



SIMULACIÓN NUMÉRICA DE PROPAGACIÓN DE ONDAS  
EN RESERVORIOS DE HIDROCARBUROS FRACTURADOS  
UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

TESIS DE DOCTORADO

ROBIEL MARTINEZ CORREDOR

PRESENTADA ANTE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO ACADÉMICO DE  
DOCTOR EN INGENIERÍA

DIRECTOR: DR. JUAN E. SANTOS

CODIRECTOR: DRA. PATRICIA M. GAUZELLINO

JURADO DE TESIS:

DRA. CLAUDIA L. RAVAZZOLI

DR. RODOLFO RODRÍGUEZ

DR. DAVIDE GEI

LA PLATA, 18 DE DICIEMBRE DEL 2017

*A mis padres y a mi hija Gabriela.*

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Medios Porosos</b>	<b>7</b>
2.1. Ecuaciones Constitutivas de los Medios Porosos . . . . .	8
2.2. Ecuaciones de Movimiento de los Medios Porosos . . . . .	11
2.3. Efectos de Atenuación y Dispersión en Medios Porosos Saturados . .	13
2.3.1. Ejemplo Numérico . . . . .	17
<b>3. Propagación de Ondas en Medios Porosos</b>	<b>24</b>
3.1. Forma Débil del Problema . . . . .	25
3.2. Algoritmo Usando Elementos No Conformes . . . . .	29
3.3. Ejemplos Numéricos . . . . .	32
3.3.1. Propagación de Ondas en un Medio Isótropo . . . . .	33
3.3.2. Propagación de Ondas en un Medio de Dos Capas Isótropas .	34

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	4
<b>4. Coeficientes de Reflexión y Transmisión para Una Capa Fina</b>	<b>40</b>
4.1. Desplazamiento del Sólido y Relativo al Fluido . . . . .	42
4.2. Condiciones de Borde . . . . .	45
4.3. Coeficientes de Reflexión y Transmisión . . . . .	45
4.4. Ejemplos Numéricos . . . . .	52
4.4.1. Caso 1. Ondas P en Medios Fluidos . . . . .	52
4.4.2. Caso 2. Ondas P y S en Medios Sólidos . . . . .	53
4.4.3. Caso 3. Los Tres Medios con la Misma Matriz Rocosa Pero Saturados con Tres Fluidos Diferentes . . . . .	54
4.4.4. Caso 4. Tres Medios Saturados con el Mismo Fluido . . . . .	57
<b>5. Coeficientes R-T para Una Fractura como Condición de Borde</b>	<b>61</b>
5.1. Condiciones de Borde a Través de Una Fractura . . . . .	62
5.2. Coeficientes de Reflexión y Transmisión . . . . .	66
5.3. Ejemplos Numéricos . . . . .	68
5.3.1. Caso 1 . . . . .	70
5.3.2. Caso 2 . . . . .	70
5.3.3. Caso 3 . . . . .	73
<b>6. Sistemas de Fracturas Modeladas como Capas Finas en Medios de Biot y Anisotropía Inducida</b>	<b>86</b>
6.1. Medio Equivalente VTI . . . . .	88

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	5
6.2. Determinación de los Coeficientes $p_{IJ}$ . . . . .	90
6.2.1. Cálculo de $p_{33}$ . . . . .	91
6.2.2. Cálculo de $p_{11}$ . . . . .	92
6.2.3. Cálculo de $p_{55}$ . . . . .	92
6.2.4. Cálculo de $p_{66}$ . . . . .	93
6.2.5. Cálculo de $p_{13}$ . . . . .	94
6.3. Formulación Variacional del Problema . . . . .	94
6.4. Algoritmo de Elementos Finitos . . . . .	97
6.5. Ejemplos Numéricos . . . . .	101
6.5.1. Modelo Teórico Vs. Modelo Numérico . . . . .	104
6.5.2. Cambio en la Frecuencia de Análisis . . . . .	106
6.5.3. Presión de Fluido . . . . .	107
6.5.4. Aproximación para los Factores de Disipación de las Ondas qP	112
6.5.5. Cambio del Porcentaje de Saturación. . . . .	113
6.5.6. Factor de Disipación y Velocidades en Función de la Frecuencia.	114
6.5.7. Caso Homogéneo Vs. Caso Fractal. . . . .	116
<b>7. Sistemas de Fracturas Modeladas como Condiciones de Borde en Medios de Biot y Anisotropía Inducida</b>	<b>117</b>
7.1. Condiciones de Borde de Una Fractura en Un Medio de Biot . . . . .	118
7.2. Formulación Variacional del Problema . . . . .	122

7.3. Algoritmo de Elementos Finitos . . . . .	125
7.4. Ejemplos Numéricos . . . . .	130
7.4.1. Background y Fracturas Homogéneas . . . . .	130
7.4.2. Background y Fracturas con Patches de Fluido . . . . .	133
7.4.3. Medios Fractales . . . . .	137
7.4.4. Variación del Espesor de la Fractura . . . . .	141
7.4.5. Variación de la Presión Poral . . . . .	141
<b>8. Propagación de Ondas en Medios Poroelásticos Fracturados Utilizando Medios Viscoelásticos Equivalentes</b>	<b>146</b>
8.1. Forma Débil del Problema . . . . .	147
8.2. Algoritmo Usando Elementos No Conformes . . . . .	148
8.3. Ejemplos Numéricos . . . . .	149
8.3.1. Variación de la Densidad de Fracturas . . . . .	150
8.3.2. Variación del Fluido Saturante . . . . .	153
8.3.3. Background y Fracturas con Patches de Agua Salada y Gas . . . . .	155
8.3.4. Parámetros Anisótropos de Thomsen . . . . .	158
<b>9. Conclusiones</b>	<b>165</b>
<b>A. Teoría de la Atenuación del Flujo Mesoscópico para Medios Poroelásticos Anisótropos</b>	<b>170</b>
<b>B. Velocidades y Factores de Calidad del Medio Equivalente VTI</b>	<b>173</b>

*ÍNDICE GENERAL*

7

**Bibliografía**

**185**

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

2.1. Esquema de un medio poroso saturado. . . . .	8
2.2. Velocidad de fase de las ondas $P_I$ en función de la frecuencia, para una muestra de arenisca saturada con agua, petróleo y gas. . . . .	19
2.3. Velocidad de fase de las ondas $P_{II}$ en función de la frecuencia, para una muestra de arenisca saturada con agua, petróleo y gas. . . . .	20
2.4. Velocidad de fase de las ondas de corte o S en función de la frecuencia, para una muestra de arenisca saturada con agua, petróleo y gas. . . . .	20
2.5. Coeficiente de atenuación de las ondas $P_I$ en función de la frecuencia, para una muestra de arenisca saturada con agua, petróleo y gas. . . . .	22
2.6. Coeficiente de atenuación de las ondas $P_{II}$ en función de la frecuencia, para una muestra de arenisca saturada con agua, petróleo y gas. . . . .	22
2.7. Coeficiente de atenuación de las ondas de corte o S en función de la frecuencia, para una muestra de arenisca saturada con agua, petróleo y gas. . . . .	23
3.1. Elemento finito rectangular no conforme. Las funciones $\varphi^B$ , $\varphi^R$ , $\varphi^T$ y $\varphi^L$ representan las funciones base del elemento. . . . .	30



3.2. Funciones base utilizadas para el desplazamiento del fluido,  $\psi^L$  y  $\psi^R$  para el desplazamiento horizontal, y  $\psi^B$  y  $\psi^T$  para el desplazamiento vertical. . . . . 31

3.3. Fuente usada para el algoritmo de propagación de ondas en medios porosos de frecuencia central 60 Hz y amplitud  $A_f = 1$ . . . . . 33

3.4. Geometría de la prueba hecha para la propagación de una onda compresional en un medio isótropo y homogéneo saturado con un fluido viscoso. . . . . 34

3.5. Componente vertical del desplazamiento del sólido registrada por el receptor ubicado a 200 metros arriba de la fuente. La velocidad de grupo en el medio saturado por agua es mayor que la velocidad de grupo en el medio saturado por petróleo, la atenuación también es mayor en el medio saturado con agua. . . . . 35

3.6. Foto de la componente vertical del desplazamiento del sólido en el tiempo  $t = 0.11$  s, debido a que es un medio homogéneo, isótropo y a la baja frecuencia de la fuente, sólo existe una onda compresional propagándose en el medio. . . . . 36

3.7. Geometría de la prueba para la propagación de una onda compresional en un dominio compuesto por dos medios homogéneos e isótropos. . . 37

3.8. Foto de la componente vertical ( $z$ ) del desplazamiento del sólido en el plano  $x - z$ , tiempo  $t = 0.15$  s. Los ejes  $N_x$  y  $N_z$  indican la cantidad de elementos finitos en dirección  $x$  y  $z$ . . . . . 39

4.1. Geometría para dos semiespacios separados por una capa fina. . . . . 42

4.2. Coeficientes de reflexión y transmisión de una onda compresional en función del ángulo de incidencia para una apertura de la capa fina de  $h = 0.001$  m. Las líneas sólidas corresponden a la solución de Liu y Schmitt (2003) y los puntos corresponden a la presente solución. La onda incidente P tiene una frecuencia de 50 Hz y valores de  $\eta = \mu = 0$  y  $\phi = 1$ . . . . . 54

4.3. Coeficientes de reflexión y transmisión de las ondas compresionales y de corte, como función del ángulo de incidencia, para un espesor del medio  $\Omega_2 h = 0.001$  m. Las líneas continuas corresponden a la solución de Carcione (2015) y los símbolos corresponden a la presente solución. La onda incidente  $P_I$  tiene frecuencia de 50 Hz, además  $\eta = \phi = 0$ . Los valores absolutos son mostrados en escala semilogarítmica. . . . . 55

4.4. Valor absoluto de los coeficientes de reflexión para las ondas compresionales  $P_I$ ,  $P_{II}$  y las ondas de corte como función del ángulo de incidencia, para tres diferentes espesores de capa  $h$ . La onda incidente es del tipo  $P_{II}$  con frecuencia de 50 kHz. . . . . 56

4.5. Coeficientes de reflexión y transmisión de las ondas  $P_I$  en función del ángulo de incidencia, para tres diferentes espesores  $h$ . La onda incidente es  $P_I$  de frecuencia 50 Hz. . . . . 58

4.6. Coeficientes de reflexión y transmisión de las ondas  $P_{II}$  en función del ángulo de incidencia, para tres diferentes espesores  $h$ . La onda incidente es  $P_I$  de frecuencia 50 Hz. . . . . 59

4.7. Coeficientes de reflexión y transmisión de las ondas de corte en función del ángulo de incidencia, para tres diferentes espesores  $h$ . La onda incidente es  $P_I$  de frecuencia 50 Hz. . . . . 60

- 5.1. Valor absoluto de los coeficientes R-T para una onda incidente tipo  $P_I$ . El espesor de la fractura es  $h = 0.001$  m. Las curvas etiquetadas con *NS07, Ec. 30* corresponden a las condiciones de borde dadas en Nakagawa y Schoenberg (2007), mientras que las curvas etiquetadas con *Modelo CF* corresponden al modelo de capa fina. En las Figuras (a) y (b) se muestra el valor absoluto de los coeficientes para una incidencia normal en función de la frecuencia, para la fractura con permeabilidad de  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2$ , respectivamente. En las Figuras (c) y (d), a una frecuencia de 1 kHz, se muestran los coeficientes en función del ángulo de incidencia, para la fractura con permeabilidad de  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2$ , respectivamente. . . . . 71
  
- 5.2. Valor absoluto de los coeficientes R-T para una onda incidente tipo  $P_I$ . El espesor y permeabilidad de la fractura es  $h = 0.00001$  m y  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2$ . Las etiquetas *NS07, Ec. 30* y *Modelo CF* denotan las condiciones de borde en Nakagawa y Schoenberg (2007) y el modelo de capa fina, respectivamente. . . . . 72
  
- 5.3. Valor absoluto de los coeficientes R-T para las ondas tipo  $P_I$  y  $P_{II}$  en función de la frecuencia. La onda incidente es tipo  $P_I$  y el espesor y la porosidad de la fractura son  $h = 0.001$  m y  $\phi = 0.5$  respectivamente. La permeabilidad varía desde  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2$  a  $\kappa_0 = \infty$ . Las curvas etiquetadas con *NS07, Ec. 52* y *NS07, Ec. 53* son por las condiciones de borde en Nakagawa y Schoenberg (2007), mientras que las curvas etiquetadas con *Modelo CF* es por el modelo de capa fina. (a) y (b) muestran los coeficientes de reflexión para las ondas tipo  $P_I$  y  $P_{II}$ , respectivamente. (c) y (d) corresponden a los coeficientes de transmisión de las ondas tipo  $P_I$  y  $P_{II}$ , respectivamente. . . . . 74

- 5.4. Valor absoluto de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$  en función de la frecuencia. La onda incidente es tipo  $P_I$  y la permeabilidad y porosidad de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$   $\phi = 0.5$ , respectivamente. Los espesores de la fractura varían desde 0.00001 m a 0.01 m. La etiqueta *NS07, Ec. 52* se refiere a las condiciones de borde en Nakagawa y Schoenberg (2007). La etiqueta *Modelo CF* se refiere al modelo de capa fina. (a) y (b) ilustran los coeficientes de reflexión para las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$ , respectivamente. (c) y (d) corresponden a los coeficientes de transmisión de las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$ , respectivamente. . . . . 75
- 5.5. Valor absoluto de los coeficientes de reflexión y transmisión para las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$  en función de la frecuencia. La onda incidente es tipo  $P_I$ . La porosidad y la permeabilidad en la fractura son  $\phi = 0.5$  y  $\kappa_0 \rightarrow \infty$ , respectivamente. El espesor de la fractura se indica en las Figuras. La etiqueta *NS07, Ec. 53* corresponde a las condiciones de borde en Nakagawa y Schoenberg (2007), mientras que la etiqueta *Modelo CF* corresponde al modelo de capa fina. (a) y (b) muestran los coeficientes de reflexión de las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$ . (c) y (d) ilustran los coeficientes de transmisión de las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$ , respectivamente. 76
- 5.6. Valor absoluto de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$  en función de la frecuencia. La permeabilidad y el espesor de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$  y  $h = 0.001 \text{ m}$  respectivamente. Los valores de  $\phi$  son mostrados en las curvas. La etiqueta *NS07, Ec. 52* se refiere a las condiciones de borde en Nakagawa y Schoenberg (2007)- La etiqueta *Modelo CF* se refiere al modelo de capa fina. (a) y (b) muestran los coeficientes de reflexión de las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$  respectivamente. (c) y (d) ilustran los coeficientes de transmisión de las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$  respectivamente. . . . . 77

5.7. Valor absoluto de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$ ,  $P_{II}$  y de corte en función del ángulo de incidencia. El background está saturado con agua. Los coeficientes fueron calculados usando las condiciones de borde (5.6)-(5.11). La onda incidente es una onda tipo  $P_I$  con frecuencia 50 Hz, la permeabilidad y apertura de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $h = 0.001 \text{ m}$  respectivamente. . . . . 79

5.8. Fase de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$ ,  $P_{II}$  y de corte en función del ángulo de incidencia. El background está saturado con agua. Los coeficientes fueron calculados usando las condiciones de borde (5.6)-(5.11). La onda incidente es una onda tipo  $P_I$  con frecuencia 50 Hz, la permeabilidad y apertura de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $h = 0.001 \text{ m}$  respectivamente. . . . . 80

5.9. Valor absoluto de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$ ,  $P_{II}$  y de corte en función del ángulo de incidencia. El background está saturado con petróleo. Los coeficientes fueron calculados usando las condiciones de borde (5.6)-(5.11). La onda incidente es una onda tipo  $P_I$  con frecuencia 50 Hz, la permeabilidad y apertura de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $h = 0.001 \text{ m}$  respectivamente. . . . . 82

5.10. Fase de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$ ,  $P_{II}$  y de corte en función del ángulo de incidencia. El background está saturado con petróleo. Los coeficientes fueron calculados usando las condiciones de borde (5.6)-(5.11). La onda incidente es una onda tipo  $P_I$  con frecuencia 50 Hz, la permeabilidad y apertura de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $h = 0.001 \text{ m}$  respectivamente. . . . . 83

5.11. Valor absoluto de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$ ,  $P_{II}$  y de corte en función del ángulo de incidencia. El background está saturado con gas. Los coeficientes fueron calculados usando las condiciones de borde (5.6)-(5.11). La onda incidente es una onda tipo  $P_I$  con frecuencia 50 Hz, la permeabilidad y apertura de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $h = 0.001 \text{ m}$  respectivamente. . . . . 84

5.12. Fase de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$ ,  $P_{II}$  y de corte en función del ángulo de incidencia. El background está saturado con gas. Los coeficientes fueron calculados usando las condiciones de borde (5.6)-(5.11). La onda incidente es una onda tipo  $P_I$  con frecuencia 50 Hz, la permeabilidad y apertura de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $h = 0.001 \text{ m}$  respectivamente. . . . . 85

6.1. Medio laminado formado por capas poroelásticas e isotrópicas. . . . . 88

6.2. Test aplicados para obtener los coeficientes  $p_{IJ}$ . La orientación de los esfuerzos aplicados están indicadas con flechas. . . . . 95

6.3. Elemento conforme usado para el desplazamiento del sólido, el diámetro es  $h$ .  $\varphi^{BL}$ ,  $\varphi^{BR}$ ,  $\varphi^{TR}$  y  $\varphi^{TL}$  son las funciones base. . . . . 99

6.4. Elemento no conforme usado para el desplazamiento del fluido, el diámetro es  $h$ .  $\psi^B$  y  $\psi^T$  son las bases usadas para el desplazamiento vertical del fluido,  $\psi^L$  y  $\psi^R$  son las funciones bases utilizadas para el desplazamiento horizontal del fluido. . . . . 99

6.5. Valores y distribución de los coeficientes  $\lambda_u$  para todos los casos realizados. . . . . 105

6.6. Comparación de los resultados obtenidos con los modelos teóricos y el código de elementos finitos desarrollado. . . . . 106

6.7. Factores de disipación de las ondas qP y qSV, para los casos 1, 2 y 3 propuestos. Las frecuencias de análisis son 50 y 300 Hz. . . . . 108

6.8. Velocidades de energía de las ondas qP y qSV, para los casos 1, 2 y 3 propuestos. Las frecuencias de análisis son 50 y 300 Hz. . . . . 109

6.9. Velocidades de energía de las ondas SH, para los casos 1, 2 y 3 propuestos. Las frecuencias de análisis son 50 y 300 Hz. . . . . 110

6.10. Distribución de la presión de fluido para los test de compresión del Caso 3. . . . . 111

6.11. Test para validar la aproximación de la Ecuación (6.71), en los Casos 1, 2 y 3 a 300 Hz. . . . . 112

6.12. Factores de disipación y velocidades de energía para el cambio de saturación en el Caso 3. La frecuencia de análisis es 300 Hz. . . . . 113

6.13. Factor de disipación y velocidades de energía para los dos tests de compresión en el cálculo de los  $p_{IJ}$ , en función de la frecuencia. . . . . 115

6.14. Factores de disipación y velocidades de energía para el caso del medio fractal comparado con el medio homogéneo. La frecuencia de análisis es 50 Hz. . . . . 116

7.1. Ejemplo del dominio  $\Omega$  con borde  $\Gamma = \Gamma^L \cup \Gamma^R \cup \Gamma^B \cup \Gamma^T$ . Se muestra que  $\Omega$  está dividido en rectángulos  $R^{(l)}$  y una fractura horizontal  $\Gamma^{(f,l)}$  separa  $R^{(l)}$  y  $R^{(l+1)}$ . . . . . 120

7.2. Representación polar del factor de disipación ( $1000/Q$ ) para las ondas qP y qSV en función del ángulo de propagación. La frecuencia de la onda es 30 Hz. La respuesta teórica corresponde al modelo presentado en Krzikalla y Müller (2011) o Carcione et al. (2013), el modelo CF es el modelo de la fractura como capa fina y NS07 Ec. 52 corresponde al modelo de condición de borde presentado en la ecuación (52) de Nakagawa y Schoenberg (2007). . . . . 131

7.3. Representación polar de la velocidad de energía para las ondas qP, qSV y SH en función del ángulo de propagación. La frecuencia de la onda es 30 Hz. La respuesta teórica corresponde al modelo presentado en Krzikalla y Müller (2011) o Carcione et al. (2013), el modelo CF es el modelo de la fractura como capa fina y NS07 Ec. 52 corresponde al modelo de condición de borde presentado en la ecuación (52) de Nakagawa y Schoenberg (2007). . . . . 132

7.4. Distribución de patches de gas y agua en el background, para un 10 % de saturación de gas. Se observan los valores de densidad del fluido. . 134

7.5. Representación polar del factor de disipación ( $1000/Q$ ) para las ondas qP y qSV en función del ángulo de propagación. Se grafican los casos sólo agua, sólo gas (CO<sub>2</sub>), 10 % y 50 % de gas. La frecuencia de análisis es 30 Hz. . . . . 134

7.6. Representación polar de la velocidad de energía para las ondas qP y qSV en función del ángulo de propagación. Se grafican los casos sólo agua, sólo gas (CO<sub>2</sub>), 10 % y 50 % de gas. La frecuencia de análisis es 30 Hz. . . . . 135

7.7. Representación polar de la velocidad de energía para la onda SH en función del ángulo de propagación. Se grafican los casos sólo agua, sólo gas (CO<sub>2</sub>), 10 % y 50 % de gas. La frecuencia de análisis es 30 Hz. 135



7.8. Presión del fluido para compresiones normales al plano de la fractura con 10 % de saturación de gas. Frecuencia de análisis 30 Hz. . . . . 136

7.9. Distribución fractal de la porosidad para un 10 % de Material 3 en el background. . . . . 138

7.10. Representación polar de la velocidad de energía para las ondas qP, qSV y SH en función del ángulo de propagación. La muestra fracturada contiene 0 %, 10 % y 50 % del Material 3 de la Tabla 7.2, tanto para el background como para las fracturas. El fluido que satura la muestra es agua y la frecuencia de análisis es 60 Hz. . . . . 139

7.11. Representación polar de la velocidad de energía para las ondas qP, qSV y SH en función del ángulo de propagación. Se realizaron pruebas para dos espesores de fractura,  $h = 0.005$  m y  $h = 0.0005$  m. El background está saturado con gas y las fracturas con agua. La frecuencia de análisis es 60 Hz. . . . . 140

7.12. Complianzas en función de la presión poral. . . . . 143

7.13. Representación polar del factor de disipación para las ondas qP y qSV a 60 Hz. Se analizan tres valores de presión poral, valor normal de presión (línea roja, 5 MPa), valor medio (línea azul, 15 MPa) y sobrepresión (línea verde, 28 MPa). Las fracturas se modelan usando condiciones de borde. . . . . 144

7.14. Representación polar de la velocidad de energía para las ondas qP, qSV y SH a 60 Hz. Se analizan tres valores de presión de poro, valor normal de presión (línea roja, 5 MPa), valor medio (línea azul, 15 MPa) y sobrepresión (línea verde, 28 MPa). Las fracturas se modelan usando condiciones de borde. . . . . 145

8.1. Fuente usada para el algoritmo de propagación de ondas en medios viscoelásticos de frecuencia central 30 Hz y amplitud  $A_f = 1.0 \times 10^{11}$ . 150

8.2. Imágenes de la componente  $z$  en el plano  $x-z$  a 0.21 s, para diferentes densidades de fracturamiento, el fluido saturante es agua salada de formación. . . . . 152

8.3. Imágenes de la componente  $z$  en el plano  $x-z$  a 0.21 s, para una densidad de nueve fracturas por metro, variando el fluido saturante. . 154

8.4. Distribución de las densidades de fluido para la muestra fracturada con patches de agua salada de formación y gas. . . . . 156

8.5. Imágenes de la componente  $z$  en el plano  $x-z$  a 0.21 s, para una densidad de 9 fracturas por metro, variando el fluido saturante. . . . 157

8.6. Modelo de capas planas utilizado para el modelado de propagación de ondas sísmicas. El modelo se compone de dos capas isótropas y una capa VTI. . . . . 159

8.7. Registro sísmico de tres capas isótropas con y sin corrección NMO hiperbólica. . . . . 161

8.8. Registro sísmico de dos capas isótropas y una anisótropa VTI, con y sin corrección NMO hiperbólica. . . . . 162

8.9. Registro sísmico de dos capas isótropas y una anisótropa VTI, con corrección NMO no hiperbólica. . . . . 163

# ÍNDICE DE TABLAS

---

2.1. Propiedades de la arenisca Nivelsteiner. . . . .	18
2.2. Propiedades de los fluidos saturantes . . . . .	18
4.1. Propiedades de los fluidos saturantes . . . . .	53
5.1. Propiedades para el background y las fracturas. . . . .	69
6.1. Propiedades de los fluidos saturantes . . . . .	102
7.1. Propiedades para el background y para las fracturas. . . . .	131
7.2. Propiedades físicas de los materiales usados en el caso fractal. . . . .	137
8.1. Propiedades físicas de los materiales usados para los casos analizados.	151
8.2. Velocidades de energía para las ondas qP y qSV en la dirección normal a las fracturas, variando la densidad de fracturamiento. El fluido saturante es agua salada de formación. . . . .	151
8.3. Velocidades de energía para las ondas qP y qSV a 45 grados de la dirección de fracturamiento, variando la densidad de fracturas por metro. El fluido saturante es agua salada de formación. . . . .	153

8.4. Velocidades de energía para las ondas qP y qSV en la dirección normal a las fracturas, variando el fluido saturante. La densidad de fracturamiento es 9 fracturas por metro. . . . . 155

8.5. Velocidades de energía para las ondas qP y qSV a 45 grados de la dirección de fracturamiento, variando el fluido saturante. La densidad de fracturamiento es 9 fracturas por metro. . . . . 155

8.6. Velocidades de energía para las ondas qP y qSV en la dirección normal a las fracturas, para la roca saturada con agua salada y gas. La densidad de fracturamiento es 9 fracturas por metro. . . . . 158

8.7. Velocidades de energía para las ondas qP y qSV a 45 grados de la dirección de fracturamiento, para la roca saturada con agua salada y gas. La densidad de fracturamiento es 9 fracturas por metro. . . . . 158

# RESUMEN

---

Debido a la importancia del estudio de los yacimientos naturalmente fracturados en la exploración, caracterización y desarrollo de reservorios, esta tesis se enfoca en el contexto de la física numérica de rocas y el modelado de la propagación de ondas en los medios porosos fracturados.

