UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Matemática

Trabajo de Tesis Doctoral:

Técnicas geométricas y combinatorias en el estudio de subvariedades de BL-álgebras

Tesista:

Noemí Lubomirsky

Directores:

Manuela Busaniche

José Luis Castiglioni

Año 2017

Índice general

Agradecimientos

A mi familia por apoyarme y acompañarme a lo largo de mi vida.

A mis directores, Manuela y José Luis, con quienes tuve el privilegio de aprender durante estos años, por aceptarme y guiarme en el proceso.

Al CONICET por otorgarme la beca que me permitió realizar el doctorado.

A la UNLP y al Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas por brindar educación de excelencia que me permitió formarme desde mis inicios en la licenciatura en matemática y por darme un lugar para realizar mis estudios doctorales.

Al Instituto de Matemática Aplicada del Litoral por recibirme cada vez que fui a trabajar con Manuela. Gran parte de esta tesis fue realizada en los sucesivos viajes que hice a Santa Fe para trabajar en el IMAL.

A mis amigos de la carrera por la paciencia, las charlas y los almuerzos compartidos.

A Analía y Estefanía por darme no solo un alojamiento en mis viajes a Santa Fe, sino también su amistad.

A compañeros de trabajo y amigos que en este tiempo me han animado a avanzar y me han ayudado de innumerables maneras.

A Daniel, Nora y Marité que supieron guiarme cuando mostré interés por la matemática.

A los alumnos que me motivan a seguir aprendiendo.

Introducción

En el segundo libro del Órganon de Aristóteles, De Interpretatione, hay una observación que dice que las leyes lógicas que ahí describe no se aplican a eventos futuros. Sin embargo no fue sino hasta la década de 1920 que el filósofo polaco Jan Łukasiewicz publicó un trabajo ([33]) en el cual propuso extender la lógica clásica agregando a los valores de verdad $\{0, 1\}$ el valor $\frac{1}{2}$ para admitir la "posibilidad". Simultáneamente el matemático Emil L. Post introdujo la formulación de sistemas n-valuados ([42]). Łukasiewicz presentó en 1930 la lógica $\aleph_0$-valuada y Wajsberg probó en 1935 ([45]) un teorema de completitud para la misma.

Moisil consideró las álgebras que estaban relacionadas con la lógica de Łukasiewicz. En distintos trabajos presentó el álgebra tres-valuada, cuatro-valuada, n-valuada y finalmente lo generalizó para el caso infinito.

En 1998, Hájek introdujo las BL-álgebras (ver [27]) para formalizar las lógicas difusas en las cuales la conjunción se interpreta por t-normas continuas sobre el intervalo real $[0, 1]$. Estas álgebras forman una variedad, que llamaremos $\mathcal{BL}$. El interés por las BL-álgebras ha crecido mucho en los últimos tiempos, debido que el sistema lógico propuesto por Hájek no cuenta con una buena teoría de prueba. Por esto sus semánticas algebraicas constituyen la herramienta fundamental para obtener resultados sobre la lógica. Algunos de los trabajos más importantes sobre BL-álgebras son: [14] donde Cignoli, Esteva, Godo y Torrens probaron que la lógica básica de Hájek es la lógica de las t-normas continuas, los trabajos [16] y [17] de Cignoli y Torrens en los que se estudia la descomposición de las BL-cadenas entre otras cosas, el trabajo [2] donde Aglianò y Montagna estudian propiedades de variedades de BL-álgebras y el Capítulo VII de [18] en el que Busaniche y Montagna presentan un resumen de los resultados conocidos para BL-álgebras, entre otros.

Por un lado las BL-álgebras forman una subvariedad de retículos residuados, las semánticas algebraicas de las lógicas subestructurales (ver [24] y [41]). Esto permite que para su estudio se utilicen resultados que valen en contextos más generales. Además, las BL-álgebras contienen importantes subvariedades, como son las variedad $\mathcal{MV}$ de MV-álgebras (ver [13]), $\mathcal{P}$ de álgebras producto (ver [15]) y $\mathcal{G}$ de álgebras de Gödel (ver Capítulo IX de [18]). Cada una de estas tres subaviedades está generada por una t-norma distinta. La MV-cadena estándar $[0, 1]_{\mathbf{MV}}$, en la que la t-norma es $min(1, 1 - x + y)$ para cualquier par $x, y \in [0, 1]_{\mathbf{MV}}$, el álgebra de Gödel estándar $[0, 1]_{\mathbf{AG}}$ en la que la t-norma coincide con el mínimo, y la cadena producto estándar $[0,1]_{\mathbf{P}}$ en la que la t-norma coincide con el producto usual. Estas variedades son escenciales a la hora de estudiar BL-álgebras puesto que toda t-norma continua es combinación de las tres t-normas antes mencionadas. Cada una de estas tres subvariedades ha sido estudiada en profundidad y los resultados obtenidos sobre ellas son la herramienta más utilizada para obtener resultados sobre BL-álgebras.

En esta tesis estudiaremos una subvariedad $\mathcal{MG} \subseteq \mathcal{BL}$ generada por una única BL-cadena dada por la suma ordinal del álgebra $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y el hoop de Gödel $[0,1]_{\mathbf{G}}$, es decir, generada por
$$\mathfrak{A} = [0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}}.$$
Aunque $[0,1]_{\mathbf{G}}$ se puede descomponer como una suma ordinal infinita de álgebras de Boole de dos elementos (ver definición de suma ordinal en los preliminares), la idea es tratarlo como un único bloque. Los elementos de este bloque son los elementos densos de la cadena generadora y los elementos de $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ se conocen usualmente como elementos regulares de $\mathfrak{A}$.

El punto más importante de la tesis es dar una representación funcional del álgebra libre con un número finito de generadores en $\mathcal{MG}$. La descripción del álgebra libre nos permite tener una representación de clases de equivalencia de términos del álgebra. Esto resulta de interés dado que las proposiciones, bajo equivalencia lógica, forman un álgebra libre.

Dada su importancia lógica, las álgebras libres en distintas subvariedades de BL-álgebras ya han sido estudiadas. La representación más famosa es quizás la descripción del MV-álgebra libre en término de funciones de McNaughton ([34]), esto es, la representación del MV-álgebra libre en términos de funciones lineales continuas a trozos. También es muy conocida la cantidad de aplicaciones de esta descripción para obtener resultados de la variedad de MV-álgebras. Las funciones del álgebra libre con un número finito de generadores en la variedad de álgebras de Gödel se describe en el Capítulo IX de [18].

El primer trabajo que dio una descripción del álgebra libre en $\mathcal{BL}$ fue realizado por Montagna ([35]) para el caso de un generador. En la tesis de Simone Bova, ([8]) se da una representación funcional del álgebra libre con un número finito de generadores en la variedad $\mathcal{BL}$. Para cada entero $n \geq 0$ escribiremos $Free_{\mathcal{BL}}(n)$ para referirnos a la BL-álgebra libre en n generadores. Los resultados de [8] se basan fuertemente en lo siguiente: el álgebra libre con n generadores en la variedad $\mathcal{BL}$ coincide con el álgebra libre en la subvariedad BL-álgebras generada por todas las cadenas con exactamente n-generadores. Esta subvariedad está también generada por una única cadena, $(n+1)[0,1]_{\mathbf{MV}}$, que es, la suma ordinal de $n+1$ copias de la MV-álgebra estándar. Esto le permite caracterizar la BL-álgebra libre en n generadores $Free_{\mathcal{BL}}(n)$ como el álgebra de funciones
$$f : (n+1)[0,1]^n_{\mathbf{MV}} \to [0,1]_{\mathbf{MV}}$$
generada por las proyecciones. Con estos resultados, en [8] y [3] se da una representación de la BL-álgebra en términos de elementos de hoops de Wajsberg (subreductos de álgebras

de MV-álgebras sin $\perp$), organizadas en una estructura basada en particiones ordenadas del conjunto de generadores y satisfaciendo ciertas restricciones geométricas. La descripción de las funciones en el álgebra libre es recursiva y fuertemente dependiente de la cantidad de generadores del álgebra.

A diferencia de lo realizado por Aguzzoli y Bova en [8] y [3], la descripción del álgebra libre en la variedad $\mathcal{MG}$ que pretendemos investigar tiene la ventaja que cuando el número n de generadores del álgebra libre aumenta la cadena generadora de la subvariedad $\mathcal{MG}$ permanece fija. Esto permite tener una idea clara del rol de los dos bloques principales de la cadena generadora en la descripción de las funciones en el álgebra libre: el rol de los elementos regulares y el rol de los elementos densos.

Para definir las funciones en esta representación de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ necesitamos descomponer el dominio
$$\mathfrak{A}^n = ([0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}})^n$$
en un número finito de regiones. Sobre cada región una función $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ coincide o bien con una función de McNaughton o bien con funciones del álgebra libre en la variedad de hoops de Gödel (que definimos usando una base diferente a la que da Gerla en [26]) del siguiente modo:

- Para todo $\bar{x} \in ([0,1]_{\mathbf{MV}})^n$, $\mathscr{F}(\bar{x}) = f(\bar{x})$, donde f es una función de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$.

Para el resto del dominio, las funciones dependen de esta función $f : ([0,1]_{\mathbf{MV}})^n \to [0,1]_{\mathbf{MV}}$:

- Sobre $([0,1]_{\mathbf{G}})^n$: Si $f(\bar{1}) = 0$, entonces $\mathscr{F}(\bar{x}) = 0$ para todo $\bar{x} \in ([0,1]_{\mathbf{G}})^n$, y si $f(\bar{1}) = 1$, entonces $\mathscr{F}(\bar{x}) = g(\bar{x})$, para una función $g \in Free_{\mathcal{G}}(n)$, para todo $\bar{x} \in ([0,1]_{\mathbf{G}})^n$.

Sean $B = \{x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(m)}\}$ un subconjunto propio no vacío del conjunto de variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y R_B un subconjunto de $([0,1]_{MV} \oplus [0,1]_G)^n$ donde $x_i \in B$ si y solamente si $x_i \in [0,1]_G$. Para todo $\bar{x} \in R_B$ definimos un nuevo punto $\tilde{x}$ que está en el borde de $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ como:

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad x_i \notin B \\ \\ 1 & \text{si} \quad x_i \in B \end{cases}$$

- Sobre R_B: Si $f(\tilde{x}) < 1$ entonces $\mathscr{F}(\bar{x}) = f(\tilde{x})$, y si $f(\tilde{x}) = 1$, entonces existe una triangulación regular Δ de $f^{-1}(1) \wedge R_B$ que determina los símplices $S_1, \ldots, S_l$ y l funciones de Gödel $h_1, \ldots, h_l$ en $n-m$ variables $x_{\sigma(m+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$ tales que $\mathscr{F}(\bar{x}) = h_i(x_{\sigma(m+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ para todo punto $(x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(m)})$ en el interior de S_i.

Del mismo modo en que las funciones de Mc Naughton pueden ser descriptas como una suma truncada de funciones más sencillas, que se conocen como Schauder hats, existen funciones MG-básicas que permiten escribir cualquier función de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ como un producto de funciones MG-básicas.

La representación que presentaremos para $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ nos permite dar una caracterización sencilla de los filtros maximales, primos y principales en esta álgebra libre. Veremos que existe una correspondencia entre los filtros maximales de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ y los puntos de $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$, algo que resulta ser análogo a lo que ocurre con los filtros maximales en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$. Para describir los filtros primos utilizaremos esta caracterización ya que todo filtro primo P en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ estará contenido en un filtro maximal asociado a un punto de $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ y veremos que existen dos proyecciones de las funciones de P que dan filtros primos en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ y $Free_{\mathcal{G}}(m)$, donde m es la cantidad de variables de $\bar{x}$ que toman valores en $[0,1]_{\mathbf{G}}$. Si P_{MV} es la proyección que da un filtro en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ y $P_{G,\bar{x}}$ es aquella que da un filtro en $Free_{\mathcal{G}}(m)$ se cumple que si $P_{G,\bar{x}}$ es un filtro propio entonces P_{MV} es un filtro maximal en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$, pero por otro lado, si P_{MV} es propio, entonces $F_{G,\bar{x}}$ es isomorfo a $Free_{\mathcal{G}}(m)$, es decir, que no pueden ser filtros propios simultáneamente. Probaremos luego que los filtros finitamente generados en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ son principales.

Los filtros finitamente generados resultan de interés para el estudio de esta variedad porque nos permiten estudiar las álgebras finitamente presentadas. Estas álgebras son isomorfas al álgebra de Lindembaum de teorías finitamente axiomatizables. Para estudiar estas álgebras definimos los $\mathbf{MG}^*$-poliedros sobre $\mathfrak{A}^n$, que permiten extender a $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ algunos resultados de álgebras finitamente presentadas en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ utilizando poliedros racionales en $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$.

Finalmente, veremos que los resultados antes expuestos para $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ se pueden extender a $Free_{\mathcal{MS}}(n)$, el álgebra generada por

$$\mathfrak{S} = [0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus H,$$

donde H es un hoop básico totalmente ordenado. Si uno tiene una representación funcional del álgebra libre generada por H, $Free_{\mathcal{H}}(n)$, veremos cómo puede ser descripta el álgebra $Free_{\mathcal{MS}}(n)$. Las funciones pueden ser descriptas descomponiendo el dominio $\mathfrak{S}^n = ([0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus H)^n$ en un número finito de regiones. Sobre cada región una función $F \in Free_{\mathcal{MS}}(n)$ coincide o bien con una función de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ o bien con una función de $Free_{\mathcal{H}}(m)$. Los resultados sobre filtros y álgebras finitamente presentadas también se pueden extender a esta álgebra.

La tesis está organizada del siguiente modo: En el primer capítulo revisaremos algunos conceptos básicos sobre t-normas continuas, hoops y distintas subvariedades de BL-álgebras. Al finalizar este capítulo presentaremos la subvariedad $\mathcal{MG}$, que será la que estudiaremos en la Tesis y daremos una caracterización ecuacional de $\mathcal{MG}$ como subvariedad de la variedad $\mathcal{BL}$. En el segundo capítulo daremos una descripción del álgebra libre $Free_{\mathcal{MG}}(n)$, presentando una forma concreta de construir las funciones del álgebra. Para esto repasaremos previamente algunos resultados sobre el álgebra $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ y daremos una presentación combinatoria del álgebra $Free_{\mathcal{G}}(n)$. Las funciones del álgebra libre $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ quedarán totalmente descriptas a partir de las funciones de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ y $Free_{\mathcal{G}}(n)$, y presentaremos al terminar el capítulo un subconjunto de las funciones de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$, las funciones MG-básicas, que permiten describir todas las funciones de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ como producto de funciones MG-básicas. En el capítulo 3 daremos una descripción de los filtros maximales, primos y principales de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$. Para esto, recordaremos los resultados para filtros en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ y describiremos los filtros en $Free_{\mathcal{G}}(n)$. El cuarto capítulo está dedicado a las álgebras finitamente presentadas. Como en los capítulos anteriores, lo haremos primero en el álgebra $Free_{\mathcal{MV}}(n)$, luego en $Free_{\mathcal{G}}(n)$ y utilizaremos estos resultados para describir las álgebras finitamente presentadas en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$. Dedicaremos en este capítulo una sección a los poliedros, en la que estudiaremos los $\mathbf{MG}^*$-poliedros. El último capítulo estará dedicado a generalizar los resultados de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ a $Free_{\mathcal{MS}}(n)$ y a presentar el trabajo futuro. La tesis contiene además un Apéndice donde incluímos una demostración que es extensa, para no interrumpir la lectura del Capítulo 2.

Capítulo 1

Preliminares

Como se mencionó en la introducción, en [27] Hájek introdujo las BL-álgebras como la contraparte algebraica de las lógicas básicas y probó que estas álgebras forman una variedad de retículos residuados. Más específicamente, en [1] y [7] Aglianò, Blok, Ferreirim y Montagna probaron que las BL-álgebras pueden ser caracterizadas como hoops básicos acotados. Y en [2] Aglianò y Montagna probaron que toda BL-cadena puede descomponerse como una suma ordinal de hoops de Wajsberg totalmente ordenados. Utilizando esta descomposición, en [3] y en la tesis de Bova ([8]), Aguzzoli y Bova presentan una representación del álgebra libre $Free_{\mathcal{BL}}(n)$ en términos de elementos de hoops de Wajsberg, organizadas en una estructura basada en particiones ordenadas del conjunto de generadores.

Repasaremos en este capítulo algunos de estos conceptos con mayor detalle, ya que los necesitaremos en el resto de la tesis. En la última sección presentaremos el álgebra generadora de la variedad $\mathcal{MG}$ que estudiaremos en la tesis y daremos su caracterización ecuacional como subvariedad de $\mathcal{BL}$.

1.1. t-normas continuas

Estudiaremos algunas nociones básicas sobre t-normas, basados en [27].

Definición 1.1.1. Una **t-norma** es una operación binaria $* : [0,1]^2 \to [0,1]$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $*$ es conmutativa y asociativa.
2. $*$ es no decreciente en ambos argumentos, es decir, para todo $x, y, z \in [0,1]$ se tiene que

$$x \leq y \text{ implica } x * z \leq y * z \text{ y } z * x \leq z * y,$$

3. $1 * x = x$ y $0 * x = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

Una **t-norma continua** es una t-norma que es continua como aplicación de $[0,1]^2$ en $[0,1]$. Para toda t-norma continua se puede definir un residuo que satisface:

$$x * z \leq y \text{ si y solamente si } x \leq z \to y.$$

Ejemplo 1. *Los siguientes son ejemplos de t-normas continuas y sus correspondientes residuos:*

1. *t-norma de Łukasiewicz:* $x * y = max(0, x + y - 1)$
   Implicación de Łukasiewicz: $x \to y = min(1, 1 - x + y)$*,*

2. *t-norma de Gödel :* $x * y = min(x, y)$*,*
   Implicación de Gödel :
$$x \to y = \begin{cases} y & si \quad x > y; \\ 1 & si \quad x \leq y. \end{cases}$$

3. *t-norma producto:* $x * y = x \cdot y$*,*
   Implicación de Goguen:
$$x \to y = \begin{cases} y/x & si \quad x > y; \\ 1 & si \quad x \leq y. \end{cases}$$

Dada una t-norma continua $*$, en [27] Hájek presentó un cálculo proposicional asociado cuyos valores de verdad están en el segmento real $[0,1]$, $*$ es la función de verdad de la conjunción (fuerte) y el residuo $\to$ de $*$ es la función de verdad de la implicación. Hájek formuló axiomas lógicos para BL y probó que toda fórmula demostrable en BL es una tautología en cada cálculo proposicional asociado a una t-norma continua $*$. Para probar la completitud de la lógica Hájek dio una algebrización de BL, lo que dio origen a las BL-álgebras.

1.2. Hoops y BL-álgebras

Definición 1.2.1. Un **hoop** es un álgebra $\mathbf{A} = (A, *, \to, \top)$ de tipo $(2,2,0)$, donde $(A, *, \top)$ es un monoide conmutativo tal que para todo $x, y, z \in A$:

1. $x \to x = \top$,

2. $x * (x \to y) = y * (y \to x)$,

3. $x \to (y \to z) = (x * y) \to z$.

Los hoops fueron estudiados en profundidad en [1], [6], [7] y [23]. Algunas propiedades básicas de los hoops están probadas en esos trabajos y las enumeramos en la siguiente proposición:

Proposición 1.2.2. Sea $\mathbf{A} = (A, *, \to, \top)$ un hoop. Luego:

1. $(A, *, \top)$ es un monoide conmutativo residuado naturalmente ordenado, donde el orden está definido por $x \leq y$ si y solamente si $x \to y = \top$ y la residuación es
$$x * y \leq z \text{ si y solamente si } x \leq y \to z.$$
2. El orden parcial en cualquier hoop es un orden de semiretículos, donde
$$x \wedge y = x * (x \to y),$$
para todo $x, y \in A$.
3. Si $x, y, z \in A$, son válidas las siguientes propiedades:
   a) $\top \to x = x$,
   b) $x \to \top = \top$,
   c) $x \to y \leq (z \to x) \to (z \to y)$,
   d) $x \leq y \to x$,
   e) $x \leq (x \to y) \to y$,
   f) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$,
   g) $x \to y \leq (y \to z) \to (x \to z)$,
   h) $x \leq y$ implica $y \to z \leq x \to z$ y $z \to x \leq z \to y$,
   i) $x \leq y$ implica $x * z \leq y * z$,
   j) $x * y \leq x$.

Definición 1.2.3. Una **BL-álgebra básica** o **hoop básico** es un hoop que satisface la ecuación
$$(((x \to y) \to z) * ((y \to x) \to z)) \to z = \top \tag{1.2.1}$$

En todo hoop básico $\mathbf{A}$ se puede definir la operación $\vee$ como
$$x \vee y = ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x),$$
por lo que $\mathbf{L}(\mathbf{A}) = (A, \wedge, \vee, \top)$ es un retículo distributivo con elemento máximo $\top$. Además, todo hoop básico satisface la ecuación
$$(x \to y) \vee (y \to x) = \top.$$

Definición 1.2.4. Una **BL-álgebra** es un hoop básico acotado, es decir, un álgebra $\mathbf{A} = (A, *, \to, \bot, \top)$ de tipo $(2, 2, 0, 0)$ tal que $(A, *, \to, \top)$ es un hoop básico y $\bot$ es el elemento mínimo de $\mathbf{L}(\mathbf{A})$.

Luego el conjunto $B \subseteq A$ es el universo de una subálgebra de una BL-álgebra $\mathbf{A}$ si y solamente si $\top, \bot \in B$ y B es cerrado bajo $*$ y $\rightarrow$. Más aún, si $C \subseteq A$ es un conjunto cerrado bajo las operaciones $*$ y $\rightarrow$ tal que $\top \in C$, entonces $\mathbf{C} = (C, *, \rightarrow, \top)$ es un hoop básico.

Definición 1.2.5. Si $k \in \mathbb{N}$, un **BL-término** en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ es una expresión que se define inductivamente mediante las siguientes reglas:

- $\bot, \top, x_1, x_2, \ldots, x_k$ son BL-términos,
- si τ_1 y τ_2 son BL-términos, entonces $(\tau_1 * \tau_2)$ y $(\tau_1 \rightarrow \tau_2)$ son BL-términos.

Un **término de hoops** es un BL-término en el que no aparece el elemento $\bot$.

Llamaremos $BL - term$ y $H - term$ al conjunto de BL-términos y términos de hoops respectivamente.

Para toda t-norma continua $*$ la estructura $([0,1], *, \rightarrow, 0, 1)$ es una BL-álgebra, donde $\rightarrow$ es el residuo de $*$. Además, toda estructura de BL-álgebra sobre el segmento $[0,1]$ está dada por una t-norma continua, pues la continuidad de $*$ equivale a la condición $x * (x \rightarrow y) = y * (y \rightarrow x)$ (ver [21]).

Sobre cada BL-álgebra se puede definir la operación unaria $\neg$ (negación) mediante la ecuación

$$\neg x = x \rightarrow \bot.$$

La BL-álgebra con un único elemento $\bot = \top$ se conoce como **BL-álgebra trivial**. Denotaremos por $\mathcal{BL}$ y $\mathcal{BH}$ a las variedades de BL-álgebras y de hoops básicos respectivamente. Estas son variedades de retículos residuados, por lo que son variedades de BCK-álgebras (en [29] y [30] hay más información sobre BCK-álgebras). En [28] se puede ver que en ambas variedades el retículo de congruencias es distributivo y conmutativo.

Sea $\mathbf{A}$ un hoop básico. Como vimos en la Proposición 1.2.2, $\leq$ define un orden (parcial) sobre el retículo $\mathbf{L}(\mathbf{A})$, es decir, si $\forall a, b \in A$, $a \leq b$ si y solamente si $a = a \wedge b$ y esto ocurre si y solamente si $b = a \vee b$. Este orden se conoce como el **orden natural** de $\mathbf{A}$. Cuando este orden natural es total, $\mathbf{A}$ se dice que es un **hoop básico totalmente ordenado** (o **BL-cadena** si $\mathbf{A}$ es una BL-álgebra).

El siguiente teorema muestra la importancia de las BL-cadenas y se puede deducir del Lema 2.3.16 de [27].

Teorema 1.2.6. *Toda BL-álgebra es producto subdirecto de BL-cadenas.*

Más aún, como las BL-álgebras son hoops básicos acotados, el resultado anterior se deduce del Teorema 2.8 de [1].

1.3. Algunas subvariedades de las BL-álgebras

Algunas subvariedades de $\mathcal{BL}$ fueron estudiadas por ser la contraparte algebraica de lógicas conocidas. Las **MV-álgebras**, por ejemplo, son las álgebras asociadas a la lógica de Łukasiewicz, y forman una subvariedad de $\mathcal{BL}$ caracerizada por la ecuación

$$\neg\neg x = x$$

(ver [27]). En [13] y [36] hay más información sobre estas álgebras. Denotaremos por $\mathcal{MV}$ a la variedad de MV-álgebras y llamaremos **MV-cadenas** a las MV-álgebras totalmente ordenadas. Si $\mathbf{A}$ es una BL-álgebra, consideremos

$$MV(\mathbf{A}) = \{x \in A : \neg\neg x = x\}.$$

Luego, $\mathbf{MV}(\mathbf{A}) = (MV(\mathbf{A}), \cdot, \to, \perp, \top)$ es una MV-álgebra (ver [16]) que es subálgebra de $\mathbf{A}$ y se conoce como la **subálgebra de elementos regulares de A**.

Ejemplo 2. *El intervalo unitario de los números reales* $[0, 1]$ *equipado con las operaciones* $x \cdot y = max\{0, x + y - 1\}$ *y* $x \to y = min\{1, 1 - x + y\}$*, forma una MV-álgebra. Esta MV-álgebra* $[0, 1]_{\boldsymbol{MV}} = ([0, 1], \cdot, \to, 0, 1)$ *genera la variedad de todas las MV-álgebras.*

Las **álgebras de Gödel** forman una subvariedad de $\mathcal{BL}$, que llamaremos $\mathcal{AG}$ y están caracterizadas por la ecuación

$$x \cdot x = x.$$

Observación 1.3.1. Las álgebras de Gödel coinciden con las álgebras de Heyting lineales.

Ejemplo 3. *El intervalo unitario de los números reales* $[0, 1]$ *equipado con las operaciones* $x \cdot y = min\{x, y\}$ *y*

$$x \to y = \begin{cases} y & si \quad x > y; \\ 1 & si \quad x \leq y. \end{cases}$$

forma un álgebra de Gödel. Esta álgebra $[0, 1]_{\boldsymbol{GA}} = ([0, 1], \cdot, \to, 0, 1)$ *genera la variedad de todas las álgebras de Gödel (ver los Capítulos VII y IX de [18] para mayor detalle).*

Observación 1.3.2. En la tesis denotaremos por $[0, 1]_{\mathbf{AG}}$ al álgebra de Gödel estándar, para distinguirla del hoop de Gödel que denotaremos $[0, 1]_{\mathbf{G}}$.

Otra subvariedad conocida de $\mathcal{BL}$ es la de las **álgebras producto** y está dada por las ecuaciones

$$x \wedge \neg x = 0$$

$$(\neg\neg z \to ((x \cdot z \to y \cdot z) \to (x \to y))) = 1.$$

Llamamos $\mathcal{LG}$ a la variedad más pequeña de $\mathcal{BL}$ que contiene a $\mathcal{MV}$ y a $\mathcal{AG}$. La misma está definida por las ecuaciones de $\mathcal{BL}$ a las que se les agregan las ecuaciones:

$$(x \to x \cdot y) \to ((x \to 0) \vee y \vee ((x \to x \cdot x) \wedge (y \to y \cdot y))) = 1$$

$$(\neg\neg x \to x) \vee (x \to (x \cdot x)) = 1.$$

Por último, llamaremos $\mathcal{G}$ a la variedad de hoops de Gödel (subreductos de las álgebras de Gödel en los cuales el 0 no es una constante en el lenguaje).

1.4. Sumas ordinales

Definición 1.4.1. Sean $\mathbf{A} = \langle A, \cdot_A, \to_A, \top\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle B, \cdot_B, \to_B, \top\rangle$ dos hoops tales que $A \cap B = \{\top\}$. Luego podemos definir la **suma ordinal** de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ como el hoop $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \langle A \cup B, \cdot, \to, \top, \rangle$, donde las operaciones $\cdot$ y $\to$ están dadas por:

$$x \cdot y = \begin{cases} x \cdot_A y & \text{si} \quad x, y \in A; \\ x \cdot_B y & \text{si} \quad x, y \in B; \\ x & \text{si} \quad x \in A \setminus \{\top\},\ y \in B; \\ y & \text{si} \quad y \in B \setminus \{\top\},\ x \in A. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

$$x \to y = \begin{cases} x \to_A y & \text{si} \quad x, y \in A; \\ x \to_B y & \text{si} \quad x, y \in B; \\ \top & \text{si} \quad x \in A \setminus \{\top\},\ y \in B; \\ y & \text{si} \quad y \in A,\ x \in B. \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Observación 1.4.2. En [2] se puede ver que la suma ordinal de dos hoops es un hoop.

1.5. Descomposición en elementos regulares y densos

Dada una BL-álgebra $\mathbf{A}$ podemos considerar al conjunto

$$D(\mathbf{A}) = \{x \in A : \neg x = \bot\}.$$

Como está indicado en [16], $\mathbf{D}(\mathbf{A}) = (D(\mathbf{A}), \cdot, \to, \top)$ es un hoop básico. Los elementos de $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ se conocen como **elementos densos** de $\mathbf{A}$. Por otro lado, hemos definido el conjunto

$$MV(\mathbf{A}) = \{x \in A : \neg\neg x = x\},$$

cuyos elementos llamaremos **elementos regulares** de $\mathbf{A}$.

En el Teorema 2.2.1 de [10] está probado el siguiente resultado, que necesitaremos más adelante:

Teorema 1.5.1. *Para toda BL-cadena $\boldsymbol{A}$, tenemos que $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{MV}(\boldsymbol{A}) \oplus \boldsymbol{D}(\boldsymbol{A})$.*

Como consecuencia del Teorema anterior, sabemos que todo elemento x de una BL-álgebra **A** puede ser escrito como producto de un elemento regular y un elemento denso. Enunciaremos este resultado a continuación, ya que lo utilizaremos más adelante:

Corolario 1.5.2. *Si $x \in D(\boldsymbol{A})$ entonces $\neg\neg x = \top$ y por lo tanto $\neg\neg x \to x = x$, y que si $x \in MV(\boldsymbol{A})$ entonces $\neg\neg x = x$ y $\neg\neg x \to x = \top$.*

Esto es lo que permite escribir a cualquier elemento de una BL-álgebra como producto de un elemento regular y un elemento denso:

$$x = (\neg\neg x) \cdot (\neg\neg x \to x).$$

1.6. La subvariedad $\mathcal{MG}$

Estudiaremos ahora la subvariedad objetivo de la tesis, la variedad que llamamos $\mathcal{MG} \subseteq \mathcal{BL}$ generada por la suma ordinal del álgebra $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y el hoop de Gödel $[0,1]_{\mathbf{G}}$, es decir, generada por

$$\mathfrak{A} = [0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}}.$$

Esta variedad resulta interesante dado que contiene al álgebra estándar $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y el hoop de Gödel $[0,1]_{\mathbf{G}}$ (donde la diferencia con el álgebra de Gödel $[0,1]_{\mathbf{AG}}$ es que el 0 no es una constante del lenguaje), por lo que también contiene a todas las álgebras de Gödel (las que pensamos como suma ordinal de la MV-álgebra de dos elementos y el hoop de Gödel correspondiente).

Observación 1.6.1. En algunas demostraciones de la tesis que involucran el álgebra $\mathfrak{A}$ necesitaremos distinguir entre el 0 de $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y el 0 de $[0,1]_{\mathbf{G}}$. Para hacerlo, denotaremos por $\perp$ a la constante 0 de $\mathfrak{A}$ (que es el 0 de $[0,1]_{\mathbf{MV}}$) cuando no quede claro por el contexto. En los demás casos utilizaremos simplemente el símbolo 0.

Para definir la t-norma que genera esta variedad, observemos que el producto $\cdot : \mathfrak{A}^2 \to \mathfrak{A}$ estará dado por:

$$x \cdot y = \begin{cases} max(0, x+y-1) & \text{si} \quad x, y \in [0,1]_{\mathbf{MV}}; \\ min(x,y) & \text{si} \quad x, y \in [0,1]_{\mathbf{G}}; \\ x & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{MV}}, y \in [0,1]_{\mathbf{G}}; \\ y & \text{si} \quad y \in [0,1]_{\mathbf{MV}}, x \in [0,1]_{\mathbf{G}}. \end{cases}$$

o, en forma equivalente,

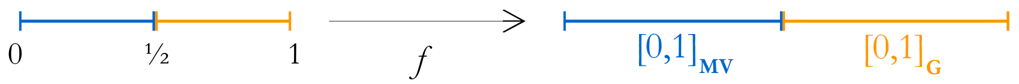
$$x \cdot y = \begin{cases} max(0, x+y-1) & \text{si } x, y \in [0,1]_{\mathbf{MV}}; \\ min(x,y) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Gráficamente, esto se puede representar como:

x	$x \cdot_G y$
$x \cdot_L y$	y

Pero para definir una t-norma, debemos definir una función con dominio en $[0,1]^2$. Entonces, para hacer esto, definiremos una función $f : [0,1] \to \mathfrak{A} = [0,1]_{MV} \oplus [0,1]_G$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \in [0,1]_{MV} & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}); \\ 2x - 1 \in [0,1]_G & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Y su función inversa $f^{-1} : \mathfrak{A} = [0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}} \to [0,1]$ queda definida como:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}; \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{G}}. \end{cases}$$

Componiendo estas funciones, tenemos entonces que la t-norma que genera esta variedad es $t : [0,1]^2 \to [0,1]$ y está dada por $t(x,y) = f^{-1}(f(x) \cdot f(y))$, es decir,

$$t(x,y) = \begin{cases} max(0, x+y-\frac{1}{2}) & \text{si } x, y \in [0, \frac{1}{2}); \\ min(x,y) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Observemos que esta variedad contiene a todas las álgebras de Gödel y todas las MV-álgebras, ya que existen inmersiones de las álgebras estándar $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y $[0,1]_{\mathbf{G}}$ en el álgebra $\mathfrak{A}$ generadora de nuestra variedad. Sin embargo, veremos más adelante que no es la menor variedad que contiene a las MV-álgebras y las álgebras de Gödel . Esa menor variedad se llama $\mathcal{LG}$ y fue estudiada en [20].

Sin embargo $\mathcal{MG}$ no coincide con $\mathcal{BL}$ pues, por ejemplo, las álgebras producto no están en $\mathcal{MG}$. Para ver esto basta con ver que las ecuaciones que definen a las álgebras producto no se verifican en $\mathfrak{A}$:

- La ecuación $x \wedge \neg x = 0$ no se verifica si $x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{0,1\}$.
- La ecuación $(\neg\neg z \to ((x \cdot z \to y \cdot z) \to (x \to y))) = 1$ no se verifica en $[0,1]_{\mathbf{G}}$, pues si $x > y > z$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\neg\neg z \to ((x \cdot z \to y \cdot z) \to (x \to y)) &= 1 \to ((x \cdot z \to y \cdot z) \to (x \to y)) \\ &= (x \cdot z \to y \cdot z) \to (x \to y) \\ &= (z \to z) \to y \\ &= 1 \to y \\ &= y\end{aligned}$$

que es distinto de 1 si $y \in [0,1]_{\mathbf{G}} \setminus \{1\}$.

Luego las álgebras producto no están en $\mathcal{MG}$ y por lo tanto la variedad $\mathcal{MG}$ está propiamente contenida en $\mathcal{BL}$.

Además es imporante notar que $\mathcal{MG}$ contiene a $\mathcal{LG}$, pero esta contención es propia, ya que la ecuación

$$(x \to x \cdot y) \to ((x \to 0) \vee y \vee ((x \to x \cdot x) \wedge (y \to y \cdot y))) = 1$$

que por simplicidad abreviaremos por $(\bigstar)$ no se verifica para $x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ e $y \in [0,1]_{\mathbf{G}}$:

$$\begin{aligned}(\bigstar) &= (x \to x) \to ((x \to 0) \vee y \vee (x \to x \cdot x) \wedge (y \to y)) \\ &= 1 \to ((x \to 0) \vee y \vee (x \to x \cdot x)) \\ &= 1 \to y \\ &= y.\end{aligned}$$

1.6.1. Caracterización ecuacional

El propósito de esta sección es mostrar que la contención de $\mathcal{MG}$ como subvariedad de $\mathcal{BL}$ se puede dar en términos de las ecuaciones que caracterizan a $\mathcal{BL}$ a las que le agregamos la ecuación

$$(\neg\neg x \to x)^2 = (\neg\neg x \to x).$$

Para hacerlo seguiremos los resultados de las páginas 109 a 113 de [2].

Si $\mathcal{MV}^t$ y $\mathcal{G}^t$ denotan las clases de miembros totalmente ordenados de $\mathcal{MV}$ y $\mathcal{G}$ respectivamente, denotaremos por

$$\mathcal{MV} \oplus^t \mathcal{G}$$

a la variedad generada por $\{\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} : \mathbf{A} \in \mathcal{MV}^t, \mathbf{B} \in \mathcal{G}^t\}$. Queremos caracterizar ecuacionalmente la variedad $\mathcal{MV} \oplus^t \mathcal{G}$.

Sea $\{e_i : i \in I\}$ el conjunto de ecuaciones que define $\mathcal{MV}$ como subvariedad de $\mathcal{BL}$ y $\{d_j : j \in J\}$ el conjunto de ecuaciones que define $\mathcal{G}$ como subvariedad de $\mathcal{BH}$, es decir, una MV álgebra $\mathbf{A}$ pertenece a $\mathcal{MV}$ si y solamente si los elementos de $\mathbf{A}$ satisfacen e_i para todo $i \in I$, y un hoop básico $\mathbf{B}$ pertenece a $\mathcal{G}$ si y solamente si los elementos de $\mathbf{B}$ satisfacen las ecuaciones d_j, para todo $j \in J$. Para todo $i \in I$, sea $e_i^{'}$ la ecuación que resulta de sustituir $\neg\neg x$ por cada variable x en e_i, y para todo $j \in J$, $d_j^{'}$ la ecuación que resulta de sustituir $\neg\neg x \to x$ por cada variable x en la ecuación d_j.

Ejemplo 4. *Si e_1 es la ecuación $\neg\neg x = x$, entonces $e_1^{'}$ es la ecuación $\neg\neg(\neg\neg x) = \neg\neg x$.*

Si d_1 es la ecuación $x \cdot x = x$, entonces $d_1^{'}$ es la ecuación $(\neg\neg x \to x) \cdot (\neg\neg x \to x) = (\neg\neg x \to x)$

Sea $\mathcal{V}$ la subvariedad de BL-álgebras caracterizada por las ecuaciones de BL-álgebras a las que les agregamos las ecuaciones $\{e_i^{'} : i \in I\} \cup \{d_j^{'} : j \in J\}$. Por el Corolario **??**, una BL-álgebra A está en $\mathcal{V}$ si y solamente si sus elementos regulares satisfacen las ecuaciones e_i para todo $i \in I$ y sus elementos densos satisfacen las ecuaciones d_j, para todo $j \in J$.

Lema 1.6.2. $\mathcal{V} = \mathcal{MV} \oplus^t \mathcal{G}$.

Demostración. Sea $\mathbf{C} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$, con $\mathbf{A} \in \mathcal{MV}^t$ y $\mathbf{B} \in \mathcal{G}^t$. Tenemos entonces que para todo $x \in C$ se cumple que $\neg\neg x \in A$ y $\neg\neg x \to x \in B$. Luego, $\mathbf{C}$ satisface las ecuaciones $e_i^{'}$ para todo $i \in I$ y $d_j^{'}$ para todo $j \in J$, por lo que $\mathcal{MV} \oplus^t \mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}$. Ahora sea $\mathbf{C}$ una BL-cadena en $\mathcal{V}$, es decir, una BL-cadena que satisface las ecuaciones $e_i^{'}$ para todo $i \in I$ y $d_j^{'}$ para todo $j \in J$. Por el Teorema 1.5.1, sabemos que

$$\mathbf{C} = \mathbf{MV}(\mathbf{C}) \oplus \mathbf{D}(\mathbf{C}).$$

Como para todo $x \in MV(\mathbf{C})$ tenemos que $\neg\neg x = x$ y $\mathbf{MV}(\mathbf{C})$ está en $\mathcal{V}$, obtenemos que para todo $i \in I$, $\mathbf{MV}(\mathbf{C})$ satisface la ecuación e_i. Luego $\mathbf{MV}(\mathbf{C})$ es una cadena en $\mathcal{MV}$. Por otro lado, como para todo $x \in D(\mathbf{C})$ tenemos que $\neg\neg x \to x = x$, $\mathbf{D}(\mathbf{C})$ satisface la ecuación d_j para todo $j \in J$. Luego $\mathbf{D}(\mathbf{C})$ es un hoop básico totalmente ordenado en $\mathcal{G}$. Por lo tanto $\mathbf{C} \in \mathcal{MV} \oplus^t \mathcal{G}$ y por el Teorema 1.2.6 (ya que por el Teorema de Birkhoff toda subvariedad de BL-álgebras está generada por cadenas) podemos concluir que $\mathcal{V} = \mathcal{MV} \oplus^t \mathcal{G}$. □

Siguiendo los argumentos de [2] en las demostraciones del Lema 7.1 y el Teorema 7.4, queremos probar que $\mathcal{MG} = \mathcal{MV} \oplus^t \mathcal{G}$. Para esto necesitamos algunos resultados y definiciones previos.

Dada una clase de álgebras $\mathcal{K}$, denotaremos por $\mathbf{H}(\mathcal{K})$, $\mathbf{I}(\mathcal{K})$, $\mathbf{S}(\mathcal{K})$ y $\mathbf{P}_u(\mathcal{K})$ a las clases de imágenes homomorfas, imágenes isomorfas, subálgebras y ultraproductos de álgebras de $\mathcal{K}$, respectivamente.

Los siguientes tres lemas son casos particulares de los Lemas 3.1, 3.2 y 3.3 de [2].

Lema 1.6.3. *Dados dos hoops* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$*, las subálgebras de* $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$ *son de la forma* $\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{D}$*, para* $\boldsymbol{C}$ *y* $\boldsymbol{D}$ *subálgebras (posiblemente triviales) de* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *respectivamente. Es decir,*

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) = \{\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{D} : \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{D} \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{B})\}.$$

Lema 1.6.4. *Si* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *son hoops, el conjunto de imágenes homomorfas de* $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$ *es*

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}) \cup \{\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C} : \boldsymbol{C} \in H(\boldsymbol{B})\}.$$

Lema 1.6.5. *Los ultra productos* $\boldsymbol{P}_u(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})$ *consisten en álgebras de la forma* $\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{D}$*, donde* $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{IP}_u(\boldsymbol{A})$ *y* $\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{IP}_u(\boldsymbol{B})$*. Es decir,*

$$\boldsymbol{P}_u(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) = \{\boldsymbol{IP}_u(\boldsymbol{A}) \oplus \boldsymbol{IP}_u(\boldsymbol{B})\}.$$

Lema 1.6.6.

$$\boldsymbol{ISP}_u([0,1]_{\boldsymbol{MV}} \oplus [0,1]_{\boldsymbol{G}}) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{SP}_u([0,1]_{\boldsymbol{MV}}) \oplus \boldsymbol{SP}_u([0,1]_{\boldsymbol{G}})).$$

Demostración. Utilizando los Lemas anteriores tenemos que

$$\mathbf{ISP}_u([0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}}) \subseteq \mathbf{I}(\mathbf{SP}_u([0,1]_{\mathbf{MV}}) \oplus \mathbf{SP}_u([0,1]_{\mathbf{G}})).$$

Sean $\mathbf{A} \in \mathbf{SP}_u([0,1]_{\mathbf{MV}})$ y $\mathbf{C} \in \mathbf{SP}_u([0,1]_{\mathbf{G}})$. Luego, existe una inmersión de $\mathbf{A}$ en una potencia $[0,1]^I_{\mathbf{MV}}/U$, para U un ultrafiltro de $[0,1]^I_{\mathbf{MV}}$ y por lo tanto existe una inmersión de $\mathbf{A} \oplus \mathbf{C}$ en $([0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus \mathbf{C})^I/U$.

