera S^4 . Esto resulta evidente si uno realiza el siguiente cambio de variables

$$v = \cosh(\eta - i\theta), \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (5.29)$$

bajo el cual la métrica toma la forma

$$ds^2 = L^2 (d\eta^2 + \cosh^2 \eta ds_{\mathbb{H}_2}^2 + \sinh^2 \eta ds_{S^2}^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta ds_{S^4}^2). \quad (5.30)$$

A su vez, ante este cambio de variables, el segmento de soluciones $v^* \in [-1, 1]$ se mapea al segmento $\eta = 0, 0 \leq \theta \leq \pi$, dejando manifiesto que distintas elecciones de v^* corresponden a distintos ángulos polares en la esfera S^5 . En particular, los puntos de ramificación $v^* = \pm 1$ se asocian a los polos norte y sur respectivamente. Por lo tanto las configuraciones ubicadas en $v^* = \pm 1$ son duales a Wilson loops acoplados con orientaciones opuestas en el espacio interno (antipodales).

⁵En el *frame* de Einstein el radio de AdS es proporcional a N en lugar de λ .

5.2.3 Cuerdas sobre geometrías de género uno

En esta sección se considera el caso particular de geometrías de género uno, debido a que pueden ser realizadas explícitamente en términos de las funciones elípticas de Weierstrass [171]. Estas geometrías son resultado de la *backreaction* de un Wilson loop en una representación asociada a un diagrama de Young rectangular con $n_1 = n$ filas y $k_1 = k$ columnas, ver Fig. 5.2. En este caso, es conveniente trabajar en la descripción en la que Σ es un toro parametrizado por las coordenadas (z, \bar{z}) con períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$. El mapeo entre el toro y el semiplano complejo se realiza en términos de las funciones elípticas de Weierstrass. En particular, fijando $z_0 = 1$, las funciones holomorfas toman la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= i \kappa_1 \left(\zeta(z-1) + \zeta(z+1) - 2 \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3} z \right), \\ \mathcal{B} &= i \kappa_2 (\zeta(z-1) - \zeta(z+1)),\end{aligned}\tag{5.31}$$

donde ζ denota la función ζ de Weierstrass, la cual es primitiva de la función \wp de Weierstrass

$$\wp(z) = -\zeta'(z),\tag{5.32}$$

con la condición $\lim_{z \rightarrow 0} (\zeta(z) - 1/z) = 0$. Las funciones $\zeta(z)$ y $\wp(z)$ dependen implícitamente de las cantidades g_2, g_3 (o equivalentemente \tilde{e}_1, \tilde{e}_2) que especifican los períodos del toro. Más precisamente, $\wp(z)$ se define como la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)]^3 - g_2 \wp(z) - g_3 = 4[\wp(z) - \tilde{e}_1][\wp(z) - \tilde{e}_2][\wp(z) - \tilde{e}_3],\tag{5.33}$$

con $\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 = 0$ y

$$g_2 = 2(\tilde{e}_1^2 + \tilde{e}_2^2 + \tilde{e}_3^2), \quad g_3 = 4\tilde{e}_1\tilde{e}_2\tilde{e}_3.\tag{5.34}$$

En los semiperíodos, ω_i , se tiene que $\wp(\omega_i) = \tilde{e}_i$ y $\wp'(\omega_i) = 0$, entonces verificando la Eq. (5.33). Dados los puntos de ramificación $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ los períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ pueden obtenerse haciendo uso de las integrales elípticas

$$\omega_1 = \frac{\mathbb{K}\left(\frac{\tilde{e}_2 - \tilde{e}_3}{\tilde{e}_1 - \tilde{e}_3}\right)}{\sqrt{\tilde{e}_1 - \tilde{e}_3}}, \quad \omega_3 = i \frac{\mathbb{K}\left(\frac{\tilde{e}_1 - \tilde{e}_2}{\tilde{e}_1 - \tilde{e}_3}\right)}{\sqrt{\tilde{e}_1 - \tilde{e}_3}}, \quad \omega_2 = \omega_1 + \omega_3,\tag{5.35}$$

donde \mathbb{K} es la integral elíptica completa de primer tipo. Finalmente, κ_1 y κ_2 se determinan requiriendo que la geometría, para $z \rightarrow \zeta_0$, sea asintóticamente $AdS_5 \times S^5$. En las proximidades de este punto se encuentra que

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\underset{z \rightarrow 1}{\approx} i \kappa_1 \left[\frac{1}{(z-1)} + \zeta(2) - 2 \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3} - \left(\wp(2) + 2 \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3} \right) (z-1) - \frac{\wp'(2)}{2} (z-1)^2 + \dots \right], \\ \mathcal{B} &\underset{z \rightarrow 1}{\approx} i \kappa_2 \left(\frac{1}{(z-1)} - \zeta(2) + \wp(2)(z-1) + \frac{\wp'(2)}{2} (z-1)^2 + \dots \right).\end{aligned}\tag{5.36}$$

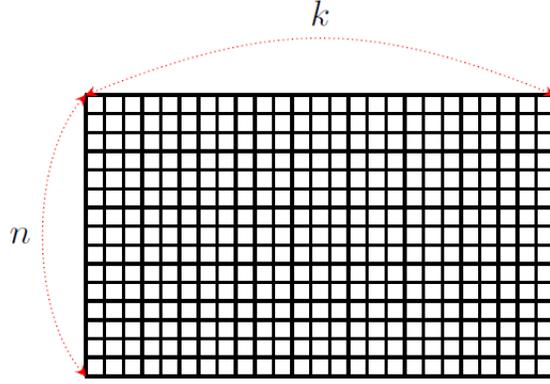


Figura 5.2: El número de filas y columnas en el diagrama de Young se relaciona con las cargas Q_{D3}^1 y Q_{D5}^1 .

Comparando con la Eq. (5.25), vemos que este requerimiento implica

$$\kappa_1 = \frac{L^2}{8} e^{-\frac{\Phi_0}{2}} \left(\wp(2) + \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.37)$$

$$\kappa_2 = \frac{L^2}{8} e^{\frac{\Phi_0}{2}} \left(\wp(2) + \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.38)$$

Por otro lado, imponiendo $b_1 = 0$ en $z = z_0 = 1$, la constante de fijado de gauge resulta

$$b_1^0 = 2\kappa_2 \left(\frac{\wp'(2)}{\wp(2) + \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3}} - 2\zeta(2) \right). \quad (5.39)$$

El número de filas y columnas en el diagrama Young rectangular están directamente relacionados con las cargas de la solución de supergravedad, expresiones (5.15) y (5.16) respectivamente, mientras que el rango del grupo de gauge N se relaciona con $Q_{D3}^0 = Q_{D3}^1 + Q_{D3}^2$. De hecho, para una geometría de género uno se tienen dos 5-ciclos no triviales γ_1 y γ_2 y un 3-ciclo no trivial $\tilde{\gamma}_1$ (ver Fig. 5.3). Las correspondientes cargas fueron explícitamente calculadas en [172] obteniendo⁶

$$\begin{aligned} N - n &= \frac{Q_{D3}^2}{(4\pi^2\alpha')^2}, \\ n &= \frac{Q_{D3}^1}{(4\pi^2\alpha')^2} = \frac{N\omega_3}{2\pi i} \left(4 \left(\zeta(1) - \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3} \right) + \frac{\left(\wp(1) + \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3} \right) \wp''(1) - \wp'(1)^2}{\left(\wp(2) + \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3} \right) \wp'(1)} \right), \\ k &= -\frac{Q_{D5}^1}{4\pi^2\alpha'} = \frac{\sqrt{\pi} i}{\omega_3} \sqrt{\frac{N}{g_s}} \left(\wp(2) + \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

⁶Se usó la expresión D.8 de [172] junto con la identidad de duplicación de las funciones elípticas de Weierstrass $\wp(2) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(1)}{\wp'(1)} \right)^2 - 2\wp(1)$.

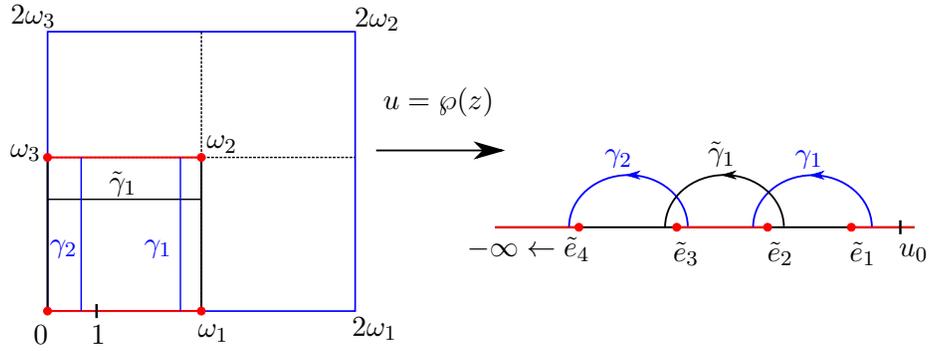


Figura 5.3: Mapeo del toro al semiplano complejo. La frontera del dominio fundamental de las funciones elípticas de Weierstrass delimitado por $\{0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ se mapea al eje real ($\wp(\omega_i) = \tilde{e}_i$).

En lo siguiente, buscaremos soluciones $z = z^*$ de la ecuación de movimiento (5.22) para este caso particular de geometrías de género uno. Es importante recalcar que nuestro interés recae en configuraciones que compartan la misma isometría $SO(2, 1) \times SO(3) \times SO(5)$ con la geometría de fondo. Esto requiere, en particular, que tanto al esfera S^2 como la esfera S^5 estén colapsadas, condición que se satisface precisamente si z^* es uno de los puntos de ramificación en la superficie de Riemann, en los cuales tanto f_2 como f_4 son nulas.

Ahora bien, para demostrar que estos puntos son efectivamente soluciones de (5.23), consideremos las expansiones de las funciones holomorfas \mathcal{A} y \mathcal{B} en la vecindad de los puntos de ramificación localizados en $z = \omega_a$, $a = 0, 1, 2, 3$, con $\omega_0 = 0$. Haciendo uso de la propiedad de periodicidad de las funciones elípticas $\zeta(z + 2\omega_i) = \zeta(z) + 2\zeta(\omega_i)$, las expresiones (5.31) se simplifican drásticamente

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z) &\underset{z \rightarrow \omega_a}{\approx} c_0^A(\omega_a) + c_1(\omega_a)(z - \omega_a) + c_3(\omega_a)(z - \omega_a)^3 + \dots \\ \mathcal{B}(z) &\underset{z \rightarrow \omega_a}{\approx} c_0^B(\omega_a) + c_2(\omega_a)(z - \omega_a)^2 + c_4(\omega_a)(z - \omega_a)^4 + \dots \end{aligned} \quad (5.41)$$

donde⁷

$$\begin{aligned} c_1(\omega_a) &= 2i\kappa_1 \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3}, & c_3(\omega_a) &= -\frac{i\kappa_1}{3} \wp''(1 + \omega_a), \\ c_2(\omega_a) &= i\kappa_2 \wp'(1 + \omega_a), & c_4(\omega_a) &= i\kappa_2 \wp(1 + \omega_a) \wp'(1 + \omega_a), \\ c_0^A(\omega_a) &= -2i\kappa_1 \left(\frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3} \omega_a + \zeta(1 - \omega_a) - \zeta(1 + \omega_a) \right), \\ c_0^B &= -i\kappa_2 (\zeta(1 + \omega_a) + \zeta(1 - \omega_a)). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Introduciendo las expansiones (5.41) en la expresiones para las funciones geométricas 5.7 y los flujos

⁷Tener en cuenta que $\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - g_2/2$.

(5.11) se tiene que

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\Phi}{2}} f_1^2(z) &\underset{z \rightarrow \omega_a}{\approx} \left| \frac{2i c_1 c_2^2}{2c_2 c_3 - c_1 c_4} \right| + \mathcal{O}[(z - \omega_a)^2], \\
b_1(z) &\underset{z \rightarrow \omega_a}{\approx} \frac{2i c_1 c_2^2}{2c_2 c_3 - c_1 c_4} - b_1^0 - 2i c_0^B + \mathcal{O}[(z - \omega_a)^2],
\end{aligned} \tag{5.43}$$

demostrando entonces que $z = \omega_a$ es una solución de (5.23). Por su parte, la acción clásica evaluada en estas configuraciones resulta⁸

$$\begin{aligned}
S_{\text{on-shell}}(\omega_a) &= -\frac{1}{\alpha'} \frac{L^2 \sqrt{g_s}}{4\sqrt{\wp(2) + \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3}}} \left(2\zeta(2) - 2[\zeta(1 + \omega_a) + \zeta(1 - \omega_a)] - \frac{\wp'(2)}{\wp(2) + \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3}} \right) \\
&+ \left| \frac{3\wp'(1 + \omega_a) \left(\wp(1 + \omega_a) + \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3} \right)}{\wp''(1 + \omega_a) - 3\wp(1 + \omega_a) \left(\wp(1 + \omega_a) + \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3} \right)} \right| - \frac{3\wp'(1 + \omega_a) \left(\wp(1 + \omega_a) + \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3} \right)}{\wp''(1 + \omega_a) - 3\wp(1 + \omega_a) \left(\wp(1 + \omega_a) + \frac{\zeta(\omega_3)}{\omega_3} \right)}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

En conclusión, tanto las configuraciones de cuerdas como la acción clásica evaluada en estas configuraciones, pueden expresarse en términos de los puntos de ramificación $\{\tilde{e}_i = \wp(\omega_i), \tilde{e}_4 = \wp(0)\}$. Para realizar una comparación explícita con los resultados del modelo de matrices, es necesario obtener expresiones en las que sea manifiesta la dependencia con los parámetros n y k del diagrama de Young. Esto demanda invertir las relaciones (5.40) para obtener así los puntos de ramificación \tilde{e}_i y los semi-períodos ω_i en términos de n y k . A pesar de que esto parece muy complicado para valores genéricos de los parámetros, existe un límite en el que esta tarea se simplifica considerablemente. En particular, nos interesa el régimen paramétrico en el que n es orden N y k es orden N o incluso más grande.

Acceder a este régimen de interés requiere tomar $\omega_3 \rightarrow 0$ y ω_1 cercano a 2. En este punto es conveniente definir

$$\omega_1 = 2 - \frac{x}{\Lambda}, \quad \omega_3 = \frac{i\pi}{2\Lambda}, \tag{5.45}$$

y considerar Λ muy grande y x finito. En este límite podemos invertir las fórmulas para los períodos, encontrando

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_1 &= \frac{\Lambda^2}{3} (1 + 24e^{2x-\Lambda} + 24e^{4x-2\Lambda} + \mathcal{O}(e^{6x-3\Lambda})), \\
\tilde{e}_2 &= \frac{\Lambda^2}{3} (1 - 24e^{2x-\Lambda} + 24e^{4x-2\Lambda} + \mathcal{O}(e^{6x-3\Lambda})),
\end{aligned} \tag{5.46}$$

obteniendo finalmente la siguiente expansión para la función ζ de Weierstrass⁹

$$\zeta(z) \simeq -\frac{\Lambda^2 z}{3} \left(1 - \frac{3}{\Lambda z} \coth(\Lambda z) \right) + 8\Lambda^2 z e^{4x-8\Lambda} \left(1 - \frac{\sinh(2\Lambda z)}{2\Lambda z} \right) + \mathcal{O}(e^{6x-3\Lambda}), \tag{5.47}$$

⁸La periodicidad de las funciones elípticas permite escribir $\zeta(1 + \omega_i) = \zeta(1 - \omega_i) + 2\zeta(\omega_i)$.

⁹Puede mostrarse que incluir más órdenes subdominantes no afecta a la evaluación de la acción clásica en el régimen considerado, por lo que no los incluiremos en esta expansión.

y $\wp(z) = -\zeta'(z)$. En este límite, las cargas (5.40) adoptan la forma

$$n = \frac{e^{4x}}{1 + e^{4x}} N, \quad (5.48)$$

$$k = \frac{2e^{2\Lambda}}{\sqrt{\lambda}\sqrt{1 + e^{4x}}} N. \quad (5.49)$$

Análogamente, la acción clásica (5.44) expandida en este régimen resulta

$$\begin{aligned} S_{\text{on-shell}}(0) = S_{\text{on-shell}}(\omega_3) &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 + e^{4x}}} + \frac{\sqrt{\lambda}e^{2\Lambda}e^{4x}}{2(1 + e^{4x})^{3/2}}, \\ S_{\text{on-shell}}(\omega_1) = S_{\text{on-shell}}(\omega_2) &= -\frac{\sqrt{\lambda}e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{4x}}} - \frac{\sqrt{\lambda}e^{2\Lambda}}{2(1 + e^{4x})^{3/2}}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

expresiones que a su vez pueden reescribirse en términos del número de filas y columnas haciendo uso de (5.48) y (5.49)

$$S_{\text{on-shell}}(0) = S_{\text{on-shell}}(\omega_3) = -\sqrt{\lambda\left(1 - \frac{n}{N}\right)} + \frac{kn\lambda}{4N^2}, \quad (5.51)$$

$$S_{\text{on-shell}}(\omega_1) = S_{\text{on-shell}}(\omega_2) = -\sqrt{\lambda\frac{n}{N}} - \frac{k(N - n)\lambda}{4N^2}. \quad (5.52)$$

Notar que el par de puntos estacionarios en $z^* = 0, \omega_3$ poseen la misma acción clásica (al menos en el régimen paramétrico de interés), y lo mismo ocurre para el par en $z^* = \omega_1, \omega_2$. Estas soluciones difieren en la posición de la cuerda en la superficie de Riemann, y nos gustaría identificar qué correladores de Wilson loops se relacionan con cada una de estas soluciones, de acuerdo a la correspondencia AdS/CFT. Debido a que cuerdas localizadas en cualquiera de los cuatro puntos de ramificación dan lugar a configuraciones con isometría $SO(2, 1) \times SO(3) \times SO(5)$, se deduce que los correspondientes Wilson loops presentes en el correlador se extienden sobre el mismo círculo y poseen iguales u opuestas orientaciones en el espacio interno. En lo que resta de esta sección, argumentaremos que la siguiente prescripción es la correcta: Se tendrán en cuenta simultáneamente las contribuciones de los puntos estacionarios localizados o bien en $z^* = 0, \omega_1$ o bien en $z^* = \omega_2, \omega_3$, correspondiendo ambas elecciones a orientaciones opuestas (antipodales) en el espacio interno.

En primer lugar, considerando el límite en el que la geometría *bubbling* se reduce a $AdS_5 \times S^5$, se puede mostrar que las cuerdas ubicadas en $z^* = 0$ y $z^* = \omega_3$ son la descripción dual de inserciones de Wilson loops con orientaciones opuestas en el espacio interno. Precisamente, consideremos el límite $\omega_1 \rightarrow \infty$, el cual se asocia al colapso de uno de los cortes de ramificación (en particular $\tilde{e}_2 \rightarrow \tilde{e}_1$). En este límite se recupera la geometría de fondo $AdS_5 \times S^5$ usual, y adicionalmente los puntos $z = 0$ y $z = \omega_3$ se mapean a puntos antipodales en la esfera S^5 (ver Apéndice F). Por lo tanto, cuerdas localizadas en estos puntos corresponden a Wilson loops fundamentales acoplados al sector escalar con vectores opuestos. Extrapolando al caso del correlador de un Wilson loop *backreactante* y uno fundamental, concluimos que, si ambos operadores poseen la misma orientación en el espacio interno, entonces se debe considerar o bien $z^* = 0$ o bien $z^* = \omega_3$, pero no ambos simultáneamente.

Por otro lado, la existencia de cuatro puntos estacionarios es una consecuencia no trivial de estar en presencia de una geometría de género uno. En particular, argumentaremos que la contribución del punto estacionario en $z^* = \omega_1$ debe ser tenida en cuenta junto con la de $z^* = 0$, y alternativamente la contribución de $z^* = \omega_2$ debe considerarse simultáneamente con la $z^* = \omega_3$. Teniendo en cuenta esto, podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿En qué forma dos configuraciones localizadas en distintos puntos en la superficie de Riemann Σ , digamos $z^* = 0$ y $z^* = \omega_1$, pueden corresponder a soluciones del mismo problema variacional? Una posible respuesta a esta incógnita recae en la naturaleza de Σ : debido a que el dominio de definición de las funciones geométricas está compuesto por dos hojas de Riemann (es decir, las funciones que definen la geometría no son en general monovaluadas) parece natural definir el problema variacional con dos condiciones de contorno. Por otro lado, existe cierta evidencia que apunta a que los puntos estacionarios $z^* = 0$ y $z^* = \omega_1$ corresponden al mismo correlador en la CFT (y análogamente para $z^* = \omega_2$ y $z^* = \omega_3$). Esta relación puede establecerse en términos de transformaciones de gauge *grandes*. En particular, consideremos el cambio de variables $z \rightarrow z + \omega_i$, bajo el cual las funciones holomorfas \mathcal{A} y \mathcal{B} transforman como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z, z_0) &\rightarrow \mathcal{A}(z, z_0 + \omega_i) + \alpha_i, & \alpha_1 = \alpha_2 = i \frac{\pi \kappa_1}{|\omega_3|}, & \alpha_3 = 0, \\ \mathcal{B}(z, z_0) &\rightarrow \mathcal{B}(z, z_0 + \omega_i) + \beta_i, & \beta_i = i 2\kappa_2 \zeta(\omega_i), & \end{aligned} \quad (5.53)$$

donde hemos cambiado ligeramente la notación para hacer manifiesta la dependencia con el punto singular. En general, un corrimiento en la posición del punto singular corresponde a una transformación conforme en la geometría de fondo. Por otro lado, dado que sólo $\zeta(\omega_1)$ es real, las configuraciones centradas en $\omega_0 = 0$ y ω_1 están relacionadas por un corrimiento imaginario en las funciones holomorfas. De la definición de h_1 y h_2 es claro que este corrimiento no afecta las funciones involucradas en la métrica. Sin embargo, tienen un efecto no trivial sobre los flujos, asociado a transformaciones de gauge *grandes*. Este tipo de transformaciones se asocia naturalmente a una redefinición de las cargas de la geometría, ya que éstas se definen como integrales de los flujos en cuestión. Para más detalles sobre este fenómeno nos referimos a la discusión presente en [172], en donde se lo relaciona íntimamente con el efecto Hannay-Witten. Por lo tanto, el resultado final será invariante respecto de este tipo de transformaciones sólo si se tiene en cuenta la contribución de ambos puntos estacionarios, es decir, $z^* = 0$ y $z^* = \omega_1$. Notar que se puede establecer el mismo tipo de relación entre las configuraciones en $z^* = \omega_2$ y $z^* = \omega_3$.

Esta transformación de gauge de la geometría de fondo está naturalmente asociada a una simetría presente en la teoría de gauge dual. El valor esperado de un Wilson loop en una dada representación \mathbf{R} permanece invariante si reemplazamos \mathbf{R} por $\bar{\mathbf{R}}$, siendo esta última la representación que se obtiene por conjugación compleja. Pictóricamente, la representación conjugada se obtiene invirtiendo el diagrama de Maya asociado a un dado diagrama de Young [170, 185] (ver Fig. 5.4)

Los segmentos negros en el diagrama de Maya son una representación directa del dominio de la densidad de autovalores $\rho(x)$ para el correspondiente modelo de matrices, el cual será estudiado en la siguiente sección.

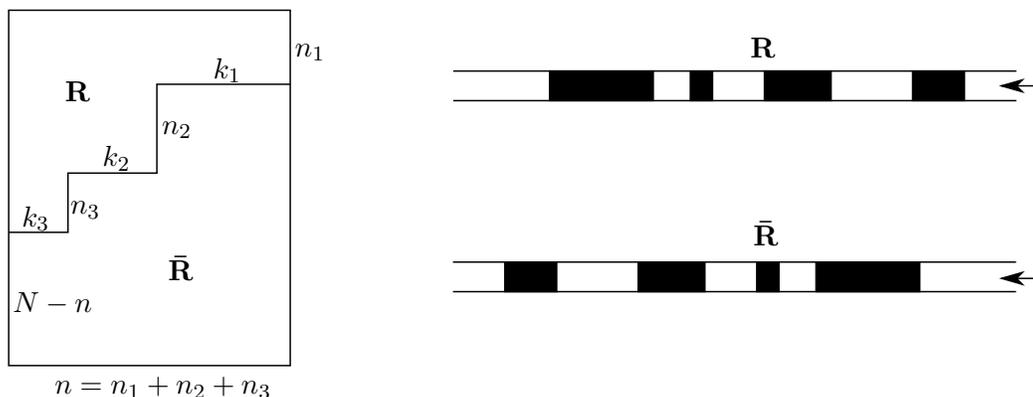


Figura 5.4: Diagramas de Young para \mathbf{R} y $\bar{\mathbf{R}}$ y los diagramas de Maya asociados.

En la descripción gravitatoria, esta simetría frente a conjugación se asocia naturalmente a la libertad de estudiar la geometría desde una u otra hoja de Riemann en la superficie de Riemann Σ (ver Fig. 5.5). Vemos que al pasar de un esquema al otro, los roles de los puntos de ramificación $\tilde{e}_4 = -\infty$ ($z = 0$) y \tilde{e}_1 ($z = \omega_1$) se intercambian entre sí; y lo mismo ocurre con los puntos \tilde{e}_2 ($z = \omega_2$) y \tilde{e}_3 ($z = \omega_3$). A su vez, los ciclos no triviales también se intercambian entre sí, dando lugar a la transformación $n \rightarrow N - n$ asociada usualmente a la operación de conjugación.

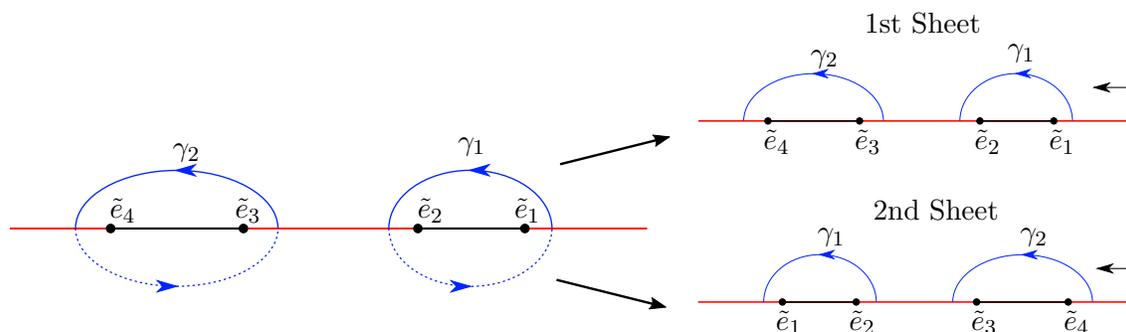


Figura 5.5: Izquierda: Las líneas rojas denotan los cortes de ramificación y las líneas punteadas azules indican que los ciclos se cierran en la segunda hoja de Riemann correspondiente a la superficie de Riemann. Derecha: Los puntos de ramificación y los ciclos intercambian los roles cuando se los estudia desde una hoja de Riemann o la otra.

Tomando en cuenta ambas contribuciones y definiendo $\nu = \frac{n}{N}$, el resultado final para el corre-

lador desde el punto de vista del dual gravitatorio resulta

$$\boxed{\langle W_{\text{fund}} \rangle_{\mathbf{R}} = \frac{\langle W_{\mathbf{R}} W_{\text{fund}} \rangle}{\langle W_{\mathbf{R}} \rangle} \approx e^{\sqrt{\lambda(1-\nu)} - \frac{k\nu\lambda}{4N}} + e^{\sqrt{\lambda\nu} + \frac{k(1-\nu)\lambda}{4N}}} \quad (5.54)$$

Como un último comentario, notar que el resultado es invariante frente a $n \rightarrow N - n$ siempre y cuando se tome también $k \rightarrow -k$, sugiriendo que conjugar la representación está relacionado también a elegir una orientación diferente del sistema de branas con el cual interactúa la cuerda.

Hasta aquí hemos considerado configuraciones de cuerdas duales a correladores de Wilson loops definidos sobre el mismo círculo y cuyas orientaciones en el espacio interno pueden ser iguales u opuestas. Sin embargo, esta situación no agota todas las posibles configuraciones consistentes con la condición de preservar una simetría $SO(2, 1) \times SO(3) \times SO(5)$. De hecho, podríamos considerar correladores entre dos Wilson loops definidos sobre contornos circulares coincidentes pero parametrizados de manera contraria (es decir, recorridos en sentidos opuestos). De nuevo, la orientación en el espacio interno puede ser igual u opuesta.

La dinámica de una cuerda dual a un Wilson loop con una parametrización opuesta está gobernada por la misma acción de Nambu-Goto, pero con una inversión en el signo del término de acoplamiento con el campo B . Para este problema alternativo, las configuraciones localizadas en los puntos $z = \omega_a$ también serán soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Sin embargo, la acción clásica evaluada en estas configuraciones ahora resulta

$$\tilde{S}_{\text{on-shell}}(0) = \tilde{S}_{\text{on-shell}}(\omega_3) = -\sqrt{\lambda\left(1 - \frac{n}{N}\right) - \frac{kn\lambda}{4N^2}}, \quad (5.55)$$

$$\tilde{S}_{\text{on-shell}}(\omega_1) = \tilde{S}_{\text{on-shell}}(\omega_2) = -\sqrt{\lambda\frac{n}{N} + \frac{k(N-n)\lambda}{4N^2}}. \quad (5.56)$$

En la misma línea de razonamiento que se aplicó al caso anterior, se concluye que, o bien $z^* = 0$ y $z^* = \omega_1$ o bien $z^* = \omega_2$ y $z^* = \omega_3$ contribuyen al valor esperado de estos correladores, dependiendo de la orientación relativa en el espacio interno. Por lo tanto, el resultado holográfico para este tipo de correladores es

$$\frac{\langle W_{\mathbf{R}} \tilde{W}_{\text{fund}} \rangle}{\langle W_{\mathbf{R}} \rangle} \approx e^{\sqrt{\lambda(1-\nu)} + \frac{k\nu\lambda}{4N}} + e^{\sqrt{\lambda\nu} - \frac{k(1-\nu)\lambda}{4N}}. \quad (5.57)$$

En la siguiente sección veremos que el correspondiente modelo de matrices para este tipo de correladores reproduce este resultado, reforzando indirectamente esta interpretación. El estudio de la supersimetría preservada desde el lado de la teoría de gauge se presenta en el Apéndice B.5.

5.2.4 Cuerdas sobre geometrías de género g

Por último, consideremos una cuerda fundamental sobre una geometría de género arbitrario g . Trabajaremos en la formulación del semiplano, descrito por las coordenadas complejas (v, \bar{v}) , en

las cuales, como se mencionó previamente, la solución queda completamente determinada por la función $w(v)$. Esta función, a su vez, se identifica con la resolvente del modelo de matrices dual [186]. Primero probaremos que, dada una geometría de género g , cuerdas situadas en cualquiera de los $2g + 2$ puntos de ramificación e_a dan lugar a soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Luego evaluaremos la acción clásica para estas configuraciones.

En el plano v , las funciones \mathcal{A} y \mathcal{B} toman la forma

$$\mathcal{A}(v) = i \frac{\alpha'}{8g_s} [2v - w(v)], \quad \mathcal{B}(v) = i \frac{\alpha' v}{4}. \quad (5.58)$$

En estas coordenadas, la región en la que la geometría es asintóticamente $AdS_5 \times S^5$ corresponde a $v \rightarrow \infty$. El comportamiento asintótico para la función $w(v)$ en esta región es, genéricamente

$$w(v) = \frac{\lambda}{v} + \frac{\lambda w_1}{v^2} + \mathcal{O}(v^{-3}). \quad (5.59)$$

Introduciendo (5.58) y (5.59) en la solución de gravedad, encontramos que el potencial b_1 se hace cero para $v \rightarrow \infty$ siempre y cuando $b_1^0 = \alpha' w_1$.