Se parte de los conceptos básicos sobre medios porosos y ecuaciones de Biot en el dominio del tiempo y la frecuencia. Se combina esta teoría con distintas caracterizaciones para las fracturas y se desarrolla un algoritmo de propagación de ondas en este tipo de medios mediante la técnica de elementos finitos, usando una malla estructurada y condiciones de borde absorbentes. Esto se hace utilizando elementos rectangulares no conformes, reduciendo así la dispersión numérica.

El modelado de los medios porosos fracturados empieza considerando la fractura como una delgada capa porosa, poco resistente y permeable. Los coeficientes de reflexión y transmisión para la misma son calculados para diferentes ángulos de incidencia y rango de frecuencias variando las propiedades del medio y el espesor de la capa. Estos coeficientes son útiles en técnicas como AVO (Amplitud Vs. Offset) donde se tienen en cuenta cambios de fase y de amplitud de la onda al entrar en contacto con diferentes interfaces sísmicas y fluidos porales.

Siguiendo con el modelado de medios fracturados se diseña un conjunto de experimentos armónicos de compresión y corte, aplicados a muestras representativas de las formaciones rocosas del subsuelo que contienen un conjunto denso de fracturas de escala mesoscópica orientadas en direcciones preferenciales. Se desarrolla

un algoritmo de elementos finitos para calcular los coeficientes de rigidez, la presión de fluido y los efectos de atenuación de estos materiales en función de la frecuencia de análisis, variando las propiedades de las rocas sólidas y los fluidos que las saturan. Mediante “upscaling” numérico se realiza la determinación de los coeficientes de las relaciones constitutivas del medio viscoelástico anisótropo equivalente a escala macroscópica.

Usando un nuevo modelo para las fracturas, donde éstas se asumen como una condición de borde entre dos medios porosos, se calculan nuevamente los coeficientes de reflexión y transmisión para una onda que incide en la fractura, variando las propiedades de sólidos y fluidos, tanto de la fractura como de su entorno. Usando el método de los elementos finitos se implementa un código para el cálculo de los coeficientes de rigidez, presión de fluido y atenuación, usando experimentos armónicos al igual que con el modelo de capa fina.

Por último se utiliza un algoritmo para la propagación de ondas en medios viscoelásticos con elementos finitos, modelando así la respuesta sísmica de las ondas en la macro escala, a partir de los coeficientes de rigidez calculados con los modelos de medios fracturados.

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

---

La propagación de ondas a través de medios fracturados es un tema importante en la exploración de hidrocarburos, minería y caracterización y producción de yacimientos (Schoenberg y Douma, 1988). En particular, los depósitos naturalmente fracturados han recibido interés en los últimos años, ya que en general las fracturas naturales controlan la permeabilidad del yacimiento. En la prospección geofísica y el desarrollo de yacimientos, el conocimiento de la orientación, densidades y tamaños de las fracturas es esencial, ya que son factores de control en la producción de hidrocarburos (Gurevich, 2003; Grechka, 2007). Esto también es importante en el almacenamiento de  $\text{CO}_2$  en las formaciones geológicas, para monitorear en las plumas de inyección, y la posible generación de fallas y fracturas, donde el  $\text{CO}_2$  puede escapar a la superficie (Picotti et al., 2012).

El objetivo de esta tesis es el estudio de la reflectividad sísmica de fracturas en medios porosos saturados (medios de Biot) y el desarrollo de modelos numéricos para la propagación de ondas en estos medios utilizando el método de elementos finitos. A estos efectos, se estudian los coeficientes de reflexión y transmisión de una fractura que separa dos semiespacios, modelada como una capa fina o como una condición de borde. Se analiza asimismo la anisotropía inducida por sistemas de fracturas a escala mesoscópica orientadas en direcciones preferenciales. También se modela la propagación de ondas a escala macroscópica en medios de Biot fracturados

utilizando medios viscoelásticos anisótropos equivalentes a longitudes de onda largas comparada con la distancia media entre fracturas.

La tesis comienza con un resumen de la teoría de Biot, donde se plantean las ecuaciones constitutivas y de movimiento para las ondas en medios porosos saturados con fluidos viscosos. Se analiza el comportamiento de los dos tipos de onda P ( $P_I$  y  $P_{II}$ ) y la onda de corte S por medio de ejemplos numéricos.

En el tercer Capítulo, se plantea un algoritmo de modelado por medio del método de elementos finitos para capas porosas homogéneas, basados en las ecuaciones constitutivas y de movimiento de Biot en el dominio de la frecuencia. Al final del Capítulo se analiza la propagación de ondas en los medios porosos y las ondas convertidas cuando un frente de onda pasa de un medio con unas propiedades a otro medio con propiedades diferentes, ya sea por que la roca está saturada con un fluido diferente o la roca tenga diferentes propiedades.

En el Capítulo 4 se analiza la dispersión debido a una capa delgada y porosa que separa dos semiespacios. Los coeficientes de reflexión y transmisión (coeficientes R-T), son calculados a partir de los campos de potenciales y se estudia la respuesta para diferentes ángulos de incidencia y para diferentes frecuencias de interés (Martínez et al., 2014). Para verificar el algoritmo usado, se tomaron casos límites y se comparó la respuesta con modelos preexistentes.

Mientras que en el Capítulo 4 se calcularon los coeficientes R-T para una capa fina porosa que separaba dos semiespacios, en el Capítulo 5 se modela esta capa fina, porosa y permeable, como una condición de borde según Nakagawa y Schoenberg (2007). El algoritmo desarrollado también se basa en campos de potencial y es comparado con la respuesta obtenida al modelar la fractura como una capa fina (Martínez et al., 2016). Se estudian casos de interés en el campo de la geofísica, donde se analizan los cambios en las fases de las ondas.

Debido a que un medio poroso con fracturas horizontales se comporta como un medio viscoelástico TI, a escala macroscópica, en el Capítulo 6 se explica de forma



detallada el algoritmo usado para obtener los coeficientes complejos de la matriz de rigidez  $p_{ij}$  por medio de test armónicos usando el método de los elementos finitos. El algoritmo se diferencia de los modelos preexistentes en que se puede usar no sólo para medios de capas porosas homogéneas, sino también para medios porosos con cualquier tipo de heterogeneidad, ya sea en el fluido que los satura como en las propiedades de la roca que los componen. Al final del Capítulo se verifican los resultados obtenidos para el caso de rocas homogéneas e isotrópicas comparándolos con los modelos desarrollados por Krzikalla y Müller (2011) y Carcione et al. (2011). Se examinan diferentes casos como medios con heterogeneidades fractales en los fluidos saturantes y en la permeabilidad, donde se analizan los efectos de la anisotropía en la dispersión de la energía y en las velocidades de las ondas que se propagan.

Al igual que se hizo en el cálculo de los coeficientes R-T en el Capítulo 5, en el Capítulo 7 se representaron las fracturas del medio poroso como condiciones de borde usando el método de los elementos finitos y el modelo desarrollado por Nakagawa y Schoenberg (2007). El algoritmo tiene como ventaja la reducción del número de incógnitas debido a que las fracturas no son modeladas como capas porosas y permeables, sino como discontinuidades en las presiones del fluido y en los desplazamientos, manteniendo continuas las componentes de las tensiones totales, lo que reduce el número de incógnitas globales del algoritmo. Como se hizo en el Capítulo 6, se validó el algoritmo con el modelo de Krzikalla y Müller (2011) y Carcione et al. (2011) para medios con capas homogéneas e isotrópicas. También se analizan casos de heterogeneidades tanto en el background como en las fracturas y casos de variación en la presión poral, verificando como se afectan las velocidades con la dirección de propagación.

Por último, en el Capítulo 8 se aplica el algoritmo planteado con el método de los elementos finitos desarrollado por Gauzellino et al. (2001) como un ejemplo para mostrar la utilidad de los coeficientes complejos  $p_{ij}$  calculados con la metodología descrita en los Capítulos anteriores. Se muestra como modelar la propagación de ondas en medios de Biot fracturados del tamaño de cientos de metros, con fracturas

con espesor de centímetros o milímetros sin necesidad de hacer un mallado tan fino. De esta manera se pasa de una escala mesoscópica a una escala macroscópica, reduciendo el número de elementos finitos necesarios y de incógnitas al pasar de un medio de Biot a un medio viscoelástico equivalente. Al final del Capítulo se analizan ejemplos numéricos, donde se observan los efectos en los frentes de onda al variar las propiedades de los medios fracturados. También se incluye un ejemplo de una aplicación muy interesante en el campo del procesamiento de datos sísmicos de reflexión usando los parámetros anisótropos de Thomsen.

## CAPÍTULO 2

# MEDIOS POROSOS

---

En el presente Capítulo se plantean las ecuaciones constitutivas y de movimiento para las ondas que se propagan en medios porosos elásticos saturados por un fluido compresible y viscoso, esto fue analizado por Biot en los artículos (Biot, 1956a,b, 1962), donde asume que el fluido puede fluir relativo a la matriz sólida causando fricción.

Biot predijo la existencia de dos ondas compresionales ( $P_I$  y  $P_{II}$ ) y una onda de corte S. La onda  $P_I$  y la onda de corte S tienen comportamiento similar a las ondas en un sólido elástico, con altas velocidades de fase, baja atenuación y poca dispersión. Mientras que la onda  $P_{II}$  se comporta como una onda de tipo difusivo en bajas frecuencias, debido a su baja velocidad de fase y alta atenuación y dispersión, mientras que en altas frecuencias se convierte en una onda de propagación.

La onda  $P_{II}$  corresponde al movimiento fuera de fase entre la fase sólida y la fluida, mientras que la onda  $P_I$  corresponde al movimiento en fase entre la fase sólida y la fluida.

En el desarrollo de este Capítulo se plantearán las ecuaciones que caracterizan a las ondas antes mencionadas servirán de base para la comprensión de los siguientes Capítulos de este trabajo.

## 2.1 ECUACIONES CONSTITUTIVAS DE LOS MEDIOS POROSOS

Se considera un medio poroso saturado, aquel material que está constituido por una fase sólida (zona marrón en la Figura 2.1) y saturado por un fluido compresible y viscoso (zona azul en la Figura 2.1) el cual se encuentra en los poros del material. También se considera el agregado solido-fluido isótropo.

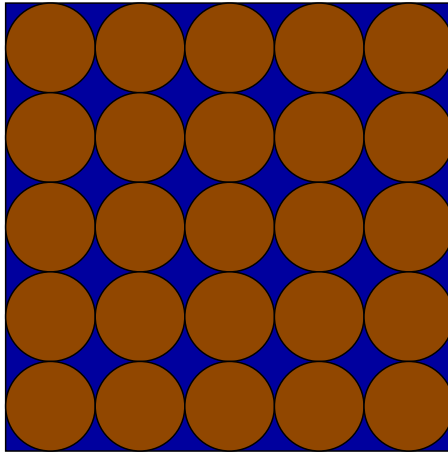


Figura 2.1: Esquema de un medio poroso saturado.

Se definen los vectores  $\mathbf{u}_s = (u_{s,1}, u_{s,2}, u_{s,3})$  y  $\mathbf{u}_f = (u_{f,1}, u_{f,2}, u_{f,3})$ , que son los desplazamientos promedio de la parte sólida y el fluido, respectivamente. Se define además el vector  $\mathbf{w}$  como el desplazamiento relativo del fluido o el desplazamiento promedio del fluido por unidad de volumen del agregado sólido-fluido,

$$\mathbf{w} = \phi (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_s), \quad (2.1)$$

donde  $\phi$  es la porosidad efectiva (poros continuos e interconectados).

Las relaciones esfuerzo-deformación y presión de fluido representan las ecuaciones constitutivas del material poroso. Siguiendo Biot (1956a, 1962), éstas se escriben:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = 2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_s) + \delta_{ij}(\lambda_u \nabla \cdot \mathbf{u}_s + D \nabla \cdot \mathbf{w}), \quad (2.2)$$

$$p_f(\mathbf{u}) = -D\nabla \cdot \mathbf{u}_s - M\nabla \cdot \mathbf{w}, \quad (2.3)$$

donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker y  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_s, \mathbf{w})$ .

El tensor de deformación  $\varepsilon_{ij}$  que aparece en la ecuación (2.2), se define como

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_s) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{s,j}}{\partial x_i} \right). \quad (2.4)$$

El cambio en el contenido de fluido por unidad de volumen del agregado es  $\xi = -\nabla \cdot \mathbf{w}$ , donde un valor positivo indica un incremento en el contenido de fluido.

El coeficiente  $\mu$  es el módulo de corte del medio poroso saturado, según Gassmann (1951) se asume que es idéntico al módulo de corte de la roca seca  $\mu_m$ , debido a que los fluidos no soportan esfuerzos de cizalla y además se asume que los fluidos no alteran la matriz rocosa.

Si se considera un sistema cerrado, en el cual no se permite que entre o salga fluido del agregado sólido-fluido, se define  $K_u$  como el módulo de volumen del medio poroso saturado cerrado,

$$K_u = G = \lambda_u + \frac{2}{3}\mu \quad (2.5)$$

y el módulo de onda plana cerrado  $H_u$

$$H_u = \lambda_u + 2\mu, \quad (2.6)$$

donde  $\lambda_u$  y  $\mu$  son análogas a las constantes de Lamé de un sólido elástico.

Los coeficientes  $M$  y  $D$  en la ecuaciones (2.2) y (2.3), pueden ser escritos como (Carcione, 2015)

$$M = \left( \frac{\alpha - \phi}{K_s} + \frac{\phi}{K_f} \right)^{-1}, \quad (2.7)$$

$$D = \alpha M, \quad (2.8)$$

$$\alpha = 1 - \frac{K_m}{K_s}, \quad (2.9)$$

donde  $\alpha$  es conocido como el coeficiente de esfuerzo efectivo del material, mientras que  $K_s$ ,  $K_m$  y  $K_f$  son los módulos de volumen de los granos sólidos, de la matriz seca y del fluido saturante, respectivamente. Existe otra expresión para el cálculo del módulo de volumen del medio poroso cerrado, ésta depende de  $K_m$ ,  $M$  y  $\alpha$ ,

$$K_u = K_m + \alpha^2 M. \quad (2.10)$$

De las ecuaciones (2.2) y (2.3), se observa que las tensiones del modelo están relacionadas con las variables  $\xi$  y  $\varepsilon_{ij}$  por medio de una matriz simétrica, cuyos elementos son funciones de los coeficientes elásticos. Si se asume que el agregado sólido-fluido muestra un comportamiento viscoelástico lineal, se pueden extender las relaciones constitutivas reemplazando los módulos elásticos reales  $\mu$ ,  $K_u$  y  $M$  por operadores viscoelásticos apropiados.

La transformada de Fourier de una función  $f(t)$ , se define como

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (2.11)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular. Por lo tanto la transformada de Fourier de las relaciones constitutivas es,

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}(\omega)) = 2\mu(\omega)\varepsilon_{ij}(\omega) + \delta_{ij}(\lambda_u(\omega)e^s(\omega) + D(\omega)\xi(\omega)), \quad (2.12)$$

$$p_f(\mathbf{u}(\omega)) = -D(\omega)e^s(\omega) + M(\omega)\xi(\omega), \quad (2.13)$$

donde  $e^s(\omega) = \nabla \cdot \mathbf{u}_s(\omega)$  y si se incluye la viscoelasticidad,  $\lambda_u(\omega)$ ,  $\mu(\omega)$ ,  $D(\omega)$  y  $M(\omega)$  son los módulos poro-viscoelásticos complejos dependientes de la frecuencia.

Por último, es necesario hablar de otra propiedad de los medios porosos, la permeabilidad ( $\kappa$ ), esta propiedad es la capacidad de transferencia de los fluidos a través del material, depende exclusivamente del medio poroso y es independiente del fluido que lo inunda. Para mayor información sobre esta propiedad ver Bidner (2010).

## 2.2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE LOS MEDIOS POROSOS

Las ecuaciones de movimiento para el caso isótropo están dadas por (Biot, 1956a, 1962; Carcione, 2015)

$$\rho_b \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \quad (2.14)$$

$$\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} + g \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + \frac{\eta}{\kappa_0} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = -\nabla p_f(\mathbf{u}). \quad (2.15)$$

Asumiendo coeficientes elásticos constantes, las ecuaciones de Biot para movimiento están dadas por

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= H_u \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_s) + D \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) \\ &= \rho_b \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} -\nabla p_f(\mathbf{u}) &= D \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) + M \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) \\ &= \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} + g \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + b \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde  $\rho_b$  es la densidad de masa del agregado sólido-fluido y está dada por

$$\rho_b = (1 - \phi) \rho_s + \phi \rho_f, \quad (2.18)$$

siendo  $\rho_s$  y  $\rho_f$  la densidad de los granos sólidos y del fluido saturante, respectivamente.

Los coeficientes de acoplamiento de masa y viscoso entre la fase sólida y la fase fluida, son designados por los parámetros  $g$  y  $b$  respectivamente (Berryman, 1980, 1982)

$$g = \frac{S \rho_f}{\phi}, \quad (2.19)$$

$$b = \frac{\eta}{\kappa_0}, \quad (2.20)$$

$$S = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\phi} \right), \quad (2.21)$$

donde  $S$  se conoce como el factor de estructura,  $\eta$  es la viscosidad del fluido y  $\kappa_0$  es la permeabilidad absoluta. Los coeficientes  $b$  y  $g$  son usados para frecuencias menores a una frecuencia crítica,  $\omega_c$ . Para estas frecuencias, el movimiento relativo del fluido en los poros es de tipo laminar, de tipo Poiseuille y por tal razón los coeficientes de acoplamiento pueden ser constantes. Cuando la frecuencia de análisis es superior a  $\omega_c$ , las fuerzas inerciales y viscosas son del mismo orden lo cual causa que los coeficientes de acoplamiento deban variar con la frecuencia. Esta frecuencia crítica puede ser calculada como:

$$\omega_c = \frac{\eta\phi}{\kappa_0\rho_f S}. \quad (2.22)$$

En el artículo de Johnson et al. (1987), se definen los coeficientes de acoplamiento dependientes de la frecuencia,

$$b(\omega) = \operatorname{Re} \left( \frac{\eta}{\kappa(\omega)} \right), \quad (2.23)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left( \frac{\eta}{\kappa(\omega)} \right), \quad (2.24)$$

siendo  $\kappa(\omega)$  la permeabilidad dinámica, la cual es una función compleja definida por

$$\kappa(\omega) = \kappa_0 \left( \sqrt{1 + i \frac{4\omega}{n_j \omega_c} + i \frac{\omega}{\omega_c}} \right)^{-1}. \quad (2.25)$$

La variable  $n_j$  queda determinada por la geometría poral (Johnson et al., 1987). Según Berryman (2003) los valores para  $n_j$  pueden oscilar entre 8 y 10 para un amplio rango de valores usados en exploración sísmica, en este trabajo se ha considerado  $n_j=8$ .

En el dominio de la frecuencia, las ecuaciones de movimiento de Biot quedan dadas por (Biot, 1956b)

$$-\omega^2 \rho_b \mathbf{u}_s(\omega) - \omega^2 \rho_f \mathbf{w}(\omega) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\omega)) = \mathbf{f}^{(1)}(\omega), \quad (2.26)$$

$$-\omega^2 \rho_f \mathbf{u}_s(\omega) - \omega^2 g \mathbf{w}(\omega) + i \omega b \mathbf{w}(\omega) + \nabla p_f = \mathbf{f}^{(2)}(\omega), \quad (2.27)$$



donde  $\mathbf{f}^{(1)}$  y  $\mathbf{f}^{(2)}$  son fuerzas externas en el sólido y el fluido por unidad de volumen del agregado.

## 2.3 EFECTOS DE ATENUACIÓN Y DISPERSIÓN EN MEDIOS POROSOS SATURADOS

Partiendo de las ecuaciones (2.16) y (2.17) (cuando no hay fuerzas externas) y aplicando la transformada de Fourier, obtenemos

$$-\omega^2 \rho_b \mathbf{u}_s(\omega) - \omega^2 \rho_f \mathbf{w}(\omega) = (\lambda_u + \mu) \nabla e^s(\omega) - D \nabla \xi(\omega) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}_s(\omega), \quad (2.28)$$

$$-\omega^2 \rho_f \mathbf{u}_s(\omega) - \omega^2 g \mathbf{w}(\omega) + i \omega b \mathbf{w}(\omega) = D \nabla e^s(\omega) - M \nabla \xi(\omega). \quad (2.29)$$

Aquí los coeficientes  $\lambda_u$ ,  $\mu$ ,  $D$  y  $M$  pueden ser constantes o dependientes de la frecuencia, también pueden ser complejos (caso viscoelástico). En cuanto a los coeficientes de acoplamiento  $g$  y  $b$ , pueden ser constantes o variables con la frecuencia si las frecuencias son mayores que la frecuencia crítica  $\omega_c$ .

Aplicando el operador divergencia  $\nabla$  en (2.28) y (2.29) se obtienen las ecuaciones que gobiernan la propagación de las ondas compresionales,

$$-\omega^2 \rho_b e^s(\omega) - \omega^2 \rho_f e^f(\omega) = (\lambda_u + 2\mu) \nabla^2 e^s(\omega) + D \nabla^2 e^f(\omega), \quad (2.30)$$

$$-\omega^2 \rho_f e^s(\omega) - \omega^2 g e^s(\omega) + i \omega b e^f(\omega) = D \nabla^2 e^s(\omega) + M \nabla^2 e^f(\omega), \quad (2.31)$$

donde  $e^f = \nabla \cdot \mathbf{w}$ .

Si se considera una onda plana compresional, con frecuencia angular  $\omega$  y número de onda  $q = q_r + i q_i$  propagándose en la dirección  $x_1$  se llega a las expresiones

$$e^s = \nabla \cdot \mathbf{u}_s = A_s^{(q)} e^{i(\omega t - q x_1)} = A_s^{(q)} e^{q_i x_1} e^{i q_r \left( \frac{\omega}{q_r} t - x_1 \right)}, \quad (2.32)$$

$$e^f = \nabla \cdot \mathbf{w} = A_f^{(q)} e^{i(\omega t - qx_1)} = A_f^{(q)} e^{q_i x_1} e^{iq_r \left(\frac{\omega}{qr} t - x_1\right)}. \quad (2.33)$$

Aplicando transformada de Fourier a (2.32) y (2.33) y reemplazando en las ecuaciones (2.30) y (2.31) resulta

$$-\omega^2 \rho_b A_s^{(q)} - \omega^2 \rho_f A_f^{(q)} = -q^2 H_u A_s^{(q)} - q^2 D A_f^{(q)}, \quad (2.34)$$

$$-\omega^2 \rho_f A_s^{(q)} - \omega^2 g A_f^{(q)} + i\omega b A_f^{(q)} = -q^2 D A_s^{(q)} - q^2 M A_f^{(q)}. \quad (2.35)$$

Definiendo las variables  $\gamma = \frac{\omega}{q}$  y  $\tilde{g} = g - i\frac{b}{\omega}$ , y reemplazando en las anteriores ecuaciones se obtiene

$$\gamma^2 \rho_b A_s^{(q)} + \gamma^2 \rho_f A_f^{(q)} = H_u A_s^{(q)} + D A_f^{(q)}, \quad (2.36)$$

$$\gamma^2 \rho_f A_s^{(q)} + \gamma^2 \tilde{g} A_f^{(q)} = D A_s^{(q)} + M A_f^{(q)}. \quad (2.37)$$

A partir de las ecuaciones (2.36) y (2.37) se pueden definir las siguientes matrices

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \rho_b & \rho_f \\ \rho_f & \tilde{g} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} H_u & D \\ D & M \end{pmatrix}, \quad \text{y } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_s^{(q)} \\ A_f^{(q)} \end{pmatrix},$$

que nos lleva al siguiente sistema de valores propios

$$\gamma^2 \mathcal{M} \mathcal{A} = \mathcal{E} \mathcal{A}. \quad (2.38)$$

Se puede observar a partir de la ecuación (2.38), que para obtener los números de onda  $q$ , basta con solucionar el problema

$$\det(\mathcal{R} - \gamma^2 \mathbf{I}) = 0, \quad (2.39)$$

donde  $\mathcal{R} = \mathcal{M}^{-1} \mathcal{E}$ .