Si $[0,1]^J_{\mathbf{G}}/V$ es la ultrapotencia de $[0,1]_{\mathbf{G}}$ en la cual $\mathbf{C}$ está inmerso, tenemos que $[0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus \mathbf{C}$ está inmerso en $([0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}})^J/V$. Luego, obtenemos que

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{C} \in \mathbf{ISP}_u(\mathbf{SP}_u([0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}})) \subseteq \mathbf{ISP}_u([0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}}).$$

□

El Lema de Jónsson (ver [9]) establece que el retículo de congruencias de $\mathcal{MG}$ es un retículo distributivo y luego si $\mathbf{C}$ es subdirectamente irreducible en $\mathcal{MG}$ entonces $\mathbf{C} \in \mathbf{H}(\mathbf{SP}_u([0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}}))$ y $\mathbf{H}(\mathbf{SP}_u([0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}})) \subseteq \mathcal{MG}$.

Teorema 1.6.7. $\mathcal{MG} = \mathcal{MV} \oplus^t \mathcal{G}$.

Demostración. Sabemos que $\mathcal{MG} \subseteq \mathcal{MV} \oplus^t \mathcal{G}$. Sea $\mathbf{A}$ una BL-álgebra subdirectamente irreducible en $\mathcal{MV} \oplus^t \mathcal{G}$. Por el Teorema 1.2.6, $\mathbf{A}$ es una BL-cadena y por la demostración del Lema 1.6.2, $\mathbf{A} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{C}$, para $\mathbf{B}$ una subcadena de $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ (basta con esto ya que vimos que toda BL-álgebra puede escribirse como la suma ordinal de sus elementos regulares - y por lo tanto esa parte estará generada por una subcadena de la cadena estándar $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y sus elementos densos) y $\mathbf{C}$ una cadena en $\mathcal{G}$. Claramente $\mathbf{C}$ es subdirectamente irreducible. Como $\mathcal{BH}$ es una variedad congruencia distributiva, por el Lema de Jónsson, $\mathbf{C} \in \mathbf{H}(\mathbf{SP}_u(\mathbf{B}))$. Luego por los Lemas 1.6.4 y 1.6.6 tenemos que

$$\mathbf{A} \in \mathbf{ISP}_u([0,1]_{\mathbf{MV}}) \oplus \mathbf{HSP}_u([0,1]_{\mathbf{G}}) \subseteq \mathbf{HSP}_u([0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}}) \subseteq \mathcal{MG}.$$

□

Corolario 1.6.8. $\mathcal{V} = \mathcal{MG}$.

Por lo tanto, la variedad $\mathcal{MG}$ está caracterizada como subvariedad de $\mathcal{BL}$ por las siguientes ecuaciones:

$$(\neg\neg x \to x)^2 = (\neg\neg x \to x)$$

y

$$\neg\neg(\neg\neg x) = \neg\neg x,$$

donde esta última ecuación se satisface en toda BL-álgebra.

Capítulo 2

Álgebras Libres

2.1. Términos, álgebras de términos y álgebras libres

La sección 10 del capítulo II de [44], está dedicada el estudio de los términos, álgebras de términos y álgebras libres. Presentamos a continuación algunas definiciones y resultados basados en esa sección que utilizaremos en este capítulo.

Definición 2.1.1. Un **lenguaje** o **tipo de álgebras** es un conjunto $\mathcal{F}$ de símbolos funcionales tales que a toda función $f \in \mathcal{F}$ se le asigna un número entero no negativo n. Este entero se llama la **aridad** de f, y f se dice que es un símbolo funcional n-ario. El subconjunto de símbolos funcionales n-arios de $\mathcal{F}$ se denota por $\mathcal{F}_n$.

Definición 2.1.2. Sea X un conjunto de objetos (distintos) llamados **variables**. Sea $\mathcal{K}$ el tipo de álgebras. El conjunto $T(X)$ de **términos de tipo** $\mathcal{F}$ es el conjunto más chico tal que:

1. $X \cup \mathcal{F}_0 \subseteq T(X)$.
2. Si $p_1, \ldots, p_n \in T(X)$ y $f \in \mathcal{F}_n$ entonces $f(p_1, \ldots, p_n) \in T(X)$.

Recordemos que en el caso de BL-álgebras y hoops básicos, en el capítulo anterior hemos llamado $BL - term$ y $H - term$ a los conjuntos de términos de las álgebras respectivas.

Definición 2.1.3. Dados un término $p(x_1, \ldots, x_n)$ de tipo $\mathcal{F}$ sobre el conjunto X y el álgebra $\mathbf{A}$ de tipo $\mathcal{F}$ definimos una aplicación $p^{\mathbf{A}} : A^n \to A$ como sigue:

1. si p es una variable x_i entonces

$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$$

para $a_1, \ldots, a_n \in A$, es decir, que $p^{\mathbf{A}}$ es la proyección sobre la i-ésima coordenada.

2. si p es de la forma $f(p_1(x_1,\dots,x_n),\dots,p_k(x_1,\dots,x_n))$, donde $f \in \mathcal{F}_k$, entonces

$$p^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n) = f^{\mathbf{A}}(p_1^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n),\dots,p_k^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n)).$$

En particular, si $p = f \in \mathcal{F}$ entonces $p^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}}$ y diremos que $p^{\mathbf{A}}$ es la **función de término** sobre $\mathbf{A}$ correspondiente al término p.

Observación 2.1.4. Cuando el contexto está claro, omitimos el superíndice $\mathbf{A}$.

Definición 2.1.5. Sea K una clase de álgebras de tipo $\mathcal{F}$ y sea $Free_X$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ que está generada por X. Si para todo $\mathbf{A} \in K$ y para toda aplicación

$$\alpha : X \to A$$

existe un homomorfismo

$$\beta : Free_X \to \mathbf{A}$$

que extiende a α (es decir que $\beta(x) = \alpha(x)$ para todo $x \in X$), entonces decimos que $Free_X$ tiene la **propiedad universal para** K **sobre** X, que X es el conjunto de generadores libres de $Free_X$ y que $Free_X$ está libremente generada por X en K.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
Free_X \arrow[rr, "\beta"'] & & A
\end{tikzcd}$$

Lema 2.1.6. *Supongamos que $Free_X$ tiene la propiedad universal para K sobre X. Luego si tenemos $\boldsymbol{A} \in K$ y $\alpha : X \to A$, entonces existe una única extensión β de α tal que β es un homomorfismo desde $Free_X$ en $\boldsymbol{A}$.*

Demostración. Esto se sigue de observar que el homomorfismo está completamente determinado por la imagen de los generadores. □

El siguiente resultado enuncia que dado un cardinal m existe, salvo isomorfismo, a lo sumo un álgebra en la clase K que tiene la propiedad universal para K sobre X sobre un conjunto de generadores libres de tamaño m.

Teorema 2.1.7. *Supongamos que $Free^1_{X_1}$ y $Free^2_{X_2}$ son dos álgebras en la clase K con propiedad universal para K sobre los conjuntos correspondientes. Si $|X_1| = |X_2|$, entonces $Free^1_{X_1} \cong Free^2_{X_2}$.*

Luego, dada cualquier clase K de álgebras las álgebras de términos, que surgen de tomar las variables y los símbolos n-arios aplicados a las variables de la clase (ver [?]), tienen la propiedad universal para K. Otro tipo de álgebras con esta propiedad son las que definimos a continuación:

Definición 2.1.8. Sea K una familia de álgebras de tipo $\mathcal{F}$. Dado un conjunto de variables X definimos la congruencia $\theta_K(X)$ sobre $\mathbf{T}(X)$ como

$$\theta_K(X) = \bigcap \Phi_K(X),$$

donde

$$\Phi_K(X) = \{\phi \in Con(\mathbf{T}(X)) \ : \ \mathbf{T}(X)/\phi \in IS(K)\};$$

donde $\mathbf{A} \in IS(K)$ si y solamente si $\mathbf{A}$ es imagen homomorfa de una subálgebra de algún álgebra de K.

Definimos la K-álgebra libre $\mathbf{F}_K(\bar{X})$ sobre $\bar{X}$ como:

$$\mathbf{F}_K(\bar{X}) = \mathbf{T}(X)/\cong,$$

donde

$$\bar{X} = X/\cong,$$

y la relación está bien determinada porque estamos en una variedad que hemos caracterizado ecuacionalmente.

Teorema 2.1.9. *(Birkhoff).*

Dado $\boldsymbol{T}(X)$ vale que $\boldsymbol{F}_K(\bar{X})$ tiene la propiedad universal para K sobre $\bar{X}$.

La importancia de las álgebras libres en lógica se debe a su conexión con las álgebras de Lindembaum, como se puede observar en el siguiente lema:

Lema 2.1.10. *Sea L una lógica proposicional y sea $\mathbb{V}$ su semántica algebraica. Luego el álgebra de Lindembaum de L es isomorfa a $Free_{\mathbb{V}}(\omega)$, la $\mathbb{V}$-álgebra libre en una cantidad numerable de generadores. Más aún, el álgebra de Lindembaum de las L-fórmulas escritas sobre el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de variables proposicionales es isomorfo a $Free_{\mathbb{V}}(n)$, para cualquier entero mayor o igual que 0.*

Por este motivo el conocimiento de la estructura de las álgebras libres en una variedad $\mathbb{V}$ permite entender la estructura de la lógica cuya semántica algebraica está dada por $\mathbb{V}$. Tener una representación concreta de las álgebras libres es entonces una herramienta importante para el estudio de la lógica asociada.

Definición 2.1.11. Diremos que un álgebra $\mathbf{A}$ es un **álgebra genérica** en una variedad $\mathbb{V}$ (o que genera la variedad $\mathbb{V}$) si

$$\mathbb{V} = \mathbf{HSP}(\{\mathbf{A}\}).$$

Una herramienta para construir representaciones concretas de álgebras libres está dada en el siguiente Lema, que es consecuencia del Teorema 10.3 de [9]:

Lema 2.1.12. *Sea $\boldsymbol{A}$ un álgebra genérica para una variedad $\mathbb{V}$. Luego, para cada cardinal finito n, la $\mathbb{V}$-álgebra libre en n generadores es isomorfa a la subálgebra de $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{A}^n}$ generada por las proyecciones $(a_1, \ldots, a_n) \in \boldsymbol{A}^n \mapsto a_\alpha$, para todo $\alpha \leq n$.*

2.2. $Free_{\mathcal{MV}}(n)$

La variedad $\mathcal{MV}$ de MV-álgebras es la semántica algebraica de la lógica de Łukasiewicz. Para comprender la estructura del álgebra libre $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ debemos estudiar algunas propiedades básicas de los poliedros racionales y su subdivisión en triangulaciones unimodulares. Esto se debe a que los poliedros racionales se pueden identificar con las variedades algebraicas de las fórmulas de la lógica de Łukasiewicz, y esta característica se verá reflejada en nuestra representación del álgebra $Free_{\mathcal{MG}}(n)$. Para estudiar estos temas en más detalle se puede leer el Capítulo II de [36].

Definición 2.2.1. Dado $n \in \mathbb{N}$ fijo, un punto $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ se dice **racional** si todas sus coordenadas son números racionales. Un **hiperplano racional** H en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto $H = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid h_1x_1 + \ldots + h_nx_n = k\}$ para $\bar{h} \in \mathbb{Q}^n - \{0\}$ y $k \in \mathbb{Q}$ (o equivalentemente, para $\bar{h} \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ y $k \in \mathbb{Z}$. Cuando $k = 0$ decimos que H es **homogéneo**).

Para un punto cualquiera $\bar{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{Q}^n$ escrito en forma irreducible denotamos por $den(y)$ al mínimo común múltiplo de los denominadores de sus coordenadas, y decimos que $den(y)$ es el **denominador** de y. El vector entero

$$\tilde{y} = (den(y).y_1, ..., den(y).y_n, den(y)) = den(y)(y, 1) \in \mathbb{Z}^{n+1}$$

se llama la **correspondente homogénea** de y. Luego $\tilde{y}$ es **primitivo**, esto es, minimal (como vector entero no nulo) en el **rayo** $\langle\tilde{y}\rangle = \{\lambda\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda \geq 0\} = \mathbb{R}_{\geq 0}\tilde{y}$.

Para $0 \leq m \leq n$, un m-**simplex** en $\mathbb{R}^n$ es la cápsula convexa $T = conv(v_0, ..., v_m)$ de $m + 1$ puntos afinmente independientes en el espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Los **vértices** $v_0, ..., v_m$ están unívocamente determinados por T. Decimos que T es **racional** si cada vértice de T es un punto racional. El conjunto vacío es el único -1-simplex (en [13] y [36] hay más detalles sobre estas definiciones).

Por un **poliedro** $P \in \mathbb{R}^n$ nos referimos a la unión de finitos símplices T_i en $\mathbb{R}^n$. Si todos los T_i son racionales, P se dice un **poliedro racional**.

Un **complejo poliedral** en $\mathbb{R}^n$ es una familia finita (no vacía) $\mathcal{K}$ de poliedros convexos cerrados en $\mathbb{R}^n$ tal que las caras de cualquier $P \in \mathcal{K}$ son miembros de $\mathcal{K}$, y la intersección de dos poliedros cualesquiera $P, Q \in \mathcal{K}$ es una cara común de P y Q. Decimos que $\mathcal{K}$ es un **complejo simplicial** si todos sus elementos son símplices.

Para cualquier poliedro o complejo simplicial $\mathcal{C}$ la unión de los elementos de $\mathcal{C}$ se llama **soporte** de $\mathcal{C}$ y se denota por $|\mathcal{C}|$. Decimos que $\mathcal{C}$ es **racional** si lo son todos sus miembros. $\mathcal{C}'$ es una **subdivisión** de $\mathcal{C}$ si $|\mathcal{C}'| = |\mathcal{C}|$ y todo miembro de $\mathcal{C}$ es unión de miembros de $\mathcal{C}'$.

Si $\mathcal{C}$ es un complejo simplicial, $\mathcal{C}$ se dice que es una **triangulación** de $|\mathcal{C}|$.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Dados vectores $v_1, ..., v_s \in \mathbb{R}^m$ definimos

$$\langle v_1, ..., v_s\rangle = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}v_s.$$

Para $t = 1, 2, ..., m$, un **cono simplicial racional t-dimensional** en $\mathbb{R}^m$ es un conjunto $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ de la forma:

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}d_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}d_t = \langle d_1, ..., d_t\rangle,$$

para vectores enteros linealmente independientes $d_1, ..., d_t \in \mathbb{Z}^m$. Los vectores $d_1, ..., d_t$ se llaman **vectores generadores primitivos** de σ. Los mismos están unívocamente determinados por σ. Por una **cara** de σ nos referimos a los conjuntos de la forma $\langle d_{i_1}, ..., d_{i_s}\rangle$, donde $\{i_1, ..., i_s\} \subseteq \{1, ..., t\}$. Diremos que la cara de σ determinada por el conjunto vacío es $\{0\}$. Este es el único cono 0-dimensional en $\mathbb{R}^m$. Dado $k = 0, 1, ...$ y un k-simplex racional $T = conv(v_0, ..., v_k) \subseteq \mathbb{R}^n$, denotamos por $T^{\uparrow}$ a $\langle \tilde{v}_0, ..., \tilde{v}_k\rangle = \mathbb{R}_{\geq 0}\tilde{v}_0 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}\tilde{v}_k \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Decimos que $T^{\uparrow}$ es el **cono (simplicial racional)** de T. Notemos que $dim(T_{\uparrow}) = k+1$.

Definición 2.2.2.

- Sean $n \in \mathbb{N}$ y $t = 1, ..., n$. Luego un cono simplicial racional t-dimensional $\sigma = \langle d_1, ..., d_t\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice **unimodular** si el conjunto $\{d_1, ..., d_t\}$ de sus vectores generadores primitivos se puede extender a una base del grupo abeliano libre $\mathbb{Z}^n$ de puntos enteros en $\mathbb{R}^n$.
- Un simplex racional T se dice **unimodular** si su cono $T^{\uparrow}$ es regular.
- Diremos que Δ es una **triangulación unimodular** de un poliedro racional P si P es el soporte de Δ y todo simplex racional $T \in \Delta$ es unimodular.

Veamos ahora algunos resultados que permiten tener una representación funcional de las MV-álgebras libres.

La MV-álgebra estándar

$$[0, 1]_{\mathbf{MV}} = \langle [0, 1], \oplus, \neg, 0\rangle,$$

donde $x \oplus y = min\{1, x + y\}$ y $\neg x = 1 - x$ para todo $x, y \in [0, 1]$, es generadora de la variedad $\mathcal{MV}$. Por lo tanto, sabemos que la MV-álgebra libre en n generadores $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ es la subálgebra de $[0, 1]^{[0,1]^n}$ generada por las proyecciones, y equipada con las operaciones:

$$(f \oplus g)(t_1, \dots, t_n) = min\{1, f(t_1, \dots, t_n) + g(t_1, \dots, t_n)\};$$
$$(\neg f)(t_1, \dots, t_n) = 1 - f(t_1, \dots, t_n);$$
$$0(t_1, \dots, t_n) = 0,$$

para $(t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n$.

Sin embargo, esto no nos permite conocer la forma de los elementos de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$. El Teorema de representación de McNaughton da una caracterización de estas funciones.

Definición 2.2.3. Supongamos que $\mathbf{Var}(\alpha) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Definimos una función $f_\alpha : [0,1]^n \to [0,1]$, asociada a α, como:

1. si $\alpha = x_i$, entonces f_α es la i-ésima proyección canónica.

$$f_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = a_i$$

   con $a_i \in [0,1]$ y $1 \leq i \leq n$;

2. si $\alpha = \neg\beta$, entonces $f_\alpha = \neg f_\beta = 1 - f_\beta$;

3. si $\alpha = (\beta \to \gamma)$, entonces $f_\alpha = f_\beta \to f_\gamma = min(1, 1 - f_\beta + f_\gamma)$.

Definición 2.2.4. Una función $f : [0,1]^n \to [0,1]$ es una **función de McNaughton** si f tiene las siguientes propiedades:

1. f es continua con relación a la topología natural de $[0,1]^n$;

2. existen polinomios $\lambda_1, ..., \lambda_k$ en n variables y de grado 1, con coeficientes enteros, digamos

$$\lambda_i(x_0, ..., x_{n-1}) = b_i + m_{i0}x_0 + ... + m_{i(n-1)}x_{n-1},$$

   con $b_i, m_{il} \in \mathbb{Z}$, $0 \leq l \leq n-1$, tales que, para cada $x = (x_0, ..., x_{n-1}) \in [0,1]^n$, existe un índice $j \in \{1, ..., k\}$ con $f(x) = \lambda_j(x)$.

El siguiente resultado está demostrado en forma autocontenida en [34]:

Teorema 2.2.5. *El álgebra $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ coincide con la MV-álgebra de funciones de McNaughton con las operaciones definidas como en 2.2.3.*

2.3. $Free_{\mathcal{G}}(n)$

Dado un término α de n variables en el lenguaje de hoops de Gödel y un hoop de Gödel H la interpretación de α en H, es la función $\alpha_H : H^n \to H$ que surge de interpretar cada conectivo en el término como la correspondiente operación en el hoop. Por comodidad denotaremos por α a la función α_H cuando su dominio esté claro por el contexto. Recoredemos que estas son las funciones de términos que definimos.

Teorema 2.3.1. *Sean $a_1, \ldots, a_n$ elementos de $[0,1]_{\mathbf{G}} \setminus \{1\}$. Luego la subálgebra generada por estos elementos y el 1 es el álgebra que tiene $n+1$ elementos: $a_1, \ldots, a_n$ y 1.*

Llamaremos $Free_{\mathcal{G}}(n)$ al álgebra libre en n variables en la variedad de hoops básicos generada por los hoops de Gödel.

El hoop básico

$$[0,1]_{\mathbf{G}} = \langle [0,1], \cdot, \rightarrow, 1 \rangle,$$

donde

$$x \cdot y = min\{x, y\}$$

y

$$x \rightarrow y = \begin{cases} y & \text{si} \quad x > y; \\ 1 & \text{si} \quad x \leq y. \end{cases}$$

para todo $x, y \in [0,1]$, es generadora de la variedad $\mathcal{G}$ de hoops de Gödel.

Por lo tanto, sabemos que el álgebra libre en la variedad de hoops básicos generada por los hoops de Gödel $Free_{\mathcal{G}}(n)$ es la subálgebra de $[0,1]_{\mathbf{G}}^{[0,1]_{\mathbf{G}}^n}$ generada por las proyecciones, y equipada con las operaciones:

$$(f \cdot g)(t_1, \ldots, t_n) = min\{f(t_1, \ldots, t_n), g(t_1, \ldots, t_n)\};$$

$$(f \rightarrow g)(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} g(t_1, \ldots, t_n) & \text{si} \quad f(t_1, \ldots, t_n) > g(t_1, \ldots, t_n); \\ 1 & \text{si} \quad f(t_1, \ldots, t_n) \leq g(t_1, \ldots, t_n). \end{cases}$$

para $(t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$.

En [25] y en el Capítulo IX de [18] se presenta una representación funcional del álgebra libre generada por álgebras de Gödel en la variedad $\mathcal{BL}$. Sin embargo, nuestro interés reside en estudiar el caso de los hoops de Gödel donde la diferencia fundamental es que el elemento 0 no funciona como una constante en el lenguaje del álgebra (en [18] se hace un comentario para el caso de hoops). Para hallar la representación funcional en este caso, analizaremos el caso del álgebra libre en un generador $Free_{\mathcal{G}}(1)$, luego en dos generadores $Free_{\mathcal{G}}(2)$ y estudiaremos finalmente el caso general $Free_{\mathcal{G}}(n)$.

$Free_{\mathcal{G}}(1)$

Con el objetivo de familiarizarnos con la notación y con las funciones en $Free_{\mathcal{G}}(n)$, comenzaremos describiendo en detalle las funciones de $Free_{\mathcal{G}}(1)$ y $Free_{\mathcal{G}}(2)$, para pasar luego al caso general.

Lema 2.3.2. *Si α es un término en una variable en $H - term$ entonces $\alpha_{[0,1]_{\boldsymbol{G}}}(x) = x$ o $\alpha_{[0,1]_{\boldsymbol{G}}}(x) = 1$, para $x \in [0,1]_{\boldsymbol{G}}$.*

Demostración. Basta con ver que $\{x, 1\}$ es una subálgebra de $[0,1]_{\mathbf{G}}$, y esto surge del Teorema 2.3.1. $\square$

Por lo tanto el álgebra libre $Free_{\mathcal{G}}(1)$ está conformada por las funciones:

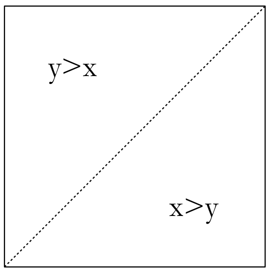
$$f : [0,1]_{\mathbf{G}} \to [0,1]_{\mathbf{G}} \text{ dada por } f(x) = x,$$

$$g : [0,1]_{\mathbf{G}} \to [0,1]_{\mathbf{G}} \text{ dada por } g(x) = 1.$$

$Free_{\mathcal{G}}(2)$

Para estudiar las funciones en el álgebra libre en 2 variables debemos definir algunas subdivisiones de $[0,1]^2$, teniendo en cuenta los posibles órdenes entre las componentes de cada punto $(x,y) \in [0,1]^2$. Quedan determinadas tres regiones:

- $R_{x<y} = \{(x,y) \in [0,1]^2 | x < y\}$
- $R_{x=y} = \{(x,y) \in [0,1]^2 | x = y\}$
- $R_{y<x} = \{(x,y) \in [0,1]^2 | y < x\}$



Como consecuencia del Teorema 2.3.1 se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.3.3. *Sea $\alpha(x,y)$ un término de dos variables en $H - term$ que evaluaremos en $[0,1]_{\boldsymbol{G}}$. Luego la restricción de $\alpha_{[0,1]_{\boldsymbol{G}}}$ a las regiones $R_{x<y}, R_{x=y}$ y $R_{y<x}$ es igual a x, y o 1.*

Ahora debemos probar la recíproca del Teorema anterior; es decir, si tenemos una función $f : [0,1]^2_{\mathbf{G}} \to [0,1]_{\mathbf{G}}$ tal que la restricción de f a las regiones $R_{x<y}, R_{x=y}$ y $R_{y<x}$ es igual a x, y o 1 entonces existe un término α de hoops de Gödel tal que la interpretación de α en $[0,1]_{\mathbf{G}}$ coincide con f.

Para hacer esto construiremos términos cuya interpretación nos de x o y en una de estas regiones y 1 en las otras dos.

Lema 2.3.4. *Existen términos $\gamma^x_{x<y}$ y $\gamma^y_{x<y}$ cuya interpretación en $[0,1]^2_{\boldsymbol{G}}$ es:*

$$\gamma^x_{x<y}(x,y) = \begin{cases} x & si\ (x,y) \in R_{x<y} \\ \\ 1 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

y

$$\gamma^y_{x<y}(x,y) = \begin{cases} y & si\ (x,y) \in R_{x<y} \\ \\ 1 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Demostración. Para el primer caso basta con tomar $\gamma^x_{x<y} = y \to x$, pues esto será 1 si $y \leq x$ y x sobre la región $R_{x<y}$.

Para el segundo caso consideremos la interpretación del término $(y \to x) \vee y$ cuya interpretación sobre $[0,1]^2_{\mathbf{G}}$ es:

$$((y \to x) \vee y)_{[0,1]^2_{\mathbf{G}}}(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } (x,y) \in R_{x<y} \\ \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por lo que podemos tomar $\gamma^y_{x<y} = (y \to x) \vee y$. □

De forma análoga se puede probar el siguiente lema:

Lema 2.3.5. *Existen términos $\gamma^x_{y<x}$ y $\gamma^y_{y<x}$ cuya interpretación en $[0,1]^2_{\boldsymbol{G}}$ es:*

$$\gamma^x_{y<x}(x,y) = \begin{cases} x & si\ (x,y) \in R_{y<x} \\ \\ 1 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

y

$$\gamma^y_{y<x}(x,y) = \begin{cases} y & si\ (x,y) \in R_{y<x} \\ \\ 1 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

Finalmente, debemos encontrar el término correspondiente a la región $R_{x=y}$ (será un solo término porque aquí coinciden x e y):

Lema 2.3.6. *Existe un término $\gamma^x_{x=y}$ cuya interpretación en $[0,1]^2_{\boldsymbol{G}}$ es:*

$$\gamma^x_{x=y}(x,y) = \begin{cases} x & si\ (x,y) \in R_{x=y} \\ \\ 1 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{2.3.5}$$

Demostración. Consideremos el término $\gamma^x_{x<y} \wedge \gamma^x_{y<x}$ donde $\gamma^x_{x<y}$ y $\gamma^x_{y<x}$ están dados como en los Lemas 2.3.4 y 2.3.5. La interpretación de este término sobre $[0,1]^2_{\mathbf{G}}$ es:

$$(\gamma^x_{x<y} \wedge \gamma^x_{y<x})_{[0,1]^2_{\mathbf{G}}}(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq y \\ \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Tomemos ahora $\gamma^x_{x=y}$ como $\gamma^x_{x=y} = (\gamma^x_{x<y} \wedge \gamma^x_{y<x}) \to x$, cuya interpretación sobre $[0,1]^2_{\mathbf{G}}$ es:

$$((\gamma^x_{x<y} \wedge \gamma^x_{y<x}) \to x)_{[0,1]^2_{\mathbf{G}}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ \\ x & \text{si } x = y \end{cases}$$

□

Finalmente, definamos $\gamma^1_{x<y} = \gamma^1_{x=y} = \gamma^1_{y<x} = 1$.

Ahora estamos en condiciones de probar la recíproca del último Teorema:

Notación 2.3.7. Dada una función $f : A \to B$ y $C \subseteq A$, denotaremos por $f{\restriction}C$ a la función $f{\restriction}C : C \to B$ dada por:

$$f{\restriction}C(x) = f(x),$$

para todo $x \in C$.

Proposición 2.3.8. Sea $f : [0,1]^2_{\mathbf{G}} \to [0,1]_{\mathbf{G}}$ una función tal que

$$\begin{cases} f{\restriction}R_{x<y} = x \quad \text{o} \quad f{\restriction}R_{x<y} = y \quad \text{o} \quad f{\restriction}R_{x<y} = 1 \\ \\ f{\restriction}R_{x=y} = x \quad \text{o} \quad f{\restriction}R_{x=y} = y \quad \text{o} \quad f{\restriction}R_{x=y} = 1 \\ \\ f{\restriction}R_{x>y} = x \quad \text{o} \quad f{\restriction}R_{x>y} = y \quad \text{o} \quad f{\restriction}R_{x>y} = 1, \end{cases}$$

luego existe un término γ en $H - term$ tal que $\gamma_{[0,1]_{\mathbf{G}}}(x,y) = f(x,y)$, para todo $x, y \in [0,1]_{\mathbf{G}}$.

Demostración. Como sabemos que $f{\restriction}R_{x<y}, f{\restriction}R_{x=y}$ y $f{\restriction}R_{y<x}$ coinciden con x, y o 1, utilizando los Lemas 2.3.4, 2.3.5 y 2.3.6 sabemos que existen términos que coinciden con x e y en estas regiones y en el complemento dan 1, basta con tomar el término

$$\gamma = \gamma^{f(R_{x<y})}_{x<y} \wedge \gamma^{f(R_{x=y})}_{x=y} \wedge \gamma^{f(R_{y<x})}_{y<x}.$$

Luego $\gamma_{[0,1]_{\mathbf{G}}} = f$. □

Por lo tanto el álgebra $Free_{\mathcal{G}}(2)$ está compuesta por funciones tales que su restricción a las regiones $R_{x<y}$, $R_{x<y}$ y $R_{x>y}$ coincide con la proyección sobre una de las variables o con la función que asigna la constante 1, es decir:

$$Free_{\mathcal{G}}(2) = \left\{ f : [0,1]^2_{\mathbf{G}} \to [0,1]_{\mathbf{G}} : \begin{array}{c} f \restriction R_{x<y} = x \quad \text{o} \quad f \restriction R_{x<y} = y \quad \text{o} \quad f \restriction R_{x<y} = 1 \\ f \restriction R_{x=y} = x \quad \text{o} \quad f \restriction R_{x=y} = y \quad \text{o} \quad f \restriction R_{x=y} = 1 \\ f \restriction R_{x>y} = x \quad \text{o} \quad f \restriction R_{x>y} = y \quad \text{o} \quad f \restriction R_{x>y} = 1, \end{array} \right\}.$$

$Free_{\mathcal{G}}(n)$

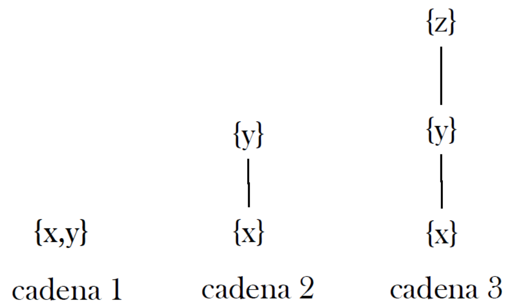
Con el objetivo de definir las funciones en el caso de n variables $x_1, \dots, x_n$, dividiremos el dominio $[0,1]^n$ en distintas regiones. Para esto necesitamos algunas definiciones previas.

Definición 2.3.9. Sean $X^1, \dots, X^r$ subconjuntos de $\{x_1, \dots, x_n\}$ tales que

- $X^i \cap X^j = \emptyset$ si $i \neq j$
- $X^i \neq \emptyset$, $\forall i = 1, \dots, r$.

Definimos la **cadena de Gödel** $\mathbf{X} = \langle X^{\sigma(1)}, \dots, X^{\sigma(r)} \rangle$ si $X^1, \dots, X^r$ son conjuntos como los anteriores y σ es una permutación de $\{1, \dots r\}$.

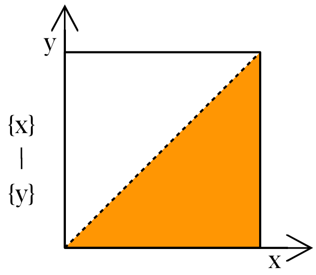
Ejemplo 5. *En la imagen a continuación hay tres ejemplos de cadenas. La cadena 1 se puede representar como $\langle \{x,y\} \rangle$, la cadena 2 es $\langle \{x\}, \{y\} \rangle$ y la cadena 3 es $\langle \{x\}, \{y\}, \{z\} \rangle$.*

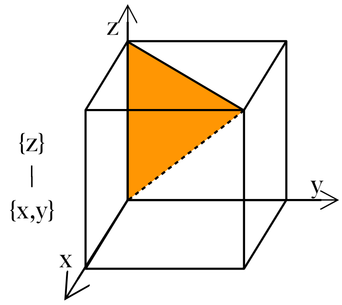


Observemos que a una cadena de Gödel $\mathbf{X} = \langle X^{\sigma(1)}, \dots, X^{\sigma(r)} \rangle$ se le puede asociar un subconjunto $R_{\mathbf{X}}$ del cubo $[0,1]^n$ del siguiente modo:

$$R_{\mathbf{X}} = \left\{ \bar{x} \in [0,1]^n : \begin{array}{lll} x_i = x_j & \text{si} & x_i, x_j \in X^{\sigma(k)}, \text{ para algún } k \in \{1, \dots, r\} \\ x_i < x_j & \text{si} & x_i \in X^{\sigma(k)}, x_j \in X^{\sigma(l)} \text{ para } k < l \\ x_i < x_j & \text{si} & x_i \in X^{\sigma(r)}, x_j \notin \bigcup_{k=1}^{r} X^{\sigma(k)} \end{array} \right\}$$

Ejemplo 6. *En los siguientes ejemplos se pueden ver las regiones asociada a dos cadenas: una en las variables x e y, que representamos en $[0,1]^2$ y otra en las variables x, y, z, que representamos en $[0,1]^3$:*





Como consecuencia del Teorema 2.3.1 tenemos el siguiente resultado:

Lema 2.3.10. *Sea $\alpha \in H-term$ un término en n variables que evaluaremos en $[0,1]^n_{\boldsymbol{G}}$. Para cada $\bar{a} \in [0,1]^n_{\boldsymbol{G}}$, tenemos que o bien existe un $i \in \{1,\ldots,n\}$ $\alpha_{[0,1]^n_{\boldsymbol{G}}}(\bar{a}) = \pi_i(\bar{a})$, donde π_i es la proyección sobre la i-ésima coordenada o bien $\alpha_{[0,1]^n_{\boldsymbol{G}}}(\bar{a}) = 1$.*

Lema 2.3.11. *Dado $\alpha \in H-term$ un término en n variables que evaluaremos en $[0,1]^n_{\boldsymbol{G}}$. Si $\boldsymbol{X} = \langle X^1, \ldots, X^r\rangle$ es una cadena de Gödel en las variables $\{x_1,\ldots,x_n\}$ y $\bar{a}, \bar{b} \in R_{\boldsymbol{X}}$, entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$\alpha_{[0,1]^n_{\boldsymbol{G}}}(\bar{a}) = \pi_i(\bar{a})$ si y solamente si $\alpha_{[0,1]^n_{\boldsymbol{G}}}(\bar{b}) = \pi_i(\bar{b})$, donde π_i es la proyección sobre la i-ésima coordenada, y*

2. *$\alpha_{[0,1]^n_{\boldsymbol{G}}}(\bar{a}) = 1$ si y solamente si $\alpha_{[0,1]^n_{\boldsymbol{G}}}(\bar{b}) = 1$.*

Demostración. Lo veremos por inducción en la complejidad del término α.

Si α es de complejidad 0, entonces $\alpha = x_i$ y en ese caso $\alpha = \pi_i$, para algún $i \in \{1,\ldots,n\}$ o $\alpha = 1$. En ambos pasos se cumplen las condiciones 1 y 2.

Supongamos que las condiciones 1 y 2 son válidas para términos con complejidad menor que k y veamos que estas condiciones se cumplen para un término de complejidad k.

Sea α un término de complejidad $k > 0$. Luego, tenemos dos posibilidades: $\alpha = \psi \to \phi$ o $\alpha = \psi \cdot \phi$, con ψ y ϕ términos de complejidad menor que k. Para estos dos casos consideraremos las distintas posibilidades, y solamente probaremos que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = \pi_i(\bar{a})$ implica $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \pi_i(\bar{b})$ y $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = 1$ implica $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = 1$, pues la recíproca sale en forma análoga.

Si $\alpha = \psi \to \phi$:

1. Si $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = \pi_i(\bar{a})$ entonces por el Teorema 2.3.1 podemos tener los siguientes casos:

   a) $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = 1$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = \pi_i(\bar{a})$: En este caso tenemos por hipótesis inductiva que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = 1$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \pi_i(\bar{b})$, por lo que

   $$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = 1 \to \pi_i(\bar{b}) = \pi_i(\bar{b}).$$

   b) $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = \pi_j(\bar{a})$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = \pi_i(\bar{a})$, con $\pi_j(\bar{a}) > \pi_i(\bar{a})$: En este caso tenemos por hipótesis inductiva que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \pi_j(\bar{b})$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \pi_i(\bar{b})$. Pero como $\bar{a}, \bar{b} \in R_{\mathbf{X}}$, y tenemos que $\pi_j(\bar{a}) > \pi_i(\bar{a})$, se debe cumplir también que $\pi_j(\bar{b}) > \pi_i(\bar{b})$, por lo que

   $$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \pi_j(\bar{b}) \to \pi_i(\bar{b}) = \pi_i(\bar{b}).$$

2. Si $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = 1$ entonces por el Teorema 2.3.1 podemos tener los siguientes casos:

   a) $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = \pi_i(\bar{a})$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = \pi_j(\bar{a})$ con $\pi_j(\bar{a}) < \pi_i(\bar{a})$: En este caso tenemos por hipótesis inductiva que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \pi_i(\bar{b})$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \pi_j(\bar{b})$. Pero como $\bar{a}, \bar{b} \in R_{\mathbf{X}}$, y tenemos que $\pi_j(\bar{a}) > \pi_i(\bar{a})$, se debe cumplir también que $\pi_j(\bar{b}) > \pi_i(\bar{b})$, por lo que

   $$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \pi_i(\bar{b}) \to \pi_j(\bar{b}) = 1.$$

   b) $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = \pi_i(\bar{a})$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = 1$: En este caso tenemos por hipótesis inductiva que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \pi_i(\bar{b})$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = 1$, por lo que

   $$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \pi_i(\bar{b}) \to 1 = 1.$$

   c) $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = 1$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = 1$: En este caso tenemos por hipótesis inductiva que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = 1$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = 1$, por lo que

   $$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = 1 \to 1 = 1.$$

Si $\alpha = \psi \cdot \phi$:

1. Si $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = \pi_i(\bar{a})$ entonces podemos tener los siguientes casos:

   a) $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = 1$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = \pi_i(\bar{a})$: En este caso tenemos por hipótesis inductiva que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = 1$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \pi_i(\bar{b})$, por lo que

   $$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = 1 \cdot \pi_i(\bar{b}) = \pi_i(\bar{b}).$$

   b) $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = \pi_j(\bar{a})$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = \pi_i(\bar{a})$, con $\pi_j(\bar{a}) > \pi_i(\bar{a})$: En este caso tenemos por hipótesis inductiva que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \pi_j(\bar{b})$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \pi_i(\bar{b})$. Pero como $\bar{a}, \bar{b} \in R_{\mathbf{X}}$, y tenemos que $\pi_j(\bar{a}) > \pi_i(\bar{a})$, se debe cumplir también que $\pi_j(\bar{b}) > \pi_i(\bar{b})$, por lo que

   $$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \pi_j(\bar{b}) \cdot \pi_i(\bar{b}) = \pi_i(\bar{b}).$$

   c) $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = \pi_i(\bar{a})$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = \pi_j(\bar{a})$, con $\pi_j(\bar{a}) > \pi_i(\bar{a})$: Este caso es análogo al anterior.

2. Si $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = 1$ entonces podemos tener un único caso:

   a) $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = 1$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{a}) = 1$: En este caso tenemos por hipótesis inductiva que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = 1$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = 1$, por lo que

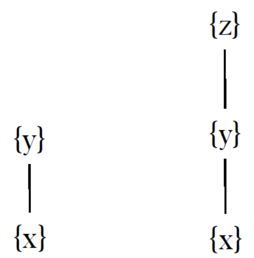
$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{b}) = 1 \cdot 1 = 1.$$

□

Las funciones que utilizaremos entonces en la representación de $Free_{\mathcal{G}}(n)$ estarán dadas por proyecciones sobre las variables o que tomen el valor 1 sobre cada una de las regiones dadas en el Lema 2.3.11. Sin embargo, hay una restricción en la libertad que tienen las funciones de tomar valores en distintas regiones (esto fue notado en la Sección 4.1 del Capítulo IX del Volumen 2 de [18], donde está probado de otro modo el resultado anterior, identificando las subcadenas comunes en la foresta). Para verlo definiremos las subcadenas de Gödel.

Definición 2.3.12. Dadas dos cadenas de Gödel $\mathbf{X_1} = \langle X_1^1, \ldots, X_1^r \rangle, \mathbf{X_2} = \langle X_2^1, \ldots, X_2^q \rangle$, diremos que $\mathbf{X_1}$ es **subcadena** de $\mathbf{X_2}$ si $r \leq q$ y $X_1^i = X_2^i$ para $1 \leq i \leq r$.

Ejemplo 7. *En el ejemplo 5, observar que la cadena 2 es subcadena de la cadena 3:*



cadena 2 cadena 3

Lema 2.3.13. *Sean α un término en $H - term$ en n variables y $\boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{X}_2$ dos cadenas de Gödel que tienen como subcadena a la cadena $\boldsymbol{X} = \langle X^1, \ldots, X^r \rangle$ (es decir, $\boldsymbol{X}_1 = \langle X^1, \ldots, X^r, X_1^{r+1}, \ldots, X_1^q \rangle$ y $\boldsymbol{X}_2 = \langle X^1, \ldots, X^r, X_2^{r+1}, \ldots, X_2^s \rangle$). Luego vale que*

$$\alpha_{[0,1]^n_{\boldsymbol{G}}} \upharpoonright R_{\boldsymbol{X}_1}(\bar{x}) = \pi_j(\bar{x}), \text{ para todo } \bar{x} \in R_{\boldsymbol{X}_1} \text{ y } x_j \in X^t$$

si y solamente si

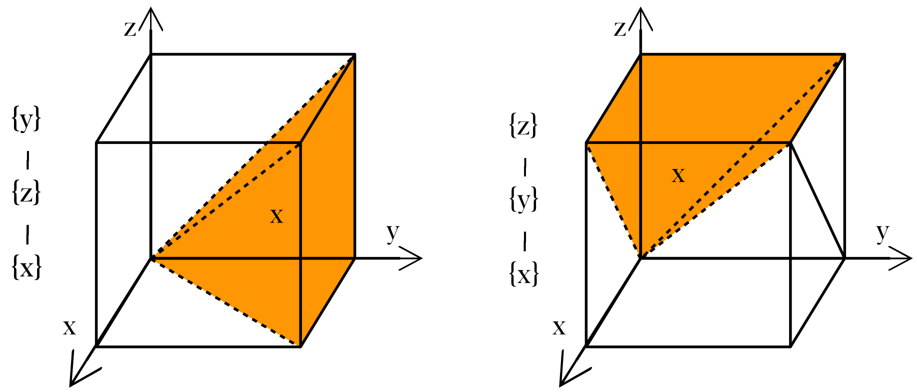
$$\alpha_{[0,1]^n_{\boldsymbol{G}}} \upharpoonright R_{\boldsymbol{X}_2}(\bar{x}) = \pi_k(\bar{x}), \text{ para todo } \bar{x} \in R_{\boldsymbol{X}_2} \text{ y } x_k \in X^t,$$

para todo $t \leq r$.

Demostración. Se puede probar este resultado haciendo inducción sobre la complejidad del término α. Además, para cada caso debemos considerar las siguientes posibilidades: que la evaluación del término sobre una región coincida con la proyección sobre una de las variables que están en la cadena $\mathbf{X}$, o con una de las variables que no están en $\mathbf{X}$, o que tome el valor 1.

Dado que esto nos lleva a considerar muchos casos, la demostración es extensa. Por ese motivo la dejamos en el Apéndice. $\square$

Ejemplo 8. *El siguiente es un ejemplo en $Free_{\mathcal{G}}(3)$ de dos cadenas con sus regiones asociadas, y suponemos que un término α es tal que su evaluación sobre las dos regiones coincide con la proyección sobre la variable x.*



Basados en el resultado anterior, dada una cadena de Gödel $\mathbf{X} = \langle X^1, \ldots, X^r \rangle$ queremos hallar un término $\alpha_{\mathbf{X}} \in H - term$ tal que su evaluación sobre la región $R_{\mathbf{X}}$ coincida con $x_i \in X^r$ y 1 en el complemento de esta región (relativo a $[0,1]^n$). Para esto hallaremos primero algunos términos que nos permitan comparar las variables que son iguales y las que son distintas. Una vez que tengamos esos términos, construiremos el término general.