Ahora bien, consideremos la acción para una cuerda en las cercanías de los puntos de ramificación e_a . Las expansiones para h_1 y h_2 sobre el eje real fueron realizadas en [171]. Escribiendo $v = x + iy$ y expandiendo estas funciones cerca de la frontera ($y \approx 0$), tenemos que

$$\begin{aligned} h_1 &= \mathcal{A} + \bar{\mathcal{A}} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + a_3(x)y^3 + \mathcal{O}(y^4), \\ h_2 &= \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} = -\alpha' \frac{y}{2}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Los coeficientes a_{2k} y a_{2k+1} están completamente determinados por a_0 y a_1 respectivamente debido a la ecuación armónica $(\partial_x^2 + \partial_y^2)h_1 = 0$. En particular

$$a_2(x) = -\frac{1}{2}a_0''(x), \quad a_3(x) = -\frac{1}{6}a_1''(x), \quad (5.61)$$

y así sucesivamente. A lo largo del eje real, h_1 satisface condiciones de contorno de tipo Neumann o Dirichlet, por lo que o bien $a_0(x)$ o bien $a_1(x)$ deben ser nulas en estas regiones. Por lo tanto, escribimos

$$h_1(x + iy) = \begin{cases} a_0(x) + a_2(x)y^2 + \dots & N : x \in (e_{2i}, e_{2i-1}) \\ a_1(x)y + a_3(x)y^3 + \dots & D : x \in (e_{2j+1}, e_{2j}) \end{cases} \quad (5.62)$$

Por ejemplo, aproximándose al eje real a lo largo de un intervalo en donde h_1 satisface condiciones de contorno tipo Neumann, y usando (5.60)-(5.62), obtenemos

$$W = \alpha' \frac{a_0''(x)y}{4} + \mathcal{O}(y^3), \quad V = -\alpha' \frac{ia_0'(x)}{4} + \mathcal{O}(y^2), \quad (5.63)$$

$$N_1 = -\alpha' \frac{a_0(x)}{4} [a_0'(x)^2 + a_0(x)a_0''(x)] y + \mathcal{O}(y^3), \quad N_2 = -\frac{(\alpha')^3}{16} a_0(x)y + \mathcal{O}(y^3). \quad (5.64)$$

dando lugar a

$$e^{\frac{\Phi}{2}} f_1^2 = \alpha' \left| \frac{\sqrt{a_0(x)^3 a_0''(x)}}{a_0'(x)^2 + a_0(x) a_0''(x)} \right| + \mathcal{O}(y^2),$$

$$b_1 = \alpha' x - \alpha' \frac{a_0(x) a_0'(x)}{a_0'(x)^2 + a_0(x) a_0''(x)} - b_1^0 + \mathcal{O}(y^2), \quad (5.65)$$

Sobre los puntos de ramificación, h_1 satisface ambas condiciones, Neumann y Dirichlet, por lo que tanto a_0 como a_1 deben anularse. Además, sabemos que \mathcal{A} desarrolla un corte de ramificación en estos puntos. Por lo tanto, tenemos que

$$a_0(x) = (x - e_a)^{\frac{1}{2}} [C_{a,0} + C_{a,1} (x - e_a) + C_{a,2} (x - e_a)^2 + \mathcal{O}(x - e_a)^3], \quad (5.66)$$

donde $C_{a,n}$ denota ciertos coeficientes numéricos. Expandiendo (5.65) alrededor de estos puntos, encontramos

$$e^{\frac{\Phi}{2}} f_1^2 = \alpha' \left| \frac{C_{a,0}}{4 C_{a,1}} - \frac{3}{8 C_{a,1}^2} (C_{a,1}^2 + 2 C_{a,0} C_{a,2}) (x - e_a) \right| + \mathcal{O}(x - e_a)^2 + \mathcal{O}(y)^2,$$

$$b_1 = \alpha' \left[e_1 - \frac{C_{a,0}}{4 C_{a,1}} + \frac{3}{8 C_{a,1}^2} (C_{a,1}^2 + 2 C_{a,0} C_{a,2}) (x - e_a) \right] - b_1^0 + \mathcal{O}(x - e_a)^2 + \mathcal{O}(y)^2, \quad (5.67)$$

Vemos entonces que los puntos de ramificación son soluciones de las ecuaciones de movimiento siempre y cuando los coeficientes de la expansión satisfagan la relación

$$C_{a,1}^2 + 2 C_{a,0} C_{a,2} = 0. \quad (5.68)$$

En breve, verificaremos que esta relación se satisface al menos en un régimen paramétrico interesante. La acción clásica resulta

$$S_{\text{on-shell}}(e_a) = -\frac{1}{\alpha'} \left(e^{\frac{\Phi}{2}} f_1^2 + b_1 \right) \Big|_{v=e_a} = -e_a + \frac{C_{a,0}}{4 C_{a,1}} - \left| \frac{C_{a,0}}{4 C_{a,1}} \right| + \frac{b_1^0}{\alpha'}. \quad (5.69)$$

Los resultados generales expuestos hasta ahora, pueden cuantificarse en un límite particular de la geometría de género g , donde la física resulta más transparente y puede proponerse una expresión concreta para $w(v)$. Consideremos el límite en el que los cortes de ramificación (intervalos con condiciones tipo Neumann para h_1) están suficientemente separados entre sí. De esta manera, en la cercanía de uno de los cortes de ramificación, podemos prescindir de la información sobre el resto, y la función h_1 se comportará esencialmente como en el caso de género cero. Veremos que, en el modelo de matrices dual, algo similar ocurre con la resolvente $w(v)$ en el límite en el que el diagrama de Young se compone de bloques muy grandes.

Denotaremos con L_i a los $g + 1$ cortes de ramificación, centrados en c_i , y de largo $2\mu_i$. En otras palabras, parametrizamos los $2g + 2$ puntos de ramificación de manera tal que $e_{2i} = c_i - \mu_i$

y $e_{2i-1} = c_i + \mu_i$. Ahora proponemos la siguiente expresión para la forma que toma $w(x)$ sobre el eje real, la cual es válida en el límite en el que los cortes están muy separados, *i.e.* $|c_i - c_j| \gg 1$. Para $x \in L_i$, o equivalentemente $c_i - \mu_i < x < c_i + \mu_i$, tenemos que

$$w(x) = 2(x - c_i) - 2i\sqrt{\mu_i^2 - (x - c_i)^2} + 2\sum_{k=1}^{i-1} \left(x - c_k + \sqrt{(x - c_k)^2 - \mu_k^2} \right) + 2\sum_{k=i+1}^{g+1} \left(x - c_k - \sqrt{(x - c_k)^2 - \mu_k^2} \right). \quad (5.70)$$

Mientras que, para x localizado entre dos cortes, *i.e.* $c_{i+1} + \mu_{i+1} < x < c_i - \mu_i$,

$$w(x) = 2\sum_{k=1}^i (x - c_k) + \sqrt{(x - c_k)^2 - \mu_k^2} + 2\sum_{k=i+1}^{g+1} (x - c_k) - \sqrt{(x - c_k)^2 - \mu_k^2}. \quad (5.71)$$

Por lo tanto, en la vecindad del corte de ramificación L_i , y teniendo en cuenta que $|c_i - c_j| \gg 1$, se obtiene

$$w(x) \approx \begin{cases} 2(x - c_i) + 2\sqrt{(x - c_i)^2 - \mu_i^2} & x < c_i - \mu_i \\ 2(x - c_i) - 2i\sqrt{\mu_i^2 - (x - c_i)^2} & c_i - \mu_i < x < c_i + \mu_i \\ 2(x - c_i) - 2\sqrt{(x - c_i)^2 - \mu_i^2} & x > c_i + \mu_i \end{cases} \quad (5.72)$$

donde \approx significa que estamos descartando términos de orden $\mathcal{O}\left(\frac{1}{c_i - c_j}\right)$. Notar además que, tomando el límite $x \rightarrow \infty$, se obtiene

$$w(x) = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{g+1} \mu_i^2 + \frac{1}{x^2} \sum_{i=1}^{g+1} c_i \mu_i^2 + \mathcal{O}(x^{-3}), \quad (5.73)$$

por lo que el requerimiento de que b_1 sea nulo en la región en la que la geometría es asintóticamente $AdS_5 \times S^5$ se traduce en

$$b_1^0 = \alpha' \frac{\sum_{i=1}^{g+1} c_i \mu_i^2}{\sum_{i=1}^{g+1} \mu_i^2}. \quad (5.74)$$

En este punto, y para realizar una comparación con los resultados de teoría de gauge, es conveniente expresar los parámetros que definen los puntos de ramificación $\{c_i, \mu_i\}$ en términos de los flujos de D-branas. Estos últimos están directamente relacionados con los enteros $\{n_i, k_j\}$ que especifican la representación del Wilson loop dual. Estas relaciones pueden obtenerse de (5.15)-(5.18), obteniendo

$$(4\pi^2 \alpha')^2 n_i = 32 \pi^2 i \int_{e_{2i}}^{e_{2i-1}} d\mathcal{C} + \text{c.c.} = \frac{4\pi^2 (\alpha')^2}{g_s} i \int_{e_{2i}}^{e_{2i-1}} w(x) dx + \text{c.c.},$$

$$(4\pi^2 \alpha') k_j = -8\pi i \int_{e_{2j+1}}^{e_{2j}} d\mathcal{A}(x) + \text{c.c.} = -\frac{\pi \alpha'}{g_s} \int_{e_{2j+1}}^{e_{2j}} d[w(x) - 2x] + \text{c.c.}, \quad (5.75)$$

donde, en la primera línea, hemos hecho una integración por partes y usado que $xw(x)$ es real una vez evaluado en los puntos de ramificación. Ahora hacemos uso de (5.72) y, dado que la integral está definida levemente por encima del eje real, tenemos que

$$n_i \approx \frac{1}{2\pi^2 g_s} \int_{c_i - \mu_i}^{c_i + \mu_i} \sqrt{\mu_i^2 - (x - c_i)^2} = \frac{N}{\lambda} \mu_i^2, \quad (5.76)$$

$$k_j \approx -\frac{1}{4\pi g_s} \int_{e_{2j+1}}^{e_{2j}} d[w(x) - 2x] + \text{c.c.} = \frac{4N}{\lambda} (c_j - c_{j+1}). \quad (5.77)$$

Definimos entonces $\nu_i = \frac{n_i}{N}$ y $K_j = \sum_{j=1}^g k_j$, de manera que podemos escribir $k_j = K_j - K_{j+1}$, concluyendo que $\mu_i = \sqrt{\lambda \nu_i}$ y $c_i = \frac{\lambda K_i}{4N} + c_0$. A su vez, dado que $\sum_{i=1}^{g+1} \nu_i = 1$, la constante de fijado de gauge resulta

$$b_1^0 = \alpha' \sum_{i=1}^{g+1} c_i \nu_i. \quad (5.78)$$

Para evaluar explícitamente la acción (5.24), necesitamos los coeficientes $C_{a,n}$ de la expansión de $a_0(x)$. Para la propuesta (5.72), y en particular para $x \in L_i$, se tiene que

$$a_0(x) = \frac{\alpha'}{2g_s} \sqrt{\mu_i^2 - (x - c_i)^2}, \quad (5.79)$$

Expandiendo alrededor del extremo derecho del intervalo, $x \approx e_{2i-1} = c_i + \mu_i$, obtenemos una expansión de la forma (5.66) con

$$C_{2i-1,0} = \frac{i\alpha'}{g_s} \sqrt{\frac{\mu_i}{2}} \quad , \quad C_{2i-1,1} = \frac{C_{2i-1,0}}{4\mu_i} \quad , \quad C_{2i-1,2} = -\frac{C_{2i-1,0}}{32}. \quad (5.80)$$

Vemos entonces que estos coeficientes satisfacen justamente la relación (5.68), correspondiendo entonces a una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange. A su vez, la acción clásica (5.67) evaluada en estos puntos resulta

$$\begin{aligned} S_{\text{on-shell}}(e_{2i-1}) &= -e_{2i-1} + \frac{b_1^0}{\alpha'} = -c_i - \mu_i + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{g+1} c_j \mu_j^2 \\ &= -\sqrt{\lambda \nu_i} - \frac{\lambda}{4N} \left(K_i - \sum_{j=1}^g K_j \nu_j \right). \end{aligned} \quad (5.81)$$

Notar que, al pasar de la primera a la segunda línea, la dependencia en la constante arbitraria c_0 se cancela. Esto implica que la acción clásica es invariante frente a corrimientos rígidos de los cortes de ramificación.

Por otro lado, los coeficientes para la expansión en las proximidades del extremo izquierdo, es decir $x \approx e_{2i} = c_i - \mu_i$, son

$$C_{2i,0} = \frac{\alpha'}{g_s} \sqrt{\frac{\mu_i}{2}} \quad , \quad C_{2i,1} = -\frac{C_{2i,0}}{4\mu_i} \quad , \quad C_{2i,2} = -\frac{C_{2i,0}}{32}. \quad (5.82)$$

Vemos que en este caso también satisfacen (5.68), y la acción clásica (5.67) resulta

$$S_{\text{on-shell}}(e_{2i}) = -c_i + \mu_i - \left| \frac{C_{2i,0}}{2C_{2i,1}} \right| + \frac{b_1^0}{\alpha'} = -c_i - \mu_i + \frac{b_1^0}{\alpha'} = -e_{2i-1} + \frac{b_1^0}{\alpha'}. \quad (5.83)$$

El mismo análisis puede realizarse sobre los intervalos en los que la función h_1 cumple condiciones tipo Dirichlet, obteniéndose el mismo resultado, como era de esperarse. En analogía con el caso de género uno, las configuraciones localizadas en ambos extremos de un corte de ramificación dan lugar a la misma acción clásica. Sin embargo, sólo $g+1$ de ellas contribuirán a la aproximación de punto estacionario para el correlador de Wilson loops,

$$\langle W_{\text{fund}} \rangle_{\mathbf{R}} \approx \sum_{i=1}^{g+1} e^{-S_{\text{on-shell}}(e_i^*)} = \sum_{i=1}^{g+1} e^{\sqrt{\lambda\nu_i} + \frac{\lambda}{4N} (K_i - \sum_{j=1}^g K_j \nu_j)}, \quad (5.84)$$

donde $\{e_i^*\}$ denota al subconjunto de puntos de ramificación correspondientes a configuraciones de cuerdas compatibles, en el mismo sentido que se discutió para el caso de género uno, en el cual $\{e_i^*\} = \{e_1, e_4\}$.

Finalmente, como se mencionó previamente, para el correlador de Wilson loops con orientaciones opuestas, debemos cambiar el signo del término que involucra al campo b_1 en la acción clásica. Repitiendo el mismo análisis obtenemos

$$\langle \widetilde{W}_{\text{fund}} \rangle_{\mathbf{R}} \approx \sum_{i=1}^{g+1} e^{-S_{\text{on-shell}}(e_i^*)} = \sum_{i=1}^{g+1} e^{\sqrt{\lambda\nu_i} - \frac{\lambda}{4N} (K_i - \sum_{j=1}^g K_j \nu_j)}, \quad (5.85)$$

5.3 Correladores de Wilson loops $\frac{1}{2}$ -BPS en $\mathcal{N} = 4$ SYM

A lo largo de esta sección nos concentraremos en la descripción correspondiente a la teoría de campos dual para los objetos que hemos considerado hasta ahora, *i.e.* correladores de Wilson loops $1/2$ BPS en $\mathcal{N} = 4$ super Yang Mills. Específicamente, consideraremos el siguiente correlador de dos Wilson loops

$$\langle W_{\mathbf{r}} \rangle_{\mathbf{R}} = \frac{\langle W_{\mathbf{R}} W_{\mathbf{r}} \rangle}{\langle W_{\mathbf{R}} \rangle}, \quad (5.86)$$

con los operadores definidos de la siguiente forma

$$W_{\mathbf{R}} = \text{tr}_{\mathbf{R}} P \exp \left[\oint_{\mathcal{C}} ds \left(iA_{\mu} \dot{x}^{\mu} + \vec{n} \cdot \vec{\Phi} |\dot{x}| \right) \right]. \quad (5.87)$$

Ambos Wilson loops serán evaluados sobre el mismo círculo, *i.e.* uno encima del otro, y compartirán la misma orientación en el espacio interno, determinada por $\vec{n}(\tau) = \vec{n}_0$ con \vec{n}_0 un vector unitario constante en el espacio interno. Con \mathbf{R} y \mathbf{r} nos referimos a la representación grande (*back-reactante*) y pequeña respectivamente. Particularmente, consideraremos los casos en los que \mathbf{r} es

la representación fundamental, totalmente simétrica o totalmente antisimétrica. Notar que el correlador $\langle W_{\mathbf{r}} \rangle_{\mathbf{R}}$ no posee dimensiones, y que a su vez no existen otras escalas en el problema más allá del radio del contorno circular, por lo que el resultado debería ser una función de la constante de acoplamiento y del rango del grupo de gauge, pero independiente del radio.

Un hecho notable es que el valor esperado de operadores de la forma (5.87) puede obtenerse a partir de valores esperados calculados en un modelo de matrices Gaussiano, el cual se obtiene por medio de localización [93]. Cuando el rango de la representación \mathbf{R} es muy grande, la inserción de este Wilson loop compite con los términos cuadráticos en el modelo de matrices. Esto tiene efectos sobre la distribución de autovalores, los cuales son la contraparte de la *backreaction* que se observa en el dual gravitatorio, en el cual la geometría dual deja de ser $AdS_5 \times S^5$ [171, 186]. Esto sugiere comparar $\langle W_{\text{fund}} \rangle_{\mathbf{R}}$ con el resultado (5.84) para una cuerda sobre una geometría *bubbling* genérica.

Específicamente, nuestro interés recae en el cálculo de correladores de Wilson loops, en los cuales uno de los dos está en una representación lo suficientemente grande como para afectar la densidad de autovalores del correspondiente modelo de matrices, mientras que el otro permanece en una representación pequeña. Inicialmente, seguiremos de cerca la intuición presentada en [186] para el análisis del caso en el que la representación grande \mathbf{R} corresponde a un diagrama de Young rectangular, mientras que \mathbf{r} es la fundamental. Por otro lado, generalizaremos el tratamiento de [177] para el caso en el que \mathbf{r} es la representación totalmente simétrica o totalmente antisimétrica. Finalmente, se extenderán todos estos resultados al caso en que \mathbf{R} es una representación grande arbitraria del grupo de gauge.

5.3.1 Wilson loop en una representación grande

En esta sección repasaremos el cálculo del valor esperado de un Wilson loop en una representación arbitraria \mathbf{R} del grupo de gauge [186]. Primero estudiaremos el caso en el que el grupo de gauge es $U(N)$ y luego especificaremos como, a partir de este resultado, obtener el correspondiente al caso $SU(N)$. Por medio de localización, el valor esperado para una inserción de un Wilson loop circular en $\mathcal{N} = 4$ se reduce a un valor esperado en un modelo Gaussiano de matrices hermíticas. Siempre es posible trabajar en la base en la que estas matrices son diagonales, obteniendo la siguiente expresión

$$\langle W_{\mathbf{R}} \rangle = \frac{1}{Z} \int da \Delta(a) e^{-\frac{2N}{\lambda} \sum_r a_r^2} \text{tr}_{\mathbf{R}} e^a, \quad (5.88)$$

con

$$Z = \int da \Delta(a) e^{-\frac{2N}{\lambda} \sum_r a_r^2}, \quad (5.89)$$

donde a_r son los correspondientes autovalores en la representación fundamental y $da = \prod_{r=1}^N da_r$, $\Delta(a) = \prod_{r < s} (a_r - a_s)^2$ es el determinante de Vandermonde (Jacobiano que aparece como resultado

de trabajar en a base diagonal). Una dada representación \mathbf{R} de $U(N)$ está completamente determinada por los parámetros de Dynking $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1})$, o equivalentemente por un diagrama de Young con filas de longitud ℓ_r tales que

$$\ell_r = 1 + \sum_{s=r}^{N-1} \lambda_s \quad r = 1, \dots, N. \quad (5.90)$$

Dada una representación, resulta conveniente asociar un diagrama de Young con una columna extra de longitud N . Definimos la base ortonormal $\{e_r\}$ con $e_r \in \mathbb{R}^N$, en términos de las cuales es posible escribir las raíces simples de $U(N)$ como $\alpha_r = e_r - e_{r+1}$ para $r = 1, \dots, N-1$. El caracter de una dada representación se obtiene a través de la fórmula de Weyl

$$\text{tr}_{\mathbf{R}} e^a = \sum_{\alpha \in \mathbf{R}} e^{a \cdot \alpha} = \frac{\det_{r,s} e^{a_r(\ell_s + N - s)}}{\det_{r,s} e^{a_r(N - s)}}, \quad (5.91)$$

donde la suma se realiza sobre el conjunto de pesos $\{\alpha\}$ que definen la representación \mathbf{R} . El determinante en el numerador puede ser escrito de la siguiente manera

$$\det_{r,s} e^{a_r(\ell_s + N - s)} = \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma \prod_{r=1}^N e^{a_{\sigma(r)}(\ell_{\sigma(r)} + N - \sigma(r))}, \quad (5.92)$$

mientras que el que aparece en el denominador se puede escribir como

$$\det_{r,s} e^{a_r(N - s)} = \prod_{r < s} (e^{a_r} - e^{a_s}). \quad (5.93)$$

Notar que, ante una operación de permutación, la expresión de arriba transforma como

$$\prod_{r < s} (e^{a_r} - e^{a_s}) = (-1)^\sigma \prod_{r < s} (e^{a_{\sigma(r)}} - e^{a_{\sigma(s)}}). \quad (5.94)$$

Entonces, la Eq. (5.91) se reescribe de la forma

$$\text{tr}_{\mathbf{R}} e^a = \sum_{\sigma \in S_N} \frac{\prod_{r=1}^N e^{a_{\sigma(r)}(\ell_{\sigma(r)} + N - \sigma(r))}}{\prod_{r < s} (e^{a_{\sigma(r)}} - e^{a_{\sigma(s)}})}. \quad (5.95)$$

A su vez, como el producto se realiza sobre todos los autovalores, todos los términos presentes en la suma sobre σ conducen al mismo resultado. Absorbiendo un factor de $N!$ en la definición de la medida de integración se obtiene

$$\begin{aligned} \langle W_{\mathbf{R}} \rangle &= \frac{1}{Z} \int da \Delta(a) e^{-\frac{2N}{\lambda} \sum_r a_r^2} \frac{\prod_{r=1}^N e^{a_r(\ell_r + N - r)}}{\prod_{r < s} (e^{a_r} - e^{a_s})} \\ &= \frac{1}{Z} \int da \Delta(a) e^{\sum_r \left(-\frac{N a_r^2}{2\lambda} + a_r \ell_r \right)} \prod_{r < s} (1 - e^{a_s - a_r})^{-1}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

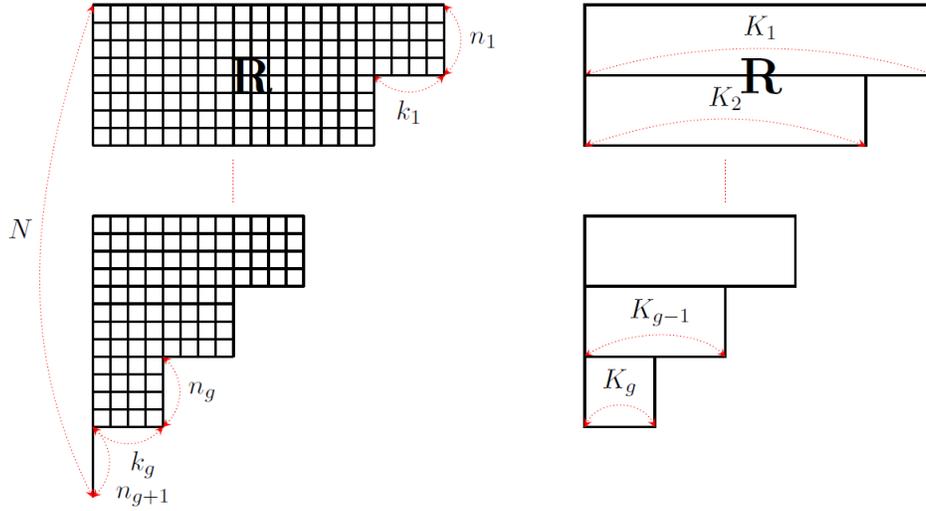


Figura 5.6: Diagrama de Young asociado a una representación genérica \mathbf{R} con escalones determinados por n_I y k_I . En la derecha, la correspondiente descomposición en g bloques rectangulares con lados n_I , $K_I = \sum_{J=I}^g k_J$, todos ellos de orden N .

En el límite en el que la constante de acoplamiento de 't Hooft λ es grande, la contribución dominante proviene esencialmente de los autovalores a_r grandes. Asumiendo el ordenamiento $a_r > a_s$ para $r < s$, los términos exponenciales pueden ser desestimados, obteniendo entonces

$$\langle W_{\mathbf{R}} \rangle = \frac{1}{Z} \int da \Delta(a) e^{\sum_r (-\frac{2N}{\lambda} a_r^2 + a_r \ell_r)}. \quad (5.97)$$

Consideremos el diagrama de Young asociado a la representación \mathbf{R} compuesto por g bloques con n_I filas y K_I columnas. Exponenciando el determinante de Vandermonde, tenemos que

$$\langle W_{\mathbf{R}} \rangle = \frac{1}{Z} \int da \exp \left(-\frac{2N}{\lambda} \sum_r a_r^2 + \sum_{r < s} \log(a_r - a_s)^2 + \sum_{I=1}^{g+1} K_I \sum_{r \in L_I} a_r \right), \quad (5.98)$$

donde hemos dividido el dominio de los autovalores $r \in [1, N]$ en segmentos L_I , de longitud n_I , tales que $L_1 = [1, n_1]$, $L_2 = [n_1 + 1, n_1 + n_2]$ y así hasta L_{g+1} . Notar que estamos definiendo $n_{g+1} = N - (n_1 + n_2 + \dots + n_g)$ y $K_{g+1} = 0$. En la Fig. 5.6 se exhibe un diagrama de Young genérico.

En particular, estamos interesados en el límite planar (N muy grande), el cual corresponde a aproximar la integral en los autovalores (5.98) mediante su evaluación en un punto estacionario. A su vez tomando tanto K_I como n_I de orden N , todas las contribuciones en el exponente de (5.98) son orden N^2 , por lo que deben ser tenidas en cuenta al momento de calcular las ecuaciones de movimiento

$$-\frac{4N}{\lambda} a_r + 2 \sum_{r \neq v} \frac{1}{a_r - a_s} + K_I = 0, \quad r \in L_I, \quad (5.99)$$

o bien pasando al continuo¹⁰

$$-\frac{4N}{\lambda}x + 2N \int dy \frac{\rho(y)}{x-y} + K_I = 0, \quad x \in L_I, \quad (5.100)$$

En general, estas ecuaciones son resueltas por una distribución de autovalores $\rho(x)$. Equivalentemente, suele definirse la resolvente¹¹ $w(x)$ dada por

$$w(z) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(y)}{z-y} \quad (5.101)$$

De acuerdo a la prescripción holográfica, el valor esperado de correladores con una inserción de un Wilson loops en una representación grande, codificada en la distribución $\rho(x)$, y asociada a un diagrama de Young con parámetros $\{K_I, n_I\}$, se relaciona con el mínimo de la acción de supergravedad que posea las mismas cargas. En lo siguiente, presentaremos chequeos explícitos de esta correspondencia.

Distribución multi-corte de Wigner

Para realizar una comparación explícita con los resultados de supergravedad, nos concentraremos un régimen paramétrico tal que las distancias entre los cortes (segmentos L_I) son muy grandes. En este punto es importante recordar el caso más simple, en el que sólo tenemos un único corte; en ausencia del término K_I en (5.100), la solución $\rho(y)$ corresponde a la distribución semicircular de Wigner $\rho(y) = \frac{2}{\pi\lambda} \sqrt{\lambda - y^2}$, centrada en este caso en el origen, y con radio $\mu = \sqrt{\lambda}$. Ahora bien, de vuelta al caso general, podemos deshacernos de los términos proporcionales a K_I simplemente completando cuadrados en (5.98). El valor esperado del Wilson loop puede entonces escribirse de la siguiente manera

$$\langle W_{\mathbf{R}} \rangle = \frac{v_{\mathbf{R}}}{Z} \int da \exp \left(-\frac{2N}{\lambda} \sum_I \sum_{r \in L_I} (a_r - c_I)^2 + \sum_{r < s} \log(a_r - a_s)^2 \right), \quad (5.102)$$

donde se define $c_I = \frac{K_I \lambda}{4N}$ y $v_{\mathbf{R}} = \exp \left(\sum_I \frac{n_I K_I^2 \lambda}{8N} \right)$. En el límite planar, los autovalores se distribuyen ahora a lo largo de intervalos L_I centrados a su vez en c_I .

Notar que los términos en (5.102) compiten: el término cuadrático se minimiza cuando los los autovalores se acumulan en las cercanías de los distintos c_I , sin embargo el término logarítmico actúa generando una repulsión entre los mismos. El resultado de esta competencia es que los autovalores se dividen en $g + 1$ cúmulos centrados en los c_I .

Si, como se aclaró previamente, consideramos los centros c_I suficientemente alejados (en particular $c_I - c_J = \frac{k_I \lambda}{4N} \gg 1$), entonces los términos de interacción entre autovalores pertenecientes

¹⁰La definición de la distribución de autovalores es $\rho(x) = \frac{1}{N} \sum_r \delta(x - a_r)$.

¹¹En general, $w(x)$ es una función que posee cortes de ramificación sobre el plano complejo. La distribución de autovalores $\rho(x)$ se identifica con las discontinuidades de $w(x)$ al pasar a través de los cortes de ramificación.

a diferentes intervalos (proveniente del determinante de Vandermonde) son subdominantes y no serán tenidos en cuenta. Entonces la distribución de autovalores resulta en una superposición de distribuciones de Wigner semicirculares centradas en c_I , a saber¹²

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\lambda} \sqrt{\mu_I^2 - (x - c_I)^2} & , \quad c_I - \mu_I < x < c_I + \mu_I \\ 0 & , \quad \text{de otra manera} \end{cases} \quad (5.104)$$

con centros y radios definidos como

$$\begin{aligned} c_I &= \frac{K_I \lambda}{4N} & , & \quad \mu_I = \sqrt{\lambda \nu_I} \quad \text{for} \quad I = 1, \dots, g \\ c_{g+1} &= 0 & , & \quad \mu_{g+1} = \sqrt{\lambda \nu_{g+1}}, \end{aligned} \quad (5.105)$$

donde hemos definido $\nu_I = \frac{n_I}{N}$. Finalmente, el valor esperado (5.102) evaluado en esta distribución multi-corte se reduce a

$$\langle W_{\mathbf{R}}^{U(N)} \rangle \approx \exp \left(\frac{\lambda}{8N} \sum_{I=1}^g n_I K_I^2 \right), \quad (5.106)$$

donde el símbolo \approx implica aquí descartar contribuciones subdominantes de orden $N^2 \log \lambda$.

En el caso en el que el grupo de gauge $SU(N)$, la integral en el modelo de matrices incorpora un factor adicional de $(\det(e^M))^{-\frac{|\mathbf{R}|}{N}}$, con $|\mathbf{R}| = N \sum_{I=1}^g K_I \nu_I$ la dimensión de la representación. El resultado neto de incorporar esta inserción es simplemente un corrimiento rígido en la posición de los centros, $c_I \rightarrow c_I - \frac{|\mathbf{R}| \lambda}{4N^2}$, o equivalentemente

$$K_I \rightarrow K_I - \sum_{I=1}^g K_I \nu_I. \quad (5.107)$$

Para el valor esperado del Wilson loop tenemos que

$$\langle W_{\mathbf{R}}^{SU(N)} \rangle \approx \exp \left(\frac{\lambda}{8N} \sum_{I=1}^g n_I \left(K_I - \sum_{I=1}^g K_I \nu_I \right)^2 \right). \quad (5.108)$$

Habiendo repasado la distribución de autovalores propuesta en [186], se procederá al cálculo de correladores con otros Wilson loops, evaluando las correspondientes inserciones en esta distribución. Se considera primero la inserción de un Wilson loop en la representación fundamental y luego en las representaciones totalmente simétrica y totalmente antisimétrica.