Desde la ecuación (2.39) se obtiene un polinomio de grado 4

$$(\rho_f^2 - \tilde{g}\rho_b) \gamma^4 + (H_u \tilde{g} - 2D\rho_f + M\rho_b) \gamma^2 + (D^2 - H_u M) = 0 \quad (2.40)$$

y usando la ecuación de segundo grado ( $ax^2 + bx + c$ ), se pueden obtener las raíces para  $\gamma^2$ . Por lo tanto,

$$\gamma^2 = \frac{-(H_u \tilde{g} - 2D\rho_f + M\rho_b) \pm \sqrt{(H_u \tilde{g} - 2D\rho_f + M\rho_b)^2 - 4(\rho_f^2 - \tilde{g}\rho_b)(D^2 - H_u M)}}{2(\rho_f^2 - \tilde{g}\rho_b)}. \quad (2.41)$$

Con la ecuación (2.41) se obtienen cuatro valores posibles de  $\gamma$ . Dado que

$$q = q_r + iq_i = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\omega(\gamma_r - i\gamma_i)}{\gamma_r^2 + \gamma_i^2}, \quad (2.42)$$

se escogen los dos  $\gamma$ , tales que  $\gamma_i^{(j)} \geq 0$  ó  $q_i^{(j)} \leq 0$ , donde  $j = 1, 2$ . Estos dos  $\gamma^{(j)}$  son los únicos que tienen significado físico.

Las velocidades de fase están dadas por

$$v^{(j)} = \frac{\omega}{|q_r^{(j)}|}, \quad j = 1, 2, \quad (2.43)$$

correspondiendo a las ondas compresionales tipo P<sub>I</sub> y P<sub>II</sub> respectivamente. Biot demostró que las ondas P<sub>I</sub> corresponden a los movimientos en fase de las fases sólida y fluida, mientras que para las ondas P<sub>II</sub> las fases sólida y fluida tienen movimientos opuestos (Biot, 1956a). Cuando se está en las bajas frecuencias, la onda P<sub>II</sub> se comporta como una onda de tipo difusivo, debido a la baja velocidad de fase y a la alta atenuación y dispersión; mientras que en las altas frecuencias esta onda se convierte en una onda de propagación.

Multiplicando la ecuación (2.40) por  $\omega$  y tomando el límite  $\omega \rightarrow 0$  se obtiene la velocidad de Gassmann

$$v_G = \sqrt{\frac{K_u + \frac{4}{3}\mu}{\rho_b}}. \quad (2.44)$$

Para medir la atenuación en decibeles (dB), se define el coeficiente  $\alpha^{(j)}$

$$\alpha^{(j)} = 20(2\pi) \log_{10} (e) \frac{|q_i^{(j)}|}{|q_r^{(j)}|} \quad j = 1, 2, \quad (2.45)$$

tal que este coeficiente mide la atenuación de la onda  $P_j$  después de propagarse una longitud de onda.

Para el caso de las ondas de corte (ondas S), se va a aplicar el operador rotacional a las ecuaciones (2.28) y (2.29)

$$-\omega^2 \rho_b \mathbf{k}^s(\omega) - \omega^2 \rho_f \mathbf{k}^f(\omega) = \mu \Delta \mathbf{k}^s(\omega), \quad (2.46)$$

$$-\omega^2 \rho_f \mathbf{k}^s(\omega) - \omega^2 g \mathbf{k}^f(\omega) + i\omega b \mathbf{k}^f(\omega) = 0, \quad (2.47)$$

donde  $\mathbf{k}^s = \nabla \times \mathbf{u}_s$  y  $\mathbf{k}^f = \nabla \times \mathbf{w}$  son consideradas ondas rotacionales.

Ahora si se define una onda plana rotacional con frecuencia angular  $\omega$  y número de onda  $q = q_r + iq_i$  propagándose en la dirección  $x_1$  se tiene

$$\mathbf{k}^s = C_s^{(q)} e^{q_i x_1} e^{iq_r \left(\frac{\omega}{q_r} t - x_1\right)}, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{k}^f = C_f^{(q)} e^{q_i x_1} e^{iq_r \left(\frac{\omega}{q_r} t - x_1\right)}. \quad (2.49)$$

Aplicando transformada de Fourier y sustituyendo en las ecuaciones (2.46) y (2.47) se obtiene

$$-\omega^2 \rho_b C_s^{(q)} - \omega^2 \rho_f C_f^{(q)} = -q^2 \mu C_s^{(q)}, \quad (2.50)$$

$$-\omega^2 \rho_f C_s^{(q)} - \omega^2 g C_f^{(q)} + i\omega b C_f^{(q)} = 0. \quad (2.51)$$

Ahora se va a definir la variable  $\beta = \frac{\omega}{q}$ , y reordenando las ecuaciones (2.50) y (2.51) se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} \rho_b - \frac{\mu}{\beta^2} & \rho_f \\ \rho_f & g - i\frac{b}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_s^{(q)} \\ C_f^{(q)} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

que tendrá soluciones no triviales si el determinante de la matriz es cero.

A partir del anterior sistema se obtienen los valores de  $\beta$

$$\beta^2 = \frac{\mu}{\rho_b - \frac{\rho_f^2}{g - i\frac{b}{\omega}}}, \quad (2.52)$$

pero de estos dos valores sólo uno tiene significado físico, si se recuerda que

$$q = q_r + iq_i = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega(\beta_r - i\beta_i)}{\beta_r^2 + \beta_i^2}, \quad (2.53)$$

se escoge el  $\beta$  tal que  $\beta_i > 0$ , o en otras palabras  $q_i^{(s)} < 0$ .

En general la velocidad de fase para las ondas de corte viene dada por

$$v^{(s)} = \frac{\omega}{|q_r^{(s)}|} \quad (2.54)$$

y el factor de atenuación por

$$\alpha^{(s)} = 20(2\pi) \log_{10} (e) \frac{|q_i^{(s)}|}{|q_r^{(s)}|}. \quad (2.55)$$

### 2.3.1 EJEMPLO NUMÉRICO

Usando las expresiones de la sección anterior, se calculan las velocidades de fase y el factor de atenuación para la arenisca Nivelsteiner, cuyas propiedades fueron tomadas de Arntsen y Carcione (2001), ver Tabla 2.1.

Las propiedades de los fluidos saturantes usados en este ejemplo, se muestran en la Tabla 2.2. El gas, corresponde a un gas seco sometido a una presión de 20 MPa, aproximadamente a 2000 m de profundidad (cálculos indicados en Standing (1977) y McCoy (1983)).

En las Figuras 2.2, 2.3 y 2.4 se muestran las velocidades de fase en función de la frecuencia para las ondas  $P_I$ ,  $P_{II}$  y  $S$  respectivamente. Se observa que para las ondas  $P_I$  y  $S$ , los valores de velocidad al aumentar la frecuencia no cambian significativamente, tienen un comportamiento relativamente estable, caso opuesto sucede con la velocidad de fase en las ondas  $P_{II}$ , que para bajas frecuencias son aproximadamente cero y luego aumentan hasta llegar a un valor estable a frecuencias altas (rango ultrasónico).

Parámetros de la arenisca	Valor
Módulo de volumen de los granos sólidos, $K_s$	36 GPa
Densidad de los granos sólidos, $\rho_s$	2650 kg/m <sup>3</sup>
Módulo de volumen de la matriz seca, $K_m$	6.21 GPa
Módulo de corte de la matriz seca, $\mu_m$	4.55 GPa
Porosidad, $\phi$	0.33
Permeabilidad, $\kappa_0$	$5.0 \cdot 10^{-12} \text{m}^2$

Tabla 2.1: Propiedades de la arenisca Nivelsteiner.

Parámetro	Agua	Petróleo	Gas
Modulo de volumen, $K_f$	2.25 GPa	0.57 GPa	0.022914 GPa
Densidad, $\rho_f$	1000 kg/m <sup>3</sup>	700 kg/m <sup>3</sup>	151.54538 kg/m <sup>3</sup>
Viscosidad, $\eta$	0.001 Pa·s	0.01 Pa·s	$1.281317 \cdot 10^{-5}$ Pa·s

Tabla 2.2: Propiedades de los fluidos saturantes

En la Figura 2.2 se observa que la velocidad más alta se da para la muestra saturada de agua, tanto en bajas como en altas frecuencias. Para los casos de saturación con petróleo y gas, se tiene que para bajas frecuencias la velocidad de las ondas son menores en la muestra saturada con petróleo, pero aproximadamente en 100 kHz las curvas de velocidad se cruzan y la velocidad de la muestra saturada con gas se vuelve ligeramente menor que la velocidad de la muestra saturada con petróleo.

Para las ondas P<sub>II</sub> (Figura 2.3), se tiene que para la muestra saturada con agua, la velocidad es mayor tanto para bajas como para altas frecuencias. En las bajas frecuencias la muestra saturada con petróleo posee la menor velocidad de los tres casos estudiados, pero aproximadamente en 10 kHz pasa a ser mayor que las velocidades de la muestra saturada con gas.

Por último, se muestran las velocidades de las ondas de corte o S (ver Figura

2.4), aquí la muestra saturada con gas, posee la mayor velocidad, tanto en bajas como en altas frecuencias. Para la muestra saturada con agua, ésta posee la menor velocidad en bajas frecuencias pero aproximadamente en 10 kHz supera a la velocidad en la muestra saturada con petróleo, y luego en aproximadamente 100 kHz vuelve a ser menor.

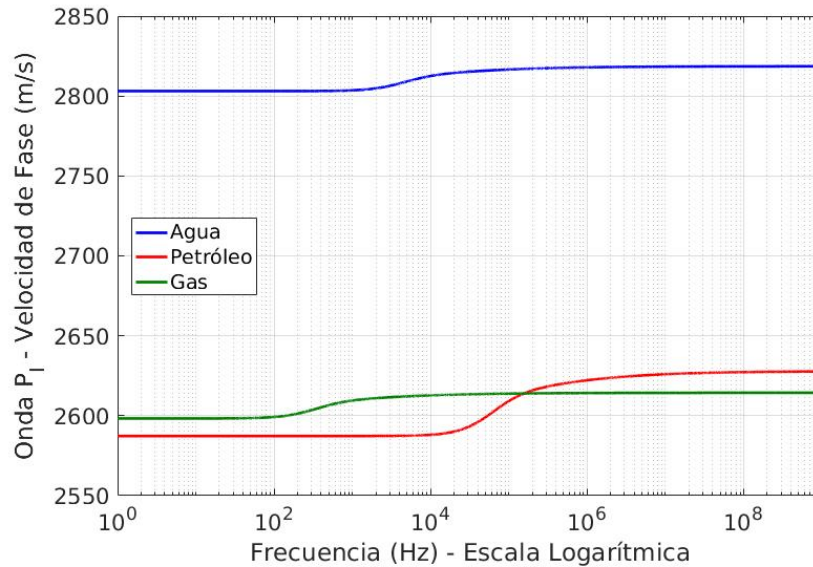


Figura 2.2: Velocidad de fase de las ondas  $P_I$  en función de la frecuencia, para una muestra de arenisca saturada con agua, petróleo y gas.

Se observa que la densidad de los fluidos tiene influencia en los valores de las velocidades de fase de las ondas compresionales. En el caso de las ondas  $P_I$ , la roca saturada con agua siempre tuvo mayor velocidad que las rocas saturadas con los otros dos fluidos y en el caso de las ondas  $P_{II}$ , la misma roca saturada con agua tuvo mayor velocidad cuando estas ondas se comportan como una onda de propagación (altas frecuencias). Un comportamiento opuesto se observa con las ondas de corte, en donde el fluido menos denso (gas) obtiene los valores de velocidad más altos.

En cuanto a la atenuación en las ondas  $P_I$ , se observa en la Figura 2.5 que la mayor atenuación ocurre en la muestra saturada con petróleo, seguida por la muestra saturada con gas y por último la muestra saturada con agua. Los picos de atenuación, ocurren por debajo de la frecuencia crítica  $f_c = \omega_c / (2\pi)$  (para la muestra saturada

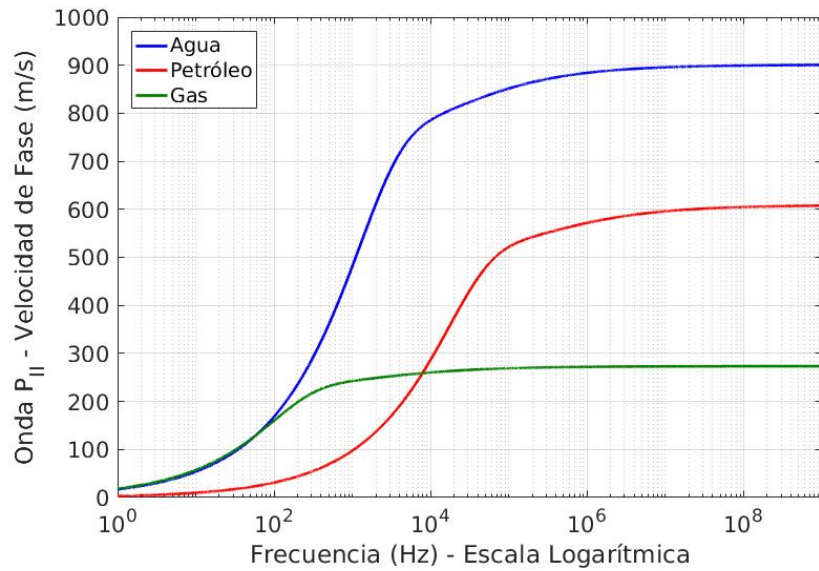


Figura 2.3: Velocidad de fase de las ondas P<sub>II</sub> en función de la frecuencia, para una muestra de arenisca saturada con agua, petróleo y gas.

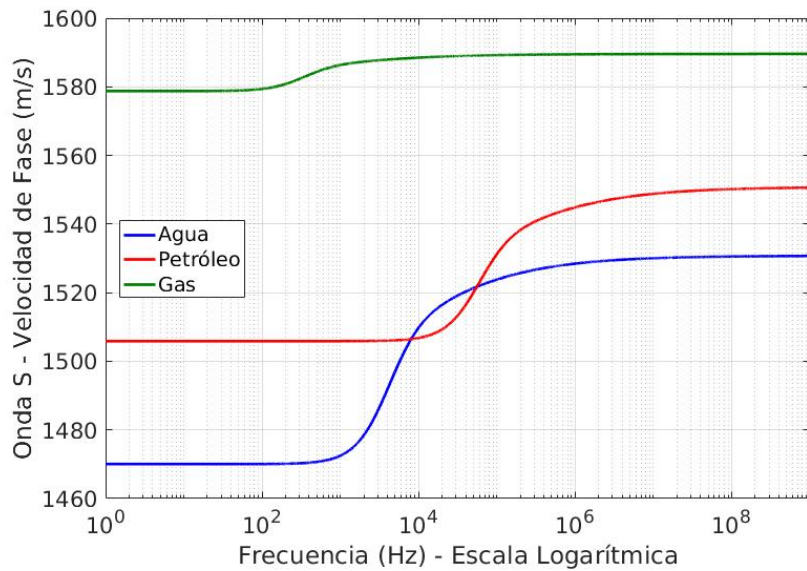


Figura 2.4: Velocidad de fase de las ondas de corte o S en función de la frecuencia, para una muestra de arenisca saturada con agua, petróleo y gas..



con agua  $f_c = 5.21$  kHz, para la muestra con petróleo  $f_c = 74.47$  kHz y para la muestra saturada con gas  $f_c = 2.76$  kHz). Cabe notar que a pesar que el agua es más viscosa que el gas, la atenuación sufrida en el gas sometido a esta presión es mayor.

Las ondas  $P_{II}$  (ver Figura 2.6), presentan un comportamiento diferente al de las ondas  $P_I$  y de corte, aquí las curvas poseen una gran atenuación en bajas frecuencias, aproximadamente en 100 Hz empiezan a decaer y cerca de 1 MHz la atenuación se hace despreciable. A partir del rango ultrasónico las ondas  $P_{II}$  se convierten en ondas de propagación. Al igual que en las ondas  $P_I$  cuanto más viscoso es el fluido, mayor es la atenuación.

Por último, se tiene la atenuación de las ondas de corte u ondas S (Figura 2.7), al igual que en las ondas  $P_I$ , posee picos de máxima atenuación en frecuencias un poco por debajo de las frecuencias críticas  $f_c$ , pero en este caso, la mayor atenuación se presenta en la muestra saturada por agua, seguida por la muestra saturada con petróleo y por último la muestra saturada por gas, se podría decir, que cuanto más denso es el fluido mayor será la atenuación de las ondas de corte.

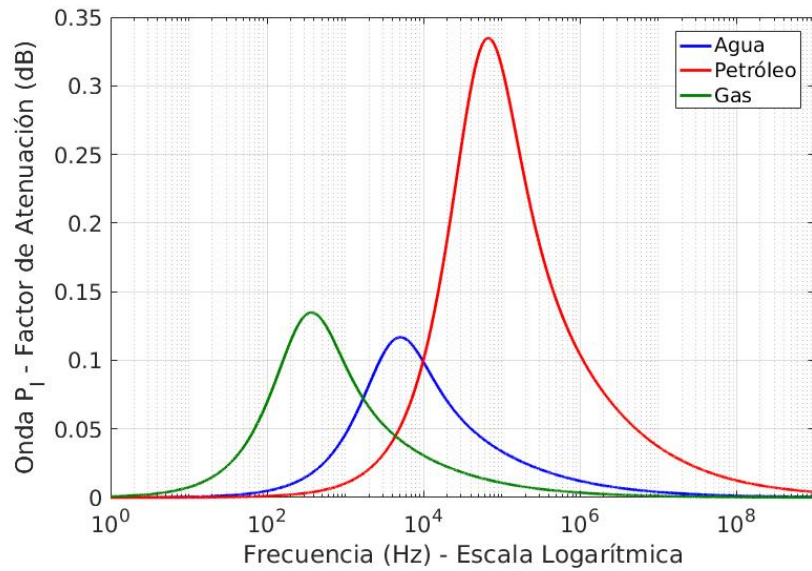


Figura 2.5: Coeficiente de atenuación de las ondas  $P_I$  en función de la frecuencia, para una muestra de arenisca saturada con agua, petróleo y gas.

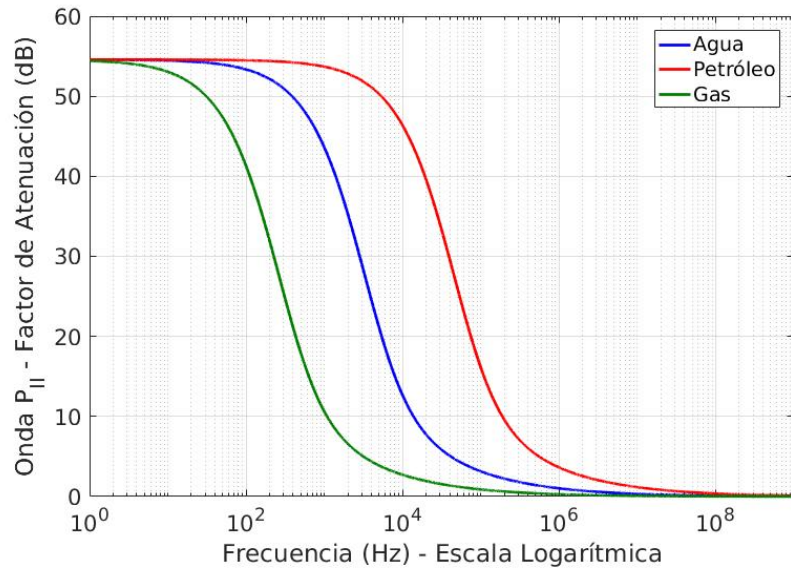


Figura 2.6: Coeficiente de atenuación de las ondas  $P_{II}$  en función de la frecuencia, para una muestra de arenisca saturada con agua, petróleo y gas.

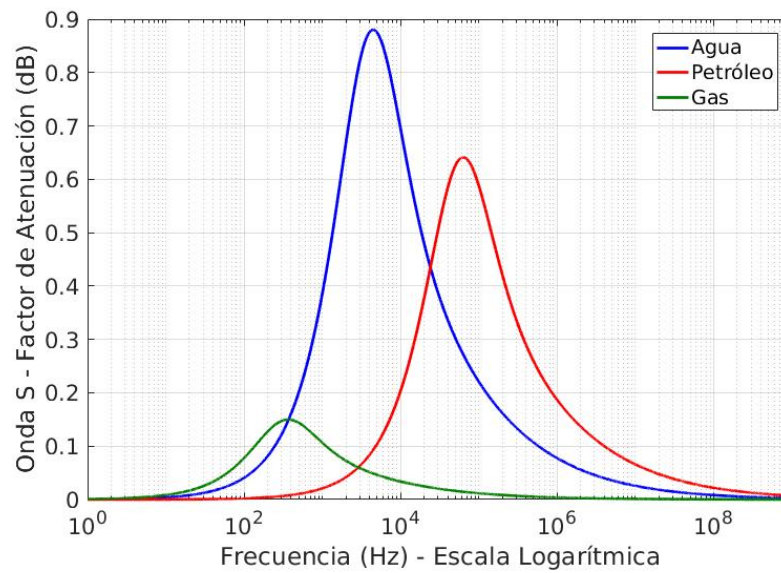


Figura 2.7: Coeficiente de atenuación de las ondas de corte o S en función de la frecuencia, para una muestra de arenisca saturada con agua, petróleo y gas.

## CAPÍTULO 3

# PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS POROSOS

---

En la exploración sísmica es muy importante el modelado de la propagación de ondas a través del subsuelo. Este permite conocer una aproximación de la respuesta sísmica de los tipos de rocas y su posterior identificación en un set de datos reales, la calibración de algoritmos de inversión como la inversión de la forma de onda completa (FWI por sus siglas en inglés), la identificación de los fluidos en una roca a través de técnicas como el AVO, procesamiento de datos con ondas convertidas, etc.

Se desarrolló un algoritmo de elementos finitos en serie usando elementos rectangulares y no conformes, cuya finalidad es la de conocer la respuesta sísmica de los diferentes tipos de rocas. En este Capítulo se plantea la forma débil del sistema, usando las ecuaciones planteadas en el Capítulo 2 y las condiciones de borde absorbentes propuestas por Santos et al. (1988). Al finalizar, se ilustra con algunos ejemplos de interés, donde se pueden identificar los distintos tipos de ondas de Biot a frecuencias del rango sísmico.

### 3.1 FORMA DÉBIL DEL PROBLEMA

En esta sección se determina la forma débil del problema de propagación de ondas en un medio poro-viscoelástico. El análisis se realiza en un dominio  $\Omega$  bidimensional (2D) con borde  $\Gamma$ . Las ecuaciones constitutivas y de movimiento fueron planteadas en el Capítulo anterior con la explicación de los términos que las acompañan.

Primero se definen una matriz de masa positiva  $\mathcal{P}$  y una matriz no negativa de disipación  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \rho_b \mathbf{I}_2 & \rho_f \mathbf{I}_2 \\ \rho_f \mathbf{I}_2 & g \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \mathbf{I}_2 & 0 \mathbf{I}_2 \\ 0 \mathbf{I}_2 & b \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{I}_2$  es la matriz identidad en  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Con las anteriores matrices, se pueden agrupar las ecuaciones de movimiento (2.26) y (2.27) como:

$$-\omega^2 \mathcal{P} \mathbf{u}(x, z, \omega) + i\omega \mathcal{B} \mathbf{u}(x, z, \omega) - \mathcal{L}(\mathbf{u}(x, z, \omega)) = \mathbf{F}(x, z, \omega), \quad (x, z, \omega) \in \Omega \times (0, \omega^*), \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{F}(x, z, \omega) = \left( \mathbf{f}^{(1)}(x, z, \omega), \mathbf{f}^{(2)}(x, z, \omega) \right)^t$  es la fuente externa,  $\omega^*$  una frecuencia superior a la frecuencia de interés y  $\mathcal{L}(\mathbf{u}(x, \omega))$  es un operador diferencial de segundo orden dado por

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}(x, z, \omega)) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), -\nabla p_f(\mathbf{u}))^t. \quad (3.4)$$

A continuación se va a obtener la formulación variacional del problema a resolver para la ecuación (3.3). Además, para cualquier  $X \subset \mathbb{R}^2$  con borde  $\partial X$ , sean  $(\cdot, \cdot)_X$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  los productos internos complejos para funciones escalares, vectoriales o matriciales de  $L^2(X)$  y  $L^2(\partial X)$  respectivamente.

Si  $X = \Omega$  o  $X = \Gamma$ , el subíndice  $X$  puede ser omitido de modo tal que  $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_X$  ó  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_X$ . Además para  $s \in \mathbb{R}$ , se denotará por  $\|\cdot\|_{s,X}$  y  $|\cdot|_{s,X}$  las normas y seminormas usuales en los espacios de Sobolev  $H^s(X)$ .