Definición 2.3.14. Sea $\mathbf{X}$ una cadena de Gödel tal que $\mathbf{X} = \langle X^1, \ldots, X^r \rangle$. Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, diremos que X^i es un **eslabón** de $\mathbf{X}$.

Observación 2.3.15. Dado que en la próxima demostración podrían aparecer conjuntos que resulten ser el conjunto vacío y sobre los cuales queremos tomar el ínfimo, convendremos, como es habitual, que $\bigwedge \varnothing = 1$.

Lema 2.3.16. *Dadas n variables $x_1, \ldots, x_n$, y $m \leq n$, el término*

$$\alpha_{\langle \{x_1\}, \ldots, \{x_m\} \rangle} = \bigwedge_{i=1}^{m-1} (x_{i+1} \to x_i) \to x_{i+1}$$

es tal que su evaluación sobre $[0,1]^n_{\boldsymbol{G}}$ nos da por resultado:

$$\alpha_{\langle \{x_1\}, \ldots, \{x_m\} \rangle [0,1]^n_{\boldsymbol{G}}}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & si\ \bar{x} \in R_{\langle \{x_1\}, \ldots, \{x_m\} \rangle}; \\ \displaystyle\bigwedge_{i=1}^{m-1} \{x_{i+1} : x_i \geq x_{i+1}\} & en\ caso\ contrario. \end{cases}$$

Demostración. Lo veremos por inducción en m.

Si $m = 2$, entonces $\alpha_{\langle\{x_1\},\{x_2\}\rangle} = (x_1 \leftrightarrow x_2) \to x_2$, cuya interpretación sobre $[0,1]^n_{\mathbf{G}}$ es:

$$\alpha_{\langle\{x_1\},\{x_2\}\rangle[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x} \in R_{\langle\{x_1\},\}x_2\}\rangle}; \\ x_2 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Supongamos que el resultado es válido para $m < k$ y veamos que vale para $m = k$.

Vale que

$$\alpha_{\langle\{x_1\},\ldots,\{x_k\}\rangle} = \alpha_{\langle\{x_1\},\ldots,\{x_{k-1}\}\rangle} \wedge ((x_k \leftrightarrow x_{k-1}) \to x_k).$$

Luego la evaluación de $\alpha_{\langle\{x_1\},\ldots,\{x_k\}\rangle}$ sobre $[0,1]^n_{\mathbf{G}}$ resulta:

$$\alpha_{\langle\{x_1\},\ldots,\{x_k\}\rangle[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x} \in R_{\langle\{x_1\},\ldots,\{x_{k-1}\}\rangle}; \\ \displaystyle\bigwedge_{i=1}^{k-2}\{x_{i+1} : x_i \geq x_{i+1}\} & \text{en caso contrario.} \end{cases} \wedge \begin{cases} 1 & \text{si } x_{k-1} < x_k; \\ x_k & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es decir,

$$\alpha_{\langle\{x_1\},\ldots,\{x_k\}\rangle[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x} \in R_{\langle\{x_1\},\ldots,\{x_k\}\rangle}; \\ \displaystyle\bigwedge_{i=1}^{k-1}\{x_{i+1} : x_i \geq x_{i+1}\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por lo tanto, queda probado el Lema. □

Lema 2.3.17. *Dadas n variables $x_1, \ldots, x_n$ y $r_m \leq n$, si $X^1 = \{x_1, \ldots, x_{r_1}\}$, $X^2 = \{x_{r_1+1}, \ldots, x_{r_2}\}$, $\ldots$, $X^m = \{x_{r_{m-1}+1}, \ldots, x_{r_m}\}$ son tales que $\boldsymbol{X} = \langle X^1, \ldots, X^m\rangle$ es una cadena de Gödel entonces existe un término $\alpha_{\boldsymbol{X}}$ tal que su evaluación sobre $[0,1]^n_{\boldsymbol{G}}$ nos da por resultado:*

$$\alpha_{\boldsymbol{X}[0,1]^n_{\boldsymbol{G}}}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \bar{x} \in R_{\boldsymbol{X}}; \\ \displaystyle\bigwedge_{i=1}^{r_m}\{x_i\} & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ definimos el término

$$\chi_i(x_{r_{i-1}+1}, \ldots, x_{r_i}) = x_{r_{i-1}+1} \wedge \ldots, \wedge x_{r_i},$$

donde tomamos $r_0 = 0$. En el resto de la demostración escribiremos simplemente χ_i para referirnos a $\chi_i(x_{r_{i-1}+1}, \ldots, x_{r_i})$.

Tomemos ahora el término $\alpha_{\mathbf{X}} = \displaystyle\bigwedge_{i=1}^{m-1} (\chi_i \leftrightarrow \chi_{i+1}) \to \chi_{i+1}$.

Aplicando el Lema 2.3.16 y considerando el cambio de x_i por χ_i, que los da la variable más chica en X^i, tenemos que la interpretactón de $\alpha_{\mathbf{X}}$ sobre $[0,1]^n_{\mathbf{G}}$ nos da por resultado:

$$\alpha_{\mathbf{X}[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x} \in R_{\mathbf{X}}; \\ \bigwedge_{i=1}^{r_m} \{x_i\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$\square$

Lema 2.3.18. *Dadas n variables $x_1, \ldots, x_n$, y $m \leq n$, el término*

$$\beta_m = \bigwedge_{i=m+1}^{n} (x_i \to (x_m \leftrightarrow x_i)) \to x_i$$

es tal que su evaluación sobre $[0,1]^n_{\mathbf{G}}$ nos da por resultado:

$$\beta_{m[0,1]^n_{\mathbf{G}}} = \begin{cases} 1 & \textit{si } x_m < x_{m+1}, \ldots, x_n; \\ \bigwedge_{i=m+1}^{n} \{x_i : x_i < x_m\} & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Lo veremos por inducción sobre n.

Si $n = 2$, entonces tenemos dos posiblidades:

1. Si $m = 1$, entonces tenemos que $\beta_1 = (x_2 \to (x_1 \leftrightarrow x_2)) \to x_2$, cuya evaluación sobre $[0,1]^2_{\mathbf{G}}$ es:
$$\beta_{1[0,1]^2_{\mathbf{G}}}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < x_2; \\ x_2 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
2. Si $m = 2$ entonces $\beta_2 = \wedge\varnothing = 1$.

Supongamos que el resultado es válido para $n < k$ y veamos que vale para $n = k$. Para esto consideraremos distintas posiblidades:

1. Si $m \leq k-1$ entonces tenemos que el término β_m es de la forma:
$$\beta_m = \left(\bigwedge_{i=m+1}^{k-1} (x_i \to (x_m \leftrightarrow x_i)) \to x_i \right) \wedge (x_k \to (x_m \leftrightarrow x_k)) \to x_k,$$
por lo tanto, si utilizamos la hipótesis inductiva y evaluamos β_m sobre $[0,1]^k_{\mathbf{G}}$ obtenemos:
$$\beta_{m[0,1]^k_{\mathbf{G}}}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_m < x_{m+1}, \ldots, x_{k-1}; \\ \bigwedge_{i=1}^{k-1} \{x_i : x_i \geq x_{i+1}\} & \text{en caso contrario} \end{cases} \wedge \begin{cases} 1 & \text{si } x_m < x_k; \\ x_k & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es decir,

$$\beta_{m[0,1]^k_{\mathbf{G}}}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_m < x_{m+1}, \ldots, x_k; \\ \bigwedge_{i=1}^{k} \{x_i : x_i \geq x_{i+1}\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2. Si $m = k$ entonces tenemos que $\beta_k = \wedge\varnothing = 1$.

Por lo tanto queda probado el Lema. □

Teorema 2.3.19. *Dadas n variables $x_1, \ldots, x_n$ y $r_m \leq n$, si $X^1 = \{x_1, \ldots, x_{r_1}\}$, $X^2 = \{x_{r_1+1}, \ldots, x_{r_2}\}$, ..., $X^m = \{x_{r_{m-1}+1}, \ldots, x_{r_m}\}$ son tales que $\boldsymbol{X} = \langle X^1, \ldots, X^m \rangle$ es una cadena de Gödel entonces el término $\gamma_{\mathbf{X}}$ dado por*

$$\gamma_{\mathbf{X}} = \alpha_{\mathbf{X}} \wedge \beta_{r_m},$$

donde $\alpha_{\mathbf{X}}$ está dado como en el Lema 2.3.17 y β_{r_m} está dado como en el Lema 2.3.18 es tal que su evaluación sobre $[0,1]^n_{\boldsymbol{G}}$ da por resultado:

$$\gamma_{\mathbf{X}}(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \bar{x} \in R_{\mathbf{X}}; \\ \bigwedge_{x \in \bigcup_{i=1}^{m-1} X^i} \{x : x \geq y \in X^m\} \wedge \bigwedge\{x : x \in X^m\} \wedge \bigwedge_{x \notin \bigcup_{i=1}^{m} X^i} \{x : x < y \in X^m\} & \textit{en c. c.} \end{cases}$$

Demostración. Es consecuencia de los Lemas 2.3.17 y 2.3.18. □

Corolario 2.3.20. *Dada una cadena de Gödel $\boldsymbol{X} = \langle X^1, \ldots, X^r \rangle$, existe un término $\beta_{\boldsymbol{X}}$ cuya evaluación sobre $[0,1]^n$ nos da por resultado:*

$$\beta_{\boldsymbol{X}}(\bar{x}) = \begin{cases} x_r \in X^r & \textit{si } \bar{x} \in R_{\boldsymbol{X}}; \\ 1 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Basta con tomar el término $\beta_{\mathbf{X}} = \alpha_{\mathbf{X}} \to x_r$ donde el término $\alpha_{\mathbf{X}}$ está dado como en el Teorema 2.3.19, y observar que el mínimo

$$\bigwedge_{x \in \bigcup_{i=1}^{r-1} X^i} \{x : x \geq y \in X^r\} \wedge \bigwedge\{x : x \in X^r\} \wedge \bigwedge_{x \notin \bigcup_{i=1}^{r} X^i} \{x : x < y \in X^r\}$$

es siempre menor o igual que $x_r \in X^r$ en el complemento de la región $R_{\mathbf{X}}$. □

Observación 2.3.21. Si bien en los enunciados anteriores consideramos que las variables estaban ordenadas de modo tal que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, estos resultados se pueden obtener para cualquier orden de las variables, utilizando alguna permutación adecuada.

Estudiaremos las funciones generales en $Free_{\mathcal{G}}(n)$ en términos de las funciones anteriores pero para esto definiremos a partir de las cadenas de Gödel la noción de forestas.

Proposición 2.3.22. Si $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son dos cadenas tales que $\mathbf{X}_1$ no es subcadena de $\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_2$ no es subcadena de $\mathbf{X}_1$, entonces $R_{\mathbf{X}_1} \cap R_{\mathbf{X}_2} = \varnothing$.

Demostración. Supongamos que $R_{\mathbf{X}_1} \cap R_{\mathbf{X}_2} \neq \varnothing$. Luego, existe un punto

$$\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n$$

tal que $\bar{a} \in R_{\mathbf{X}_1} \cap R_{\mathbf{X}_2}$.

Veamos, razonando por el absurdo, que $X_1^1 = X_2^1$. Si no fuera así podríamos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe un $x_i \in X_2^1 \backslash X_1^1$. Luego, para todo $x_j \in X_2^1$ tenemos que $a_j = a_i$. Pero para cada $x_l \in X_1^1$, tenemos que $a_l = a_j$, para $x_j \in X_2^1$ por lo que debemos tener que $a_i = a_l$ para todo $x_l \in X_1^1$, lo cual contradice el hecho de que $x_i \notin X_1^1$.

De modo análogo podemos ver que $X_1^i = X_2^i$ para $i = 1, \ldots, min\{r, q\}$.

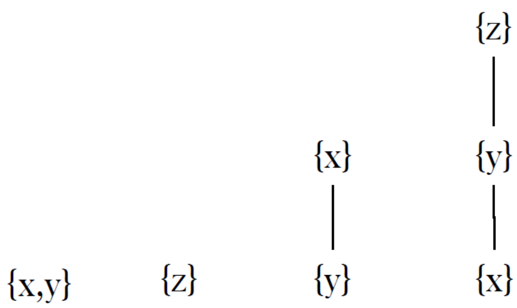
Supongamos que $min\{r, q\} = r$. Luego, debemos tener que $\mathbf{X}_1$ es subcadena de $\mathbf{X}_2$, lo que contradice la hipótesis del enunciado.

Si, por el contrario, $min\{r, q\} = q$, entonces $\mathbf{X}_2$ es subcadena de $\mathbf{X}_1$, lo cual es absurdo.

Por lo tanto, $R_{\mathbf{X}_1} \cap R_{\mathbf{X}_2} = \varnothing$. $\square$

Definición 2.3.23. Diremos que un conjunto de cadenas de Gödel determina una **foresta de Gödel** si ninguna cadena del conjunto es subcadena de otra cadena.

Ejemplo 9. *La siguiente es una foresta de Gödel que contiene a las cadenas 1 y 3 del Ejemplo 5:*



Por otro lado, a cada cadena de Gödel $\mathbf{X} = \langle X^{\sigma(1)}, \ldots, X^{\sigma(r)} \rangle$ donde $X^1, \ldots, X^r$ son subconjuntos disjuntos de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y σ es una permutación de $\{1, \ldots r\}$ le podemos asociar una función $f_{\mathbf{X}}$ de $Free_{\mathcal{G}}(n)$ del siguiente modo:

$$f_{\mathbf{X}} = \begin{cases} x_j & \text{si } \bar{x} \in R_{\mathbf{X}}, \text{ y } x_j \in X^{\sigma(r)} \\ \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{2.3.6}$$

En este caso tenemos que la función $f_{\mathbf{X}}$ está en $Free_{\mathcal{G}}(n)$ por el Corolario 2.3.20.

Observación 2.3.24. Notemos que la cadena $\mathbf{X}$ depende de r y de σ, por lo que f depende de r y σ.

Si $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m$ forman una foresta de Gödel definimos la función asociada a esta foresta como

$$f = \bigwedge_{j=1}^{m} f_{\mathbf{X}_j}.$$

Teorema 2.3.25. *Una función $f : [0,1]^n_{\boldsymbol{G}} \to [0,1]_{\boldsymbol{G}}$ pertenece a $Free_{\mathcal{G}}(n)$ si y solamente si existe una foresta de Gödel $\bar{\boldsymbol{X}}$ conformada por las cadenas $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_m$ tal que*

$$f = \bigwedge_{j=1}^{m} f_{\boldsymbol{X}_j}.$$

Demostración. Dada función f asociada a una foresta de Gödel $\bar{\mathbf{X}}$ conformada por las cadenas $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m$, podemos tomar el término $\alpha = \bigwedge_{j=1}^{k} \beta_{\mathbf{X}_j}$, para subtérminos $\beta_{\mathbf{X}_j}$ dados como en el Corolario 2.3.20 y tenemos que la interpretación de α sobre $[0,1]^n_{\mathbf{G}}$ coincide con f.

Para ver la recíproca, supongamos que $f \in Free_{\mathcal{G}}(n)$. Vamos a dividir el dominio de f en distintas regiones, y luego asociaremos a cada una de esas regiones una cadena de Gödel que conformará la foresta. Dada una permutación σ de las variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y para $k \in \{1, \ldots, n\}$, consideraremos las regiones R contenidas en $[0,1]^n$ dadas por:

$$R = \{\bar{a} \in [0,1]^n : a_{\sigma(1)} = \ldots = a_{\sigma(r_1)} < \ldots < a_{\sigma(r_k+1)} = \ldots = a_{\sigma(n)}\}.$$

Es decir, la región dada por los puntos en los que las primeras r_1 variables son iguales, las r_2 variables siguientes son iguales, y así continúan hasta las r_k últimas variables que son iguales. Es decir, que la región R depende de σ y las constantes $r_1, \ldots, r_k$.

Por ejemplo, dada una permutación σ, podríamos tener las siguientes regiones:

$$\{\bar{a} \in [0,1]^n : a_{\sigma(1)} = \ldots = a_{\sigma(n)}\},$$

$$\{\bar{a} \in [0,1]^n : a_{\sigma(1)} < a_{\sigma(2)} < \ldots < a_{\sigma(n)}\},$$

donde son todas las variables iguales, o todas distintas, y también podemos tener grupos de variables iguales.

Notemos además que la región en la que todas las variables son iguales está asociada a todas las permutaciones σ de las variables $\{x_1, \ldots, x_2\}$.

Por lo visto en 2.3.11 sabemos que $f\upharpoonright R$ es o bien 1 o bien la proyección sobre una de las variables.

Si $f\upharpoonright R = x_i$ entonces asociaremos a R la cadena

$$\mathbf{X}_R = \langle \{x_{\sigma(1)} = \ldots = x_{\sigma(r_1)}\}, \ldots, \{x_{\sigma(r_m+1)} = \ldots = x_i = \ldots = x_{\sigma(r_p)}\}\rangle.$$

Si $f\upharpoonright R = 1$ entonces asociaremos a R la cadena $\mathbf{X}_R = \varnothing$.

Notemos que si tenemos dos permutaciones distintas σ_1 y σ_2, que determinan las regiones R_1 y R_2, pero tales que $R_1 = R_2$, entonces $f\upharpoonright R_1 = f\upharpoonright R_2$, por lo que tener distintas permutaciones que determinan una misma región nos dará siempre la misma cadena de Gödel asociada.

Además podemos ver que estas cadenas son independientes, pues si $\mathbf{X}_{R_1}$ y $\mathbf{X}_{R_2}$ son dos cadenas de las que definimos antes y son tales que $\mathbf{X}_{R_1}$ es subcadena de $\mathbf{X}_{R_2}$, por la forma en que fueron construídas, sabemos que $R_2 \subseteq R_1$ y esto contradice el hecho de que tomamos regiones independientes (en las cuales $R \cap S = \varnothing$ para $R, S \in \mathcal{R}$, con $R \neq S$).

Si representamos por $\mathcal{R}$ al conjunto de todos los subconjuntos de $[0,1]^n$ dados como R por alguna permutación σ de $\{1, \ldots, n\}$, tomaremos el conjunto

$$\mathbf{F} = \{\mathbf{X}_R : R \in \mathcal{R}\},$$

tenemos que $\mathbf{F}$ es una foresta de Gödel y si definimos

$$f = \bigwedge_{\mathbf{X}_R \in \mathbf{F}} f_{\mathbf{X}_R}$$

donde $f_{\mathbf{X}_R}$ está definido como en (2.3.6) cuando $\mathbf{X}_R$ es una cadena de Gödel y $f_{\mathbf{X}_R} = 1$ cuando $\mathbf{X}_R = \varnothing$, hemos probado que existe un $m \in \mathbb{N}$ y m cadenas de Gödel $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m$ tales que

$$f = \bigwedge_{j=1}^{m} f_{\mathbf{X}_j}.$$

□

2.4. $Free_{\mathcal{MG}}(n)$

En esta Sección estudiaremos el objetivo central de la tesis que es la descripción geométrica y funcional del álgebra libre en la subvariedad de BL-álgebras generada por

$$\mathfrak{A} = [0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}}$$

en n generadores. Basados en el Lema 2.1.12 sabemos que esta álgebra, que llamaremos $Free_{\mathcal{MG}}(n)$, será la subálgebra de $\mathfrak{A}^{\mathfrak{A}^n}$ generada por las proyecciones. Daremos una descripción explícita de las funciones de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$, para lo cual comenzaremos estudiando los casos con uno y dos generadores para tener una intuición de la descripción geométrica de las funciones.

$Free_{\mathcal{MG}}(1)$

Estudiaremos en esta Sección el álgebra libre en un generador. Veremos que la descripción geométrica de las funciones asociadas dependerá fuertemente de la descomposición de la cadena generadora en los bloques $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ y $[0,1]^n_{\mathbf{G}}$. Por esto recordaremos la definición de suma ordinal dada en 1.4.1 para nuestro caso particular:

Dados $[0,1]_{\mathbf{MV}} = \langle [0,1], \cdot_{MV}, \to_{MV}, 1\rangle$ y $[0,1]_{\mathbf{G}} = \langle [0,1], \cdot_{G}, \to_{G}, 1\rangle$ definimos la suma ordinal de $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y $[0,1]_{\mathbf{G}}$ como el hoop $[0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}} = \langle [0,1]_{\mathbf{MV}} \cup [0,1]_{\mathbf{G}}, \cdot, \to, 1, \rangle$, donde las operaciones $\cdot$ y $\to$ están dadas por:

$$x \cdot y = \begin{cases} x \cdot_{MV} y & \text{si} \quad x, y \in [0,1]_{\mathbf{MV}}; \\ x \cdot_{G} y & \text{si} \quad x, y \in [0,1]_{\mathbf{G}}; \\ x & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\},\ y \in [0,1]_{\mathbf{G}}; \\ y & \text{si} \quad y \in [0,1]_{\mathbf{G}} \setminus \{1\},\ x \in [0,1]_{\mathbf{MV}}. \end{cases}$$

$$x \to y = \begin{cases} x \to_{MV} y & \text{si} \quad x, y \in [0,1]_{\mathbf{MV}}; \\ x \to_{G} y & \text{si} \quad x, y \in [0,1]_{\mathbf{G}}; \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\},\ y \in [0,1]_{\mathbf{G}}; \\ y & \text{si} \quad y \in [0,1]_{\mathbf{MV}},\ x \in [0,1]_{\mathbf{G}}. \end{cases}$$

Además recordemos que si α es un término en $BL - term$ que podemos evaluar tomando $\alpha_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, podemos también evaluar el término en $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y tendremos una función $\alpha \restriction_{[0,1]_{\mathbf{MV}}}$ cuya imagen estará contenida en $[0,1]_{\mathbf{MV}}$. Del mismo modo, podemos evaluar el término en $[0,1]_{\mathbf{G}}$ y tendremos que la imagen estará contenida en $[0,1]_{\mathbf{G}}$.

Estos resultados nos serán útiles para demostrar el siguiente lema:

Lema 2.4.1. *Sean g una función de McNaughton en una variable y h una función de $Free_{\mathcal{G}}(1)$ tales que $g(1) = h(1) = 1$. Luego la función*

$$\mathscr{F}(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \in [0,1]_{\boldsymbol{MV}} \\ h(x) & si \quad x \in [0,1]_{\boldsymbol{G}} \end{cases} \tag{2.4.1}$$

está en $Free_{\mathcal{MG}}(1)$.

Recíprocamente, para toda $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(1)$ tal que $\mathscr{F}(1) = 1$ existen una función g de McNaughton en una variable y una función h de Gödel en una variable tales que satisfacen (2.4.1).

Demostración. Dadas g y h funciones de McNaughton y Gödel respectivamente, sabemos que existen términos $\alpha \in MV - term$ y $\beta \in H - term$ cuyas interpretaciones en MV y en Gödel coinciden con g y h, respectivamente.

Si consideramos ahora los términos $\neg\neg\alpha$ y $\neg\neg\beta \to \beta$, tenemos que al evaluarlos sobre $\mathfrak{A}$ obtenemos:

$$\neg\neg\alpha_{\mathfrak{A}}(x) = \begin{cases} \alpha(x) & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{G}} \end{cases}$$

$$(\neg\neg\beta \to \beta)_{\mathfrak{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ \\ \beta(x) & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{G}}. \end{cases}$$

Consideremos el término

$$\gamma = (\neg\neg\alpha) \cdot (\neg\neg\beta \to \beta)$$

Este término coincide con α en $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y con β en $[0,1]_{\mathbf{G}}$, por lo que su interpretación en $\mathfrak{A}$ coincide con $\mathscr{F}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ h(x) & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{G}}. \end{cases}$

Vimos que las funciones de esta forma están en el álgebra libre. Veamos ahora que estas son todas las funciones tales que $\mathscr{F}(1) = 1$. Para esto, supongamos que $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(1)$ y sean $g = \neg\neg\mathscr{F}$ y $h = \neg\neg\mathscr{F} \to \mathscr{F}$. Por el Lema **??** tenemos que

$$(\neg\neg\mathscr{F}) \cdot (\neg\neg\mathscr{F} \to \mathscr{F}) = \mathscr{F},$$

donde g es una función en $Free_{\mathcal{MV}}(1)$ y h es una función de $Free_{\mathcal{G}}(1)$.

□

Veamos ahora qué ocurre para el caso de las funciones tales que $\mathscr{F}(1) = 0$. Para esto adoptaremos la siguiente notación:

Notación 2.4.2. Denotaremos por $\perp$ a la función $\perp : \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{A}$ tal que $\perp(\bar{x}) = 0$, para todo $\bar{x} \in A^n$.

Lema 2.4.3. *Sea $\alpha \in BL{-}term$ un término en una única variable. Luego si $\alpha_{[0,1]_{\mathbf{MV}}}(1) = 0$ entonces $\alpha_{\mathfrak{A}}(x) = \perp$, para todo $x \in [0,1]_{\mathbf{G}}$.*

Demostración. Lo veremos por inducción en la complejidad de α.

Si α tiene complejidad 0 entonces $\alpha_{[0,1]_{\mathbf{MV}}}(1) = 0$ si y solamente si $\alpha = \perp$. Luego $\alpha_{\mathfrak{A}}(x) = \perp$ para todo $x \in [0,1]_{\mathbf{G}}$.

Supongamos que hemos probado el resultado para términos de complejidad menor que k y sea $\alpha \in BL - term$ un término en una variable de complejidad k. Luego tenemos dos posiblidades:

1. $\alpha = \beta \cdot \gamma$, con β y γ términos de una variable de complejidad menor que k: en este caso si $\alpha_{[0,1]_{\mathbf{MV}}}(1) = 0$ entonces $\beta_{[0,1]_{\mathbf{MV}}}(1) = 0$ o $\gamma_{[0,1]_{\mathbf{MV}}}(1) = 0$.

   Luego, por hipótesis inductiva tenemos que para todo $x \in [0,1]_{\mathbf{G}}$, $\beta_{\mathfrak{A}}(x) = \perp$ o $\gamma_{\mathfrak{A}}(x) = \perp$ y por lo tanto

   $$\alpha_{\mathfrak{A}}(x) = \beta_{\mathfrak{A}}(x) \cdot \gamma_{\mathfrak{A}}(x) = \perp.$$

2. $\alpha = \beta \to \gamma$, con β y γ términos de una variable de complejidad menor que k: en este caso la única posibilidad para que se cumpla que $\alpha_{[0,1]_{\mathbf{MV}}}(1) = 0$ es cuando $\beta_{[0,1]_{\mathbf{MV}}}(1) = 1$ y $\gamma_{[0,1]_{\mathbf{MV}}}(1) = 0$.

   Pero por hipótesis inductiva, esto implica que $\gamma_{\mathfrak{A}}(x) = \perp$, para todo $x \in [0,1]_{\mathbf{G}}$.

   Además, como $[0,1]_{\mathbf{G}}$ es una subálgebra cerrada de $\mathfrak{A}$ tenemos que para todo $x \in [0,1]_{\mathbf{G}}$, $\beta_{\mathfrak{A}}(x) \in [0,1]_{\mathbf{G}}$.

   Por lo tanto, utilizando la definición de las operaciones en la suma ordinal, se cumple que

   $$\alpha_{\mathfrak{A}}(x) = \beta_{\mathfrak{A}}(x) \to \gamma_{\mathfrak{A}}(x) = \perp.$$

□

Lema 2.4.4. *Si g es una función de $Free_{\mathcal{MV}}(1)$ tal que $g(1) = 0$, entonces la función*

$$\mathscr{F}(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \in [0,1]_{\boldsymbol{MV}} \\ \\ 0 & si \quad x \in [0,1]_{\boldsymbol{G}} \end{cases} \tag{2.4.2}$$

está en $Free_{\mathcal{MG}}(1)$.

Recíprocamente, si $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(1)$ es tal que $\mathscr{F}(1) = 0$, veamos que existe una función $g \in Free_{\mathcal{MV}}(1)$ que satisface 2.4.2.

Demostración. Dada una función $\mathscr{F}$ en $Free_{\mathcal{MG}}(1)$, si $g \in Free_{\mathcal{MV}}(1)$ es la restricción de $\mathscr{F}$ a $[0,1]_{\mathbf{MV}}$, sabemos que existe un término α cuya interpretación sobre $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ coincide con g.

Ahora, por el Lema 2.4.3, la evaluación del término α sobre $\mathfrak{A}$ es:

$$\alpha_{\mathfrak{A}}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{G}} \end{cases}$$

Es decir, que coincide con $\mathscr{F}$ sobre $\mathfrak{A}$.

Para ver que estas son todas las funciones tales que $\mathscr{F}(1) = 0$, se puede proceder como en la demostración del Lema 2.4.1. □

Por lo tanto, hemos descripto todas las funciones que están en $Free_{\mathcal{MG}}(1)$.

$Free_{\mathcal{MG}}(2)$

Recordemos que la generadora de la variedad con la que estamos trabajando es el álgebra

$$\mathfrak{A} = [0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}}.$$

Para comprender el comportamiento de las funciones del álgebra libre en dos variables en la variedad estudiaremos el comportamiento de cada función $\mathscr{F} : \mathfrak{A}^2 \to \mathfrak{A}$ en esta álgebra separando en partes su dominio: $[0,1]^2_{\mathbf{MV}}$, $[0,1]^2_{\mathbf{G}}$, $[0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}}$, y $[0,1]_{\mathbf{G}} \times [0,1]_{\mathbf{MV}}$.

Luego el dominio queda dividido en cuatro regiones que graficaremos como siguen:

$[0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}}$	$[0,1]_{\mathbf{G}} \times [0,1]_{\mathbf{G}}$
$[0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{MV}}$	$[0,1]_{\mathbf{G}} \times [0,1]_{\mathbf{MV}}$

Dado $\alpha \in BL - term$ un BL-término en dos variables, sabemos que $\alpha_{\mathfrak{A}}$ coincide con una función $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(2)$. Claramente tenemos que

$$\alpha_{\mathfrak{A}} \restriction_{[0,1]^2_{\mathbf{MV}}} = \mathscr{F} \restriction_{[0,1]^2_{\mathbf{MV}}} = f \in Free_{\mathcal{MV}}(2).$$

El comportamiento en las restantes regiones depende fuertemente de la función f.

Como veremos en la Proposición 2.4.5, si $\mathscr{F}(1,1) = f(1,1) = 1$, entonces existe $g \in Free_{\mathcal{G}}(2)$ tal que

$$\alpha_{\mathfrak{A}} \restriction_{[0,1]^2_{\mathbf{G}}} = \mathscr{F} \restriction_{[0,1]^2_{\mathbf{G}}} = g \in Free_{\mathcal{G}}(2),$$

y si $\mathscr{F}(1,1) = f(1,1) = 0$, entonces

$$\alpha_{\mathfrak{A}} \restriction_{[0,1]^2_{\mathbf{G}}} = \mathscr{F} \restriction_{[0,1]^2_{\mathbf{G}}} = 0.$$

Veamos ahora cómo resulta la evaluación de un término $\alpha \in BL - term$ sobre $[0,1]^2_{\mathbf{G}}$:

Proposición 2.4.5. Sea $\alpha(x, y)$ un BL-término de dos variables que evaluaremos en $\mathfrak{A}$. Vale que:

- Si $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(1, 1) = 1$ entonces existe $g \in Free_{\mathcal{G}}(2)$ tal que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = g(a, b)$ para todo $a, b \in [0, 1]_{\mathbf{G}}$, $g \in Free_{\mathcal{G}}(2)$.
- Si $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(1, 1) = 0$ entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = 0$ para todo $a, b \in [0, 1]_{\mathbf{G}}$.

Demostración. Lo veremos por inducción en la complejidad del término α.

Si α es un término de complejidad 0, entonces hay cuatro casos para considerar:

1. Si $\alpha(x, y) = 0$, entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = 0$ para todo par $(a, b) \in [0, 1]^2_{\mathbf{G}}$.
2. Si $\alpha(x, y) = x$, entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(1, 1) = 1$ y $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = a$ por lo que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = g(a)$ para $g(x, y) = x \in Free_{\mathcal{G}}(2)$.
3. Si $\alpha(x, y) = y$, entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(1, 1) = 1$ y $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = b$ por lo que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = g(b)$ para $g(x, y) = y \in Free_{\mathcal{G}}(2)$.
4. Si $\alpha(x, y) = 1$, entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = 1$ para todo par $(a, b) \in [0, 1]^2_{\mathbf{G}}$ y la función que es constante igual a 1 es una función de $Free_{\mathcal{G}}(2)$.

Asumamos que probamos el enunciado para todos los términos que satisfacen la hipótesis cuya complejidad es menor que $k > 0$. Sea α un término de complejidad $k \geq 2$. Debe ocurrir alguno de los siguientes casos:

1. $\alpha = \phi \cdot \psi$, con ϕ y ψ términos de complejidad menor que k.
2. $\alpha = \phi \to \psi$, con ϕ y ψ términos de complejidad menor que k.

Para cada uno de estos casos consideraremos las dos posibilidades del enunciado: $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(1, 1) = 1$ y $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(1, 1) = 0$:

1. - Si $\alpha = \phi{\cdot}\psi$, con $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(1, 1) = 1$, entonces la única posibilidad es que $\phi_{\mathfrak{A}^2}(1, 1) = 1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(1, 1) = 1$. En este caso, por hipótesis inductiva tenemos que $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = g_1(a, b) \in Free_{\mathcal{G}}(2)$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = g_2(a, b) \in Free_{\mathcal{G}}(2)$, por lo que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = \phi_{\mathfrak{A}^2}(a, b) \cdot \psi_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = g_1(a, b) \cdot g_2(a, b) \in Free_{\mathcal{G}}(2)$ por ser el álgebra $Free_{\mathcal{G}}(2)$ cerrrada bajo la operación $\cdot$.
   - Si $\alpha = \phi{\cdot}\psi$, con $\alpha(1, 1) = 0$ entonces tenemos que considerar tres posibilidades:
     - Si $\phi_{\mathfrak{A}^2}(1, 1) = 1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(1, 1) = 0$ tenemos por hipótesis inductiva que $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = g(a, b) \in Free_{\mathcal{G}}(2)$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = 0$, para todo par $(a, b) \in [0, 1]^2_{\mathbf{G}}$, y por lo tanto $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = \phi_{\mathfrak{A}^2}(a, b) \cdot \psi_{\mathfrak{A}^2}(a, b) = g(a, b) \cdot 0 = 0$.

- Si $\phi_{\mathfrak{A}^2}(1,1) = 0$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(1,1) = 1$ tenemos un caso análogo al anterior.
- Si $\phi_{\mathfrak{A}^2}(1,1) = 0$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(1,1) = 0$ tenemos por hipótesis inductiva que $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = 0$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = 0$, para todo par $(a,b) \in [0,1]^2_{\mathbf{G}}$, y por lo tanto $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = \phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) \cdot \psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = 0 \cdot 0 = 0$.

2.
- Si $\alpha = \phi \to \psi$, con $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(1,1) = 0$, entonces la única posibilidad es que $\phi_{\mathfrak{A}^2}(1,1) = 1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(1,1) = 0$. En este caso, por hipótesis inductiva tenemos que $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = g(a,b) \in Free_{\mathcal{G}}(2)$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = g(a,b) \in Free_{\mathcal{G}}(2)$, por lo que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = \phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) \to \psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = g(a,b) \to 0 = 0$.
- Si $\alpha = \phi \to \psi$, con $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(1,1) = 1$ entonces tenemos que considerar tres posibilidades:
  - Si $\phi_{\mathfrak{A}^2}(1,1) = 1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(1,1) = 1$ tenemos por hipótesis inductiva que $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = g_1(a,b) \in Free_{\mathcal{G}}(2)$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = g_2(a,b) \in Free_{\mathcal{G}}(2)$, por lo que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = \phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) \to \psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = g_1(a,b) \to g_2(a,b) \in Free_{\mathcal{G}}(2)$ por ser el álgebra $Free_{\mathcal{G}}(2)$ cerrrada bajo la operación $\to$.
  - Si $\phi_{\mathfrak{A}^2}(1,1) = 0$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(1,1) = 1$ tenemos por hipótesis inductiva que $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = 0$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = g(a,b) \in Free_{\mathcal{G}}(2)$, para todo par $(a,b) \in [0,1]^2_{\mathbf{G}}$, y por lo tanto $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = \phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) \to \psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = 0 \to g(a,b) = 1$.
  - Si $\phi_{\mathfrak{A}^2}(1,1) = 0$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(1,1) = 0$ tenemos por hipótesis inductiva que $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = 0$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = 0$, para todo par $(a,b) \in [0,1]^2_{\mathbf{G}}$, y por lo tanto $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = \phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) \to \psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = 0 \to 0 = 1$.

□

Para ver lo que ocurre en las dos regiones restantes, veremos algunos lemas técnicos que nos permitirán entender cómo resulta la restricción del término α a $[0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}}$ y $[0,1]_{\mathbf{G}} \times [0,1]_{\mathbf{MV}}$.

Proposición 2.4.6. Sea $\alpha(x,y)$ un BL-término de dos variables que evaluaremos en $\mathfrak{A}$. Supongamos que $a \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ entonces vale que:

- Si $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,1) = c \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = c$ para todo $b \in [0,1]_{\mathbf{G}}$,
- Si $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,1) = 1$ entonces existe una función $g \in Free_{\mathcal{G}}(1)$ tal que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = g(b)$ para todo $b \in [0,1]_{\mathbf{G}}$.

Es decir, que si en un punto $(a,1)$ la función toma un valor menor que 1, entonces debe tomar ese mismo valor sobre la cilindrificación de ese punto. Pero si toma el valor 1, entonces en la cilindrificación la función coincide con una función de $Free_{\mathcal{G}}(1)$. Observemos que este resultado es análogo al obtenido por Aguzzoli y Bova en [4] y [8] para las funciones en una variable.

Demostración. Lo veremos por inducción en la complejidad del término α.

Si α es un término de complejidad 0, entonces hay cuatro casos para considerar:

1. Si $\alpha(x,y)=\bot$, entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=\bot\in[0,1]_{\mathbf{MV}}\setminus\{1\}$, para todo $b\in[0,1]_{\mathbf{G}}$.
2. Si $\alpha(x,y)=x$, entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=a\in[0,1]_{\mathbf{MV}}\setminus\{1\}$, para todo $b\in[0,1]_{\mathbf{G}}$.
3. Si $\alpha(x,y)=y$, entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=b\in[0,1]_{\mathbf{G}}$, luego basta con tomar $g(b)=b\in Free_{\mathcal{G}}(1)$.
4. Si $\alpha(x,y)=1$, entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=1\in[0,1]_{\mathbf{G}}$ y $g(b)=1\in Free_{\mathcal{G}}(1)$.

Asumamos que probamos el enunciado para todos los términos que satisfacen la hipótesis cuya complejidad es menor que $k>0$. Sea α un término de complejidad $k\geq 2$. Debe ocurrir alguno de los siguientes casos:

1. $\alpha=\phi\cdot\psi$, con ϕ y ψ términos de complejidad menor que k.
2. $\alpha=\phi\to\psi$, con ϕ y ψ términos de complejidad menor que k.

Para cada uno de estos casos consideraremos las dos posibilidades del enunciado:

$$\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=c\in[0,1]_{\mathbf{MV}}\setminus\{1\} \text{ y } \alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=1$$

1.
   - Si $\alpha=\phi\cdot\psi$, con $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=c\in[0,1]_{\mathbf{MV}}\setminus\{1\}$, pueden ocurrir tres cosas:
     a) $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=c$: En este caso, por hipótesis inductiva tenemos que $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=g(b)\in Free_{\mathcal{G}}(1)$, por lo que la imagen de $\phi(a,b)$ está contenida en $[0,1]_{\mathbf{G}}$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=c$, para todo $b\in[0,1]_{\mathbf{G}}$, por lo que usando la definición del producto en la suma ordinal tenemos que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)\cdot\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)\cdot c=c$.
     b) $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=c$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=1$: Es análogo al anterior.
     c) $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=c_1$, $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=c_2$, con $c_1,c_2\in[0,1]_{\mathbf{MV}}\setminus\{1\}$ y $c_1\cdot c_2=c$: Por hipótesis inductiva, tenemos que para todo $b\in[0,1]_{\mathbf{G}}$, $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=c_1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=c_2$, por lo que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)\cdot\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=c_1\cdot c_2=c$.
   - Si $\alpha=\phi\cdot\psi$, con $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=1$, la única posibilidad es $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=1$ (pues $1\cdot x=x\cdot 1=x$, para todo $x\in A$). Entonces, por hipótesis inductiva, tenemos que $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=g_1(b)\in Free_{\mathcal{G}}(1)$ y $\psi(a,b)=g_2(b)\in Free_{\mathcal{G}}(1)$, para todo $b\in[0,1]_{\mathbf{G}}$. Por lo tanto, como el producto de elementos dentro de un hoop es cerrado, tenemos que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)\cdot\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=g_1(b)\cdot g_2(b)\in Free_{\mathcal{G}}(1)$.
2.
   - Si $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,1)\to\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,1)$, con $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=c\in[0,1]_{\mathbf{MV}}\setminus\{1\}$, tenemos las siguientes posibilidades (observemos que en este caso debemos tener $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,1)>\psi(a,1)$):
     a) $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,1)=c$: Por hipótesis inductiva $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=g(b)\in Free_{\mathcal{G}}(1)$ y su imagen está contenida en $[0,1]_{\mathbf{G}}$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=c$, para todo $b\in[0,1]_{\mathbf{G}}$, por lo que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)\to\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)=\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)\to c=c$, por definición de la implicación en la suma ordinal.

b) $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,1) = c_1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,1) = c_2$, con $c_1, c_2 \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ y $c = c_1 \to c_2$: Por hipótesis inductiva tenemos que $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = c_1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = c_2$ para todo $b \in [0,1]_{\mathbf{G}}$, por lo que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = \phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) \to \psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = c_1 \to c_2 = c$.

- Si $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,1) = \phi_{\mathfrak{A}^2}(a,1) \to \psi_{\mathfrak{A}^2}(a,1)$, con $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,1) = 1$, tenemos que considerar dos casos:

  a) $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,1) = c_1 \leq c_2 = \psi_{\mathfrak{A}^2}(a,1) < 1$, con $c_1, c_2 \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$: Por hipótesis inductiva tenemos que para todo $b \in [0,1]_{\mathbf{G}}$, $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = c_1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = c_2$, por lo que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = \phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) \to \psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = c_1 \to c_2 = 1 \in [0,1]_{\mathbf{G}}$.

  b) $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,1) = c \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,1) = 1$: Por hipótesis inductiva $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = c$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = g(b) \in Free_{\mathcal{G}}(1)$ y su imagen está contenida en$[0,1]_{\mathbf{G}}$, para todo $b \in [0,1]_{\mathbf{G}}$. Luego, $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = \phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) \to \psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = c \to \psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = 1 \in Free_{\mathcal{G}}(1)$, pues $c < \psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b)$, para todo $b \in [0,1]_{\mathbf{G}}$.

  c) $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,1) = \psi_{\mathfrak{A}^2}(a,1) = 1$: Por hipótesis inductiva, para todo $b \in [0,1]_{\mathbf{G}}$, $\phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = g_1(b) \in Free_{\mathcal{G}}(1)$ y $\psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = g_2(b) \in Free_{\mathcal{G}}(1)$. Pero entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = \phi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) \to \psi_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = g_1(b) \to g_2(b) \in Free_{\mathcal{G}}(1)$, pues la implicación es cerrada dentro de $Free_{\mathcal{G}}(1)$.

□

De manera análoga se prueba la siguiente proposición:

Proposición 2.4.7. Sea $\alpha(x,y)$ un BL-término de dos variables que evaluaremos en $\mathfrak{A}$. Supongamos que $b \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ entonces vale que:

- Si $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(1,b) = c \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus 1$ entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = c$ para todo $a \in [0,1]_{\mathbf{G}}$,

- Si $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(1,b) = 1$ entonces existe una función $g \in Free_{\mathcal{G}}(1)$ tal que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(a,b) = g(a)$ para todo $a \in [0,1]_{\mathbf{G}}$.

Notación 2.4.8. Dada una función $f(x,y)$ en dos variables, llamaremos su x-soporte al conjunto

$$1_{f,x} = \{x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} : f(x,1) = 1\}.$$

En los resultados anteriores vemos que los puntos del dominio para los cuales alguna de las variables toma el valor 1 y para cuales una función toma el valor 1 al evaluar en el punto, resultarán puntos de interés para el estudio de las funciones del álgebra libre. En la próxima subsección veremos algunos resultados que nos permitirán ver qué ocurre con las funciones de $Free_{\mathcal{MG}}(2)$ en esos casos.

Comportamiento de los términos en cilindrificaciones de intervalos

Sea $\alpha \in BL - term$ en dos variables. Luego sabemos que $\alpha_{[0,1]^2_{\mathbf{MV}}} = f \in Free_{\mathcal{MV}}(2)$.