¹² Notar esta distribución de autovalores está en completo acuerdo con nuestra propuesta para la solución de supergravedad en términos de la función w descrita por (5.70) y (5.71), luego de identificar esta función con la resolvente del modelo de matrices, es decir

$$w(z) = \int \frac{\rho(y)}{z-y} \approx \frac{2}{\pi} \sum_i^{g+1} \int_{c_i - \mu_i}^{c_i + \mu_i} \frac{\sqrt{\mu_i^2 - (y - c_i)^2}}{z - y} \quad (5.103)$$

5.3.2 Inserción de un Wilson loop en la representación fundamental

El cálculo del correlador entre un Wilson loop en una representación grande \mathbf{R} y uno en la representación fundamental se traduce en el modelo de matrices a la inserción del operador $\sum_{r=1}^N e^{a_r}$ en la integral (5.102)

$$\begin{aligned} \langle W_{\mathbf{R}} W_{\text{fund}} \rangle &= \frac{1}{Z} \int da \Delta(a) e^{-\frac{2N}{\lambda} \sum_r a_r^2} \text{tr}_{\mathbf{R}} e^a \text{tr}_{\text{fund}} e^a, \\ &= \frac{v_{\mathbf{R}}}{Z} \int da \sum_{I=1}^{g+1} \sum_{r \in L_I} e^{-S_r}, \end{aligned} \quad (5.109)$$

donde se define

$$S_r = \frac{2N}{\lambda} \sum_{I=1}^{g+1} \sum_{s \in L_I} (a_s - c_I)^2 - \sum_{s < t} \log(a_s - a_t)^2 - a_r, \quad (5.110)$$

Esta inserción no *backreacta*, es decir que en el límite continuo no modifica la distribución de autovalores $\rho(x)$ descrita previamente. Normalizando el correlador con $\langle W_{\mathbf{R}} \rangle$, se simplifica el factor $v_{\mathbf{R}}$, ya que es común al numerador y al denominador. Luego, tomando el límite de N grande, se obtiene

$$\langle W_{\text{fund}} \rangle_{\mathbf{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) e^x \approx \frac{2}{\pi \lambda} \sum_{I=1}^{g+1} \int_{c_I - \mu_I}^{c_I + \mu_I} dx \sqrt{\mu_I^2 - (x - c_I)^2} e^x, \quad (5.111)$$

donde el símbolo \approx denota aquí que se considera el régimen en que los centros están suficientemente alejados entre sí, *i.e.* $K_I - K_J \gg N$, por lo que las interacciones entre las regiones L_I no contribuyen apreciablemente. Las integrales resultan en las típicas funciones de Bessel

$$\langle W_{\text{fund}} \rangle_{\mathbf{R}} \approx \sum_{I=1}^{g+1} \frac{2\mu_I}{\lambda} e^{c_I} I_1(\mu_I) \approx \sum_{I=1}^{g+1} e^{c_I + \mu_I}. \quad (5.112)$$

Para comparar con los resultados obtenidos en teoría de cuerdas, según la prescripción holográfica, consideramos el caso en el que el grupo de gauge es $SU(N)$. En ese caso

$$\begin{aligned} \langle W_{\text{fund}}^{SU(N)} \rangle_{\mathbf{R}} &\approx \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \sum_{I=1}^{g+1} \sqrt{\nu_I} e^{\frac{\lambda}{4N} (K_I - \sum_J^g K_J \nu_J)} I_1(\sqrt{\lambda \nu_I}), \\ &\approx \sum_{I=1}^{g+1} e^{\sqrt{\lambda \nu_I} + \frac{\lambda}{4N} (K_I - \sum_J^g K_J \nu_J)}. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Por ejemplo, para el caso en el la representación grande \mathbf{R} corresponde a un diagrama de Young rectangular con n filas y k columnas, las posiciones de los centros son

$$c_1^{SU(N)} = \frac{k \lambda}{4N} (1 - \nu), \quad c_2^{SU(N)} = -\frac{k \nu \lambda}{4N}, \quad (5.114)$$

y (5.113) resulta

$$\langle W_{\text{fund}}^{SU(N)} \rangle_{\mathbf{R}} \approx e^{\sqrt{\nu}\lambda + \frac{k(1-\nu)\lambda}{4N}} + e^{\sqrt{\lambda(1-\nu)} - \frac{k\nu\lambda}{4N}}, \quad (5.115)$$

reproduciendo precisamente la predicción obtenida mediante el cálculo holográfico (5.54). Notar que (5.113) coincide perfectamente con el resultado obtenido para una cuerda sobre una geometría *bubbling* de género g (5.84).

Antes de pasar a correladores con otras representaciones, consideraremos otra variante del correlador con un Wilson loop en la representación fundamental. Al final de la sección 5.2 se mencionó la posibilidad de insertar los Wilson loops sobre círculos orientados de manera opuesta. Del análisis presentado en el Apéndice B.5, se infiere que siempre y cuando la orientación en el espacio interno sea también opuesta, ambas inserciones preservan el mismo subconjunto de supersimetrías. Por lo tanto, el correlador puede localizarse a un valor esperado en el mismo modelo de matrices Gaussiano. Debido a que el Wilson loop fundamental posee ahora una orientación opuesta en el espacio interno¹³, el cálculo en el modelo de matrices ahora es de la forma

$$\langle \widetilde{W}_{\text{fund}} \rangle_{\mathbf{R}} \approx \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) e^{-x}. \quad (5.116)$$

Para el caso $SU(N)$, ahora se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{W}_{\text{fund}}^{SU(N)} \rangle_{\mathbf{R}} &\approx \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \sum_{I=1}^{g+1} \sqrt{\nu_I} e^{-\frac{\lambda}{4N}(K_I - \sum_J^g K_J \nu_J)} I_1(\sqrt{\lambda \nu_I}), \\ &\approx \sum_{I=1}^{g+1} e^{\sqrt{\lambda \nu_I} - \frac{\lambda}{4N}(K_I - \sum_J^g K_J \nu_J)}. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Este resultado concuerda con el correspondiente al cálculo holográfico (5.85). En particular, si nos restringimos al caso en que la representación grande \mathbf{R} está asociada a un diagrama de Young rectangular con n filas y k columnas, se obtiene

$$\langle \widetilde{W}_{\text{fund}}^{SU(N)} \rangle_{\mathbf{R}} \approx e^{\sqrt{\nu}\lambda - \frac{k(1-\nu)\lambda}{4N}} + e^{\sqrt{\lambda(1-\nu)} + \frac{k\nu\lambda}{4N}}, \quad (5.118)$$

nuevamente reproduciendo la predicción que obtuvimos mediante el cálculo holográfico (5.57).

5.3.3 Wilson loops en las representaciones simétrica y antisimétrica

En esta sección consideramos otros ejemplos de correladores. A saber, correladores de Wilson loops en representaciones grandes (*backreactantes*) cuyo diagrama de Young es rectangular, con inserciones de Wilson loops en las representaciones totalmente simétrica y totalmente antisimétrica.

En general, definimos

$$\langle W_{\mathbf{r}} \rangle_{\mathbf{R}} = \frac{\langle W_{\mathbf{R}} W_{\mathbf{r}} \rangle}{\langle W_{\mathbf{R}} \rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \Omega_{\mathbf{r}}(x), \quad (5.119)$$

¹³El *locus* sobre el que se localiza sólo involucra el sector escalar.

donde $\Omega_{\mathbf{r}}(x)$ es alguna función correspondiente a la inserción $W_{\mathbf{r}}$ en el límite continuo (N muy grande), y la distribución $\rho(x)$ es la definida en (5.104). Es importante recalcar que esta distribución es confiable sólo en el límite en el que ambos semicírculos están muy separados entre sí, es decir, cuando $\frac{k\lambda}{4N}$ es suficientemente grande.

Haciendo uso de la función generatriz de polinomios característicos [177], podemos escribir el correlador con Wilson loops en la representación (anti)simétrica de una manera compacta

$$\langle W_{S_l, A_l} \rangle_{\mathbf{R}} = \frac{1}{\dim_{S_l, A_l}} \oint_{\Gamma} \frac{dt}{2\pi i t^{l+1}} \exp \left(\mp N \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) \log(1 \mp t e^x) \right), \quad (5.120)$$

donde el signo $-$ corresponde a la representación totalmente simétrica, S_l , y el signo $+$ a la representación totalmente antisimétrica, A_l . El contorno Γ se define de manera tal que rodee el polo en $t = 0$. Ahora bien, nos interesa evaluar la integral (5.120) para N grande, y para una representación (anti)simétrica general de longitud l , donde l puede ser grande pero no lo suficientemente grande como para afectar la distribución de autovalores.

Correlador con un Wilson loop en la representación totalmente simétrica

Consideremos el caso totalmente simétrico. Debemos evaluar la integral (5.120) para el caso de la distribución (5.104). En este punto, es conveniente hacer el cambio de variables $x \rightarrow c_I - a_I x$ para la integral a lo largo de cada corte L_I de manera que la integral en x sea ahora en el intervalo $[-1, 1]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) \log(1 - t e^x) = \sum_{I=1}^2 \mu_I \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \log(1 - e^{-\mu_I x + c_I t}). \quad (5.121)$$

A su vez, introducimos la variable z tal que $t = e^z$, obteniendo

$$\oint_{\tilde{\Gamma}} dz \exp \left[-N \left(\sum_{I=1}^2 \frac{2\mu_I^2}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} \log(1 - e^{-\mu_I x + c_I + z}) + f z \right) \right], \quad (5.122)$$

donde $f = \frac{l}{N}$. El integrando definido arriba, como función de z , posee dos cortes de ramificación debido a los logaritmos presentes en el integrando. Estos cortes se encuentran en

$$-\mu_I - c_I \leq z \leq \mu_I - c_I \quad \text{con} \quad I = 1, 2. \quad (5.123)$$

El contorno $\tilde{\Gamma}$ rodea ahora el polo en infinito, por lo tanto podemos deformarlo de manera que pase por encima y por debajo de los cortes de ramificación. Por el Lema de Jordan, la integral de contorno se reduce a integrar sobre la discontinuidad a través de los cortes

$$\begin{aligned} \langle W_{S_l} \rangle_{\mathbf{R}} &\approx \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \sum_{J=1}^2 \int_{-c_J - \mu_J}^{-c_J + \mu_J} dz \exp \left[-\frac{N}{\lambda} \left(\sum_{I=1}^2 \frac{2\mu_I^2}{\pi} \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} \log(1 - e^{-\mu_I x + c_I + z}) + f \lambda z \right) \right] \right\} \\ &= \text{Im} \left\{ \sum_{J=1}^2 \frac{\mu_J}{\pi} \int_{-1}^1 dz \exp \left[-\frac{N}{\lambda} \left(\sum_{I=1}^2 \frac{2\mu_I^2}{\pi} \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} \log(1 - e^{-\mu_I x + c_I - c_J + \mu_J z}) + f \lambda (\mu_J z - c_J) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.124)$$

donde, en la segunda línea, hemos hecho el cambio de variables $z \rightarrow \mu_J z - c_J$. Notar que las integrales en x son formales, debido a que los integrandos también poseen cortes de ramificación. Una forma de definir correctamente estas integrales consiste en añadir una pequeña parte imaginaria $i\epsilon$ a z , de manera que el contorno pase ligeramente por encima del eje real. Las dos integrales para $J = 1, 2$ pueden ahora ser evaluadas por separado mediante una aproximación de punto estacionario válida en el límite de N grande. Por lo tanto, la integral en z queda determinada esencialmente por la región $z \approx z^*$ que extremiza el exponente del integrando. Consideremos el caso $J = 1$, teniendo en cuenta que $c_1 - c_2 \gg 1$. En este límite, la única contribución apreciable proviene del término con $I = 1$. Para obtener las ecuaciones de punto estacionario, es conveniente fraccionar las integrales en la variable x en intervalos tales que los argumentos de los logaritmos sean siempre positivos. Por lo tanto, reescribimos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} \log(1 - e^{\mu_1(z-x)}) &= \int_{-1}^z dx \sqrt{1-x^2} \log(e^{\mu_1 z} - e^{\mu_1 x}) + \int_z^1 dx \sqrt{1-x^2} \log(e^{\mu_1 x} - e^{\mu_1 z}) \\ &+ i\pi \int_{-1}^z dx \sqrt{1-x^2}. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Buscaremos soluciones en las que $\text{Re}(z) < -1$, en cuyo caso, la ecuación de punto estacionario resulta¹⁴

$$\frac{2\mu_1}{\pi} \int_{-1}^1 dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{1 - e^{\mu_1(x-z)}} + 4i\mu_1 \sqrt{1-z^2} + \lambda f = 0. \quad (5.126)$$

En este dominio, la integral en (5.126) puede ser descartada si μ_1 es suficientemente grande (λ grande), y la ecuación se reduce a

$$4i\mu_1 \sqrt{1-z^2} + \lambda f = 0, \quad (5.127)$$

cuya solución es

$$z^* = -\sqrt{1 + \kappa_1^2}, \quad \text{con} \quad \kappa_1 = \frac{f\lambda}{2\mu_1} = \frac{l}{2N} \sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}. \quad (5.128)$$

Evaluando (5.125) en el punto estacionario z^* ¹⁵, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} \log(1 - e^{\mu_J(z^*-x)}) &\underset{\mu_I \rightarrow \infty}{\approx} 2i\pi \int_{-1}^{z^*} dx \sqrt{1-x^2} \\ &= \pi \left(\text{arccosh } z^* - z^* \sqrt{(z^*)^2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (5.129)$$

Obtener la contribución de este punto estacionario demanda evaluar la exponencial en (5.124) para $z = z^*$. Estrictamente, esta cantidad no está bien definida, debido a los cortes de ramificación del

¹⁴Para $\text{Re}(z) > 1$ puede mostrarse que no existen soluciones.

¹⁵Aquí hemos hecho uso de que $\text{Re } z < 0$ para descartar términos $e^{\mu_1 z}$ en los logaritmos en (5.125)

exponente. Por lo tanto, como se mencionó previamente, añadimos una pequeña parte imaginaria a z , y por lo tanto a la solución z^* . De hecho, la buena definición de la integral en cuestión se obtiene a través de la parte imaginaria de la misma (5.124). Esto implica que, esencialmente, debemos evaluar el lado derecho de (5.129) teniendo en cuenta la pequeña parte imaginaria en z^* , y finalmente tomar el límite en el que la misma tiende a cero.¹⁶ Por lo tanto, tomando $z^* = -\sqrt{1 + \kappa_1^2} + i\epsilon$ se encuentra que

$$i \int_{-1}^{z^*} dx \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2} \left(\kappa_1 \sqrt{1 + \kappa_1^2} - \operatorname{arcsinh} \kappa_1 \right) + \text{parte imaginaria}. \quad (5.131)$$

Donde la parte imaginaria es proporcional a ϵ y, a pesar de ser muy pequeña, la conservaremos hasta el final. Esto se debe esencialmente a que, una vez que se introduce este resultado en (5.124), esta fase es multiplicada por un factor de N , el cual es muy grande en el límite planar, y por lo tanto, podemos considerar $N\epsilon \neq 0$. Introduciendo la solución en (5.124), se encuentra finalmente la contribución correspondiente al primer punto estacionario

$$\langle W_{S_I} \rangle_{\mathbf{R}}^{(1)} \approx \exp \left[\frac{2N\mu_1^2}{\lambda} \left(\kappa_1 \sqrt{1 + \kappa_1^2} + \operatorname{arcsinh} \kappa_1 \right) + Nf c_1 \right], \quad (5.132)$$

en donde, en la expresión final, no incluimos la fase que se discute arriba. Para $J = 2$, el proceso es completamente análogo al presentado hasta ahora, con la diferencia de que el término $I \neq J$ proporciona en este caso una contribución extra de la forma

$$\frac{2\mu_1^2}{\pi} \int_{-1}^1 dx \sqrt{1 - x^2} \log(1 - e^{-\mu_1 x + c_1 - c_2 + \mu_2 z}) \approx \mu_1^2 (c_1 - c_2 + \mu_2 z). \quad (5.133)$$

La ecuación de punto estacionario resulta entonces

$$4i\mu_2 \sqrt{1 - z^2} + \lambda f + \mu_1^2 = 0. \quad (5.134)$$

La solución es

$$z^* = -\sqrt{1 + \kappa_2^2}, \quad \text{con} \quad \kappa_2 = \frac{\lambda f}{4\mu_2} + \frac{\mu_1^2}{4\mu_2} = \frac{f\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{1-\nu}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{4} \frac{\nu}{\sqrt{1-\nu}}. \quad (5.135)$$

Introduciendo esta solución en (5.124) tenemos que

$$\langle W_{S_I} \rangle_{\mathbf{R}}^{(2)} \approx \exp \left[\frac{2N\mu_2^2}{\lambda} \left(\kappa_2 \sqrt{1 + \kappa_2^2} + \operatorname{arcsinh} \kappa_2 \right) + N(1 + f)c_2 \right], \quad (5.136)$$

¹⁶La integral se realiza usando que

$$i \int_{-1}^z \sqrt{1 - x^2} dx = - \int_0^{\operatorname{arccosh} z} \sinh^2 y dy = \frac{1}{2} (y - \sinh y \cosh y) \Big|_0^{\operatorname{arccosh} z} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arccosh} z - z \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad (5.130)$$

donde el término Nc_2 proviene del término extra $-N\mu_1^2(c_1 - c_2)/\lambda$. Finalmente, la contribución total al correlador con un Wilson loop en la representación S_l resulta

$$\begin{aligned} \langle W_{S_l} \rangle_{\mathbf{R}} \approx & \exp \left[2N(1 - \nu) \left(\kappa_2 \sqrt{1 + \kappa_2^2} + \operatorname{arcsinh} \kappa_2 - \frac{1 + f}{1 - \nu} \frac{k\lambda}{8N} \nu \right) \right] \\ & + \exp \left[2N\nu \left(\kappa_1 \sqrt{1 + \kappa_1^2} + \operatorname{arcsinh} \kappa_1 + f \frac{1 - \nu}{\nu} \frac{k\lambda}{8N} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.137)$$

A modo de comentario final, es importante aclarar que, como ocurre en [177], existen puntos estacionarios adicionales, los cuales son soluciones a las ecuaciones de punto estacionario resultantes de tomar $\lambda \rightarrow \infty$, junto con κ_i o $\frac{l}{N}$ fijos. Sin embargo, la contribución de estos puntos estacionarios es subdominante frente a las contribuciones obtenidas en esta sección. Para más detalles sobre este punto, nos referimos al Apéndice G.

Correlador con un Wilson loop en la representación totalmente antisimétrica

Ahora consideremos correladores con un Wilson loop en la representación totalmente antisimétrica, el cual puede obtenerse a partir de (5.120) y haciendo uso de la distribución (5.104). Realizando el cambio de variables $t = e^{\mu_2 z - c_2}$ junto con la definición $f = \frac{l}{N}$, la integral arriba puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \langle W_{A_l} \rangle_{\mathbf{R}} \approx & \int_{\tilde{\Gamma}} dz \exp \left[\frac{2N}{\lambda\pi} \left(\mu_2^2 \int_{-1}^1 dx \sqrt{1 - x^2} \log \left(1 + e^{-\mu_2(x-z)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu_1^2 \int_{-1}^1 dx \sqrt{1 - x^2} \log \left(1 + e^{-\mu_1 x + \mu_2 z + (c_1 - c_2)} \right) - \frac{\pi\lambda}{2} (\mu_2 z - c_2) f \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.138)$$

Notar que, como en el caso simétrico considerado en la sección anterior, el integrando, como función de z , posee cortes de ramificación. Sin embargo, en este caso los cortes se localizan sobre los segmentos horizontales $[-1 + i\pi, 1 + i\pi]$ y $[-\frac{1}{\mu_2}(c_1 - c_2) - \frac{\mu_1}{\mu_2} + i\pi, -\frac{1}{\mu_2}(c_1 - c_2) + \frac{\mu_1}{\mu_2} + i\pi]$, junto con las infinitas imágenes que se obtienen de correr la parte imaginaria en múltiplos enteros de 2π . Nuevamente, el contorno $\tilde{\Gamma}$ tal que recorra el eje real y aproximamos la integral por medio de una evaluación en sus puntos estacionarios, válida en el límite planar. A diferencia del caso simétrico, tanto el dominio de integración como los puntos estacionario se encuentran en regiones donde la integral es analítica como función de z , haciendo el proceso mucho más simple. La ecuación de punto estacionario resulta

$$\mu_2^2 \int_{-1}^1 dx \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 + e^{\mu_2(x-z)}} + \mu_1^2 \int_{-1}^1 dx \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 + e^{\mu_1 x - \mu_2 z - (c_1 - c_2)}} - \frac{\pi\lambda}{2} f = 0. \quad (5.139)$$

Ahora bien, buscamos soluciones válidas en el límite de λ grande (o equivalentemente, μ_I grande). Se infiere que las posibles soluciones sólo pueden encontrarse en los intervalos $[-1, 1]$ y $[-\frac{1}{\mu_2}(c_1 -$

$c_2) - \frac{\mu_1}{\mu_2}, -\frac{1}{\mu_2}(c_1 - c_2) + \frac{\mu_1}{\mu_2}]$. De otra manera, es fácil ver que, en el límite considerado, las integrales en (5.139) se vuelven independientes de z , por lo que no es posible encontrar soluciones allí.

Consideremos primero la región $-1 < z < 1$. Teniendo en cuenta que $c_1 - c_2 = \frac{k\lambda}{4N} \gg 1$, la ecuación (5.139) se reduce a

$$\mu_2^2 \int_{-1}^z dx \sqrt{1-x^2} + \frac{\pi\mu_1^2}{2} - \frac{\pi\lambda}{2} f = 0, \quad (5.140)$$

y por lo tanto

$$\arccos(z) - z\sqrt{1-z^2} = \pi \left(1 + \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} - \frac{\lambda}{\mu_2^2} f \right). \quad (5.141)$$

La solución consta en definir $z = \cos \theta_2$ con θ_2 tal que

$$\theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_2 = \pi \left(1 + \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} - \frac{\lambda}{\mu_2^2} f \right) = \pi \left(1 + \frac{\nu}{1-\nu} - \frac{l}{N(1-\nu)} \right), \quad (5.142)$$

y por lo tanto la integral (5.138) resulta

$$\langle W_{A_l} \rangle_{\mathbf{R}}^{(2)} \approx \exp \left[\frac{2N}{\lambda\pi} \left(\mu_2^3 \int_{-1}^{\cos \theta_2} dx x \sqrt{1-x^2} + \frac{\pi\mu_1^2}{2}(c_1 - c_2) + \frac{\pi\lambda}{2} f c_2 \right) \right], \quad (5.143)$$

$$= \exp \left[N \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{3\pi} (\sqrt{1-\nu} \sin \theta_2)^3 + (1-f) \frac{k\nu\lambda}{4N} \right) \right]. \quad (5.144)$$

Por otro lado, existe un punto estacionario adicional en el intervalo $[-\frac{1}{\mu_2}(c_1 - c_2) - \frac{\mu_1}{\mu_2}, -\frac{1}{\mu_2}(c_1 - c_2) + \frac{\mu_1}{\mu_2}]$. En este caso, la primera integral en la ecuación (5.139) se anula en el límite μ_I grande, mientras que la segunda sólo recibe contribución del dominio $0 < x < \tilde{z}$, con

$$\tilde{z} = \frac{1}{\mu_1} (\mu_2 z + c_1 - c_2), \quad -1 < \tilde{z} < 1, \quad (5.145)$$

obteniendo entonces la siguiente ecuación

$$\arccos(\tilde{z}) - \tilde{z}\sqrt{1-\tilde{z}^2} = \pi \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1^2} f \right), \quad (5.146)$$

la cual posee como solución $\tilde{z} = \cos \theta_1$ tal que

$$\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1 = \pi \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1^2} f \right) = \pi \left(1 - \frac{l}{N\nu} \right). \quad (5.147)$$

La integral evaluada en este punto estacionario resulta

$$\langle W_{A_l} \rangle_{\mathbf{R}}^{(1)} \approx \exp \left[\frac{2N}{\pi\lambda} \left(\mu_1^3 \int_{-1}^{\cos \theta_1} dx x \sqrt{1-x^2} (-\mu_1 x + c_1 - c_2) + \frac{\pi\lambda}{2} f c_2 \right) \right], \quad (5.148)$$

$$= \exp \left[N \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{3\pi} (\sqrt{\nu} \sin \theta_1)^3 + f \frac{k(1-\nu)\lambda}{4N} \right) \right]. \quad (5.149)$$

Finalmente, el resultado para un correlador con un Wilson loop en la representación totalmente antisimétrica es

$$\begin{aligned} \langle W_{A_l} \rangle_{\mathbf{R}} \approx & \exp \left[N \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{3\pi} (\sqrt{\nu} \sin \theta_1)^3 + f \frac{k(1-\nu)\lambda}{4N} \right) \right] \\ & + \exp \left[N \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{3\pi} (\sqrt{1-\nu} \sin \theta_2)^3 + (1-f) \frac{k\nu\lambda}{4N} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.150)$$

Es importante notar que, implementando la transformación de conjugación, a saber $\nu \rightarrow 1-\nu$ y $l \rightarrow N-l$, en (5.142) y (5.147), encontramos que $\theta_1 \rightarrow \pi - \theta_2$ y $\theta_2 \rightarrow \pi - \theta_1$, por lo que (5.150) permanece invariante.

Wilson loops en representaciones genéricas

A esta altura, podemos ir un poco más lejos y generalizar los resultados (5.137) y (5.150) a correladores de Wilson loops en las representaciones simétrica y antisimétrica con Wilson loops en una representación grande genérica \mathbf{R} , dual a una geometría *bubbling* de género g . Para lograr este cometido, hacemos uso de la distribución general con múltiples cortes (5.104) propuesta previamente, junto con las correspondientes definiciones de los radios μ_I y los centros c_I .

Consideremos primero el caso simétrico. Deformando el contorno de integración para la variable z de manera que pase por arriba y por debajo de los $g+1$ cortes de ramificación del integrando, obtenemos la generalización natural de (5.124)

$$\begin{aligned} \langle W_{S_l} \rangle_{\mathbf{R}} \approx & \text{Im} \sum_I^{g+1} \frac{\mu_I}{\pi} \int_{c_I - \mu_I}^{c_I + \mu_I} \exp \left[- \frac{2N}{\pi\lambda} \left(\mu_I^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \log \left(1 - e^{-\mu_I(x-z)} \right) + \frac{\pi\lambda}{2} f(\mu_I z - c_I) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{J \neq I} \mu_J^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \log \left(1 - e^{-\mu_J x + \mu_I z + c_J - c_I} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.151)$$

Consideremos el I -ésimo término, el punto estacionario para esta integral se encuentra a la izquierda del I -ésimo corte, pero aún a la derecha del $(I+1)$ -ésimo. A su vez, de la suma en la segunda línea, sólo contribuyen los términos tales que $c_J > c_I$. En nuestra notación, esto implica $J < I$. La solución de la correspondiente ecuación de punto estacionario es

$$z_I^* = -\sqrt{1 + \kappa_I^2}, \quad \text{con} \quad \kappa_I = \frac{\lambda f}{4\mu_I} + \frac{1}{4\mu_I} \sum_{J < I} \mu_J^2. \quad (5.152)$$

Evaluando al integral en este punto estacionario se obtiene

$$\exp \left[\frac{2N\mu_I^2}{\lambda} \left(\kappa_I \sqrt{1 + \kappa_I^2} + \text{arcsinh} \kappa_I \right) + 4N\mu_I \kappa_I c_I - \frac{N}{\lambda} \sum_{J < I} \mu_J^2 c_J + i\phi_I \right], \quad (5.153)$$

donde ϕ_I denota una fase irrelevante (en el sentido en que se discutió previamente). Tomando parte imaginaria y juntando todas las contribuciones tenemos que

$$\langle W_{S_I} \rangle_{\mathbf{R}} \approx \sum_I^{g+1} \exp \left[\frac{2N\mu_I^2}{\lambda} \left(\kappa_I \sqrt{1 + \kappa_I^2} + \operatorname{arcsinh} \kappa_I \right) + 4N\mu_I \kappa_I c_I - \frac{N}{\lambda} \sum_{J < I} \mu_J^2 c_J \right]. \quad (5.154)$$

Finalmente, consideremos el caso antisimétrico. Realizando el cambio de variables $t = e^{c_{g+1} - \mu_{g+1}z}$, la expresión (5.120) es llevada a la forma

$$\begin{aligned} \langle W_{A_I} \rangle_{\mathbf{R}} \approx \int_{\tilde{\Gamma}} dz \exp \left[\frac{2N}{\lambda\pi} \left(\mu_{g+1}^2 \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} \log \left(1 + e^{-\mu_{g+1}(x-z)} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_I^g \mu_I^2 \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} \log \left(1 + e^{-\mu_I x + \mu_{g+1}z + (c_I - c_{g+1})} \right) - \frac{\pi\lambda}{2} (\mu_{g+1}z - c_{g+1})f \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.155)$$

En analogía con el caso de género uno, el contorno se deforma de manera tal que recorra el eje real, y la integral se aproxima mediante su evaluación en los $g+1$ puntos estacionarios, localizados en los intervalos

$$z_I^* \in \left[\frac{1}{\mu_{g+1}}(c_{g+1} - c_I - \mu_I), \frac{1}{\mu_{g+1}}(c_{g+1} - c_I + \mu_I) \right], \quad I = 1, \dots, g+1. \quad (5.156)$$

Definiendo $\tilde{z}_I^* = \frac{1}{\mu_I}(\mu_{g+1}z_I^* + c_I - c_{g+1})$, las soluciones a las ecuaciones de punto estacionario pueden ser escritas como $\tilde{z}_I^* = \cos \theta_I$ con θ_I tal que

$$\theta_I - \sin \theta_I \cos \theta_I = \pi \left(1 + \sum_{J < I} \frac{\mu_J^2}{\mu_I^2} - \frac{\lambda}{\mu_I^2} f \right), \quad (5.157)$$

por lo que el resultado para el correlador es

$$\langle W_{A_I} \rangle_{\mathbf{R}} \approx \sum_I^{g+1} \exp \left[N \left(\frac{2}{3\pi\lambda} (\mu_I \sin \theta_I)^3 + f c_I + \sum_{J < I} \frac{\mu_J^2}{\lambda} (c_J - c_I) \right) \right]. \quad (5.158)$$

Más aún, puede verse que esta última expresión es manifiestamente invariante ante la conjugación de la representación. De hecho, haciendo $\nu_I \rightarrow \nu_{g+2-I}$ y $k_I \rightarrow k_{g+1-I}$, junto con $f \rightarrow 1-f$, puede verse de (5.157) que

$$\theta_I \rightarrow \pi - \theta_{g+2-I}, \quad (5.159)$$

y a su vez, de la definición de los centros, puede mostrarse que $c_I \rightarrow -c_{g+2-I}$. Haciendo uso de la propiedad $c_I + \sum_{J > I} \nu_J (c_J - c_I) = -\sum_{J < I} \nu_J (c_J - c_I)$ es directo que (5.158) permanece invariante ante la operación de conjugación.