Se definen ahora los espacios,

$$H(\operatorname{div}; \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (3.5)$$

$$H^1(\operatorname{div}; \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 : \nabla \cdot \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \right\}, \quad (3.6)$$

con las normas

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} = \left[ \|\mathbf{v}\|_0^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_0^2 \right]^{1/2}, \quad (3.7)$$

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\operatorname{div}; \Omega)} = \left[ \|\mathbf{v}\|_1^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_1^2 \right]^{1/2}. \quad (3.8)$$

Luego, se introduce el espacio  $\mathcal{V} = [H^1(\Omega)]^2 \times H(\operatorname{div}; \Omega)$ . Multiplicando la ecuación (3.3) por  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , donde  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})^t$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} -\omega^2 (\rho_b \mathbf{u}_s, \mathbf{v}^{(1)}) - \omega^2 (\rho_f \mathbf{w}, \mathbf{v}^{(1)}) - (\nabla \cdot \sigma_{ij}(\mathbf{u}), \mathbf{v}^{(1)}) = \\ \left( \mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)} \right), \quad \mathbf{v}^{(1)} \in [H^1(\Omega)]^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 (\rho_f \mathbf{u}_s, \mathbf{v}^{(2)}) - \omega^2 (g \mathbf{w}, \mathbf{v}^{(2)}) + i\omega (b \mathbf{w}, \mathbf{v}^{(2)}) + (\nabla p_f, \mathbf{v}^{(2)}) = \\ \left( \mathbf{f}^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)} \right), \quad \mathbf{v}^{(2)} \in H(\operatorname{div}; \Omega). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Paso seguido se define un vector unitario  $\boldsymbol{\nu}$ , el cual es la normal externa en el borde  $\Gamma$ . También se define un vector  $\boldsymbol{\chi}$  unitario y tangente al borde  $\Gamma$  siguiendo el sentido antihorario. Con estos dos vectores se tiene un sistema ortonormal  $\{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\chi}\}$  en  $\Gamma$ .

Tomando la ecuación (3.9) y haciendo integración por partes,  $(\nabla \cdot \mathbf{q}, \mathbf{v}^{(1)}) = \langle \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}^{(1)} \rangle - (\mathbf{q}, \nabla \cdot \mathbf{v}^{(1)})$ , se obtiene

$$-\omega^2 (\rho_b \mathbf{u}_s, \mathbf{v}^{(1)}) - \omega^2 (\rho_f \mathbf{w}, \mathbf{v}^{(1)}) + (\sigma_{ij}(\mathbf{u}), \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}^{(1)})) =$$

$$\langle \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}^{(1)} \rangle + (\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}), \quad \mathbf{v}^{(1)} \in [H^1(\Omega)]^2. \quad (3.11)$$

En la Ecuación (3.10) aplicándole la identidad de Green,  $(q, \nabla \cdot \mathbf{v}^{(2)}) + (\nabla q, \mathbf{v}^{(2)}) = \langle q, \mathbf{v}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle$ , resulta

$$\begin{aligned} -\omega^2 (\rho_f \mathbf{u}_s, \mathbf{v}^{(2)}) - \omega^2 (g \mathbf{w}, \mathbf{v}^{(2)}) + i\omega (b \mathbf{w}, \mathbf{v}^{(2)}) - (p_f, \nabla \cdot \mathbf{v}^{(2)}) = \\ - \langle p_f, \mathbf{v}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle + (\mathbf{f}^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)}), \quad \mathbf{v}^{(2)} \in H(\text{div}; \Omega). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por último sumando las Ecuaciones (3.11) y (3.12), se obtiene la forma débil del sistema

$$\begin{aligned} -\omega^2 (\rho_b \mathbf{u}_s, \mathbf{v}^{(1)}) - \omega^2 (\rho_f \mathbf{w}, \mathbf{v}^{(1)}) - \omega^2 (\rho_f \mathbf{u}_s, \mathbf{v}^{(2)}) - \omega^2 (g \mathbf{w}, \mathbf{v}^{(2)}) \\ + i\omega (b \mathbf{w}, \mathbf{v}^{(2)}) - (p_f, \nabla \cdot \mathbf{v}^{(2)}) + (\sigma_{ij}(\mathbf{u}), \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}^{(1)})) - (p_f, \nabla \cdot \mathbf{v}^{(2)}) \\ - \langle \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}^{(1)} \rangle + \langle p_f, \mathbf{v}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle = \\ (\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}) + (\mathbf{f}^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)}), \quad \mathbf{v}^{(1)} \in [H^1(\Omega)]^2, \quad \mathbf{v}^{(2)} \in H(\text{div}; \Omega). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para los términos de borde

$$\begin{aligned} - \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}^{(1)} \rangle + \langle p_f(\mathbf{u}), \mathbf{v}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle = \\ \langle (-\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}, -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\chi}, p_f(\mathbf{u})), (\mathbf{v}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\chi}, \mathbf{v}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\nu}) \rangle. \end{aligned} \quad (3.14)$$

En los bordes del dominio computacional, se van a usar condiciones de borde absorbentes para reducir los efectos asociados a reflexiones espurias. Considerando las condiciones de borde absorbentes propuestas por Santos et al. (1988) se define

$$\mathcal{G}_\Gamma(\mathbf{u}) = (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\chi}, -p_f(\mathbf{u}))^t, \quad \mathcal{S}_\Gamma(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\nu}, \mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\chi}, \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\chi}) \quad (3.15)$$

entonces

$$-\mathcal{G}_\Gamma(\mathbf{u}) = (-\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}, -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\chi}, p_f(\mathbf{u}))^t = i\omega \mathcal{D} \mathcal{S}_\Gamma(\mathbf{u}) \quad (3.16)$$

donde  $\mathcal{D} = \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} \mathcal{S}^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}^{\frac{1}{2}}$  es una matriz definida positiva,  $\mathcal{S} = \mathcal{A}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{M} \mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}$  y

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \rho_b & 0 & \rho_f \\ 0 & \rho_b - \rho_f^2/g & 0 \\ \rho_f & 0 & g \end{pmatrix}, \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \lambda_u + 2\mu & 0 & D \\ 0 & \mu & 0 \\ D & 0 & M \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Se llega a la forma débil o variacional de nuestro problema con condiciones de borde absorbentes a partir de las ecuaciones (3.13) y (3.16), por lo tanto

$$\begin{aligned} & -\omega^2 (\rho_b \mathbf{u}_s, \mathbf{v}^{(1)}) - \omega^2 (\rho_f \mathbf{w}, \mathbf{v}^{(1)}) - \omega^2 (\rho_f \mathbf{u}_s, \mathbf{v}^{(2)}) - \omega^2 (g \mathbf{w}, \mathbf{v}^{(2)}) \\ & + i\omega (b \mathbf{w}, \mathbf{v}^{(2)}) - (p_f, \nabla \cdot \mathbf{v}^{(2)}) + (\sigma_{ij}(\mathbf{u}), \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}^{(1)})) - (p_f, \nabla \cdot \mathbf{v}^{(2)}) \\ & + i\omega \langle \mathcal{D}(\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\nu}, \mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\chi}, \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\chi}), (\mathbf{v}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\chi}, \mathbf{v}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\nu}) \rangle = \\ & (\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}) + (\mathbf{f}^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)}), \quad (\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) \in [H^1(\Omega)]^2 \times H(\text{div}; \Omega). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como la propagación es en el plano  $x - z$ ,  $\varepsilon_{22}(\mathbf{u}^s) = \varepsilon_{12}(\mathbf{u}^s) = \varepsilon_{23}(\mathbf{u}^s) = 0$ , entonces se tiene que

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}(\mathbf{u}_s) + \lambda\varepsilon_{33}(\mathbf{u}_s) + D\nabla \cdot \mathbf{w} \\ \lambda\varepsilon_{11}(\mathbf{u}_s) + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33}(\mathbf{u}_s) + D\nabla \cdot \mathbf{w} \\ 2\mu\varepsilon_{13}(\mathbf{u}_s) \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

$$-p_f(\mathbf{u}) = D\varepsilon_{11}(\mathbf{u}_s) + D\varepsilon_{33}(\mathbf{u}_s) + M\nabla \cdot \mathbf{w}, \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}^{(1)}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(\mathbf{v}^{(1)}) \\ \varepsilon_{33}(\mathbf{v}^{(1)}) \\ 2\varepsilon_{13}(\mathbf{v}^{(1)}) \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

La demostración de la unicidad de la solución de la forma débil (3.18) fue realizada por Santos y Sheen (2007); allí se propone un material compuesto por 2 sólidos diferentes, pero siguiendo la misma idea y eliminando la existencia del segundo sólido, es posible comprobar su unicidad.



## 3.2 ALGORITMO USANDO ELEMENTOS NO CONFORMES

Se considera un medio rectangular  $\Omega$ , dividido por una partición no solapada  $\mathcal{T}^h(\Omega)$  de rectángulos  $Q_j$  con diámetro  $h$ , de modo tal que  $\bar{\Omega} = \cup_{j=1}^J \bar{Q}_j$ . Ahora se denota  $\xi_j$  y  $\xi_{jk}$  como los puntos medios de las intersecciones  $\partial Q_j \cap \Gamma$  y  $\partial Q_j \cap \partial Q_k$ , respectivamente.

Para aproximar cada una de las componentes de los desplazamientos del sólido, se usó el espacio de los elementos finitos no conformes, como en Douglas (1999), debido a que reducen los efectos de dispersión numérica comparados con los elementos conformes (Zyserman et al., 2003; Zyserman y Gauzellino, 2005; Zyserman y Santos, 2007). Si se define un rectángulo con límites  $\widehat{R}[-h/2, h/2]^2$ , el espacio de elementos finitos no conformes sobre el rectángulo está generado por (ver Figura (3.1))

$$\widehat{\mathcal{NC}} = \text{Span} \{1, \widehat{x}, \widehat{z}, \alpha(\widehat{x}) - \alpha(\widehat{z})\}, \quad \alpha(\zeta) = \zeta^2 - \frac{5}{3}\zeta^4, \quad \zeta = \widehat{x}, \widehat{z}. \quad (3.22)$$

Las funciones base para el desplazamiento del sólido resultan ser:

$$\varphi^B = 1/4 - \widehat{z}/h - (12(-(5\widehat{x}^4)/3 + \widehat{x}^2 + (5\widehat{z}^4)/3 - \widehat{z}^2))/(-5h^4 + 12h^2) \quad (3.23)$$

$$\varphi^R = 1/4 + \widehat{x}/h + (12(-(5\widehat{x}^4)/3 + \widehat{x}^2 + (5\widehat{z}^4)/3 - \widehat{z}^2))/(-5h^4 + 12h^2) \quad (3.24)$$

$$\varphi^T = 1/4 + \widehat{z}/h - (12(-(5\widehat{x}^4)/3 + \widehat{x}^2 + (5\widehat{z}^4)/3 - \widehat{z}^2))/(-5h^4 + 12h^2) \quad (3.25)$$

$$\varphi^L = 1/4 - \widehat{x}/h + (12(-(5\widehat{x}^4)/3 + \widehat{x}^2 + (5\widehat{z}^4)/3 - \widehat{z}^2))/(-5h^4 + 12h^2) \quad (3.26)$$

En el desplazamiento relativo al fluido se usa la parte vectorial del espacio de Raviart-Thomas-Nedelec (Raviart y Thomas, 1977; Nedelec, 1980) de orden cero, denotado por  $\mathcal{W}^h$ . Para el desplazamiento horizontal se tienen las funciones base  $\psi^L$  y  $\psi^R$  y para el desplazamiento vertical  $\psi^B$  y  $\psi^T$ , es decir (ver Figura 3.2)

$$\mathcal{W}^h = \text{Span} \{(\psi^L(\widehat{x}), 0), (\psi^R(\widehat{x}), 0), (0, \psi^B(\widehat{z})), (0, \psi^T(\widehat{z}))\}, \quad (3.27)$$

donde

$$\psi^L(\hat{x}) = \frac{1}{2} - \frac{\hat{x}}{h}, \quad (3.28)$$

$$\psi^R(\hat{x}) = \frac{1}{2} + \frac{\hat{x}}{h}, \quad (3.29)$$

$$\psi^B(\hat{z}) = \frac{1}{2} - \frac{\hat{z}}{h}, \quad (3.30)$$

$$\psi^T(\hat{z}) = \frac{1}{2} + \frac{\hat{z}}{h}. \quad (3.31)$$

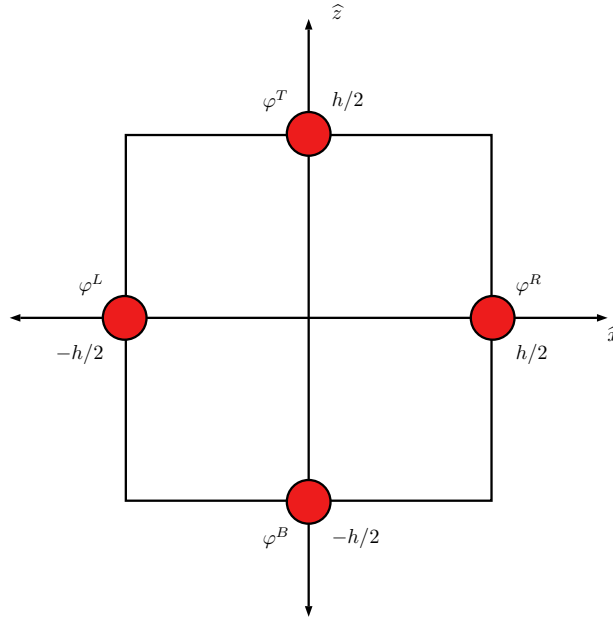


Figura 3.1: Elemento finito rectangular no conforme. Las funciones  $\varphi^B$ ,  $\varphi^R$ ,  $\varphi^T$  y  $\varphi^L$  representan las funciones base del elemento.

Entonces para cada elemento se tienen 12 incógnitas, 4 para el desplazamiento horizontal del sólido, 4 para el desplazamiento vertical del sólido, 2 para el desplazamiento horizontal del fluido y 2 para el desplazamiento vertical del fluido. Cada nodo posee 3 grados de libertad.

Para cada  $Q_j$ , sea  $F_{Q_j} : \hat{R} \rightarrow Q_j$  un mapeo afín tal que  $F_{Q_j}(\hat{R}) = Q_j$ , y definimos

$$\mathcal{NC}_j^h = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^t : \mathbf{v}_i = \hat{\mathbf{v}}_i \circ F_{Q_j}^{-1}, \hat{\mathbf{v}}_i \in \widehat{\mathcal{NC}}(\hat{R}), i = 1, 2 \right\}, \quad (3.32)$$

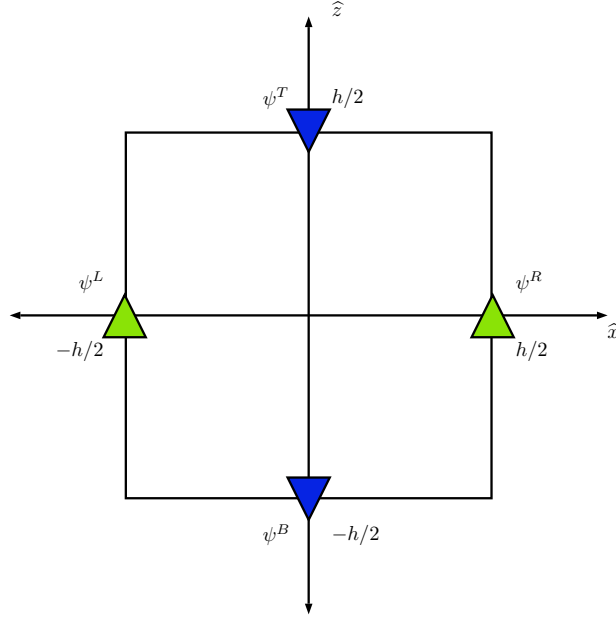


Figura 3.2: Funciones base utilizadas para el desplazamiento del fluido,  $\psi^L$  y  $\psi^R$  para el desplazamiento horizontal, y  $\psi^B$  y  $\psi^T$  para el desplazamiento vertical.

$$\mathcal{W}_j^h = \left\{ \mathbf{w} : \mathbf{w} = \widehat{\mathbf{w}} \circ F_{Q_j}^{-1}, \widehat{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}(\widehat{R}) \right\}. \quad (3.33)$$

Haciendo

$$\mathcal{NC}^h = \left\{ \mathbf{v} : \mathbf{v}_j = \mathbf{v}|_{Q_j} \in \mathcal{NC}_j^h, \mathbf{v}_j(\xi_{jk}) = \mathbf{v}_k(\xi_{jk}) \forall (j, k) \right\}, \quad (3.34)$$

$$\mathcal{W}^h = \left\{ \mathbf{w} \in H(\text{div}; \Omega) : \mathbf{w}_j = \mathbf{w}|_{Q_j} \in \mathcal{W}_j^h \right\}, \quad (3.35)$$

el espacio global de elementos finitos para aproximar la solución  $u$  de (3.18) es definido por

$$\mathcal{V}^h = (\mathcal{NC}^h)^2 \times \mathcal{W}^h. \quad (3.36)$$

La teoría de aproximación estándar implica que, para todo  $\Psi = (\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)})^t \in [H^2(\Omega)]^2 \times H^1(\text{div}; \Omega)$

$$\inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{NC}^h} \left[ \|\Psi^{(1)} - \mathbf{p}\|_0 + h \left( \sum_j \|\Psi^{(1)} - \mathbf{p}\|_{1, Q_j}^2 \right)^{1/2} \right] \leq Ch^2 \|\Psi^{(1)}\|_2, \quad (3.37)$$

$$\inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{W}^h} \|\Psi^{(2)} - \mathbf{p}\|_0 \leq Ch \|\Psi^{(2)}\|_1, \quad (3.38)$$

$$\inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{W}^h} \|\Psi^{(2)} - \mathbf{p}\|_{H(\text{div}; \Omega)} \leq Ch \left( \|\Psi^{(2)}\|_1 + \|\nabla \cdot \Psi^{(2)}\|_1 \right). \quad (3.39)$$

El procedimiento global de elementos finitos se define como: encontrar  $\mathbf{u}^h = (\mathbf{u}_s^{(h)}, \mathbf{w}^{(h)})^t \in \mathcal{V}^h$  tal que

$$\begin{aligned} & -\omega^2 (\mathcal{P}\mathbf{u}^h, \mathbf{v}) + i\omega (\mathcal{B}\mathbf{u}^h, \mathbf{v}) \\ & + \sum_j \left[ (\sigma_{lm}(\mathbf{u}^h), \varepsilon_{lm}(\mathbf{v}^{(1)}))_{Q_j} - (p_f(\mathbf{u}^h), \nabla \cdot \mathbf{v}^{(2)})_{Q_j} \right] \\ & + i\omega \langle \mathcal{D}\mathcal{S}_\Gamma(\mathbf{u}^h), \mathcal{S}_\Gamma(\mathbf{v}) \rangle = (\mathbf{F}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) \in \mathcal{V}^h. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Una estimación a priori del error asociado al procedimiento global, se puede encontrar en Santos y Sheen (2007).

### 3.3 EJEMPLOS NUMÉRICOS

El algoritmo planteado en la sección anterior, se programó en lenguaje Fortran 90 y se usó el solver Pardiso (Petra et al., 2014b,a) para la solución del sistema global que es del tipo disperso. En esta sección se abordan una serie de ejemplos, donde se observa el comportamiento de las ondas en medios porosos.

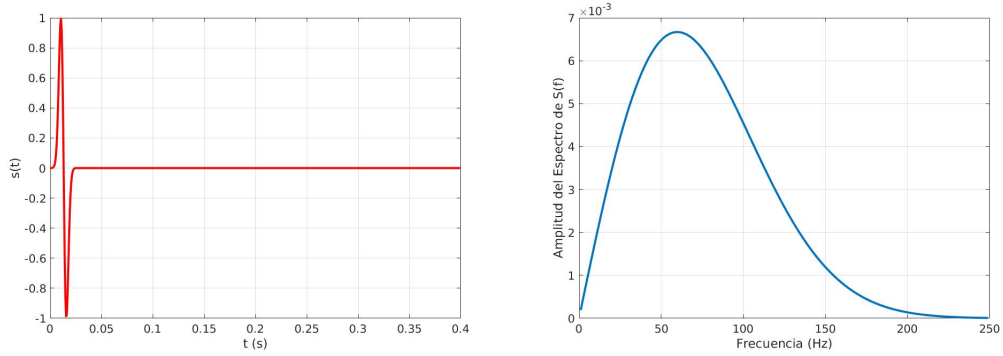
El término de la fuente  $\mathbf{F}(x, z, \omega) = (\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)})$  es una perturbación compresional puntual, y en nuestro caso se aplicó a la matriz sólida, es decir  $\mathbf{f}^{(2)}(x, \omega) = 0$  y

$$\mathbf{f}^{(1)}(x, z, \omega) = \nabla \delta_{x_f, z_f} s(\omega), \quad (3.41)$$

donde  $x_f$  y  $z_f$  es la posición de la fuente y  $s(\omega)$  es la transformada de Fourier de

$$s(t) = -2A_f \varsigma (t - t_0) e^{\varsigma(t-t_0)^2}, \quad (3.42)$$

con  $A_f$  modificando la amplitud de la fuente,  $\varsigma = 8f_0$ ,  $t_0 = 1.25/f_0$ . La variable  $f_0$  controla la frecuencia central de la fuente, en este caso se escoge una fuente con frecuencia central de 60 Hz. En la Figura 3.3 se observa la forma de la fuente en tiempo y la amplitud del espectro en frecuencia.



(a) Fuente en el dominio temporal. (b) Amplitud del espectro de la fuente.

Figura 3.3: Fuente usada para el algoritmo de propagación de ondas en medios porosos de frecuencia central 60 Hz y amplitud  $A_f = 1$ .

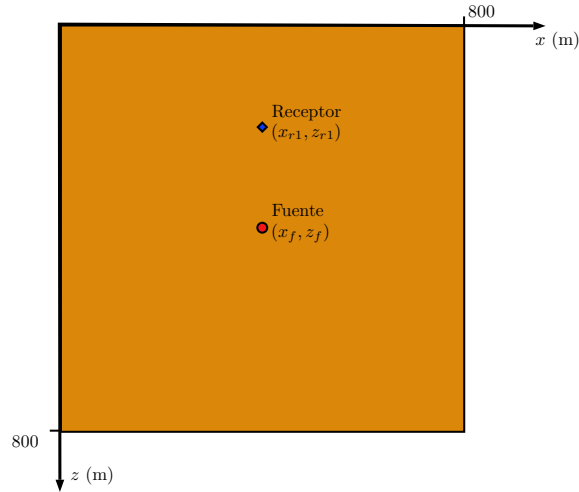
### 3.3.1 PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO ISÓTROPO

En este ejemplo se usó un dominio cuadrado  $\Omega$  con dimensiones  $800 \text{ m} \times 800 \text{ m}$  y una malla estructurada de  $400 \times 400$  elementos, es decir  $h = 2 \text{ m}$ . El dominio se compone de una capa porosa homogénea e isotropa, con las propiedades de la arenisca Nivelsteiner (ver Tabla 2.1).

La fuente se encuentra en la posición  $x_f = 400 \text{ m}$  y  $z_f = 400 \text{ m}$ ; se ubicó un receptor  $200 \text{ m}$  arriba de la fuente, es decir  $x_{r1} = 400 \text{ m}$  y  $z_{r1} = 200 \text{ m}$ ; en la Figura 3.4 se visualiza la configuración de este experimento. El tiempo de muestreo es de  $1 \text{ ms}$  y el tiempo máximo de simulación es  $0.4 \text{ s}$ , la frecuencia central de la fuente es  $60 \text{ Hz}$  y la constante  $A_f = 1.0 \cdot 10^{11}$ .

Se realizaron dos pruebas, una para el medio poroso saturado con agua y otra para este mismo medio saturado con petróleo, las propiedades de los fluidos están en la Tabla 2.2.