Supongamos que $I = [a, b] \subseteq [0, 1)$ es un intervalo tal que $I \times \{1\} = 1_{f,x}$.

Claramente, esto ocurre si

$$f(x,1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ \\ c \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\} & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus [a,b], \end{cases}$$

donde a y b son números racionales y existe una triangulación unimodular de $[0,1]_{\mathbf{MV}} \times \{1\}$ que respeta a $I \times \{1\}$. Además, sabemos por la Proposición 2.4.6 que $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(x,y) \in \{y, 1\}$, para todo $(x,y) \in I \times [0,1]_{\mathbf{G}}$.

En esta subsección fijaremos el término $\alpha \in BL - term$ que cumple las hipótesis antes mencionadas.

Lema 2.4.9. *Si para todo subtérmino β de α se tiene que o bien $\beta(I,1) \in [0,1]_{\boldsymbol{MV}} \setminus \{1\}$ o bien $\beta(I,1) = \{1\}$ entonces $\alpha(I,y) = y$ para todo $y \in [0,1]_{\boldsymbol{G}}$ o $\alpha(I,1) = 1$ para todo $y \in [0,1]_{\boldsymbol{G}}$.*

Observación 2.4.10. Lo que queremos decir es que bajo las hipótesis del Lema 2.4.9 si $y \in [0,1]_{\mathbf{G}}$, se tiene que para todo par $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 \neq x_2$, se tiene que

$$\alpha(x_1, y) = \alpha(x_2, y). \tag{2.4.3}$$

Demostración. Basta con probar que si β es un subtérmino de α tal que $\beta(x,1) = 1$ para todo $x \in I$ (lo que denotaremos $\beta(I,1) = 1$) entonces para todo par $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 \neq x_2$ se cumple la igualdad 2.4.3.

Lo probaremos por inducción en la complejidad del término β.

Si β es un subtérmino de complejidad 0 tal que $\beta(I,1) = 1$ entonces tenemos dos posiblidades:

1. $\beta = y$ sobre $I \times [0,1]_{\mathbf{G}}$ y por lo tanto $\beta(x_1,y) = y = \beta(x_2,y)$, para todo $x_1, x_2 \in I, y \in [0,1]_{\mathbf{G}}$.
2. $\beta = 1$ sobre $I \times [0,1]_{\mathbf{G}}$ y por lo tanto $\beta(x_1,y) = 1 = \beta(x_2,y)$, para todo $x_1, x_2 \in I, y \in [0,1]_{\mathbf{G}}$.

Supongamos que el resultado es válido para términos de complejidad menor que k y veamos que vale para un término de complejidad k.

Sea β un término de complejidad k. Luego tenemos dos casos para considerar:

1. $\beta = \gamma \cdot \delta$, con γ y δ términos de complejidad menor que k.

   En este caso tenemos que si $\beta(I, 1) = 1$ entonces $\gamma(I, 1) = 1$ y $\delta(I, 1) = 1$.

   Luego, sabemos por hipótesis inductiva que para $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 \neq x_2$,

   $$\beta(x_1, y) = \gamma(x_1, y) \cdot \delta(x_1, y) = \gamma(x_2, y) \cdot \delta(x_2, y) = \beta(x_2, y),$$

   para todo $y \in [0, 1]_{\mathbf{G}}$, por lo que queda probado el enunciado para este caso.

2. $\beta = \gamma \to \delta$, con γ y δ términos de complejidad menor que k.

   Como por hipótesis tenemos que para todo subtérmino β de α se tiene que o bien $\beta(I, 1) \in [0, 1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ o bien $\beta(I, 1) = 1$, entonces tenemos solamente tres casos para considerar para γ y δ:

   a) Si $\gamma(I, 1) = 1$ y $\delta(I, 1) = 1$: por hipótesis inductiva tenemos que para $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 \neq x_2$,

   $$\beta(x_1, y) = \gamma(x_1, y) \to \delta(x_1, y) = \gamma(x_2, y) \to \delta(x_2, y) = \beta(x_2, y).$$

   b) Si $\gamma(I, 1) \subseteq [0, 1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ y $\delta(I, 1) \subseteq [0, 1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$: por la Proposición 2.4.6 tenemos que

   $$\gamma(x, y) = \gamma(x, 1) \text{ para todo } y \in [0, 1]_{\mathbf{G}}, \text{ y}$$
   $$\delta(x, y) = \delta(x, 1) \text{ para todo } y \in [0, 1]_{\mathbf{G}}.$$

   Como $\beta(x_1, 1) = \beta(x_2, 1) = 1$ entonces tenemos que

   $$\gamma(x_1, 1) \leq \delta(x_1, 1)$$

   y

   $$\gamma(x_2, 1) \leq \delta(x_2, 1),$$

   pero usando las igualdades anteriores, obtenemos:

   $$\beta(x_1, y) = \gamma(x_1, y) \to \delta(x_1, y) = \gamma(x_1, 1) \to \delta(x_1, 1) = 1$$

   y

   $$\beta(x_2, y) = \gamma(x_2, y) \to \delta(x_2, y) = \gamma(x_2, 1) \to \delta(x_2, 1) = 1,$$

   por lo que queda probado el enunciado para este caso.

   c) Si $\gamma(I, 1) \subseteq [0, 1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ y $\delta(I, 1) = 1$: Se puede probar siguiendo las ideas de los dos casos anteriores.

$\square$

Lema 2.4.11. *Sea $x_0 \in (a, b)$ tal que $\alpha(x_0, y) = y$, para todo $y \in [0, 1]_{\boldsymbol{G}}$ y $\alpha(x, y) = 1$, para todo $y \in [0, 1]_{\boldsymbol{G}}$ y $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$. Entonces x_0 es racional.*

Demostración. Sea $S = \{\beta : \beta \in BL - term$ y β es subtérmino de $\alpha\}$.

Veremos que existe $\beta \in S$ tal que

$$\beta_{I\times[0,1]_{\mathbf{G}}}(x,1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = x_0, \\ \\ d \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\} & \text{si} \quad x \in [a,b] \setminus \{x_0\}, \end{cases} \tag{2.4.4}$$

es decir, que sobre los puntos de $(x_1, x_2) \times \{1\}$ el término toma valores en $[0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ y en $([a,b] \setminus (a,b)) \times \{1\}$ toma el valor 1.

Supongamos, por el contrario, que para todo $\beta \in S$ y todo $x \in I$ se tiene que $\beta(x,1) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ o bien $\beta(x,1) \in [0,1]_{\mathbf{G}}$. Entonces, por el Lema 2.4.9, tenemos que $\alpha(x_0, y) = \alpha(x, y)$, para todo $y \in [0,1]_{\mathbf{G}}$, y todo $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$, lo cual contradice el enunciado.

Por lo tanto, debe existir un subtérmino β de α que cumple 2.4.4, y como

$$\beta_{I\times[0,1]_{\mathbf{G}}}(x_0,1) = 1$$

y

$$\beta_{I\times[0,1]_{\mathbf{G}}}(x,1) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\} \text{ para todo } x \in I \setminus \{x_0\},$$

donde $\beta_{[0,1]^2_{\mathbf{MV}}}$ conicide con una función de McNaughton, debemos tener que x_0 es racional. □

El resultado anterior se puede generalizar para el caso de intervalos abiertos:

Lema 2.4.12. *Sean $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$, tales que $\alpha(x,y) = y$, para todo $x \in (x_1,x_2)$ e $y \in [0,1]_{\boldsymbol{G}}$ y $\alpha(x,y) = 1$, para todo $x \in [a,b] \setminus (x_1,x_2)$ e $y \in [0,1]_{\boldsymbol{G}}$. Entonces x_1, x_2 son racionales.*

Demostración. Sea $S = \{\beta : \beta \in BL - term$ y β es subtérmino de $\alpha\}$.

Veremos que existe $\beta \in S$ tal que

$$\beta_{I\times[0,1]_{\mathbf{G}}}(x,1) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\} \;\text{ para todo }\; x \in (x_1,x_2), \tag{2.4.5}$$

$$\beta_{I\times[0,1]_{\mathbf{G}}}(x,1) = 1, \;\text{ para todo }\; x \in [a,b] \setminus (x_1,x_2). \tag{2.4.6}$$

Supongamos, por el contrario, que para todo $\beta \in S$ y todo $x \in I$ se tiene que $\beta(x,1) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ o bien $\beta(x,1) \in [0,1]_{\mathbf{G}}$. Entonces, por el Lema 2.4.9, tenemos que $\alpha(x_0, y) = \alpha(x, y)$, para todo $y \in [0,1]_{\mathbf{G}}$, y todo $x_0 \in (x_1,x_2)$ $x \in [a,b] \setminus (x_1,x_2)$, lo cual contradice el enunciado.

Por lo tanto, debe existir un subtérmino β de α que cumple 2.4.5 y 2.4.6. Como $\beta \in BL-term$, sabemos que su evaluación sobre $I \times \{1\}$ es una función de McNaughton. Luego, debemos tener que los intervalos $[a, x_1]$ y $[x_2, b]$, que son el conjunto de unos de la función de McNaughton, deben tener extremos racionales, por lo que x_1 y x_2 son racionales. $\square$

Observación 2.4.13. Por lo tanto, dado $\alpha \in BL - term$ con las hipótesis antes mencionadas, tenemos que los conjuntos

$$A_\alpha = \{x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} : \alpha_{\mathfrak{A}^2}(x, y) = 1, \ \forall y \in [0,1]_{\mathbf{G}}\}$$

y

$$B_\alpha = \{x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} : \alpha_{\mathfrak{A}^2}(x, y) = y, \ \forall y \in [0,1]_{\mathbf{G}}\}$$

se pueden escribir como una unión finita de puntos racionales e intervalos abiertos con extremos racionales.

Esto motiva el siguiente resultado:

Proposición 2.4.14. Dado $\alpha \in BL-term$ en dos variables y a, b dos números racionales tales que $[a, b] \times \{1\} \subseteq \alpha^{-1}_{[0,1]^2_{\mathbf{MV}}}(\{1\})$, existe una triangulación unimodular Δ de $[a, b] \times \{1\}$ tal que para todo $S \in \Delta$, $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(S, y) = y$ o $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(S, y) = 1$, para todo $y \in [0,1]_{\mathbf{G}}$.

Demostración. Por los Lemas 2.4.11 y 2.4.12 existe una triangulación racional $\bar{\Delta}$ de $[a, b]$ tal que para todo $x \in S^\circ \in \bar{\Delta}$ e $y \in [0,1]_{\mathbf{G}}$ se tiene que o bien $\alpha_{\mathfrak{A}}(x, y) = y$ o bien $\alpha_{\mathfrak{A}}(x, y) = 1$.

Por el Teorema 2.8 de [36] sabemos que existe una subtriangulación unimodular Δ de $\bar{\Delta}$. Por lo tanto, tenemos que para todo $x \in S^\circ \in \Delta$ e $y \in [0,1]_{\mathbf{G}}$ se tiene que o bien $\alpha_{\mathfrak{A}}(x, y) = y$ o bien $\alpha_{\mathfrak{A}}(x, y) = 1$. $\square$

En forma análoga a la Proposición anterior, se puede probar el siguiente resultado:

Proposición 2.4.15. Dado $\alpha \in BL-term$ en dos variables y a, b dos números racionales tales que $\{1\} \times [a, b] \subseteq \alpha^{-1}_{[0,1]^2_{\mathbf{MV}}}(\{1\})$, existe una triangulación unimodular Δ de $\{1\} \times [a, b]$ tal que para todo $S \in \Delta$, $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(x, S) = x$ o $\alpha_{\mathfrak{A}^2}(x, S) = 1$, para todo $x \in [0,1]_{\mathbf{G}}$.

Estos resultados motivan las siguientes definiciones:

Definición 2.4.16. Dada una función de McNaughton en dos variables $f(x, y)$, diremos que $g : [0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}} \to \mathfrak{A}$ es una **función f-y-G-McNaughton** si cumple que:

1. Para cada $x_0 \in [0,1]_{\mathbf{MV}}$, si $f(x_0, 1) < 1$ entonces $g(x_0, y) = f(x_0, 1)$, para todo $y \in [0,1]$.

2. Existe una triangulación unimodular Δ de $1_{f,x}$ que determina símplices $S_1, \ldots, S_n$ y n funciones de Gödel en una variable $g_1, \ldots, g_n$ tales que $g(x,y) = g_i(y)$, para todo x en el interior de S_i.

Observación 2.4.17. Análogamente se pueden definir las funciones f-x-G-McNaughton y probar proposiciones similares donde se fija la variable y_0.

Caracterización de funciones en $Free_{\mathcal{MG}}(2)$

Definición 2.4.18. Dadas las funciones $f \in Free_{\mathcal{MV}}(2)$, $g \in Free_{\mathcal{G}}(2) \cup \{0\}$ y h_x, h_y funciones de f-x-G-McNaughton y f-y-G-McNaughton respectivamente, diremos que una función $\mathscr{F} : \mathfrak{A}^2 \to \mathfrak{A}$ está dada por una cuádrupla (f, h_x, h_y, g) si es de la forma:

$$\mathscr{F}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ h_x(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}} \\ h_y(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{G}} \times [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ g(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{G}} \times [0,1]_{\mathbf{G}} \end{cases} \tag{2.4.7}$$

cuando $\mathscr{F}(1,1) = 1$,

o

$$\mathscr{F}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ h_x(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}} \\ h_y(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{G}} \times [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{G}} \times [0,1]_{\mathbf{G}} \end{cases} \tag{2.4.8}$$

cuando $\mathscr{F}(1,1) = 0$.

Basados en los resultados obtenidos en las secciones anteriores, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.4.19. *Dado un término $\alpha \in BL - term$ tenemos que la evaluación de α sobre las regiones $[0,1]^2_{\boldsymbol{MV}}$, $[0,1]_{\boldsymbol{MV}} \times [0,1]_{\boldsymbol{G}}$, $[0,1]_{\boldsymbol{G}} \times [0,1]_{\boldsymbol{MV}}$ y $[0,1]^2_{\boldsymbol{G}}$ está dado por una cuádrupla como en 2.4.18.*

Demostración. Se sigue de las Proposiciones 2.4.6, 2.4.7, 2.4.5, 2.4.14 y 2.4.15.

□

Tenemos entonces que dado un término $\alpha \in BL - term$, existe una cuádrupla $\mathscr{F} = (f, h_x, h_y, g)$ tal que $\alpha_{\mathfrak{A}} = \mathscr{F}$. Dedicaremos el resto de esta Sección a ver que para cada función $\mathscr{F} : \mathfrak{A}^2 \to \mathfrak{A}$ dada por una cuádrupla (f, h_x, h_y, g) existe un término $\alpha \in BL - term$ cuya evaluación sobre $\mathfrak{A}^2$ coincide con $\mathscr{F}$.

Lo que deseamos probar es que los valores de la función en cada región de dominio correspondiente son:

$h_x(x, y)$	$g(x, y)$
$f(x, y)$	$h_y(x, y)$

Para hallar este término demostraremos algunos lemas auxiliares, que nos permitirán definirlo sobre cada región.

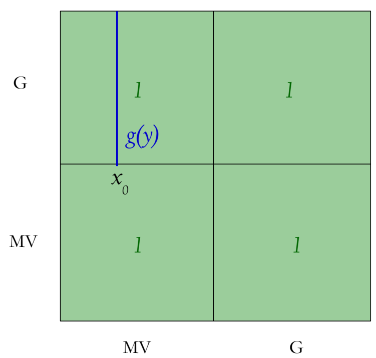
Notación 2.4.20. Dada una función $f : A \to B$, donde $1 \in B$, denotaremos por 1_f al conjunto

$$1_f = \{a \in A : f(a) = 1\}.$$

Lema 2.4.21. *Dada $g \in Free_{\mathcal{G}}(1)$ y un punto racional $x_0 \in [0, 1]_{\boldsymbol{MV}}$, existe un término μ_{x_0} en dos variables tal que la interpretación del término en $\mathfrak{A}$ satisface:*

$$\mu_{x_0\mathfrak{A}^2}(x, y) = \begin{cases} g(y) & si\ x = x_0 \quad y \in [0,1]_{\boldsymbol{G}} \\ 1 & \quad en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{2.4.9}$$

Gráficamente, lo que queremos hallar es:



Demostración. Como $x_0 \in [0,1]_{\mathbf{MV}}$ es un punto racional existe una $f \in Free_{\mathcal{MV}}(2)$ tal que $(x_0, 1) = [0,1]^2_{\mathbf{MV}} \cap 1_f$. Sea ϕ un término cuya interpretación coincide con f en $[0,1]^2_{\mathbf{MV}}$. Luego $\phi(x_0,1) = 1$ y para todo $x \neq x_0$ se tiene que $\phi(x,1) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$. Por la Proposición 2.4.6 y el Teorema 2.3.25 concluimos que existe $t \in Free_{\mathcal{G}}(1)$ tal que en la región $[0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}}$ se tiene que

$$\phi_{[0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}}}(x,y) = \begin{cases} t(y) & \text{si } x = x_0 \;\; y \in [0,1]_{\mathbf{G}} \\ \\ f(x,1) & \text{si } x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{x_0\}; \;\; y \in [0,1]_G. \end{cases} \tag{2.4.10}$$

Ahora consideremos el término ψ en una variable tal que la interpretación de ψ en $[0,1]_G$ coincide con la función $g \in Free_{\mathcal{G}}(1)$ dada en el enunciado del Teorema. El término $\varphi(x,y) = \neg\neg\phi(x,y) \wedge \psi(y)$ cuando es evaluado en la región $[0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}}$ satisface:

$$\varphi_{[0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}}}(x,y) = \begin{cases} g(y) & \text{si } x = x_0 \;\; y \in [0,1]_{\mathbf{G}} \\ \\ f(x,1) & \text{si } x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{x_0\}; \;\; y \in [0,1]_G. \end{cases} \tag{2.4.11}$$

Consideremos el término $\chi(x,y) = \neg\neg\varphi(x,y) \to \varphi(x,y)$. Claramente

$$\chi_{[0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}}}(x,y) = \begin{cases} g(y) & \text{si } x = x_0 \;\; y \in [0,1]_{\mathbf{G}} \\ \\ 1 & \text{si } x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{x_0\} y \in [0,1]_G. \end{cases} \tag{2.4.12}$$

Más aún, si consideramos

$$\mu(x,y) = \neg\neg x \vee \chi(x,y)$$

y lo evaluamos en el álgebra $\mathfrak{A}$ tenemos:

$$\mu_{x_0,\mathfrak{A}^2}(x,y) = \begin{cases} g(y) & \text{si } x = x_0 \;\; y \in [0,1]_{\mathbf{G}} \\ \\ 1 & \text{en otro caso .} \end{cases} \tag{2.4.13}$$

□

Simétricamente podemos ver que:

Lema 2.4.22. *Dada $g \in Free_{\mathcal{G}}(1)$ y un punto racional $y_0 \in [0,1]_{\boldsymbol{MV}}$, existe un término ν_{y_0} en dos variables tal que la interpretación del término en $\mathfrak{A}$ satisface:*

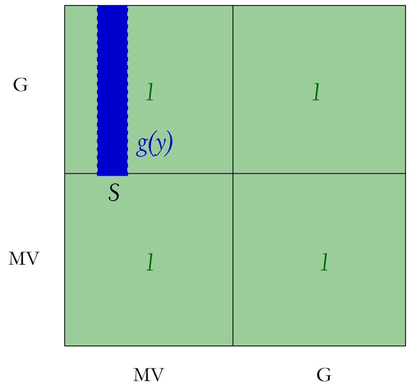
$$\nu_{y_0,\mathfrak{A}^2}(x,y) = \begin{cases} g(x) & \textit{si } x \in [0,1]_G \;\; y = y_0 \\ \\ 1 & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.4.14}$$

Lema 2.4.23. *Dada $g \in Free_{\mathcal{G}}(1)$ y S un simplex racional tal que $S \subseteq [0,1]_{\boldsymbol{MV}}$, existe un término γ_S en dos variables tal que la interpretación del término en $\mathfrak{A}$ satisface:*

$$\gamma_{S\mathfrak{A}^2}(x,y) = \begin{cases} g(y) & \text{si } (x,y) \in S^\circ \times [0,1]_{\boldsymbol{G}} \\ \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.4.15}$$

donde S° es el interior relativo del simplex S.

Gráficamente, queremos hallar un término cuya interpretación sobre $\mathfrak{A}^2$ sea:



Demostración. Como S° es un intervalo abierto contenido en $[0,1]$ con extremos racionales, sabemos que el complemento de S en $[0,1]$ es un poliedro racional, que llamaremos S^C. Usando el Corolario 2.10 de [36], tenemos que $S^C = \bar{f_S}^{-1}(\{0\})$, para alguna función de McNaughton en una variable $\bar{f_S}$. Consideremos la función de McNaughton $f_S = \neg\bar{f_S} = 1 - \bar{f_S}$. Ahora tenemos que $S^C = f_S^{-1}(\{1\})$. Si ϕ es un término que corresponde a f_S, y vemos su interpretación en el álgebra $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ tenemos que si $x \in [0,1]_{\mathbf{MV}}$:

$$\phi_{[0,1]_{\mathbf{MV}}}(x) = \begin{cases} a \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\} & \text{si} \quad x \in S^\circ \\ \\ 1 & \text{si} \quad x \in S^{0C} \end{cases}$$

Ahora consideremos el término compuesto $\phi(\neg\neg x)$ evaluado en el álgebra $\mathfrak{A}$. Claramente para $x \in [0,1]_{\mathbf{MV}}$ tenemos que $\phi(\neg\neg x) = \phi(x)$ y para $x \in [0,1]_G$ tenemos que $\phi(\neg\neg x) = \phi(1) = 1$. Luego, si tomamos $S \subseteq [0,1]_{\mathbf{MV}}$ para cada $x \in \mathfrak{A}$ tenemos que:

$$\phi_{\mathfrak{A}}(\neg\neg x) = \begin{cases} a \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\} & \text{si} \quad x \in S^\circ \\ \\ 1 & \text{si} \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como $g \in Free_{\mathcal{G}}(1)$ existe un término δ en una variable en el lenguaje de BL-álgebras sin el $\perp$ tal que g es la interpretación de δ. Cuando consideramos el término $\neg\neg\delta \to \delta$, y lo interpretamos en $\mathfrak{A}$ tenemos:

$$(\neg\neg\delta \to \delta)_{\mathfrak{A}}(y) = \begin{cases} g(y) & \text{si} \quad y \in [0,1]_{\mathbf{G}} \\ 1 & \text{si} \quad y \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \end{cases}$$

Finalmente, si consideramos el término

$$\gamma_S(x,y) = [(\neg\neg\delta(y) \to \delta(y)) \vee \phi(\neg\neg x)]$$

su interpretación en $\mathfrak{A}^2$ nos da:

$$\gamma_{S\mathfrak{A}}(x,y) = \begin{cases} g(y) & \text{si } x \in S^\circ, y \in [0,1]_{\mathbf{G}} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

□

Teorema 2.4.24. *Sea S un simplex en $[0,1]_{\boldsymbol{MV}} \times \{1\}$. Si S^0 es el interior del simplex S y g es una función de $Free_{\mathcal{G}}(1)$, entonces existe una función $\mathscr{F}_x \in Free_{\mathcal{MG}}(2)$ que satisface:*

$$\mathscr{F}_{x\mathfrak{A}^2}(x,y) = \begin{cases} g(y) & \textit{si } (x,y) \in S^0 \times [0,1]_{\boldsymbol{G}} \\ 1 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Sea $h_x : [0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}} \to \mathfrak{A}$ la función dada por:

$$h_x(x,y) = \begin{cases} g(y) & \text{si } (x,y) \in S^0 \times [0,1]_{\mathbf{G}} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Gráficamente buscamos un término γ cuya interpretación nos de:

$\neg\neg h_x \to h_x$	1
1	1

Como S es o bien un intervalo o bien un punto, usando los resultados de los Lemas 2.4.23 y 2.4.21 podemos construir un término en dos variables γ cuya evaluación en $\mathfrak{A}^2$ sea:

$$\gamma_{\mathfrak{A}^2}(x,y) = \begin{cases} g(y) & \text{si } (x,y) \in S^0 \times [0,1]_{\mathbf{G}} \\ \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.4.16}$$

Notemos que si S es un simplex de dimensión uno, como $S^0 = \{x_0\}$ tenemos que $\gamma = \mu_{x_0}$. Claramente la interpretación del término γ es la función $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(2)$ deseada. $\square$

Análogamente tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.4.25. *Sea S un simplex en $\{1\} \times [0,1]_{\boldsymbol{MV}}$. Si S^0 es el interior del simplex ($\{(x,y) \in [0,1]_{\boldsymbol{G}} \times S^\circ\}$) y g es una función de $Free_{\mathcal{G}}(1)$, entonces existe una función $\mathscr{F}_y \in Free_{\mathcal{MG}}(2)$ que satisface:*

$$\mathscr{F}_y(x,y) = \begin{cases} g(x) & \textit{si } (x,y) \in [0,1]_{\boldsymbol{G}} \times S^\circ \\ \\ 1 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Lema 2.4.26. *Dada una función $g \in Free_{\mathcal{G}}(2)$ existe $\mathscr{F}_g \in Free_{\mathcal{MG}}(2)$ que satisface:*

$$\mathscr{F}_g(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & \textit{si } (x,y) \in [0,1]^2_{\boldsymbol{G}} \\ \\ 1 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Gráficamente mirando las regiones del dominio, tenemos que encontrar un término β en dos variables tales que la interpretación de β en el álgebra $\mathfrak{A}^2$ sea:

1	$g(x,y)$
1	1

Consideremos los siguientes términos:

$$\beta_x = [(\neg\neg x \to x) \vee (\neg\neg y)] \to (\neg\neg x \to x)$$

cuya interpretación en el álgebra $\mathfrak{A}^2$ nos da:

1	x
1	1

y

$$\beta_y = [(\neg\neg y \to y) \vee (\neg\neg x)] \to (\neg\neg y \to y)$$

cuya interpretación en $\mathfrak{A}^2$ es:

1	y
1	1

Sea $\bar{\beta}$ el término cuya interpretación en $[0,1]_G$ coincide con g, esto es: $g(x,y) = \bar{\beta}_{[0,1]}(x,y)$ para todo $(x,y) \in [0,1]^2_{\mathbf{G}}$. Como $\bar{\beta}(1,1) = 1$, entonces tomamos $\beta(x,y) = \bar{\beta}(\beta_x, \beta_y)$ y concluimos la demostración. $\square$

Sea ahora $\mathscr{F}$ una función dada por la cuadrupla ordenada (f, h_x, h_y, g) donde $f \in Free_{\mathcal{MV}}(2)$, h_x es una función f-x-G-McNaughton, h_y es una función f-y-G-McNaughton y $g \in Free_{\mathcal{G}}(2)$. Explícitamente, para cada $(x,y) \in \mathfrak{A}^2$ la función está dada por:

$$\mathscr{F}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ h_x(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}} \\ h_y(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{G}} \times [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ g(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{G}} \times [0,1]_{\mathbf{G}} \end{cases} \tag{2.4.17}$$

Sabemos que existe un término $\bar{\alpha}$ cuya interpretación sobre $[0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{MV}}$ coinciden con $f(x,y)$. Sea $\alpha = \neg\neg\bar{\alpha}$. Por la Proposición 2.4.16 tenemos que

$$\alpha_{\mathfrak{A}}(x,y) = \begin{cases} \alpha_{[0,1]_{\mathbf{MV}}}(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{G}} \times [0,1]_{\mathbf{G}} \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}}, \text{ y } \alpha(x,1) = 1 \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{G}} \times [0,1]_{\mathbf{MV}}, \text{ y } \alpha(1,y) = 1 \\ \alpha_{[0,1]_{\mathbf{G}}}(x,1) & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \times [0,1]_{\mathbf{G}}, \text{ y } \alpha(x,1) < 1 \\ \alpha_{[0,1]_{\mathbf{G}}}(1,y) & \text{si} \quad (x,y) \in [0,1]_{\mathbf{G}} \times [0,1]_{\mathbf{MV}}, \text{ y } \alpha(1,y) < 1 \end{cases}$$

Consideremos ahora los términos:

1. $\gamma_1 = \alpha$
2. γ_2 es un término cuya interpretación en $\mathfrak{A}$ es la función $\mathscr{F}_x$ dada por el Teorema 2.4.24 correspondiente a la f-x-G-McNaughton h_x.
3. γ_3 es un término cuya interpretación en $\mathfrak{A}$ es la función $\mathscr{F}_y$ dada por el Teorema 2.4.25 correspondiente a la f-x-G-McNaughton h_y.
4. γ_4 es un término cuya interpretación en $\mathfrak{A}$ es la función $\mathscr{F}_g$ dada por el Lema 2.4.26 correspondiente a la función $g \in Free_{\mathcal{G}}(2)$.

Definimos el término β de dos variables dado por

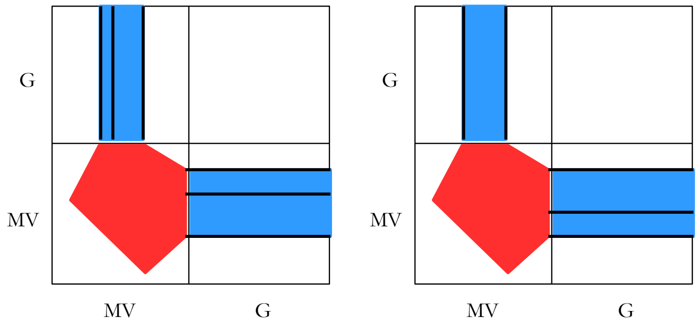
$$\beta = \bigwedge_{i=1}^{4} \gamma_i.$$

Luego la interpretación de β en el álgebra $\mathfrak{A}$ coincide con la función $\mathscr{F}$.

En conclusión, hemos visto que las funciones que están dadas por cuádruplas de la forma (f, h_x, h_y, g) están en $Free_{\mathcal{MG}}(2)$. Entonces tenemos el siguiente resultado, que permite caracterizar las funciones en nuestra álgebra libre en dos generadores:

Teorema 2.4.27. *$\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(2)$ si y solamente si $\mathscr{F}$ está dada por una cuádrupla de la forma (f, h_x, h_y, g).*

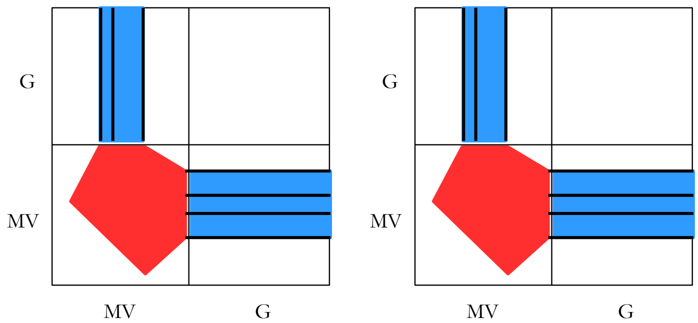
Sin embargo, puede ocurrir que dos cuádruplas distintas determinen la misma función. Esto se puede dar en el caso en que las funciones $h_{x,1}$, $h_{x,2}$ (o $h_{y,1}$, $h_{y,2}$) estén dadas por triangulaciones distintas, pero coincidan sobre cada punto, como se esquematiza en el siguiente diagrama, donde está indicado en rojo la región en la que las dos funciones toman el valor 1, y se puede ver que las triangulaciones de $\{1\} \times [0,1]_{\mathbf{MV}} \cup [0,1]_{\mathbf{MV}} \times \{1\}$ son distintas:



Para poder identificar las funciones en las que ocurre esto utilizaremos el siguiente resultado, que puede deducirse del Teorema 2.8 de [36]:

Teorema 2.4.28. *Si $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un poliedro racional y Σ_1, Σ_2 son dos triangulaciones unimodulares de P entonces existe una triangulación unimodular Δ de P tal que $T \in \Delta$ si y solamente si existen $T_1 \in \Sigma_1$, $T_2 \in \Sigma_2$ tales que $T = T_1 \cap T_2$.*

En el caso anterior es sencillo ver que existe una subtriangulación común a las dos triangulaciones. Y vistas de esta manera las funciones resultan ser iguales:



Observación 2.4.29. Notemos que para que dos funciones de $Free_{\mathcal{MG}}(2)$ coincidan sobre cada punto se debe cumplir que las funciones de $Free_{\mathcal{MV}}(2)$ asociadas a cada una deben ser iguales y en el caso de que el valor de las funciones en $(1,1)$ sea 1, también deben coincidir las funciones correspondientes en $Free_{\mathcal{G}}(n)$. Las únicas variaciones que puede haber son las triangulaciones unimodulares asociadas a las funciones en el resto del dominio.

Esta idea nos lleva a la siguiente definición:

Definición 2.4.30. Sean $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ dos funciones dadas por las cuádruplas $(f_1, h_{1_x}, h_{1_y}, g_1)$ y $(f_2, h_{2_x}, h_{2_y}, g_2)$ respectivamente, donde $f_1 = f_2 \in Free_{\mathcal{MV}}(2)$, $g_1 = g_2 \in Free_{\mathcal{G}}(2) \cup \{0\}$.

Además, sean $h_{1_x}, h_{2_x}, h_{1_y}, h_{2_y}$ funciones f_1-x-G-McNaughton y f_1-y-G-Mc-Naughton, respectivamente. Sean Δ_{1_x}, Δ_{2_x}, Δ_{1_y} y Δ_{2_y} las triangulaciones asociadas a h_{1_x}, h_{2_x}, h_{1_y} y h_{2_y}, respectivamente. Diremos que $\mathscr{F}_1$ y $\mathscr{F}_2$ determinan la misma función si existen subtriangulaciones unimodulares Δ_x de Δ_{1_x} y Δ_{2_x} y Δ_y de Δ_{1_y} y Δ_{2_y} tales que $\forall(1,y) \in S \in \Delta_y$, $h_{1_x}(x,y) = h_{2_x}(x,y)$ y $\forall(x,1) \in S \in \Delta_x$, $h_{1_y}(x,y) = h_{2_y}(x,y)$.

$Free_{\mathcal{MG}}(n)$

Al estudiar el problema en n variables debemos trabajar con puntos y subconjuntos de $\mathfrak{A}^n$. Para referirnos a ellos introduciremos alguna notación conveniente:

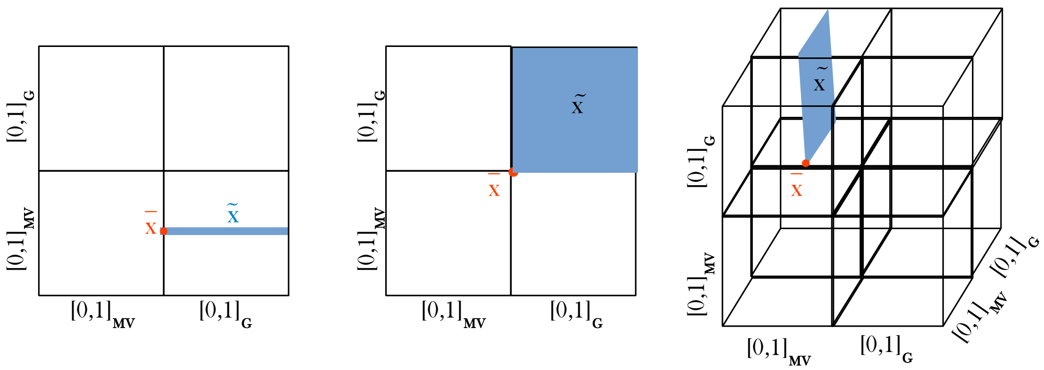
Notación 2.4.31. Si $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ definimos:

- $1_{\bar{x}} = \{i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = 1\}$
- $\|\bar{x}\| = |1_{\bar{x}}|$
- $\tilde{x} = \{\bar{z} \in \mathfrak{A}^n : z_j = x_j,$ para todo $j \notin 1_{\bar{x}},$ y $z_i \in [0,1]_{\mathbf{G}},$ para todo $i \in 1_{\bar{x}}\}$.
- Si $1_{\bar{x}} = \{j_1, \ldots, j_m\}$ y $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \tilde{x}$, definimos

$$\pi_m(\bar{z}) = (z_{j_1}, \ldots, z_{j_m}) \in [0,1]^m_{\mathbf{G}}.$$

- $G(\bar{x}) = \{\bar{y} \in [0,1]^m_{\mathbf{G}} : \bar{y} = \pi_m(\bar{z}),$ para $\bar{z} \in \tilde{x}\}$.

Ejemplo 10. *En el siguiente ejemplo se ven distintos casos de puntos $\bar{x} \in [0,1]^2_{\boldsymbol{MV}}$ y $\bar{x} \in [0,1]^3_{\boldsymbol{MV}}$ y el conjunto $\tilde{x} \subseteq \mathfrak{A}^2$ o $\tilde{x} \subseteq \mathfrak{A}^3$ asociados:*



De forma análoga a la Proposición 2.4.6 ahora debemos ver la relación que hay entre los valores al evaluar un término en un punto $\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ tal que $1_{\bar{x}} \neq \varnothing$ y los valores que toma el término al ser evaluado en $\tilde{x}$. El siguiente resultado es análogo al que Bova da en el Lema 67 en [8].

Proposición 2.4.32. Sea $\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ tal que $1_{\bar{x}} \neq \varnothing$ y α un término de n variables en $BL - term$. Luego tenemos que :

- Si $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = c \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = c$ para todo $\bar{z} \in \tilde{x}$,
- Si $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = 1$ entonces existe un término β en $H - term$ en $m = \|\bar{x}\|$ variables tal que $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = \beta_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z}))$ para todo $\bar{z} \in \tilde{x}$.

Demostración. Lo veremos por inducción en la complejidad del término α.

Si α es un término de complejidad 0, entonces hay cuatro casos para considerar:

1. Si $\alpha = 0$, entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{a}) = 0 \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$, para todo $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$.
2. Si $\alpha = x_i$, con $i \notin 1_{\bar{x}}$ entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{a}) = a_i \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$, para todo $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$.
3. Si $\alpha = x_i$, con $i \in 1_{\bar{x}}$ entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{a}) = a_i$, donde $g(\bar{x}) = x_i \in Free_{\mathcal{G}}(1)$, para todo $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$.
4. Si $\alpha = 1$, entonces $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{a}) = 1 \in [0,1]_{\mathbf{G}}$ y $g(\bar{z}) = 1 \in Free_{\mathcal{G}}(m)$, para todo $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$.

Asumamos que probamos el enunciado para todos los términos que satisfacen la hipótesis cuya complejidad es menor que $k > 0$. Sea α un término de complejidad $k \geq 2$. Debe ocurrir alguno de los siguientes casos:

1. $\alpha = \phi \cdot \psi$, con ϕ y ψ términos de complejidad menor que k.
2. $\alpha = \phi \to \psi$, con ϕ y ψ términos de complejidad menor que k.

Para cada uno de estos casos consideraremos las dos posibilidades del enunciado: $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = c \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ y $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = 1$:

1. *a*) Si $\alpha = \phi \cdot \psi$, con $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = c \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ entonces tenemos tres posibilidades:
      - Si $\phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = 1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = c$ entonces por hipótesis inductiva tenemos que existe un término β en $m = \|\bar{x}\|$ variables tal que $\phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = \beta_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z}))$ y $\psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = c$ para todo $\bar{z} \in \tilde{x}$, pero en ese caso $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = \phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) \cdot \psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = \beta_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z})) \cdot c = c$ pues $c < \beta_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z})) \in [0,1]_{\mathbf{G}}$ para todo $\bar{z} \in \tilde{x}$.
      - Si $\phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = c$ y $\psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = 1$, se puede probar el resultado de modo análogo al inciso anterior.
      - Si $\phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = c_1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = c_2$, con $c_1 \cdot c_2 = c$ entonces por hipótesis inductiva tenemos que $\phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = c_1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = c_2$ para todo $\bar{z} \in \tilde{x}$, por lo que $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = \phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) \cdot \psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = c_1 \cdot c_2 = c$, para todo $\bar{z} \in \tilde{x}$.

b) Si $\alpha = \phi \cdot \psi$, con $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = 1$, entonces debemos tener que $\phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = 1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = 1$, por lo que sabemos por hipótesis inductiva que existen BL-términos β y γ en $m = \|\bar{x}\|$ variables tales que $\phi(\bar{z}) = \beta_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z}))$ y $\psi(\bar{z}) = \gamma_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z}))$ para todo $\bar{z} \in \tilde{x}$. Luego, tenemos que $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = \phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) \cdot \psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = \beta_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z})) \cdot \gamma_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z})) = \beta \cdot \gamma_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z}))$, para todo $\bar{z} \in \tilde{x}$, donde $\beta \cdot \gamma$ es un BL-término en m variables.

2. *a*) Si $\alpha = \phi \to \psi$, con $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = c \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\}$ entonces tenemos que $\phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = 1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = c$, entonces sabemos por hipótesis inductiva que existe un BL-término en m variables tal que $\phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = \beta_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z}))$ y $\psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = c$, para todo $\bar{z} \in \tilde{x}$. Luego, $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = \phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) \to \psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = \beta_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z})) \to c = c$, pues $c < \beta_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z})) \in [0,1]_{\mathbf{G}}$, para todo $\bar{z} \in \tilde{x}$.

   b) Si $\alpha = \phi \to \psi$, con $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = 1$ debemos considerar dos posibilidades:

   - Si $\phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = c$ y $\psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = 1$, entonces sabemos por hipótesis inductiva que para todo $\bar{z} \in \tilde{x}$ existe un término $\beta \in H - term$ en m variables tal que $\psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = \beta_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z}))$ y $\phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = c$. Por lo tanto, tenemos que $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = \phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) \to \psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = c \to \beta_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z})) = 1$ pues $\beta_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z})) > c$. Y la función que es idénticamente 1 se puede asociar con el término $\top \in H - term$ y queda demostrado el enunciado para este caso.
   - Si $\phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = 1$ y $\psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = 1$ entonces tenemos por hipótesis inductiva que existen BL-términos β y γ en $m = \|\bar{x}\|$ variables tales que $\phi(\bar{z}) = \beta_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z}))$ y $\psi(\bar{z}) = \gamma_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z}))$ para todo $\bar{z} \in \tilde{x}$. Luego, tenemos que $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = \phi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) \to \psi_{\mathfrak{A}^n}(\bar{z}) = \beta_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z})) \to \gamma_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z})) = \beta \to \gamma_{\mathfrak{A}^m}(\pi_m(\bar{z}))$, para todo $\bar{z} \in \tilde{x}$, donde $\beta \to \gamma$ es un BL-término en m variables.

$\square$

Además, se puede extender a este caso general el resultado obtenido en la Proposición 2.4.14 que enunciamos a continuación:

Proposición 2.4.33. Sean $\alpha \in BL - term$ un término en n variables y C un simplex cerrado contenido en $\eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ tal que $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(C) = 1$.

Luego existe una triangulación unimodular Δ de C tal que para todo $S \in \Delta$ se cumple que $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\tilde{S}) = \pi_i$ o $\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\tilde{S}) = 1$, para $\tilde{S}$ la cilindrificación de S, $i \in 1_{\bar{x}}$, para $\bar{x}$ cualquier punto de S.

Los resultados anteriores motivan las siguiente definición, que extiende las definiciones de funciones f-x-G-McNaughton y f-y-G-McNaughton para el caso de $Free_{\mathcal{MG}}(2)$.

Definición 2.4.34. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m < n$. Dado $\bar{z} = (z_1, \dots, z_m, \dots, z_n) \in \mathfrak{A}^n$ escribiremos $\bar{x}$ y $\bar{y}$ para referirnos a $\bar{x} = (z_1, \dots, z_m)$, $\bar{y} = (z_{m+1}, \dots, z_n)$ y $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$. Sea $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$ tal que $U = \{\bar{x} : \bar{z} = (\bar{x}, \bar{1}) \in \mathfrak{A}^n : f(\bar{z}) = 1\} \neq \varnothing$ y sea Δ una triangulación unimodular de U. Si $g : [0,1]^m_{\mathbf{MV}} \times [0,1]^{n-m}_{\mathbf{G}}$ es una función tal que cumple:

- Si $f(\bar{x},\bar{1}) = 1$, entonces $g(\bar{x},\bar{y}) = g_S(\bar{y})$ para $g_S \in Free_{\mathcal{G}}(m)$, $\forall(\bar{x},\bar{1}) \in S^{\circ}$, con $S \in \Delta$.
- Si $f(\bar{x},\bar{1}) = c < 1$, entonces $g(\bar{x},\bar{y}) = c$.

diremos que g es una función f-$\{x_{m+1},\dots,x_n\}$-G-McNaughton.