Capítulo 6

Discusión y conclusiones

A lo largo de esta tesis, hemos estudiado en profundidad operadores no locales tipo Wilson loop. El valor esperado de estos operadores se encuentra íntimamente relacionado con distintos observables relevantes en teoría de gauge. Entre ellos, podemos mencionar, por ejemplo, el potencial quark-antiquark y la dimensión anómala de *cusp*. El conocimiento del potencial quark-antiquark en el régimen de acoplamiento fuerte permite estudiar la naturaleza de las interacciones entre las partículas fundamentales en este límite, observando, en caso de ocurrir, la posible aparición de fases confinantes. En teorías conformes, como es el caso de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills o teoría ABJM, la forma de este potencial queda completamente fijada por la simetría conforme. De hecho, sabemos que en este tipo de teorías no existe una escala típica, por lo que el sistema nunca puede desarrollar una fase confinante. Sin embargo, la extensión de estas técnicas a deformaciones no-conformes de estas teorías ha sido campo de trabajos recientes [188], por lo que el estudio de estos operadores puede llevar a conclusiones interesantes en estas realizaciones. Por otro lado, el cálculo de la función anómala de *cusp* no sólo representa un modo alternativo para obtener el potencial quark-antiquark, sino que también permite calcular la energía radiada por un quark acelerado, en términos de la función de Bremsstrahlung. Es claro entonces que el estudio de Wilson loops trae consigo contribuciones muy valiosas al estudio de teorías de gauge.

Los estudios presentados en el capítulo 2 fueron realizados en teoría $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons con materia, o teoría ABJM, la cual es una realización más reciente de la dualidad gauge/gravedad. En este contexto, se estudiaron Wilson loops circulares tipo *latitude*, los cuales se caracterizan por poseer un acoplamiento variable con el sector de materia de la teoría [126]. Estos operadores son generalizaciones de casos bien conocidos, a saber los operadores 1/2 BPS y 1/6 BPS bosónico.

En particular, se estudiaron deformaciones tipo *latitude* de Wilson loops circulares 1/2 BPS, los cuales se definen en la teoría de gauge en términos de la holonomía de una superconexión con acoplamiento a los campos de materia bosónica y fermiónica. El análisis se realizó en el

régimen de acoplamiento fuerte, haciendo uso de la dualidad AdS/CFT. Para ello, se resolvieron las ecuaciones de movimiento correspondientes a la cuerda dual en $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$, encontrando una familia de soluciones. Estas soluciones son análogas a las configuraciones 1/4 BPS encontradas en $AdS_5 \times S^5$ SYM [120]. Resolviendo la ecuación de simetría κ , se determinó que estas configuraciones preservan 1/6 de las supersimetrías de la teoría. Se encontró que, al igual que para $\mathcal{N} = 4$ SYM, la contribución dominante al valor esperado de estos operadores en la expansión a acoplamiento fuerte se obtiene del correspondiente Wilson loop circular 1/2 BPS reemplazando $\lambda \rightarrow \lambda \cos^2 \theta_0$. Sin embargo, para teoría ABJM, y a diferencia de $\mathcal{N} = 4$ SYM, esta relación no es válida a todo orden en λ ; de hecho, previamente fue mostrado que no es válida para los primeros términos del desarrollo perturbativo [126].

Además, se estudiaron las deformaciones *latitude* del Wilson loop circular bosónico, las cuales corresponden a operadores 1/12 BPS. En el esquema dual, estos operadores no pueden ser descritos por una única cuerda, debido a que el acoplamiento M_J^I con el sector escalar no puede reproducirse a partir de una curva en el espacio interno. Se discutió la posibilidad de representar estos operadores en términos de un promedio de configuraciones sobre $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^3$. Sin embargo, se encontró que este tipo de promedios, a diferencia del caso 1/6 BPS [117], no es adecuado para estos operadores, ya que no corresponde a ninguna configuración supersimétrica. Entender la naturaleza de la representación dual de estos operadores 1/12 BPS bosónicos, es decir, caracterizar de forma precisa las propiedades geométricas del ensamble de cuerdas dual, representaría un interesante trabajo en este área.

A su vez, se exploró la relación de los operadores tipo *latitude* con la función de Bremsstrahlung, asociada con deformaciones tipo *cusp*. En particular, se verificó, en el régimen de acoplamiento fuerte, la propuesta realizada en [126], cuya validez había sido probada en un desarrollo perturbativo a acoplamiento débil. Este resultado representa evidencia más que convincente sobre la validez de la propuesta a todo orden en λ . También se derivó una relación similar para la función de Bremsstrahlung resultante de deformar el Wilson loop recto bosónico 1/6 BPS en términos de derivadas de operadores tipo *latitude* 1/12 BPS. La derivación se realiza en analogía con los argumentos presentados en [96] para la función de Bremsstrahlung en $\mathcal{N} = 4$ SYM.

En este punto sería interesante contar con una derivación similar para la propuesta realizada en [126]. Finalmente, también sería muy fructífero investigar la posibilidad de obtener resultados exactos para los Wilson loop tipo *latitude* por medio de localización.

En el capítulo 3, se estudió la función de partición de cuerdas que describen líneas rectas con pequeños ángulos de *cusp* en la frontera de $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$. Estas configuraciones son duales a deformaciones tipo *cusp* de líneas de Wilson en teoría ABJM. En particular, se analizó el espectro de fluctuaciones alrededor de la configuración clásica y se calculó la contribución subdominante a 1-loop en la expansión para $\sqrt{\lambda}$ grande. El cálculo de los determinantes fue realizado mediante el método

on-shell, el cuál consiste en computar la energía de vacío de los modos de oscilador, soluciones de la ecuación de onda en signatura Lorentziana. Finalmente se compararon los resultados obtenidos con resultados de trabajos previos, en los cuales los determinantes se calculan haciendo uso del método de Gelfand-Yaglom [139, 140, 138, 129]. Si bien nuestros resultados coinciden con los obtenidos para *cusps* en $AdS_5 \times S^5$, se encuentran en discrepancia con los correspondientes a $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$. En este punto, se atribuye esta discrepancia a la imposición de distintas condiciones de contorno para las fluctuaciones. El valor del determinante de un operador diferencial depende fuertemente de las condiciones de contorno que se imponen sobre las soluciones de la ecuación de autovalores. Esto pareciera derivar en ambigüedades a la hora de calcular contribuciones 1-loop a la función de partición. Sin embargo, estos obstáculos deberían poder ser sorteados mediante un análisis más profundo de las simetrías del sistema. En nuestro análisis, se utilizan las condiciones de contorno que garantizan que el espectro forme un supermultiplete del subgrupo de supersimetría preservado por la configuración clásica. Este parece ser el argumento correcto para fijar estas ambigüedades, y un análisis similar debería funcionar en casos más generales. De hecho, nuestro resultado resulta estar en completo acuerdo con lo que se espera para la dimensión anómala de *cusp* a partir de estudios de supersimetría realizados en la teoría de gauge [130], a saber, que la misma debe cancelarse para ángulos de *cusp* tales que $\phi = \pm\theta$.

Los resultados obtenidos para la función de Bremsstrahlung a 1-loop fueron comparados con resultados exactos a los cuales se llega mediante localización [15], encontrando un completo acuerdo. Se discute brevemente la posibilidad de extender estos resultados a deformaciones tipo *cusp* de Wilson loops bosónicos. Debido a que estos operadores son duales a promedios de configuraciones de cuerdas, las condiciones de contorno para el espectro de fluctuaciones serán distintas. Para la inserción de un *cusp* geométrico, el resultado obtenido es consistente con el resultado exacto. En este punto, sería interesante encontrar una descripción dual para las deformaciones tipo *cusp* interno para operadores bosónicos; ya que en estos casos, el perfil no trivial en el espacio interno dificulta definir el correspondiente promedio de configuraciones.

Por su parte, en el capítulo 4, se calculó el valor esperado de un Wilson loop circular en presencia de un defecto de co-dimensión 1 $\mathcal{N} = 4$ SYM. Este tipo de interfaces separan regiones en los que la teoría posee distintos rangos para el grupo de gauge, dando lugar a la presencia de escalares que adquieren un valor esperado no trivial mediante el mecanismo de Higgs. En la descripción dual, la interfaz se corresponde con una D5-brana que preserva 1/2 de las supersimetrías de $AdS_5 \times S^5$. Una característica interesante de este tipo de realizaciones se debe a la posibilidad de implementar el límite de escaleo doble [160, 159], el cual permite extrapolar expansiones de acoplamiento fuerte y débil, por lo que resulta un escenario ideal para realizar chequeos de precisión.

En este contexto, el valor esperado del Wilson loop es, en parte, capturado por una cuerda

fundamental que se extiende entre la frontera de AdS y la D5-brana. Se resolvieron las ecuaciones de movimiento para este tipo de cuerdas y se tomó el límite de escaleo doble. Análogamente, se calculó el valor esperado a acoplamiento débil por medio de un desarrollo perturbativo a 1-loop, posteriormente tomando el mismo límite. De esta manera se verifica que, en este caso, y dentro del dominio de validez de las aproximaciones usadas, también es posible extrapolar resultados obtenidos a acoplamiento débil al régimen de acoplamiento fuerte. Adicionalmente, el cálculo realizado en teoría de cuerdas provee una predicción para la corrección a orden $(\lambda/k)^2$ en el desarrollo perturbativo.

Se estudiaron también las condiciones requeridas para que este tipo de operadores sea supersimétrico. En este punto, sería muy útil obtener una configuración clásica de cuerdas válida para cualquier valor que puedan tomar los parámetros, lo cual permitiría extender nuestros resultados a casos más generales. Finalmente, se podría plantear la incógnita sobre la posibilidad de obtener un resultado exacto para el caso supersimétrico por medio de localización. Esto sería ideal para realizar chequeos de precisión, como se hizo para el caso de $\mathcal{N} = 4$ SYM en ausencia de la interfaz [93]. Se discutirá brevemente el procedimiento que se debería seguir en caso de ser posible. En primer lugar, en analogía con lo realizado en [93], se deberían mapear las supercargas (los espinores de Killing preservados simultáneamente por el Wilson loop y el defecto), obtenidas en espacio plano, a la esfera S^4 . A su vez, en el Lagrangeano se debe incluir el acoplamiento con la curvatura escalar impuesto por invarianza conforme. Siendo 1/2 BPS, el defecto debería insertarse sobre una esfera S^3 en el ecuador de la esfera S^4 y, por invarianza conforme, los escalares que vivan en el defecto también deberán acoplarse con la curvatura escalar de la esfera S^3 . A su vez, se deberá generalizar la acción obtenida en [143] para incluir el caso $k \neq 0$. De esta manera, la acción incorporará acoplamientos efectivos que dependerán de k a través del valor clásico adquirido por algunos escalares. En el análisis realizado en [93], aparecen algunas simplificaciones concernientes a la contribución del sector no-perturbativo, a saber, instantones y anti-instantones, los cuales se concentran en los polos de la esfera S^4 . En particular, se esperan contribuciones no perturbativas correspondientes a instantones de $SU(N)$ a un lado del defecto, y a instantones de $SU(N - k)$ del otro, por lo que no se espera una simplificación como la que ocurre en ausencia del defecto.

Por último, el capítulo 5 se aboca al estudio de correladores entre dos Wilson loops en $\mathcal{N} = 4$ SYM, de los cuales uno de ellos se define en una representación “grande” del grupo de gauge $SU(N)$. Esto últimos están asociados a diagramas de Young que se descomponen en bloques rectangulares con un número $\mathcal{O}(N^2)$ de casilleros fundamentales. Este tipo de operadores es dual a un arreglo de D-branas que *backreacta* sobre la geometría. Por lo tanto, la representación holográfica de los mismos se realiza ya no en términos de espacios Anti de Sitter, sino en términos de geometrías *bubbling*, las cuales son asintóticamente AdS . Estas geometrías se obtienen como fibraciones sobre

una superficie de Riemann, y están caracterizadas por el género g de la misma, estrechamente relacionado con el número de cortes de ramificación que posee.

Para calcular el correlador entre un Wilson loop en una representación “grande” y uno en la fundamental, se estudiaron cuerdas fundamentales sobre estas geometrías. En particular, se encontró que, para género arbitrario g , las configuraciones de área mínima para la hoja de mundo se encuentran localizadas sobre los puntos de ramificación en la superficie de Riemann. En general, habrá $2g+2$ de estas superficies, pero sólo $g+1$ serán compatibles, en el sentido de que son soluciones al mismo problema variacional. Por lo tanto, la aproximación de punto estacionario para la función de partición tendrá en general $g+1$ contribuciones. Estas contribuciones se calcularon en un límite particular en el que los cortes de ramificación están suficientemente separados, obteniéndose así un resultado en términos de los parámetros de la representación. Se presentó un cálculo explícito para el caso de género 1, correspondiente al correlador con un Wilson loop en una representación “grande” descrita por un diagrama de Young rectangular. Del lado de teoría de cuerdas, se encontraron cuatro soluciones y se argumentó por qué sólo dos de ellas contribuyen a la función de partición.

Por otro lado, se obtuvo el resultado exacto para este tipo de correladores desde la teoría de gauge mediante la resolución del modelo de matrices en la aproximación de cortes suficientemente separados. El punto crucial aquí es que las ecuaciones que satisface la densidad de autovalores en el límite planar pueden resolverse de manera consistente en este límite. Haciendo uso de esta densidad de autovalores, se calculó el valor esperado de una inserción de un Wilson loop en la representación fundamental. Notablemente, el resultado obtenido de esta manera concuerda perfectamente con el correspondiente a teoría de cuerdas sobre geometrías *bubbling*.

Finalmente, se consideraron correladores que involucren un Wilson loop en una representación “grande” arbitraria y otro en la totalmente simétrica y totalmente antisimétrica. Este cálculo se realizó desde la teoría de gauge, ya que para estos casos, la integral funcional también puede localizarse a un modelo de matrices. Haciendo uso de la densidad de autovalores obtenida en el límite de cortes bien separados, se calculó el valor esperado de estos correladores en el límite de N y λ grandes, mediante una generalización del método descrito en [177].

En general, el trabajo presentado en este capítulo da cuenta de correladores entre Wilson loops definidos sobre contornos circulares coincidentes. Desde el punto de vista del modelo de matrices, esto consiste en calcular el valor esperado de un producto de caracteres de la forma $\text{tr}_{\mathbf{R}} e^M \text{tr}_{\mathbf{r}} e^M$. Sin embargo, existe un interesante punto de vista alternativo, derivado de la estructura de anillo que cierran los caracteres de un grupo de Lie, a saber, que $\text{tr}_{\mathbf{R}} e^M \text{tr}_{\mathbf{r}} e^M = \text{tr}_{\mathbf{R} \otimes \mathbf{r}} e^M = \sum_{\text{irreps}} \text{tr}_{\text{irreps}} e^M$, donde “irreps” denota a las componentes irreducibles de $\mathbf{R} \otimes \mathbf{r}$. Esto implica que el valor esperado de los correladores puede ser calculado en términos de la suma de los valores esperados de inserciones de un único Wilson loop, definidos en las correspondientes componentes irreducibles

de la representación producto. Para ser más precisos, consideremos a \mathbf{R} como una representación “grande” asociada a un diagrama de Young con g bloques rectangulares, mientras que \mathbf{r} será la representación fundamental. Se puede ver que la suma sobre las componentes irreducibles posee, en este caso, $g + 1$ términos, en completo acuerdo con los resultados obtenidos tanto en la teoría de cuerdas como en los modelos de matrices considerados en este capítulo. A pesar de que esta relación entre los caracteres está bien entendida desde el punto de la teoría de gauge, su contraparte en la teoría de cuerdas pareciera ser altamente no trivial. Esto se debe a que pareciera implicar una relación no trivial entre las configuraciones clásicas de determinadas cuerdas y un conjunto de acciones *on-shell* para ciertas soluciones de supergravedad. Sería interesante explorar este tipo de relaciones en el futuro.

Por otro lado, un cálculo que se desprendería directamente de este trabajo correspondería a considerar D3-branas y D5-branas sobre geometrías *bubbling*, de la misma forma que se hizo para el caso de la cuerda fundamental. Los resultados obtenidos podrían compararse con los cálculos explícitos realizados en el modelo de matrices, por lo que serían un complemento perfecto para este trabajo. A su vez, el análisis de supersimetría de las configuraciones mediante la ecuación de simetría κ también sería interesante y permitiría establecer una clasificación más precisa dentro del soluciones clásicas que se encontraron para la cuerda fundamental.

Este trabajo, y en particular la determinación de la densidad de autovalores, abre las puertas a cálculo de correladores más generales. Por ejemplo, se puede considerar la inserción de operadores locales, siguiendo las líneas de razonamiento desarrolladas en [189]. Asimismo, esta puede ser una herramienta útil para explorar realizaciones holográficas sin simetría conforme. En particular, sería interesante encontrar en estas realizaciones, a partir de los cálculos explícitos realizados en trabajo, rastros de estructuras integrables, en el mismo sentido que fueron encontradas en el estudio de funciones de 3 puntos [190, 191].

En un plan más ambicioso, se podría intentar explorar la estructura de las contribuciones subdominantes, tanto en gravedad como en teoría de gauge. Del lado de teoría de gauge, hay técnicas bien establecidas para calcular correcciones no-planares, las cuales ya han sido aplicadas en el contexto de modelos de matrices Gaussianos [192, 167, 193]. En algunos casos, también existen técnicas que permiten obtener correcciones subdominantes en la expansión en λ grande [194, 195]. Sería interesante extender esta maquinaria al cálculo de correladores de Wilson loops. Por otro lado, el cálculo holográfico de estas contribuciones subdominantes, si bien es conceptualmente claro [196, 197, 198], aún pareciera ser muy complicado.

En este punto, sería interesante hacer algunos comentarios sobre un problema abierto en el estudio holográfico de Wilson loops. Como se indica en la sección 1.1.2, el fijado de gauge de los grados de libertad redundantes asociados a la métrica de la hoja de mundo da lugar a un determi-

nante de Fadeev-Popov $\det P_1^\dagger P_1$. La acción del operador P_1 sobre un campo vectorial ξ^α define la medida de integración en el espacio de métricas en términos del parámetro de difeomorfismos ξ^α . En particular, este operador posee tres modos cero, es decir, vectores ξ_0^α tales que $P_1 \xi_0 = 0$, correspondientes a los tres generadores del grupo conforme en $d = 2$. La presencia de este tipo de modos cero da cuenta, por lo tanto, de la invariancia conforme de la teoría definida en la hoja de mundo. Lógicamente, la posible contribución de estos modos no afecta el valor de la función de partición a nivel clásico, da lugar a una contribución no trivial a orden subdominante.

En general, la ecuación $P_1 \xi = 0$ posee infinitas soluciones, pero, debido a que la integral funcional da cuenta de la contribución de los modos normalizables (físicos), solo este subconjunto de soluciones afectará a la función de partición. Si bien la presencia de estos modos es independiente de las propiedades locales de la hoja de mundo, es decir la métrica inducida, depende fuertemente de las características globales de la misma. De hecho, para el caso de una hoja de mundo definida en el semiplano, como sería el caso de la configuración dual a un Wilson loop recto o con un *cusps*, las soluciones de $P_1 \xi = 0$ no son normalizables, y por lo tanto no deben incluirse en la definición de la integral funcional. Por otro lado, para el caso de hojas de mundo definidas en el disco, como es el caso de las configuraciones duales a Wilson loops circulares, existen tres soluciones normalizables, correspondientes a los generadores del grupo de simetría conforme global en $d = 2$. Este tipo de transformaciones generan reparametrizaciones del disco que no afectan el valor esperado del mismo debido a la simetría conforme residual. De hecho, es fácil obtener explícitamente estos modos, encontrando que dejan invariante a la hoja de mundo a menos de reparametrizaciones de la curva en el borde de Anti de Sitter. Más aún, estas transformaciones mapean entre sí a los elementos de una familia infinita de soluciones clásicas, las cuales difieren entre sí por reparametrizaciones de la curva en el borde. Debido a que el valor esperado del Wilson loop es invariante frente a reparametrizaciones del contorno, tenemos que estas configuraciones son todas equivalentes a nivel clásico. En resumen, tenemos una serie de configuraciones clásicas equivalentes conectadas por la acción de una simetría global. La presencia de este fenómeno requiere un tratamiento más cuidadoso de la expansión semiclásica de la integral funcional, en particular del procedimiento de Fadeev-Popov, de manera tal de extraer su contribución correcta a los observables [36]. Dependiendo de la naturaleza de las variables que se están integrando, esto da lugar a un factor que consiste en una potencia de \hbar donde, genéricamente, denotamos con \hbar a la constante de acoplamiento que define la expansión semiclásica. Debido a que el operador P_1 actúa sobre campos de *ghost*, es decir Grassmann, esto da lugar a una contribución de orden \hbar^k , donde k es el número de modos cero. En el caso de configuraciones de cuerdas duales a Wilson loop circulares, $\hbar \sim \lambda^{-\frac{1}{2}}$ y $k = 3$ por lo que la contribución de los modos cero del fijado de gauge es orden $\lambda^{-\frac{3}{2}}$.

Por otro lado, recordemos que, al fijar el gauge conforme, debemos considerar la contribución de los dos modos longitudinales. Acomodando estos modos en un vector, se puede ver que el

operador que actúa sobre este vector es efectivamente $P_1^\dagger P_1$. Al integrar sobre variables bosónicas, la contribución de k modos cero da lugar a un factor orden $\hbar^{-\frac{k}{2}}$. En el caso que nos interesa, esta contribución es $\sim \lambda^{\frac{3}{4}}$.

En resumen, la correcta formulación de la expansión semiclásica da cuenta de un factor de la forma

$$c\lambda^{-\frac{3}{4}} \frac{\det' \left(P_1^\dagger P_1 \right)_{\text{ghost}}}{\det' \left(P_1^\dagger P_1 \right)_{\text{long}}} \quad (6.1)$$

donde c es un factor relacionado con la normalización de los modos cero. De hecho, se puede ver que el factor $\lambda^{-\frac{3}{4}}$ aparece en la expansión para $\lambda \rightarrow \infty$ del resultado exacto para un Wilson loop circular. Más aún, el cálculo de la constante c y del cociente de determinantes¹ presentes en (6.1) permitiría obtener la contribución correcta a la función de partición a 1-loop, para la cual, hasta el momento, no se ha podido lograr un acuerdo completo [95, 199]. Encontrar una manera sistemática de calcular estas contribuciones ayudaría a resolver algunos problemas abiertos en el contexto de chequeos de precisión de la dualidad AdS/CFT.

En una línea similar, cabe aclarar que aún no se cuenta con un esquema estándar para calcular los determinantes de los operadores que actúan sobre los campos de fluctuaciones cuánticas a 1-loop. En particular, no existe una manera sistemática de regularizar las divergencias (tanto IR como UV) involucradas en el cálculo de la función de partición a 1-loop. Por otro lado, las condiciones de contorno que deben satisfacer los correspondientes modos (en especial los fermiónicos) no están formalmente definidas. Para el caso de operadores supersimétricos, un análisis cuidadoso del álgebra de supersimetría de la teoría en la hoja de mundo debería, en principio, fijar un conjunto preciso de condiciones de contorno. Este análisis resulta crucial, como se demuestra en el capítulo 3 de esta tesis, para obtener la correcta regularización de las divergencias. Por lo tanto, esto ayudaría a resolver algunos problemas presentes en el cálculo de Wilson loops a 1-loop en la expansión a acoplamiento fuerte. Además permitiría construir un enfoque sistemático para atacar este tipo de problemas, y así extenderlo a casos más complicados.

El contenido presentado en esta tesis se enmarca en el campo del estudio de la dinámica no-perturbativa en teoría cuántica de campos. Los métodos presentados aquí y otra gran variedad de técnicas que no se describen en esta tesis han permitido lograr un entendimiento mayor de los fenómenos concernientes a sistemas fuertemente correlacionados. En su gran mayoría, este tipo de enfoques ha podido ser establecido para el caso de teorías que poseen una gran cantidad de simetría, en particular supersimetría y simetría conforme. Sin embargo, sería muy interesante extender estos métodos a fin de obtener resultados válidos en contextos menos simétricos, en línea con el estudio realizado en parte de esta tesis y reportado en el capítulo 5.

¹Respecto a esto, la literatura presenta ideas encontradas, no siendo posible aún de determinar si ambos se cancelan o dan lugar a una contribución no trivial debido a que poseen distintas condiciones de contorno.

Apéndice A

Regularización y condiciones de contorno

En la sección 1.5, se describe la prescripción holográfica para calcular Wilson loops en términos de cuerdas que describen una curva en la frontera de AdS . Esto implica imponer condiciones tipo Dirichlet en algunas de las coordenadas de la cuerda sobre la frontera. Sin embargo, esta prescripción no es del todo precisa. En particular, se plantean los siguientes interrogantes

- No estamos precisando qué tipo de condiciones deben imponerse sobre la coordenada holográfica, ni tampoco sobre las direcciones del espacio interno.
- En general, el volumen de la hoja de mundo es divergente, por lo que es necesario introducir un esquema de regularización para poder definir cantidades físicas.

En este apéndice revisaremos los argumentos presentados por Drukker, Gross y Ooguri en [200], los cuales permiten resolver los interrogantes planteados arriba. En este análisis nos restringiremos al caso de $\mathcal{N} = 4$ SYM, solo mencionando que muchas de las conclusiones presentadas aquí serán también válidas para ABJM. Recordemos que $\mathcal{N} = 4$ SYM puede obtenerse como reducción dimensional sobre un T^6 de $\mathcal{N} = 1$ SYM en 10 dimensiones. Por lo tanto, consideremos un Wilson loop en esta última teoría, definido sobre una curva $\mathcal{C} = \{x^\mu(s), y^i(s)\}$. Por simplicidad, consideremos el caso en el que el Wilson loop está definido en la representación fundamental. Luego de compactificar, tenemos que

$$W = \frac{1}{N} \text{tr} \mathcal{P} \exp \left\{ \oint (i \dot{x}^\mu A_\mu + \dot{y}^i \Phi_i) ds \right\} \quad (\text{A.1})$$

La primera observación importante concierne a las condiciones que deben imponerse sobre los extremos de una cuerda dual al operador (A.1). Consideremos el espacio *target* descrito por las coordenadas $\{X^\mu\}, \{Y^i\}$, con $\mu = 0, \dots, 3$, $i = 1, \dots, 6$. En particular, en [200] se argumenta que

deben imponerse condiciones tipo Dirichlet sobre la curva 4-dimensional en las direcciones X^μ , es decir $X^\mu|_{\text{borde}} = x^\mu$; mientras que sobre las direcciones Y^i las condiciones deben ser tipo Neumann, esquemáticamente $\partial Y^i|_{\text{borde}} \sim \dot{y}^i$. Esto puede argumentarse de la siguiente manera. Desde el punto de vista de la teoría de cuerdas, la reducción dimensional corresponde a aplicar T-dualidad sobre 6 direcciones en el espacio *target*. La teoría $\mathcal{N} = 1$ SYM en $d = 10$ es dual a un sistema de D9-branas que cubren todo el espacio 10-dimensional. Las cuerdas definidas sobre este sistema satisfacen naturalmente condiciones tipo Neumann (libres) en las diez direcciones. Para describir un Wilson loop, se imponen sin embargo condiciones tipo Dirichlet, es decir, que las condiciones que se derivan de insertar un Wilson loop son naturalmente las complementarias a las que satisface la cuerda sobre la D-brana. Ahora bien, ante una transformación de T-dualidad sobre una dirección particular, sabemos que las condiciones que satisfacen los extremos de una cuerda en esa dirección cambian, es decir que si eran tipo Dirichlet pasan a ser tipo Neumann y viceversa. De esta manera, T-dualizando sobre 6 de las 10 direcciones, en particular sobre las Y^i , tenemos que las D9-branas se mapean a D3-branas. En este caso, las D3-branas estarán extendidas sobre las coordenadas X^μ . Las condiciones que naturalmente satisfacen las cuerdas sobre una D3-brana son Neumann en las 4 direcciones X^μ y Dirichlet en las Y^i . Por lo tanto, siendo complementarias, las condiciones impuestas por el Wilson loop (A.1) serán Dirichlet sobre las X^μ y Neumann sobre las Y^i .

Específicamente, consideremos la métrica de $AdS_5 \times S^5$ en coordenadas de Poincaré, parametrizado de la siguiente manera

$$ds^2 = \frac{dX_\mu dX^\mu + dY_i dY^i}{Y^2} \quad , \quad \mu = 0, \dots, 3 \quad i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.2})$$

donde $Y^i = Y\theta^i$, con θ^i las coordenadas de la esfera S^5 ($\sum_i \theta^i \theta^i = 1$), mientras que Y denota la coordenada holográfica en el parche de Poincaré, con la frontera localizada en $Y = 0$. En general, estas coordenadas dependerán de las coordenadas $\{\sigma^\alpha\}$ de la hoja de mundo. Consideremos una parametrización tal que la frontera se alcanza para $\sigma^2 = 0$. En particular, las condiciones de contorno que deben satisfacer las coordenadas son de la forma

$$X^\mu(\sigma^1, 0) = x^\mu(\sigma^1) \quad , \quad J_1^\alpha \partial_\alpha Y^i = \dot{y}^i \quad , \quad J_\alpha^\beta = \frac{1}{\sqrt{g}} g_{\alpha\gamma} \epsilon^{\gamma\beta} \quad (\text{A.3})$$

Si bien no lo mostraremos aquí, se puede ver que estas condiciones de contorno sobre la frontera de Anti de Sitter imponen naturalmente

$$\dot{x}^2 - \dot{y}^2 = 0. \quad (\text{A.4})$$

Notar que esto es consistente con la definición usual presentada en (1.111). Esta última condición puede también argumentarse desde el punto de vista perturbativo, encontrando que la ausencia de divergencias UV en el cálculo de los diagramas de Feynman impone que $\dot{x}^2 = \dot{y}^2$.

En resumen, el punto crucial aquí es que las coordenadas Y^i satisfacen condiciones de contorno tipo Neumann sobre la frontera de AdS . Típicamente, esto implica realizar una transformada de Legendre respecto de estas coordenadas, de manera tal que el Lagrangeano dependa naturalmente de los correspondientes momentos conjugados

$$P_i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (Y^i)'} . \quad (\text{A.5})$$

Esta transformada de Legendre consiste en añadir términos de borde de la siguiente forma

$$B.T. = - \oint_{\text{borde}} P_i Y^i , \quad (\text{A.6})$$

por lo que, denotando con A al funcional de área usual, el área regularizada resulta

$$\tilde{A} = A - \oint_{\text{borde}} P_i Y^i . \quad (\text{A.7})$$

De hecho, se puede ver que esta última expresión está libre de divergencias. Para ello, definimos un cut-off $\epsilon \rightarrow 0^+$ tal que el dominio de la coordenada holográfica sea $Y \in [\epsilon, \infty)$. Ahora imponemos las condiciones de contorno (A.3) en $Y = \epsilon$, las cuales, en particular, imponen

$$P^i = Y^2 P_i = \frac{\dot{y}^i}{2\pi} , \quad (\text{A.8})$$

por lo que

$$\tilde{A} = A - \oint_{\text{borde}} P_i Y^i = A - \frac{1}{2\pi\epsilon} \oint ds |\dot{y}| . \quad (\text{A.9})$$

Vemos entonces que el término de borde, introducido por la transformada de Legendre, también actúa como regulador del área, sustrayendo la divergencia proporcional al perímetro que naturalmente aparece en el cálculo de A (ver discusión en sección 1.5).

Un ejemplo particularmente útil corresponde a calcular el volumen regularizado de una hoja de mundo cuya métrica inducida es AdS_2 . Consideremos primero una configuración tal que $X^0 = \sigma^1$ y la coordenada holográfica Y se identifica con σ^2 . Este es, por ejemplo, el caso de la cuerda dual a un Wilson loop recto 1/2 BPS. En particular, es posible ver que, definiendo a T como la extensión temporal de la línea recta,

$$A = \frac{T}{2\pi\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = 0 , \quad (\text{A.10})$$

por lo que el área regularizada en este caso es nula. Notar que esto es consistente con el hecho de que el Wilson loop recto posea valor esperado protegido por supersimetría.