En la Figura 3.5 se observa la componente vertical del desplazamiento del sólido registrada en el receptor, tanto para el medio saturado por agua como para el medio saturado por petróleo, aquí se verifica que debido a que la velocidad de grupo es



(a)

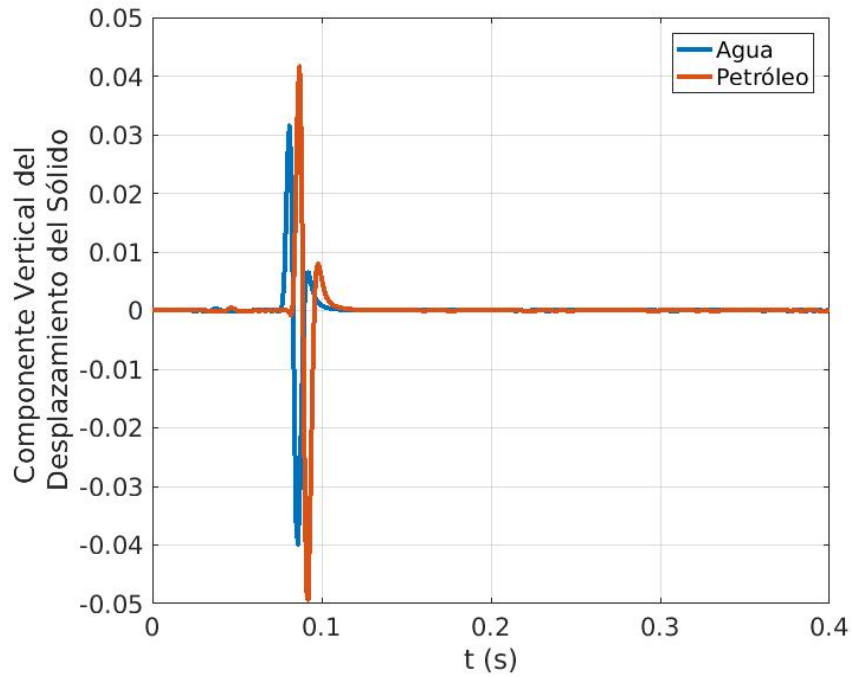
Figura 3.4: Geometría de la prueba hecha para la propagación de una onda compresional en un medio isótropo y homogéneo saturado con un fluido viscoso.

mayor en el medio saturado por agua, la onda se propaga más rápido. En lo que concierne a la atenuación, ésta también es mayor en el medio saturado por agua, debido a que la amplitud de la onda es menor.

En la Figura 3.6 se observa una foto de la componente vertical del desplazamiento del sólido en el tiempo  $t = 0.11$  s. Aquí también se confirma lo mencionado para la anterior Figura, y es que la onda se propaga más rápido en el medio saturado con agua y que la atenuación es mayor en este mismo caso.

### 3.3.2 PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO DE DOS CAPAS ISÓTROPAS

En el anterior ejemplo se consideró una onda compresional propagándose en un medio homogéneo e isótropo, ahora se va a considerar la misma onda pero propagándose en un dominio formado por dos medios. Para la definición de estos dos medios, se consideraron dos casos, el primero (Caso 1) son dos tipos de rocas saturadas por el mismo fluido (agua o petróleo) y el segundo caso (Caso 2) es una



(a)

Figura 3.5: Componente vertical del desplazamiento del sólido registrada por el receptor ubicado a 200 metros arriba de la fuente. La velocidad de grupo en el medio saturado por agua es mayor que la velocidad de grupo en el medio saturado por petróleo, la atenuación también es mayor en el medio saturado con agua.

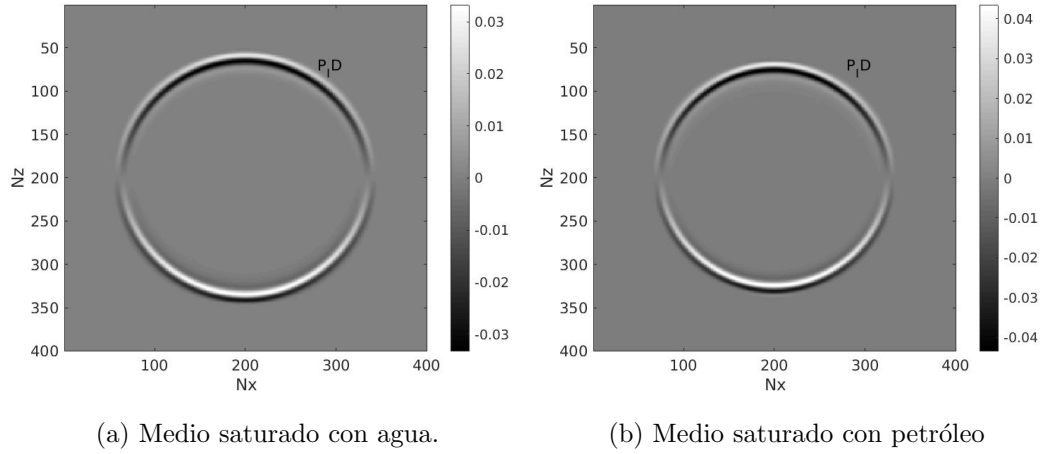


Figura 3.6: Foto de la componente vertical del desplazamiento del sólido en el tiempo  $t = 0.11$  s, debido a que es un medio homogéneo, isótropo y a la baja frecuencia de la fuente, sólo existe una onda compresional propagándose en el medio.

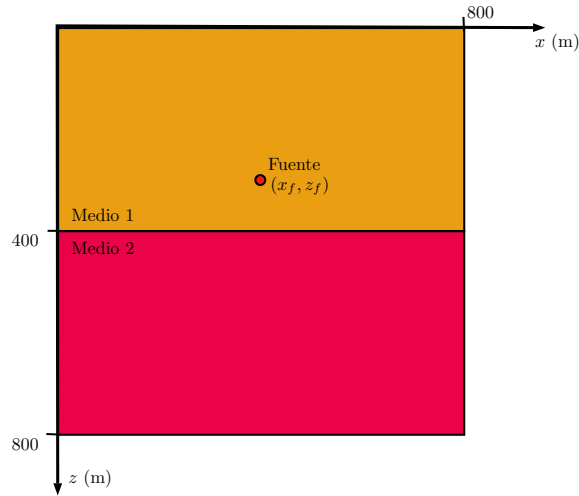
roca saturada por dos fluidos (agua y petróleo).

La configuración del experimento se observa en la Figura 3.7, se escogió un dominio cuadrado  $\Omega$ , de  $800 \text{ m} \times 800 \text{ m}$  y la fuente está ubicada en  $x_f = 400 \text{ m}$  y  $z_f = 300 \text{ m}$ . El primer medio va desde  $z = 0 \text{ m}$  hasta  $z = 400 \text{ m}$  y el segundo va desde  $z = 400 \text{ m}$  hasta  $z = 800 \text{ m}$ . El tiempo de muestreo es de  $1 \text{ ms}$  y el tiempo máximo de simulación es  $0.4 \text{ s}$ , la frecuencia central de la fuente es  $60 \text{ Hz}$  y la constante  $A_f = 1.0 \cdot 10^{11}$ .

Para el Caso 1, el dominio cuadrado está formado por dos tipos de rocas, la primera roca tiene las propiedades de la arenisca Nivelsteiner, ver Tabla 2.1, y tiene espesor de  $400 \text{ m}$ . La segunda roca tiene densidad de granos sólidos  $\rho_s = 2700 \text{ kg/m}^3$ , módulo de volumen de los granos sólidos  $K_s = 36 \text{ GPa}$ , módulo de volumen de la matriz seca  $K_m = 9 \text{ GPa}$ , módulo de corte de la matriz seca o del medio poroso saturado  $\mu_m = \mu = 7 \text{ GPa}$ , porosidad  $0.15$  y permeabilidad de  $1.0 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$ ; el espesor de esta roca también es de  $400 \text{ m}$ . Las dos rocas son saturadas por el mismo fluido, agua o petróleo, las propiedades de estos fluidos están en la Tabla 2.2.



En el Caso 2, el dominio está formado por una roca con propiedades de la arenisca Nivelsteiner, pero la mitad del dominio está saturada por petróleo (capa superior) y la otra mitad por agua (capa inferior), este ejemplo es muy frecuente en geofísica ya que comúnmente una roca está saturada por dos o tres fluidos.



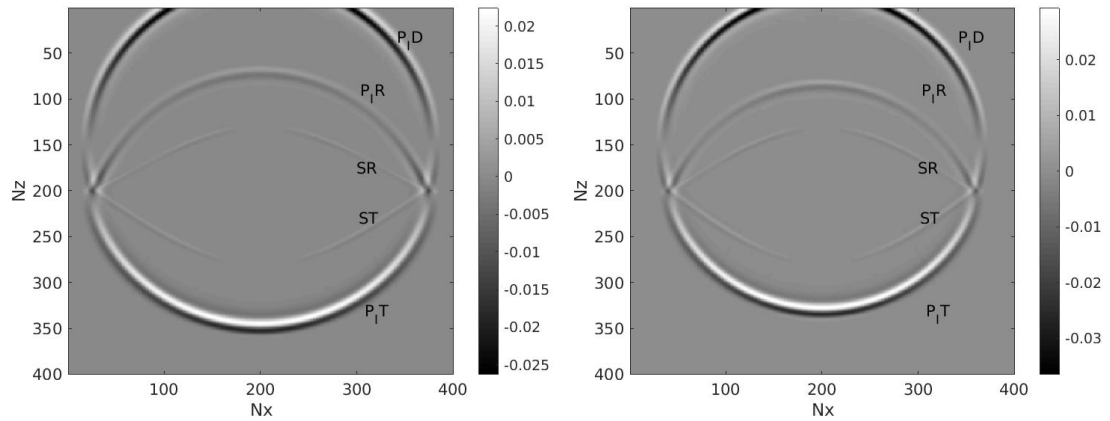
(a)

Figura 3.7: Geometría de la prueba para la propagación de una onda compresional en un dominio compuesto por dos medios homogéneos e isótropos.

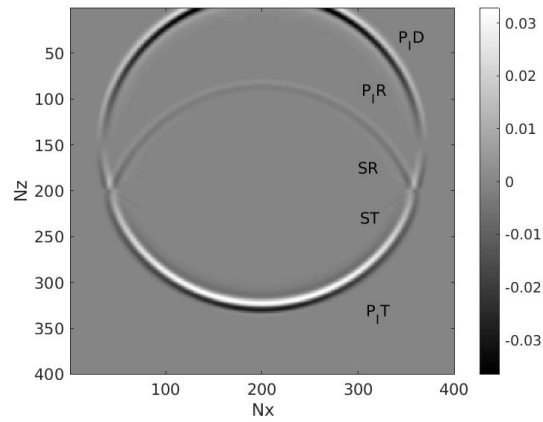
En la Figura 3.8 se visualiza una foto de la propagación de la onda compresional provocada por la fuente ( $P_{ID}$ ) y las ondas generadas al pasar esta onda por la frontera de los dos medios para el tiempo  $t = 0.15$  s. Al llegar la onda directa  $P_{ID}$  a la interface que separa los dos medios, se generan una onda compresional que se transmite  $P_{IT}$  y una onda compresional que se refleja  $P_{IR}$ , también se genera una onda de corte que se transmite  $ST$  y una onda de corte que se refleja  $SR$ . Como se está en el rango de bajas frecuencias, las ondas compresionales tipo  $P_{II}$ , son de tipo difusivo y por tal razón no se observan en la Figura. En las Figuras 3.8-(a) y 3.8-(b) se puede comparar la propagación en el Caso 1 saturado con agua y el Caso 1 saturado con petróleo respectivamente. Se observa que la onda en el Caso 1 saturado con agua se propaga más rápido pero la atenuación es mayor.

En la Figura 3.8-(c) se observa la propagación de las ondas para el Caso 2, es muy interesante observar que las amplitudes de las ondas de corte son muy pequeñas

comparadas con las ondas compresionales, de esto se hablará en el próximo Capítulo cuando se planteen las ecuaciones de los coeficientes de reflexión y transmisión en medios poroelásticos saturados.



(a) Caso 1, dos tipos de rocas saturadas con agua. (b) Caso 1, dos tipos de rocas saturadas con petróleo.



(c) Caso 2, una roca saturada con petróleo y agua.

Figura 3.8: Foto de la componente vertical ( $z$ ) del desplazamiento del sólido en el plano  $x - z$ , tiempo  $t = 0.15$  s. Los ejes  $N_x$  y  $N_z$  indican la cantidad de elementos finitos en dirección  $x$  y  $z$ .

## CAPÍTULO 4

# COEFICIENTES DE REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN PARA UNA CAPA FINA

---

Los fenómenos de reflexión y transmisión (R-T) de las ondas en una capa ( que podría ser una fractura) son tratados en este Capítulo. El tema tiene aplicaciones practicas en muchos campos, tales como métodos sísmicos, ingeniería y mecánica del suelo, hidrogeología y acústica subacuática. En particular, en la exploración de hidrocarburos, la capa podría ser un medio poroso, arenisca por ejemplo. La literatura es amplia en cuanto al caso de una sola interface. Diversos autores abordaron el problema de las interfaces soldadas y no soldadas (grietas y fracturas), en algunos casos considerando la anisotropía y la atenuación (Carcione, 1996, 1997, 1998; Carcione y Picotti, 2012), en el caso poroelástico utilizando la teoría de Biot (Santos et al., 1992), y una extensión trifásica de esta teoría (Carcione et al., 2003; Santos et al., 2004). Existen muchos trabajos para una capa descripta por un caso monofásico (sólido), por ejemplo, Widess (1973) y Bakke y Ursin (1998) consideran el caso de incidencia normal para una capa delgada, Juhlin y Young (1993) estudiaron los efectos en el AVO de una capa delgada, mientras que el efecto del grosor de una capa sedimentaria ha sido investigado por Chung y Lawton (1995a,b). Carcione (2015) calculó la respuesta de dispersión de una capa con pérdidas que tiene simetría ortorrómbica y separa dos semiespacios isótropos, Liu y Schmitt (2003) obtuvieron el

coeficiente de reflexión de la onda P en un medio isótropo sin pérdidas en función del ángulo de incidencia.

Las propiedades ultrasónicas de los medios porosos y permeables han sido tratadas por Wu et al. (1990), Johnson et al. (1994), Jocker y Smeulders (2009) y Fellah et al. (2013). En todos estos artículos los autores han comparado predicciones teóricas con datos experimentales. En particular, Wu et al. (1990) estudiaron la reflexión y transmisión de ondas elásticas en una interface entre un fluido y un medio poroso saturado de fluido y Fellah et al. (2013) analizaron ondas rápidas y lentas transmitidas a través de la muestra de hueso trabecular humano.

El cálculo explícito de los coeficientes para los medios poroelásticos no ha sido abordado. Los métodos existentes se limitan a la incidencia normal o se basan en algoritmos numéricos (Allard et al., 1986; Pride et al., 2002; Quintal et al., 2009; Schmidt y Tango, 1986). En general, estos trabajos se fundamentan en una ecuación constitutiva descrita por la teoría de Biot de la poroelasticidad (Biot, 1956a, 1962; Carcione, 2015; Carcione et al., 2010), que es suficientemente general para modelar las características deseadas de la propagación de ondas. En particular, se analiza la presencia de las ondas P (ondas de compresión  $P_I$  y  $P_{II}$ ) y sus efectos sobre las interfaces (Dutta y Odé, 1979a,b, 1983; Plona, 1980).

Aquí se resuelve el problema de dispersión para todos los ángulos de incidencia en una única capa que separa dos semiespacios con características diferentes, donde las propiedades de los medios se describen por la teoría de poroelasticidad de Biot. Los campos de desplazamiento son reformulados en términos de potenciales y las condiciones de contorno en las dos interfaces imponen continuidad de los desplazamientos de sólidos y fluidos, de las tensiones normales y de cizallamiento y de la presión de fluido. La metodología es análoga a la presentada en Santos et al. (1992) y Carcione (2001, 2015). Los resultados se verifican para casos límites con ecuaciones teóricas ya publicadas (Carcione, 2015; Liu y Schmitt, 2003; Pilant, 1979; Santos et al., 1992).

## 4.1 DESPLAZAMIENTO DEL SÓLIDO Y RELATIVO AL FLUIDO

Nuestro sistema consiste de 3 medios porosos saturados con fluidos  $\Omega_n$ , con  $n = 1, 2$  y  $3$ , donde cada medio posee características diferentes, ver Figura 4.1. Los medios 1 y 3 son dos semiespacios y el medio 2 es una capa fina. Bajo la hipótesis de capa fina, se considera que la longitud de onda de la onda incidente, en los medios 1 y 3, es mayor que el espesor del medio 2, es decir  $\lambda_i > h$  (Liu y Schmitt, 2003). En  $z = 0$  se ubica la frontera entre  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , y en  $z = h$  la frontera entre  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ .

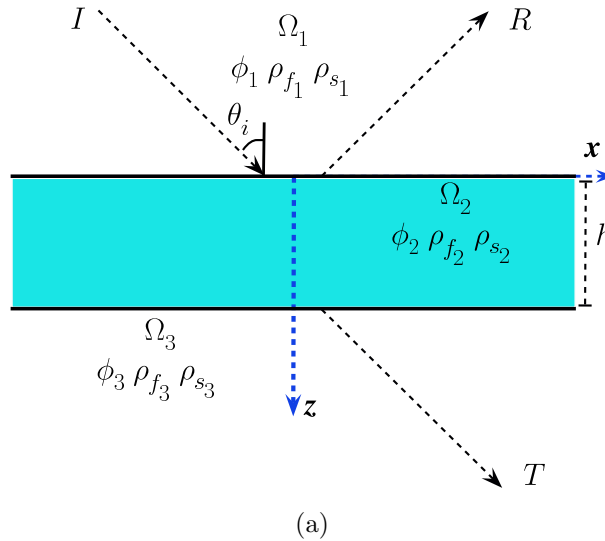


Figura 4.1: Geometría para dos semiespacios separados por una capa fina.

Se considera una onda plana  $P_I$ , que se propaga en  $\Omega_1$  incidiendo en  $z = 0$ , con un ángulo  $\theta_{i1}$  con respecto al eje vertical  $z$ . Siguiendo Santos et al. (1992) y Dutta y Odé (1983), se representan las ondas incidente, reflejada y transmitida usando potenciales.

Para  $\Omega_1$ , los potenciales del desplazamiento del sólido y relativo al fluido de la onda incidente están dados por

$$\varphi_{i1} = A_{i1} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{i1} \cdot \mathbf{x})},$$

$$\psi_{i1} = B_{i1} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{i1} \cdot \mathbf{x})}, \quad (4.1)$$

donde

$$\mathbf{q}_{i1} = q_{i1} (\sin(\theta_{i1}), \cos(\theta_{i1})),$$

es el vector de número de onda complejo, que determina la dirección de polarización.

Ahora se definen los potenciales del desplazamiento del sólido y relativo al fluido  $\varphi_{rc}^{(1)}$ ,  $\varphi_{rs}^{(1)}$ ,  $\psi_{rc}^{(1)}$  y  $\psi_{rs}^{(1)}$ , para las ondas compresionales y de corte reflejadas en  $\Omega_1$ . Estos potenciales están definidos como

$$\begin{aligned} \varphi_{rc}^{(1)} &= A_{r1}^{(1)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{r1}^{(1)} \cdot \mathbf{x})} + A_{r2}^{(1)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{r2}^{(1)} \cdot \mathbf{x})}, \\ \varphi_{rs}^{(1)} &= A_{rs}^{(1)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{rs}^{(1)} \cdot \mathbf{x})}, \\ \psi_{rc}^{(1)} &= B_{r1}^{(1)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{r1}^{(1)} \cdot \mathbf{x})} + B_{r2}^{(1)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{r2}^{(1)} \cdot \mathbf{x})}, \\ \psi_{rs}^{(1)} &= B_{rs}^{(1)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{rs}^{(1)} \cdot \mathbf{x})}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde el subíndice  $r$  indica onda reflejada,  $c$  onda compresional y  $s$  onda de corte. El superíndice (1) se refiere al medio  $\Omega_1$ . Los subíndices 1 y 2 indican que son ondas  $P_I$  y  $P_{II}$  respectivamente. Cabe aclarar que los potenciales escalares asociados a las ondas de corte, con las componentes según el eje  $y$  de los potenciales vectoriales correspondientes.

En el medio  $\Omega_2$ , los potenciales son

$$\begin{aligned} \varphi_{tc}^{(2)} &= A_{t1}^{(2)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{t1}^{(2)} \cdot \mathbf{x})} + A_{t2}^{(2)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{t2}^{(2)} \cdot \mathbf{x})}, \\ \varphi_{ts}^{(2)} &= A_{ts}^{(2)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{ts}^{(2)} \cdot \mathbf{x})}, \\ \psi_{tc}^{(2)} &= B_{t1}^{(2)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{t1}^{(2)} \cdot \mathbf{x})} + B_{t2}^{(2)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{t2}^{(2)} \cdot \mathbf{x})}, \\ \psi_{ts}^{(2)} &= B_{ts}^{(2)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{ts}^{(2)} \cdot \mathbf{x})}, \\ \varphi_{rc}^{(2)} &= A_{r1}^{(2)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{r1}^{(2)} \cdot \mathbf{x})} + A_{r2}^{(2)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{r2}^{(2)} \cdot \mathbf{x})}, \\ \varphi_{rs}^{(2)} &= A_{rs}^{(2)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{rs}^{(2)} \cdot \mathbf{x})}, \\ \psi_{rc}^{(2)} &= B_{r1}^{(2)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{r1}^{(2)} \cdot \mathbf{x})} + B_{r2}^{(2)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{r2}^{(2)} \cdot \mathbf{x})}, \\ \psi_{rs}^{(2)} &= B_{rs}^{(2)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{rs}^{(2)} \cdot \mathbf{x})}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde el subíndice  $t$  indica que son ondas transmitidas.

Finalmente, los potenciales en el medio  $\Omega_3$  están expresados por

$$\begin{aligned}
 \varphi_{tc}^{(3)} &= A_{t1}^{(3)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{t1}^{(3)} \cdot \mathbf{x})} + A_{t2}^{(3)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{t2}^{(3)} \cdot \mathbf{x})}, \\
 \varphi_{ts}^{(3)} &= A_{ts}^{(3)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{ts}^{(3)} \cdot \mathbf{x})}, \\
 \psi_{tc}^{(3)} &= B_{t1}^{(3)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{t1}^{(3)} \cdot \mathbf{x})} + B_{t2}^{(3)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{t2}^{(3)} \cdot \mathbf{x})}, \\
 \psi_{ts}^{(3)} &= B_{ts}^{(3)} e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{ts}^{(3)} \cdot \mathbf{x})}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

En general, el vector de número de onda complejo se determina por

$$\mathbf{q}_{lj} = (\chi_{lj}, \beta_{lj}) = q_{lj}(\sin(\theta_{lj}), \cos(\theta_{lj})), \quad l = i, r, t \quad j = 1, 2, s. \tag{4.5}$$

Los vectores de los desplazamientos del sólido y relativos del fluido,  $\mathbf{u}_s^{(n)} = (u_{s,x}^{(n)}, u_{s,z}^{(n)})$  y  $\mathbf{w}^{(n)} = (w_x^{(n)}, w_z^{(n)})$  en  $\Omega_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ , están dados por (Santos et al., 1992)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_s^{(1)} &= \nabla \varphi_{i1} + \nabla \varphi_{rc}^{(1)} + \left( -\frac{\partial \varphi_{rs}^{(1)}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_{rs}^{(1)}}{\partial x} \right), \\
 &= \mathbf{u}_{s,i1}^{(1)} + \mathbf{u}_{s,r1}^{(1)} + \mathbf{u}_{s,r2}^{(1)} + \mathbf{u}_{s,rs}^{(1)},
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}^{(1)} &= \nabla \psi_{i1} + \nabla \psi_{rc}^{(1)} + \left( -\frac{\partial \psi_{rs}^{(1)}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_{rs}^{(1)}}{\partial x} \right), \\
 &= \mathbf{w}_{i1}^{(1)} + \mathbf{w}_{r1}^{(1)} + \mathbf{w}_{r2}^{(1)} + \mathbf{w}_{rs}^{(1)},
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_s^{(2)} &= \nabla \varphi_{tc}^{(2)} + \left( -\frac{\partial \varphi_{ts}^{(2)}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_{ts}^{(2)}}{\partial x} \right) + \nabla \varphi_{rc}^{(2)} + \left( -\frac{\partial \varphi_{rs}^{(2)}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_{rs}^{(2)}}{\partial x} \right), \\
 &= \mathbf{u}_{s,t1}^{(2)} + \mathbf{u}_{s,t2}^{(2)} + \mathbf{u}_{s,ts}^{(2)} + \mathbf{u}_{s,r1}^{(2)} + \mathbf{u}_{s,r2}^{(2)} + \mathbf{u}_{s,rs}^{(2)},
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}^{(2)} &= \nabla \psi_{tc}^{(2)} + \left( -\frac{\partial \psi_{ts}^{(2)}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_{ts}^{(2)}}{\partial x} \right) + \nabla \psi_{rc}^{(2)} + \left( -\frac{\partial \psi_{rs}^{(2)}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_{rs}^{(2)}}{\partial x} \right), \\
 &= \mathbf{w}_{t1}^{(2)} + \mathbf{w}_{t2}^{(2)} + \mathbf{w}_{ts}^{(2)} + \mathbf{w}_{r1}^{(2)} + \mathbf{w}_{r2}^{(2)} + \mathbf{w}_{rs}^{(2)},
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\mathbf{u}_s^{(3)} = \nabla \varphi_{tc}^{(3)} + \left( -\frac{\partial \varphi_{ts}^{(3)}}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_{ts}^{(3)}}{\partial x} \right),$$



$$= \mathbf{u}_{s,t1}^{(3)} + \mathbf{u}_{s,t2}^{(3)} + \mathbf{u}_{s,ts}^{(3)}, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(3)} &= \nabla \psi_{rc}^{(3)} + \left( -\frac{\partial \psi_{rs}^{(3)}}{\partial z}, \frac{\partial \psi_{rs}^{(3)}}{\partial x} \right), \\ &= \mathbf{w}_{t1}^{(3)} + \mathbf{w}_{t2}^{(3)} + \mathbf{w}_{ts}^{(3)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aquí  $\mathbf{u}_{s,lj}^{(n)}$  y  $\mathbf{w}_{lj}^{(n)}$ ,  $l = i, r, t$ ,  $j = 1, 2, s$ , denotan los desplazamientos de las ondas P<sub>I</sub>, P<sub>II</sub> y las ondas de corte que componen  $\mathbf{u}_s^{(n)}$  y  $\mathbf{w}^{(n)}$ , respectivamente. El superíndice  $(n)$  está asociado con el medio  $\Omega_n$ .