Observemos que los resultados anteriores fueron escritos para el caso de la región $[0,1]^m_{\mathbf{MV}} \times [0,1]^{n-m}_{\mathbf{G}} \subseteq \mathfrak{A}^n$. Para verlo en general necesitamos algunas definiciones.

Definición 2.4.35. Definiremos el **borde relativo** de $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ como

$$\eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}} = \{\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} : 1_{\bar{x}} \neq \varnothing\}.$$

Además, dado V un subconjunto no vacío de $\{1,\dots,n\}$, diremos que R es una **componente asociada a** V de $\eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ si $R = \{\bar{x} \in \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}} : 1_{\bar{x}} = V\}$. En ese caso diremos que R es de dimensión $m = |V|$.

En los resultados anteriores consideramos la región $[0,1]^m_{\mathbf{MV}} \times [0,1]^{n-m}_{\mathbf{G}} \subseteq \mathfrak{A}^n$. Se pueden probar resultados análogos a 2.4.37 y 2.4.39 tomando permutaciones de las variables $x_1,\dots,x_n$ para regiones de la forma $\times_{i=1}^n[0,1]_{\mathbf{A}_i} \subseteq \mathfrak{A}^n \setminus \{[0,1]^n_{\mathbf{MV}},[0,1]^n_{\mathbf{G}}\}$, con $\mathbf{A}_i \in \{\mathbf{MV},\mathbf{G}\}$. Del mismo modo se pueden definir las funciones f-A-G-McNaughton, para $A \subsetneq \{x_1,\dots,x_n\}$, $A \neq \varnothing$, siguiendo la definición 2.4.34.

Como consecuencia de los resultados anteriores de obtiene el siguiente Teorema:

Teorema 2.4.36. *Dado un término $\alpha \in BL - term$ en n variables tenemos que la interpretación de α sobre $\mathfrak{A}^n$ nos da una función de $\mathscr{F} : \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{A}$ dada por una 2^n-upla*

$$(f,\{h_A : A \subsetneq \{x_1,\dots,x_n\}, A \neq \varnothing\},g),$$

donde $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$, h_A es una función f-A-G-McNaughton y $g \in Free_{\mathcal{G}}(n)$.

Explícitamente, para cada $\bar{x} \in \mathfrak{A}^n$ la función está dada por:

$$\mathscr{F}(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & si \quad (\bar{x}) \in [0,1]^n_{\boldsymbol{MV}} \\ h_A(\bar{x}) & si \quad (\bar{x}) \in \times_{i=1}^n[0,1]_{\boldsymbol{A}_i}, con\ \boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{G}\ sii\ \boldsymbol{A}_i \in A. \\ g(\bar{x}) & si \quad (\bar{x}) \in [0,1]^n_{\boldsymbol{G}} \end{cases} \tag{2.4.18}$$

Ahora queremos hallar, dada una 2^n-upla $\mathscr{F} : \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{A}$, un término $\alpha \in BL - term$ cuya interpretación sobre $\mathfrak{A}^n$ coincida con $\mathscr{F}$. Para esto construiremos algunos subtérminos primero.

Lema 2.4.37. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m < n$. Dado $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_m, \ldots, z_n) \in \mathfrak{A}^n$ escribiremos $\bar{x}$ y $\bar{y}$ para referirnos a $\bar{x} = (z_1, \ldots, z_m)$, $\bar{y} = (z_{m+1}, \ldots, z_n)$ y $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$.*

Si $g \in Free_{\mathcal{G}}(m)$ y S es un simplex racional tal que $S \subseteq ([0,1]_{\boldsymbol{MV}})^{n-m}$ existe un término $\mu_S \in BL - term$ en n variables tal que

$$\mu_{S_{\mathfrak{A}^n}}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} g(\bar{x}) & \text{si } \bar{x} \in \tilde{S}^{\circ}, \bar{y} \in [0,1]_{\mathbf{G}}^{n-m} \\ \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.4.19}$$

Demostración. Como $S \subseteq ([0,1]_{\mathbf{MV}})^{n-m}$ es un simplex racional y el complemento del interior de S, $[0,1]_{\mathbf{MV}}^{n-m} \setminus S$ también lo es, sabemos que existe un término $\phi \in BL - term$ tal que su interpretación sobre $[0,1]_{\mathbf{MV}}^{m} \times [0,1]_{\mathbf{G}}^{n-m}$ resulta ser:

$$\phi_{[0,1]_{\mathbf{MV}}^{m} \times [0,1]_{\mathbf{G}}^{n-m}}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} f(\bar{x}, \bar{y}) \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \setminus \{1\} & \text{si } \bar{x} \in \tilde{S}^{\circ}, \bar{y} \in [0,1]_{\mathbf{G}}^{n-m} \\ \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.4.20}$$

para una función $f \in Free_{\mathcal{MV}}(m)$ tal que $1_f = \{(\bar{x}, \bar{1}) \in [0,1]_{\mathbf{MV}}^{n} : \bar{x} \in S\}$.

Por otro lado, sabemos que existe un término $\psi \in H - term$ en $n - m$ variables tal que $\psi_{[0,1]_{\mathbf{G}}^{n-m}}(\bar{y}) = g(\bar{y})$, donde $g \in Free_{\mathcal{G}}(n - m)$ es la función dada en el enunciado.

Sea $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ el término en n variables dado por $\theta(\bar{x}, \bar{y}) = \phi(\bar{x}, \bar{y}) \vee \psi(\bar{y})$. Si evaluamos este término sobre $[0,1]_{\mathbf{MV}}^{m} \times [0,1]_{\mathbf{G}}^{n-m}$ tenemos:

$$\theta_{[0,1]_{\mathbf{MV}}^{m} \times [0,1]_{\mathbf{G}}^{n-m}}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} g(\bar{x}) & \text{si } \bar{x} \in \tilde{S}^{\circ}, \bar{y} \in [0,1]_{\mathbf{G}}^{n-m} \\ \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.4.21}$$

Si consideramos el término $\mu_S \in BL - term$ dado por

$$\mu_S(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\vee_{i=1}^{n-m} \neg\neg x_i\right) \vee (\neg\neg\theta(\bar{x}, \bar{y}) \to \theta(\bar{x}, \bar{y})),$$

tenemos:

$$\mu_{S_{\mathfrak{A}^n}}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} g(\bar{x}) & \text{si } \bar{x} \in \tilde{S}^{\circ}, \bar{y} \in [0,1]_{\mathbf{G}}^{n-m} \\ \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.4.22}$$

□

Notación 2.4.38. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m < n$. Dado $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_m, 1, \ldots, 1) \in \mathfrak{A}^n$ en el resto de este Capítulo escribiremos $\bar{x}$ y $\bar{1}$ para referirnos a $\bar{x} = (z_1, \ldots, z_m)$, $\bar{1} = (1, \ldots, 1)$ tales que $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{1})$.

Sea $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$ tal que $U = \{\bar{x} : \bar{z} = (\bar{x}, \bar{1}) \in \mathfrak{A}^n : f(\bar{z}) = 1\} \neq \varnothing$ y sea Δ una triangulación unimodular de U. Si $\alpha \in BL - term$ es un término en n variables tal que

$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}}(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{x},\bar{y})$ para todo $(\bar{x},\bar{y}) \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$, sabemos por la Proposición 2.4.32 que para todo simplex $S \in \Delta$, existe una función $g_S \in Free_{\mathcal{G}}(n-m)$ tal que la interpretación de α sobre $\tilde{S}$ resulta ser:

$$\alpha_{\tilde{S}}(\bar{x},\bar{y}) = g_S(\bar{x},\bar{y})$$

para todo $\bar{y} \in \tilde{S}$.

Esto motiva el siguiente resultado:

Lema 2.4.39. *Sea $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$ tal que $U = \{\bar{x} : \bar{z} = (\bar{x},\bar{1}) \in \mathfrak{A}^n : f(\bar{z}) = 1\} \neq \varnothing$ y sea Δ una triangulación unimodular de U.*

Luego existe un término $\alpha_U \in BL - term$ tal que:

$$\alpha_{U_{\mathfrak{A}^n}}(\bar{x},\bar{y}) = \begin{cases} g_S(\bar{y}) & si\ \bar{x} \in S^\circ, \bar{y} \in [0,1]^{n-m}_{\boldsymbol{G}} \\ \\ 1 & en\ otro\ caso, \end{cases} \tag{2.4.23}$$

para cada $S \in \Delta$.

Demostración. Basta con tomar $\alpha_U = \bigwedge_{S\in\Delta} \mu_S$ donde μ_S está dado como en el Lema 2.4.37. ☐

Lema 2.4.40. *Dada una función $g \in Free_{\mathcal{G}}(n)$ existe un término $\beta \in H - term$ en n variables tal que su interpretación sobre $\mathfrak{A}^n$ resulta ser:*

$$\beta_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = \begin{cases} g(\bar{x}) & si\ \bar{x} \in [0,1]^n_{\boldsymbol{G}} \\ \\ 1 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos el término

$$\beta_i = \left(\bigvee_{i\neq j} [(\neg\neg x_i \to x_i) \vee (\neg\neg x_j)] \right) \to (\neg\neg x_i \to x_i)$$

Si evaluamos ese término en $\mathfrak{A}^n$ obtenemos:

$$\beta_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = \begin{cases} x_i & \text{si } \bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{G}} \\ \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado, sabemos que dada una función $g \in Free_{\mathcal{G}}(n)$, existe un término $\bar{\beta} \in H - term$ en n variables tal que $\bar{\beta}_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}(\bar{x}) = g(\bar{x})$, para todo $\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{G}}$. Si tomamos

$$\beta(\bar{x}) = \bar{\beta}(\beta_1(\bar{x}), \ldots, \beta_n(\bar{x})),$$

tenemos que

$$\beta_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = \begin{cases} g(\bar{x}) & \text{si } \bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{G}} \\ \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

□

Notación 2.4.41. Dado un punto $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}^n$ escribiremos $\hat{x}$ para referirnos a:

$$\hat{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad x_i \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ \\ 1 & \text{si} \quad x_i \in [0,1]_{\mathbf{G}} \end{cases}$$

Teorema 2.4.42. *Sea $\mathscr{F} : \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{A}$ una función dada por la 2^n-upla*

$$(f,\{h_A : A \subsetneq \{x_1, \ldots, x_n\}, A \neq \varnothing\},g),$$

donde $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$, h_A es una función f-A-G-McNaughton y $g \in Free_{\mathcal{G}}(n)$. Explícitamente, para cada $\bar{x} \in \mathfrak{A}^n$ la función está dada por:

$$\mathscr{F}(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & si \quad (\bar{x}) \in [0,1]^n_{\boldsymbol{MV}} \\ \\ h_A(\bar{x}) & si \quad (\bar{x}) \in \times_{i=1}^n [0,1]_{\boldsymbol{A}_i}, \, con \ \boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{G} \ sii \ \boldsymbol{A}_i \in A. \\ \\ g(\bar{x}) & si \quad (\bar{x}) \in [0,1]^n_{\boldsymbol{G}}, \end{cases} \tag{2.4.24}$$

entonces $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$.

Demostración. Sabemos que existe un término $\bar{\alpha}$ cuya interpretación sobre $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ coincide con $f(\bar{x})$, para todo $\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$. Sea $\alpha = \neg\neg\bar{\alpha} \in BL - term$. Por la Proposición 2.4.32 tenemos que

$$\alpha_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{si} \quad (\bar{x}) \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} \\ \\ 1 & \text{si} \quad (\bar{x}) \in [0,1]^n_{\mathbf{G}} \\ \\ 1 & \text{si} \quad (\bar{x}) \in \mathfrak{A}^n \setminus \{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}, [0,1]^n_{\mathbf{G}}\}, \text{y } f(\hat{x}) = 1 \\ \\ f(\hat{x}) & \text{si} \quad (\bar{x}) \in \mathfrak{A}^n \setminus \{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}, [0,1]^n_{\mathbf{G}}\}, \text{y } f(\hat{x}) < 1 \end{cases}$$

Consideremos ahora los términos

- $\gamma_1 = \alpha$
- $\gamma_2 = \beta$ donde β está dado como en el Lema 2.4.40

- $\gamma_R = \alpha_U$ para $U = 1_f \cap R$, donde R es una componente de $\eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ y α_U está dado como en el Lema 2.4.39.

Definimos el término $\gamma \in BL - term$ en n variables como

$$\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \bigwedge_{R:R \text{ es componente de } \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} \gamma_R$$

Luego tenemos que $\gamma_{\mathfrak{A}^n}(\bar{x}) = \mathscr{F}(\bar{x})$, para todo $\bar{x} \in \mathfrak{A}^n$. □

Hemos visto entonces que las funciones que son de esta forma están en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$. Sin embargo, como en el caso de 2 variables, puede ocurrir que dos n^2-uplas distintas $\mathscr{F}_1 = (f_1, \bar{h}_1, g_1)$ $\mathscr{F}_2 = (f_2, \bar{h}_2, g_2)$ determinen la misma función (donde tenemos $f_1, f_2 \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$, $g_1, g_2 \in Free_{\mathcal{G}}(n)$ y $\bar{h}_1, \bar{h}_1$ representan las funciones f_i-A-G-McNaughton para todos los subconjuntos A de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ distintos de los conjuntos total y vacío). Esto ocurre en el caso en que $f_1 = f_2$ y se tienen dos triangulaciones unimodulares distintas Δ_1 y Δ_2 de $\eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}} \cap 1_{f_1}$ tales que para cualquier $\bar{x} \in \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}} \cap 1_{f_1}$ $h_{1_A}(\tilde{x}) = h_{2_A}(\tilde{x})$ para h_{i_A} una función f_i-A-G-McNaughton con A un subconjunto de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ distintos de los conjuntos total y vacío.

Nuevamente, para identificar estas funciones recurriremos al Teorema 2.4.28 que asegura que existe una subtriangulación unimodular Δ común a Δ_1 y Δ_2. Utilizando este resultado, definimos:

Definición 2.4.43. Sean $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ dos funciones dadas por las 2^n-uplas $\mathscr{F}_1 = (f_1, \bar{h}_1, g_1)$ $\mathscr{F}_2 = (f_2, \bar{h}_2, g_2)$ donde $f_1, f_2 \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$, $g_1, g_2 \in Free_{\mathcal{G}}(n)$ y $\bar{h}_1, \bar{h}_1$ representan las funciones f_i-A-G-McNaughton para todos los subconjuntos A de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ distintos de los conjuntos total y vacío. Sean Δ_1 y Δ_2 las triangulaciones asociadas a las respectivas funciones. Diremos que $\mathscr{F}_1$ y $\mathscr{F}_2$ determinan la misma función si $f_1 = f_2$, $g_1 = g_2$ y existe una subtriangulación unimodular Δ común a Δ_1 y Δ_2 tal que $\forall \bar{x} \in \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$, $h_{1_{|1_{\bar{x}}|}}(\tilde{x}) = h_{2_{|1_{\bar{x}}|}}(\tilde{x})$, donde $h_{i_{|\bar{x}|}}$ representa la función f-A-G-McNaughton donde $x_i \in A$ si y solamente si $i \in |x|$ para $i = 1, 2$.

Por lo tanto, y como conclusión del Capítulo, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.4.44. *Una función $\mathscr{F} : \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{A}$ está en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ si y solamente si $\mathscr{F}$ está dada por la 2^n-upla*

$$(f, \{h_A : A \subsetneq \{x_1, \ldots, x_n\}, A \neq \varnothing\}, g).$$

2.5. Funciones MG-básicas

Las funciones de McNaughton pueden ser escritas en términos de otras funciones más sencillas. Estas funciones están presentadas en la Definición 5.7 de [36]:

Definición 2.5.1. Sea Δ una triangulación unimodular de un poliedro racional $P \subseteq [0,1]^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Para cada vértice v de (un simplex de) Δ, sea $h_v : P \to [0,1]$ la función dada por:

1. h_v es lineal sobre todo simplex T de Δ;
2. $h_v(v) = 1/den(v)$;
3. $h_v(w) = 0$ para todo vértice $w \neq v$ de Δ.

Cada función h_v se dice que es un **Schauder hat** de Δ en el vértice v. Diremos también que v es un vértice de h_v. El conjunto $\mathcal{H}_\Delta$ de Schauder hats de Δ se llama **base de Schauder** de Δ.

Por construcción cada $h_v \in \mathcal{H}_\Delta$ es continua.

En el Teorema 5.8 de [36] se presenta el siguiente resultado:

Teorema 2.5.2. *Sean $P \subseteq [0,1]^n$ un poliedro racional y Δ una triangulación unimodular de P, con $\mathcal{H}_\Delta = \{h_1, \ldots, h_s\}$ su base de Schauder asociada. Luego $\mathcal{H}_\Delta$ es un conjunto generador de los elementos no nulos de la MV-álgebra*

$$\mathcal{M}(P) = \{f \upharpoonright P : f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)\}.$$

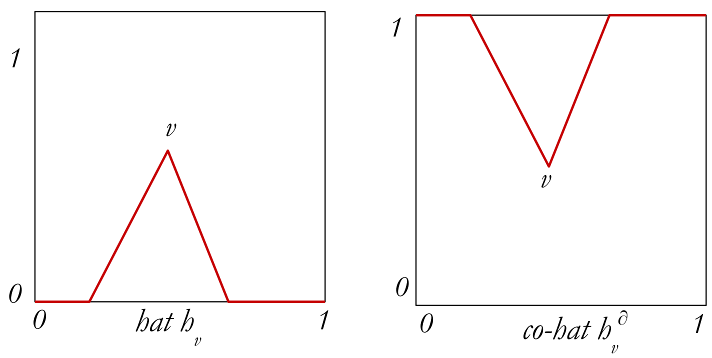
Dada una función $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$, es posible escribirla como suma de Schauder hats (con la operación $x \oplus_{\mathbf{MV}} y = min\{x + y, 1\}$) de la siguiente manera:

$$f = \bigoplus_{i \in I\ \mathbf{MV}} m_i h_i$$

donde los h_i son Schauder hats para $i \in I$ y $m_i \in \mathbb{N}$.

Existe una dualidad entre MV-álgebras que permite asociar a cada MV-álgebra $A = \langle A, \oplus_{\mathbf{MV}}, \neg, 0\}$ su dual $A^\partial = \langle A, \cdot, \neg, 1\rangle$, utilizando la aplicación $\cdot^\partial : a \mapsto \neg a$. Usando esta idea en [4] definen los **Schauder co-hats** como funciones de la forma h^∂, donde h es un Schauder hat.

Observación 2.5.3. Usamos la notación $\oplus_{\mathbf{MV}}$ para la operación de la suma en lugar de la notación usual $\oplus$ para no confundir esta suma con la suma ordinal.



Aplicando el Teorema 4 de [4] al caso de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.5.4. *Para toda función $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$ se tiene que hay un conjunto de Schauder co-hats $\{h_i\}_{i\in I}$ y números naturales $\{m_i\}_{i\in I}$ tales que*

$$f = \cdot_{i\in I} h_i^{m_i}.$$

Nuestro objetivo es hallar funciones equivalentes a los Schauder co-hats en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$, que llamaremos **funciones MG básicas**. Para definirlas lo haremos siguiendo la misma estructura que utilizamos al definir las funciones en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$: definiremos funciones que coincidan con una función de McNaughton sobre $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ y las extendemos a $\mathfrak{A}^n$.

Definición 2.5.5. Si $h : [0,1]^n_{\mathbf{MV}} \to [0,1]_{\mathbf{MV}}$ es un Schauder co-hat, diremos que la función $f : \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{A}$ es la **función MG-básica** asociada a h si se tiene que:

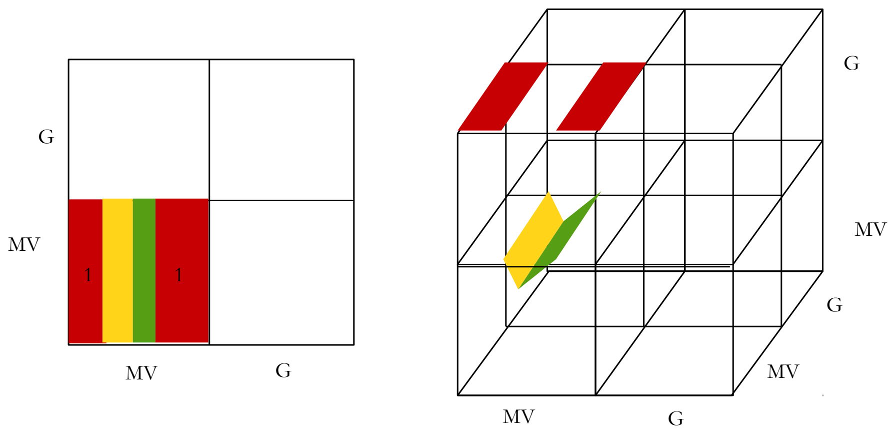
$$f(\bar{x}) = \begin{cases} h(\bar{x}) & \text{si } (\bar{x}) \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} \\ & \\ h(\hat{x}) & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde recordemos que escribimos $\hat{x}$ para referirnos a:

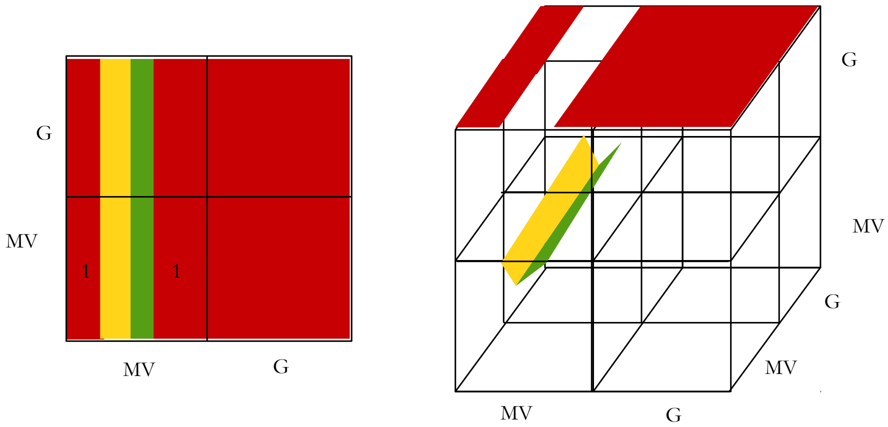
$$\hat{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad x_i \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ & \\ 1 & \text{si} \quad x_i \in [0,1]_{\mathbf{G}} \end{cases}$$

.

Ejemplo 11. *En las siguientes imágenes se puede ver la representación de un Schauder co-hat en $Free_{\mathcal{MV}}(2)$ sobre $\mathfrak{A}^2$. A la izquierda vemos cómo está dividido el dominio, y a la derecha la representación gráfica de dicha función.*



Si extendemos esta función a una función MG-básica, obtenemos:



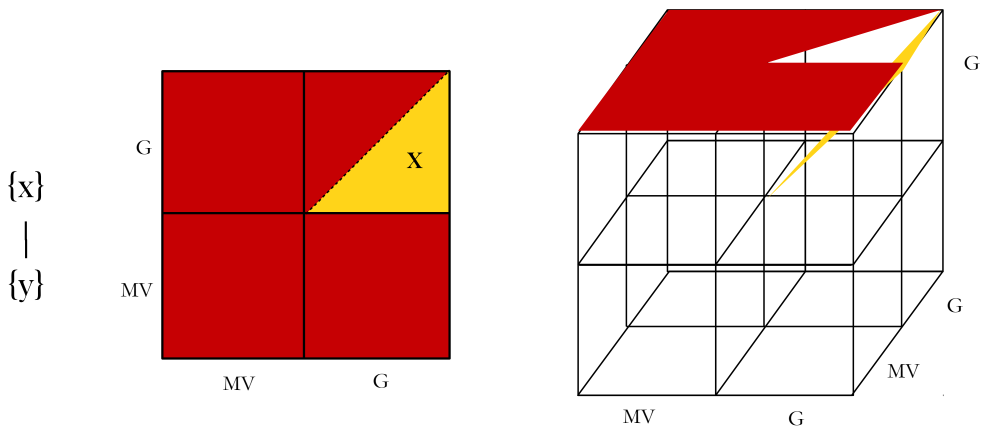
Para construir las funciones MG-básicas que nos permitan definir las funciones sobre $[0,1]^n_{\mathbf{G}}$, debemos considerar funciones asociadas a cadenas de Gödel.

Definición 2.5.6. Si $\mathbf{X} = \langle X^{\sigma(1)}, \ldots, X^{\sigma(r)} \rangle$ es una cadena de Gödel definimos la **función MG-básica asociada a la cadena X**, $f : \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{A}$, como:

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} f_{\mathbf{X}}(\bar{x}) & \text{si } \bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{G}} \\ 1 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $f_{\mathbf{X}}$ es la función en $Free_{\mathcal{G}}(n)$ asociada a la cadena $\mathbf{X}$.

Ejemplo 12. *Si tomamos la cadena de Gödel $\langle \{y\}, \{x\} \rangle$ en dos variables y graficamos la función asociada $f_{\mathbf{X}}$, tenemos que la función MG-básica asociada a la cadena $\boldsymbol{X}$ en $Free_{\mathcal{MG}}(2)$ es la que está graficada a continuación:*



El resto de las funciones MG-básicas estarán definidas en base a las funciones f-A-G-McNaughton, para A un subconjunto de $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Definición 2.5.7. Sea S un simplex racional contenido en una de las caras de $\eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$. Y sea $\mathbf{X}$ una cadena de Gödel cuyas componentes son subconjuntos de las variables $\{x_i : i \in 1_{\bar{x}}\}$, para $\bar{x}$ un punto cualquiera de S. Definimos la **función MG-básica asociada a** S y $\mathbf{X}$ como:

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} f_{\mathbf{X}}(\bar{x}) & \text{si } (\bar{x}) \in \tilde{S}^{\circ} \\ & \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

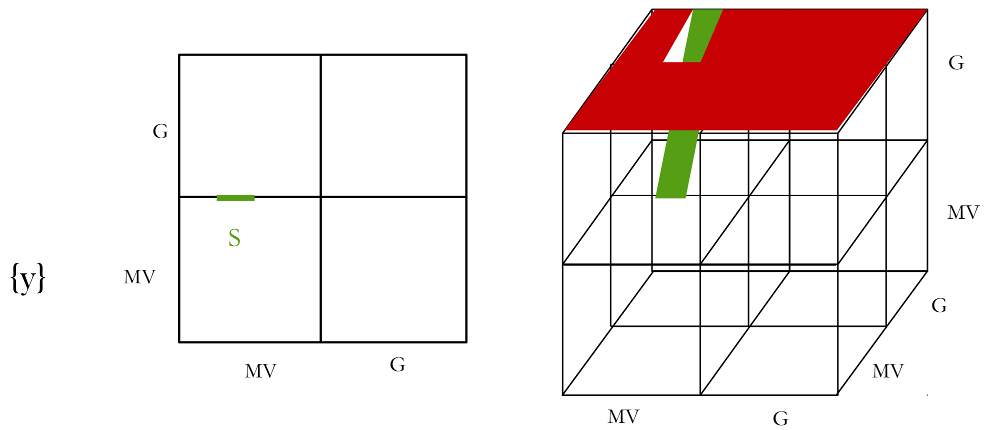
Ejemplo 13. *Si tomamos el simplex dado por el conjunto*

$$S = \left\{(x,1) \in [0,1]^2_{\boldsymbol{MV}} : \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}\right\} \subseteq \eth[0,1]^2_{\boldsymbol{MV}},$$

y la cadena de Gödel

$$\boldsymbol{X} = \langle\{y\}\rangle,$$

tenemos la siguiente función MG-básica:



Podemos observar que estas funciones se corresponden con los términos construidos en los Lemas 2.4.37 y 2.4.40, así como en el Teorema 2.5.4. Luego, podemos utilizarlas para constuir las funciones de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ a partir de ellas, del siguiente modo:

Sea $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ una función dada por la 2^n-upla $(f, \bar{h}, g)$, donde $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$, $g \in \mathcal{MG}(n)$ y $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_{2^n-2})$ es una (2^n-2)-upla de funciones f-A_i-G-McNaughton, para A_i subconjuntos de $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Utilizaremos las siguientes funciones MG-básicas para construir $\mathscr{F}$:

- Si $c_1, \ldots, c_l$ son los Schauder co-hats que permiten escribir

  $$f = c_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot c_l^{m_l}$$

  en el Teorema 2.5.4, tomaremos $F_1, \ldots, F_l$ las funciones MG-básicas asociadas a los Schauder co-hats $c_1, \ldots, c_l$ respectivamente, del mismo modo que hicimos en la Definición 2.5.5.

- Si $\mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^k$ son las cadenas de Gödel que conforman la foresta de Gödel asociada a la función $g \in Free_{\mathcal{G}}(n)$, tomaremos $G_1, \ldots, G_k$ las funciones MG-básicas asociadas a $\mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^k$ respectivamente, tal como en la Definición 2.5.6.

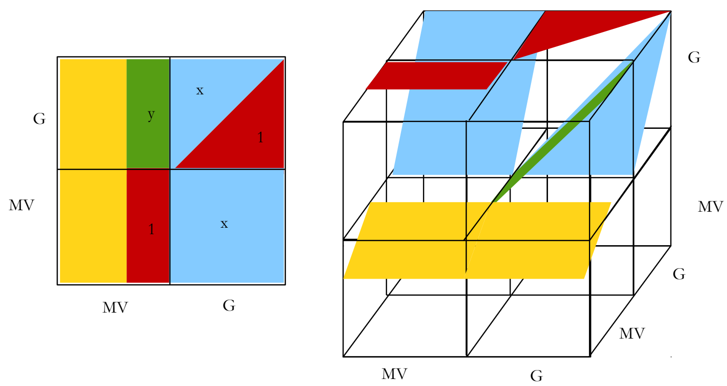
- Supongamos que Δ es una triangulación unimodular de $\eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$. Para cada $S \in \Delta$ sabemos que la restricción de $\mathscr{F}$ a $\tilde{S}^\circ$ coincide con una función de $Free_{\mathcal{G}}(m)$. Luego, para cada $S \in \Delta$ definimos $\mathbf{Y}^1, \ldots, Y^{ms}$ las cadenas que conforman la foresta de Gödel asociada a dicha función. Luego tomaremos $H_1, \ldots, H_p$ las funciones MG-básicas asociadas a cada cadena y simplex tal como están contruidas en la Definición 2.5.7.

Luego tenemos que

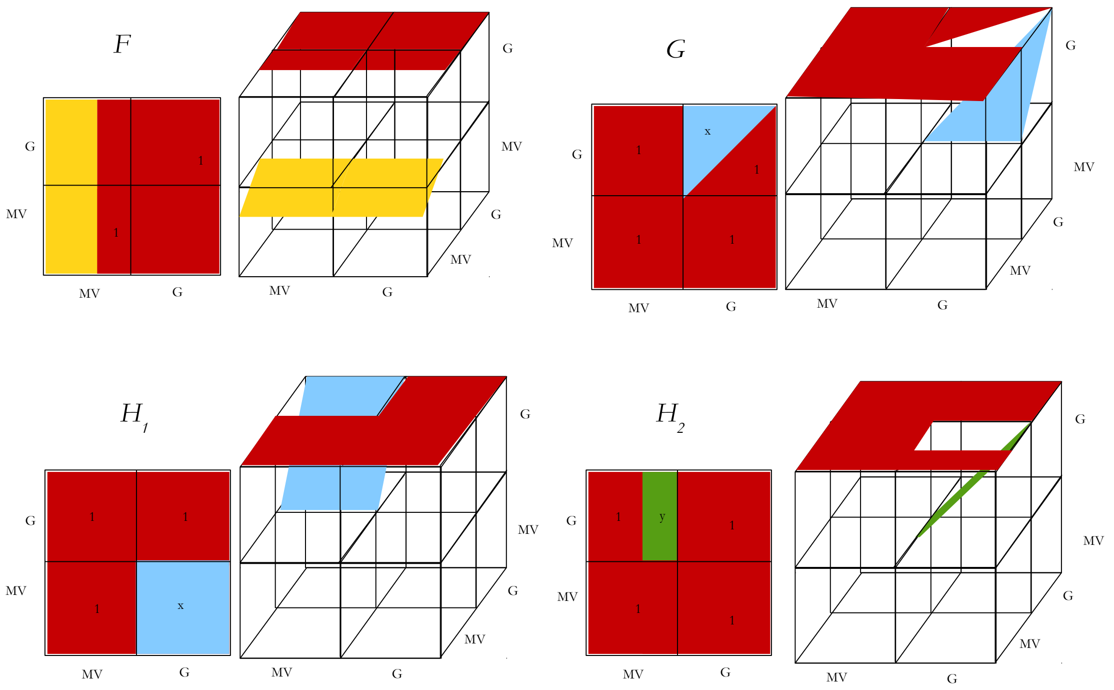
$$\mathscr{F} = F_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot F_l^{m_l} \cdot G_1 \cdot \ldots \cdot G_k \cdot H_1 \cdot \ldots \cdot H_p$$

y vemos que cualquier función de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ puede escribirse en términos de estas funciones MG-básicas.

Ejemplo 14. *Supongamos que queremos obtener en términos de funciones MG-básicas la siguiente función $\mathscr{F}$ de $Free_{\mathcal{MG}}(2)$:*



Luego, podemos definir las funciones MG-básicas F, G, H_1 y H_2 dadas por las siguientes gráficas:



Tenemos entonces que $\mathscr{F} = F \cdot G \cdot H_1 \cdot H_2$.

Capítulo 3

Filtros en $\mathcal{MG}$-álgebras

Hemos visto que las BL-álgebras surgieron como las álgebras de Lindembaum a partir de determinados axiomas, de un modo similar a las MV-álgebras a partir de la lógica de Łukasiewicz. La teoría de filtros tiene un rol fundamental en el estudio de estas álgebras asociadas a lógicas ya que ciertos filtros se corresponden con distintos conjuntos de fórmulas demostrables. En [27] Hájek introdujo los conceptos de filtros y filtros primos de BL-álgebras y usando estos filtros probó la completitud de la lógica básica.

Nuestro objetivo en este capítulo será estudiar distintos tipos de filtros. Comenzaremos con los filtros maximales, para lo cual recordaremos primero los resultados de filtros maximales para MV-álgebras, luego presetntaremos los filtros maximales en $Free_{\mathcal{G}}(n)$ y finalmente caracterizaremos los filtros maximales en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$. En la siguiente sección estudiaremos los filtros primos. En este caso nuevamente presentaremos primero los filtros primos en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ y $Free_{\mathcal{G}}(n)$ y finalmente usaremos esos resultados para caracterizar los filtros primos en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$. Para esto utilizaremos fuertemente el hecho de que cualquier filtro primo está contenido en un único filtro maximal, y eso nos permitirá utilizar la caracterización de los filtros maximales que damos previamente. Finalmente estudiaremos los filtros principales, que serán necesarios en el próximo capítulo para caracterizar las álgebras finitamente presentadas.

3.1. Introducción

Definición 3.1.1. Un **filtro implicativo** de una BL-álgebra (o hoop básico) $\mathbf{A}$ es un subconjunto $F \subseteq A$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\top \in F$,

2. Si $x \in F$ y $x \to y \in F$ entonces $y \in F$.

Diremos que un filtro implicativo es un **filtro propio** si $F \neq A$, que es un **filtro primo** si dados dos elementos $a, b \in A$, si $a \vee b \in F$ implica que $a \in F$ o $b \in F$, que es un **filtro maximal** si es propio y ningún filtro propio de $\mathbf{A}$ lo contiene en forma estricta y diremos que F es **principal** si $F = \{x \in \mathbf{A} : x \geq a\}$ para algún $a \in \mathbf{A}$.

Observación 3.1.2. En este capítulo nos referiremos siempre a filtros implicativos, por lo que en muchos contextos escribiremos simplemente filtro para referirnos a un filtro implicativo.

Llamaremos $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ al conjunto de filtros primos maximales de $\mathbf{A}$ y $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ al conjunto de filtros primos de $\mathbf{A}$.

Los filtros implicativos caracterizan las congruencias en las BL-álgebras. En efecto, en el Lema 2.3.14 de [27] está probado que si F es un filtro implicativo de una BL-álgebra $\mathbf{A}$ entonces la relación $\equiv_F$ definida en A como

$$x \equiv_F y \text{ si y solamente si } x \to y \in F \text{ e } y \to x \in F$$

es una congruencia sobre $\mathbf{A}$. Más aún, $F = \{x \in A : x \equiv_F 1\}$. Recíprocamente, si $\equiv$ es una relación de congruencia sobre A, entonces el conjunto $F = \{x \in A : x \equiv 1\}$ es un filtro implicativo, y $x \equiv y$ si y solamente si $x \to y \equiv 1$ e $y \to x \equiv 1$. Por lo tanto, la correspondencia

$$F \mapsto \equiv_F$$

es una biyección del conjunto de filtros implicativos de $\mathbf{A}$ en el conjunto de congruencias de $\mathbf{A}$.

3.2. Filtros maximales

Para estudiar los filtros maximales en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ comenzaremos estudiando los filtros maximales en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$, luego los del álgebra $Free_{\mathcal{G}}(n)$, para finalizar con aquellos en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$.

Filtros maximales en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$

Los filtros maximales en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ están estudiados en [13], pero aquí lo presentaremos haciendo énfasis en algunos aspectos geométricos.

Para caracterizar los filtros maximales utilizaremos el siguiente resultado, conocido como propiedad de arquimedianidad:

Lema 3.2.1. *Para todo $x \in [0,1]_{\boldsymbol{MV}} \setminus \{1\}$ y toda constante $c \in (0,1)$, existe un número natural n tal que $x^n = x \cdot \ldots \cdot x < c$.*

El siguiente Lema permite caracterizar los filtros maximales en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$. Si bien los resultados se deducen de la Definición 6.3.1 y el Teorema 6.3.2 de [13] igualmente los presentaremos con el objetivo de que la Tesis resulte más autocontenida.

Lema 3.2.2. *Sea $\bar{x} \in [0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}$. Luego*

$$MV_{\bar{x}} = \{f \in Free_{\mathcal{MV}}(n) : f(\bar{x}) = 1\}$$

es un filtro maximal en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$.

Demostración. Observemos en primer lugar que $MV_{\bar{x}}$ es un filtro, pues se tiene que la función constante 1 está en $MV_{\bar{x}}$, además $MV_{\bar{x}}$ es un conjunto creciente, y si $f, g \in MV_{\bar{x}}$ entonces $f \cdot g \in MV_{\bar{x}}$, pues $f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) = 1 \cdot 1 = 1$. Por otro lado, $MV_{\bar{x}}$ es propio porque la función constante igual a 0 no está en $MV_{\bar{x}}$.

Veamos ahora que es maximal.

Supongamos que existe un filtro propio $G \subseteq Free_{\mathcal{MV}}(n)$ tal que $MV_{\bar{x}} \subsetneq G$. Luego, existen funciones $g, f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$ tales que $g(\bar{x}) < 1$, con $g \in G$ y $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n) \setminus G$.

Por el Lema 3.2.1 sabemos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(\bar{x})^n < f(\bar{x})$, y como g^n es una función en G (por ser el filtro cerrado por la operación $\cdot$), $(g^n \to f)(\bar{x}) = 1$, por lo que $g^n \to f \in MV_{\bar{x}} \subseteq G$, y entonces deberíamos tener que $f \in G$, lo que contradice la hipótesis de que G es un filtro propio.

Por lo tanto $MV_{\bar{x}}$ es un filtro maximal. $\square$

A pesar de que el resultado anterior es conocido dejamos la demostración porque utilizaremos estas mismas ideas más adelante.

Teorema 3.2.3. *Los filtros maximales de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ son aquellos de la forma*

$$M_{\bar{x}} = \{f \in Free_{\mathcal{MV}}(n) : f(\bar{x}) = 1\}$$

para un $\bar{x} \in [0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}$.

El resultado anterior se puede hallar en la Proposición 3.4.7 de [13].

Filtros maximales en $Free_{\mathcal{G}}(n)$

Los filtros en $Free_{\mathcal{G}}(n)$ también son subconjuntos crecientes del álgebra. Debido a esto, coinciden con los filtros del retículo (donde el producto es el ínfimo). Para definirlos veremos que se corresponden con subconjuntos de funciones que son mayores o iguales a una dada. Es decir, que son todos filtros principales.

Esto se debe a que la variedad de álgebras de Gödel es localmente finita y por lo tanto las álgebras finitamente generadas son finitas. Luego $Free_{\mathcal{G}}(n)$ es finita y todos los filtros son principales.

Lema 3.2.4. *Si $\boldsymbol{X} = \langle X^1, \ldots, X^r\rangle$ es una cadena de Gödel definiremos el conjunto*

$$M_{\mathbf{X}} = \{f \in Free_{\mathcal{G}}(n) : f(\bar{x}) \geq x_j, \text{ para todo } \bar{x} \in R_{\mathbf{X}} \text{ y } x_j \in X^2\}.$$

Luego $M_{\mathbf{X}}$ es un filtro en $Free_{\mathcal{G}}(n)$.

Demostración. Veamos que $M_{\mathbf{X}}$ es un filtro:

La función que para todo $\bar{x}$ toma el valor 1 está en $M_{\mathbf{X}}$, pues $1 > x_j$, para $x_j \in X^2$.

Supongamos que f y g son dos funciones de $Free_{\mathcal{G}}(n)$ tales que f y $f \to g$ están en $M_{\mathbf{X}}$. Veamos que $g \in M_{\mathbf{X}}$.

Como f y $f \to g$ están en $M_{\mathbf{X}}$, sabemos que para todo $\bar{x} \in R_{\mathbf{X}}$ se tiene que $f(\bar{x}) \geq x_j$ y $(f \to g)(\bar{x}) \geq x_j$, para $x_j \in X^2$. Supongamos que para algún punto $\bar{y} \in R_{\mathbf{X}}$ se tiene que $g(\bar{y}) = x_i \in X^1$. En ese caso tendríamos que $(f \to g)(\bar{y}) = f(\bar{y}) \to g(\bar{y}) = x_j \to x_i = x_i$, pues $x_i < x_j$. Pero esto es absurdo, pues $(f \to g)(\bar{y}) = x_j > x_i$ por hipótesis.

Por lo tanto probamos que $M_{\mathbf{X}}$ es un filtro. □

Observación 3.2.5. En general los conjuntos de la forma

$$\{f \in Free_{\mathcal{G}}(n) : f(\bar{x}) \geq x_j, \text{ para todo } \bar{x} \in R_{\mathbf{X}}\}$$

son todos filtros en $Free_{\mathcal{G}}(n)$, para cualquier x_j. Sin embargo lo probamos para el caso de una variable $x_j \in X^2$ dado que estos filtros serán maximales, como veremos más adelante.

Observación 3.2.6.

1. Si $\mathbf{X} = \langle X^1, X^2, \ldots, X^r\rangle$ e $\mathbf{Y} = \langle Y^1, Y^2, \ldots, Y^s\rangle$ son dos cadenas tales que $X^1 = Y^1$ y $X^2 = Y^2$ (es decir que ambas tienen como subcadena $\langle X^1, X^2\rangle$), entonces $M_{\mathbf{X}} = M_{\mathbf{Y}}$.

2. Si bien la cadena $\mathbf{X} = \langle X^1, X^2, \ldots, X^r\rangle$ no es la única que determina el filtro $M_{\mathbf{X}}$, hay una cadena de 2 eslabones, que llamaremos **2-cadena** $\langle X^1, X^2\rangle$ que determina el mismo filtro $M_{\langle X^1, X^2\rangle}$.

3. Sea $\mathbf{X} = \langle X^1, X^2, \ldots, X^r\rangle$ una cadena de Gödel y $\bar{x} \in R_{\mathbf{X}}$, entonces

   $$M_{\mathbf{X}} = \{f \in Free_{\mathcal{G}}(n) : f(\bar{x}) \geq \pi_j(\bar{x}) = x_j, x_j \in X^2\}$$

   es decir, podemos identificar $M_{\mathbf{X}}$ con las funciones de Gödel que en un punto son mayores o iguales al valor de las variables que están en el punto $\bar{x}$. Este punto no es único, por ese motivo identificamos los filtros con regiones dadas por cadenas de Gödel.

Ahora que hemos definido las 2-cadenas, podemos probar que los conjuntos de la forma $M_{\mathbf{X}}$ dados como en el Lema 3.2.4 son filtros maximales.

Lema 3.2.7. *Si $\boldsymbol{X} = \langle X^1, \ldots, X^r \rangle$ es una cadena de Gödel el filtro*

$$M_{\mathbf{X}} = \{f \in Free_{\mathcal{G}}(n) : f(\bar{x}) \geq x_j, \text{ para todo } \bar{x} \in R_{\mathbf{X}} \text{ y } x_j \in X^2\}$$

es maximal en $Free_{\mathcal{G}}(n)$.

Demostración. En el Lema 3.2.4 vimos que $M_{\mathbf{X}}$ es un filtro. Veamos que es maximal.