Consideremos ahora el caso de un Wilson loop circular. Para ello escribimos la métrica de AdS en la siguiente versión del parche de Poincaré

$$ds^2 = \frac{dy^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + \dots}{y^2} , \quad (\text{A.11})$$

donde el símbolo ... denota la dependencia en el resto de las coordenadas, la cual es irrelevante para este análisis. En estas coordenadas, tenemos que

$$A = \int d\sigma d\phi \frac{r}{y^2} \sqrt{y'^2 + r'^2}, \quad (\text{A.12})$$

con $\sigma^1 = \sigma$ y donde hemos introducido el *ansatz* $r(\sigma)$, $y(\sigma)$ and $\phi = \sigma^2$. Por otro lado, el correspondiente término de borde toma la forma

$$B.T. = - \int_{y=\epsilon} d\phi \frac{ry'}{y\sqrt{y'^2 + r'^2}}, \quad (\text{A.13})$$

donde hemos hecho explícito en nuestra notación que la integral se realiza sobre el dominio definido por $y = \epsilon$. Identificando $\sigma = r$, la solución a las ecuaciones de movimiento es $y(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$, por lo que el área (A.12) resulta

$$A = \int_0^{\sqrt{R^2 - \epsilon^2}} dr d\phi \frac{r}{y^2} \sqrt{1 + y'^2} \simeq 2\pi \left(\frac{R}{\epsilon} - 1 \right) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{A.14})$$

donde hemos integrado hasta $y = \epsilon$. Por otro lado, el término de borde (A.13) toma la forma

$$B.T. = - \int_{y=\epsilon} d\phi \frac{ry'}{y\sqrt{y'^2 + r'^2}} \simeq \frac{2\pi R}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{A.15})$$

por lo que el área regularizada (A.7) es

$$\tilde{A} = -2\pi. \quad (\text{A.16})$$

Notar que (A.16) no depende del radio del círculo. Esto es consistente con el carácter conforme de la teoría, ya que los observables físicos no pueden depender de ninguna escala que no sea la escala típica de cuerdas α' .

En resumen, el esquema de regularización consiste en evaluar la acción y los términos de borde en $Y = y = \epsilon$ y luego tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Sin embargo, esta prescripción no es, bajo ningún punto de vista, covariante. De hecho, depende fuertemente en la definición de la coordenada holográfica y , definida en el parche de Poincaré. Si, en cambio, quisiéramos trabajar en otro sistema de coordenadas, como por ejemplo globales, es necesario transformar el correspondiente término de borde (A.6) a partir de su definición en el parche de Poincaré. Adicionalmente, el cut-off con el que regularizamos el volumen de la hoja de mundo debe definirse consistentemente en función del dominio $y = \epsilon$. Para ser más específicos, consideremos el caso de coordenadas globales, las cuales se relacionan con y , r y ϕ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y &= e^\tau \operatorname{sech} \rho \\ r &= e^\tau \tanh \rho \\ \phi &= \phi \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

por lo que la métrica toma la forma

$$ds^2 = \cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2 + \dots \quad (\text{A.18})$$

En estas coordenadas, la frontera de *AdS* corresponde a tomar $\rho \rightarrow \infty$. A su vez, la configuración correspondiente al Wilson loop circular es mucho más simple, a saber, $\{\sigma^1, \sigma^2\} = \{\rho, \phi\}$ y $\tau = \text{cte}$. Por simplicidad, tomemos $\tau = 0$. Por su parte, definimos el cut-off Λ como el valor de ρ correspondiente a tomar $y = \epsilon \rightarrow 0$. De (A.17), vemos que la relación entre ambos reguladores es

$$\epsilon \sim e^{-\Lambda}. \quad (\text{A.19})$$

De esta manera, el área toma la forma

$$A = \int d\phi d\rho \sinh \rho = 2\pi(e^\Lambda - 1). \quad (\text{A.20})$$

A su vez, como se menciona arriba, el término de borde se calcula yendo al parche de Poincaré y luego realizando la correspondiente transformación de Legendre, obteniendo para este caso (A.13). Luego, para obtener el correspondiente término de borde en coordenadas globales, debemos introducir las relaciones (A.17) en (A.13), obteniendo entonces

$$B.T. = - \int_{\rho=\lambda} d\phi \sinh \rho \tanh^2 \rho = -2\pi e^\Lambda, \quad (\text{A.21})$$

y el área regularizada resulta nuevamente

$$\tilde{A} = A + B.T. = -2\pi \quad (\text{A.22})$$

Finalmente, consideremos la posibilidad de que el espacio *target* posea un flujo no trivial de campo antisimétrico B . En particular, nos concentraremos en flujos de la forma

$$B = b_1 \sinh \rho d\rho \wedge d\phi, \quad (\text{A.23})$$

con el potencial b_1 independiente de las coordenadas (ρ, σ) . Este tipo de flujos aparecen en los casos estudiados en el capítulo 5. Nuevamente consideraremos cuerdas duales a Wilson loop circulares, es decir, $\{\sigma^1, \sigma^2\} = \{\rho, \phi\}$. Ahora bien, la cuerda se acopla al flujo B a través del *pull-back* de (A.23). La correspondiente contribución a la acción es entonces de la forma

$$S_B = b_1 A = b_1 \int d\rho d\phi \sinh \rho = 2\pi b_1 (e^\Lambda - 1). \quad (\text{A.24})$$

Para calcular el correspondiente término de borde, debemos ir al parche de Poincaré, en donde se puede ver que el acoplamiento con el campo B provee una contribución a la transformada de Legendre. Esto se debe a que depende de la derivada de la coordenada holográfica, por lo que contribuye a la definición del momento conjugado. En particular, para este caso tenemos que

$$B = b_1 \frac{r}{y} \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^{-1} dy \wedge d\phi + \dots, \quad (\text{A.25})$$

donde ... da cuenta de término adicionales que no serán relevantes en este análisis. En estas coordenadas, la acción en las coordenadas de Poincaré toma entonces la forma

$$S_B = b_1 \int d\sigma^0 d\phi \frac{r}{y} \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^{-1} y' + \dots, \quad (\text{A.26})$$

por lo que la contribución al término de borde resulta

$$BT_B = \int_{y=\epsilon} d\phi r \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^{-1}. \quad (\text{A.27})$$

Ahora volvemos a coordenadas globales mediante las relaciones (A.17), obteniendo

$$B.T.B = -b_1 \int_{\rho=\Lambda} d\phi \cosh \rho = -2\pi b_1 e^\Lambda. \quad (\text{A.28})$$

Vemos entonces que la contribución proveniente del acoplamiento al flujo B resulta proporcional al área regularizada, es decir

$$S_B + B.T.B = b_1 \tilde{A} = -2\pi b_1 \quad (\text{A.29})$$

Por último, haremos algunos comentarios. Notar que la parte finita del área regularizada depende fuertemente del parche de coordenadas que naturalmente describe una dada hoja de mundo. Para el Wilson loop recto, vimos que la geometría inducida en la hoja de mundo es AdS_2 , descrita en coordenadas de Poincaré, y que el área, una vez regularizada, es $\tilde{A} = 0$. Por eso se suele decir que el área de AdS en el parche de Poincaré es nula. Por otro lado, para el Wilson loop circular, la geometría inducida sobre la hoja de mundo también es AdS_2 , pero ahora descrita en coordenadas globales. En este caso, hemos visto que el área regularizada es $\tilde{A} = -2\pi$.

En la mayor parte de esta tesis, se asocia el valor -2π al área de la hoja de mundo (siempre y cuando la geometría inducida sea AdS global). El análisis presentado en este apéndice justifica, por lo tanto, esta operación.

Apéndice B

Fijado de simetría kappa y supersimetría

Consideremos la acción de GS en espacio plano. Por simplicidad, solamente estudiaremos la acción a segundo orden en los campos fermiónicos. Esto será suficiente para el propósito de esta tesis, ya que en la misma slo se estudia el espectro de fluctuaciones a orden cuadrático. Definimos Γ^m las correspondientes matrices de Dirac en 10 dimensiones y $\Gamma_\alpha = \partial_\alpha X^m \Gamma_m$. La acción (1.26) a segundo orden en los campos fermiónicos es entonces

$$S = S_{\text{bos}} + S_{\text{ferm}} \quad (\text{B.1})$$

con

$$S_{\text{bos}} = \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^m \partial_\beta X_m \quad (\text{B.2})$$

$$S_{\text{ferm}} = -i \int d^2\sigma \sqrt{h} \bar{\theta}^I \left(\delta^{IJ} h^{\alpha\beta} + s^{IJ} \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} \right) \Gamma_\alpha \partial_\beta \theta^J \quad (\text{B.3})$$

Consideremos una variación $\delta\theta^I$ tal que

$$\delta X^m = -\frac{i}{2} \bar{\theta}^I \Gamma^m \delta\theta^I, \quad (\text{B.4})$$

ante la cual

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{bos}} &= -i \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X_m \partial (\bar{\theta}^I \Gamma^m \delta\theta^I) \\ &= \int d^2\sigma \sqrt{h} (\partial_\alpha \bar{\theta}^I \Gamma^\alpha \delta\theta^I + \bar{\theta}^I \Gamma^\alpha \partial_\alpha \delta\theta^I) \\ &= -i \int d^2\sigma \sqrt{h} (-\delta \bar{\theta}^I \Gamma^\alpha \partial_\alpha \theta^I + \bar{\theta}^I \Gamma^\alpha \partial_\alpha \delta\theta^I) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

donde usamos que, dados dos espinores de Majorana¹ θ y χ , $\bar{\theta}\Gamma^m\chi = -\bar{\chi}\Gamma^m\theta$. Por otro lado, para la acción fermiónica, tenemos que²

$$\begin{aligned}\delta S_{\text{ferm}} &= -i \int d^2\sigma \left[\sqrt{h} (\delta\bar{\theta}^I \Gamma^\alpha \partial_\alpha \theta^I + \bar{\theta}^I \Gamma^\alpha \partial_\alpha \delta\theta^I) + s^{IJ} \epsilon^{\alpha\beta} (\delta\bar{\theta}^I \Gamma_\alpha \partial_\beta \theta^I + \bar{\theta}^I \Gamma_\alpha \partial_\beta \delta\theta^I) \right] \\ &= -i \int d^2\sigma \left[\sqrt{h} (\delta\bar{\theta}^I \Gamma^\alpha \partial_\alpha \theta^I + \bar{\theta}^I \Gamma^\alpha \partial_\alpha \delta\theta^I) + 2s^{IJ} \epsilon^{\alpha\beta} \bar{\theta}^I \Gamma_\alpha \partial_\beta \delta\theta^J + s^{IJ} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta (\delta\bar{\theta}^I \Gamma_\alpha \partial_\beta \theta^J) \right]\end{aligned}\tag{B.6}$$

donde, en la última línea, hemos integrado por partes y usamos $\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Gamma_\beta = \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta X_m \Gamma^m = 0$. En lo siguiente, descartaremos el término de la derivada total.

En particular, consideremos una transformación de supersimetría, es decir $\delta_\epsilon \theta^I = \epsilon^I$, con ϵ^I dos espinores de Weyl constantes. Vemos entonces que, dado que $\partial_\alpha \delta_\epsilon \theta^I = 0$, las variaciones (B.5) y (B.6) se cancelan trivialmente, siendo entonces la acción (B.1) invariante ante este tipo de transformaciones.

Sin embargo, la acción (B.1) es invariante frente a otra simetría, la cual es de carácter local y se denomina simetría kappa. Cabe aclarar que la presencia de esta simetría no es casual ya que, como se aclara en la sección 1.1.2, esta simetría permite eliminar los grados de libertad fermiónicos redundantes, de manera tal de que la teoría supersimétrica sea consistente. Consideremos una variación local de la forma

$$\delta_\kappa \theta^I = \mathcal{P} \kappa^I \quad , \quad \delta X^m = \frac{i}{2} \bar{\theta}^I \Gamma^m \mathcal{P} \kappa^I \tag{B.7}$$

con \mathcal{P} algún proyector y κ^I dos espinores de Weyl que dependen de las coordenadas de la hoja de mundo. Teniendo en cuenta el cambio de signo en la variación bosónica, tenemos que

$$\delta S = 2 \int d^2\sigma \sqrt{h} \bar{\kappa}^I \mathcal{P} \left(\delta^{IJ} h^{\alpha\beta} + s^{IJ} \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} \right) \Gamma_\alpha \partial_\beta \theta^J \tag{B.8}$$

Como se menciona en la sección 1.1.2, en teoría de cuerdas tipo IIA, los espinores θ^I poseen quiralidades opuestas, por lo que $s^{IJ} \theta^J = \Gamma_{11} \theta^I$ ³. Es posible formular este tipo de teorías en términos de un único espinor de Majorana $\theta = \theta^1 + \theta^2$, y análogamente para κ . Por otro lado, en teoría de cuerdas tipo IIB, ambos espinores θ^I poseen la misma quiralidad, por lo que es natural definir un espinor de Weyl de la forma $\theta = \theta^1 + i\theta^2$, y análogamente para κ . Vemos entonces que la variación (B.8) resulta

$$\delta S = 2 \int d^2\sigma \sqrt{h} \bar{\kappa} \mathcal{P} (1 - \Gamma) \Gamma^\beta \partial_\beta \theta \tag{B.9}$$

¹Siendo C el operador de conjugación de carga, un espinor de Majorana satisface que $\bar{\theta} = \theta^T C$. A su vez se puede ver que $C\Gamma^m = \Gamma^m C$.

²En esta expresión sólo consideramos los términos cuadráticos en los campos fermiónicos θ .

³Recordar que $s^{11} = -s^{22} = 1$ y $s^{12} = s^{21} = 0$

donde se define

$$\Gamma = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} \Gamma_{\alpha\beta} \Gamma_{11} \quad , \quad \text{tipo IIA} \quad (\text{B.10})$$

$$\Gamma = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} \Gamma_{\alpha\beta} K \quad , \quad \text{tipo IIB} \quad (\text{B.11})$$

con K el correspondiente operador de conjugación y $\Gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta]$. Es fácil ver que Γ es hermítico y que satisface $\Gamma^2 = 1$. Además, para pasar de (B.8) a (B.9), hemos hecho uso de que $\Gamma \Gamma^\beta = \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} \Gamma_\alpha$. En este punto cabe aclarar que este análisis fue realizado en signatura Lorentziana. En signatura Euclídea, el operador Γ adquiere un factor de i , es decir $\Gamma_{\text{IIA}} = \frac{i}{2} \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} \Gamma_{\alpha\beta} \Gamma_{11}$ ($\Gamma_{\text{IIB}} = \frac{i}{2} \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} \Gamma_{\alpha\beta} K$).

De (B.9) vemos entonces que la variación de la acción se anula si

$$\mathcal{P} = 1 + \Gamma. \quad (\text{B.12})$$

La variación más general del campo θ es entonces

$$\delta\theta = (1 + \Gamma)\kappa + \epsilon. \quad (\text{B.13})$$

La generalización de estos argumentos para el caso de espacios *target* curvos es un poco más intrincada, por lo que no será incluida en esta tesis. Sin embargo, mencionaremos que la transformación general del campo θ está dada por (B.13) también en este caso. La diferencia principal reside en que ahora ϵ ya no es un espinor constante, sino que es el correspondiente espinor de Killing del espacio *target* (espinor covariantemente constante). Por otro lado, la definición de Γ es completamente análoga a (B.11), con la salvedad de que ahora las matrices de Dirac involucradas estarán definidas en términos del correspondiente *vielbein*.

Consideremos ahora una configuración clásica bosónica $\{X_0^m\}$. Queremos evaluar si esta configuración preserva alguna supercarga ϵ de la teoría. Dado que, a nivel clásico, los campos fermiónicos θ son nulos, entonces trivialmente $\delta_\epsilon X^m = \delta_\kappa X^m = 0$. Para que la configuración sea efectivamente supersimétrica, es necesario que (B.13) sea cero. Ahora bien, antes es necesario fijar el gauge de simetría kappa. Esto último consiste en imponer alguna proyección sobre θ de manera tal que se eliminen los grados de libertad redundantes. Definiendo el operador X tal que $X^2 = 1$, imponemos

$$\mathcal{M}_+\theta = \theta \quad , \quad \mathcal{M}_\pm = \frac{1}{2} (1 \pm X). \quad (\text{B.14})$$

En particular, estamos interesados en variaciones $\delta\theta$ físicas, es decir, tales que el espinor resultante siga cumpliendo la condición de fijado de gauge (B.14). En general, una transformación arbitraria de supersimetría no cumplirá con esta condición y, por lo tanto, debe ser compensada con una transformación de simetría kappa, de manera tal que el campo θ transformado siga satisfaciendo (B.14). Esto conlleva a que κ pueda escribirse en términos de ϵ , siendo este último el único

parámetro libre una vez fijado el gauge. Específicamente, la condición de que una variación de $\delta\theta$ preserve el gauge implica que

$$\mathcal{M}_+\delta\theta = \delta\theta \Rightarrow \Gamma\mathcal{M}_+\kappa - \mathcal{M}_-\kappa = \mathcal{M}_-\epsilon. \quad (\text{B.15})$$

Notar que esta última ecuación se satisface si

$$\kappa = -\mathcal{M}_-\epsilon. \quad (\text{B.16})$$

De esta manera, la variación de θ resulta

$$\begin{aligned} \delta\theta &= (1 + \Gamma)\kappa + \epsilon \\ &= -(1 + \Gamma)\mathcal{M}_-\epsilon + \epsilon \\ &= \mathcal{M}_+(1 - \Gamma)\epsilon \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

En conclusión, las supercargas preservadas serán las que cumplen $(1 - \Gamma)\epsilon = 0$. Notar que esto es consistente con el comentario hecho arriba. De hecho, dada una transformación generada por un espinor ϵ tal que $\delta_\epsilon\theta \sim (1 - \Gamma)\epsilon = 0$, es ortogonal al campo de acción las transformaciones de gauge de simetría kappa, las cuales siempre actúan en el espacio complementario ($\delta_\kappa\theta = (1 + \Gamma)\kappa$).

B.1 Espinor de Killing para $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$

El espacio $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ puede obtenerse mediante una reducción de Kaluza-Klein a partir de $AdS_4 \times S^7$, la cual es una solución máximamente supersimétrica de supergravedad 11-dimensional. Por lo tanto, los espinores de Killing de $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ serán un subconjunto de los correspondientes a $AdS_4 \times S^7$. A su vez, los espinores de Killing para supergravedad 11-dimensional serán las soluciones a las siguientes ecuaciones, provenientes de la variación supersimetría del gravitino,

$$\nabla_\mu\epsilon + \frac{1}{288}(\Gamma_\mu^{\nu\rho\sigma\tau} - 8\delta_\mu^\nu\Gamma^{\rho\sigma\tau})F_{\nu\rho\sigma\tau} = 0, \quad (\text{B.18})$$

donde ∇_μ es la derivada covariante que contiene a la conexión de espín y μ toma valores sobre las 11- coordenadas. A su vez, denotamos con $\gamma^a = e_\mu^a\Gamma^\mu$ a las matrices de Dirac en el espacio tangente, con el siguiente *elfvein*

$$\begin{aligned} e^0 &= L \cosh \rho dt, & e^1 &= L d\rho, & e^2 &= L \sinh \rho d\vartheta, \\ e^3 &= L \sinh \rho \sin \vartheta d\psi, & e^4 &= L d\alpha, & e^5 &= L \cos \frac{\alpha}{2} d\theta_1, \\ e^6 &= L \sin \frac{\alpha}{2} d\theta_2, & e^7 &= L \cos \frac{\alpha}{2} \sin \theta_1 d\varphi_1, & e^8 &= L \sin \frac{\alpha}{2} \sin \theta_2 d\varphi_2, \\ e^{11} &= -\frac{L}{2}(d\zeta + A) & e^9 &= L \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \left(d\chi + \cos \theta_1 d\varphi_1 - \cos \theta_2 d\varphi_2 \right), \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

donde A fue definido en (2.6).

La 4-forma en la solución 11-dimensional es proporcional al volumen de AdS , $F_{\mu\nu\rho\sigma} = 6 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, reduciéndose (B.18) a la siguiente ecuación para el espinor de Killing

$$\nabla_{\mu}\epsilon = \frac{1}{2}\hat{\gamma}\Gamma_{\mu}\epsilon, \quad (\text{B.20})$$

con $\hat{\gamma} = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. La correspondiente solución de (B.21) puede escribirse de la siguiente manera [117]

$$\epsilon(x) = \mathcal{M}(x)\epsilon_0, \quad (\text{B.21})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x) = & e^{\frac{\alpha}{4}(\hat{\gamma}\gamma_4 - \gamma_9\gamma_{11})} e^{\frac{\theta_1}{4}(\hat{\gamma}\gamma_5 - \gamma_7\gamma_{11})} e^{\frac{\theta_2}{4}(\gamma_{98} + \gamma_{46})} e^{-\frac{\xi_1}{2}\hat{\gamma}\gamma_{11}} e^{-\frac{\xi_2}{2}\gamma_{57}} \\ & \cdot e^{-\frac{\xi_3}{2}\gamma_{49}} e^{-\frac{\xi_4}{2}\gamma_{68}} e^{\frac{\rho}{2}\hat{\gamma}\gamma_1} e^{\frac{t}{2}\hat{\gamma}\gamma_0} e^{\frac{\nu}{2}\gamma_{12}} e^{\frac{\psi}{2}\gamma_{23}}, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

con

$$\xi_1 = \frac{2\varphi_1 + \chi + \xi}{4}, \quad \xi_2 = \frac{-2\varphi_1 + \chi + \xi}{4}, \quad \xi_3 = \frac{2\varphi_2 - \chi + \xi}{4}, \quad \xi_4 = \frac{-2\varphi_2 - \chi + \xi}{4}. \quad (\text{B.23})$$

En (B.21), el espinor constante ϵ_0 posee 32 componentes y todas las matrices γ en (B.22) son planas. Notar que las matrices multiplicando las fases ξ_i en (B.22), *i.e.* $i\hat{\gamma}\gamma_{11}$, $i\gamma_{57}$, $i\gamma_{49}$ y $i\gamma_{68}$, poseen traza nula, conmutan entre sí, y al cuadrado dan la identidad. Por lo tanto, podemos escribir a ϵ_0 en una base en la que autovector del siguiente conjunto de bilineales

$$i\hat{\gamma}\gamma_{11}\epsilon_0 = s_1\epsilon_0, \quad i\gamma_{57}\epsilon_0 = s_2\epsilon_0, \quad i\gamma_{49}\epsilon_0 = s_3\epsilon_0, \quad i\gamma_{68}\epsilon_0 = s_4\epsilon_0, \quad (\text{B.24})$$

donde todos los autovalores s_i son ± 1 . Notar que estas matrices no son todas independientes, debido a que, en 11-dimensiones, no hay matriz quiral, por lo que el producto de todas las matrices gamma da lugar al operador identidad

$$\hat{\gamma}\gamma_{11}\gamma_{57}\gamma_{49}\gamma_{68} = \gamma_{0123456789}\gamma_{11} = \pm 1. \quad (\text{B.25})$$

Eligiendo las matrices de manera que $\gamma_{0123456789}\gamma_{11} = +1$, vemos que los autovalores satisfacen al vínculo $s_1s_2s_3s_4 = 1$, por lo que sólo tres de ellos son independientes. Esto nos deja las siguientes posibilidades para ϵ_0

$$\begin{aligned} & (+, +, +, +), (+, +, -, -), (+, -, -, +), (+, -, +, -), \\ & (-, +, -, +), (-, +, +, -), (-, -, +, +), (-, -, -, -), \end{aligned}$$

Cada una de estas posibilidades corresponde a 4 espinores diferentes, los cuales a su vez pueden ser clasificados en términos de los autovalores de γ_{01} y $i\gamma_{23}$. Genéricamente, escribimos a ϵ_0 como en (4.27).

La reducción a diez dimensiones se realiza compactificando en la dirección ξ . Por lo tanto, para encontrar los espinores de Killing de supergravedad 10-dimensional tipo IIA, imponemos invarianza ante traslaciones $\xi \rightarrow \xi + \delta\xi$. Ante este tipo de traslaciones, el espinor transforma como

$$\epsilon(x) \rightarrow \epsilon'(x) = \mathcal{M}(x) e^{\frac{i\delta\xi}{8}(i\hat{\gamma}\gamma_{11}+i\gamma_{57}+i\gamma_{49}+i\gamma_{68})}\epsilon_0. \quad (\text{B.26})$$

Por lo tanto, la invarianza ante $\delta\xi$ en (B.26) se traduce a

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0. \quad (\text{B.27})$$

Esta condición elimina los casos $(+, +, +, +)$ y $(-, -, -, -)$, implicando entonces que $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ preserva 3/4 de las 32 supersimetrías que se tenían originalmente en once dimensiones, es decir, 24 supercargas⁴.

B.2 Matrices de Dirac y generadores de $SU(2)$

En el análisis de supersimetría realizado en el capítulo 2, hicimos uso de la siguiente representación para las matrices de Dirac

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= i\sigma_2 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, & \gamma_1 &= \sigma_1 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \\ \gamma_2 &= \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, & \gamma_3 &= \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \\ \gamma_4 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \mathbb{I}, & \gamma_5 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \\ \gamma_6 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2, & \gamma_7 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \\ \gamma_8 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1, & \gamma_9 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \mathbb{I}, \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

en la cual γ_{01} , γ_{23} , γ_{57} , γ_{49} y γ_{68} son diagonales.

En particular, se puede ver que los índices s_i que caracterizan los espinores en la teoría de cuerdas están relacionados con los pares antisimetrizados de índices de $SU(4)$. Los generadores R_J^I del álgebra de Lie $su(4)$ actúan de la siguiente manera sobre el espacio de representación fundamental

$$R_J^I |z^K\rangle = \delta_J^K |z^I\rangle - \frac{1}{4} \delta_J^I |z^K\rangle. \quad (\text{B.29})$$

En particular, los operadores R_1^1 , R_2^2 y R_3^3 conmutan entre sí, y se identifican con el subálgebra de Cartan de $su(4)$ ⁵. En particular, los operadores R_J^I pueden llevarse a la siguiente forma diagonal

$$R_1^1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & & & \\ & -\frac{1}{4} & & \\ & & -\frac{1}{4} & \\ & & & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad R_2^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & & & \\ & \frac{3}{4} & & \\ & & -\frac{1}{4} & \\ & & & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad R_3^3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & & & \\ & -\frac{1}{4} & & \\ & & \frac{3}{4} & \\ & & & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.30})$$

⁴Este mismo análisis muestra que $AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ también preserva 24 supersimetrías, excepto para $k = 1, 2$. El caso de $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ se obtiene en el límite de $k \rightarrow \infty$.

⁵Notar que el generador R_4^4 no es independiente, ya que $R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 + R_4^4 = 0$.

Estudiando la acción de los generadores R_1^1 , R_2^2 , R_3^3 y R_4^4 sobre las coordenadas z_I del espacio proyectivo, es posible ver que esta acción induce corrimientos en las fases ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 y ξ_4 respectivamente, motivando entonces la siguiente identificación

$$\{R_1^1, R_2^2, R_3^3, R_4^4\} \longleftrightarrow \{i\hat{\gamma}\gamma_{11}, i\gamma_{57}, i\gamma_{49}, i\gamma_{68}\}. \quad (\text{B.31})$$

Por lo tanto, se identifican los índices (s_1, s_2, s_3, s_4) con los pares (I, J) de una representación antisimétrica de $SU(4)$. En general, la identificación consiste en asociar un elemento ζ^{IJ} a un espinor $\epsilon^{(s_1, s_2, s_3, s_4)}$ de manera tal que s_I y s_J sean positivos. Por ejemplo, $\zeta^{13} \leftrightarrow \zeta^{(+, -, +, -)}$, $\zeta^{24} \leftrightarrow \zeta^{(-, +, -, +)}$, etc.

B.3 Supersimetría de las soluciones rotadas

En esta sección estudiaremos la existencia de soluciones a la proyección de simetría κ (2.30) para la familia bi-paramétrica de soluciones presentadas en (2.51), las cuales dependen de dos parámetros (α_0, ϕ_0) . En particular, insertando la solución (2.51) en la definición del proyector de simetría κ (2.25), tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \frac{i}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \theta} \\ &\left[\rho' \sinh \rho \gamma_{31} + \theta' \sinh \rho \gamma_3 \left(\cos \frac{\alpha_0}{2} \gamma_5 + \sin \frac{\alpha_0}{2} \gamma_6 \right) + \rho' \sin \theta \left(\cos \frac{\alpha_0}{2} \gamma_7 + \sin \frac{\alpha_0}{2} \gamma_8 \right) \gamma_1 \right. \\ &\quad \left. + \theta' \sin \theta \left(\cos \frac{\alpha_0}{2} \gamma_7 + \sin \frac{\alpha_0}{2} \gamma_8 \right) \left(\cos \frac{\alpha_0}{2} \gamma_5 + \sin \frac{\alpha_0}{2} \gamma_6 \right) \right] \gamma_{11}. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

A diferencia del proyector Γ que habíamos obtenido anteriormente (2.26), vemos que ahora hay una dependencia extra en α_0 . Sin embargo, esta dependencia se puede factorizar en términos de una rotación en los planos 56 y 78 en el espacio tangente

$$\Gamma' = e^{-a/2} \Gamma e^{a/2}, \quad a = \frac{\alpha_0}{2} (\gamma_{56} + \gamma_{78}). \quad (\text{B.33})$$

Por su parte, la matriz \mathcal{M}' luego de la rotación toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{M}' &= e^{\frac{\alpha_0}{4} (\hat{\gamma}\gamma_4 - \gamma_9 \gamma_{11})} e^{\frac{\theta}{4} (\hat{\gamma}\gamma_5 - \gamma_7 \gamma_{11} + \gamma_{98} + \gamma_{46})} e^{-\frac{\phi_0}{8} (\hat{\gamma}\gamma_{11} + \gamma_{57} - \gamma_{49} - \gamma_{68})} \\ &\cdot e^{-\frac{\tau}{4} (\hat{\gamma}\gamma_{11} - \gamma_{57} + \gamma_{49} - \gamma_{68})} e^{\frac{\theta}{2} \hat{\gamma}\gamma_1} e^{\frac{\pi}{4} \gamma_{12}} e^{\frac{\tau}{2} \gamma_{23}} \\ &= e^{\frac{\alpha_0}{4} (\hat{\gamma}\gamma_4 - \gamma_9 \gamma_{11})} \mathcal{M} e^{-\frac{\phi_0}{8} (\hat{\gamma}\gamma_{11} + \gamma_{57} - \gamma_{49} - \gamma_{68})}, \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

donde \mathcal{M} es la misma que se presenta en (2.40).