## 4.2 CONDICIONES DE BORDE

Las condiciones de borde en las interfaces localizadas en  $z = 0$  y  $z = h$ , imponen continuidad en los desplazamientos del sólido y del fluido, continuidad en los esfuerzos normales y de corte y continuidad en la presión del fluido (Santos et al., 1992; Dutta y Odé, 1983). Por lo tanto, en  $z = 0$  y  $z = h$  se imponen las siguientes condiciones:

$$u_{s,x}^{(n)} = u_{s,x}^{(n+1)}, \quad (4.12)$$

$$u_{s,z}^{(n)} = u_{s,z}^{(n+1)}, \quad (4.13)$$

$$\sigma_{zz}^{(n)} = \sigma_{zz}^{(n+1)}, \quad (4.14)$$

$$\sigma_{xz}^{(n)} = \sigma_{xz}^{(n+1)}, \quad (4.15)$$

$$p_f^{(n)} = p_f^{(n+1)}, \quad (4.16)$$

$$w_z^{(n)} = w_z^{(n+1)}, \quad n = 1, 2. \quad (4.17)$$

## 4.3 COEFICIENTES DE REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN

La amplitud de los coeficientes de reflexión y transmisión  $R_j^{(1)}$  y  $T_j^{(3)}$ ,  $j = 1, 2, s$ , para los diferentes tipos de onda, son definidos como el cociente entre la amplitud

desplazamiento del sólido de la correspondiente onda y la onda incidente (Santos et al., 1992; Dutta y Odé, 1983), en otras palabras,

$$R_j^{(1)} = \frac{A_{rj}^{(1)} q_{rj}^{(1)}}{A_{i1}^{(1)} q_{i1}^{(1)}}, \quad (4.18)$$

y

$$T_j^{(3)} = \frac{A_{tj}^{(3)} q_{tj}^{(3)}}{A_{i1}^{(1)} q_{i1}^{(1)}}. \quad (4.19)$$

Usando las ecuaciones (4.1)-(4.4) para obtener las expresiones de los desplazamientos, tanto del sólido como del fluido de cada onda por separado, y reemplazando en las ecuaciones de movimiento (2.16) y (2.17), se obtienen las relaciones entre las amplitudes de los desplazamientos del sólido y los desplazamientos relativos al fluido (Santos et al., 2004):

$$\begin{aligned} B_{lj}^{(n)} &= \gamma_{lj}^{(n)} A_{lj}^{(n)}, \quad j = 1, 2, s, \quad l = r, t, \quad n = 1, 2, 3, \\ B_{i1} &= \gamma_{i1} A_{i1}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

con

$$\begin{aligned} \gamma_{rj}^{(n)} &= \frac{\left[ \rho_b^{(n)} \omega^2 - \left( q_{rj}^{(n)} \right)^2 H_u^{(n)} \right]}{\left[ \left( q_{rj}^{(n)} \right)^2 D^{(n)} - \rho_f^{(n)} \omega^2 \right]} \quad j = 1, 2 \quad n = 1, 2, \\ \gamma_{i1}^{(1)} &= \frac{\left[ \rho_b^{(1)} \omega^2 - \left( q_{i1}^{(1)} \right)^2 H_u^{(1)} \right]}{\left[ \left( q_{i1}^{(1)} \right)^2 D^{(1)} - \rho_f^{(1)} \omega^2 \right]}, \\ \gamma_{tj}^{(n)} &= \frac{\left[ \rho_b^{(n)} \omega^2 - \left( q_{tj}^{(n)} \right)^2 H_u^{(n)} \right]}{\left[ \left( q_{tj}^{(n)} \right)^2 D^{(n)} - \rho_f^{(n)} \omega^2 \right]} \quad j = 1, 2 \quad n = 2, 3, \\ \gamma_{rs}^{(n)} &= \frac{\mu^{(n)} \left( q_{rs}^{(n)} \right)^2 - \rho_b^{(n)} \omega^2}{\rho_f^{(n)} \omega^2} \quad n = 1, 2, \\ \gamma_{ts}^{(n)} &= \frac{\mu^{(n)} \left( q_{ts}^{(n)} \right)^2 - \rho_b^{(n)} \omega^2}{\rho_f^{(n)} \omega^2} \quad n = 2, 3. \end{aligned}$$

Las condiciones de borde (4.12)-(4.17), requieren que en las interfaces ( $z = 0$  y  $z = h$ ) los factores de fase sean iguales

$$\begin{aligned}\chi_{i1} &= \chi_{r1}^{(1)} = \chi_{r2}^{(1)} = \chi_{rs}^{(1)} = \chi_{t1}^{(2)} = \chi_{t2}^{(2)} = \chi_{ts}^{(2)} = \chi_{r1}^{(2)} = \chi_{r2}^{(2)} = \chi_{rs}^{(2)} \\ &= \chi_{t1}^{(3)} = \chi_{t2}^{(3)} = \chi_{ts}^{(3)} = \chi,\end{aligned}\quad (4.21)$$

lo cual representa la ley de Snell y nos permite obtener los ángulos de reflexión y transmisión  $\theta_{ij}$  para cada tipo de onda en función del ángulo de incidencia  $\theta_{i1}$ .

La aplicación de las condiciones de borde (4.12)-(4.17) y la ley de Snell (4.21) en  $z = 0$  genera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}-\chi A_{i1}^{(1)} - \chi A_{r1}^{(1)} - \chi A_{r2}^{(1)} + \beta_{rs}^{(1)} A_{rs}^{(1)} &= -\chi A_{t1}^{(2)} - \chi A_{t2}^{(2)} + \beta_{ts}^{(2)} A_{ts}^{(2)} - \chi A_{r1}^{(2)} \\ &\quad - \chi A_{r2}^{(2)} + \beta_{rs}^{(2)} A_{rs}^{(2)}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}-\beta_{i1}^{(1)} A_{i1}^{(1)} - \beta_{r1}^{(1)} A_{r1}^{(1)} - \beta_{r2}^{(1)} A_{r2}^{(1)} - \chi A_{rs}^{(1)} &= -\beta_{t1}^{(2)} A_{t1}^{(2)} - \beta_{t2}^{(2)} A_{t2}^{(2)} - \chi A_{ts}^{(2)} \\ &\quad - \beta_{r1}^{(2)} A_{r1}^{(2)} - \beta_{r2}^{(2)} A_{r2}^{(2)} - \chi A_{rs}^{(2)}.\end{aligned}\quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}A_{i1}^{(1)} \zeta_{i1}^{(1)} + A_{r1}^{(1)} \zeta_{r1}^{(1)} + A_{r2}^{(1)} \zeta_{r2}^{(1)} - A_{rs}^{(1)} \zeta_{rs}^{(1)} &= A_{t1}^{(2)} \zeta_{t1}^{(2)} + A_{t2}^{(2)} \zeta_{t2}^{(2)} - A_{ts}^{(2)} \zeta_{ts}^{(2)} \\ &\quad + A_{r1}^{(2)} \zeta_{r1}^{(2)} + A_{r2}^{(2)} \zeta_{r2}^{(2)} - A_{rs}^{(2)} \zeta_{rs}^{(2)}.\end{aligned}\quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}-2\mu^{(1)} A_{i1} \chi \beta_{i1}^{(1)} - 2\mu^{(1)} A_{r1} \chi \beta_{r1}^{(1)} - 2\mu^{(1)} A_{r2} \chi \beta_{r2}^{(1)} - \mu^{(1)} A_{rs} \left[ \chi^2 - (\beta_{rs}^{(1)})^2 \right] &= \\ -2\mu^{(2)} A_{t1} \chi \beta_{t1}^{(2)} - 2\mu^{(2)} A_{t2} \chi \beta_{t2}^{(2)} - \mu^{(2)} A_{ts} \left[ \chi^2 - (\beta_{ts}^{(2)})^2 \right] - 2\mu^{(2)} A_{r1} \chi \beta_{r1}^{(2)} \\ &\quad - 2\mu^{(2)} A_{r2} \chi \beta_{r2}^{(2)} - \mu^{(2)} A_{rs} \left[ \chi^2 - (\beta_{rs}^{(2)})^2 \right].\end{aligned}\quad (4.25)$$

$$A_{i1}^{(1)} \xi_{i1}^{(1)} + A_{r1}^{(1)} \xi_{r1}^{(1)} + A_{r2}^{(1)} \xi_{r2}^{(1)} = A_{t1}^{(2)} \xi_{t1}^{(2)} + A_{t2}^{(2)} \xi_{t2}^{(2)} + A_{r1}^{(2)} \xi_{r1}^{(2)} + A_{r2}^{(2)} \xi_{r2}^{(2)}.\quad (4.26)$$

$$\begin{aligned}-\beta_{i1}^{(1)} \gamma_2^{(1)} A_{i1}^{(1)} - \beta_{r1}^{(1)} \gamma_1^{(1)} A_{r1}^{(1)} - \beta_{r2}^{(1)} \gamma_2^{(1)} A_{r2}^{(1)} - \chi \gamma_{rs}^{(1)} A_{rs}^{(1)} &= -\beta_{t1}^{(2)} \gamma_1^{(2)} A_{t1}^{(2)} \\ &\quad - \beta_{t2}^{(2)} \gamma_2^{(2)} A_{t2}^{(2)} - \chi \gamma_{ts}^{(2)} A_{ts}^{(2)} - \beta_{r1}^{(2)} \gamma_1^{(2)} A_{r1}^{(2)} - \beta_{r2}^{(2)} \gamma_2^{(2)} A_{r2}^{(2)} - \chi \gamma_{rs}^{(2)} A_{rs}^{(2)}.\end{aligned}\quad (4.27)$$

Procediendo análogamente en  $z = h$  se obtiene

$$\begin{aligned}
 -\chi A_{t1}^{(3)} e^{-i\beta_{t1}^{(3)}h} - \chi A_{t2}^{(3)} e^{-i\beta_{t2}^{(3)}h} + \beta_{ts}^{(3)} A_{ts}^{(3)} e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h} &= -\chi A_{t1}^{(2)} e^{-i\beta_{t1}^{(2)}h} \\
 -\chi A_{t2}^{(2)} e^{-i\beta_{t2}^{(2)}h} + \beta_{ts}^{(2)} A_{ts}^{(2)} e^{-i\beta_{ts}^{(2)}h} - \chi A_{r1}^{(2)} e^{-i\beta_{r1}^{(2)}h} - \chi A_{r2}^{(2)} e^{-i\beta_{r2}^{(2)}h} \\
 + \beta_{rs}^{(2)} A_{rs}^{(2)} e^{-i\beta_{rs}^{(2)}h}. & \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\beta_{t1}^{(3)} A_{t1}^{(3)} e^{-i\beta_{t1}^{(3)}h} - \beta_{t2}^{(3)} A_{t2}^{(3)} e^{-i\beta_{t2}^{(3)}h} - \chi A_{ts}^{(3)} e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h} &= -\beta_{t1}^{(2)} A_{t1}^{(2)} e^{-i\beta_{t1}^{(2)}h} \\
 -\beta_{t2}^{(2)} A_{t2}^{(2)} e^{-i\beta_{t2}^{(2)}h} - \chi A_{ts}^{(2)} e^{-i\beta_{ts}^{(2)}h} - \beta_{r1}^{(2)} A_{r1}^{(2)} e^{-i\beta_{r1}^{(2)}h} - \beta_{r2}^{(2)} A_{r2}^{(2)} e^{-i\beta_{r2}^{(2)}h} \\
 -\chi A_{rs}^{(2)} e^{-i\beta_{rs}^{(2)}h}. & \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{t1}^{(3)} \zeta_{t1}^{(3)} e^{-i\beta_{t1}^{(3)}h} + A_{t2}^{(3)} \zeta_{t2}^{(3)} e^{-i\beta_{t2}^{(3)}h} - A_{ts}^{(3)} \zeta_{ts}^{(3)} e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h} &= A_{t1}^{(2)} \zeta_{t1}^{(2)} e^{-i\beta_{t1}^{(2)}h} \\
 + A_{t2}^{(2)} \zeta_{t2}^{(2)} e^{-i\beta_{t2}^{(2)}h} - A_{ts}^{(2)} \zeta_{ts}^{(2)} e^{-i\beta_{ts}^{(2)}h} + A_{r1}^{(2)} \zeta_{r1}^{(2)} e^{-i\beta_{r1}^{(2)}h} + A_{r2}^{(2)} \zeta_{r2}^{(2)} e^{-i\beta_{r2}^{(2)}h} \\
 - A_{rs}^{(2)} \zeta_{rs}^{(2)} e^{-i\beta_{rs}^{(2)}h}. & \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -2\mu^{(3)} A_{t1} \chi \beta_{t1}^{(3)} e^{-i\beta_{t1}^{(3)}h} - 2\mu^{(3)} A_{t2} \chi \beta_{t2}^{(3)} e^{-i\beta_{t2}^{(3)}h} - \mu^{(3)} A_{ts} \left[ \chi^2 - \left( \beta_{ts}^{(3)} \right)^2 \right] e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h} &= \\
 -2\mu^{(2)} A_{t1}^{(2)} \chi \beta_{t1}^{(2)} e^{-i\beta_{t1}^{(2)}h} - 2\mu^{(2)} A_{t2}^{(2)} \chi \beta_{t2}^{(2)} e^{-i\beta_{t2}^{(2)}h} - \mu^{(2)} A_{ts}^{(2)} \left[ \chi^2 - \left( \beta_{ts}^{(2)} \right)^2 \right] e^{-i\beta_{ts}^{(2)}h} \\
 -2\mu^{(2)} A_{r1}^{(2)} \chi \beta_{r1}^{(2)} e^{-i\beta_{r1}^{(2)}h} - 2\mu^{(2)} A_{r2}^{(2)} \chi \beta_{r2}^{(2)} e^{-i\beta_{r2}^{(2)}h} - \mu^{(2)} A_{rs}^{(2)} \left[ \chi^2 - \left( \beta_{rs}^{(2)} \right)^2 \right] e^{-i\beta_{rs}^{(2)}h} & \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{t1}^{(3)} \xi_{t1}^{(3)} e^{-i\beta_{t1}^{(3)}h} + A_{t2}^{(3)} \xi_{t2}^{(3)} e^{-i\beta_{t2}^{(3)}h} &= A_{t1}^{(2)} \xi_{t1}^{(2)} e^{-i\beta_{t1}^{(2)}h} + A_{t2}^{(2)} \xi_{t2}^{(2)} e^{-i\beta_{t2}^{(2)}h} \\
 + A_{r1}^{(2)} \xi_{r1}^{(2)} e^{-i\beta_{r1}^{(2)}h} + A_{r2}^{(2)} \xi_{r2}^{(2)} e^{-i\beta_{r2}^{(2)}h}. & \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\beta_{t1}^{(3)} \gamma_1^{(3)} A_{t1}^{(3)} e^{-i\beta_{t1}^{(3)}h} - \beta_{t2}^{(3)} \gamma_2^{(3)} A_{t2}^{(3)} e^{-i\beta_{t2}^{(3)}h} - \chi \gamma_{ts}^{(3)} A_{ts}^{(3)} e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h} &= \\
 -\beta_{t1}^{(2)} \gamma_1^{(2)} A_{t1}^{(2)} e^{-i\beta_{t1}^{(2)}h} - \beta_{t2}^{(2)} \gamma_2^{(2)} A_{t2}^{(2)} e^{-i\beta_{t2}^{(2)}h} - \chi \gamma_{ts}^{(2)} A_{ts}^{(2)} e^{-i\beta_{ts}^{(2)}h} \\
 -\beta_{r1}^{(2)} \gamma_1^{(2)} A_{r1}^{(2)} e^{-i\beta_{r1}^{(2)}h} - \beta_{r2}^{(2)} \gamma_2^{(2)} A_{r2}^{(2)} e^{-i\beta_{r2}^{(2)}h} - \chi \gamma_{rs}^{(2)} A_{rs}^{(2)} e^{-i\beta_{rs}^{(2)}h}. & \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

Los coeficientes de los sistemas (4.22)-(4.27) y (4.28)-(4.33) están dados por

$$\begin{aligned}
 \beta_{rj}^{(n)} &= -\sqrt{\left( q_{rj}^{(n)} \right)^2 - \chi^2}, \quad j = 1, 2, s \quad n = 1, 2, \\
 \beta_{tj}^{(n)} &= \sqrt{\left( q_{tj}^{(n)} \right)^2 - \chi^2}, \quad j = 1, 2, s \quad n = 2, 3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta_{lj}^{(n)} &= - \left( q_{lj}^{(n)} \right)^2 \left( H_u^{(n)} + D^{(n)} \gamma_{lj}^{(n)} \right) + 2\mu^{(n)} \chi^2, \quad j = 1, 2 \quad n = 1, 2, 3 \quad l = i, r, t, \\
 \zeta_{ls}^{(n)} &= 2\mu^{(n)} \chi \beta_{ls}^{(n)}, \quad n = 1, 2, 3 \quad l = r, t, \\
 \xi_{lj}^{(n)} &= \left( D^{(n)} + M^{(n)} \gamma_{lj}^{(n)} \right) \left( q_{lj}^{(n)} \right)^2, \quad j = 1, 2 \quad n = 1, 2, 3 \quad l = i, r, t.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Seguendo Martínez et al. (2014) se obtienen los números de onda  $q_{lj}^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, 3$ ,  $l = i, r, t$ , y  $j = 1, 2, s$ :

$$\begin{aligned}
 q_{r1}^{(n)} &= \sqrt{\frac{-F^{(n)} - \sqrt{(F^{(n)})^2 - 4O^{(n)}K^{(n)}}}{2O^{(n)}}}, \quad n = 1, 2, 3, \\
 q_{r2}^{(n)} &= \sqrt{\frac{-F^{(n)} + \sqrt{(F^{(n)})^2 - 4O^{(n)}K^{(n)}}}{2O^{(n)}}}, \quad n = 1, 2, 3, \\
 q_{rs}^{(n)} &= \sqrt{N^{(n)} - iV^{(n)}}, \quad n = 1, 2, 3, \\
 q_{r1}^{(1)} &= q_{i1}^{(1)}, \\
 q_{rj}^{(n)} &= q_{tj}^{(n)}, \quad j = 1, 2, s \quad n = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Aquí

$$\begin{aligned}
 O^{(n)} &= M^{(n)} H_u^{(n)} - (D^{(n)})^2, \quad n = 1, 2, 3, \\
 F^{(n)} &= \omega^2 \left[ 2\rho_f^{(n)} D^{(n)} - H_u^{(n)} g^{(n)} - \rho_b^{(n)} M^{(n)} \right] + iH_u^{(n)} b^{(n)} \omega, \quad n = 1, 2, 3, \\
 K^{(n)} &= \omega^4 \left[ \rho_b^{(n)} g^{(n)} - (\rho_f^{(n)})^2 \right] - i\rho_b^{(n)} b^{(n)} \omega^3 \quad n = 1, 2, 3, \\
 N^{(n)} &= \frac{\omega^2}{\mu^{(n)}} \left[ \rho_b^{(n)} - \frac{(\rho_f^{(n)})^2 \omega^2 g^{(n)}}{(g^{(n)})^2 \omega^2 + (b^{(n)})^2} \right], \quad n = 1, 2, 3, \\
 V^{(n)} &= (\rho_f^{(n)})^2 \frac{\omega^3 b^{(n)}}{\mu^{(n)} ((g^{(n)})^2 \omega^2 + (b^{(n)})^2)}, \quad n = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Haciendo

$$C_{lj}^{(n)} = A_{lj}^{(n)} / A_{i1}, \quad l = r, t, \quad j = 1, 2, s, \quad n = 1, 2, 3, \tag{4.36}$$

y usando la notación matricial de Carcione (2015, Section 6.4) para relacionar los campos en  $z = 0$  y  $z = h$ , se obtiene

$$(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_3) \mathbf{r} = -\mathbf{i}_p, \tag{4.37}$$

donde

$$\mathbf{r} = \left( C_{r1}^{(1)}, C_{r2}^{(1)}, C_{rs}^{(1)}, C_{t1}^{(3)}, C_{t2}^{(3)}, C_{ts}^{(3)} \right)^t, \quad (4.38)$$

$$\mathbf{i}_p = \left[ -\chi, -\beta_{ij}^{(1)}, \zeta_{ij}^{(1)}, -2\mu^{(1)}\chi\beta_{ij}^{(1)}, \xi_{ij}^{(1)}, -\beta_{ij}^{(1)}\gamma_{ij}^{(1)} \right]^t, \quad j = 1, 2, \quad (4.39)$$

y  $\mathbf{B} = \mathbf{T}(0) \cdot (\mathbf{T}(h))^{-1}$  que actúa como una condición de borde.

Seguindo Martínez et al. (2014), las matrices del sistema (4.37) se definen como

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -\chi & -\chi & \beta_{rs}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_{r1}^{(1)} & -\beta_{r2}^{(1)} & -\chi & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_{r1}^{(1)} & \zeta_{r2}^{(1)} & -\zeta_{rs}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ -2\mu^{(1)}\chi\beta_{r1}^{(1)} & -2\mu^{(1)}\chi\beta_{r2}^{(1)} & -\mu^{(1)} \left[ \chi^2 - \left( \beta_{rs}^{(1)} \right)^2 \right] & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{r1}^{(1)} & \xi_{r2}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_{r1}^{(1)}\beta_{r1}^{(1)} & -\gamma_{r2}^{(1)}\beta_{r2}^{(1)} & -\gamma_{rs}^{(1)}\chi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\chi e^{-i\beta_{t1}^{(3)}h} & -\chi e^{-i\beta_{t2}^{(3)}h} & \beta_{ts}^{(3)} e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h} \\ -\beta_{t1}^{(3)} e^{-i\beta_{t1}^{(3)}h} & -\beta_{t2}^{(3)} e^{-i\beta_{t2}^{(3)}h} & -\chi e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h} \\ \zeta_{t1}^{(3)} e^{-i\beta_{t1}^{(3)}h} & \zeta_{t2}^{(3)} e^{-i\beta_{t2}^{(3)}h} & -\zeta_{ts}^{(3)} e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h} \\ -2\mu^{(3)}\chi\beta_{t1}^{(3)} e^{-i\beta_{t1}^{(3)}h} & -2\mu^{(3)}\chi\beta_{t2}^{(3)} e^{-i\beta_{t2}^{(3)}h} & -\mu^{(3)} \left[ \chi^2 - \left( \beta_{ts}^{(3)} \right)^2 \right] e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h} \\ \xi_{t1}^{(3)} e^{-i\beta_{t1}^{(3)}h} & \xi_{t2}^{(3)} e^{-i\beta_{t2}^{(3)}h} & 0 \\ -\gamma_{t1}^{(3)}\beta_{t1}^{(3)} e^{-i\beta_{t1}^{(3)}h} & -\gamma_{t2}^{(3)}\beta_{t2}^{(3)} e^{-i\beta_{t2}^{(3)}h} & -\gamma_{ts}^{(3)}\chi e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h} \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

finalmente  $T(z) = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2(z)$  donde

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} -\chi & -\chi & \beta_{ts}^{(2)} \\ -\beta_{t1}^{(2)} & -\beta_{t2}^{(2)} & -\chi \\ \zeta_{t1}^{(2)} & \zeta_{t2}^{(2)} & -\zeta_{ts}^{(2)} \\ -2\mu^{(2)}\chi\beta_{t1}^{(2)} & -2\mu^{(2)}\chi\beta_{t2}^{(2)} & -\mu^{(2)} \left[ \chi^2 - \left( \beta_{ts}^{(2)} \right)^2 \right] \\ \xi_{t1}^{(2)} & \xi_{t2}^{(2)} & 0 \\ -\gamma_{t1}^{(2)}\beta_{t1}^{(2)} & -\gamma_{t2}^{(2)}\beta_{t2}^{(2)} & -\gamma_{ts}^{(2)}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\chi & -\chi & \beta_{rs}^{(2)} \\ -\beta_{r1}^{(2)} & -\beta_{r2}^{(2)} & -\chi \\ \zeta_{r1}^{(2)} & \zeta_{r2}^{(2)} & -\zeta_{rs}^{(2)} \\ -2\mu^{(2)}\chi\beta_{r1}^{(2)} & -2\mu^{(2)}\chi\beta_{r2}^{(2)} & -\mu^{(2)} \left[ \chi^2 - \left( \beta_{rs}^{(2)} \right)^2 \right] \\ \xi_{r1}^{(2)} & \xi_{r2}^{(2)} & 0 \\ -\gamma_{r1}^{(2)}\beta_{r1}^{(2)} & -\gamma_{r2}^{(2)}\beta_{r2}^{(2)} & -\gamma_{rs}^{(2)}\chi \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

y

$$\mathbf{S}_2(z) = \begin{pmatrix} e^{-i\beta_{t1}^{(2)}z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\beta_{t2}^{(2)}z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\beta_{ts}^{(2)}z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\beta_{r1}^{(2)}z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\beta_{r2}^{(2)}z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\beta_{rs}^{(2)}z} \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

La amplitud de los coeficientes de transmisión y reflexión para los diferentes tipos de onda están definidos como

$$\begin{aligned} R_j^{(1)} &= C_{rj}^{(1)} \frac{q_{rj}^{(1)}}{q_{i1}^{(1)}}, \\ T_j^{(3)} &= C_{tj}^{(3)} \frac{q_{tj}^{(3)}}{q_{i1}^{(1)}}, \quad j = 1, 2, s. \end{aligned} \quad (4.44)$$

En el caso que la onda incidente sea una onda de corte S, el vector  $\mathbf{i}_p$  en (4.37) debe ser reemplazado por

$$\mathbf{i}_s = \left[ \beta_{is}^{(1)}, -\chi, -\zeta_{is}^{(1)}, -\mu^{(1)} \left\{ \chi^2 - \left( \beta_{is}^{(1)} \right)^2 \right\}, 0, -\gamma_{is}^{(1)} \chi \right]^t.$$

## 4.4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección, se validarán las expresiones enunciadas mediante diferentes casos de interés. Los casos considerados son los siguientes:

**Caso 1:** Test de validación cuando los tres medios  $\Omega_n$  son fluidos no viscosos, esto corresponde al caso extremo cuando  $\phi = 1$ ,  $\mu = 0$  y  $\eta = 0$ .