Supongamos que G es otro filtro propio de $Free_{\mathcal{G}}(n)$ que contiene en forma estricta a $M_{\mathbf{X}}$. Luego existen funciones $g \in G \setminus M_{\mathbf{X}}$ y $f \in Free_{\mathcal{G}}(n) \setminus G$.

En este caso tenemos que existe un punto $\bar{x} \in R_{\mathbf{X}}$ tal que $g(\bar{x}) = x_i \in X^1$, pues por la forma que tienen las funciones de $Free_{\mathcal{G}}(n)$ (ver el Lema 2.3.11) sabemos que la restricción de g a $R_{\mathbf{X}}$ coincide con la proyección sobre una variable $x_i \in X^1$.

Por otro lado, se debe cumplir que $f(\bar{y}) = y_i \in X^1$ y sabemos entonces que f y g deben coincidir sobre $R_{\mathbf{X}}$ con la proyección sobre una variable de X^1 por la forma que tienen las funciones de $Free_{\mathcal{G}}(n)$. Pero entonces $(g \to f)(\bar{x}) = 1$ y por lo tanto $f \to g \in M_{\mathbf{X}} \subseteq G$ y como G es un filtro se tiene que cumplir que $f \in G$, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto $M_{\mathbf{X}}$ es un filtro maximal. $\square$

Teorema 3.2.8. *Los filtros maximales de $Free_{\mathcal{G}}(n)$ son aquellos de la forma $M_{\mathbf{X}}$ para $\boldsymbol{X}$ una 2-cadena de Gödel .*

Demostración. Supongamos que F es un filtro maximal en $Free_{\mathcal{G}}(n)$ y supongamos que F no está dado por una cadena de Gödel como en el Lema 3.2.4.

Luego, para cualquier cadena de Gödel $\mathbf{X} = \langle X^1, \ldots, X^r \rangle$ en las variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$, existe una función $f_{\mathbf{X}} \in F$ tal que $f_{\mathbf{X}}(\bar{x}) = \pi_j(\bar{x}) = x_j \in X^1$, para todo $\bar{x} \in R_{\mathbf{X}}$.

Sea $f = \displaystyle\bigwedge_{\substack{\mathbf{X}\,:\,\mathbf{X} \text{ es cadena de Gödel} \\ \text{en las variables}\{x_1,\ldots,x_n\}}} f_{\mathbf{X}}.$

Luego $f \in F$, pero para todo $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n_{\mathbf{G}}$ tenemos que $f(\bar{x}) = \min_{i=1}^{n} x_i$ y por lo tanto $F = Free_{\mathcal{G}}(n)$ (pues para toda función $g \in Free_{\mathcal{G}}(n), g \geq f$).

Pero esto contradice la hipótesis de que F es maximal.

Por lo tanto, los filtros de la forma $M_{\mathbf{X}}$, dados por una cadena de Gödel como en el Lema 3.2.4 son los filtros maximales de $Free_{\mathcal{G}}(n)$. $\square$

Luego, podemos notar lo siguiente:

Observación 3.2.9. Dada una 2-cadena de Gödel $\mathbf{X}$, si definimos la función $f_{\mathbf{X}} \in Free_{\mathcal{G}}(n)$ como

$$f_{\mathbf{X}}(\bar{x}) = \begin{cases} x_i \in X^2 & \text{si } \bar{x} \in R_{\mathbf{X}} \\ \\ min\{x_1, \ldots, x_n\} & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.2.1}$$

tenemos que $M_{\mathbf{X}}$ es el filtro principal generado por $f_{\mathbf{X}}$.

Corolario 3.2.10. *Hay una correspondencia biunívoca entre los filtros maximales en $Free_{\mathcal{G}}(n)$ y las 2-cadenas de Gödel (cadenas de dos eslabones).*

Filtros maximales en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$

Para estudiar los filtros maximales de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ veremos primero cómo es su restricción a $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$, lo que nos permitirá usar la caracterización de los filtros maximales para $Free_{\mathcal{MV}}(n)$.

Dado un filtro $F \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ y un punto $\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$, fijaremos la siguiente notación para el resto de esta sección:

$$M_{\bar{x}} = \{\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(n) : \mathscr{F}(\bar{x}) = 1\}$$

$$MV_{\bar{x}} = \{f \in Free_{\mathcal{MV}}(n) : f(\bar{x}) = 1\}$$

$$F_{MV} = \{f \restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} : f \in F\}$$

$$F_{G,\bar{x}} = \{f \restriction_{\hat{x}} : f \in F\}.$$

Recordemos por otro lado algo de notación que hemos usado en 2.4.41: dado un punto $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}^n$ escribimos $\hat{x}$ para referirnos a:

$$\hat{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{si } \quad x_i \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ \\ 1 & \text{si } \quad x_i \in [0,1]_{\mathbf{G}} \end{cases}$$

Además, dada una función $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$, denotaremos por $f^\sharp$ a la función dada por:

$$f^\sharp(\bar{y}) = \begin{cases} f(\bar{y}) & \text{si } \quad \bar{y} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} \\ \\ f(\hat{y}) & \text{si } \quad \bar{y} \in \mathfrak{A}^n \setminus [0,1]^n_{\mathbf{MV}}, \end{cases}$$

donde $f^\sharp \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$. Claramente $f^\sharp$ es la función más grande en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ tal que su restricción a $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ coincide con f, ya que para todo punto de $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ ambas funciones coinciden y sobre los puntos de la cilindrificación de $\eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}} \cap f^{-1}(1)$ la función $f^\sharp$ toma el valor 1.

Por último, dado un filtro $G \subseteq Free_{\mathcal{MV}}(n)$, denotaremos por G^{cil} al subconjunto de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ dado por:

$$\mathscr{F} \in G^{cil} \text{ si y solamente si } \mathscr{F}\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} \in G.$$

Claramente G^{cil} es un filtro de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$.

Daremos algunos lemas a continuación que usaremos más adelante para caracterizar los filtros maximales y primos en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$.

Lema 3.2.11. *Si $F \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ es un filtro entonces*

$$F_{MV} = \{\mathscr{F}\restriction_{[0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}} : \mathscr{F} \in F\}$$

es un filtro en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$.

Demostración. Veamos que F_{MV} es filtro: Claramente la función que es idénticamente 1 sobre $[0,1]_{\mathbf{MV}^n}$ está en F_{MV}, porque es la restricción de la que toma el valor 1 sobre $\mathfrak{A}^n$, que está en F por ser filtro.

Supongamos que $g \in F_{MV}$ y $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$ es tal que $f \geq g$ y veamos que $f \in F_{MV}$.

Como $g \in F_{MV}$, sabemos que existe $\tilde{g} \in F$ tal que $\tilde{g}\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} = g$. Sea $f^\sharp \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ la función definida de modo tal que $f^\sharp\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} = f$. Tenemos además que $f^\sharp \geq \tilde{g}$, lo cual implica que $f^\sharp \in F$ (dado que F es un filtro). Por lo tanto $f^\sharp\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} = f \in F_{MV}$.

Supongamos que $f, g \in F_{MV}$ y veamos que $f \cdot g \in F_{MV}$.

Como $f, g \in F_{MV}$, sabemos que existen $\tilde{f}, \tilde{g} \in F$ tales que $\tilde{f}\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} = f$ y $\tilde{g}\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} = g$. Como F es un filtro, $\tilde{f} \cdot \tilde{g} \in F$, pero tenemos que $\tilde{f} \cdot \tilde{g}\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} = f \cdot g$, por lo que $f \cdot g \in F_{MV}$. $\square$

Observación 3.2.12. Notemos que $(M_{\bar{x}})_{MV} = MV_{\bar{x}}$.

Ahora que hemos fijado notación y probado algunos resultados preliminares para filtros, veamos qué ocurre en el caso de los filtros maximales.

Lema 3.2.13. *Si $F \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ es un filtro maximal entonces*

$$F_{MV} = \{f\restriction_{[0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}} : f \in F\}$$

es un filtro maximal en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$.

Demostración. Sabemos que F_{MV} es filtro por el Lema 3.2.11.

Veamos ahora que F_{MV} es un filtro maximal. Supongamos, por el contrario, que existe un filtro $G \subsetneq Free_{\mathcal{MV}}(n)$ tal que $F_{MV} \subsetneq G$.

Sea G^{cil} el filtro de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ dado por:

$$f \in G^{cil} \text{ si y solamente si } f\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} \in G$$

Tenemos que $F \subsetneq G^{cil}$ y además $G^{cil} \neq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ (pues, por ejemplo, la función que es idénticamente 0 no está en G^{cil}). Y esto contradice la hipótesis de que F es un filtro maximal.

Por lo tanto, F_{MV} es un filtro maximal en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$. □

Luego sabemos, por el Lema 3.2.7, que si $F \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ es un filtro maximal, existe $\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ tal que $F_{MV} = MV_{\bar{x}}$, donde F_{MV} es el filtro maximal definido como en el Lema 3.2.13. Veamos que dado un filtro maximal $G \subseteq Free_{\mathcal{MV}}(n)$, existe un filtro en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ tal que las restricciones de las funciones del filtro en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ a $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ están en el filtro G.

Lema 3.2.14. *Sea $F \subseteq Free_{\mathcal{MV}}(n)$ un filtro maximal. Luego $F^{cil} \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ es maximal.*

Demostración. Sea G un filtro contenido propiamente en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ tal que $F^{cil} \subseteq G$. Consideremos $F = F^{cil}_{MV} \subseteq G_{MV}$. Luego tenemos que o bien $G_{MV} = F$ o bien $G_{MV} = Free_{\mathcal{MV}}(n)$, puesto G_{MV} es un filtro y F es maximal.

Si $G_{MV} = F$ entonces $G \subseteq G^{cil}_{MV} = F^{cil}$. Como ya teníamos que $F^{cil} \subseteq G$ tenemos que $G = F^{cil}$.

Si $G_{MV} = Free_{\mathcal{MV}}(n)$ veremos que $G = Free_{\mathcal{MG}}(n)$.

Basta con ver que la función que es idénticamente 0 (que denotaremos $\bar{0}_{MG}$) está en G. Pero como $G_{MV} = Free_{\mathcal{MV}}(n)$ entonces $\bar{0}_{MV} \in G_{MV}$, donde $\bar{0}_{MV}$ denota la función que toma el valor 0 sobre todos los puntos de $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$.

Pero esto implica que $\bar{0}_{MG} \in G$ (porque, por la Proposición 2.4.32 la única función en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ cuya proyección sobre $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ es $\bar{0}_{MV}$ es la función $\bar{0}_{MG}$). □

Teorema 3.2.15. *Existe una correspondencia biyectiva entre los puntos de $[0,1]^n$ y los filtros maximales de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$.*

Demostración. Identificaremos $[0,1]^n$ con $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ y probaremos que hay una correspondencia biyectiva entre puntos de $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ y filtros maximales de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$.

Sea $\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$. El filtro $M_{\bar{x}}$ es un filtro maximal pues $M_{\bar{x}} = MV^{cil}_{\bar{x}}$ (por el Lema 3.2.14).

Por otro lado, si $G \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ es un filtro maximal, vimos en el Lema 3.2.13 que G_{MV} también es un filtro maximal. Luego, existe un punto $\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ tal que $G_{MV} = MV_{\bar{x}}$. Y por la demostración del Lema 3.2.14 tenemos que $G = M_{\bar{x}}$. □

Observación 3.2.16. Observemos que a diferencia de los filtros maximales en $Free_{\mathcal{G}}(n)$ que son subconjuntos propios de $Free_{\mathcal{G}}(n)$, en este caso la restricción de las funciones de un filtro maximal en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ dado por un punto $\bar{x} \in \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ con $|1_{\bar{x}}| = m$ a la cilindrificación $\tilde{x}$ de Gödel es isomorfa al álgebra libre $Free_{\mathcal{G}}(m)$.

3.3. Filtros primos

Recordemos que en una BL-álgebra $\mathbf{A}$, un filtro $F \subseteq A$ se dice **primo** si dados dos elementos $a, b \in A$, si $a \vee b \in F$ entonces $a \in F$ o $b \in F$.

Una propiedad que utilizaremos más adelante es la siguiente:

Proposición 3.3.1. Si $\mathbf{A}$ es un hoop básico, son equivalentes:

1. $F \subseteq A$ es un filtro primo.
2. El cociente A/F está totalmente ordenado.

Demostración. Supongamos que $F \subseteq A$ es un filtro primo y sean $a, b \in A$ dos elementos cuyas clases $a/F, b/F$ no son comparables. Como $\mathbf{A}$ es un hoop básico, sabemos que verifica la ecuación
$$(a \to b) \vee (b \to a) = 1.$$
Luego, tenemos que $(a \to b) \vee (b \to a) \in F$ y como por hipótesis tenemos que F es primo, se debe cumplir que $a \to b \in F$ o $b \to a \in F$. Si cocientamos por F, tenemos que eso implica que $(a \to b)/F = 1/F$ o $(b \to a)/F = 1/F$.

Supongamos que $(a \to b)/F = 1/F$. En este caso, tenemos que

$$(a \vee b)/F = ((a \to b) \to b)/F = 1 \to b/F = b/F,$$

por lo que $a/F \leq b/F$.

Si, por el contrario, $(b \to a)/F = 1/F$, podríamos probar de modo análogo que $b/F \leq a/F$.

Por lo tanto A/F es totalmente ordenado y queda probada la primera implicación.

Para probar la recíproca, supongamos que A/F es totalmente ordenado y veamos que F es un filtro primo.

Sean $a, b \in A$ tales que $a \vee b \in F$. Entonces tenemos que $(a \vee b)/F = a/F \vee b/F = 1$. Pero como A/F es totalmente ordenado, debe cumplirse entonces que $a/F = 1/F$ o $b/F = 1/F$, pero esto implica que $a \in F$ o $b \in F$, por lo que F es un filtro primo. $\square$

Nuestro objetivo es estudiar los filtros primos en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$. Para esto, como en los casos anteriores, estudiaremos primero los filtros primos en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ y en $Free_{\mathcal{G}}(n)$.

Filtros primos en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$

Esta sección está basada en el trabajo [12], adaptando los resultados de ideales primos al caso de filtros primos. Por tal motivo, omitiremos muchas de las demostraciones, que pueden ser realizadas modificando adecuadamente las demostraciones de [12].

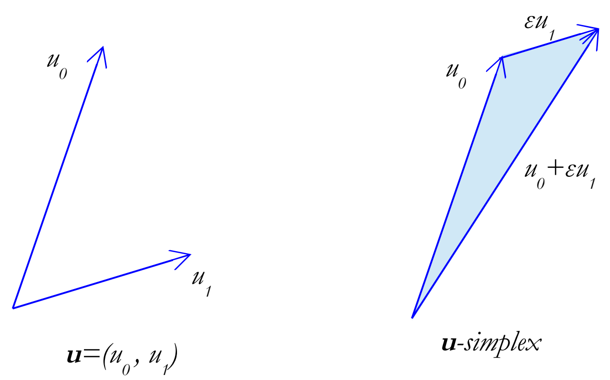
Definición 3.3.2. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq t \leq n$. Llamaremos **índice** a la $(t+1)$-upla de vectores $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_t)$ en $\mathbb{R}^n$ tales que $u_1, \ldots, u_t$ son linealmente independientes y para algunos valores $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t > 0$ el simplex

$$T = conv\{u_0, u_0 + \epsilon_1 u_1, \ldots, u_0 + \epsilon_1 u_1 + \ldots + \epsilon_t u_t\}$$

está contenido en $[0,1]^n$. Diremos que un T de esta forma es un **u-simplex**. Y definimos $F_{\mathbf{u}} \subseteq Free_{\mathcal{MV}}(n)$ como:

$$f \in F_{\mathbf{u}} \text{ si y solamente si el conjunto } f^{-1}(\{1\}) \text{ contiene algún } \mathbf{u}\text{-simplex.}$$

Para cada $j = 0, \ldots, t$ escribiremos u^j como una abreviatura de $(u_0, \ldots, u_j)$. Como u^j es un índice, los u^j-símplices y los conjuntos F_{u^j} están bien definidos.



Proposición 3.3.3. Si T_1 y T_2 son **u**-símplices entonces $T_1 \cap T_2$ contiene un **u**-simplex.

Proposición 3.3.4. $F_{\mathbf{u}}$ es un filtro de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$.

Demostración. La función que toma constantemente el valor 1, está trivialmente en $F_{\mathbf{u}}$.

Ahora, si $f \in F_{\mathbf{u}}$ y $f \to g \in F_{\mathbf{u}}$, veamos que $g \in F_{\mathbf{u}}$. Por definición, sabemos que existen **u**-símplices T' y T'' tales que $f(T') = 1$ y $(f \to g)(T'') = 1$. Por la Proposición 3.3.3, existe un **u**-simplex T tal que $T \subseteq T' \cap T''$. Ahora, como $f(T) = 1$ y $(f \to g)(T) = 1$, debemos tener que $g(T) = 1$ y por lo tanto $g \in F_{\mathbf{u}}$. $\square$

Como veremos en la Proposición 3.3.10, $F_{\mathbf{u}}$ es un filtro primo. Recíprocamente, en el Corolario 3.3.21 veremos que todo filtro primo F de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ es de la forma $F = F_{\mathbf{u}}$ para un índice $\mathbf{u}$.

Notación 3.3.5. Salvo que indiquemos lo contrario, todo hiperplano afín H será racional. Es decir, H será de la forma $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n m_i x_i = m_0\}$ para $m_0, m_1, \ldots, m_n$ números enteros, donde no todos los números $m_1, \ldots, m_n$ son cero. A partir de ahora el símbolo H denotará un hiperplano racional afín en algún espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Cada hiperplano H determinará dos semiespacios cerrados que denotaremos por H^+ y H^- respectivamente:

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \textstyle\sum_{i=1}^n m_i x_i \geq m_0\} \text{ y } H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \textstyle\sum_{i=1}^n m_i x_i \leq m_0\}.$$

Las triangulaciones $\mathcal{T}$ que consideraremos en esta sección serán todas unimodulares (ver [13] 9.1.1). Además, la unión de los símplices de $\mathcal{T}$ siempre coincidirá con un n-cubo $[0,1]^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, por lo que en muchos momentos omitiremos los términos unimodular o del n-cubo. Diremos que $\mathcal{U}$ es un refinamiento de $\mathcal{T}$ si $\mathcal{U}$ es una triangulación unimodular tal que cada simplex de $\mathcal{T}$ se puede escribir como la unión de símplices de $\mathcal{U}$. Diremos que la triangulación $\mathcal{T}$ respeta el hiperplano H si cada simplex de $\mathcal{T}$ está contenido en H^+ o en H^-.

El siguiente resultado nos será muy útil más adelante:

Lema 3.3.6. *Sean $\mathcal{T}$ una triangulación unimodular y $H \subseteq \mathbb{R}^n$ un hiperplano. Entonces existe un refinamiento $\mathcal{U}$ de $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{U}$ respeta H. Mas aún, dos triangulaciones cualesquiera tienen un refinamiento de ambas que respeta H.*

Una herramienta estándar para la construcción de funciones de McNaughton a partir de triangulaciones está dada por el siguiente resultado:

Lema 3.3.7. *Sea $\mathcal{T}$ una triangulación y ν una función definida sobre el conjunto de vértices en $\mathcal{T}$ y que toma valores en $[0,1]$. Sea $f : [0,1]^n \to [0,1]$ la única función que es lineal sobre cada simplex de $\mathcal{T}$ y que también satisface $f(x) = \nu(x)$. Luego $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$.*

Como hemos observado en 3.3.1, un filtro F de una MV-álgebra A es primo si y solamente si la MV-álgebra cociente A/F está totalmente ordenada (y es distinta de $\{1\}$). La siguiente es una caracterización de estos filtros:

Lema 3.3.8. *Para toda MV-álgebra A y filtro $F \neq A$ de A las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *F es primo;*

2. *para todo $x, y \in A$, si $x \vee y = 1$ entonces $x \in F$ o $y \in F$;*

3. *para todo* $x, y \in A$*, si* $x \vee y \in F$ *entonces* $x \in F$ *o* $y \in F$*;*

4. *si* G_1 *y* G_2 *son filtros de* A *y* $G_1 \cap G_2 \subseteq F$*, entonces* $G_1 \subseteq F$ *o* $G_2 \subseteq F$*;*

5. *si* G_1 *y* G_2 *son filtros de* A *y* $G_1 \cap G_2 = F$*, entonces* $G_1 = F$ *o* $G_2 = F$*;*

6. *si* G_1 *y* G_2 *son filtros de* A *que contienen a* F *entonces* $G_1 \subseteq G_2$ *o* $G_2 \subseteq G_1$*.*

Definición 3.3.9. Para toda triangulación $\mathcal{T}$ e índice $\mathbf{u}$ definimos

$$\mathcal{T}^{\mathbf{u}} = \bigcap\{S : S \text{ es un simplex de } \mathcal{T} \text{ y } S \text{ contiene algún } \mathbf{u}\text{-simplex}\}.$$

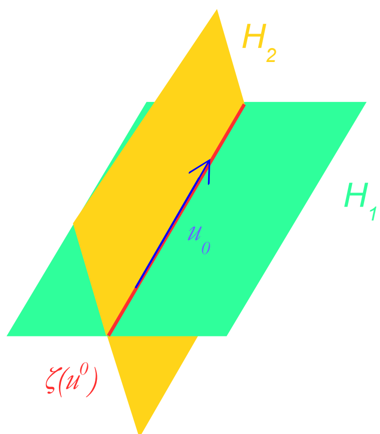
Como resultado inmediato de la Proposición 3.3.3 podemos ver que $\mathcal{T}^{\mathbf{u}}$ es un simplex de $\mathcal{T}$ que contiene un $\mathbf{u}$-simplex. Utilizando la notación u^j para el índice $(u_0, \ldots, u_j)$, se sigue que $\mathcal{T}^{u^j}$ está bien definida para cada $j = 0, \ldots, t$.

Proposición 3.3.10. Para todo índice $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_t)$, el conjunto $F_{\mathbf{u}}$ es un filtro primo de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$.

Demostración. Hemos visto en la Proposición 3.3.4 que $F_{\mathbf{u}}$ es un filtro de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$. Para ver que $F_{\mathbf{u}}$ es primo, supongamos que $f \notin F_{\mathbf{u}}$ y $g \notin F_{\mathbf{u}}$ y trataremos de ver que $f \vee g \neq 1$. Usando el Lema 3.3.6, sea $\mathcal{T}$ una triangulación tal que f, g y $f \vee g$ son lineales sobre cada simplex de $\mathcal{T}$. Se sigue que $f(x) < 1$ para algún $x \in \mathcal{T}^{\mathbf{u}}$ (de otro modo f tomaría el valor 1 sobre $\mathcal{T}^{\mathbf{u}} \supseteq \mathcal{T}$ para algún $\mathbf{u}$-simplex T, y por lo tanto $f \in F_{\mathbf{u}}$ lo que es imposible). De modo análogo, $g(y) < 1$ para algún $y \in \mathcal{T}^{\mathbf{u}}$. La hipótesis sobre $\mathcal{T}$ nos asegura que tanto f como g deben ser menores que 1 en $relint\mathcal{T}^{\mathbf{u}}$, y que $f \vee g$ es lineal sobre $\mathcal{T}^{\mathbf{u}}$. Luego, sobre $\mathcal{T}^{\mathbf{u}}$ debemos tener o bien que $f \geq g$ o bien $g \geq f$. En ambos casos $f \vee g < 1$, como queríamos. □

Definición 3.3.11. Para todo índice $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_t)$ definimos $\zeta(u^0) = \cap\{H : u_0 \in H\}$ y para todo $i = 1, \ldots, t$,

$$\zeta(u^i) = \bigcap\{H : conv\{u_0, u_0 + u_1, \ldots, u_0 + u_1 + \ldots + u_t\} \subseteq H\}$$



En forma equivalente,

$$\zeta(u^i) = \bigcap\{H : T \subseteq H \text{ para algún } u^i\text{-simplex } T\}$$

Para cada $0 \leq i \leq t$, la translación de $\zeta(u^i)$ en $-u_0$, tiene un espacio lineal asociado $\lambda(u^i)$; en símbolos,

$$\lambda(u^i) = \zeta(u^i) - u_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : (u_0 + x) \in \zeta(u^i)\}$$

En adelante escribiremos $\zeta(\mathbf{u})$ en lugar de $\zeta(u^t)$ y $\lambda(\mathbf{u})$ en lugar de $\lambda(u^t)$.

Sea $\mathcal{T}$ una triangulación unimodular y $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_t)$ un índice. Entonces por la definición 3.3.9 debemos tener que $dim(\mathcal{T}^{u^j}) \geq dim(\zeta(u^j))$ para todo $j \leq t$; y por la hipótesis de unimodularidad de $\mathcal{T}$, todo simplex de $\mathcal{T}$ de codimensión 1 está contenido en un hiperplano racional.

Definición 3.3.12. Diremos que $\mathcal{T}$ es una **triangulación u-buena** si $dim(\mathcal{T}^{u^j}) = dim(\zeta(u^j))$ para todo $j = 0, \ldots, t$.

Mas aún, para cualquier $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$ diremos que $\mathcal{T}$ es una **triangulación f-buena** si f es lineal (en el sentido afín) sobre cada simplex T de $\mathcal{T}$. Además diremos que $\mathcal{T}$ es $\mathbf{u}$-buena si es f-buena y $\mathbf{u}$-buena. Dados finitos índices $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$ y funciones $g, f \ldots \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$, obtenemos de modo análogo las definiciones de $\mathbf{vw}g$-bueno, $\mathbf{vw}gh$-bueno, etcétera.

Lema 3.3.13. *Sea $\boldsymbol{u} = (u_0, \ldots, u_t)$ un índice.*

1. *Para toda triangulación $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^{u^j}$ es una cara de $\mathcal{T}^{u^{j+1}}$, en símbolos, $\mathcal{T}^{u^j} \preceq \mathcal{T}^{u^{j+1}}$.*
2. *Toda triangulación $\mathcal{T}$ puede ser refinada a una triangulación $\boldsymbol{u}$-buena.*
3. *Si $\mathcal{W}$ es un refinamiento de una triangulación $\mathcal{T}$ $\boldsymbol{u}$-buena, entonces $\mathcal{W}^{\boldsymbol{u}} \subseteq \mathcal{T}^{\boldsymbol{u}}$. Específicamente, $\mathcal{T}^{\boldsymbol{u}}$ es el menor simplex de $\mathcal{T}$ que contiene a $\mathcal{W}^{\boldsymbol{u}}$.*
4. *Todo refinamiento de una triangulación $\boldsymbol{u}$-buena (respectivamente $\boldsymbol{u}f$-buena) es $\boldsymbol{u}$-bueno (respectivamente $\boldsymbol{u}f$-bueno).*
5. *$F_{\boldsymbol{u}} = \{f \in Free_{\mathcal{MV}}(n) :$ para alguna triangulación $\mathcal{T}$ $\boldsymbol{u}$-buena, $f \restriction \mathcal{T}^{\boldsymbol{u}} = 1\}$.*
6. *Si $f \in F_{\boldsymbol{u}}$, entonces $f \restriction \mathcal{U}^{\boldsymbol{u}} = 1$ para toda triangulación $\boldsymbol{u}f$-buena $\mathcal{U}$.*

Definición 3.3.14. Sean $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_t)$ y $\mathbf{v} = (v_0, \ldots, v_r)$ índices con $t \leq r$. Si $v_i = u_i$ para todo $i = 0 \ldots, t$, entonces $\mathbf{v}$ se llama una **extensión** de $\mathbf{u}$. Si además $\zeta(u^t) \subsetneq \zeta(v^r)$ diremos que $\mathbf{v}$ es una **extensión propia** de $\mathbf{u}$.

Lema 3.3.15. *Si $\boldsymbol{v}$ es una extensión de $\boldsymbol{u}$, entonces $F_{\boldsymbol{v}} \subseteq F_{\boldsymbol{u}}$.*

Observación 3.3.16. Dados $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_t)$, y $n > t$ puede ocurrir que $t < dim\zeta(\mathbf{u}) \leq n$. (Por ejemplo, si $\mathbf{u} = u_0$ y $u_0 \notin ([0,1] \cap \mathbb{Q})^n$, entonces $dim\zeta(\mathbf{u}) > 0$). En este caso, existe un $v \in \lambda(\mathbf{u})$ tal que los vectores $u_1, \ldots, u_t, v$ del conjunto linealmente independiente y $\zeta(u_0, \ldots, u_t, v) = \zeta(\mathbf{u})$. Luego $(u_0, \ldots, u_t, v)$ no es una extensión propia de $\mathbf{u}$.

Definición 3.3.17. Siguiendo [26] (página 40), para cualquier triangulación $\mathcal{T}$ del n-cubo y un simplex $F \in \mathcal{T}$, el conjunto $star(F;\mathcal{T})$ de F en $\mathcal{T}$ es el menor subcomplejo de $\mathcal{T}$ que contiene a todos los miembros de $\mathcal{T}$ que contienen a F. La unión punto a punto de $st(F, \mathcal{T})$ se llama **closed star** de F en $\mathcal{T}$ y la denotaremos como $clstar(F;\mathcal{T})$. El interior de $clstar(F;\mathcal{T})$ relativo al n-cubo, se llama **open star** de F en $\mathcal{T}$, y lo denotaremos como $ostar(F;\mathcal{T})$. Se sigue que

$$ostar(F;\mathcal{T}) = int\{x \in [0,1]^n : \exists\, T \in \mathcal{T},\ T\ n\text{-dimensional con } x \in T \supseteq F\}$$

Cuando $\mathcal{T}$ está claro por el contexto, escribiremos simplemente $clstar(F)$ y $ostar(F)$.

Para todo filtro primo F el **filtro germinal** $germ(F)$ es la intersección de todos los filtros que lo contienen. Los filtros germinales tienen la siguiente caracterización:

Teorema 3.3.18. *Sean $\boldsymbol{u} = (u_0, \ldots, u_t)$ un índice y $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$f \restriction ostar(\mathcal{T}^{\boldsymbol{u}}) = 1$ para alguna triangulación $\mathcal{T}$ $\boldsymbol{u}f$-buena.*
2. *$f \restriction ostar(\mathcal{T}^{\boldsymbol{u}}) = 1$ para toda triangulación $\mathcal{T}$ $\boldsymbol{u}f$-buena.*
3. *$f \in germ(F_{\boldsymbol{u}})$.*

Proposición 3.3.19. Sea $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_t)$ un índice tal que $dim\zeta(\mathbf{u}) < n$. Supongamos que F es un filtro primo tal que $F \subseteq F_{\mathbf{u}}$. Supongamos que no existe una extensión propia $\mathbf{v}$ de $\mathbf{u}$ tal que F esté contenido en $J_{\mathbf{v}}$. Luego existen una función $f \in F$ y una triangulación $\mathbf{u}f$-buena $\mathcal{T}$ tal que

1. $f \restriction \mathcal{T}^{\mathbf{u}} = 1$ y
2. $f(x) < 1$ para todo $x \in clstar(\mathcal{T}^{\mathbf{u}}) \setminus \mathcal{T}^{\mathbf{u}}$.

Teorema 3.3.20. *Sea $\boldsymbol{u} = (u_0, \ldots, u_t)$ un índice y F un filtro primo con $F \subseteq F_{\boldsymbol{u}}$. Si no existe una extensión propia $\boldsymbol{v}$ de $\boldsymbol{u}$ tal que F esté contenido en $F_{\boldsymbol{v}}$ entonces $F = F_{\boldsymbol{u}}$.*

Corolario 3.3.21. *Todo filtro primo F de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ es de la forma $F = F_{\boldsymbol{u}}$ para un índice $\boldsymbol{u}$.*

Demostración. Todo filtro primo de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ está contenido en exactamente un filtro maximal (ver [13], Corolario 1.2.12). Por 3.4.7 de [13], los filtros maximales de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ son exactamente aquellos de la forma $F_x = \{f \in Free_{\mathcal{MV}}(n) : f(x) = 1\}$ para algún $x \in [0,1]^n$. Sea $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_t)$ un índice tal que $F_{\mathbf{u}} \supseteq F$, y ninguna extensión propia $\mathbf{v}$ de $\mathbf{u}$ cumple que $F_{\mathbf{v}} \supseteq F$. Como consecuencia del Teorema 3.3.20, tenemos que $F = F_{\mathbf{u}}$. $\square$

Sea $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_t)$ un índice. Si el vector u_{i+1} pertenece al espacio lineal $\lambda(u^{i+1})$, entonces $\lambda(u^{i+1}) = \lambda(u^i)$, y diremos que u_{i+1} es redundante en $\mathbf{u}$. Un índice $\mathbf{u}$ se dice reducido si para todo $i = 0, \ldots, t-1$, $dim\lambda(u^i) < dim\lambda(u^{i+1})$. En forma equivalente, $\mathbf{u}$ es reducido si y solamente si para toda triangulación $\mathcal{T}$ $\mathbf{u}$-buena, tenemos $\mathcal{T}^{u^0} \prec \mathcal{T}^{u^1} \prec \ldots \prec \mathcal{T}^{u^{t-1}} \prec \mathcal{T}^{u^t}$, donde $\prec$ denota una subcara propia.

El siguiente resultado es una generalización del Corolario 3.3.21 y fue probado por Panti en [40] y después en [12] usando únicamente herramientas de MV-álgebras.

Proposición 3.3.22. Para todo filtro primo F de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$, existe un índice reducido $\mathbf{u}$ tal que $F = F_u$.

Índices iguales para el mismo filtro primo

En esta sección estudiaremos condiciones suficientes y necesarias para que dos índices reducidos representen el mismo filtro primo.

Proposición 3.3.23. Sean $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_t)$ y $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_t)$ dos índices reducidos con $\zeta(u^{t-1}) = \zeta(v^{t-1})$. Sea $\mathcal{T}$ una triangulación $\mathbf{uv}$-buena, y supongamos que $\mathcal{T}^{\mathbf{u}}$ es una subcara propia de $\mathcal{T}^{\mathbf{v}}$, lo que simbolizaremos $\mathcal{T}^{\mathbf{u}} \prec \mathcal{T}^{\mathbf{v}}$.

Luego existe un refinamiento $\mathcal{W}$ de $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{W}^{u^{t-1}} = \mathcal{W}^{v^{t-1}}$, $\mathcal{W}^{\mathbf{u}} \nsubseteq \mathcal{W}^{\mathbf{v}}$ y $\mathcal{W}^{\mathbf{v}} \nsubseteq \mathcal{W}^{\mathbf{u}}$.

Teorema 3.3.24. *Sean $\boldsymbol{u} = (u_0, \ldots, u_t)$ y $\boldsymbol{v} = (v_0, \ldots, v_t)$ dos índices reducidos tales que $F_{\boldsymbol{u}} = F_{\boldsymbol{v}}$. Entonces $t = r, u_0 = v_0$ y para cada $0 \le j \le t$, $F_{u^j} = F_{v^j}$.*

Observación 3.3.25. Teniendo en cuenta la Proposición 3.3.22 podemos ahora asignar a cada filtro primo $F \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$ un entero unívocamente determinado $r = r_j \geq 0$, donde

$$r_j + 1 = \text{número de elementos de cualquier índice reducido de } F.$$

El resultado previo muestra que r_j es la longitud de la máxima cadena de filtros primos

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots \supseteq F_{r_j} = F$$

donde el primer filtro es F y el último es el filtro maximal sobre F.

Corolario 3.3.26. *Sean $\boldsymbol{u} = (u_0, \ldots, u_t)$ y $\boldsymbol{v} = (v_0, \ldots, v_k)$ dos índices reducidos y sea $j \le min(t,k)$. Si $\zeta(u^{j-1}) = \zeta)(v^{j-1})$ y $\mathcal{T}^{u^j} \subsetneqq \mathcal{T}^{v^j}$ para alguna triangulación $\boldsymbol{uv}$-buena $\mathcal{T}$, entonces $F_{\boldsymbol{u}} \neq F_{\boldsymbol{v}}$.*

Definición 3.3.27. Dado un índice reducido $\mathbf{u} = (u_0, \ldots, u_t)$, para cada $0 < j \le t$ definimos el conjunto $\theta(u^j)$ como

$$\theta(u^j) = \{x \in \mathbb{R}^n | x = y + \beta u_j \text{ para algún } y \in \lambda(u^{j-1}) \text{ y } 0 < \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Teorema 3.3.28. *Sean $\boldsymbol{u} = (u_0, \ldots, u_t)$ y $\boldsymbol{v} = (v_0, \ldots, v_t)$ dos índices reducidos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $F_{\boldsymbol{u}} = F_{\boldsymbol{v}}$;
2. *Para toda triangulación $\boldsymbol{uv}$-buena $\mathcal{T}$, $(\mathcal{T}^{u^0}, \ldots, \mathcal{T}^{u^t})$ coincide con $(\mathcal{T}^{v^0}, \ldots, \mathcal{T}^{v^t})$;*
3. $u_0 = v_0$ *y* $u_j \in \theta(v^j)$ *para todo* $j = 1, \ldots, t$.

Filtros primos en $Free_{\mathcal{G}}(n)$

De modo similar a lo que sucede con los filtros maximales en $Free_{\mathcal{G}}(n)$, los filtros primos se pueden definir en base a una cadena de Gödel junto con una variable distinguida, con la diferencia de que en este caso esa variable no necesariamente está en una componente fija de la cadena.

Lema 3.3.29. *Sea $\boldsymbol{X} = \langle X^1, \ldots, X^r \rangle$ una cadena de Gödel en las variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Luego el conjunto*

$$P_{\mathbf{X},x_i} = \{f \in Free_{\mathcal{G}}(n) : f(\bar{x}) \geq x_i, \forall \bar{x} \in R_{\mathbf{X}},\ \textit{donde}\ x_i \in X^s, 1 < s \leq r\}$$

es un filtro en $Free_{\mathcal{G}}(n)$.

Demostración. La función que es idénticamente 1, está en $P_{\mathbf{X},x_i}$.

Supongamos que $f \in P_{\mathbf{X},x_i}$ y sea $g \in Free_{\mathcal{G}}(n)$ una función tal que $g \geq f$. Veamos que $g \in P_{\mathbf{X},x_i}$.

Como $g \geq f$, entonces para todo punto $\bar{y} \in R_{\mathbf{X}}$, $g(\bar{y}) \geq f(\bar{y}) \geq y_i$. Luego $g(\bar{y}) \geq y_i$ para todo $\bar{y} \in R_{\mathbf{X}}$ y por lo tanto $g \in P_{\mathbf{X},x_i}$.

Finalmente, supongamos que $f, g \in P_{\mathbf{X},x_i}$ y veamos que $f \cdot g \in P_{\mathbf{X},x_i}$. Pero en ese caso tenemos que para todo $\bar{y} \in R_{\mathbf{X}}$, $(f \cdot g)(\bar{y}) = f(\bar{y}) \cdot g(\bar{y}) = min\{f(\bar{y}), g(\bar{y})\} \geq y_i$. Por lo tanto $f \cdot g \in P_{\mathbf{X},x_i}$

Por lo tanto $P_{\mathbf{X},x_i}$ es un filtro en $Free_{\mathcal{G}}(n)$. □

Observación 3.3.30. Si $\mathbf{X} = \langle X^1, \ldots, X^r \rangle$ una cadena de Gödel y $P_{\mathbf{X},x_i}$ es un filtro definido como en 3.3.29 entonces tenemos que este filtro está generado por la función $f_P \in Free_{\mathcal{G}}(n)$ dada por:

- $f_P \restriction R_{\mathbf{X}} = x_i$
- $f_P \restriction R_{\mathbf{Y}} = x_j \in Y^1$, para toda cadena de Gödel $\mathbf{Y} = \langle Y^1, \ldots, Y^t \rangle$ en las variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$ que conforme una foresta con $\mathbf{X}$; esto eso, en la región $R_{\mathbf{X}}$ toma la variable x_i y en cualquier otra región $R_{\mathbf{Y}}$ (donde $\mathbf{X}$ no es subcadena de $\mathbf{Y}$ ni $\mathbf{Y}$ es subcadena de $\mathbf{X}$) toma la menor variable.

Luego tenemos que
$$P_{\mathbf{X},x_i} = \{f \in Free_{\mathcal{G}}(n) : f \geq f_P\}.$$

Lema 3.3.31. *Sea $\boldsymbol{X} = \langle X^1, \ldots, X^r \rangle$ una cadena de Gödel en las variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Luego el conjunto*

$$P_{\boldsymbol{X},x_i} = \{f \in Free_{\mathcal{G}}(n) : f(\bar{x}) \geq x_i, \forall \bar{x} \in R_{\boldsymbol{X}},\ donde\, x_i \in X^s, 1 < s \leq r\}$$

es un filtro primo en $Free_{\mathcal{G}}(n)$.

Demostración. En el Lema 3.3.29 vimos que $P_{\mathbf{X},x_i}$ es un filtro en $Free_{\mathcal{G}}(n)$. Veamos ahora que el filtro es primo.

Supongamos que $f, g \in Free_{\mathcal{G}}(n)$ son tales que $f \vee g \in P_{\mathbf{X},x_i}$. Luego, sabemos que $(f \vee g)(\bar{x}) \geq x_i$, para todo $\bar{x} \in R_{\mathbf{X}}$. Pero en ese caso tenemos dos posibilidades:

1. Si $(f \vee g) \restriction R_{\mathbf{x}} = x_j \geq x_i$, entonces tenemos que $f \restriction R_{\mathbf{X}} \vee g \restriction R_{\mathbf{X}} = x_k \vee x_h = x_j$. Por la forma de las funciones de $Free_{\mathcal{G}}(n)$ sabemos que $f \restriction R_{\mathbf{X}}$ y $g \restriction R_{\mathbf{X}}$ se corresponden con proyecciones sobre las variables, debemos tener que $f \restriction R_{\mathbf{X}} = x_j > x_i$ o $g \restriction R_{\mathbf{X}} = x_j > x_i$ por lo que $f \in P_{\mathbf{X},x_i}$ o $g \in P_{\mathbf{X},x_i}$, porque en la región $R_{\mathbf{X}}$ las variables están totalmente ordenadas.

2. Si $(f \vee g) \restriction R_{\mathbf{x}} = 1 \geq x_i$, entonces $f \restriction R_{\mathbf{X}} \vee g \restriction R_{\mathbf{X}} = 1$ por lo que es necesario que $f \restriction R_{\mathbf{X}} = 1$ o $g \restriction R_{\mathbf{X}} = 1$, pero en ese caso $f \in P_{\mathbf{X},x_i}$ o $g \in P_{\mathbf{X},x_i}$.

Por lo tanto, $P_{\mathbf{X},x_i}$ es un filtro primo. □

Teorema 3.3.32. *Si $P \subseteq Free_{\mathcal{G}}(n)$ es un filtro primo entonces P es de la forma*

$$P_{\mathbf{X},x_i} = \{f \in Free_{\mathcal{G}}(n) : f(\bar{x}) \geq x_i, \forall \bar{x} \in R_{\boldsymbol{X}},\ donde\, x_i \in X^s, 1 < s \leq r\}$$

para alguna cadena de Gödel $\boldsymbol{X}$ en las variables $x_1, \ldots, x_n$.

Demostración. Supongamos que P es un filtro primo en $Free_{\mathcal{G}}(n)$ y que P no es de la forma $P_{\mathbf{X},x_i}$. Luego, tenemos dos posibilidades:

1. Para toda cadena de Gödel $\mathbf{X} = \langle X^1, \ldots, X^r \rangle$ existe una función $f_{\mathbf{X}}$ tal que $f_{\mathbf{X}}(\bar{x}) = x_i \in X^1$, para todo punto $\bar{x} \in R_{\mathbf{X}}$ y en ese caso tendríamos que $P = Free_{\mathcal{G}}(n)$ (pues la función que toma el mínimo de las variables sobre todas las regiones estaría en P).

2. Existen dos cadenas de Gödel $\mathbf{X} = \langle X^1, \ldots, X^r \rangle$ e $\mathbf{Y} = \langle Y^1, \ldots, Y^s \rangle$ que conforman una foresta y tales que para toda función f, si $f \in P$ entonces se cumplen las siguientes condiciones:

$$f(\bar{x}) \geq x_i \in X^j, \text{ para } 2 \leq j \leq r,$$
$$f(\bar{y}) \geq y_k \in Y^l, \text{ para } 2 \leq k \leq s. \tag{3.3.1}$$

Consideremos las funciones $g, h \in Free_{\mathcal{G}}(n)$ dadas por:

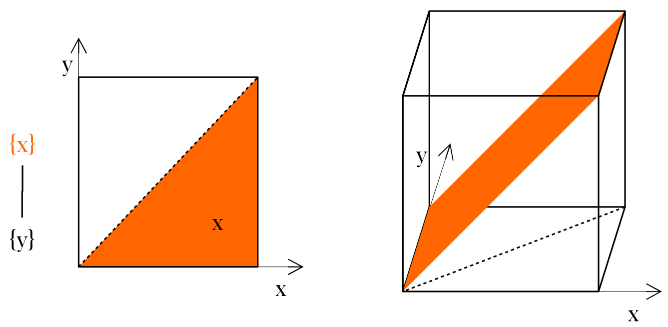
$$g(\bar{x}) = \begin{cases} x_i \in X^1 & \text{si } \bar{x} \in R_{\mathbf{X}}; \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
$$h(\bar{y}) = \begin{cases} y_k \in Y^1 & \text{si } \bar{y} \in R_{\mathbf{Y}}; \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Tenemos que $g \vee h \in P$, pues $g \vee h$ coincide con la función que toma el valor 1 sobre $[0,1]^n_{\mathbf{G}}$. Sin embargo, $g \notin P$ y $h \notin P$, pues ninguna de estas funciones cumple la condición 3.3.1. Y esto contradice la hipótesis de que P sea primo.