Para evaluar $\mathcal{M}'^{-1} \Gamma' \mathcal{M}'$, resulta conveniente juntar las dos exponenciales dependientes de α_0 en una única rotación R

$$R := e^{\frac{\alpha_0}{4} (\hat{\gamma}\gamma_4 - \gamma_9 \gamma_{11} + \gamma_{56} + \gamma_{78})}, \quad (\text{B.35})$$

y definimos las matrices rotadas

$$\tilde{A} = RAR^{-1}. \quad (\text{B.36})$$

Por ejemplo, para las matrices gamma rotadas se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_4 &= \cos \frac{\alpha}{2} \gamma_4 + \sin \frac{\alpha}{2} \hat{\gamma}, & \tilde{\gamma} &= \cos \frac{\alpha}{2} \hat{\gamma} - \sin \frac{\alpha}{2} \gamma_4, \\ \tilde{\gamma}_9 &= \cos \frac{\alpha}{2} \gamma_9 + \sin \frac{\alpha}{2} \gamma_{11}, & \tilde{\gamma}_{11} &= \cos \frac{\alpha}{2} \gamma_{11} - \sin \frac{\alpha}{2} \gamma_9, \\ \tilde{\gamma}_5 &= \cos \frac{\alpha}{2} \gamma_5 - \sin \frac{\alpha}{2} \gamma_6 & \tilde{\gamma}_6 &= \cos \frac{\alpha}{2} \gamma_6 + \sin \frac{\alpha}{2} \gamma_5, \\ \tilde{\gamma}_7 &= \cos \frac{\alpha}{2} \gamma_7 - \sin \frac{\alpha}{2} \gamma_8, & \tilde{\gamma}_8 &= \cos \frac{\alpha}{2} \gamma_8 + \sin \frac{\alpha}{2} \gamma_7, \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Notar que las siguientes combinaciones de matrices gamma permanecen invariantes ante la rotación, lo cual será importante en lo que sigue

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} \tilde{\gamma}_{11} + \gamma_{49} &= \hat{\gamma} \gamma_{11} + \gamma_{49}, \\ \tilde{\gamma}_{57} + \tilde{\gamma}_{68} &= \gamma_{57} + \gamma_{68}, \\ \tilde{\gamma} \tilde{\gamma}_5 + \tilde{\gamma}_{46} &= \hat{\gamma} \gamma_5 + \gamma_{46}, \\ -\tilde{\gamma}_7 \tilde{\gamma}_{11} + \tilde{\gamma}_{98} &= -\gamma_7 \gamma_{11} + \gamma_{98}, \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

lo que implica que

$$\tilde{\mathcal{M}} = R\mathcal{M}R^{-1} = \mathcal{M}. \quad (\text{B.39})$$

Concluimos entonces que

$$\mathcal{M}'_P{}^{-1} \Gamma' \mathcal{M}'_P = e^{\frac{\phi_0}{8} (\hat{\gamma} \gamma_{11} + \gamma_{57} - \gamma_{49} - \gamma_{68})} R^{-1} \mathcal{M}'_P{}^{-1} \Gamma \mathcal{M}'_P R e^{-\frac{\phi_0}{8} (\hat{\gamma} \gamma_{11} + \gamma_{57} - \gamma_{49} - \gamma_{68})}. \quad (\text{B.40})$$

Por lo tanto, la ecuación de supersimetría en la base rotada es esencialmente la misma para el caso $\alpha = 0$, por lo que concluimos que todas estas configuraciones son también 1/6 BPS.

Notar, sin embargo, que la base de autovectores que genera los espinores de Killing de estas supersimetrías preservadas está parametrizada por α_0 . Es decir que, a pesar de que todas las configuraciones preservan la misma cantidad de supercargas, cada una preserva un subconjunto distinto, dependiendo del valor de α_0 . A su vez, estos subconjuntos están conectados por una rotación en el espacio espinorial. En este punto podemos preguntarnos si existe algún subconjunto común a estos subespacios. Para ello, debemos buscar soluciones que sean invariantes bajo la acción de la rotación (B.35). Esto último equivale a imponer la siguiente proyección sobre el espinor constante

$$(\hat{\gamma} \gamma_4 - \gamma_9 \gamma_{11} + \gamma_{56} + \gamma_{78}) \epsilon_0 = 0. \quad (\text{B.41})$$

Haciendo uso de esta condición, podemos reescribir (B.41) como

$$(1 - s_2 s_4) (-\gamma_9 \gamma_{11} + \gamma_{78}) \epsilon_0 = 0. \quad (\text{B.42})$$

Esta última ecuación es satisfecha por espinores que cumplan con la proyección $(1 + \gamma_{57}\gamma_{68})\epsilon_0 = 0$. Sin embargo, esta proyección no conmuta con las condiciones (2.29). De hecho, se puede ver que ambas proyecciones no poseen un subespacio común de soluciones.

B.4 Supersimetría del Wilson loop en presencia del defecto

B.4.1 Teoría de gauge

En signatura Euclídea, la realización más general de un Wilson loop supersimétrico es de la forma[201, 200]

$$W = \text{tr} \mathcal{P} \exp \left\{ \oint d\tau [iA_\mu \dot{x}^\mu + \dot{y}^I \Phi_I] \right\}, \quad (\text{B.43})$$

con las curvas $x^\mu(\tau)$ e $y^I(\tau)$ tales que $\dot{x}^2 - \dot{y}^2 = 0$, y el parámetro de supersimetría satisfaciendo la siguiente condición

$$(i\Gamma^\mu \dot{x}_\mu + \rho^I \dot{y}_I) \epsilon(x) = 0. \quad (\text{B.44})$$

Las convenciones utilizadas aquí son las de $\mathcal{N} = 4$ SYM obtenida como reducción dimensional de $\mathcal{N} = 1$ SYM en 10 dimensiones, por lo que las matrices Γ son matrices de Dirac para el espacio-tiempo 4-dimensional mientras que las matrices ρ actúan sobre los índices de simetría R , *i.e.* $SO(6)$, del espinor $\epsilon(x)$. A su vez, las Γ y las ρ anticonmutan entre sí. El parámetro espinorial de supersimetría $\epsilon(x)$ más general se escribe de la forma

$$\epsilon(x) = \epsilon_0 + x^\mu \Gamma_\mu \epsilon_1, \quad (\text{B.45})$$

donde ϵ_0 y ϵ_1 son espinores constantes correspondientes a supercargas tipo super-Poincaré y super-conformes respectivamente.

El Wilson loop considerado en el capítulo 4 posee la siguiente parametrización

$$x^\mu(\tau) = (0, R \cos \tau, R \sin \tau, L) \quad \text{y} \quad \dot{y}^I = |\dot{x}| (0, 0, -\sin \chi, 0, 0, -\cos \chi), \quad (\text{B.46})$$

por lo que (B.44) es

$$R(-i\Gamma^1 \sin \tau + i\Gamma^2 \cos \tau - \rho^3 \sin \chi - \rho^6 \cos \chi) \epsilon(x) = 0, \quad (\text{B.47})$$

Esto debe satisfacerse para todo valor de τ , es decir que buscamos supersimetrías que estén globalmente preservadas. Por lo tanto se obtenemos las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \sin \tau & : & -i\Gamma^1 \epsilon_0 &= [R(\sin \chi \rho^3 + \cos \chi \rho^6) \Gamma^2 + iL \Gamma^1 \Gamma^3] \epsilon_1, \\ \cos \tau & : & i\Gamma^2 \epsilon_0 &= [R(\sin \chi \rho^3 + \cos \chi \rho^6) \Gamma^1 - iL \Gamma^2 \Gamma^3] \epsilon_1, \\ 1 & : & (\sin \chi \rho^3 + \cos \chi \rho^6) \epsilon_0 &= [-iR \Gamma^1 \Gamma^2 - L(\sin \chi \rho^3 + \cos \chi \rho^6) \Gamma^3] \epsilon_1, \\ \sin \tau \cos \tau & : & ((\Gamma^2)^2 - (\Gamma^1)^2) \epsilon_1 &= 0, \\ \cos^2 \tau & : & (\Gamma^1 \Gamma^2 + \Gamma^1 \Gamma^2) \epsilon_1 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Notar que las últimas dos líneas se satisfacen trivialmente. Además, es fácil ver que estas condiciones no son linealmente independientes entre sí. Multiplicando la primera líneaa por Γ^2 y la segunda por Γ^1 , se puede ver que ambas líneas conducen al mismo resultado

$$\begin{aligned} i\Gamma^1\Gamma^2\epsilon_0 &= [-R(\sin\chi\rho^3 + \cos\chi\rho^6) - iL\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3]\epsilon_1, \\ (\sin\chi\rho^3 + \cos\chi\rho^6)\epsilon_0 &= [-iR\Gamma^1\Gamma^2 - L(\sin\chi\rho^3 + \cos\chi\rho^6)\Gamma^3]\epsilon_1. \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Estas últimas dos ecuaciones son en realidad equivalentes, lo que puede verse ya sea multiplicando la primera por $-i\Gamma^2\Gamma^1$ o la segunda por $(\sin\chi\rho^3 + \cos\chi\rho^6)$, teniendo entonces que

$$\epsilon_0 = -[iR(\sin\chi\rho^3 + \cos\chi\rho^6)\Gamma^1\Gamma^2 + L\Gamma^3]\epsilon_1. \quad (\text{B.50})$$

Esta proyección implica que el operador preserva la mitad de la supersimetría de la teoría. En particular, las supercargas conservadas serán combinaciones de cargas super-Poincaré y superconformes, pero nunca ambas por separado (a diferencia, por ejemplo, del Wilson loop recto). La forma final para el espinor que genera estas transformaciones puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{WL}}(x^\mu(\tau)) &= \epsilon_0 + x^\mu(\tau)\Gamma_\mu\epsilon_1, \\ &= -[iR(\sin\chi\rho^3 + \cos\chi\rho^6)\Gamma^1\Gamma^2]\epsilon_1 + R\cos\tau\Gamma^1\epsilon_1 + R\sin\tau\Gamma^2\epsilon_1. \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Ahora bien, nos interesa evaluar bajo qué condiciones algunas de estas supercargas preservadas por el Wilson loop pueden identificarse con las preservadas por el defecto, de manera que el arreglo Wilson loop/ interfaz sea supersimétrico. En lo siguiente, seguiremos de cerca el análisis realizado en [202] donde se estudian las simetrías de $\mathcal{N} = 4$ SYM preservadas luego de la inserción de este tipo de defectos, debido a la presencia de la D5-brana en la descripción holográfica. Las supercargas preservadas por la interfaz son las que cumplen la siguiente condición⁶

$$\begin{aligned} P_+\epsilon_0 &= \epsilon_0 \quad \text{y} \quad P_+\epsilon_1 = \epsilon_1, \\ \text{con} \quad P_+ &= \frac{1}{2}(1 + \Gamma^3\rho^1\rho^2\rho^3). \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

Para encontrar las posibles supersimetrías preservadas por el sistema completo, una vez insertado el Wilson loop, debemos buscar soluciones de (B.50) que simultáneamente satisfagan (B.52). Notar que, cuando $\chi = 0$, el término que multiplica ρ^3 se cancela, por lo que ambas condiciones conmutan y es posible encontrar soluciones, las cuales resultarán de aplicar el proyector (B.52) sobre ϵ_1 . De hecho, estas son las únicas soluciones posibles. El sistema Wilson loop/ interfaz es entonces 1/4 BPS, y las supercargas quedan determinadas por la elección que hagamos de ϵ_1 , el cual se toma del conjunto de cargas superconformes preservadas por el defecto. La lista de cargas preservadas

⁶En la notación de [202], $\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes 1$ y $\rho^I = \gamma^5 \otimes \gamma^I$.

por el defecto es la siguiente

$$\begin{aligned}
& (\uparrow, \uparrow\downarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow).Q \mp (\downarrow, \uparrow\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow).Q, \\
& (\uparrow, \uparrow\downarrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow).Q \pm (\downarrow, \uparrow\downarrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow).Q, \\
& (\uparrow, \uparrow\downarrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow).Q \mp (\downarrow, \uparrow\downarrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow).Q, \\
& (\uparrow, \uparrow\downarrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow).Q \pm (\downarrow, \uparrow\downarrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow).Q, \\
& (\downarrow, \uparrow\downarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow).S \mp (\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow).S, \\
& (\downarrow, \uparrow\downarrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow).S \pm (\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow).S, \\
& (\downarrow, \uparrow\downarrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow).S \mp (\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow).S, \\
& (\downarrow, \uparrow\downarrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow).S \pm (\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow).S.
\end{aligned} \tag{B.53}$$

La notación $(\uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow)$ representa la base que utilizamos para descomponer los espinores ϵ_0, ϵ_1 , los cuales, al provenir de la reducción dimensional de $\mathcal{N} = 1$ en 10 dimensiones, poseen 32 componentes (entre índices de Lorentz y de simetría R). Las primera dos entradas corresponden a índices de Lorentz, mientras las tres restantes corresponden a índices de $SO(6)$ (direcciones en el subálgebra de Cartan). Notar que las supersimetrías preservadas por el defecto no mezclan super-Poincaré con superconformes.

Como se menciona arriba, las supercargas del sistema total están parametrizadas por las posibles elecciones para ϵ_1 entre las cargas superconformes preservadas por la interfaz, las cuales corresponden a las últimas 4 líneas de la lista (B.53)

$$\begin{aligned}
& (\downarrow, \uparrow\downarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow).S \mp (\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow).S, \\
& (\downarrow, \uparrow\downarrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow).S \pm (\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow).S, \\
& (\downarrow, \uparrow\downarrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow).S \mp (\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow).S, \\
& (\downarrow, \uparrow\downarrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow).S \pm (\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow).S.
\end{aligned} \tag{B.54}$$

Para cada línea arriba (junto con la correspondiente elección del signo), la correspondiente supercarga preservada también por el Wilson loop está dada por (B.51).

B.4.2 Teoría de cuerdas

Ahora nos concentramos en las supersimetrías preservadas por la configuración de cuerdas. Como se explicó previamente, las transformaciones de supersimetría están parametrizadas por un espinor de Killing ϵ , el cual es solución de imponer la nulidad de la variación del gravitino. Para $AdS_5 \times S^5$, esta ecuación toma la forma

$$\nabla_m \epsilon - \frac{1}{2} \gamma \gamma_4 \Gamma_m \epsilon = 0, \tag{B.55}$$

donde $\gamma = i\gamma_{0123}$ y γ_i son las matrices de Dirac planas en 10 dimensiones. Por otro lado, siendo E_m^i el correspondiente vielbein, las matrices de Dirac curvas son $\Gamma_m = E_m^i \gamma_i$. La solución a esta ecuación puede escribirse de la siguiente manera

$$\epsilon(x) = \frac{e^{\frac{\phi}{2}\gamma_{12}}}{\sqrt{y}} H(\theta_a) \left(\epsilon_- + y\epsilon_+ + t\gamma_{04}\epsilon_+ + x_3\gamma_{34}\epsilon_+ + re^{-\phi\gamma_{12}}\gamma_{14}\epsilon_+ \right), \quad (\text{B.56})$$

donde ϵ_{\pm} posee quiralidad positiva/negativa respecto de γ y puede parametrizarse en términos de dos espinores reales η_1 y η_2

$$\epsilon_+ = (1 + \gamma)\eta_1 \quad \epsilon_- = (1 - \gamma)\eta_2, \quad (\text{B.57})$$

donde $H(\theta_a)$ es la solución a la ecuación en el espacio interno. Para la solución particular (B.56) tenemos que

$$\epsilon(x) = \frac{e^{\frac{\phi}{2}\gamma_{12}}}{\sqrt{y}} h(\theta) \left(\epsilon_- + y\epsilon_+ + x_3\gamma_{34}\epsilon_+ + re^{-\phi\gamma_{12}}\gamma_{14}\epsilon_+ \right), \quad (\text{B.58})$$

junto con

$$h(\theta) = e^{\frac{\theta}{2}\gamma\gamma_{45}}. \quad (\text{B.59})$$

Las cargas preservadas por una dada configuración satisface la ecuación de simetría κ

$$(1 - \Gamma)\epsilon = 0, \quad (\text{B.60})$$

con el correspondiente proyector de simetría κ

$$\Gamma = \frac{\epsilon^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}X^m\partial_{\beta}X^n}{2\sqrt{g}}\Gamma_{mn}K, \quad (\text{B.61})$$

donde K es el operador de conjugación⁷. Introduciendo (B.58) en (D.22) y luego multiplicando por $\sqrt{y}e^{-\frac{\phi}{2}\gamma_{12}}$ obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \left(e^{-\phi\gamma_{12}}\tilde{\Gamma} - r'\gamma_{12} \right) h^{-1}(\theta) \left(-\epsilon_-^* + y\epsilon_+^* + x_3\gamma_{34}\epsilon_+^* + re^{-\phi\gamma_{12}}\gamma_{14}\epsilon_+^* \right) = \\ = rh(\theta) \left(\epsilon_- + y\epsilon_+ + x_3\gamma_{34}\epsilon_+ + re^{-\phi\gamma_{12}}\gamma_{14}\epsilon_+ \right), \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

donde

$$\tilde{\Gamma} = (y'\gamma_{24} + x_3'\gamma_{23} + my\gamma_{25}) \Rightarrow \tilde{\Gamma}^2 = r'^2 - r^2. \quad (\text{B.63})$$

⁷Notar que, en nuestras convenciones, podemos tomar una representación real para las matrices de Dirac junto con la acción de K sobre los espinores

$$K\epsilon_{\pm} = \pm\epsilon_{\pm}^* \quad K\epsilon_{\pm}^* = \mp\epsilon_{\pm}.$$

Con estas definiciones, el proyector de (B.61) satisface las propiedades requeridas, a saber $\text{tr}\Gamma = 0$ y $\Gamma^2 = 1$.

La dependencia temporal debe cancelarse independientemente, lo que conlleva a la siguiente relación

$$\begin{aligned} \epsilon_-^* = & \left(y - \frac{rr'y'}{(r')^2 - r^2} \right) \epsilon_+^* + \left(x_3 + c \frac{rr'y^2}{(r')^2 - r^2} \right) \gamma_{34} \epsilon_+^* + m \frac{rr'y}{(r')^2 - r^2} \gamma_{45} \epsilon_+^* \\ & - \frac{r^2}{(r')^2 - r^2} (y' - cy^2 \gamma_{34} - my \gamma_{45}) \gamma_{12} e^{\theta \gamma_{45}} \epsilon_+ . \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

Es fácil ver que la parte independiente de τ en (B.62) da lugar a la misma relación. Notar que el lado izquierdo de (B.64) es independiente de σ , por lo que, por consistencia, lo mismo debe ocurrir con el lado derecho. En particular, en el límite $\kappa \rightarrow \infty$ encontramos la siguiente condición

$$\epsilon_-^* = R \cos \chi \gamma_{12} \epsilon_+ + R \sin \chi \gamma_{12} \gamma_{45} \epsilon_+ + L \gamma_{34} \epsilon_+^* , \quad (\text{B.65})$$

Mientras que, por otro lado, la ecuación de simetría κ para la configuración de la D5-brana conlleva a la condición adicional [202, 203]

$$\frac{1}{2} (1 + \gamma_{3456}) \epsilon = \epsilon . \quad (\text{B.66})$$

Notar que ambas ecuaciones no son compatibles para valores arbitrarios de χ , siendo $\chi = 0$ el único caso en el que se obtiene una configuración de hoja de mundo/ D5-brana supersimétrica. Esto está de acuerdo con el análisis de supersimetría realizado en la teoría de gauge.

B.5 Correladores supersimétricos

La variación de supersimetría para un Wilson loop de la forma (5.87) en $\mathcal{N} = 4$ está dada por la siguiente expresión [201]:

$$\delta_\epsilon W_{\mathbf{R}} = \text{tr}_{\mathbf{R}} P \int_C ds \bar{\Psi} (i \Gamma^\mu \dot{x}_\mu + \rho^i n_i |\dot{x}|) \epsilon(x(s)) W_{\mathbf{R}} . \quad (\text{B.67})$$

donde Γ^μ y ρ^i forman una representación del álgebra de Clifford para $SO(3,1)$ (espacio-tiempo) y $SO(6)$ (espacio interno) respectivamente. En esta sección se utilizan las convenciones de [120] para estas matrices. Por lo tanto, la preservación de algún subconjunto de supercargas, impone ciertas condiciones sobre la curva C sobre la que está insertado el operador. En particular, debe existir al menos una solución para la siguiente ecuación

$$(i \Gamma^\mu \dot{x}_\mu + \rho^i n_i |\dot{x}|) \epsilon(x(s)) = 0 , \quad (\text{B.68})$$

donde $\epsilon(x)$ es el espinor de Killing, generador de una transformación general de supersimetría, y es de la forma

$$\epsilon(x) = \epsilon_0 + x^\mu \Gamma_\mu \epsilon_1 , \quad (\text{B.69})$$

con ϵ_0 y ϵ_1 espinores constantes. En particular, una curva circular en el espacio tiempo preserva la mitad de las supercargas, siempre y cuando el vector n_i que determina la orientación en el espacio interno sea constante a lo largo de la misma. Las supercargas preservadas por este tipo de operadores son combinaciones no triviales de cargas super-Poincaré (generadas por ϵ_0) y superconformes (generadas por ϵ_1), pero nunca ambas por separado.

Para un correlador de dos Wilson loops definidos sobre curvas C_1 y C_2 , la variación de supersimetría es de la forma

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon(W_{\mathbf{R}_1}W_{\mathbf{R}_2}) = & \text{tr}_{\mathbf{R}_1} P \int_{C_1} ds \bar{\Psi} (i \Gamma^\mu \dot{x}_\mu + \rho^i n_i^{(1)} |\dot{x}|) \epsilon(x(s)) W_{\mathbf{R}_2} \\ & + W_{\mathbf{R}_1} \text{tr}_{\mathbf{R}_2} P \int_{C_2} ds \bar{\Psi} (i \Gamma^\mu \dot{x}_\mu + \rho^i n_i^{(2)} |\dot{x}|) \epsilon(x(s)). \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

Entonces, para que este correlador sea supersimétrico es necesario que se satisfagan simultáneamente las ecuaciones

$$(i \Gamma^\mu \dot{x}_{1\mu} + \rho^i n_i^{(1)} |\dot{x}_1|) \epsilon(x_1(s)) = 0 \quad \text{y} \quad (i \Gamma^\mu \dot{x}_{2\mu} + \rho^i n_i^{(2)} |\dot{x}_2|) \epsilon(x_2(s)) = 0. \quad (\text{B.71})$$

Holográficamente, el vector n_i es interpretado en términos de coordenadas sobre la esfera S^5 [200]. En particular, estamos interesados en el caso en el que C_1 y C_2 son curvas circulares coincidentes, y tanto $n_i^{(1)}$ como $n_i^{(2)}$ son vectores constantes ubicados en alguno de los polos de la esfera S^5 . Explícitamente, consideramos $x_a^\mu(s) = (0, \cos s, s_a \sin s, 0)$, $s_a = \pm 1$ ($a = 1, 2$) y $n_i^{(a)} = (r_a, 0, 0, 0, 0, 0)$ with $r_a = \pm 1$. La parametrización relativa entre las curvas circulares C_1 y C_2 queda entonces determinada por el signo s_a ($s_a = +1$ que implica ambas curvas se recorren en el mismo sentido y viceversa). Por otro lado, el signo r_a determina si los vectores $n_i^{(1)}$ y $n_i^{(2)}$ son coincidentes ($r_a = +1$) o antipodales ($r_a = -1$). En este caso, la condición de supersimetría (B.71) toma la forma

$$(-i \Gamma^1 \sin s + i s_a \Gamma^2 \cos s + r_a \rho_1) (\epsilon_0 + \cos s \Gamma^1 \epsilon_1 + s_a \sin s \Gamma^2 \epsilon_1) = 0. \quad (\text{B.72})$$

Es fácil ver que estas dos ecuaciones, para $a = 1, 2$, se satisfacen simultáneamente para cualquier valor del parámetro s si imponemos las proyecciones

$$-i \Gamma_1 \epsilon_0 + s_a r_a \rho_1 \Gamma_2 \epsilon_1 = 0. \quad (\text{B.73})$$

Encontramos entonces que si $s_1 r_1 = s_2 r_2$, entonces ambos Wilson loops preservan el mismo subconjunto de supercargas, por lo que el correlador resulta supersimétrico. Además de la opción obvia $r_1 = r_2$ y $s_1 = s_2$ en la que tanto las curvas como las orientaciones en el espacio interno son idénticas, la ecuación (B.73) implica que $r_1 = -r_2$ y $s_1 = -s_2$ (orientaciones opuestas tanto en las curvas como en el espacio interno) corresponde también a un correlador supersimétrico.

Apéndice C

Correladores de una CFT y coordenadas proyectivas

En esta sección, repasaremos el formalismo mediante el cual podemos reescribir las funciones de correlación de una CFT en términos de las coordenadas de un espacio proyectivo de dimensión más grande [204]. El grupo de transformaciones conformes en un espacio-tiempo d -dimensional puede realizarse en términos de rotaciones en un espacio proyectivo $(d + 2)$ -dimensional. En particular, para el espacio Euclídeo en $d = 3$, el grupo conforme es $SO(1, 4)$, por lo que trabajaremos en el cono definido

$$X \cdot X = \eta_{AB} X^A X^B = 0, \quad (\text{C.1})$$

donde $A, B = 1, 2, \dots, 5$ y $\eta_{AB} = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1)$. Dado que las X^A son coordenadas en un espacio proyectivo, hacemos la identificación $cX^A \simeq X^A$ para cualquier constante c no nula. A su vez, podemos relacionar las coordenadas del espacio-tiempo x^μ ($\mu = 1, 2, 3$) con las del espacio proyectivo de la siguiente manera

$$x^\mu = \frac{X^\mu}{X^4 + X^5}, \quad (\text{C.2})$$

de manera tal que las transformaciones conformes actuando sobre x^μ son se traducen simplemente en rotaciones de $SO(1, 4)$ sobre las coordenadas X^A . De esta manera, es fácil ver que

$$X \cdot X' = -\frac{1}{2}(X^4 + X^5)(X'^4 + X'^5)(x - x')^2. \quad (\text{C.3})$$

Los campos tensoriales en el espacio proyectivo quedan de esta manera íntimamente relacionados a los campos tensoriales en el espacio-tiempo 3-dimensional. En particular, un escalar ϕ en el espacio-tiempo con dimensión conforme Δ se asocia con un campo escalar Φ de $SO(1, 4)$ tal que

$$\phi(x) = (X^4 + X^5)^\Delta \Phi(X). \quad (\text{C.4})$$

Por lo tanto, para un par de campos escalares de igual dimensión conforme, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \phi_1(x)\phi_2(x') \rangle &= (X^4 + X^5)^\Delta (X'^4 + X'^5)^\Delta \langle \Phi_1(X)\Phi_2(X') \rangle = \frac{(X^4 + X^5)^\Delta (X'^4 + X'^5)^\Delta}{(-2X \cdot X')^\Delta} \\ &= \frac{1}{(x - x')^{2\Delta}}.\end{aligned}\tag{C.5}$$

Hasta aquí, hemos mencionado funciones de correlación calculadas en el vacío de la teoría. Sin embargo, la simetría conforme también restringe la forma de los correladores de doble *bracket* definidos sobre un Wilson loop (2.66). Ya sea para el Wilson loop recto o el circular, se tiene que

$$\langle\langle \phi_J^I(x(\tau))\phi_L^K(x(\tau')) \rangle\rangle = \gamma(\lambda) \frac{(X^4(\tau) + X^5(\tau))(X^4(\tau') + X^5(\tau'))}{-2X(\tau) \cdot X(\tau')} \delta_L^I \delta_J^K,\tag{C.6}$$

donde $\phi_J^I(x) = C_J(x)\bar{C}^I(x)$ y I, J, K, L toman valores 1,2 de aquí en adelante. Notar que en (C.6), la única dependencia en λ proviene del coeficiente γ , *i.e.* esta función de correlación no desarrolla dimensión anómala. Esta última afirmación es válida en el caso de que la inserción preserve algunas de las supersimetrías del Wilson loop. De hecho, este es el caso cuando se inserta $C_1(x)\bar{C}^2(x)$ y $C_2(x)\bar{C}^1(x)$, los cuales son considerados en (2.3),(2.69) cuando $M_J^I = \text{diag}(-1, 1, -1, 1)^1$.

Ahora evaluamos (C.6) para una semirrecta y un círculo. Parametrizamos la semirrecta inmersa en \mathbb{R}^3 de la forma

$$(x^1, x^2, x^3) = (e^\tau, 0, 0), \quad \tau \in (-\infty, \infty),\tag{C.7}$$

donde τ se corresponde con el tiempo Euclídeo en $\mathbb{R} \times S^2$. En términos de las coordenadas proyectivas (C.2), la curva se escribe como

$$(X^1, X^2, X^3, X^4, X^5) = (1, 0, 0, -\sinh \tau, \cosh \tau),\tag{C.8}$$

y, de (C.6), obtenemos

$$\langle\langle \phi_J^I(x(\tau))\phi_L^K(x(\tau')) \rangle\rangle_{\text{straight}} = \frac{\gamma e^{-\tau} e^{-\tau'} \delta_L^I \delta_J^K}{2 \cosh(\tau - \tau') - 2},\tag{C.9}$$

Para la curva circular en \mathbb{R}^3 proponemos la siguiente parametrización

$$(x^1, x^2, x^3) = (0, \cos \tau, \sin \tau),\tag{C.10}$$

y, en términos de las coordenadas proyectivas,

$$(X^1, X^2, X^3, X^4, X^5) = (0, \cos \tau, \sin \tau, 0, 1),\tag{C.11}$$

por lo que finalmente se obtiene

$$\langle\langle \phi_J^I(x(\tau))\phi_L^K(x(\tau')) \rangle\rangle_{\text{circle}} = \frac{\gamma \delta_L^I \delta_J^K}{2 - 2 \cos(\tau - \tau')}.\tag{C.12}$$

¹Es fácil ver que $C_3(x)\bar{C}^4(x)$ y $C_4(x)\bar{C}^3(x)$ también satisfacen esta condición.

Apéndice D

Repaso de la solución clásica para el *cusp* general

En esta sección repasamos la solución clásica encontrada en [129] y el correspondiente espectro de fluctuaciones para una cuerda en $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ que, en la frontera, describe una línea con un pequeño *cusp* geométrico ϕ e interno θ .

D.1 Solución clásica

La métrica de $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ es

$$ds^2 = R^2 (ds_{AdS_4}^2 + 4ds_{\mathbb{CP}^3}^2), \quad (\text{D.1})$$

donde

$$ds_{AdS_4}^2 = -\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\varphi^2). \quad (\text{D.2})$$

En esta geometría, consideramos la acción de GS. Una vez fijado el gauge estático, la acción para los grados de libertad bosónicos es del tipo Nambu-Goto. Tomando t y φ como las coordenadas de la hoja de mundo,

$$S = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int d^2\sigma \sqrt{\det G_{\mu\nu} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu}, \quad (\text{D.3})$$

donde μ, ν y i, j son índices del espacio de fondo y de la hoja de mundo respectivamente, $G_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio de fondo y X^μ denota las coordenadas de la cuerda sobre este espacio.

El radio global ρ y la dirección de Killing ϑ en \mathbb{CP}^3 , se proponen como funciones de la variable φ

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \vartheta = \vartheta(\varphi), \quad (\text{D.4})$$

mientras que el resto de las coordenadas de la configuración se consideran fijas. Los ángulos de *cusp* ϕ y θ están relacionados con la extensión angular de la cuerda en AdS y \mathbb{CP}^3 respectivamente.

A su vez, las cantidades conservadas asociadas a traslaciones en t y ϑ son

$$E = -\frac{\sinh^2 \rho \cosh \rho}{\sqrt{\sinh^2 \rho + (\partial_\varphi \rho)^2 + (\partial_\varphi \vartheta)^2}}, \quad J = \frac{\partial_\varphi \vartheta \cosh \rho}{\sqrt{\sinh^2 \rho + (\partial_\varphi \rho)^2 + (\partial_\varphi \vartheta)^2}}. \quad (\text{D.5})$$

Notar que la condición BPS (es decir que la configuración preserve cargas super-Poincaré) es equivalente a nivel clásico a tomar $E = \pm J$. Introducimos dos parámetros

$$p = \frac{1}{E}, \quad q = -\frac{J}{E}, \quad (\text{D.6})$$

en términos de los cuales los ángulos de *cusp* pueden expresarse de la siguiente manera

$$\phi = \pi - 2\frac{p^2}{b\sqrt{b^4 + p^2}} \left[\Pi \left(\frac{b^4}{b^4 + p^2} \mid k^2 \right) - \mathbb{K}(k^2) \right], \quad \theta = \frac{2bq}{\sqrt{b^4 + p^2}} \mathbb{K}(k^2), \quad (\text{D.7})$$

donde

$$p^2 = \frac{b^4(1 - k^2)}{b^2 + k^2}, \quad q^2 = \frac{b^2(1 - 2k^2 - k^2b^2)}{b^2 + k^2}. \quad (\text{D.8})$$

El límite de ángulo pequeño ($\phi, \theta \ll 1$) corresponde a $p \rightarrow \infty$

$$\phi = \frac{\pi}{p} + \frac{\pi(3q^2 - 5)}{4p^3} + \mathcal{O}(p^{-5}), \quad \theta = \frac{\pi q}{p} + \frac{\pi q(q^2 - 3)}{4p^3} + \mathcal{O}(p^{-5}). \quad (\text{D.9})$$

La acción clásica para esta configuración resulta

$$S_{cl} = T\sqrt{2\lambda} \frac{\sqrt{b^4 + p^2}}{bp} \left[\frac{(b^2 + 1)p^2}{b^4 + p^2} \mathbb{K}(k^2) - \mathbb{E}(k^2) \right], \quad (\text{D.10})$$

donde T es un cut-off para la integración en el tiempo. A su vez, la divergencia correspondiente a $\rho \rightarrow \infty$ a sido eliminada mediante la regularización del volumen.