**Caso 2:** Test de validación cuando se tiene una interfaz simple entre dos sólidos elásticos isótropos  $\Omega_1$  y  $\Omega_3$ , esto corresponde al caso límite  $\phi = 0$ ,  $\eta = 0$ .

**Caso 3:** Un medio poroso simple saturado con tres diferentes fluidos, de modo tal, que se tienen tres diferentes medios como en la Figura 4.1, identificados por  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ . El objetivo es tomar el límite cuando el espesor de la capa fina tiende a cero y recuperar los resultados obtenidos por Santos et al. (1992).

**Caso 4:** Se tienen dos semiespacios con iguales propiedades y una capa fina que los separa  $\Omega_2$ , al saturar todo con agua, se calculan los coeficientes de transmisión y reflexión para diferentes espesores  $h$  de la capa fina.

### 4.4.1 CASO 1. ONDAS P EN MEDIOS FLUIDOS

Se calcularon los coeficientes de reflexión y transmisión para ondas compresionales propagándose en un medio fluido, a una frecuencia de 50 Hz. Considerando la notación de la Figura 4.1, se escoge  $\Omega_1$  agua,  $\Omega_2$  como petróleo y  $\Omega_3$  como gas,



los tres fluidos, se asumen en este caso, con viscosidad nula. Las densidades y los módulos de volumen  $K_f$  están dados en la Tabla 4.1. Para modelar los tres medios  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  como fluidos, el modulo de corte fue llevado a cero, mientras que la porosidad es igual a 1. Entonces, este caso sólo tendrá en cuenta las condiciones de borde (4.16) y (4.17). El espesor de la capa  $\Omega_2$  es  $h = 0.001$  m, que es igual al 0.0033 % de la longitud de onda de la onda compresional en el medio  $\Omega_1$  (en el fluido la longitud de onda es  $\lambda_p = \sqrt{K_f/\rho_f}/f$ ,  $f$  es la frecuencia en Hz) y 0.0079 % de la longitud de onda en el medio  $\Omega_3$ .

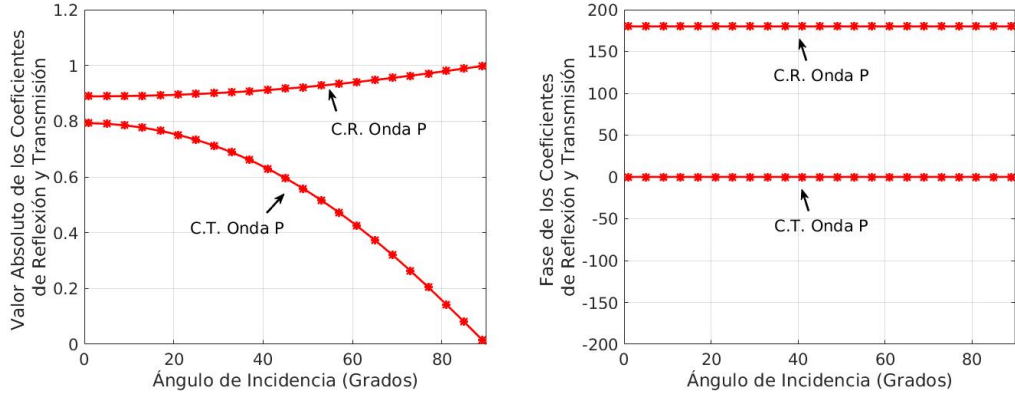
Parámetro	Agua	Petróleo	Gas
Módulo de volumen, $K_f$	2.25 GPa	0.57 GPa	0.05543 GPa
Densidad, $\rho_f$	1000 kg/m <sup>3</sup>	700 kg/m <sup>3</sup>	139.8 kg/m <sup>3</sup>
Viscosidad, $\eta$	0.001 Pa·s	0.004 Pa·s	0.000022 Pa·s

Tabla 4.1: Propiedades de los fluidos saturantes

En la Figura 4.2 se muestran la magnitud y la fase de los coeficientes de reflexión y transmisión en función del ángulo de incidencia. Se observa un perfecto ajuste con los resultados analíticos (ecuaciones (A-11) y (A-12)) de Liu y Schmitt (2003).

#### 4.4.2 CASO 2. ONDAS P Y S EN MEDIOS SÓLIDOS

Se escogen  $\Omega_1$  y  $\Omega_3$  dos sólidos con propiedades idénticas,  $K_s = 37$  GPa,  $\mu_s = 44$  GPa y  $\rho_s = 2650$  kg/m<sup>3</sup>. Las propiedades de la capa  $\Omega_2$  son,  $\rho_s = 2550$  kg/m<sup>3</sup>,  $K_s = 25$  GPa y  $\mu_s = 9$  GPa. La porosidad en los tres medios es cero y por tal razón no hay poros que los fluidos saturen. El espesor de la capa es  $h = 0.001$  m, que corresponde al 0.0009 % de la longitud de onda de la onda compresional en  $\Omega_1$  o  $\Omega_3$  (en el medio sólido la longitud de onda de la onda compresional se calcula  $\lambda_p = \sqrt{(K_s + 2\mu_s)/\rho_s}/f$ ) y la frecuencia de análisis es 50 Hz.



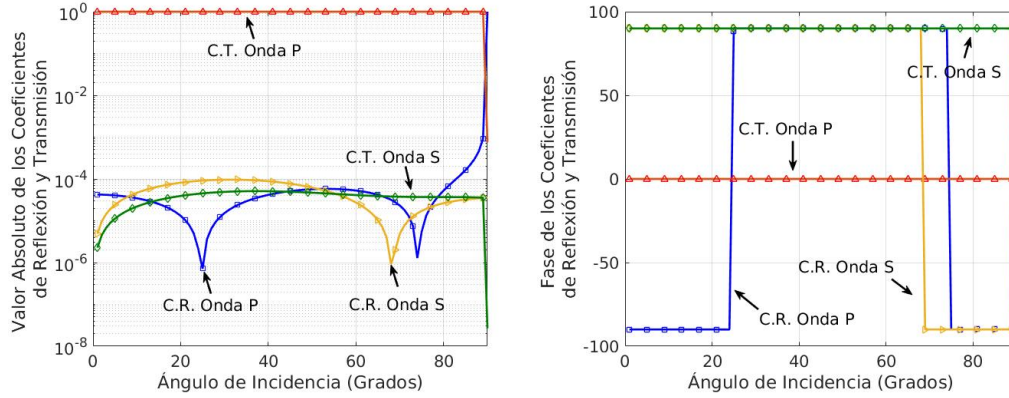
(a) Valor absoluto de los coeficientes de reflexión y transmisión. (b) Ángulo de fase de los coeficientes de reflexión y transmisión.

Figura 4.2: Coeficientes de reflexión y transmisión de una onda compresional en función del ángulo de incidencia para una apertura de la capa fina de  $h = 0.001$  m. Las líneas sólidas corresponden a la solución de Liu y Schmitt (2003) y los puntos corresponden a la presente solución. La onda incidente P tiene una frecuencia de 50 Hz y valores de  $\eta = \mu = 0$  y  $\phi = 1$ .

En la Figura 4.3 se visualizan los coeficientes de reflexión y transmisión de las ondas compresionales y de corte debido a la tetrapartición de la onda incidente P en las interfaces  $z = 0$  y  $z = h$ . Los resultados que se obtuvieron son consistentes con (Carcione, 2015, eq. (6.215)).

#### 4.4.3 CASO 3. LOS TRES MEDIOS CON LA MISMA MATRIZ ROCOSA PERO SATURADOS CON TRES FLUIDOS DIFERENTES

En este ejemplo se validan las expresiones obtenidas contra los coeficientes de reflexión y transmisión para una única interfaz plana que separa dos semiespacios porosos saturados. Para realizar la comparación con los resultados publicados en Santos et al. (1992), establecemos  $h = 0.0$  m en la ecuación (4.37) para recuperar la ecuación (19) de dicho documento, en otras palabras, el espesor de la capa fina se



(a) Valores absolutos de los coeficientes de reflexión y transmisión (ondas P y S). (b) Ángulo de fase de los coeficientes de reflexión y transmisión (ondas P y S).

Figura 4.3: Coeficientes de reflexión y transmisión de las ondas compresionales y de corte, como función del ángulo de incidencia, para un espesor del medio  $\Omega_2$   $h = 0.001$  m. Las líneas continuas corresponden a la solución de Carcione (2015) y los símbolos corresponden a la presente solución. La onda incidente  $P_I$  tiene frecuencia de 50 Hz, además  $\eta = \phi = 0$ . Los valores absolutos son mostrados en escala semilogarítmica.

reduce a cero.

Los tres medios poroelásticos  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  de la Figura 4.1 están definidos por  $K_m = 8.66$  GPa,  $K_s = 37$  GPa,  $\mu = 6.5$  GPa,  $\phi = 0.297$ ,  $\kappa = 1.875 \cdot 10^{-12}$  y  $\rho_s = 2650$  kg/m<sup>3</sup>. El fluido saturante es agua en  $\Omega_1$ , gas en  $\Omega_2$  y petróleo en  $\Omega_3$ , cuyas propiedades se dan en la Tabla 4.1

La onda plana incidente es  $P_{II}$  de frecuencia 50 kHz (las frecuencias críticas de corte para cada medio son  $f_{c1} = 11.54$  kHz,  $f_{c2} = 1.81$  kHz y  $f_{c3} = 65.97$  kHz; como la frecuencia de la onda es cercana a estas frecuencias, la onda  $P_{II}$  se comporta como una onda de propagación). La Figura 4.4 muestra la magnitud de los coeficientes de reflexión y transmisión en función del ángulo de incidencia para los diferentes tipos de onda y para tres diferentes valores del espesor de la capa fina,  $h = 0.001$  m (1.39% de la longitud de onda de la onda  $P_I$  en el medio  $\Omega_1$  o 1.44% en el medio  $\Omega_3$ ,  $\lambda_{P_I} = \sqrt{(\lambda_u + 2\mu)/\rho_b/f}$ ),  $h = 0.004$  m y  $h = 0.0$  m. Para las ondas

$P_I$  y  $P_{II}$ , la magnitud de los coeficientes decrece cuando  $h$  incrementa, mientras que un comportamiento opuesto se observa para las ondas de corte. Además, para las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$  hay un ángulo crítico entre 10 y 20 grados y para las ondas de corte existen dos ángulos críticos sólo para  $h = 0$  m. Notar en la Figura 4.4 que para  $h = 0$  m se obtienen idénticos resultados que lo mostrado por Santos et al. (2004) en las Figuras 6 y 7.

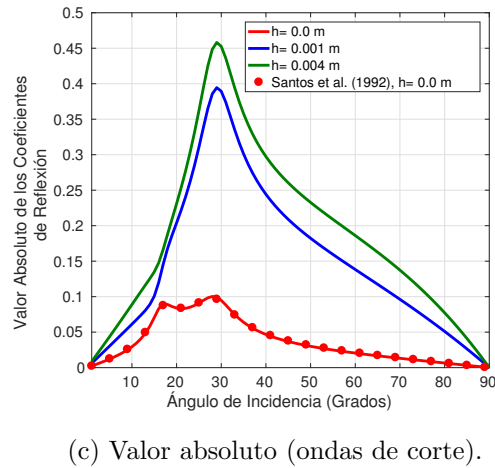
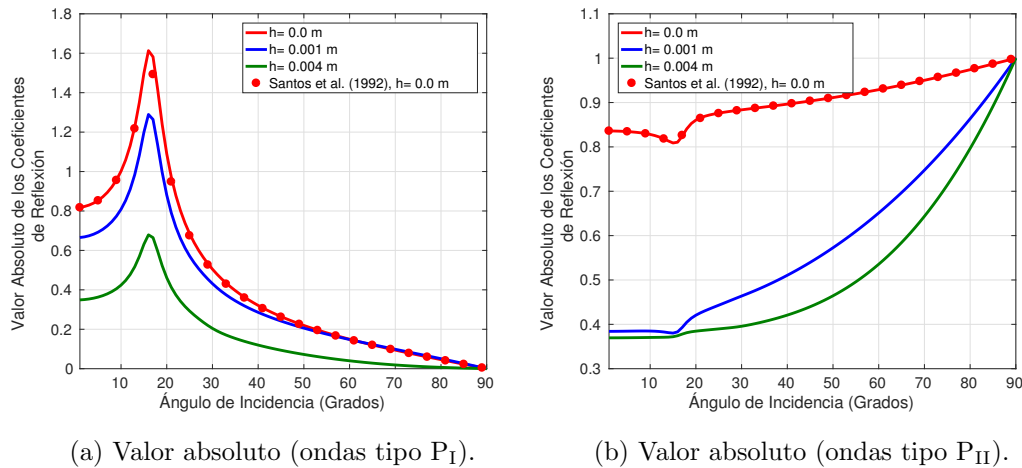


Figura 4.4: Valor absoluto de los coeficientes de reflexión para las ondas compresionales  $P_I$ ,  $P_{II}$  y las ondas de corte como función del ángulo de incidencia, para tres diferentes espesores de capa  $h$ . La onda incidente es del tipo  $P_{II}$  con frecuencia de 50 kHz.

#### 4.4.4 CASO 4. TRES MEDIOS SATURADOS CON EL MISMO FLUIDO

Los semiespacios  $\Omega_1$  y  $\Omega_3$  tienen las siguientes propiedades  $K_m = 11.7$  GPa,  $K_s = 37$  GPa,  $\mu = 14$  GPa,  $\rho_s = 2650$  Kg/m<sup>2</sup>,  $\phi = 0.25$  y  $\kappa = 1.78 \cdot 10^{-13}$  m<sup>2</sup>. El medio  $\Omega_2$  es una capa porosa y altamente permeable, de porosidad  $\phi = 0.5$  con módulo de volumen de la matriz seca  $K_m = 0.58$  GPa y módulo de corte de la matriz seca  $\mu = 0.6$  GPa, determinados por el modelo de Krief et al. (1990).

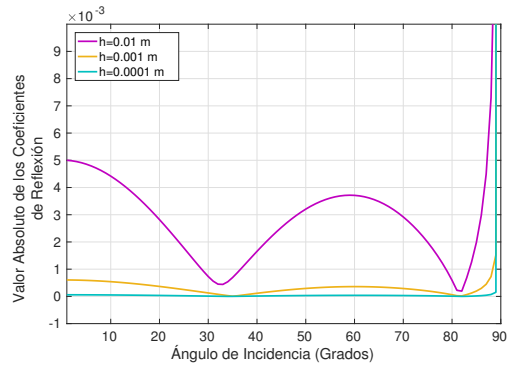
$$\frac{K_m}{K_s} = \frac{\mu}{\mu_s} = (1 - \phi)^{3/(1-\phi)}, \quad (4.45)$$

con  $K_s = 37$  GPa y  $\mu_s = 44$  GPa.

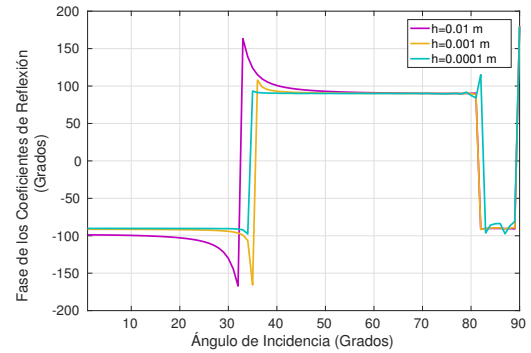
Por último la permeabilidad en  $\Omega_2$  es  $2.19 \cdot 10^{-12}$  m<sup>2</sup> y el espesor de la capa  $h$  varía desde 0.011 % a 0.00011 % de la longitud de onda de la onda tipo P<sub>I</sub> en  $\Omega_1$  o  $\Omega_3$ . Los tres medios están saturados por agua.

La Figura 4.5 muestra la magnitud y la fase de los coeficientes de reflexión y transmisión en función del ángulo de incidencia para las ondas tipo P<sub>I</sub>. La onda plana incidente también es del tipo P<sub>I</sub> con frecuencia 50 Hz. Los coeficientes de reflexión decrecen conforme  $h$  tiende a cero, es decir cuando el medio  $\Omega_2$  desaparece y el sistema se comporta como un medio simple de propiedades idénticas, y tienden a uno cuando el ángulo de incidencia se aproxima a 90 grados. Para los tres casos, los coeficientes de reflexión, exhiben ángulos críticos cerca a los 30 grados y cerca a los 80 grados, donde también hay un cambio de fase. Los coeficientes de transmisión se mantienen aproximadamente constantes excepto cerca de 90 grados donde tienden a cero.

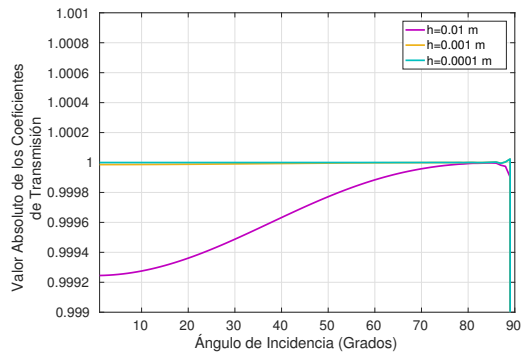
En la Figura 4.6 se visualizan los coeficientes de reflexión y transmisión para las ondas tipo P<sub>II</sub> en función del ángulo de incidencia. La magnitud decrece cuando el ángulo de incidencia tiende a 90 grados mientras que las fases se mantienen



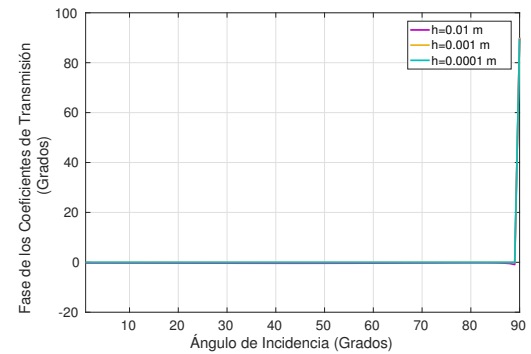
(a) Valor absoluto de los coeficientes de reflexión.



(b) Fase de los coeficientes de reflexión.



(c) Valor absoluto de los coeficientes de transmisión.



(d) Fase de los coeficientes de transmisión.

Figura 4.5: Coeficientes de reflexión y transmisión de las ondas  $P_I$  en función del ángulo de incidencia, para tres diferentes espesores  $h$ . La onda incidente es  $P_I$  de frecuencia 50 Hz.

aproximadamente constantes. Por último, se muestran en la Figura 4.7 los coeficientes de reflexión y transmisión de las ondas de corte en función del ángulo de incidencia, no hay presencia de ángulos críticos y las fases se mantienen constantes aproximadamente, excepto para ángulos cercanos a los 90 grados.

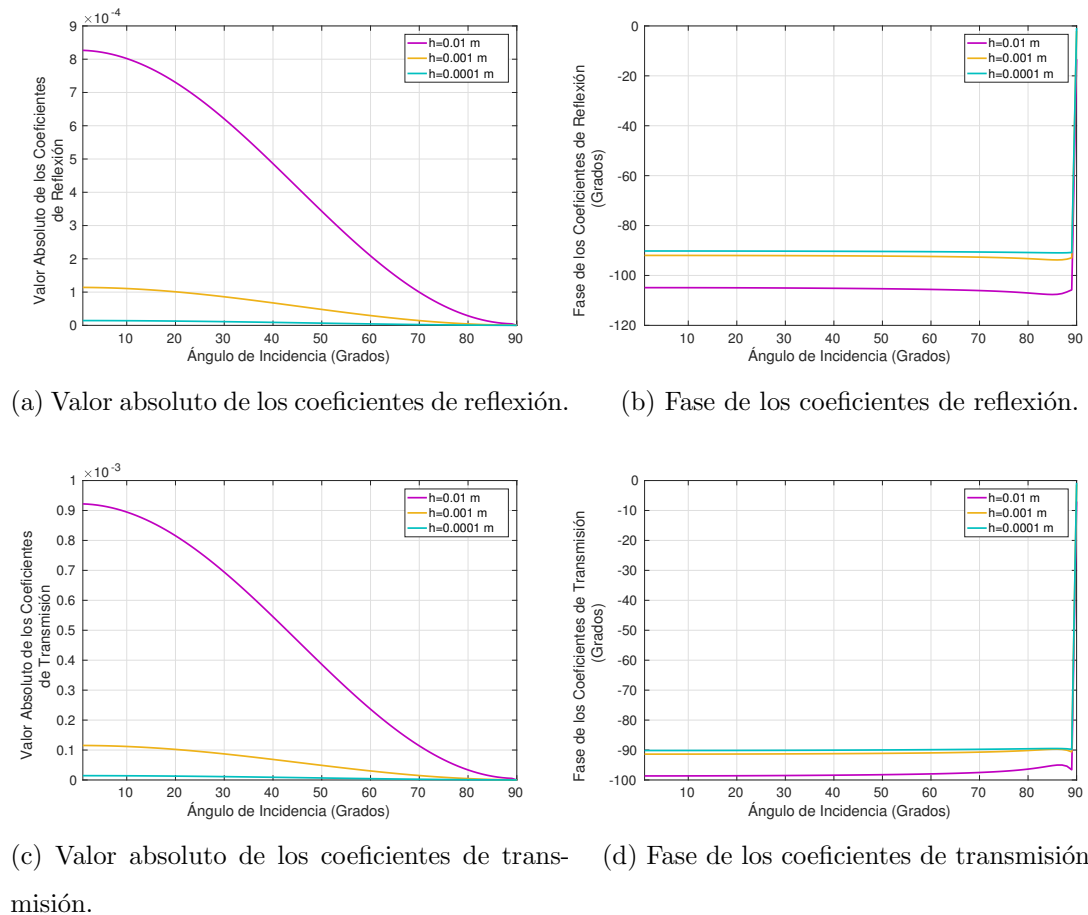
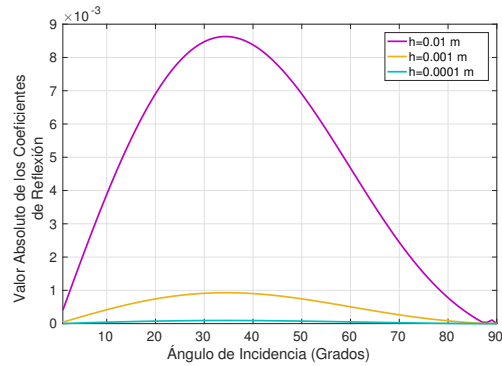
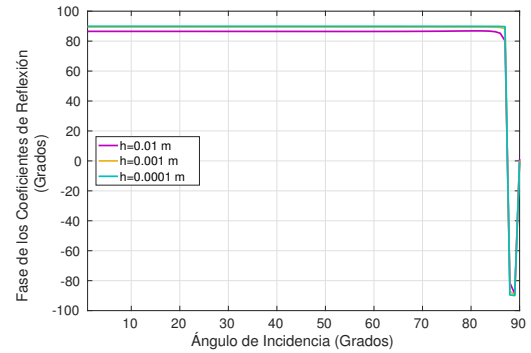


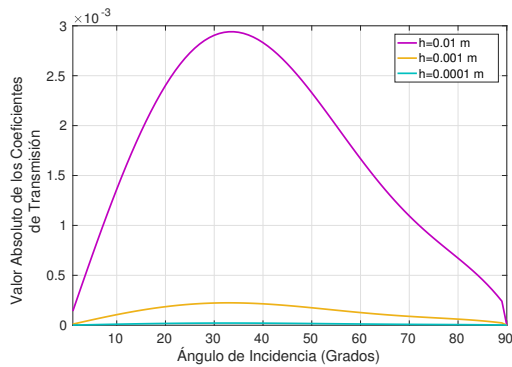
Figura 4.6: Coeficientes de reflexión y transmisión de las ondas  $P_{II}$  en función del ángulo de incidencia, para tres diferentes espesores  $h$ . La onda incidente es  $P_I$  de frecuencia 50 Hz.