□

Por lo tanto, hemos caracterizado todos los filtros primos de $Free_{\mathcal{G}}(n)$.

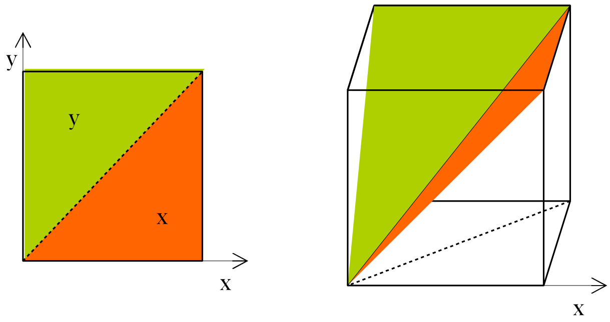
Ejemplo 15. *Consideremos el filtro primo $F_{\mathbf{X},x}$ en $Free_{\mathcal{G}}(2)$ dado por la cadena de Gödel $\boldsymbol{X} = \langle\{y\},\{x\}\rangle$. El filtro estará generado por la función $f(x,y) = x \in Free_{\mathcal{G}}(2)$:*



Si consideramos ahora la función

$$g(x,y) = \begin{cases} x & si\ (x,y) \in R_{\boldsymbol{x}} \\ 1 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

tenemos que $g \in Free_{\mathcal{G}}(2)$ y, como se puede observar en la gráfica, $g \geq f$:



Por lo tanto, $g \in F_{\mathbf{X},x}$.

Filtros primos en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$

En la sección anterior vimos que existe una correspondencia biyectiva entre $[0,1]^n$ y el conjunto de filtros maximales en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$. Usaremos esta correspondencia para analizar los filtros primos en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$.

Si $P \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ es un filtro primo, sabemos que existe un único filtro maximal $M_{\bar{x}}$ tal que $P \subseteq M_{\bar{x}}$. Analizaremos qué ocurre en el caso en que el filtro maximal $M_{\bar{x}}$ esté asociado a $\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} \setminus \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ y qué ocurre cuando $\bar{x} \in \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$.

Dado un filtro primo $P \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ y $\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ tal que $M_{\bar{x}}$ es el único filtro maximal que contiene a P recordaremos la siguiente notación que ya hemos utilizado anteriormente:

$$M_{\bar{x}} = \{\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(n) : \mathscr{F}(\bar{x}) = 1\}$$

$$MV_{\bar{x}} = \{f \in Free_{\mathcal{MV}}(n) : f(\bar{x}) = 1\}$$

$$P_{MV} = \{\mathscr{F}\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} : \mathscr{F} \in P\}$$

$$P_{G,\bar{x}} = \{f\restriction_{\tilde{x}} : f \in P\},$$

donde recordemos que para $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ definimos

$$\tilde{x} = \{\bar{z} \in \mathfrak{A}^n : z_j = x_j, \text{ para todo } j \notin 1_{\bar{x}}, \text{ y } z_i \in [0,1]_{\mathbf{G}}, \text{ para todo } i \in 1_{\bar{x}}\}.$$

Dado $\bar{x} \in \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$,y P un filtro primo en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ tal que $M_{\bar{x}}$ es el único filtro maximal que contiene a P, identificaremos las funciones de $P_{G,\bar{x}}$ con un subconjunto de funciones $Free_{\mathcal{G}}(m)$, para $m = |1_{\bar{x}}|$.

Además, recordemos que dado un punto $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}^n$ escribimos $\hat{x}$ para referirnos a:

$$\hat{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad x_i \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ \\ 1 & \text{si} \quad x_i \in [0,1]_{\mathbf{G}}. \end{cases}$$

Por otro lado, dada una función $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$, notaremos por $f^\sharp$ a la función dada por:

$$f^\sharp(\bar{y}) = \begin{cases} f(\bar{y}) & \text{si} \qquad x_i \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} \\ \\ f(\hat{y}) & \text{si} \quad x_i \in \mathfrak{A}^n \setminus [0,1]^n_{\mathbf{MV}}, \end{cases}$$

donde $f^\sharp \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ es la función más grande tal que su restricción a $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ coincide con f.

Lema 3.3.33. *Sean $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$ y $\bar{x} \in [0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}$. Vale que $f \in MV_{\bar{x}}$ si y solamente si existe $g \in M_{\bar{x}}$ tal que $g\restriction_{[0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}} = f$.*

Demostración. Supongamos que $f \in MV_{\bar{x}}$. Sea $g = f^\sharp \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$. Por construcción tenemos que $g\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} = f$ y por lo tanto $g \in M_{\bar{x}}$.

Recíprocamente, si $g \in M_{\bar{x}}$, tomemos $f = g\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}}$. En este caso tenemos que $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$ y como $\bar{x} \in [0,1]_{\mathbf{MV}^n}$, se cumple que $g(\bar{x}) = f(\bar{x}) = 1$, por lo que $f \in MV_{\bar{x}}$. $\square$

Lema 3.3.34. *Si $P \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ es un filtro primo entonces P_{MV} es un filtro primo en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$.*

Demostración. P_{MV} es filtro por 3.2.11.

Veamos ahora que P_{MV} es un filtro primo: para esto supongamos que f, g son funciones en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ tales que $f \vee g \in P_{MV}$. Luego, existe $h \in P$ tal que $h\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} = f \vee g$.

Por otro lado, tenemos las funciones $f^\sharp, g^\sharp \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ tales que $f^\sharp\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} = f$ y $g^\sharp\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} = g$ que cumplen además que $f^\sharp \vee g^\sharp \geq h$. Como P es un filtro, esto implica que $f^\sharp \vee g^\sharp \in P$ y por lo tanto $f^\sharp \in P$ o $g^\sharp \in P$, pero entonces tenemos que $f \in P_{MV}$ o $g \in P_{MV}$. $\square$

Lema 3.3.35. *Si $P \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ es un filtro, $P \subseteq M_{\bar{x}}$, con $\bar{x} \in [0,1]^n_{\boldsymbol{MV}} \setminus \eth[0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}$ entonces $P_{G,\bar{x}}$ es un filtro en $Free_{\mathcal{G}}(m)$, donde $m = |1_{\bar{x}}|$.*

Demostración. Veamos que $P_{G,\bar{x}}$ es filtro:

La función que es idénticamente 1 sobre $\tilde{x}$ está en $P_{G,\bar{x}}$, porque es la restricción de la que toma el valor 1 sobre $\mathfrak{A}^n$, que está en P por ser filtro.

Supongamos que $g \in P_{G,\bar{x}}$ y $f \in Free_{\mathcal{G}}(m)$ es tal que $f \geq g$. Veamos que $f \in P_{G,\bar{x}}$.

Como $g \in P_{G,\bar{x}}$, sabemos que existe $\tilde{g} \in P$ tal que $\tilde{g}\restriction_{\tilde{x}} = g$.

Sea $f^{\ddagger} \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ la función definida por:

$$f^{\ddagger}(\bar{y}) = \begin{cases} f(\bar{y}) & \text{si } \bar{y} \in \tilde{x} \\ \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La función $f^{\ddagger}$ cumple que $f^{\ddagger}\restriction_{\tilde{x}} = f$ y además tenemos que $f^{\ddagger} \geq \tilde{g}$, lo que implica que $f^{\ddagger} \in P$ (dado que P es un filtro).

Por lo tanto $f^{\ddagger}\restriction_{\tilde{x}} = f \in P_{G,\bar{x}}$.

Supongamos que $f, g \in P_{G,\bar{x}}$. Veamos que $f \cdot g \in P_{G,\bar{x}}$.

Como $f, g \in P_{G,\bar{x}}$, sabemos que existen $\tilde{f}, \tilde{g} \in P$ tales que $\tilde{f}\restriction_{\tilde{x}} = f$ y $\tilde{g}\restriction_{\tilde{x}} = g$. Como P es un filtro, $\tilde{f} \cdot \tilde{g} \in P$, pero tenemos que $\tilde{f} \cdot \tilde{g}\restriction_{\tilde{x}} = f \cdot g$, por lo que $f \cdot g \in P_{G,\bar{x}}$.

□

Lema 3.3.36. *Si $P \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ es un filtro primo, $P \subseteq M_{\bar{x}}$, con $\bar{x} \in [0,1]^n_{\boldsymbol{MV}} \setminus ð[0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}$ entonces o bien $P_{G,\bar{x}}$ es un filtro primo en $Free_{\mathcal{G}}(m)$, donde $m = |1_{\bar{x}}|$ o bien $P_{G,\bar{x}}$ es isomorfo a $Free_{\mathcal{G}}(m)$.*

Demostración. Vimos en el Lema 3.3.35 que $P_{G,\bar{x}}$ es un filtro de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$. Veamos ahora que $P_{G,\bar{x}}$ es un filtro primo.

Supongamos que $f, g \in Free_{\mathcal{G}}(m)$ son tales que $f \vee g \in P_{G,\bar{x}}$. Luego tenemos que existe $h \in P$ tal que $h\restriction_{\tilde{x}} = f \vee g$. Por otro lado, sabemos que existen funciones $f^{\ddagger}$ y $g^{\ddagger}$ en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ tales que $f^{\ddagger}\restriction_{\tilde{x}} = f$ y $g^{\ddagger}\restriction_{\tilde{x}} = g$. Pero tenemos que $h \leq f^{\ddagger} \vee g^{\ddagger}$, por lo que $f^{\ddagger} \vee g^{\ddagger} \in P$, pues P es un filtro. Pero del hecho de que P es primo sabemos que esto implica que $f^{\ddagger} \in P$ o $g^{\ddagger} \in P$, por lo que, tomando las restricciones de ambas funciones a $\tilde{x}$ tenemos que $f \in P_{G,\bar{x}}$ o $g \in P_{G,\bar{x}}$.

Por lo tanto $P_{G,\bar{x}}$ es un filtro primo en caso de estar propiamente contenido en $Free_{\mathcal{G}}(m)$ y en caso contrario, es isomorfo a $Free_{\mathcal{G}}(m)$. □

Notación 3.3.37. Dado G un filtro en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$, definimos

$$G^{cil} = \{f \in Free_{\mathcal{MG}}(n) : f\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} \in G\}$$

donde G^{cil} es un filtro de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$, al que llamaremos **cilindrificación de** G.

Se puede ver utilizando esta definición que G^{cil} es un filtro en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$.

En el próximo Teorema veremos que dado un filtro primo $P \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$, P contenido en un filtro maximal $M_{\bar{x}}$, con $\bar{x}$ un punto de $[0,1]^n_{\mathbf{MV}} \setminus \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ existe un filtro primo en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ cuya cilindrificación coincide con el filtro P.

Teorema 3.3.38. *Sean $\bar{x} \in [0,1]^n_{\boldsymbol{MV}} \setminus \eth[0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}$ y $P \subseteq M_{\bar{x}}$ un filtro primo en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$. Luego existe un filtro primo $G \subseteq Free_{\mathcal{MV}}(n)$ tal que*

$$P = G^{cil} = \{f \in Free_{\mathcal{MG}}(n) : f\restriction_{[0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}} \in G\}.$$

Demostración. Por el Lema 3.3.34, sabemos que P_{MV} es un filtro primo en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$. Claramente, para toda función $f \in P_{MV}$, $f(\bar{x}) = 1$ porque $P \subseteq M_{\bar{x}}$. Luego P_{MV} es un filtro primo de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ contenido en $MV_{\bar{x}}$.

Llamemos $G = P_{MV}$ y veamos que $P = G^{cil}$.

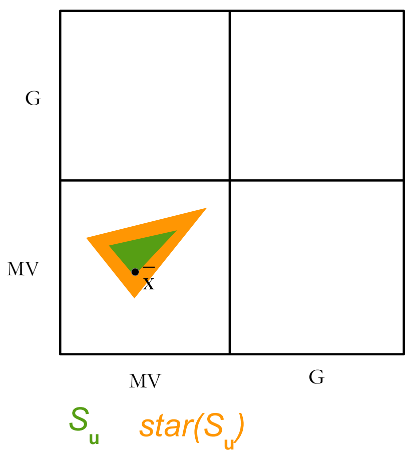
Sabemos por 3.3.21 que existe un índice $\mathbf{u}$ tal que para toda función $f \in P_{MV}$, $f(S) = 1$, para algún $\mathbf{u}$-simplex S.

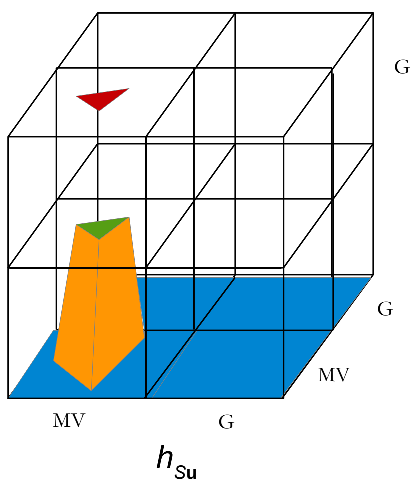
Si $f \in P$ entonces $f\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} \in G$. Luego $f \in G^{cil}$ y por lo tanto $P \subseteq G^{cil}$.

Ahora debemos ver que $G^{cil} \subseteq P$. Para esto debemos probar algunos resultados previos.

Afirmación 1: Para todo $\mathbf{u}$-simplex $S_{\mathbf{u}}$ contenido en $[0,1]^n_{\mathbf{MV}} \setminus \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ existe $h_{S_{\mathbf{u}}} \in P$ tal que

$$h_{S_{\mathbf{u}}}(\bar{y}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{y} \text{ es tal que alguna coordenada } y_i \in [0,1]_{\mathbf{G}} \\ 1 & \text{si } \bar{y} \in S_{\mathbf{u}} \\ 0 & \text{si } \bar{y} \notin ostar(S_{\mathbf{u}}). \end{cases}$$





Demostración de la Afirmación 1:

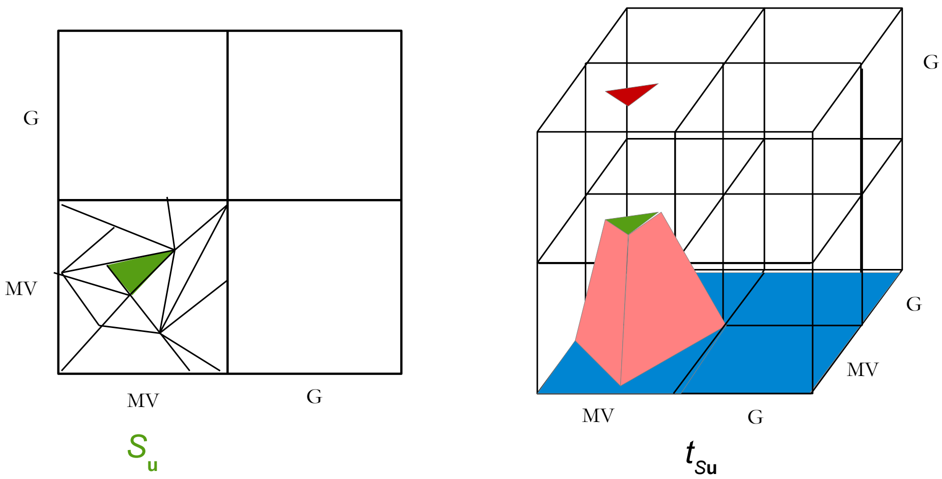
Recordemos que dada una triangulación regular τ de $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ y decimos que τ es una $\mathbf{u}$-triangulación si existe un $\mathbf{u}$-simplex $S_{\mathbf{u}} \in \tau$.

Dada una $\mathbf{u}$-triangulación, en 3.3.17 definimos $ostar(\mathbf{u})$ como el interior del conjunto $\{T \in \tau : T \cap S_{\mathbf{u}} \neq \varnothing\}$.

Fijadas $\mathbf{u}$ y τ como antes, la función $t_{S_{\mathbf{u}}}$ definida en los vértices de τ por:

$$t_{S_{\mathbf{u}}}(\bar{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{y} \text{ es un vértice de } S \\ \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

y que se extiende linealmente está en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$. Además $t_{S_{\mathbf{u}}}(S_{\mathbf{u}}) = 1$ con lo que claramente $t_{S_{\mathbf{u}}} \in G$.



Como $S_{\mathbf{u}} \subseteq [0,1]^n_{\mathbf{MV}} \setminus \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ para todo $\bar{x} \in \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ se tiene que $t_{S_{\mathbf{u}}}(\bar{x}) = 0$.

Por la Proposición 2.4.32 sabemos que existe una única función $h_{S_{\mathbf{u}}} \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ tal que $h_{S_{\mathbf{u}}}\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} = t_{S_{\mathbf{u}}}$. Como $t_{S_{\mathbf{u}}} \in P_{MV}$ para toda triangulación τ, tenemos que $h_{S_{\mathbf{u}}} \in P$, para toda triangulación $\mathbf{u}$-buena τ (el hecho de que $t_{S_{\mathbf{u}}} \in P_{MV}$ implica que $t_{S_{\mathbf{u}}}$ es proyección de alguna función en P, que debe ser $h_{S_{\mathbf{u}}}$).

Por lo tanto, hemos probado la Afirmación 1.

Sea ahora $f \in G^{cil}$. Como $f \in G^{cil}$, $f\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} \in G = P_{MV} = P_{\mathbf{u}}$.

Si τ es una triangulación regular de $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ donde $f\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}}$ es una función lineal, como $f\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} \in G = P_{\mathbf{u}}$, sabemos que existe un $\mathbf{u}$-simplex $S_{\mathbf{u}}$ tal que $f\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}}(S_{\mathbf{u}}) = 1$ y $S_{\mathbf{u}} \in \tau$.

Sin pérdida de generalidad, como $\bar{x}$ no está en $\eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ podemos suponer que $S_{\mathbf{u}}$ está contenido en $[0,1]^n_{\mathbf{MV}} \setminus \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$.

Tomemos $t_{S_{\mathbf{u}}} \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$ la función correspondiente a τ en la demostración de la Afirmación 1 y $h_{S_{\mathbf{u}}}$ la función correspondiente en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ que extiende a $t_{S_{\mathbf{u}}}$.

Claramente $h_{S_{\mathbf{u}}} \in P$ y $h_{S_{\mathbf{u}}} \leq f$. Por lo tanto $f \in P$. □

Teorema 3.3.39. *Si $P \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ es un filtro primo contenido en un filtro maximal $M_{\bar{x}}$, con $\bar{x} \in \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$, entonces vale que:*

1. *Si $P_{G,\bar{x}}$ es un filtro propio entonces P_{MV} es maximal.*

2. *Si P_{MV} es un filtro propio entonces $P_{G,\bar{x}} \cong Free_{\mathcal{G}}(m)$, donde $m = |1_{\bar{x}}|$.*

Demostración. Supongamos que $P \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ es un filtro primo contenido en un filtro maximal $M_{\bar{x}}$, con $\bar{x} \in \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$.

Veamos que $P_{G,\bar{x}} = Free_{\mathcal{G}}(m)$, con $m = |1_{\bar{x}}|$, o $P_{MV} = MV_{\bar{x}}$ (o ambas).

Supongamos, por el contrario, que $P_{G,\bar{x}} \subsetneq Free_{\mathcal{G}}(m)$ y $P_{MV} = P_{\mathbf{u}}$, donde $\mathbf{u}$ es un índice que define un filtro primo no maximal $P_{\mathbf{u}} \subsetneq MV_{\bar{x}}$.

Claramente tenemos que $P \subseteq P^{cil}_{MV}$ y $P \subseteq P^{cil}_{G,\bar{x}}$. Veremos que $P^{cil}_{MV} \nsubseteq P^{cil}_{G,\bar{x}}$ y $P^{cil}_{G,\bar{x}} \nsubseteq P^{cil}_{MV}$, lo cual nos llevará a un absurdo, pues contradice el hecho de que P sea primo.

Como $P_{G,\bar{x}} \subsetneq Free_{\mathcal{G}}(m)$, sabemos que existe una función $h \in Free_{\mathcal{G}}(m)$ tal que $h \notin P_{G,\bar{x}}$.

Sea $h^{\ddagger} \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ la función definida como en el Lema 3.3.35.

Como $h^{\ddagger}\restriction_{[0,1]^n_{\mathbf{MV}}} = 1$ entonces tenemos que $h^{\ddagger} \in P^{cil}_{MV}$. Pero $h^{\ddagger} \notin P^{cil}_{G,\bar{x}}$, pues $h^{\ddagger}\restriction_{\tilde{x}} = h \notin P_{G,\bar{x}}$. Luego tenemos que $P^{cil}_{G,\bar{x}} \nsubseteq P^{cil}_{MV}$.

Tomemos ahora una función $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$ tal que $f \in MV_{\bar{x}}$, pero $f \notin P_{MV}$. Luego tenemos que la función $f^{\sharp}$ satisface que $f^{\sharp} \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$, pero $f^{\sharp} \notin P^{cil}_{MV}$.

Además $f^{\sharp}\restriction_{\tilde{x}} = f^{\sharp}(\bar{x}) = 1$, por lo que $f^{\sharp}\restriction_{\tilde{x}} \in P_{G,\bar{x}}$.

Por lo tanto $f^{\sharp} \in P^{cil}_{G,\bar{x}}$, de lo que podemos deducir que $P^{cil}_{MV} \nsubseteq P^{cil}_{G,\bar{x}}$.

Como esto contradice la primalidad de P, hemos llegado a un absurdo y queda probado el Teorema. □

3.4. Filtros principales

Definición 3.4.1. Sean A una BL-álgebra y $F \subseteq A$ un filtro implicativo.

Diremos que F es **principal** si $F = \{x \in \mathbf{A} : x \geq a\}$ para algún $a \in \mathbf{A}$.

Además diremos que F está **generado** por $B \subseteq A$ si F es el filtro más chico que contiene a B.

Diremos que F está **finitamente generado** si está generado por un subconjunto finito de A.

El objetivo de esta sección es caracterizar los filtros finitamente generados y principales y ver la relación que hay entre ellos. Para esto estudiaremos los filtros en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$, luego en $Free_{\mathcal{G}}(n)$ y finalmente en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$.

Filtros principales en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$

Lema 3.4.2. *Sea F un filtro de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$. Son equivalentes:*

1. *F es principal.*
2. *existe una función $f \in F$ tal que*

$$\{\bar{x} \in [0,1]^n_{\boldsymbol{MV}} : f(\bar{x}) = 1\} = \{\bar{x} \in [0,1]^n_{\boldsymbol{MV}} : g(\bar{x}) = 1,\ \forall g \in F\}.$$

Demostración. Para la dirección no trivial, sea $f \in F$ tal que $\{\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} : f(\bar{x}) = 1\} = \{\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} : g(\bar{x}) = 1,\ \forall g \in F\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f \leq 1$. Debemos verificar que para toda función $g \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$, $g \in F$ si y solamente si $g \geq f^k$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

Para ver la implicación recíproca, alcanza con ver que $f \in F$.

Para ver que $g \in F$ implica que $g \geq f^k$ para algún número natural k, sea Λ una triangulación racional de $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$, tal que f y h son lineales sobre cada $S \in \Lambda$. Sean $\{v_1, \ldots, v_s\}$ vértices de Λ. Como $\{\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} : f(\bar{x}) = 1\} = \{\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} : g(\bar{x}) = 1,\ \forall g \in F\} \subseteq \{\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} : h(\bar{x}) = 1\}$, $f(v_i) = 1$, lo cual implica que $h(v_i) = 1$. Luego existe un entero $m_i > 0$ tal que $f(v_i)^{m_i} < f(v_i)$ para cada $i = 1, \ldots, s$. Sea $m = max(m_1, \ldots, m_s)$; el resultado deseado se sigue de la linealidad de f y h sobre cada simplex de Λ. $\square$

Lema 3.4.3. *Si F es un filtro finitamente generado en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$, entonces F es principal.*

Demostración. Sean $f_1, \ldots, f_m$ las funciones que generan el filtro F y sea

$$P = \{\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} : f_i(\bar{x}) = 1 \text{ para algún } i = 1, \ldots, m\}.$$

Tenemos que

$$\{\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} : f(\bar{x}) = 1\} = \{\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} : f_i(\bar{x}) = 1, \text{ para } i = 1, \ldots, m\}.$$

Luego, por el Lema 3.4.2, tenemos que F debe ser principal. □

Filtros principales en $Free_{\mathcal{G}}(n)$

Lema 3.4.4. *Sea $F \subseteq Free_{\mathcal{G}}(n)$. Son equivalentes:*

1. *F es un filtro finitamente generado.*
2. *F es un filtro principal.*

Demostración. Si F es un filtro principal, entonces es un filtro finitamente generado. Veamos la recíproca.

Supongamos que F es un filtro generado por las funciones $f_1, \ldots, f_m \in Free_{\mathcal{G}}(n)$. Y sea $f = f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$. Veamos que $F = \{g \in Free_{\mathcal{G}}(n) : g \geq f\}$.

Pero $f \in F$, pues los filtros son cerrados por la operación $\wedge$. Luego, para cualquier función $g \in F$ tenemos que $g \geq f$ y por lo tanto $F \subseteq \{g \in Free_{\mathcal{G}}(n) : g \geq f\}$. Y, si g es tal que $g \geq f$, como $f = f_1 \wedge \ldots \wedge f_m$, debemos tener que $g \in F$ y por lo tanto queda probada la igualdad $F = \{g \in Free_{\mathcal{G}}(n) : g \geq f\}$. □

Filtros principales en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$

Tal como hicimos para otro tipo de filtros, es posible extender los filtros principales en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ y $FG(n)$ a filtros principales en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$.

Lema 3.4.5. *Sea $F \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ un filtro. Son equivalentes:*

1. *F está generado por finitas funciones $f_1, \ldots, f_n$ tales que $f_i^{-1}(\{1\}) \subseteq [0,1]^n_{\boldsymbol{VM}} \setminus \eth[0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}$ para todo $i = 1, \ldots, m$.*
2. *F es principal.*

Demostración. Sale como consecuencia de 3.4.3 extendiendo las funciones de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ a $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ como en 2.5.5. □

Lema 3.4.6. *Sea $F \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ un filtro. Son equivalentes:*

1. *F está generado por finitas funciones $f_1, \ldots, f_n$ tales que $f_i^{-1}(\{1\}) \cap [0,1]^n_{\boldsymbol{MV}} = \bar{1}$ para todo $i = 1, \ldots, m$.*

2. *F es principal.*

Demostración. Sale como consecuencia de 3.4.4 extendiendo las funciones de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ a $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ como en 2.5.6. □

El siguiente resultado generaliza los Lemas anteriores y permite caracterizar los filtros principales de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$.

Teorema 3.4.7. *Sea $F \subseteq Free_{\mathcal{MG}}(n)$ un filtro. Son equivalentes:*

1. *F está generado por finitas funciones $f_1, \ldots, f_n$.*

2. *F es principal.*

Demostración. Sea $P = \{\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} : f_i(\bar{x}) = 1$ para algún $i = 1, \ldots, m\}$. Por el Lema 3.4.2 sabemos que existe una función $\hat{f} \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$ tal que $\hat{f}(\bar{x}) = 1$ si y solamente si $\bar{x} \in P$. Llamemos f a la función en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ que surge de extender $\hat{f}$, tal como hicimos en 2.5.5.

Si $P \cap \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}} = \varnothing$, entonces f genera todo el filtro y por lo tanto F es principal.

Si $P \cap \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}} \neq \varnothing$, sea Δ una subtriangulación regular de las triangulaciones asociadas a $f_1, \ldots, f_m$. Luego, tenemos que para cada simplex $S \in \Delta$, f_i coincide con una función de $Free_{\mathcal{G}}(k)$, para $k \leq n$ sobre $\tilde{S}^0$. Sea $\hat{f}_S = f_1 \restriction \tilde{S}^0 \wedge \ldots \wedge f_m \restriction \tilde{S}^0$. Y para cada $S \in \Delta$, sea f_S la función que extiende $\hat{f}_S$ a una función de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ tal como hicimos en 2.5.6.

Luego tenemos que $g = f \wedge \bigwedge_{S \in \Delta} f_S$ es la función generadora de F y F es principal. □

Capítulo 4

Álgebras finitamente presentadas

Para todo $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $Form_n$ al conjunto de fórmulas $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ cuyas variables están contenidas en el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Una **teoría** en las variables $x_1, \ldots, x_n$ es un subconjunto propio Θ de $Form_n$ que contiene todas las tautologías de $Form_n$ y que es cerrada por modus ponens. Θ es **finitamente axiomatizable** si existe una fórmula $\Omega \in Form_n$, tal que Θ es la intersección de todas las teorías en las variables $x_1, \ldots, x_n$ que contienen a Ω.

Diremos que un álgebra $\mathbf{A}$ está **finitamente presentada** si es isomorfa al álgebra de Lindembaum de una teoría finitamente axiomatizable.

En el caso de MV-álgebras en [13] está probado que esto es equivalente a que $\mathbf{A}$ sea un cociente de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ por un filtro finitamente generado.

Estas ideas motivan el desarrollo que haremos de las álgebras finitamente presentadas en este capítulo para el caso de nuestra variedad $\mathcal{MG}$. Queremos hallar los cocientes de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ por filtros finitamente generados, ya que estos cocientes se corresponden con las teorías finitamente axiomatizables. Una vez que hayamos caracterizado estos cocientes veremos algunas aplicaciones geométricas.

Definición 4.0.1. Diremos que un álgebra $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{MG}$ es un álgebra **finitamente presentada** si $\mathbf{A}$ es isomorfa a un cociente de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ por un filtro finitamente generado.

Observación 4.0.2. Utilizando los resultados probados en la sección 3.4, para cualquier subálgebra de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$, ser finitamente presentada es equivalente a ser cociente de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ por un filtro principal.

Nuestro objetivo será estudiar las álgebras finitamente presentadas, caracterizándolas como cocientes de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ por filtros principales. Como hemos hecho antes, estudiaremos primero el caso de las álgebras finitamente presentadas en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$, luego en $Free_{\mathcal{G}}(n)$ y finalmente el caso general en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$.

4.1. Álgebras finitamente presentadas en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$

En el Teorema 6.3 de [36] está probado el siguiente resultado:

Teorema 4.1.1. *Para cualquier MV-álgebra* $\boldsymbol{A}$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\boldsymbol{A}$ *es finitamente presentada.*
2. *Para un poliedro racional* $P \subseteq [0,1]^n$, $P \neq \varnothing$, $\boldsymbol{A}$ *es isomorfa a*

$$\{f \restriction P : f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)\}.$$

Observación 4.1.2. Teniendo la caracterización de los filtros principales en 3.4, tenemos que si $\mathbf{A}$ es el álgebra que surge de cocientar por un filtro F generado por una función $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$, entonces P debe ser el poliedro dado por $P = \{\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}} : f(\bar{x}) = 1\}$.

Esto nos permite caracterizar las clases de las funciones en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ al cocientar por F. Si $g \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$, entonces

$$g/F = \{h \in Free_{\mathcal{MV}}(n) : g \to h \in F \text{ y } h \to g \in F\}.$$

Pero como F está generado por f, tenemos entonces que

$$g/f = \{h \in Free_{\mathcal{MV}}(n) : g(\bar{x}) = h(\bar{x}), \forall \bar{x} \in P\}.$$

4.2. Álgebras finitamente presentadas en $Free_{\mathcal{G}}(n)$

Sea f una función en $Free_{\mathcal{G}}(n)$. Llamaremos F al filtro principal en $Free_{\mathcal{G}}(n)$ generado por f. Queremos estudiar el álgebra que surge de cocientar $Free_{\mathcal{G}}(n)$ por F. Para esto, veamos cómo es la clase de una función en $Free_{\mathcal{G}}(n)$.

Sea $g \in Free_{\mathcal{G}}(n)$. Sabemos que

$$g/F = \{h \in Free_{\mathcal{G}}(n) : h \to g \in F \text{ y } g \to h \in F\}$$

es decir,

$$g/F = \{h \in Free_{\mathcal{G}}(n) : (h \to g) \geq f \text{ y } (g \to h) \geq f\}$$

o equivalentemente,

$$g/F = \{h \in Free_{\mathcal{G}}(n) : (h \to g) \cdot (g \to h) \geq f\}.$$

Notación 4.2.1. En el resto de esta Sección escribiremos $h \leftrightarrow g$ para referirnos a

$$(h \to g) \cdot (g \to h).$$

Utilizando esta notación en el cociente anterior, tenemos que

$$g/F = \{h \in Free_{\mathcal{G}}(n) : h \leftrightarrow g \geq f\}.$$

Lema 4.2.2. *Si F es el filtro principal en $Free_{\mathcal{G}}(n)$ generado por una función f, se tiene que*

$$g/F = \{h \in Free_{\mathcal{G}}(n) : h \geq \hat{g} = g \wedge f\}$$

para toda función $g \in Free_{\mathcal{G}}(n)$.

Demostración. Veamos que $\hat{g} = g \wedge f$ está en g/F:

$\hat{g} \to g = 1$ pues $\hat{g} \leq g$, por lo que $\hat{g} \to g \in F$.

$$(g \to \hat{g})(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{si} \quad f(\bar{x}) < g(\bar{x}) \\ 1 & \text{si} \quad f(\bar{x}) \geq g(\bar{x}) \end{cases}$$

Por lo tanto $g \to \hat{g} \geq f$ y por lo tanto $g \to \hat{g} \in F$.

Luego, tenemos que $\hat{g} \in g/F$. Veamos que $\hat{g}$ cumple la condición de que para toda función $h \in g/F$, $h \geq \hat{g}$.

Supongamos que $h \in g/F$ es una función tal que para un punto $\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{G}}$, $h(\bar{x}) < \hat{g}(\bar{x})$. Luego, tenemos que $(\hat{g} \to h)(\bar{x}) = h(\bar{x}) < \hat{g}(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$, por lo que $\hat{g} \to h \notin F$ y por lo tanto $h \notin g/F$.

Por lo tanto, hemos caracterizado la clase de g al cocientar por F como

$$g/F = \{h \in Free_{\mathcal{G}}(n) : h \geq \hat{g} = g \wedge f\}.$$

□

Observación 4.2.3. Observemos que al haber definido las clases de esta manera, podemos identificar en forma sencilla un elemento en cada clase que es el más chico en esa clase: $g/F = (g \wedge f)/F$.

Ahora que hemos caracterizado las clases de las funciones de $Free_{\mathcal{G}}(n)$ al cocientar por un filtro principal, y vimos que se pueden definir en términos del ínfimo de dos funciones, veamos cómo se traduce la operación de ínfimo para las forestas asociadas a dos funciones en $Free_{\mathcal{G}}(n)$.

Proposición 4.2.4. Sean $f, g \in Free_{\mathcal{G}}(n)$ dos funciones asociadas a las forestas $\bar{\mathbf{X}} = \{\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_r\}$ e $\bar{\mathbf{Y}} = \{\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_s\}$, respectivamente.

Luego la función $f \wedge g$ está asociada a la foresta $\bar{\mathbf{Z}} = \{\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_t\}$, donde las cadenas de $\bar{\mathbf{Z}}$ son las cadenas de $\bar{\mathbf{X}}$ que no tienen ninguna subcadena en $\bar{\mathbf{Y}}$ y las cadenas de $\bar{\mathbf{Y}}$ que no tienen ninguna subcadena en $\bar{\mathbf{X}}$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{G}}$. Veamos que $h(\bar{x}) = f(\bar{x}) \wedge g(\bar{x})$. Para esto consideraremos distintas posibilidades:

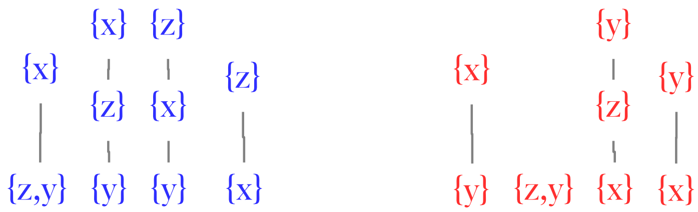
Si $\bar{x} \in R_{\mathbf{Z}_i}$, para algún $i \in \{1,\ldots,t\}$, con $\mathbf{Z}_i \in \bar{\mathbf{X}}$, entonces $h(\bar{x}) = f(\bar{x})$ y $g(\bar{x}) = 1$, por lo que $h(\bar{x}) = f(\bar{x}) \wedge g(\bar{x})$.

Si $\bar{x} \in R_{\mathbf{Z}_i}$, para algún $i \in \{1,\ldots,t\}$, con $\mathbf{Z}_i \in \bar{\mathbf{Y}}$, entonces $h(\bar{x}) = g(\bar{x})$ y $f(\bar{x}) = 1$, por lo que $h(\bar{x}) = f(\bar{x}) \wedge g(\bar{x})$.

Si $\bar{x} \notin \bigcup_{i=1}^{t} R_{\mathbf{Z}_i}$, entonces tenemos que $\bar{x} \notin \bigcup_{i=1}^{r} R_{\mathbf{X}_i}$ y $\bar{x} \notin \bigcup_{i=1}^{s} R_{\mathbf{Y}_i}$, por lo que $h(\bar{x}) = f(\bar{x}) = g(\bar{x}) = 1$ y por lo tanto $h(\bar{x}) = f(\bar{x}) \wedge g(\bar{x})$.

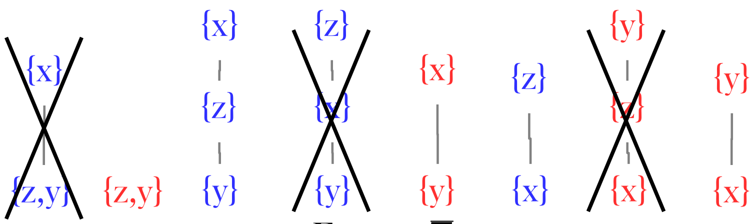
$\square$

Ejemplo 16. *Consideremos un ejemplo en $Free_{\mathcal{G}}(3)$. Si $\bar{\mathbf{X}}$, $\bar{\mathbf{Y}}$ son las forestas de Gödel dadas por el siguiente esquema,*



Foresta $\mathbf{X}$ Foresta $\mathbf{Y}$

entonces la foresta $\bar{\mathbf{Z}}$ resulta ser la siguiente (las cadenas que están tachadas no están en $\bar{\mathbf{Z}}$):

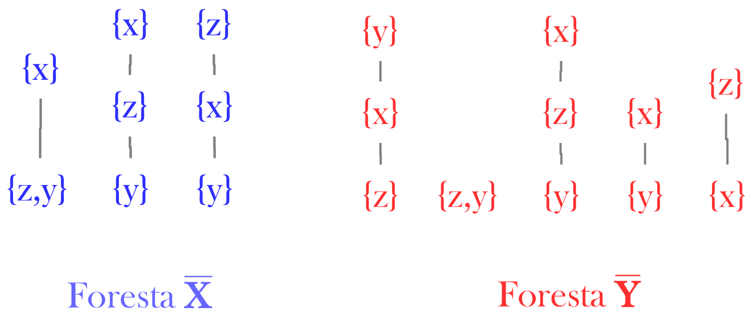


Foresta $\mathbf{Z}$

Definición 4.2.5. Si $\bar{\mathbf{X}} = \{\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_r\}$, $\bar{\mathbf{Y}} = \{\mathbf{Y}_1,\ldots,\mathbf{Y}_s\}$ son forestas de Gödel diremos que $\bar{\mathbf{Y}}$ es **subforesta de** $\bar{\mathbf{X}}$ si para toda cadena $\mathbf{X}_i$ en $\bar{\mathbf{X}}$ existe una cadena $\mathbf{Y}_j$ en $\bar{\mathbf{Y}}$ tal que $\mathbf{Y}_j$ es subcadena de $\mathbf{X}_i$.

Claramente, si $f \in Free_{\mathcal{G}}(n)$ es la función dada por una foresta $\bar{\mathbf{X}}$ y $g \in Free_{\mathcal{G}}(n)$ está dada por la foresta $\bar{\mathbf{Y}}$ que es subforesta de $\bar{\mathbf{X}}$ entonces $g \leq f$.

Ejemplo 17. *En el siguiente gráfico podemos ver un ejemplo de* $\bar{\mathbf{Y}}$ *como subforesta de* $\bar{\mathbf{X}}$*:*



Teniendo caracterizadas las clases en $Free_{\mathcal{G}}(n)$, el siguiente resultado es consecuencia del Lema 4.2.2:

Teorema 4.2.6. *Si* $F \subseteq Free_{\mathcal{G}}(n)$ *es el filtro principal generado por una función* f *asociada a la foresta de Gödel* $\bar{\mathbf{X}}$ *entonces* $Free_{\mathcal{G}}(n)/F$ *es isomorfa a*

$$\{g \in Free_{\mathcal{G}}(n) : g \textit{ está dada por una subforesta } \bar{\mathbf{Y}} \textit{ de } \bar{\mathbf{X}}\}.$$

Notación 4.2.7. Si $\bar{\mathbf{X}}$ es una foresta de Gödel llamaremos

$$\downarrow \bar{\mathbf{X}} = \{\bar{\mathbf{Y}} : \bar{\mathbf{Y}} \text{ es subforesta de } \bar{\mathbf{X}}\}.$$

4.3. Álgebras finitamente presentadas en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$

En esta sección trabajaremos con tres funciones fijas en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$: $\mathscr{F}, \mathscr{F}_1$ y $\mathscr{F}_2$. Estas funciones son aquellas dadas por las 2^n-uplas:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} &= (f, \{h_A : A \subsetneq \{x_1, \dots, x_n\}, A \neq \varnothing\}, g),\\
\mathscr{F}_1 &= (f_1, \{h_{1,A} : A \subsetneq \{x_1, \dots, x_n\}, A \neq \varnothing\}, g_1),\\
\mathscr{F}_2 &= (f_2, \{h_{2,A} : A \subsetneq \{x_1, \dots, x_n\}, A \neq \varnothing\}, g_2),
\end{aligned}$$

donde las funciones $f, f_1, f_2 \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$, $h_A, h_{i,A}$ son funciones f-A-G-McNaughton, f_1-A-G-McNaughton y f_2-A-G-McNaughton, respectivamente, y $g, g_1, g_2 \in Free_{\mathcal{G}}(n)$.

Supongamos que F_2 es el filtro principal en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ generado por $\mathscr{F}_2$. Veamos cuál es la clase de $\mathscr{F}_1$ en $Free_{\mathcal{MG}}(n)/F_2$.

Sabemos que

$$\mathscr{F}_1/F_2 = \{\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(n) : \mathscr{F} \to \mathscr{F}_1 \in F_2 \text{ y } \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F} \in F_2\},$$

o equivalentemente,

$$\mathscr{F}_1/F_2 = \{\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(n) : \mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{F}_1 \in F_2\}.$$

Nuestro objetivo es caracterizar las clases de funciones en estos cocientes. Para esto veremos que el conjunto de unos de las funciones tendrá un rol importante en esta caracterización.