D.2 Espectro de fluctuaciones

En este punto resulta conveniente definir las coordenadas de la hoja de mundo τ y σ tales que

$$\cosh^2 \rho = \frac{1 + b^2}{b^2 \text{cn}^2(\sigma \mid k^2)}, \quad (\text{D.11})$$

cuyo rango es

$$-\mathbb{K}(k^2) < \sigma < \mathbb{K}(k^2), \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (\text{D.12})$$

En estas coordenadas, la métrica inducida toma la forma

$$ds^2 = \frac{1 - k^2}{\text{cn}^2(\sigma \mid k^2)} (-d\tau^2 + d\sigma^2), \quad (\text{D.13})$$

obteniendo la siguiente expresión para la curvatura escalar

$$R^{(2)} = -2 \left(1 + \frac{k^2}{1 - k^2} \text{cn}^4(\sigma \mid k^2) \right). \quad (\text{D.14})$$

En lo que sigue, para simplificar la notación, no denotaremos la dependencia en k^2 para las funciones de Jacobi.

Dado que hemos fijado el gauge estático, no hay fluctuaciones en las direcciones longitudinales. Definiendo los campos escalares ζ_a para las fluctuaciones en las direcciones transversas ($a = 1, \dots, 8$) (ver [129]), la acción cuadrática para los modos bosónicos resulta

$$S_b = \frac{1}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{g} [g^{ij} \partial_i \zeta_a \partial_j \zeta_b + A (\zeta_8 \partial_\sigma \zeta_7 - \zeta_7 \partial_\sigma \zeta_8) + M_{ab} \zeta_a \zeta_b], \quad (\text{D.15})$$

donde

$$M_{11} = \frac{b^4 - b^2 p^2 - p^4}{b^2 p^2 \cosh^2 \rho} + 2, \quad M_{22} = \frac{b^4 - b^2 p^2 - p^4}{b^2 p^2 \cosh^2 \rho}, \quad (\text{D.16})$$

$$M_{ss} = \frac{b^4 - b^2 p^2 - p^4}{4b^2 p^2 \cosh^2 \rho}, \quad s = 3, 4, 5, 6 \quad (\text{D.17})$$

$$M_{77} = \frac{b^4 - b^2 p^2 - p^4}{b^2 p^2 \cosh^2 \rho} - \frac{2(b^2 + 1)(b^2 - p^2)}{b^2 p^2 \cosh^4 \rho} + b^2 \frac{b^4 + 2b^2 p^2 \sinh^2 \rho + b^2 p^2 - p^2}{\cosh^2 \rho (b^4 + 2b^2 p^2 \sinh^2 \rho - p^2)^2}, \quad (\text{D.18})$$

$$M_{88} = \frac{b^4 - b^2 p^2 - p^4}{b^2 p^2 \cosh^2 \rho} + 2 - \frac{3b^2}{\cosh^2 \rho (b^4 + 2b^2 p^2 \sinh^2 \rho - p^2)} + \frac{b^4 p^2}{(b^4 + 2b^2 p^2 \sinh^2 \rho - p^2)^2}, \quad (\text{D.19})$$

$$M_{78} = M_{87} = \frac{2\sqrt{-b^4 + b^2 p^2 + p^2} \sqrt{b^2 \sinh^2 \rho - 1} \sqrt{b^2 + p^2 \sinh^2 \rho}}{p \cosh^3 \rho (b^4 + 2b^2 p^2 \sinh^2 \rho - p^2)}, \quad (\text{D.20})$$

$$A = \frac{2\sqrt{b^4 + p^2} \sqrt{-b^4 + b^2 p^2 + p^2}}{p \cosh^2 \rho (b^4 + 2b^2 p^2 \sinh^2 \rho - p^2)}. \quad (\text{D.21})$$

Para los modos fermiónicos, se obtiene una acción cuadrática de tipo Dirac para las fluctuaciones. En la siguiente subsección, escribiremos solamente las correspondientes expresiones en el límite de ángulo geométrico e interno pequeños. A su vez, la condición de fijado de simetría κ es de la forma

$$\frac{1}{2} (1 + \Gamma_{01} \Gamma_{11}) \theta = \theta. \quad (\text{D.22})$$

D.2.1 Límite de ángulo pequeño

Estamos interesados en el comportamiento de la función de partición a 1-loop en el límite en el que tanto el ángulo de *cusp* geométrico como el interno son pequeños. Estudiaremos ambos casos por separado.

Primero consideremos un pequeño ángulo de *cusp* geométrico $\phi \ll 1$, mientras que el ángulo interno será nulo, *i.e.* $\theta = 0$. De (D.9), concluimos que $\theta = 0$ implica $q \rightarrow 0$. En este límite, podemos expresar los parámetros p y b en términos de k . Para pequeños valores de k , el ángulo de *cusp* geométrico también es pequeño,

$$\phi^2 = \pi^2 k^2 + \mathcal{O}(k^4). \quad (\text{D.23})$$

Para los modos bosónicos, la matriz de masas resulta diagonal, obteniendo los correspondientes operadores de Klein-Gordon definidos en la métrica (D.13) y con las siguientes masas

$$M_{11} = 2, \quad M_{88} = R^{(2)} + 4, \quad M_{ss} = 0, \quad s = 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad (\text{D.24})$$

Por otro lado, para los modos fermiónicos se obtiene un Lagrangeano de Dirac con derivadas covariantes definidas en la métrica (D.13) y términos de masa de la forma

$$M_F = \frac{i\Gamma_{01}}{4} [(\Gamma_{49} - \Gamma_{57} + \Gamma_{68}) - 3\Gamma_{23}] , \quad (\text{D.25})$$

Ahora expandimos el espinor 10-dimensionales en una base tal que las matrices $\{i\Gamma_{49}, i\Gamma_{57}, i\Gamma_{68}, i\Gamma_{23}\}$ sean diagonales con autovalores $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ ($s_i = \pm 1$). Haciendo esta elección el Lagrangeano se factoriza en ocho Lagrangeanos para espinores 2-dimensionales, para los cuales $\Gamma_{01} \rightarrow \tilde{\gamma}_*$ con $\tilde{\gamma}_*$ la matriz gamma quiral. El fijado de simetría κ (D.22) es equivalente a tomar $s_4 = -s_1 s_2 s_3$ y, evaluando (D.25) para las ocho posibles combinaciones de $\{s_1, s_2, s_3\}$, se obtienen dos modos no-masivos, tres fermiones con masa quiral $m_F = 1$ y tres con $m_F = -1$.

La función de partición a 1-loop resulta entonces

$$Z_{1-loop} = \frac{\det^{2/2}(i\tilde{\gamma}^a D_a) \det^{3/2}(i\tilde{\gamma}^a D_a - \tilde{\gamma}_*) \det^{3/2}(i\tilde{\gamma}^a D_a + \tilde{\gamma}_*)}{\det^{6/2}(-\nabla^2) \det^{1/2}(-\nabla^2 + R^{(2)} + 4) \det^{1/2}(-\nabla^2 + 2)} , \quad (\text{D.26})$$

donde $\tilde{\gamma}^a$ son las matrices de Dirac curvas en 2 dimensiones para la métrica (D.13), D_a son las correspondientes derivadas covariantes, a saber

$$D_\tau = \partial_\tau + \frac{\text{sn}(\sigma) \text{dn}(\sigma)}{2 \text{cn}(\sigma)} \gamma^0 \gamma^1, \quad D_\sigma = \partial_\sigma , \quad (\text{D.27})$$

y ∇^2 representa el Laplaciano escalar

$$\nabla^2 = \frac{\text{cn}^2(\sigma)}{1 - k^2} (\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2) . \quad (\text{D.28})$$

Notar que, en el límite de $k \rightarrow 0$, se reducen a operadores de Dirac y Klein-Gordon sobre AdS_2 , por lo que (D.26) resulta en la función de partición a 1-loop para una cuerda que describe una línea recta en la frontera.

Ahora consideramos el caso de un pequeño ángulo de *cusp* interno $\theta \ll 1$, tomando a su vez $\phi = 0$. Esto corresponde al límite $p \rightarrow \infty$ con q/p y b/p fijos, a saber

$$\frac{q}{p} = \frac{ik}{\sqrt{1 - k^2}}, \quad \frac{b}{p} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} . \quad (\text{D.29})$$

Notar que, en este límite, k será nuevamente el parámetro pequeño que define la expansión para θ pequeño, con la salvedad de que ahora k es imaginario puro. En particular, de (D.9) se puede ver que,

$$k^2 = -\theta^2/\pi^2 . \quad (\text{D.30})$$

Para los modos bosónicos se obtienen los correspondientes operadores de Klein-Gordon definidos sobre la métrica (D.13) y con masas

$$\begin{aligned} M_{11} = M_{88} &= 2 + \frac{k^2}{\sqrt{g}}, & M_{22} &= \frac{k^2}{\sqrt{g}}, \\ M_{77} &= R^{(2)} + 2 + \frac{k^2}{\sqrt{g}}, & M_{ss} &= \frac{k^2}{4\sqrt{g}}, \quad s = 3, 4, 5, 6 \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

Para los modos fermiónicos, el término de masa en el Lagrangeano de Dirac 10-dimensional es de la forma

$$M_F = \frac{i\Gamma_{01}}{4} \left[\left(\Gamma_{68} - \Gamma_{57} + \frac{\text{dn}(\sigma)}{\sqrt{1-k^2}} \Gamma_{49} \right) - 3 \frac{\text{dn}(\sigma)}{\sqrt{1-k^2}} \Gamma_{23} \right]. \quad (\text{D.32})$$

Nuevamente, podemos expandir el espinor 10-dimensional en la base que utilizamos para el *cus*p geométrico, obteniendo el espectro de masas que se utiliza en el cálculo de la sección 3.1.4.

Apéndice E

Expansiones para $c \neq 0$

Para valores genéricos de m y c , las ecuaciones de movimiento (4.11) para la configuración de cuerdas son de la forma

$$yy'' + 2(r')^2 + \frac{m^2}{1+m^2}y^2 + 2(x'_3)^2 = 0, \quad yr'' - 2y'r' - \frac{yr}{1+m^2} = 0, \quad x'_3 + cy^2 = 0, \quad \theta' = m, \quad (\text{E.1})$$

sujetas a las siguientes condiciones de contorno

$$y(0) = 0, \quad r(0) = R, \quad x_3(0) = L, \quad \theta(0) = \chi, \quad (\text{E.2})$$

y el valor máximo de la coordenada σ definido por

$$y'(\tilde{\sigma}) - \kappa cy^2(\tilde{\sigma}) = 0, \quad r'(\tilde{\sigma}) = 0, \quad y(\tilde{\sigma}) - \frac{1}{\kappa}x_3(\tilde{\sigma}) = 0, \quad \theta(\tilde{\sigma}) = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{E.3})$$

Este es un sistema complicado de ecuaciones diferenciales no lineales. Sin embargo, dado que la solución para $c = 0$ es conocida, podemos expandir la solución general en potencias del parámetro c

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + cy_1(x) + c^2y_2(x) + \mathcal{O}(c^3), \\ r(x) &= r_0(x) + cr_1(x) + c^2r_2(x) + \mathcal{O}(c^3), \\ x_3(x) &= x_{3,0}(x) + cx_{3,1}(x) + c^2x_{3,2}(x) + \mathcal{O}(c^3), \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

obteniendo entonces un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Resolviendo e imponiendo las condiciones de contorno orden a orden, se obtiene

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \frac{R}{\sqrt{1+m^2}} \operatorname{sn} \left(x, \frac{1}{1+m^2} \right), \\ r_0(x) &= R \operatorname{dn} \left(x, \frac{1}{1+m^2} \right), \\ x_{3,0} &= L, \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

y

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= Ly_0(x) \left[x - \mathbb{E}(\text{am}(x, \frac{1}{1+m^2}), \frac{1}{1+m^2}) \right], \\
r_1(x) &= Lr_0(x) \left[x - \mathbb{E}(\text{am}(x, \frac{1}{1+m^2}), \frac{1}{1+m^2}) \right], \\
x_{3,1}(x) &= -R^2 \left[x - \mathbb{E}(\text{am}(x, \frac{1}{1+m^2}), \frac{1}{1+m^2}) \right].
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Para los ordenes dominantes y subdominantes, estas soluciones son exactas en m . Para órdenes subsiguientes, las ecuaciones son más complicadas y el resultado se puede obtener expandiendo para m grande

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \frac{1}{m^3} y_2^{(3)}(x) + \frac{1}{m^5} y_2^{(5)}(x) + \mathcal{O}(m^{-7}), \\
r_2(x) &= \frac{1}{m^4} r_2^{(4)}(x) + \frac{1}{m^6} r_2^{(6)}(x) + \mathcal{O}(m^{-8}), \\
x_{3,2}(x) &= \frac{1}{m^4} x_{3,2}^{(4)}(x) + \frac{1}{m^6} x_{3,2}^{(6)}(x) + \mathcal{O}(m^{-8}),
\end{aligned} \tag{E.7}$$

encontrando

$$\begin{aligned}
y_2^{(3)}(x) &= -\frac{R}{16} (R^2 + L^2) (9 \sin x + \sin 3x - 12x \cos x), \\
y_2^{(5)}(x) &= \frac{R}{128} \left[(95R^2 + 99L^2) \sin x + 8x^2(R^2 + 5L^2) \sin x - (R^2 + 3L^2) \sin 5x \right. \\
&\quad \left. - 4x(25R^2 + 29L^2) \cos x + 16x(R^2 + 2L^2) \cos 3x - 2R^2 \sin 3x \right], \\
r_2^{(4)}(x) &= -\frac{R}{64} \left[8x^2(R^2 - L^2) - 17R^2 - 19L^2 + 16x(R^2 + 2L^2) \sin 2x \right. \\
&\quad \left. + 16(R^2 + L^2) \cos 2x + (R^2 + 3L^2) \cos 4x \right], \\
r_2^{(6)}(x) &= \frac{R}{2048} \left[-760R^2 - 872L^2 - x(382R^2 + 498L^2) + 512x^2(R^2 - L^2) - 80x(R^2 + 3L^2) \sin 4x \right. \\
&\quad \left. + 4(193R^2 + 197L^2) \cos 2x + 192x^2(R^2 + 3L^2) \cos 2x - 8(R^2 - 13L^2) \cos 4x \right. \\
&\quad \left. - 4(R^2 + 5L^2) \cos 6x + (191R^2 + 249L^2) \sin 2x + 4x(3R^2 + 118L^2) \sin 2x \right], \\
x_{3,2}^{(4)}(x) &= -\frac{R^2 L}{16} (2x - \sin 2x)^2, \\
x_{3,2}^{(6)}(x) &= \frac{R^2 L}{64} \left((6 - \cos 2x) \sin^2 2x - x(26 \sin 2x - 3 \sin 4x + 4x^2(7 - 2 \cos 2x)) \right).
\end{aligned} \tag{E.8}$$

A su vez, de las condiciones de contorno, tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \mathbb{K} \left(\frac{1}{1+m^2} \right) - cL - c^2 \left[\frac{\pi(R^2 + 3L^2)}{8m^2} - \frac{\pi(R^2 - 9L^2)}{64m^4} + \mathcal{O}(m^{-6}) \right] + \mathcal{O}(c^3), \\
\frac{\pi k}{\sqrt{\lambda}} &= \frac{L}{R} \sqrt{1+m^2} + c \frac{R^2 + L^2}{R} \sqrt{1+m^2} \left[\mathbb{E} \left(\frac{1}{1+m^2} \right) - \mathbb{K} \left(\frac{1}{1+m^2} \right) \right] \\
&\quad + c^2 \left[\frac{L^3 m}{2R} + \frac{L}{4mR} (6R^2 + 5L^2) + \mathcal{O}(m^{-3}) \right] + \mathcal{O}(c^3),
\end{aligned} \tag{E.9}$$

Apéndice F

Límite de prueba de la configuración de branas

Como se mencionó en la sección 5.2, la geometría *bubbling* de género uno posee dos parámetros libres, a saber, ω_1 y ω_3 , los cuales están a su vez relacionados con los parámetros de la representación del Wilson loop, o equivalentemente, el número de D3 y D5-branas que conforman la configuración *back-reactante* dual. En este apéndice se considera el régimen $\omega_1 \rightarrow \infty$, correspondiente al colapso del segmento $[e_1, e_2]$, en el cual la geometría se reduce a $AdS_5 \times S^5$ [171, 172].

Para ver esto, expandimos las funciones elípticas de Weierstrass para ω_1 grande

$$\wp(z) \simeq -\frac{\pi^2}{12\omega_3^2} \left(1 + \frac{3}{\sinh^2\left(\frac{i\pi z}{2\omega_3}\right)} \right), \quad (\text{F.1})$$

$$\zeta(z) \simeq \frac{\pi^2 z}{12\omega_3^2} + \frac{i\pi}{2\omega_3} \coth\left(\frac{i\pi z}{2\omega_3}\right). \quad (\text{F.2})$$

En este límite, la dependencia en ω_3 es completamente artificial, y puede verse mediante un cálculo explícito que ninguna función geométrica depende de este parámetro. De hecho, es posible deshacerse de esta dependencia mediante una transformación holomorfa de las variables z , la cual, precisamente por ser holomorfa, no altera la geometría. Específicamente, esta transformación es de la forma

$$z = \frac{|\omega_3|}{\pi} \log \left(\frac{1 + i \sinh\left(\frac{\pi}{|\omega_3|} + \eta + i\theta\right)}{\cosh\frac{\pi}{|\omega_3|} + i \sinh(\eta + i\theta)} \right), \quad (\text{F.3})$$

bajo la cual las funciones h_1 y h_2 se reducen a

$$h_1 = \frac{L^2}{4\sqrt{g_S}} \cosh(\eta + i\theta) + \text{c.c.}, \quad (\text{F.4})$$

$$h_2 = \frac{L^2\sqrt{g_S}}{4} \sinh(\eta + i\theta) + \text{c.c.}, \quad (\text{F.5})$$

obteniendo entonces la métrica $AdS_5 \times S^5$ como fibración de AdS_2, S^2, S^4

$$ds^2 = L^2 (\cosh^2 \eta ds_{AdS_2}^2 + \sinh^2 \eta d\Omega_2^2 + d\eta^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_4^2) . \quad (F.6)$$

Por lo tanto, en este límite, el dominio fundamental de las funciones elípticas de Weierstrass se mapea a la cinta semi-infinita descrita por $0 \leq \eta < \infty$ y $0 \leq \theta \leq \pi$ (ver Fig. F.1). A su vez, es fácil ver que los puntos $z = 0$ y $z = \omega_3$ se mapean a puntos antipodales $(\eta = 0, \theta = 0)$ y $(\eta = 0, \theta = \pi)$, respectivamente.

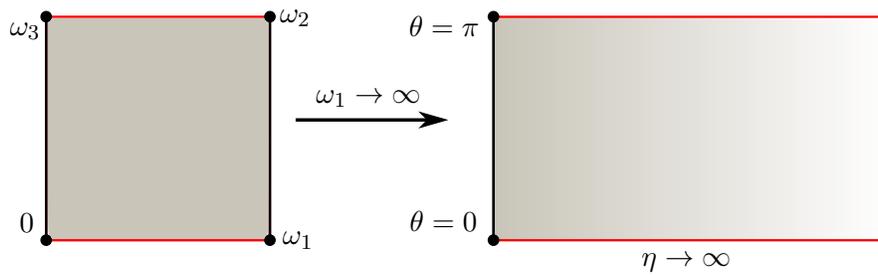


Figura F.1: Los puntos $z = \{0, \omega_3\}$ se mapean a $\theta = \{0, \pi\}$ en el límite $\omega_1 \rightarrow \infty$.

Apéndice G

Contribución de otros puntos estacionarios

Por completitud, presentamos aquí la contribución de los puntos estacionarios adicionales a $\langle W_{S_l} \rangle_{\mathbf{R}}$, los cuales son subdominantes con respecto a los puntos estacionarios encontrados en la sección 5.3.3. La primera integral es

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1}{\pi} \int_{-1}^1 dz \exp \left[-\frac{2N}{\pi\lambda} \left(\mu_1^2 \int_{-1}^z dx \sqrt{1-x^2} \log(e^{\mu_1 z} - e^{\mu_1 x}) + \mu_1^2 \int_z^1 dx \sqrt{1-x^2} \log(e^{\mu_1 x} - e^{\mu_1 z}) \right. \right. \\ \left. \left. + i \mu_1^2 \pi \int_{-1}^z dx \sqrt{1-x^2} + \mu_2^2 \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} \log(1 - e^{-\mu_2 x + c_2 - c_1 + \mu_1 z}) + \frac{\pi\lambda}{2} (\mu_1 z - c_1) f \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

Existe una segunda solución a las ecuaciones de punto estacionario. Para ver esto, procedemos como en [177], es decir, tomamos el límite de λ grande antes de derivar las correspondientes ecuaciones. Por lo tanto tenemos que

$$-\frac{2N}{\pi\lambda} \left[\mu_1^3 z \int_{-1}^z dx \sqrt{1-x^2} + \mu_1^3 \int_z^1 dx x \sqrt{1-x^2} + i \mu_1^2 \pi \int_{-1}^z dx \sqrt{1-x^2} + \frac{\pi\lambda}{2} (\mu_1 z - c_1) f \right], \quad (\text{G.2})$$

obteniendo la siguiente ecuación

$$\frac{\mu_1^3}{\lambda} \int_{-1}^z dx \sqrt{1-x^2} + i \frac{\mu_1^2}{\lambda} \pi \sqrt{1-z^2} + \frac{\pi}{2} \mu_1 f \approx \frac{\mu_1^3}{\lambda} \int_{-1}^z dx \sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2} \mu_1 f = 0, \quad (\text{G.3})$$

donde, en el lado derecho, hemos descartado el término proporcional a $\frac{\mu_1^2}{\lambda}$, por ser subdominante en el límite de λ grande. Esta ecuación es completamente análoga a la que se encuentra en [177], y posee soluciones complejas tales que

$$\tilde{z}_1 = \cos \psi_1 \in \mathbb{C}, \quad (\text{G.4})$$

con ψ_1 tal que

$$\pi\left(\frac{f+\nu}{\nu}\right) = \psi_1 - \cos\psi_1 \sin\psi_1. \quad (\text{G.5})$$

Evaluando la integral en este punto estacionario obtenemos la siguiente contribución

$$\begin{aligned} \langle W_{S_i} \rangle_{\mathbf{R}}^{(1)} \Big|_{\text{sub}} &\approx \exp\left(-\frac{2N}{3\pi}\sqrt{\lambda} \operatorname{Re}(\sqrt{\nu} \sin\psi_1)^3 + Nc_1 f\right), \\ &= \exp\left(-\frac{2N}{3\pi}\sqrt{\lambda} \operatorname{Re}(\sqrt{\nu} \sin\psi_1)^3 + \frac{k(1-\nu)}{4}\lambda f\right). \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

Análogamente, la segunda integral en (5.124), en esta aproximación, posee un punto estacionario de la forma

$$\frac{2}{\pi} \int_1^z \sqrt{1-x^2} + \frac{\mu_1^2+1}{\mu_2^2} f = \frac{2}{\pi} \int_1^z \sqrt{1-x^2} + \frac{f+\nu}{1-\nu} = 0, \quad (\text{G.7})$$

con soluciones parametrizadas por el ángulo complejo ψ_2 , el cual satisface

$$\pi\left(\frac{f+1}{1-\nu}\right) = \psi_2 - \cos\psi_2 \sin\psi_2, \quad (\text{G.8})$$

obteniendo entonces

$$\begin{aligned} \langle W_{S_i} \rangle_{\mathbf{R}}^{(2)} \Big|_{\text{sub}} &\approx \exp\left(-\frac{2N}{3\pi}\sqrt{\lambda} \operatorname{Re}(\sqrt{1-\nu} \sin\psi_2)^3 - N\frac{\mu_1^2}{\lambda}(c_1 - c_2) + Nc_2 f\right), \\ &= \exp\left(-\frac{2N}{3\pi}\sqrt{\lambda} \operatorname{Re}(\sqrt{1-\nu} \sin\psi_2)^3 - \frac{k\nu}{4}(f+1)\lambda\right). \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

Finalmente, la contribución de estos puntos estacionarios resulta

$$\begin{aligned} \langle W_{S_i} \rangle_{\mathbf{R}}^{\text{sub}} &\approx \exp\left(-\frac{2N}{3\pi}\sqrt{\lambda} \operatorname{Re}(\sqrt{\nu} \sin\psi_1)^3 + \frac{k(1-\nu)}{4}\lambda f\right) \\ &\quad + \exp\left(-\frac{2N}{3\pi}\sqrt{\lambda} \operatorname{Re}(\sqrt{1-\nu} \sin\psi_2)^3 - \frac{k\nu}{4}(f+1)\lambda\right), \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

El cálculo de estos puntos estacionarios adicionales puede extenderse fácilmente al caso de una geometría de género arbitrario g , sin embargo no se presentará en esta tesis.

Bibliografía

- [1] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264–1266.
- [2] A. Salam and J. C. Ward, *Electromagnetic and weak interactions*, *Phys. Lett.* **13** (1964) 168–171.
- [3] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Broken Symmetries*, *Phys. Rev.* **127** (1962) 965–970.
- [4] S. R. Coleman and E. J. Weinberg, *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking*, *Phys. Rev.* **D7** (1973) 1888–1910.
- [5] S. Weinberg, *Implications of Dynamical Symmetry Breaking*, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 974–996. [Addendum: *Phys. Rev.* **D19**, 1277(1979)].
- [6] L. Susskind, *Dynamics of Spontaneous Symmetry Breaking in the Weinberg-Salam Theory*, *Phys. Rev.* **D20** (1979) 2619–2625.
- [7] D. J. Gross and F. Wilczek, *Asymptotically Free Gauge Theories. 1*, *Phys. Rev.* **D8** (1973) 3633–3652.
- [8] D. J. Gross and F. Wilczek, *ASYMPTOTICALLY FREE GAUGE THEORIES. 2.*, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 980–993.
- [9] H. D. Politzer, *Asymptotic Freedom: An Approach to Strong Interactions*, *Phys. Rept.* **14** (1974) 129–180.
- [10] N. Beisert, *The Dilatation operator of $N=4$ super Yang-Mills theory and integrability*, *Phys. Rept.* **405** (2004) 1–202, [[hep-th/0407277](#)].
- [11] N. Beisert *et. al.*, *Review of AdS/CFT Integrability: An Overview*, *Lett. Math. Phys.* **99** (2012) 3–32, [[arXiv:1012.3982](#)].
- [12] V. Pestun, *Localization of the four-dimensional $N=4$ SYM to a two-sphere and $1/8$ BPS Wilson loops*, *JHEP* **12** (2012) 067, [[arXiv:0906.0638](#)].

- [13] A. Klemm, M. Marino, M. Schiereck, and M. Soroush, *Aharony-Bergman-JafferisMaldacena Wilson loops in the Fermi gas approach*, *Z. Naturforsch.* **A68** (2013) 178–209, [[arXiv:1207.0611](#)].
- [14] A. Kapustin, B. Willett, and I. Yaakov, *Exact Results for Wilson Loops in Superconformal Chern-Simons Theories with Matter*, *JHEP* **03** (2010) 089, [[arXiv:0909.4559](#)].
- [15] A. Lewkowycz and J. Maldacena, *Exact results for the entanglement entropy and the energy radiated by a quark*, *JHEP* **05** (2014) 025, [[arXiv:1312.5682](#)].
- [16] C. Montonen and D. I. Olive, *Magnetic Monopoles as Gauge Particles?*, *Phys. Lett.* **72B** (1977) 117–120.
- [17] N. Seiberg and E. Witten, *Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, *Nucl. Phys.* **B426** (1994) 19–52, [[hep-th/9407087](#)]. [Erratum: *Nucl. Phys.*B430,485(1994)].
- [18] K. A. Intriligator and N. Seiberg, *Lectures on supersymmetric gauge theories and electric-magnetic duality*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **45BC** (1996) 1–28, [[hep-th/9509066](#)]. [,157(1995)].
- [19] M. E. Peskin, *Mandelstam 't Hooft Duality in Abelian Lattice Models*, *Annals Phys.* **113** (1978) 122.
- [20] J. M. Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–252, [[hep-th/9711200](#)].
- [21] E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253–291, [[hep-th/9802150](#)].
- [22] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, *Gauge theory correlators from noncritical string theory*, *Phys. Lett.* **B428** (1998) 105–114, [[hep-th/9802109](#)].
- [23] E. D’Hoker and D. Z. Freedman, *Supersymmetric gauge theories and the AdS / CFT correspondence*, in *Strings, Branes and Extra Dimensions: TASI 2001: Proceedings*, pp. 3–158, 2002. [hep-th/0201253](#).
- [24] J. M. Maldacena, *TASI 2003 lectures on AdS / CFT*, in *Progress in string theory. Proceedings, Summer School, TASI 2003, Boulder, USA, June 2-27, 2003*, pp. 155–203, 2003. [hep-th/0309246](#).
- [25] A. V. Ramallo, *Introduction to the AdS/CFT correspondence*, *Springer Proc. Phys.* **161** (2015) 411–474, [[arXiv:1310.4319](#)].

- [26] C. R. Stephens, G. 't Hooft, and B. F. Whiting, *Black hole evaporation without information loss*, *Class. Quant. Grav.* **11** (1994) 621–648, [gr-qc/9310006].
- [27] L. Susskind, *Strings, black holes and Lorentz contraction*, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 6606–6611, [hep-th/9308139].
- [28] L. Susskind, *The World as a hologram*, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6377–6396, [hep-th/9409089].
- [29] L. Susskind and E. Witten, *The Holographic bound in anti-de Sitter space*, hep-th/9805114.
- [30] G. 't Hooft, *A Planar Diagram Theory for Strong Interactions*, *Nucl. Phys.* **B72** (1974) 461.
- [31] G. 't Hooft, *Large N*, in *In *Tempe 2002, Phenomenology of large N(c) QCD* 3-18*, pp. 3–18, 2002. hep-th/0204069.
- [32] E. Brezin and S. R. Wadia, eds., *The Large N expansion in quantum field theory and statistical physics: From spin systems to two-dimensional gravity*. 1994.
- [33] B. Lucini and M. Panero, *SU(N) gauge theories at large N*, *Phys. Rept.* **526** (2013) 93–163, [arXiv:1210.4997].
- [34] E. Witten, *THE 1 / N EXPANSION IN ATOMIC AND PARTICLE PHYSICS*, *NATO Sci. Ser. B* **59** (1980) 403–419.
- [35] A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, *Contemp. Concepts Phys.* **3** (1987) 1–301.
- [36] S. Coleman, *Aspects of symmetry: selected Erice lectures*, *Cambridge University Press* (1985).
- [37] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. 1988.
- [38] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *SUPERSTRING THEORY. VOL. 2: LOOP AMPLITUDES, ANOMALIES AND PHENOMENOLOGY*. 1988.
- [39] J. Polchinski, *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. Cambridge University Press, 2007.
- [40] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*. Cambridge University Press, 2007.
- [41] B. Zwiebach, *A first course in string theory*. Cambridge University Press, 2006.

- [42] D. Tong, *String Theory*, [arXiv:0908.0333](#).
- [43] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal Field Theory*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [44] M. B. Green and J. H. Schwarz, *Covariant Description of Superstrings*, *Phys. Lett.* **136B** (1984) 367–370.
- [45] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*. 1992.
- [46] J. M. Figueroa-O’Farrill, *Busstepp lectures on supersymmetry*, [hep-th/0109172](#).
- [47] J. D. Lykken, *Introduction to supersymmetry*, in *Fields, strings and duality. Proceedings, Summer School, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, TASI’96, Boulder, USA, June 2-28, 1996*, pp. 85–153, 1996. [hep-th/9612114](#).
- [48] M. F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, *Phys. Rept.* **128** (1985) 39–204.
- [49] L. Alvarez-Gaume and S. F. Hassan, *Introduction to S duality in N=2 supersymmetric gauge theories: A Pedagogical review of the work of Seiberg and Witten*, *Fortsch. Phys.* **45** (1997) 159–236, [[hep-th/9701069](#)].
- [50] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, *Type IIB superstring action in AdS(5) x S**5 background*, *Nucl. Phys.* **B533** (1998) 109–126, [[hep-th/9805028](#)].
- [51] R. Kallosh and A. A. Tseytlin, *Simplifying superstring action on AdS(5) x S**5*, *JHEP* **10** (1998) 016, [[hep-th/9808088](#)].
- [52] D. Sorokin and L. Wulff, *Peculiarities of String Theory on AdS₄xCP³*, *Fortsch. Phys.* **59** (2011) 775–784, [[arXiv:1101.3777](#)].
- [53] P. A. Grassi, D. Sorokin, and L. Wulff, *Simplifying superstring and D-brane actions in AdS₄ x CP³ superbackground*, *JHEP* **08** (2009) 060, [[arXiv:0903.5407](#)].
- [54] T. Klose and K. Zarembo, *Bethe ansatz in stringy sigma models*, *J. Stat. Mech.* **0605** (2006) P05006, [[hep-th/0603039](#)].
- [55] D. V. Uvarov, *AdS(4) x CP**3 superstring and D=3 N=6 superconformal symmetry*, *Phys. Rev.* **D79** (2009) 106007, [[arXiv:0811.2813](#)].
- [56] J. H. Schwarz, *New formulation of the type IIB superstring action in AdS₅ x S⁵*, *JHEP* **09** (2015) 041, [[arXiv:1506.0770](#)].
- [57] A. M. Polyakov, *Quantum Geometry of Bosonic Strings*, *Phys. Lett.* **103B** (1981) 207–210.

- [58] O. Alvarez, *Theory of Strings with Boundaries: Fluctuations, Topology, and Quantum Geometry*, *Nucl. Phys.* **B216** (1983) 125–184.
- [59] A. M. Polyakov, *Quantum Geometry of Fermionic Strings*, *Phys. Lett.* **103B** (1981) 211–213.
- [60] H. Luckock, *Quantum Geometry of Strings With Boundaries*, *Annals Phys.* **194** (1989) 113.
- [61] C. G. Callan, Jr., E. J. Martinec, M. J. Perry, and D. Friedan, *Strings in Background Fields*, *Nucl. Phys.* **B262** (1985) 593–609.
- [62] E. Bergshoeff and P. K. Townsend, *Super D-branes*, *Nucl. Phys.* **B490** (1997) 145–162, [[hep-th/9611173](#)].
- [63] E. Bergshoeff, R. Kallosh, T. Ortin, and G. Papadopoulos, *kappa-symmetry, supersymmetry and intersecting branes*, *Nucl. Phys.* **B502** (1997) 149–169, [[hep-th/9705040](#)].
- [64] E. Bergshoeff and P. K. Townsend, *Super D-branes revisited*, *Nucl. Phys.* **B531** (1998) 226–238, [[hep-th/9804011](#)].
- [65] D. Marolf, L. Martucci, and P. J. Silva, *Fermions, T-duality and effective actions for D-branes in bosonic backgrounds*, *JHEP* **04** (2003) 051, [[hep-th/0303209](#)].
- [66] D. Marolf, L. Martucci, and P. J. Silva, *Actions and fermionic symmetries for D-branes in bosonic backgrounds*, *JHEP* **07** (2003) 019, [[hep-th/0306066](#)].
- [67] L. Martucci and P. Smyth, *Supersymmetric D-branes and calibrations on general $N = 1$ backgrounds*, *JHEP* **11** (2005) 048, [[hep-th/0507099](#)].
- [68] L. Martucci, J. Rosseel, D. Van den Bleeken, and A. Van Proeyen, *Dirac actions for D-branes on backgrounds with fluxes*, *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) 2745–2764, [[hep-th/0504041](#)].
- [69] S. A. Hartnoll, *Lectures on holographic methods for condensed matter physics*, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 224002, [[arXiv:0903.3246](#)].
- [70] E. Witten and D. I. Olive, *Supersymmetry Algebras That Include Topological Charges*, *Phys. Lett.* **78B** (1978) 97–101.
- [71] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis, and J. Maldacena, *$N=6$ superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals*, *JHEP* **10** (2008) 091, [[arXiv:0806.1218](#)].

- [72] M. Benna, I. Klebanov, T. Klose, and M. Smedback, *Superconformal Chern-Simons Theories and AdS(4)/CFT(3) Correspondence*, *JHEP* **09** (2008) 072, [[arXiv:0806.1519](#)].
- [73] I. L. Buchbinder, E. A. Ivanov, O. Lechtenfeld, N. G. Pletnev, I. B. Samsonov, and B. M. Zupnik, *ABJM models in N=3 harmonic superspace*, *JHEP* **03** (2009) 096, [[arXiv:0811.4774](#)].
- [74] A. Mauri and A. C. Petkou, *An N=1 Superfield Action for M2 branes*, *Phys. Lett.* **B666** (2008) 527–532, [[arXiv:0806.2270](#)].
- [75] M. Cederwall, *Superfield actions for N=8 and N=6 conformal theories in three dimensions*, *JHEP* **10** (2008) 070, [[arXiv:0809.0318](#)].
- [76] O. Aharony, O. Bergman, and D. L. Jafferis, *Fractional M2-branes*, *JHEP* **11** (2008) 043, [[arXiv:0807.4924](#)].
- [77] J. A. Minahan and K. Zarembo, *The Bethe ansatz for superconformal Chern-Simons*, *JHEP* **09** (2008) 040, [[arXiv:0806.3951](#)].
- [78] N. Gromov and P. Vieira, *The all loop AdS₄/CFT₃ Bethe ansatz*, *JHEP* **01** (2009) 016, [[arXiv:0807.0777](#)].
- [79] D. Gaiotto, S. Giombi, and X. Yin, *Spin Chains in N=6 Superconformal Chern-Simons-Matter Theory*, *JHEP* **04** (2009) 066, [[arXiv:0806.4589](#)].
- [80] T. McLoughlin and R. Roiban, *Spinning strings at one-loop in AdS(4) x P^{**3}*, *JHEP* **12** (2008) 101, [[arXiv:0807.3965](#)].
- [81] L. F. Alday, G. Arutyunov, and D. Bykov, *Semiclassical Quantization of Spinning Strings in AdS(4) x CP^{**3}*, *JHEP* **11** (2008) 089, [[arXiv:0807.4400](#)].
- [82] C. Krishnan, *AdS(4)/CFT(3) at One Loop*, *JHEP* **09** (2008) 092, [[arXiv:0807.4561](#)].
- [83] N. Gromov and V. Mikhaylov, *Comment on the Scaling Function in AdS(4) x CP^{**3}*, *JHEP* **04** (2009) 083, [[arXiv:0807.4897](#)].
- [84] T. Klose, *Review of AdS/CFT Integrability, Chapter IV.3: N=6 Chern-Simons and Strings on AdS₄xCP₃*, *Lett. Math. Phys.* **99** (2012) 401–423, [[arXiv:1012.3999](#)].
- [85] J. Gomis, D. Sorokin, and L. Wulff, *The Complete AdS(4) x CP^{**3} superspace for the type IIA superstring and D-branes*, *JHEP* **03** (2009) 015, [[arXiv:0811.1566](#)].
- [86] M. T. Grisaru, P. S. Howe, L. Mezincescu, B. Nilsson, and P. K. Townsend, *N=2 Superstrings in a Supergravity Background*, *Phys. Lett.* **162B** (1985) 116–120.

- [87] D. V. Uvarov, *AdS(4) x CP**3 superstring in the light-cone gauge*, *Nucl. Phys.* **B826** (2010) 294–312, [[arXiv:0906.4699](#)].
- [88] G. Arutyunov and S. Frolov, *Superstrings on AdS(4) x CP**3 as a Coset Sigma-model*, *JHEP* **09** (2008) 129, [[arXiv:0806.4940](#)].
- [89] B. Stefanski, jr, *Green-Schwarz action for Type IIA strings on AdS(4) x CP**3*, *Nucl. Phys.* **B808** (2009) 80–87, [[arXiv:0806.4948](#)].
- [90] J. M. Maldacena, *Wilson loops in large N field theories*, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 4859–4862, [[hep-th/9803002](#)].
- [91] S.-J. Rey and J.-T. Yee, *Macroscopic strings as heavy quarks in large N gauge theory and anti-de Sitter supergravity*, *Eur. Phys. J.* **C22** (2001) 379–394, [[hep-th/9803001](#)].
- [92] J. K. Erickson, G. W. Semenoff, and K. Zarembo, *Wilson loops in N = 4 supersymmetric Yang-Mills theory*, *Nucl. Phys.* **B582** (2000) 155–175, [[hep-th/0003055](#)].
- [93] V. Pestun, *Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric Wilson loops*, [arXiv:0712.2824](#).
- [94] N. Drukker and D. J. Gross, *An exact prediction of N = 4 SUSYM theory for string theory*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2896–2914, [[hep-th/0010274](#)].
- [95] M. Kruczenski and A. Tirziu, *Matching the circular Wilson loop with dual open string solution at 1-loop in strong coupling*, *JHEP* **05** (2008) 064, [[arXiv:0803.0315](#)].
- [96] D. Correa, J. Henn, J. Maldacena, and A. Sever, *An exact formula for the radiation of a moving quark in N=4 super Yang Mills*, *JHEP* **06** (2012) 048, [[arXiv:1202.4455](#)].
- [97] F. Benini, *Localization in supersymmetric field theories*, *YITP Kyoto School* (2016).
- [98] S. Cremonesi, *An Introduction to Localisation and Supersymmetry in Curved Space*, *PoS Modave2013* (2013) 002.
- [99] V. Pestun and M. Zabzine, *Introduction to localization in quantum field theory*, *J. Phys.* **A50** (2017), no. 44 443001, [[arXiv:1608.0295](#)].
- [100] J. J. Duistermaat and G. J. Heckman, *On the Variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space*, *Invent. Math.* **69** (1982) 259–268.
- [101] M. F. Atiyah and R. Bott, *The Moment map and equivariant cohomology*, *Topology* **23** (1984) 1–28.

- [102] N. A. Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** (2003), no. 5 831–864, [[hep-th/0206161](#)].
- [103] F. Benini and S. Cremonesi, *Partition Functions of $\mathcal{N} = (2, 2)$ Gauge Theories on S^2 and Vortices*, *Commun. Math. Phys.* **334** (2015), no. 3 1483–1527, [[arXiv:1206.2356](#)].
- [104] N. Doroud, J. Gomis, B. Le Floch, and S. Lee, *Exact Results in $D=2$ Supersymmetric Gauge Theories*, *JHEP* **05** (2013) 093, [[arXiv:1206.2606](#)].
- [105] J. Klnn and M. Zabzine, *Twisted supersymmetric 5D Yang-Mills theory and contact geometry*, *JHEP* **05** (2012) 125, [[arXiv:1202.1956](#)].
- [106] J. Klnn, J. Qiu, and M. Zabzine, *The perturbative partition function of supersymmetric 5D Yang-Mills theory with matter on the five-sphere*, *JHEP* **08** (2012) 157, [[arXiv:1206.6008](#)].
- [107] H.-C. Kim and S. Kim, *M5-branes from gauge theories on the 5-sphere*, *JHEP* **05** (2013) 144, [[arXiv:1206.6339](#)].
- [108] J. A. Minahan and M. Zabzine, *Gauge theories with 16 supersymmetries on spheres*, *JHEP* **03** (2015) 155, [[arXiv:1502.0715](#)].
- [109] M. Marino, *Chern-Simons theory, matrix integrals, and perturbative three manifold invariants*, *Commun. Math. Phys.* **253** (2004) 25–49, [[hep-th/0207096](#)].
- [110] M. Aganagic, A. Klemm, M. Marino, and C. Vafa, *Matrix model as a mirror of Chern-Simons theory*, *JHEP* **02** (2004) 010, [[hep-th/0211098](#)].
- [111] N. Drukker, M. Marino, and P. Putrov, *From weak to strong coupling in ABJM theory*, *Commun. Math. Phys.* **306** (2011) 511–563, [[arXiv:1007.3837](#)].
- [112] N. Drukker, M. Marino, and P. Putrov, *Nonperturbative aspects of ABJM theory*, *JHEP* **11** (2011) 141, [[arXiv:1103.4844](#)].
- [113] M. Marino and P. Putrov, *ABJM theory as a Fermi gas*, *J. Stat. Mech.* **1203** (2012) P03001, [[arXiv:1110.4066](#)].
- [114] M. Mario and P. Putrov, *Interacting fermions and $N=2$ Chern-Simons-matter theories*, *JHEP* **11** (2013) 199, [[arXiv:1206.6346](#)].
- [115] A. Kapustin and B. Willett, *Wilson loops in supersymmetric Chern-Simons-matter theories and duality*, [arXiv:1302.2164](#).
- [116] N. Drukker and D. Trancanelli, *A Supermatrix model for $N=6$ super Chern-Simons-matter theory*, *JHEP* **02** (2010) 058, [[arXiv:0912.3006](#)].

- [117] N. Drukker, J. Plefka, and D. Young, *Wilson loops in 3-dimensional $N=6$ supersymmetric Chern-Simons Theory and their string theory duals*, *JHEP* **11** (2008) 019, [[arXiv:0809.2787](#)].
- [118] B. Chen and J.-B. Wu, *Supersymmetric Wilson Loops in $N=6$ Super Chern-Simons-matter theory*, *Nucl. Phys.* **B825** (2010) 38–51, [[arXiv:0809.2863](#)].
- [119] S.-J. Rey, T. Suyama, and S. Yamaguchi, *Wilson Loops in Superconformal Chern-Simons Theory and Fundamental Strings in Anti-de Sitter Supergravity Dual*, *JHEP* **03** (2009) 127, [[arXiv:0809.3786](#)].
- [120] N. Drukker, *$1/4$ BPS circular loops, unstable world-sheet instantons and the matrix model*, *JHEP* **0609** (2006) 004, [[hep-th/0605151](#)].
- [121] N. Drukker, S. Giombi, R. Ricci, and D. Trancanelli, *More supersymmetric Wilson loops*, *Phys.Rev.* **D76** (2007) 107703, [[arXiv:0704.2237](#)].
- [122] N. Drukker, S. Giombi, R. Ricci, and D. Trancanelli, *Wilson loops: From four-dimensional SYM to two-dimensional YM*, *Phys. Rev.* **D77** (2008) 047901, [[arXiv:0707.2699](#)].
- [123] N. Drukker, S. Giombi, R. Ricci, and D. Trancanelli, *Supersymmetric Wilson loops on S^{**3}* , *JHEP* **05** (2008) 017, [[arXiv:0711.3226](#)].
- [124] V. Cardinali, L. Griguolo, G. Martelloni, and D. Seminara, *New supersymmetric Wilson loops in $ABJ(M)$ theories*, *Phys. Lett.* **B718** (2012) 615–619, [[arXiv:1209.4032](#)].
- [125] D. Marmiroli, *Notes on BPS Wilson Loops and the Cusp Anomalous Dimension in ABJM theory*, [arXiv:1312.2972](#).
- [126] M. S. Bianchi, L. Griguolo, M. Leoni, S. Penati, and D. Seminara, *BPS Wilson loops and Bremsstrahlung function in $ABJ(M)$: a two loop analysis*, *JHEP* **06** (2014) 123, [[arXiv:1402.4128](#)].
- [127] A. M. Polyakov, *Gauge Fields as Rings of Glue*, *Nucl. Phys.* **B164** (1980) 171–188.
- [128] G. P. Korchemsky and A. V. Radyushkin, *Infrared factorization, Wilson lines and the heavy quark limit*, *Phys. Lett.* **B279** (1992) 359–366, [[hep-ph/9203222](#)].
- [129] V. Forini, V. G. M. Puletti, and O. Ohlsson Sax, *The generalized cusp in $AdS_4 \times CP^3$ and more one-loop results from semiclassical strings*, *J. Phys.* **A46** (2013) 115402, [[arXiv:1204.3302](#)].

- [130] L. Griguolo, D. Marmiroli, G. Martelloni, and D. Seminara, *The generalized cusp in $ABJ(M)$ $N = 6$ Super Chern-Simons theories*, *JHEP* **05** (2013) 113, [[arXiv:1208.5766](#)].
- [131] B. Fiol, B. Garolera, and A. Lewkowycz, *Exact results for static and radiative fields of a quark in $N=4$ super Yang-Mills*, *JHEP* **05** (2012) 093, [[arXiv:1202.5292](#)].
- [132] L. Bianchi, M. S. Bianchi, A. Bres, V. Forini, and E. Vescovi, *Two-loop cusp anomaly in $ABJM$ at strong coupling*, *JHEP* **10** (2014) 013, [[arXiv:1407.4788](#)].
- [133] D. H. Correa, J. Aguilera-Damia, and G. A. Silva, *Strings in $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ Wilson loops in $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons-matter and bremsstrahlung functions*, *JHEP* **06** (2014) 139, [[arXiv:1405.1396](#)].
- [134] R. Camporesi and A. Higuchi, *Stress energy tensors in anti-de Sitter space-time*, *Phys. Rev.* **D45** (1992) 3591–3603.
- [135] A. S. Schwarz, *The partition function of a degenerate functional*, *Commun. Math. Phys.* **67** (1979).
- [136] N. Drukker, D. J. Gross, and A. A. Tseytlin, *Green-Schwarz string in $AdS(5) \times S(5)$: Semiclassical partition function*, *JHEP* **04** (2000) 021, [[hep-th/0001204](#)].
- [137] N. Sakai and Y. Tanii, *Supersymmetry in Two-dimensional Anti-de Sitter Space*, *Nucl. Phys.* **B258** (1985) 661.
- [138] N. Drukker and V. Forini, *Generalized quark-antiquark potential at weak and strong coupling*, *JHEP* **06** (2011) 131, [[arXiv:1105.5144](#)].
- [139] V. Forini, *Quark-antiquark potential in AdS at one loop*, *JHEP* **11** (2010) 079, [[arXiv:1009.3939](#)].
- [140] M. Beccaria, G. V. Dunne, V. Forini, M. Pawellek, and A. A. Tseytlin, *Exact computation of one-loop correction to energy of spinning folded string in $AdS_5 \times S^5$* , *J. Phys.* **A43** (2010) 165402, [[arXiv:1001.4018](#)].
- [141] A. Dekel and T. Klose, *Correlation Function of Circular Wilson Loops at Strong Coupling*, *JHEP* **11** (2013) 117, [[arXiv:1309.3203](#)].
- [142] A. Karch and L. Randall, *Open and closed string interpretation of SUSY CFT's on branes with boundaries*, *JHEP* **06** (2001) 063, [[hep-th/0105132](#)].
- [143] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, and H. Ooguri, *Holography and defect conformal field theories*, *Phys. Rev.* **D66** (2002) 025009, [[hep-th/0111135](#)].

- [144] P. Lee and J.-w. Park, *Open strings in PP wave background from defect conformal field theory*, *Phys. Rev.* **D67** (2003) 026002, [[hep-th/0203257](#)].
- [145] O. DeWolfe and N. Mann, *Integrable open spin chains in defect conformal field theory*, *JHEP* **04** (2004) 035, [[hep-th/0401041](#)].
- [146] K. Okamura, Y. Takayama, and K. Yoshida, *Open spinning strings and AdS/dCFT duality*, *JHEP* **01** (2006) 112, [[hep-th/0511139](#)].
- [147] Y. Susaki, Y. Takayama, and K. Yoshida, *Integrability and higher loops in AdS/dCFT correspondence*, *Phys. Lett.* **B624** (2005) 115–124, [[hep-th/0504209](#)].
- [148] Y. Susaki, Y. Takayama, and K. Yoshida, *Open semiclassical strings and long defect operators in AdS / dCFT correspondence*, *Phys. Rev.* **D71** (2005) 126006, [[hep-th/0410139](#)].
- [149] B. Chen, X.-J. Wang, and Y.-S. Wu, *Integrable open spin chain in superYang-Mills and the plane wave / SYM duality*, *JHEP* **02** (2004) 029, [[hep-th/0401016](#)].
- [150] D.-E. Diaconescu, *D-branes, monopoles and Nahm equations*, *Nucl. Phys.* **B503** (1997) 220–238, [[hep-th/9608163](#)].
- [151] A. Giveon and D. Kutasov, *Brane dynamics and gauge theory*, *Rev. Mod. Phys.* **71** (1999) 983–1084, [[hep-th/9802067](#)].
- [152] N. R. Constable, R. C. Myers, and O. Tafjord, *The Noncommutative bion core*, *Phys. Rev.* **D61** (2000) 106009, [[hep-th/9911136](#)].
- [153] C. Kristjansen, G. W. Semenoff, and D. Young, *Chiral primary one-point functions in the D3-D7 defect conformal field theory*, *JHEP* **01** (2013) 117, [[arXiv:1210.7015](#)].
- [154] I. Buhl-Mortensen, M. de Leeuw, A. C. Ipsen, C. Kristjansen, and M. Wilhelm, *One-loop one-point functions in gauge-gravity dualities with defects*, *Phys. Rev. Lett.* **117** (2016), no. 23 231603, [[arXiv:1606.0188](#)].
- [155] I. Buhl-Mortensen, M. de Leeuw, A. C. Ipsen, C. Kristjansen, and M. Wilhelm, *A Quantum Check of AdS/dCFT*, *JHEP* **01** (2017) 098, [[arXiv:1611.0460](#)].
- [156] M. de Leeuw, C. Kristjansen, and K. Zarembo, *One-point Functions in Defect CFT and Integrability*, *JHEP* **08** (2015) 098, [[arXiv:1506.0695](#)].
- [157] I. Buhl-Mortensen, M. de Leeuw, C. Kristjansen, and K. Zarembo, *One-point Functions in AdS/dCFT from Matrix Product States*, *JHEP* **02** (2016) 052, [[arXiv:1512.0253](#)].

- [158] M. de Leeuw, C. Kristjansen, and S. Mori, *AdS/dCFT one-point functions of the $SU(3)$ sector*, *Phys. Lett.* **B763** (2016) 197–202, [[arXiv:1607.0312](#)].
- [159] M. de Leeuw, A. C. Ipsen, C. Kristjansen, and M. Wilhelm, *One-loop Wilson loops and the particle-interface potential in AdS/dCFT*, *Phys. Lett.* **B768** (2017) 192–197, [[arXiv:1608.0475](#)].
- [160] K. Nagasaki, H. Tanida, and S. Yamaguchi, *Holographic Interface-Particle Potential*, *JHEP* **01** (2012) 139, [[arXiv:1109.1927](#)].
- [161] K. Nagasaki and S. Yamaguchi, *Expectation values of chiral primary operators in holographic interface CFT*, *Phys. Rev.* **D86** (2012) 086004, [[arXiv:1205.1674](#)].
- [162] W. Nahm, *Supersymmetries and their representations*, *Nucl. Phys.* **B135** (1978) 149.
- [163] A. Buchel, J. G. Russo, and K. Zarembo, *Rigorous Test of Non-conformal Holography: Wilson Loops in $N=2^*$ Theory*, *JHEP* **03** (2013) 062, [[arXiv:1301.1597](#)].
- [164] N. Bobev, H. Elvang, D. Z. Freedman, and S. S. Pufu, *Holography for $N = 2^*$ on S^4* , *JHEP* **07** (2014) 001, [[arXiv:1311.1508](#)].
- [165] X. Chen-Lin and K. Zarembo, *Higher Rank Wilson Loops in $N = 2^*$ Super-Yang-Mills Theory*, *JHEP* **03** (2015) 147, [[arXiv:1502.0194](#)].
- [166] X. Chen-Lin, A. Dekel, and K. Zarembo, *Holographic Wilson loops in symmetric representations in $\mathcal{N} = 2^*$ super-Yang-Mills theory*, *JHEP* **02** (2016) 109, [[arXiv:1512.0642](#)].
- [167] J. T. Liu, L. A. Pando Zayas, and S. Zhou, *Comments on Higher Rank Wilson Loops in $\mathcal{N} = 2^*$* , [arXiv:1708.0628](#).
- [168] H. Lin, O. Lunin, and J. M. Maldacena, *Bubbling AdS space and 1/2 BPS geometries*, *JHEP* **10** (2004) 025, [[hep-th/0409174](#)].
- [169] O. Lunin, *On gravitational description of Wilson lines*, *JHEP* **06** (2006) 026, [[hep-th/0604133](#)].
- [170] S. Yamaguchi, *Bubbling geometries for half BPS Wilson lines*, *Int. J. Mod. Phys.* **A22** (2007) 1353–1374, [[hep-th/0601089](#)].
- [171] E. D’Hoker, J. Estes, and M. Gutperle, *Gravity duals of half-BPS Wilson loops*, *JHEP* **06** (2007) 063, [[arXiv:0705.1004](#)].

- [172] R. Benichou and J. Estes, *Geometry of Open Strings Ending on Backreacting D3-Branes*, *JHEP* **03** (2012) 025, [[arXiv:1112.3035](#)].
- [173] S. A. Gentle and M. Gutperle, *Entanglement entropy of Wilson loops: Holography and matrix models*, *Phys. Rev.* **D90** (2014), no. 6 066011, [[arXiv:1407.5629](#)].
- [174] J. Gomis and F. Passerini, *Holographic Wilson loops*, *JHEP* **08** (2006) 074, [[hep-th/0604007](#)].
- [175] J. Gomis and F. Passerini, *Wilson loops as D3-branes*, *JHEP* **01** (2007) 097, [[hep-th/0612022](#)].
- [176] B. Fiol and G. Torrents, *Exact results for Wilson loops in arbitrary representations*, *JHEP* **1401** (2014) 020, [[arXiv:1311.2058](#)].
- [177] S. A. Hartnoll and S. P. Kumar, *Higher rank Wilson loops from a matrix model*, *JHEP* **08** (2006) 026, [[hep-th/0605027](#)].
- [178] N. Drukker and B. Fiol, *All-genus calculation of Wilson loops using D-branes*, *JHEP* **02** (2005) 010, [[hep-th/0501109](#)].
- [179] S. Yamaguchi, *Wilson loops of anti-symmetric representation and D5- branes*, *JHEP* **05** (2006) 037, [[hep-th/0603208](#)].
- [180] S. Giombi, V. Pestun, and R. Ricci, *Notes on supersymmetric Wilson loops on a two-sphere*, *JHEP* **07** (2010) 088, [[arXiv:0905.0665](#)].
- [181] A. Bassetto, L. Griguolo, F. Pucci, D. Seminara, S. Thambyahpillai, and D. Young, *Correlators of supersymmetric Wilson-loops, protected operators and matrix models in $N=4$ SYM*, *JHEP* **08** (2009) 061, [[arXiv:0905.1943](#)].
- [182] S. Giombi and V. Pestun, *Correlators of local operators and 1/8 BPS Wilson loops on S^{**2} from 2d YM and matrix models*, *JHEP* **10** (2010) 033, [[arXiv:0906.1572](#)].
- [183] A. Bassetto, L. Griguolo, F. Pucci, D. Seminara, S. Thambyahpillai, and D. Young, *Correlators of supersymmetric Wilson loops at weak and strong coupling*, *JHEP* **03** (2010) 038, [[arXiv:0912.5440](#)].
- [184] S. Giombi and V. Pestun, *Correlators of Wilson Loops and Local Operators from Multi-Matrix Models and Strings in AdS*, *JHEP* **01** (2013) 101, [[arXiv:1207.7083](#)].
- [185] T. Okuda, *A Prediction for bubbling geometries*, *JHEP* **01** (2008) 003, [[arXiv:0708.3393](#)].

- [186] T. Okuda and D. Trancanelli, *Spectral curves, emergent geometry, and bubbling solutions for Wilson loops*, *JHEP* **09** (2008) 050, [[arXiv:0806.4191](#)].
- [187] H. Farkas and I. Kra, *Riemann Surfaces*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [188] X. Chen-Lin, D. Medina-Rincon, and K. Zarembo, *Quantum String Test of Nonconformal Holography*, *JHEP* **04** (2017) 095, [[arXiv:1702.0795](#)].
- [189] L. F. Alday and A. A. Tseytlin, *On strong-coupling correlation functions of circular Wilson loops and local operators*, *J. Phys.* **A44** (2011) 395401, [[arXiv:1105.1537](#)].
- [190] K. Zarembo, *Holographic three-point functions of semiclassical states*, *JHEP* **09** (2010) 030, [[arXiv:1008.1059](#)].
- [191] N. Gromov and P. Vieira, *Quantum Integrability for Three-Point Functions of Maximally Supersymmetric Yang-Mills Theory*, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013), no. 21 211601, [[arXiv:1202.4103](#)].
- [192] A. Faraggi, J. T. Liu, L. A. Pando Zayas, and G. Zhang, *One-loop structure of higher rank Wilson loops in AdS/CFT*, *Phys. Lett.* **B740** (2015) 218–221, [[arXiv:1409.3187](#)].
- [193] J. Gordon, *Antisymmetric Wilson loops in $\mathcal{N} = 4$ SYM beyond the planar limit*, [arXiv:1708.0577](#).
- [194] M. Horikoshi and K. Okuyama, *α' -expansion of Anti-Symmetric Wilson Loops in $\mathcal{N} = 4$ SYM from Fermi Gas*, *PTEP* **2016** (2016), no. 11 113B05, [[arXiv:1607.0149](#)].
- [195] X. Chen-Lin, *Symmetric Wilson Loops beyond leading order*, *SciPost Phys.* **1** (2016), no. 2 013, [[arXiv:1610.0291](#)].
- [196] A. Faraggi and L. A. Pando Zayas, *The Spectrum of Excitations of Holographic Wilson Loops*, *JHEP* **05** (2011) 018, [[arXiv:1101.5145](#)].
- [197] A. Faraggi, W. Mueck, and L. A. Pando Zayas, *One-loop Effective Action of the Holographic Antisymmetric Wilson Loop*, *Phys.Rev.* **D85** (2012) 106015, [[arXiv:1112.5028](#)].
- [198] E. Buchbinder and A. Tseytlin, *The $1/N$ correction in the D3-brane description of circular Wilson loop at strong coupling*, *Phys.Rev.* **D89** (2014) 126008, [[arXiv:1404.4952](#)].
- [199] H. Kim, N. Kim, and J. Hun Lee, *One-loop corrections to holographic Wilson loop in AdS₄CP³*, *J. Korean Phys. Soc.* **61** (2012) 713–719, [[arXiv:1203.6343](#)].

- [200] N. Drukker, D. J. Gross, and H. Ooguri, *Wilson loops and minimal surfaces*, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 125006, [[hep-th/9904191](#)].
- [201] K. Zarembo, *Supersymmetric Wilson loops*, *Nucl.Phys.* **B643** (2002) 157–171, [[hep-th/0205160](#)].
- [202] D. H. Correa and C. A. S. Young, *Reflecting magnons from D7 and D5 branes*, *J. Phys.* **A41** (2008) 455401, [[arXiv:0808.0452](#)].
- [203] K. Skenderis and M. Taylor, *Branes in AdS and p p wave space-times*, *JHEP* **06** (2002) 025, [[hep-th/0204054](#)].
- [204] S. Weinberg, *Six-dimensional Methods for Four-dimensional Conformal Field Theories*, *Phys. Rev.* **D82** (2010) 045031, [[arXiv:1006.3480](#)].