Lema 4.3.1. *Sean $\mathscr{F}_2 \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ y $\bar{x} \in \mathfrak{A}^n$ tal que $\mathscr{F}_2(\bar{x}) = 1$. Si $\mathscr{F} \in \mathscr{F}_1/F_2$ entonces $\mathscr{F}_1(\bar{x}) = \mathscr{F}(\bar{x})$.*

Demostración. Supongamos que $\mathscr{F}_2 \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ y $\bar{x} \in \mathfrak{A}^n$ tal que $\mathscr{F}_2(\bar{x}) = 1$. Si $\mathscr{F} \in \mathscr{F}_1/F_2$ sabemos que $\mathscr{F}_1 \leftrightarrow \mathscr{F} \in F_2$, es decir, que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $\mathscr{F}_1 \to \mathscr{F} \geq \mathscr{F}_2^n$ y $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_1 \geq \mathscr{F}_2^m$. Si evaluamos estas dos desigualdades en $\bar{x}$ obtenemos:

$$\mathscr{F}_1(\bar{x}) \to \mathscr{F}(\bar{x}) \geq (\mathscr{F}_2(\bar{x}))^n = 1^n, \text{ por lo que } \mathscr{F}_1(\bar{x}) \to \mathscr{F}(\bar{x}) = 1 \text{ y por lo tanto } \mathscr{F}_1(\bar{x}) \leq \mathscr{F}(\bar{x}),$$

y

$$\mathscr{F}(\bar{x}) \to \mathscr{F}_1(\bar{x}) \geq (\mathscr{F}_2(\bar{x}))^m = 1^m, \text{ por lo que } \mathscr{F}(\bar{x}) \to \mathscr{F}_1(\bar{x}) = 1 \text{ y por lo tanto } \mathscr{F}(\bar{x}) \leq \mathscr{F}_1(\bar{x}),$$

de lo que se deduce que $\mathscr{F}(\bar{x}) = \mathscr{F}_1(\bar{x})$. □

Por lo tanto, podemos ver que el conjunto de unos de las funciones va a ser importante en la descripción de las clases de funciones en el cociente. En los próximos lemas probaremos la recíproca del Lema 4.3.1, considerando distintos casos. En todos los casos, denotaremos por P al poliedro dado por:

$$P = \mathscr{F}_2^{-1}(\{1\}) \cap [0,1]^n_{\mathbf{MV}}.$$

Lema 4.3.2. *Sean $\mathscr{F}_2 \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ y supongamos que el poliedro P es tal que $P \cap \eth[0,1]^n_{\boldsymbol{MV}} = \emptyset$. Si $\mathscr{F}, \mathscr{F}_1 \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ son funciones tales que $\mathscr{F}(\bar{x}) = \mathscr{F}_1(\bar{x})$ para todo $\bar{x} \in P$, entonces $\mathscr{F} \in \mathscr{F}_1/F_2$.*

Demostración. Basta con ver que para todo $\bar{x} \in P$, $(\mathscr{F} \leftrightarrow \mathscr{F}_1)(\bar{x}) = 1 = \mathscr{F}_2(\bar{x})$, pero esto vale pues $\mathscr{F}(\bar{x}) = \mathscr{F}_1(\bar{x})$ para todo $\bar{x} \in P$. □

Lema 4.3.3. *Sean $\mathscr{F}_2 \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ y el poliedro racional P es tal que $P \cap \eth[0,1]^n_{\boldsymbol{MV}} \neq \varnothing$. Si $\mathscr{F}, \mathscr{F}_1 \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ son funciones tales que $\mathscr{F}(\bar{x}) = \mathscr{F}_1(\bar{x})$ para todo $\bar{x} \in P \cap [0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}$ y además se cumple que*

1. *si $\bar{1} \in P$ entonces*
$$g(\bar{x}) \geq g_1(\bar{x}) \wedge g_2(\bar{x})$$
para todo $\bar{x} \in [0,1]^n_{\boldsymbol{G}}$, donde g, g_1 y g_2 son las funciones de $Free_{\mathcal{G}}(n)$ correspondientes a las 2^n-uplas asociadas a $\mathscr{F}, \mathscr{F}_1$ y $\mathscr{F}_2$, respectivamente,

2. *para todo $\bar{x} \in P \cap \eth[0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}$, $\bar{x} \neq \bar{1}$, con $A = \{x_i : i \in 1_{\bar{x}}\}$ se cumple que*
$$h_A(\tilde{x}) \geq h_{1,A}(\tilde{x}) \wedge h_{2,A}(\tilde{x}),$$
para $h_A, h_{1,A}$ y $h_{2,A}$ las funciones de f-A-G-McNaughton, f_1-A-G-McNaughton y f_2-A-G-McNaughton correspondientes a las 2^n-uplas asociadas a $\mathscr{F}, \mathscr{F}_1$ y $\mathscr{F}_2$, respectivamente.

   En el caso en que $\mathscr{F}_2(\bar{x}) = 1$, entonces tenemos que $h_A(\tilde{x}), h_{1,A}(\tilde{x})$ y $h_{2,A}(\tilde{x})$ tienen funciones en $Free_{\mathcal{G}}(|A|)$ asociadas, y en ese caso tenemos que la desigualdad se cumple como en el caso anterior.

   Y si $\mathscr{F}_2(\bar{x}) < 1$, entonces $h_A(\tilde{x}) = \mathscr{F}(\bar{x})$, $h_{1,A}(\tilde{x}) = \mathscr{F}_1(\bar{x})$ y $h_{2,A}(\tilde{x}) = \mathscr{F}_2(\bar{x})$ por lo que vale la desigualdad anterior.

Por lo tanto $\mathscr{F} \in \mathscr{F}_1/F_2$.

Demostración. Es consecuencia del Lema 4.2.2. □

Teorema 4.3.4. *Sean $\mathscr{F}, \mathscr{F}_1$ y $\mathscr{F}_2$ funciones en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$. Si P el poliedro racional dado por $P = \mathscr{F}_2^{-1}(\{1\})$. Luego vale que $\mathscr{F} \in \mathscr{F}_1/F_2$ si y solamente si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$\mathscr{F}(\bar{x}) = \mathscr{F}_1(\bar{x})$, para todo $\bar{x} \in P \cap [0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}$, y*
2. *$\mathscr{F}(\bar{x}) \geq \mathscr{F}_1(\bar{x}) \wedge \mathscr{F}_2(\bar{x})$, para todo $\bar{x} \in P \setminus [0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}$.*

Demostración. Es consecuencia de los Lemas 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3. □

4.4. Poliedros

Poliedros racionales

Recordemos que llamamos poliedro racional P en $\mathbb{R}^n$ a una unión finita de símplices $P = S_1 \cup \ldots \cup S_t$ en $\mathbb{R}^n$ tales que las coordenadas de los vértices de todo simplex S_i son números racionales. Para todo complejo simplicial Σ la unión puntual de los símplices de Σ se conoce como soporte de Σ y se denota por $|\Sigma|$; y Σ se llama una triangulación de $|\Sigma|$.

Los siguientes resultados muestran la relación entre los poliedros racionales y los conjuntos de unos de funciones de McNaughton y filtros de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ (ver Proposición 4.1,5.1 de [31] para más detalles).

Proposición 4.4.1. Si $P \subseteq [0,1]^n$, son equivalentes:

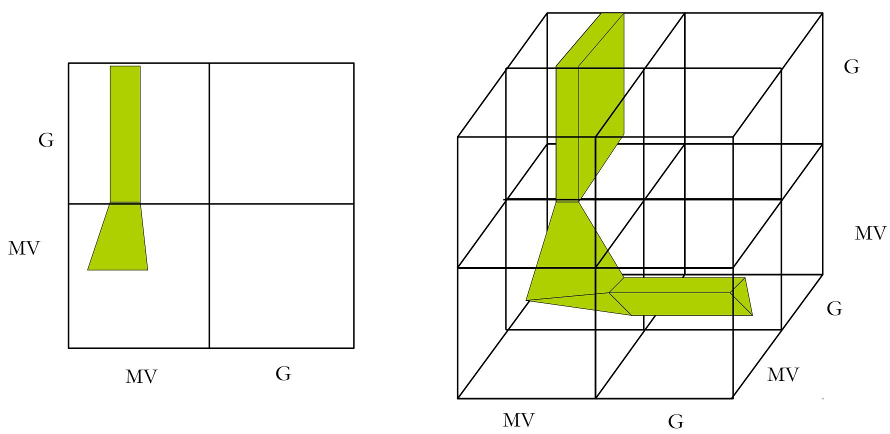
1. P es un poliedro racional.
2. $P = |\Delta|$ para alguna triangulación unimodular de Δ.
3. Hay una triangulación unimodular Γ de $[0,1]^n$ tal que
$$P = \{S \in \Gamma : S \subseteq P\}.$$
4. $P = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : f(\bar{x}) = 1\}$ para alguna función $f \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$.

Nuestro objetivo es hallar un resultado equivalente en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$. Para esto debemos estudiar nuevas construcciones geométricas.

MG-poliedros y MG*-poliedros

Definición 4.4.2. Un subconjunto $A \subseteq \mathfrak{A}^n$ es un **MG-poliedro** si
$$A = P \cup \{\tilde{x} : \bar{x} \in P \cap \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}\}$$
con P un poliedro racional contenido en $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$.

Ejemplo 18. *Los siguientes son ejemplos de **MG**-poliedros en $Free_{\mathcal{MG}}(2)$ y $Free_{\mathcal{MG}}(3)$:*



Definición 4.4.3. Dado un poliedro $P \subseteq [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ y Δ una triangulación de $P \cap \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$, diremos que Δ **respeta las caras** si dados dos puntos $\bar{x}, \bar{y} \in S \in \Delta$, se cumple que $1_{\bar{x}} = 1_{\bar{y}}$.

Definición 4.4.4. Dados un **MG**-poliedro $A = P \cup \{\tilde{x} : \bar{x} \in P \cap \eth[0,1]^n_{\mathbf{MV}}\}$ y una triangulación regular Δ de $\eth P$ que respete las caras de $[0,1]^n_{\mathbf{MV}}$, diremos que

$$A^* = (A, \Delta, \bar{X}_\Delta)$$

es un **MG*****-poliedro** si para cada simplex $S \in \Delta$ existe una foresta de Gödel asociada $\bar{X}_S$ en las variables $\{x_i : i \in 1_{\bar{x}},$ para cualquier $\bar{x} \in S\}$.

Observación 4.4.5. Dada una función $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$, dada por una 2^n-upla

$$\mathscr{F} = (f, \{h_A : A \subsetneq \{x_1, \ldots, x_n\}, A \neq \varnothing\}, g),$$

podemos hallar un **MG***-poliedro $A^*_{\mathscr{F}}$ asociado a $\mathscr{F}$ dado por:

- $P = \mathscr{F}^{-1}(\{1\}) \cap [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$.
- Δ es la triangulación asociada a $\mathscr{F}$.
- $\bar{X}_S$ es la foresta de Gödel asociada a $h_A \restriction \tilde{S}$.

Definición 4.4.6. Dado un **MG***-poliedro $A^* = (A, \Delta, \bar{X}_\Delta)$, diremos que el **MG***-poliedro $B^* = (B, \Sigma, \bar{Y}_\Sigma) \in \downarrow A^*$ si y solamente si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $A = B$.
2. Σ es subtriangulación regular de Δ
3. Para todo $S \in \Sigma$, tal que $S \subseteq T \in \Delta$, $\bar{Y}_S \in \downarrow \bar{X}_T$.

Teorema 4.4.7. *Si $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ y $P_{\mathscr{F}}$ es el filtro principal en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ generado por $\mathscr{F}$,*

$$Free_{\mathcal{MG}}(n)/P_{\mathscr{F}} \cong \downarrow A^*_{\mathscr{F}}.$$

Demostración. Recordemos que dadas dos funciones $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in Free_{\mathcal{MG}}(n)$ dadas por las 2^n-uplas

$$\mathscr{F}_1 = (f_1, \{h_{1,A} : A \subsetneq \{x_1, \ldots, x_n\}, A \neq \varnothing\}, g_1),$$

$$\mathscr{F}_2 = (f_2, \{h_{2,A} : A \subsetneq \{x_1, \ldots, x_n\}, A \neq \varnothing\}, g_2),$$

donde $f_i \in Free_{\mathcal{MV}}(n)$, $h_{i,A}$ son funciones f_i-A-G-McNaughton y $g_i \in Free_{\mathcal{G}}(n)$, para $i \in \{1,2\}$, vimos en la Sección 4.3 que $\mathscr{F}_2 \in \mathscr{F}_1/P_{\mathscr{F}}$ si y solamente si:

1. $f_1 \upharpoonright P = f_2 \upharpoonright P$, para $P = f^{-1}(\{1\}) \cap [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$.
2. Si Δ_1 y Δ_2 son las triangulaciones asociadas a $\mathscr{F}_1$ y F_2, se cumple que Δ_2 es subtriangulación de Δ_1.
3. Si $S \in \Delta_2$ y $A = \{x_i : i \in 1_{\bar{x}}$ para todo $\bar{x} \in S\}$ entonces $h^1_A \upharpoonright \tilde{S}^0 \leq h^2_A \upharpoonright \tilde{S}^0$.

Y estas condiciones se cumplen si y solamente si $A^*_{\mathscr{F}_2} \in \downarrow A^*_{\mathscr{F}_1}$. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Generalización a $Free_{\mathcal{MS}}(n)$

En el Capítulo 2 estudiamos la representación funcional del álgebra libre generada por

$$\mathfrak{A} = [0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}}.$$

Las funciones en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ resultaron ser funciones que pueden ser definidas en términos de funciones de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ y $Free_{\mathcal{G}}(m)$, con $m \leq n$, donde las funciones de $Free_{\mathcal{G}}(m)$ dependen del valor que toman las funciones en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$. Sin embargo, esto no depende del hecho de que la cadena generadora esté conformada por $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y $[0,1]_{\mathbf{G}}$ y las representaciones que tienen estos generadores en $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ y $Free_{\mathcal{G}}(m)$, sino que depende fuertemente de la estructura de la suma ordinal y de los elementos densos y regulares.

El objetivo de este último Capítulo es generalizar los resultados de $Free_{\mathcal{MG}}(n)$ a $Free_{\mathcal{MS}}(n)$, donde esta última es el álgebra libre generada por $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y un hoop básico totalmente ordenado H, donde supondremos que tenemos una representación funcional del álgebra libre generada por H, $Free_{\mathcal{H}}(n)$.

Llamaremos $\mathfrak{S}$ al álgebra generadora de nuestra variedad:

$$\mathfrak{S} = [0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus H.$$

Para ver qué estructura tiene el álgebra $Free_{\mathcal{MS}}(n)$ estudiaremos, como hemos hecho antes, el caso $Free_{\mathcal{MS}}(1)$ en primer lugar.

$Free_{\mathcal{MS}}(1)$

Teorema 5.1.1. *Sean g una función de $Free_{\mathcal{MV}}(1)$ y h una función de $Free_{\mathcal{H}}(1)$ tales que $g(1) = h(1) = 1$. Luego la función*

$$\mathscr{F}(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \in [0,1]_{\boldsymbol{MV}} \\ \\ h(x) & si \quad x \in H \end{cases} \tag{5.1.1}$$

está en $Free_{\mathcal{MS}}(1)$.

Recíprocamente, para toda $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MS}}(1)$ tal que $\mathscr{F}(1) = 1$ existen una función g de $Free_{\mathcal{MV}}(1)$ y una función h de $Free_{\mathcal{H}}(1)$ tales que satisfacen (5.1.1).

Demostración. Dadas g y h funciones de $Free_{\mathcal{MV}}(1)$ y $Free_{\mathcal{H}}(1)$ respectivamente, sabemos que existen términos α y β cuyas interpretaciones en $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y en H coinciden con g y h, respectivamente.

Si consideramos ahora los términos $\neg\neg\alpha$ y $\neg\neg\beta \to \beta$, tenemos que la evaluación sobre $\mathfrak{S}$ resulta:

$$(\neg\neg\alpha)_{\mathfrak{S}}(x) = \begin{cases} \alpha(x) & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ \\ 1 & \text{si} \quad x \in H \end{cases}$$

$$(\neg\neg\beta \to \beta)_{\mathfrak{S}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ \\ \beta(x) & \text{si} \quad x \in H \end{cases}$$

Consideremos el término

$$\gamma = (\neg\neg\alpha) \cdot (\neg\neg\beta \to \beta)$$

Este término coincide con α en $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y con β en H, por lo que su interpretación en $\mathfrak{S}$ coincide con $\mathscr{F}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ h(x) & \text{si} \quad x \in H \end{cases}$

Vimos que las funciones de esta forma están en el álgebra libre. Veamos ahora que estas son todas las funciones. Para esto, supongamos que $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MS}}(1)$ y sean $g = \neg\neg\mathscr{F}$ y $h = \neg\neg\mathscr{F} \to \mathscr{F}$. Por **??** tenemos que $(\neg\neg\mathscr{F}) \cdot (\neg\neg\mathscr{F} \to \mathscr{F}) = \mathscr{F}$, donde g es una función de $Free_{\mathcal{MV}}(1)$ y h es una función de $Free_{\mathcal{H}}(1)$. $\square$

Ahora, si g es una función de $Free_{\mathcal{MS}}(1)$ tal que $\mathscr{F}(1) = 0$, entonces la función

$$\mathscr{F}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \in H \end{cases} \tag{5.1.2}$$

está en $Free_{\mathcal{MS}}(1)$.

Teorema 5.1.2. *Si $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MS}}(1)$ es tal que $\mathscr{F}(1) = 0$, veamos que existe una función $g \in Free_{\mathcal{MS}}(1)$ que satisface 5.1.2.*

Demostración. Dada una función $\mathscr{F}$ en $Free_{\mathcal{MS}}(1)$, si $g \in Free_{\mathcal{MV}}(1)$ es la restricción de $\mathscr{F}$ a $[0,1]_{\mathbf{MV}}$, sabemos que existe un término α cuya interpretación sobre $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ coincide con g.

Ahora, la evaluación del término α sobre $\mathfrak{S}$ es:

$$\alpha_{\mathfrak{S}}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \in [0,1]_{\mathbf{MV}} \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \in H \end{cases}$$

Es decir, que coincide con $\mathscr{F}$ sobre $\mathfrak{S}$. □

Observación 5.1.3. Para el caso de $H = [0,1]_{\mathbf{MV}}$, la descripción que se obtiene es la de $Free_{\mathcal{BL}}(1)$ dada por Montagna en [35].

$Free_{\mathcal{MS}}(n)$

Del mismo modo en que la representación de $Free_{\mathcal{MG}}(1)$ puede adaptarse para dar la representación funcional de $Free_{\mathcal{MS}}(1)$, se pueden adaptar los resultados y demostraciones de la Sección 2.4 en el caso en que tenemos más variables.

Podemos dar entonces una representación funcional del álgebra libre $Free_{\mathcal{MS}}(n)$. Para definir las funciones en esta representación basta con descomponer el dominio

$$\mathfrak{S}^n = ([0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus H)^n$$

en un número finito de regiones. Sobre cada región una función $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MS}}(n)$ coincide o bien con una función de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$ o bien con una función de $Free_{\mathcal{H}}(m)$, del siguiente modo:

- Para todo $\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$, $\mathscr{F}(\bar{x}) = f(\bar{x})$, donde f es una función de $Free_{\mathcal{MV}}(n)$.

Para el resto del dominio, las funciones dependen de esta función $f : [0,1]^n_{\mathbf{MV}} \to [0,1]_{\mathbf{MV}}$:

- Sobre H^n: Si $f(\bar{1}) = 0$, entonces $\mathscr{F}(\bar{x}) = 0$ para todo $\bar{x} \in ([0,1]_{\mathbf{G}})^n$, y si $f(\bar{1}) = 1$, entonces $\mathscr{F}(\bar{x}) = g(\bar{x})$, para una función $g \in Free_{\mathcal{H}}(n)$, para todo $\bar{x} \in H^n$.

Sean $B = \{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\}$ un subconjunto propio no vacío del conjunto de variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y R_B un subconjunto de $\mathfrak{S}^n$ donde $x_i \in B$ si y solamente si $x_i \in H$. Para todo $\bar{x} \in R_B$ definimos $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ como:

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad i \notin B \\ \\ 1 & \text{si} \quad i \in B \end{cases}$$

- Sobre R_B: Si $f(\tilde{x}) < 1$ entonces $\mathscr{F}(\bar{x}) = f(\tilde{x})$. Si $f(\tilde{x}) = 1$, entonces hay una triangulación regular Δ de $f^{-1}(1) \cap R_B$ que determina los símplices $S_1, \ldots, S_l$ y l funciones en $Free_{\mathcal{H}}(n-m)$, $h_1, \ldots, h_l$ en $n-m$ variables, donde m es el cardinal de B tal que $\mathscr{F}(\bar{x}) = h_i(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{m-n}})$, $j_i \notin B$ para cada punto en el interior de S_i.

Siguiendo las ideas de la Sección 2.5 se pueden definir las funciones MS-básicas y de ese modo escribir cualquier función $\mathscr{F} \in Free_{\mathcal{MS}}(n)$ como producto de funciones MS-básicas.

Por otro lado, muchos resultados del Capítulo de Filtros se pueden extender a Filtros en $Free_{\mathcal{MS}}(n)$. En particular, para el caso de filtros maximales, se puede probar el siguiente resultado:

Teorema 5.1.4. *Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de $[0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}$ y los filtros maximales de $Free_{\mathcal{MS}}(n)$.*

Basados en este Teorema, asociaremos a cada punto $\bar{x} \in [0,1]^n_{\mathbf{MV}}$ el filtro maximal $M_{\bar{x}} \subseteq Free_{\mathcal{MS}}(n)$.

Tal como vimos antes, dado un filtro primo $P \in Free_{\mathcal{MS}}(n)$ contenido en el filtro maximal $M_{\bar{x}}$, utilizaremos la siguiente notación:

$$P_{MV} = \{f \restriction [0,1]^n_{\mathbf{MV}} : f \in P\},$$

$$P_{H,\bar{x}} = \{f \restriction_{\tilde{x}} : f \in P\},$$

donde recordemos que

$$1_{\bar{x}} = \{i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = 1\}$$

$$\tilde{x} = \{\bar{z} \in \mathfrak{S}^n : z_j = x_j, \text{ para todo } j \notin 1_{\bar{x}}, \text{ y } z_i \in H, \text{ para todo } i \in 1_{\bar{x}}\}.$$

Utilizando esta notación, y extendiendo los resultados probados para filtros primos, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.1.5. *Si* $P \subseteq Free_{\mathcal{MS}}(n)$ *es un filtro primo contenido en un filtro maximal* $M_{\bar{x}}$*, con* $\bar{x} \in \eth[0,1]^n_{\boldsymbol{MV}}$*, entonces vale que:*

1. *Si* $P_{H,\bar{x}}$ *es un filtro propio entonces* P_{MV} *es maximal.*

2. *Si* P_{MV} *es un filtro propio entonces* $P_{H,\bar{x}} \cong Free_{\mathcal{H}}(m)$*, donde* $m = |1_{\bar{x}}|$*.*

Y, para filtros principales, se puede probar el siguiente Teorema:

Teorema 5.1.6. *Sea* $F \subseteq Free_{\mathcal{MS}}(n)$ *un filtro. Son equivalentes:*

1. F *está generado por finitas funciones* $f_1, \ldots, f_n$*.*

2. F *es principal.*

5.2. Trabajo futuro

En la actualidad estamos estudiando los automorfismos en $\mathcal{MG}$. Nuestra idea es extender la noción de $\mathbb{Z}$-homeomorfismos en MV-álgebras a nuestra variedad. Para esto estudiamos además los automorfismos en $\mathcal{G}$. La construcción de los morfismos en $\mathcal{MG}$ depende fuertemente de la relación entre los dos bloques de la cadena generadora de nuestra variedad.

La necesidad de estudiar los automorfismos surgió de nuestro interés en estudiar los complejos simpliciales abstractos en $Free_{\mathcal{MG}}(n)$.

Un **complejo simplicial abstracto** H es un par $(\mathcal{V}, \Sigma)$ en el cual $\mathcal{V}$ es un conjunto finito no vacío y Σ es una colección de subconjuntos de $\mathcal{V}$ cuya unión es $\mathcal{V}$, tal que todo subconjunto de un elemento de Σ es nuevamente un elemento de Σ.

Un **complejo simplicial abstracto pesado** es una 3-upla $W = (\mathcal{V}, \Sigma, \omega)$ donde $(\mathcal{V}, \Sigma)$ es un complejo simplicial abstracto y ω es una aplicación de $\mathcal{V}$ en el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$.

Para todo complejo regular Λ dado como en 2.2, el **esqueleto** de Λ es el complejo simplicial abstracto pesado $W_\Lambda = (\mathcal{V}, \Sigma, \omega)$ dado por:

1. $\mathcal{V} = \{v : v \text{ es vértice de } \Lambda\}$.

2. Para todo vértice v de Λ, $\omega(v) = den(v)$.

3. Para todo subconjunto $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$ de $\mathcal{V}$,

$$W \in \Sigma \text{ si y solamente si } conv(w_1, \ldots, w_k) \in \Lambda.$$

Dados dos complejos simpliciales abstractos pesados $W = (\mathcal{V}, \Sigma, \omega)$ y $W' = (\mathcal{V}', \Sigma', \omega')$ escribiremos

$$\gamma : W \cong W',$$

si γ es un isomorfismo combinatorio entre W y W', es decir, que γ es una aplicación biyectiva de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}'$ tal que $\omega'(\gamma(v)) = \omega(v)$ para todo $v \in \mathcal{V}$, y $\{w_1, \ldots, w_k\} \in \Sigma$ si y solamente si $\{\gamma(w_1), \ldots, \gamma(w_k)\} \in \Sigma'$ para todo subconjunto $\{w_1, \ldots, w_k\}$ de $\mathcal{V}$.

Definición 5.2.1. Sea W un complejo simplicial abstracto y ∇ un complejo regular. Una ∇-**realización** de W es un isomorfismo combinatorio ι entre W y el esqueleto W_∇ de ∇. Escribiremos $\iota : W \to \nabla$ para referirnos a ι como ∇-realización de W.

Para un complejo regular cualquiera Λ, la función identidad sobre el conjunto de vértices de Λ es una Λ-realización de W_Λ, llamada **realización trivial del esqueleto** W_Λ.

Simétricamente, sea $W = (\mathcal{V}, \Sigma, \omega)$ un complejo simplicial abstracto con conjunto de vértices $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Para $e_1, \ldots, e_n$ la base canónica de vectores de $\mathbb{R}^n$, sea Δ_W el complejo cuyos vértices son

$$v'_1 = e_1/\omega(v_1), \ldots, v'_n = e_n/\omega(v_n),$$

y cuyos k-símplices están dados por

$$conv(v'_{i(0)}, \ldots, v'_{i(k)}) \in \Delta_W \text{ si y solamente si } \{v_{i(0)}, \ldots, v_{i(k)}\} \in \Sigma,$$

(para $k = 0, \ldots, n$).

Observemos que Δ_W es un complejo regular y $|\Delta_W| \subseteq [0,1]^n$. La función

$$\tilde{\iota} : v_i \in \mathcal{V} \mapsto v'_i \in [0,1]^n$$

es una Δ_W-realización de W, que llamaremos **realización canónica** de W. La dependencia del orden en el cual los elementos $\{v_1, \ldots, v_n\}$ están listados, está implícita.

En [37] y [11] se presentan las definiciones y los resultados previos para complejos simpliciales abstractos pesados, y se prueba que las clases de equivalencia de estos complejos se corresponden con las clases de teorías finitamente axiomatizables en la lógica de Łukasiewicz.

Nuestro objetivo es caracterizar los complejos simpliciales abstractos en nuestra variedad $\mathcal{MG}$. Para esto necesitamos agregar a la estructura de complejos simpliciales abstractos pesados información que permita distinguir en cada vértice cómo se realizará y forestas de Gödel asociadas.

Finalmente, querríamos extender esos resultados para la variedad $\mathcal{MS}$ generada por $\mathfrak{S}$.

Capítulo 6

Apéndice

En este Apéndice demostraremos el Lema 2.3.13, ya que su demostración es extensa, y por ese motivo no la incluímos en el Capítulo de Álgebras Libres. Recordemos el enunciado del Lema:

Lema: Sean α un término en $H-term$ en n variables y $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ dos cadenas de Gödel que tienen como subcadena a la cadena $\mathbf{X} = \langle X^1, \ldots, X^r \rangle$ (es decir, $\mathbf{X}_1 = \langle X^1, \ldots, X^r, X_1^{r+1}, \ldots, X_1^q \rangle$ y $\mathbf{X}_2 = \langle X^1, \ldots, X^r, X_2^{r+1}, \ldots, X_2^s \rangle$). Luego vale que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1}(\bar{x}) = \pi_j(\bar{x}), \text{ para todo } \bar{x} \in R_{\mathbf{X}_1} \text{ y } x_j \in X^t$$

$$\text{si y solamente si}$$

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2}(\bar{x}) = \pi_k(\bar{x}), \text{ para todo } \bar{x} \in R_{\mathbf{X}_2} \text{ y } x_k \in X^t,$$

para todo $t \leq r$.

Demostración. Lo probaremos por inducción sobre la complejidad del término α, utilizando el siguiente abuso de notación: escribiremos $\alpha \restriction R_X = x_i$ para referirnos a $\alpha \restriction R_X(\bar{x}) = \pi_i(\bar{x})$, para todo $\bar{x} \in R_X$.

Si α es de complejidad 0 entonces $\alpha = x_i$ o $\alpha = 1$ lo que nos lleva a considerar distintos casos:

1. Si $\alpha = x_i \in X^t$, para $t \leq r$, entonces se cumple que
$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t, \text{ si y solamente si } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \in X^t.$$
2. Si $\alpha = x_i \in X^t$, para $t > r$, entonces se cumple que
$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \notin \{X^j : j \leq r\} \text{ si y solamente si } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \notin \{X^j : j \leq r\}.$$

3. Si $\alpha = 1$, entonces se cumple trivialmente el enunciado.

Supongamos que el resultado es válido para todos los términos con complejidad menor que k. Sea α un término de complejidad k. Entonces tenemos dos posibilidades: $\alpha = \psi \to \phi$ o $\alpha = \psi \cdot \phi$, para ψ y ϕ términos de complejidad menor que k.

Si $\alpha = \psi \to \phi$ entonces tenemos dos casos para considerar: $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} = x_i$ o $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} = 1$:

1. Si $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} = x_i$ entonces tenemos distintas posibilidades:

   a) $\psi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t$ y $\phi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_j \in X^s$, para $s < t \leq r$: tenemos que
   $$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \to x_j = x_j \in X^s.$$
   Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \in X^t$, con $t \leq r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_j \in X^s$, con $s \leq r$ por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \to x_j = x_j \in X^s$.
   Por lo tanto tenemos que
   $$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \in X^s \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \in X^s, \text{ para } s \leq r.$$

   b) $\psi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t$ y $\phi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_j \in X^s$, para $r < s < t$: tenemos que
   $$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \to x_j = x_j \in X^s.$$
   Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_h \in X_2^k$, con $k > r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_l \in X_2^m$, con $s \leq r$ por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_h \to x_l = x_l \in X_2^m$, con $m > r$.
   Por lo tanto tenemos que
   $$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \notin \{X^t : t \leq r\} \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \notin \{X^t : t \leq r\}.$$

   c) $\psi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t$, con $t > r$ y $\phi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_j \in X^s$, para $s \leq r$: En este caso tenemos que
   $$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \to x_j = x_j \in X^s.$$
   Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_h \in X_2^k$, con $k > r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_j \in X^s$, con $s \leq r$, por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_h \to x_j = x_j \in X^s$, con $s \leq r$.
   Por lo tanto tenemos que
   $$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \in X^s \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \in X^s, \text{ para } s \leq r.$$

   d) $\psi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = 1$ y $\phi = x_j \restriction R_{\mathbf{X}_1} \in X^s$, para $s \leq r$: En este caso tenemos que
   $$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = 1 \to x_j = x_j \in X^s.$$
   Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = 1$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_j \in X^s$, con $s \leq r$, por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = 1 \to x_j = x_j \in X^s$, con $s \leq r$.
   Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \in X^s \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \in X^s, \text{ para } s \leq r.$$

e) $\psi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = 1$ y $\phi\restriction R_{\mathbf{X}_1} \in X^s$, para $s > r$: En este caso tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = 1 \to x_j = x_j \in X^s.$$

Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = 1$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_h \in X^l$, con $l > r$, por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = 1 \to x_h = x_h \in X^l$, con $l > r$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \notin \{X^t : t \leq r\} \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \notin \{X^t : t \leq r\}.$$

2. Si $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} = 1$ entonces tenemos distintas posibilidades:

a) $\psi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t$ y $\phi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_j \in X^s$, para $t \leq s \leq r$: tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \to x_j = 1.$$

Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \in X^t$, con $t \leq r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_j \in X^s$, con $s \leq r$ por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \to x_j = 1$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \notin \{X^t : t \leq r\} \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \notin \{X^t : t \leq r\}.$$

b) $\psi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t$ y $\phi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_j \in X^s$, para $r < t \leq s$: tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \to x_j = 1.$$

Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_h \in X_2^k$, con $k > r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_l \in X_2^m$, con $s \leq r$ por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_h \to x_l = 1$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \notin \{X^t : t \leq r\} \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \notin \{X^t : t \leq r\}.$$

c) $\psi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t$, con $t \leq r$ y $\phi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_j \in X^s$, para $s > r$: En este caso tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \to x_j = 1.$$

Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \in X^t$, con $t \leq r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_h \in X_2^k$, con $k > r$ por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \to x_h = 1$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \notin \{X^t : t \leq r\} \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \notin \{X^t : t \leq r\}.$$

d) $\psi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t$, con $t > r$ y $\phi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = 1$: En este caso tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \to 1 = 1.$$

Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \in X^t$, con $t > r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = 1$, por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \to 1 = 1$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \notin \{X^t : t \leq r\} \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \notin \{X^t : t \leq r\}.$$

e) $\psi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t$, con $t \leq r$ y $\phi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = 1$: En este caso tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \to 1 = 1.$$

Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \in X^t$, con $t \leq r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = 1$, por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \to 1 = 1$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \notin \{X^t : t \leq r\} \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \notin \{X^t : t \leq r\}.$$

f) $\psi = 1$ y $\phi = 1$: En este caso se cumple que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = 1 \to 1 = 1.$$

Pero por hipótesis inductiva tenemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = 1$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = 1$, por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \to \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = 1 \to 1 = 1$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \notin \{X^t : t \leq r\} \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \notin \{X^t : t \leq r\}.$$

Si $\alpha = \psi \cdot \phi$ entonces tenemos dos casos para considerar: $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} = x_i$ o $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} = 1$:

1. Si $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} = x_i$ entonces tenemos distintas posibilidades:

   a) $\psi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t$ y $\phi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_j \in X^s$, para $t, s \leq r$:

      1) Si $s < t$ entonces tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \cdot x_j = x_j \in X^s.$$

Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \in X^t$, con $t \leq r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_j \in X^s$, con $s \leq r$ por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \cdot x_j = x_j \in X^s$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \in X^s \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \in X^s, \text{ para } s \leq r.$$

2) Si $s \geq t$ entonces tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \cdot x_j = 1.$$

Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \in X^t$, con $t \leq r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_j \in X^s$, con $s \leq r$ por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \cdot x_j = x_i \in X^t$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \in X^s \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \in X^s, \text{ para } s \leq r.$$

b) $\psi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t$ y $\phi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_j \in X^s$, para $t, s > r$:

1) Si $s < t$ entonces tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \cdot x_j = x_j \in X^s.$$

Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_h \in X_2^k$, con $k > r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_l \in X_2^m$, con $s \leq r$ por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_h \cdot x_l = x_l \in X_2^m$, con $m > r$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \notin \{X^t : t \leq r\} \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \notin \{X^t : t \leq r\}.$$

2) Si $s \geq t$ entonces tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \cdot x_j = 1.$$

Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_h \in X_2^k$, con $k > r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_l \in X_2^m$, con $s \leq r$ por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_h \cdot x_l = x_h$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \notin \{X^t : t \leq r\} \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \notin \{X^t : t \leq r\}.$$

c) $\psi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t$, con $t \leq r$ y $\phi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_j \in X^s$, para $s > r$: En este caso tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \cdot x_j = x_i.$$

Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \in X^t$, con $t \leq r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_h \in X_2^k$, con $k > r$ por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \cdot x_h = x_i$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \in X^s \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \in X^s, \text{ para } s \leq r.$$

d) $\psi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t$, con $t > r$ y $\phi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_j \in X^s$, para $s \leq r$: Este caso es análogo al anterior.

e) $\psi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t$, con $t > r$ y $\phi \restriction R_{\mathbf{X}_1} = 1$: En este caso tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \cdot 1 = 1.$$

Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \in X_2^k$, con $k > r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = 1$, por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \restriction R_{\mathbf{X}_2} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} \cdot R_{\mathbf{X}_2} = x_i \cdot 1 = x_i \in X_2^k$, con $k > r$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \notin \{X^t : t \leq r\} \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \notin \{X^t : t \leq r\}.$$

f) $\psi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \in X^t$, con $t \leq r$ y $\phi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = 1$: En este caso tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = x_i \cdot 1 = x_i.$$

Pero por hipótesis inductiva sabemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \in X^t$, con $t \leq r$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = 1$, por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = x_i \cdot 1 = x_i$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \in X^s \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \in X^s, \text{ para } s \leq r.$$

g) $\psi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = 1$ y $\phi = x_j\restriction R_{\mathbf{X}_1} \in X^s$, para $s \leq r$: Este caso es análogo al anterior.

h) $\psi\restriction R_{\mathbf{X}_1} = 1$ y $\phi\restriction R_{\mathbf{X}_1} \in X^s$, para $s > r$: Este caso es análogo a los dos casos anteriores.

2. Si $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}} = 1$ entonces tenemos una única posibilidad:

a) $\psi = 1$ y $\phi = 1$: En este caso se cumple que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Pero por hipótesis inductiva tenemos que $\psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = 1$ y $\phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = 1$, por lo que $\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = \psi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \cdot \phi_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} = 1 \cdot 1 = 1$.
Por lo tanto tenemos que

$$\alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_1} \notin \{X^t : t \leq r\} \text{ y } \alpha_{[0,1]^n_{\mathbf{G}}}\restriction R_{\mathbf{X}_2} \notin \{X^t : t \leq r\}.$$

$\square$

Bibliografía

[1] Aglianò, P., Ferreirim, I. M. A., Montagna, F., *Basic Hoops: an Algebraic Study of Continuous t-norms* Studia Logica, 2007 vol. 87, N. 1, pag. 73-98.

[2] Aglianò, P., Montagna, F., *Varieties of BL-algebras I: general properties* Journal of Pure and Applied Algebra, 2003, vol. 181, N. 2-3, pag. 105-129.

[3] Aguzzoli, S., Bova, S., *Schauder Hats for the Two-Variable Fragment of BL* Proceedings of the 2010 40th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, ISMVL '10, pag 27-32.

[4] Aguzzoli, S., Bova, S., *The free n-generated BL-algebra* Ann. Pure Appl. Logic, 2010 vol. 161, N. 9, pag. 1144-1170.

[5] Alexander, J. W., *The Combinatorial Theory of Complexes* Annals of Mathematics, Second Series, 31, N. 2, 292-320, 1930.

[6] Blok, W. J., Ferreirim, I., *Hoops and their implicational reducts* Banach Center Publications, 1993, vol. 28, N. 1, pag. 219-230.

[7] Blok, W. J., Ferreirim, I. M. A., *On the structure of hoops* Algebra Universalis, 2000, vol. 43, N. 2, pag. 233-257.

[8] Bova, S., *BL-functions and Free BL-algebra* PhD. Thesis, University of Siena, 2008.

[9] Burris, S. and Sankappanavar, H.P., *A course in universal algebra* Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 1981.

[10] Busaniche, M., *Variedades de BL-álgebras generadas por BL_n-cadenas* PhD. Thesis, Universidad de Buenos Aires, 2003.

[11] Busaniche, M., Cabrer, L., Mundici, D., *Confluence and combinatorics in finitely generated unital lattice-ordered abelian groups* Forum Mathematicum., 2012 24(2): 253-271, Retrieved 9 Jun. 2017, from doi:10.1515/form.2011.059.

[12] Busaniche, M., Mundici, D., *Geometry of Robinson considency in Łukasiewicz logic* Annals of Pure and Applied Logic, 2007, vol. 147, n. 1-2, pag. 1-22.

[13] Cignoli, R., D'Ottaviano, M.I., Mundici D., *Algebraic foundations of many valued reasoning* Kluwer Academic Pub., 2000.

[14] Cignoli, R., Esteva, F., Godo, L., Torrens, A., *Basic Fuzzy Logic is the logic of continuous t-norms and their residua* Soft Computing, 2000, vol. 4, n. 2, pag. 106-112.

[15] Cignoli, R., Torrens, A., *An algebraic analysis of product logic* Multiple Valued Logic, 2000, vol. 5, pag. 45 - 65.

[16] Cignoli, R., Torrens, A., *Hájek basic fuzzy logic and Łukasiewicz infinite-valued logic* Archive for Mathematical Logic, 2003, vol. 42, n. 4, p. 361-370.

[17] Cignoli, R., Torrens, A., *Standard completeness of Hájek basic logic and decompositions of BL-chains* Soft computing, 2005, vol. 9, n. 12, p. 862-868.

[18] Cintula, P., Hájek, P., Noguera, C., *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic Studies in Logic, Mathematical Logic and Foundations* College Publications, 2011.

[19] De Concini. C., Procesi, C., *Complete symmetric varieties II. Intersection theory* Algebraic Groups and Related Topics, 1983, vol. 147, n. 1-2, pag. 481-513.

[20] Di Nola, A., Esteva, F., Garcia, P., Sessa, S., *Subvarieties of BL-algebras generated by single-component chains* Archive for Mathematical Logic, 2002, vol. 41, n. 7, pag. 673-685.

[21] Esteva, F., *Monoidal t-norm based logic:towards a logic for left-continuous t-norms* Fuzzy Sets and Systems, 2001, vol. 124, n. 3, pag. 271-288.

[22] Ewald, G., *Combinatorial convexity and algebraic geometry* Graduate texts in mathematics (Vol. 168). Springer., 1996.

[23] Ferreirim, I. M. A., *On varieties and quasi varieties of hoops and their reducts* PhD. Thesis, University of Illinois at Chicago, 1992.

[24] Galatos, N., Jipsen, P., Kowalski, T., Ono, H., *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics* Elsevier, 2007.

[25] Gerla, B., *Many valued Logics of Continuous t-norms and their Functional Representation* PhD. Thesis, Università di Milano, 2000/2001.

[26] Grünbaum, B., *Convex Polytopes* Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2003.

[27] Hájek, P., *Metamathematics of Fuzzy Logic* Kluwer, 1998.

[28] Idziak, P. M, *Lattice operations in BCK-algebras* Mathematica Japonica, 1984, vol. 29, n. 6, pag. 839-846.

[29] Imai, Y., Iséki, K., *On axiom systems of propositional calculi* XIV. Proc. Japan Acad. 42 (1966), no. 1, 19–22.

[30] Iséki, K., Tanaka, S., *An introduction to the theory of BCK-algebras* Mathematica Japonica, 1978, vol. 23, pag. 1–26

[31] Marra, V., Mundici, D., *The Lebesgue state of a unital abelian lattice-ordered group* Journal of Group Theory, 2007, vol. 10, n. 5, pag. 655-684.

[32] Łukasiweicz, J., *O logice tròjwartościowej* Ruch. Filozoficzny 5 (1920), pag. 169-171.

[33] Łukasiweicz, J. Tarski, A., *Untersuchungen über den Aussagenkalkül,* Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie Cl. III 23 (1930), pag. 30-50.

[34] Mc Naughton, R., *A theorem about infinite-valued sentential logic* J. Symbolic Logic, 1951, vol. 16, n. 1, pag. 1-13.

[35] Montagna, F., *The Free BL-algebra on One Generator* Neural Network World, 2000, vol. 10.

[36] Mundici D., *Advanced Łukasiewicz calculus and MV-algebras* Springer, 2011.

[37] Mundici, D., *Finite axiomatizability in Lukasiewicz logic* Annals of Pure and Applied Logic, Vol. 162, n. 12, p. 1035-1047, 2011.

[38] Mundici, D., *The Differential Semantics of Łukasiewicz Syntactic Consequence* En Petr Hájek on Mathematical Fuzzy Logic, Springer International Publishing, p. 143-157, 2015.

[39] Panti, G., *A geometric proof of the completeness of the Łukasiewicz calculus* Journal of Symbolic Logic, 1995, vol. 60, n. 1-2, pag. 563-578.

[40] Panti, G., *Prime ideals in free ℓ-groups and free vector lattices* Journal of Algebra, 1999, vol. 219, n. 1-2, pag. 173-200.

[41] Paoli, F., *Substructural Logics: A Primer* Trends in Logic, vol. 13, Kluwer, Dordrecht, 2002.

[42] POST, E.L., *Introduction to a general theory of propositions* AM. J. MATH. 43 (1921), PAG. 163-185.

[43] ROURKE, C. P., SANDERSON, B. J., *Introduction to piecewise-linear topology* SPRINGER, 1972.

[44] SPADA, L., *Geometrical Dualities for Lukasiewicz logic* STUDIA LOGICA, 2012, VOL. 100, N. 1-2, PAG. 253-278.

[45] WAJSBERG, M., *Beiträge zum Metaaussagenkalkül I* MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, VOL. 42, 1935, PAG. 221-242.

[46] WÓJCICKI, R., *On matrix representations of consequence operations of Łukasiewicz sentencial calculi* ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHE LOGIK UND GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK, 1973, VOL. 19, N. 1-2, PAG. 239-147.

Índice alfabético