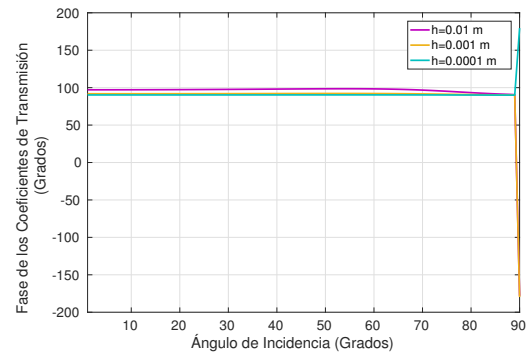
(a) Valor absoluto de los coeficientes de reflexión.



(b) Fase de los coeficientes de reflexión.



(c) Valor absoluto de los coeficientes de transmisión.



(d) Fase de los coeficientes de transmisión.

Figura 4.7: Coeficientes de reflexión y transmisión de las ondas de corte en función del ángulo de incidencia, para tres diferentes espesores  $h$ . La onda incidente es  $P_I$  de frecuencia 50 Hz.



## CAPÍTULO 5

# COEFICIENTES R-T PARA UNA FRACTURA MODELADA MEDIANTE UNA CONDICIÓN DE BORDE

---

En el Capítulo anterior se abordó el tema de los coeficientes de reflexión y transmisión para una capa fina (CF), el cuál tiene muchas aplicaciones en diferentes áreas de la geofísica. El modelado de las fracturas puede considerarse un caso especial del problema de CF, donde la fractura está representada por una capa muy delgada poco resistente y con alta permeabilidad (ver Daley et al. (2006); Lambert et al. (2005); Nakagawa y Schoenberg (2007), entre otros).

Varias teorías han aparecido en la literatura para modelar fracturas mediante la aplicación de condiciones de borde específicas en el contexto de los fenómenos de propagación de ondas. El modelo de interfaz de deslizamiento lineal (no soldada) para las fracturas 2D viscoelásticas planas fue propuesto por Schoenberg (1980). Este modelo impone la continuidad de las tensiones y la discontinuidad de los desplazamientos a través de la fractura y ha sido validado por experimentos de laboratorio (Gu et al., 1996; Hsu y Schoenberg, 1993; Pyrak-Nolte et al., 1990). Los estudios anteriores consideraron la propagación de impulsos de compresión y de cizallamiento en muestras secas y húmedas fracturadas. Por otra parte, Bakuh y Molotkov

(2005) asumieron fracturas delgadas como un medio elástico que es poco resistente, en comparación con la matriz rocosa.

En cuanto a la propagación de ondas en medios poroelásticos fracturados saturados por fluidos, se denotan las condiciones de borde (CB) dadas por Bakuh y Molotkov (2005) y posteriormente por Nakagawa y Schoenberg (2007). En el último trabajo, se desarrollan CB y se calculan y analizan los coeficientes correspondientes de reflexión y transmisión. Estas CB consideran en primer lugar el caso más general en el que las tensiones, velocidades y presión de fluido pueden ser discontinuas a través de una fractura, y posteriormente varias hipótesis simplificadoras llevan a formas diferentes de las CB, una de las cuales se reduce a la de Bakuh y Molotkov (2005).

En este Capítulo, se propone utilizar CB para modelar la respuesta sísmica de las fracturas, se determina el rango de frecuencia en el que las diversas CB dadas por Nakagawa y Schoenberg (2007) son válidas para representarlas en simulación numérica de ondas para medios poroelásticos fracturados. Para ello, se comparan los coeficientes R-T de las ondas que inciden en una fractura plana dentro de un medio poroso saturado de fluido con los resultados obtenidos con las ecuaciones teóricas publicadas en Martínez et al. (2014) y que se describieron en el Capítulo anterior. El problema se resuelve para todos los ángulos de incidencia y una amplia gama de frecuencias que examinan los efectos de la variación de la porosidad, de la permeabilidad y el espesor de la fractura, además de la saturación con diferentes fluidos para diferentes ángulos de incidencia.

## 5.1 CONDICIONES DE BORDE A TRAVÉS DE UNA FRACTURA

En el Capítulo 4, para calcular los coeficientes R-T de una capa porosa, se empleó un sistema compuesto de tres medios de Biot  $\Omega_n$ ,  $n = 1, 2, 3$  con diferentes

propiedades, como se muestra en la Figura 4.1. En  $z = 0$  se tiene el borde entre  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , y en  $z = h$  el borde entre  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ . Aquí se tiene en cuenta una onda plana compresional tipo  $P_I$  que incide desde el medio  $\Omega_1$  con un ángulo  $\theta_{iI}$  con respecto al eje vertical  $z$ . Siguiendo a Santos et al. (1992) y Martínez et al. (2014), se representan las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas por medio de potenciales.

En el medio  $\Omega_1$ , para la onda incidente los potenciales de los desplazamientos del sólido y relativos al fluido están dados por

$$\begin{aligned}\varphi_{iI} &= A_{iI}e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{iI} \cdot \mathbf{x})}, \\ \psi_{iI} &= B_{iI}e^{i(\omega t - \mathbf{q}_{iI} \cdot \mathbf{x})},\end{aligned}\tag{5.1}$$

respectivamente, donde  $\mathbf{q}_{iI} = q_{iI}(\sin(\theta_{iI}), \cos(\theta_{iI})) = (\chi, \beta_{iI})$  es el vector complejo número de onda, que determina la dirección de polarización y  $\mathbf{x}$  es una distancia.

En el Capítulo anterior también se derivaron las expresiones para los potenciales de cada una de las ondas en los medios 1, 2 y 3, se va a mantener esta notación para el desarrollo del presente Capítulo.

El modelo desarrollado por Nakagawa y Schoenberg (2007) asume que el medio  $\Omega_1$  y el medio  $\Omega_3$  poseen las mismas propiedades y el espesor del medio  $\Omega_2$  tiende a cero ( $h \rightarrow 0$ ). En la ecuación (30) de Nakagawa y Schoenberg (2007), se asume que la presión y la velocidad del fluido dentro de una fractura se dan por la superposición de la presión y la velocidad del fluido en los bordes con la presión y la velocidad del fluido para la condición no drenada.

También en Nakagawa y Schoenberg (2007) se asume que  $u_{s,x}$ ,  $u_{s,z}$ ,  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{zz}$  varían linealmente, de modo tal que los campos varían lentamente dentro de la fractura. Con estas aproximaciones y definiendo las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= i \frac{\eta}{\omega \kappa(\omega)}, \\ \frac{1}{\tilde{B}} &\equiv \alpha^{(2)} + \frac{H_m^{(2)}}{\alpha^{(2)} M^{(2)}} - \left(\frac{\chi}{\omega}\right)^2 \frac{H_m^{(2)}}{\alpha^{(2)} \tilde{\rho}^{(2)}}, \\ \tilde{\beta} &\equiv 1 - \frac{H_m^{(2)} \rho_f^{(2)}}{2\alpha^{(2)} \mu^{(2)} \tilde{\rho}^{(2)}},\end{aligned}$$

$$\Pi \equiv \frac{\tanh \epsilon}{\epsilon}, \quad \epsilon \equiv -\frac{i\beta_r^{(2)}h}{2}; \quad (5.2)$$

ellos obtienen

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{s,x}^{(3)} - \dot{u}_{s,x}^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(3)} - \sigma_{zz}^{(1)} \\ (-p_f^{(3)}) - (-p_f^{(1)}) \\ \sigma_{xz}^{(3)} - \sigma_{xz}^{(1)} \\ \dot{u}_{s,z}^{(3)} - \dot{u}_{s,z}^{(1)} \\ \dot{w}_z^{(3)} - \dot{w}_z^{(1)} \end{bmatrix} = -\frac{i\omega h}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{Q}}_{XY} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{YX} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{s,x}^{(3)} + \dot{u}_{s,x}^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(3)} + \sigma_{zz}^{(1)} \\ (-p_f^{(3)}) + (-p_f^{(1)}) \\ \sigma_{xz}^{(3)} + \sigma_{xz}^{(1)} \\ \dot{u}_{s,z}^{(3)} + \dot{u}_{s,z}^{(1)} \\ \dot{w}_z^{(3)} + \dot{w}_z^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

donde los puntos sobre las componentes de los vectores desplazamientos indican derivada en el tiempo, además  $H_m = K_m + \frac{4\mu}{3}$ .

La matriz  $\tilde{\mathbf{Q}}_{XY}$  está dada por

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{XY} = \begin{bmatrix} 1/\mu^{(2)} & \chi/\omega & 0 \\ \chi/\omega & \rho_b^{(2)} & \rho_f^{(2)} \cdot \Pi \\ 0 & \rho_f^{(2)} & \tilde{\rho}^{(2)} \cdot \Pi \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

mientras que los elementos de la matriz  $\tilde{\mathbf{Q}}_{YX}$  son

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}_{YX}(1,1) &= -4\mu^{(2)} \left(\frac{\chi}{\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{\mu^{(2)}}{H_m^{(2)}}\right) - \frac{\left(\rho_f^{(2)}\right)^2 - \rho_b^{(2)}\tilde{\rho}^{(2)}}{\tilde{\rho}^{(2)}} \\ &\quad - 2\mu^{(2)}\tilde{B}\tilde{\beta} \left(\frac{\chi}{\omega}\right)^2 \left(-\frac{\rho_f^{(2)}}{\tilde{\rho}^{(2)}} + \alpha^{(2)}\frac{2\mu^{(2)}}{H_m^{(2)}}\right) \cdot (1 - \Pi), \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{YX}(1,2) &= \frac{\chi}{\omega} \left[ \left(1 - \frac{2\mu^{(2)}}{H_m^{(2)}}\right) + \left(-\frac{\rho_f^{(2)}}{\tilde{\rho}^{(2)}} + \alpha^{(2)}\frac{2\mu^{(2)}}{H_m^{(2)}}\right) \tilde{B} \cdot (1 - \Pi) \right], \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{YX}(1,3) &= \frac{\chi}{\omega} \left(-\frac{\rho_f^{(2)}}{\tilde{\rho}^{(2)}} + \alpha^{(2)}\frac{2\mu^{(2)}}{H_m^{(2)}}\right) \cdot \Pi, \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{YX}(2,1) &= \frac{\chi}{\omega} \left(1 - \frac{2\mu^{(2)}}{H_m^{(2)}} + 2\tilde{B}\tilde{\beta}\alpha^{(2)}\frac{\mu^{(2)}}{H_m^{(2)}} \cdot (1 - \Pi)\right), \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{YX}(2,2) &= \frac{1}{H_m^{(2)}} - \alpha^{(2)}\tilde{B}\frac{1}{H_m^{(2)}} \cdot (1 - \Pi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{Q}}_{YX}(2, 3) &= -\alpha^{(2)} \frac{1}{H_m^{(2)}} \cdot \Pi, \\
 \tilde{\mathbf{Q}}_{YX}(3, 1) &= \frac{\chi}{\omega} \left[ -\frac{\rho_f^{(2)}}{\tilde{\rho}^{(2)}} + \alpha^{(2)} \frac{2\mu^{(2)}}{H_m^{(2)}} - 2\tilde{B}\tilde{\beta} \left( (\alpha^{(2)})^2 \frac{\mu^{(2)}}{H_m^{(2)}} + \frac{\mu^{(2)}}{M^{(2)}} - \left(\frac{\chi}{\omega}\right)^2 \frac{\mu^{(2)}}{\tilde{\rho}^{(2)}} \right) \cdot (1 - \Pi) \right], \\
 \tilde{\mathbf{Q}}_{YX}(3, 2) &= -\alpha^{(2)} \frac{1}{H_m^{(2)}} + \left( (\alpha^{(2)})^2 \frac{1}{H_m^{(2)}} + \frac{1}{M^{(2)}} - \left(\frac{\chi}{\omega}\right)^2 \frac{1}{\tilde{\rho}^{(2)}} \right) \tilde{B} \cdot (1 - \Pi), \\
 \tilde{\mathbf{Q}}_{YX}(3, 3) &= \left( (\alpha^{(2)})^2 \frac{1}{H_m^{(2)}} + \frac{1}{M^{(2)}} - \left(\frac{\chi}{\omega}\right)^2 \frac{1}{\tilde{\rho}^{(2)}} \right) \cdot \Pi. \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

Se definen las propiedades de la fractura a través de los siguientes parámetros propuestos por Nakagawa y Schoenberg (2007):

- Complianza de corte  $\eta_T = \frac{h}{\mu^{(2)}}$ .
- Complianza de drenado normal o seca  $\eta_{ND} = \frac{h}{H_m^{(2)}}$ .
- Permeabilidad de la membrana  $\hat{\kappa}(\omega) = \frac{\kappa^{(2)}(\omega)}{h}$ .

Entonces multiplicando las matrices  $\tilde{\mathbf{Q}}_{XY}$  y  $\tilde{\mathbf{Q}}_{YX}$  por  $h$ , eliminando los términos que quedan dependiendo de  $h$  y además como  $\tilde{\beta} \approx 1$ , la ecuación (5.3) se reduce a

$$\dot{u}_{s,x}^{(3)} - \dot{u}_{s,x}^{(1)} = (-i\omega) \eta_T \sigma_{xz}^{(1)} \tag{5.6}$$

$$\dot{u}_{s,z}^{(3)} - \dot{u}_{s,z}^{(1)} = (-i\omega) \eta_{ND} \left[ \left( 1 - \alpha^{(2)} \tilde{B} (1 - \Pi) \right) \sigma_{zz}^{(1)} - \alpha^{(2)} \frac{-p_f^{(3)} + \left(-p_f^{(1)}\right)}{2} \cdot \Pi \right] \tag{5.7}$$

$$\dot{w}_z^{(3)} - \dot{w}_z^{(1)} = (-i\omega) \alpha^{(2)} \eta_{ND} \left[ -\sigma_{zz}^{(1)} + \frac{1}{\tilde{B}} \frac{-p_f^{(3)} + \left(-p_f^{(1)}\right)}{2} \right] \cdot \Pi \tag{5.8}$$

$$\sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(1)} \tag{5.9}$$

$$\sigma_{zz}^{(3)} = \sigma_{zz}^{(1)} \tag{5.10}$$

$$-P_f^{(3)} - \left(-P_f^{(1)}\right) = \frac{\eta^{(2)}}{\hat{\kappa}(\omega)} \frac{\dot{w}_z^{(3)} + \dot{w}_z^{(1)}}{2} \cdot \Pi \tag{5.11}$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= \alpha^{(2)} \frac{M^{(2)}}{H_u^{(2)}}, \\ H_u^{(2)} &= K_u^{(2)} + \frac{4\mu^{(2)}}{3}, \\ \epsilon &= \frac{1-i}{2} \sqrt{\omega \frac{\alpha^{(2)} \eta^{(2)} \eta_{ND}}{2\tilde{B}\hat{\kappa}_0}}, \quad \hat{\kappa}_0 = \kappa_0^{(2)}/h.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Las ecuaciones (5.6)-(5.11) se corresponden con la ecuación (52) en Nakagawa y Schoenberg (2007).

Finalmente, cuando la permeabilidad tiende al infinito ( $\kappa \rightarrow \infty$ ), se puede ver que  $\Pi \rightarrow 1$  y las anteriores ecuaciones se reducen a la ecuación (53) de Nakagawa y Schoenberg (2007):

$$\dot{u}_{s,x}^{(3)} - \dot{u}_{s,x}^{(1)} = (-i\omega) \eta_T \sigma_{xz}^{(1)}\tag{5.13}$$

$$\dot{u}_{s,z}^{(3)} - \dot{u}_{s,z}^{(1)} = (-i\omega) \eta_{ND} \left[ \sigma_{zz}^{(1)} - \alpha^{(2)} \left( -p_f^{(1)} \right) \right]\tag{5.14}$$

$$\dot{w}_z^{(3)} - \dot{w}_z^{(1)} = (-i\omega) \alpha^{(2)} \eta_{ND} \left[ -\sigma_{zz}^{(1)} + \frac{1}{\tilde{B}} \left( -p_f^{(1)} \right) \right]\tag{5.15}$$

$$\sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(1)}\tag{5.16}$$

$$\sigma_{zz}^{(3)} = \sigma_{zz}^{(1)}\tag{5.17}$$

$$-p_f^{(3)} = -p_f^{(1)}.\tag{5.18}$$

Estas condiciones de borde representan un balance de la presión del fluido en ambos lados de la fractura y permiten que el fluido se mueva libremente; luego estos conceptos de fractura abierta se manifiestan en las ecuaciones (5.13)-(5.18).

## 5.2 COEFICIENTES DE REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN

Las expresiones para los coeficientes R-T dadas en el Capítulo 4 son

$$R_j^{(1)} = C_{rj}^{(1)} \frac{q_{rj}^{(1)}}{q_{iI}^{(1)}},$$

$$T_j^{(3)} = C_{tj}^{(3)} \frac{q_{tj}^{(3)}}{q_{iI}^{(1)}}, \quad j = I, II, s. \quad (5.19)$$

donde

$$C_{lj}^{(n)} = \frac{A_{lj}^{(n)}}{A_{iI}}, \quad l = r, t, \quad j = I, II, s, \quad n = 1, 3. \quad (5.20)$$

El cálculo de estos coeficientes asociados con las condiciones de borde en (5.3), (5.6)-(5.11) y (5.13)-(5.18) fue realizado empleando los potenciales como se explicó en el Capítulo 4 para el caso de la fractura modelada como una CF. Procediendo de esta manera, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones, que es similar al de la ecuación (4.37):

$$\begin{aligned} N_{1,1}A_{rI} + N_{1,2}A_{rII} + N_{1,3}A_{rs} + N_{1,4}e^{-i\beta_{tI}^{(3)}h}A_{tI} + N_{1,5}e^{-i\beta_{tII}^{(3)}h}A_{tII} + N_{1,6}e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h}A_{ts} = \\ i'_{p,1}A_{iI} \\ N_{2,1}A_{rI} + N_{2,2}A_{rII} + N_{2,3}A_{rs} + N_{2,4}e^{-i\beta_{tI}^{(3)}h}A_{tI} + N_{2,5}e^{-i\beta_{tII}^{(3)}h}A_{tII} + N_{2,6}e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h}A_{ts} = \\ i'_{p,2}A_{iI} \\ N_{3,1}A_{rI} + N_{3,2}A_{rII} + N_{3,3}A_{rs} + N_{3,4}e^{-i\beta_{tI}^{(3)}h}A_{tI} + N_{3,5}e^{-i\beta_{tII}^{(3)}h}A_{tII} + N_{3,6}e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h}A_{ts} = \\ i'_{p,3}A_{iI} \\ N_{4,1}A_{rI} + N_{4,2}A_{rII} + N_{4,3}A_{rs} + N_{4,4}e^{-i\beta_{tI}^{(3)}h}A_{tI} + N_{4,5}e^{-i\beta_{tII}^{(3)}h}A_{tII} + N_{4,6}e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h}A_{ts} = \\ i'_{p,4}A_{iI} \\ N_{5,1}A_{rI} + N_{5,2}A_{rII} + N_{5,3}A_{rs} + N_{5,4}e^{-i\beta_{tI}^{(3)}h}A_{tI} + N_{5,5}e^{-i\beta_{tII}^{(3)}h}A_{tII} + N_{5,6}e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h}A_{ts} = \\ i'_{p,5}A_{iI} \\ N_{6,1}A_{rI} + N_{6,2}A_{rII} + N_{6,3}A_{rs} + N_{6,4}e^{-i\beta_{tI}^{(3)}h}A_{tI} + N_{6,5}e^{-i\beta_{tII}^{(3)}h}A_{tII} + N_{6,6}e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h}A_{ts} = \\ i'_{p,6}A_{iI}. \end{aligned}$$

Este sistema se puede expresar en la forma

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{D})\mathbf{r} = \mathbf{i}'_p, \quad (5.21)$$

donde  $\mathbf{N} = N_{i,j}$ ,  $\mathbf{D} = \text{diag}[1, 1, 1, e^{-i\beta_{tI}^{(3)}h}, e^{-i\beta_{tII}^{(3)}h}, e^{-i\beta_{ts}^{(3)}h}]$  y

$$\mathbf{r} = \left( C_{r1}^{(1)}, C_{r2}^{(1)}, C_{rs}^{(1)}, C_{t1}^{(3)}, C_{t2}^{(3)}, C_{ts}^{(3)} \right)^t. \quad (5.22)$$

Después de resolver el sistema (5.21) para  $\mathbf{r}$ , los coeficientes de reflexión y transmisión son calculados usando la ecuación (5.19).

### 5.3 EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se comparan los coeficientes R-T en una fractura modelada usando las condiciones de borde (5.3), (5.6)-(5.11) y (5.13)-(5.18) o una capa fina (modelo CF). En el modelo CF, los coeficientes de reflexión y transmisión están dados por la ecuación (4.37), asumiendo que  $h$  es mucho más pequeña que la longitud de onda de la onda que se propaga.

Se define el cociente entre la apertura de la fractura y la longitud de onda  $\mathcal{R}$ , donde la longitud de onda es la de la onda tipo  $P_I$  en el background. Se consideran varios casos de interés en geofísica de reservorios. Las propiedades del background y de la fractura se indican en la Tabla 5.1 y las propiedades de los fluidos en la Tabla 4.1.

Se consideraron los siguientes Casos:

**Caso 1:** Comparación entre el modelo CF con las CB (5.3), (ecuación (30) de Nakagawa y Schoenberg (2007)).

**Caso 2:** Comparación entre el modelo de CF y las CB de las ecuaciones (5.6)-(5.11) y (5.13)-(5.18) (ecuaciones (52) y (53) de Nakagawa y Schoenberg (2007)).

**Caso 3:** Calculo de los coeficientes R-T en una fractura modelada con las CB de las ecuaciones (5.6)-(5.11), el background y las fracturas saturados por tres diferentes fluidos.



CAPÍTULO 5. COEFICIENTES R-T PARA UNA FRACTURA COMO  
CONDICIÓN DE BORDE

---

Propiedades	Background	Fractura
Porosidad, $\phi$	0.15	0.5 (Casos 1, 2-1, 2-2, 3) 0.3,0.5,0.7 (caso 2-3)
Densidad granos sólidos, $\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> )	2700	2700
Módulo de volumen de los granos sólidos, $K_s$ (GPa)	36	36
Módulo de volumen de la matriz seca, $K_m$ (GPa)	9	0.0556
Módulo de corte de la matriz seca, $\mu_m$ (GPa)	7	0.0333
Permeabilidad, $\kappa_0$ (m <sup>2</sup> )	$9.869 \cdot 10^{-14}$	$9.869 \cdot 10^{-11}$ , $9.869 \cdot 10^{-17}$ (Caso 1) $9.869 \cdot 10^{-19}$ to $\infty$ (Caso 2-1) $9.869 \cdot 10^{-13}$ (Casos 2-2, 2-3) $9.869 \cdot 10^{-11}$ (Caso 3)
Tortuosidad, $S$	3	1

Tabla 5.1: Propiedades para el background y las fracturas.

### 5.3.1 CASO 1

Se calculan los coeficientes R-T para una onda compresional propagándose a través de la fractura, los tres medios están saturados con agua. Se escogieron dos valores de permeabilidad para la fractura, uno muy bajo ( $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2$ ) y el otro muy alto ( $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$ ), para analizar su influencia en los coeficientes R-T.

En la Figura 5.1 se muestra la magnitud de los coeficientes R-T para el modelo de CF y la ecuación (30) de Nakagawa y Schoenberg (2007).

Los coeficientes están dados en función de la frecuencia para un ángulo de incidencia normal y en función del ángulo de incidencia para una frecuencia de 1 kHz de modo tal que  $\mathcal{R} = 3.1 \times 10^{-4}$  (la apertura de la fractura es  $h = 0.001 \text{ m}$  y la longitud de onda  $\lambda = 3.2 \text{ m}$ ).

La Figura 5.2 muestra los coeficientes R-T para la permeabilidad  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2$  pero reduciendo el espesor de la fractura a  $h = 0.00001 \text{ m}$ . Cuando la frecuencia es 1 kHz,  $\mathcal{R} = 3.1 \times 10^{-6}$ . Aquí los coeficientes obtenidos con los dos modelos coinciden para todos los ángulos y frecuencias.

### 5.3.2 CASO 2

En este Caso el modelo de CF es comparado con las ecuaciones (5.6)-(5.11) y (5.13)-(5.18), para esto se realizan tres pruebas, variando la permeabilidad, variando la porosidad y por último variando la apertura de la fractura. En los tres Casos tanto el background como la fractura están saturados con agua.

#### 1. Variación de la permeabilidad:

La onda incidente es del tipo  $P_I$ , el espesor y la porosidad de la fractura son  $h = 0.001 \text{ m}$  y  $\phi = 0.5$ , los otros parámetros están en la Tabla 5.1. La permeabilidad

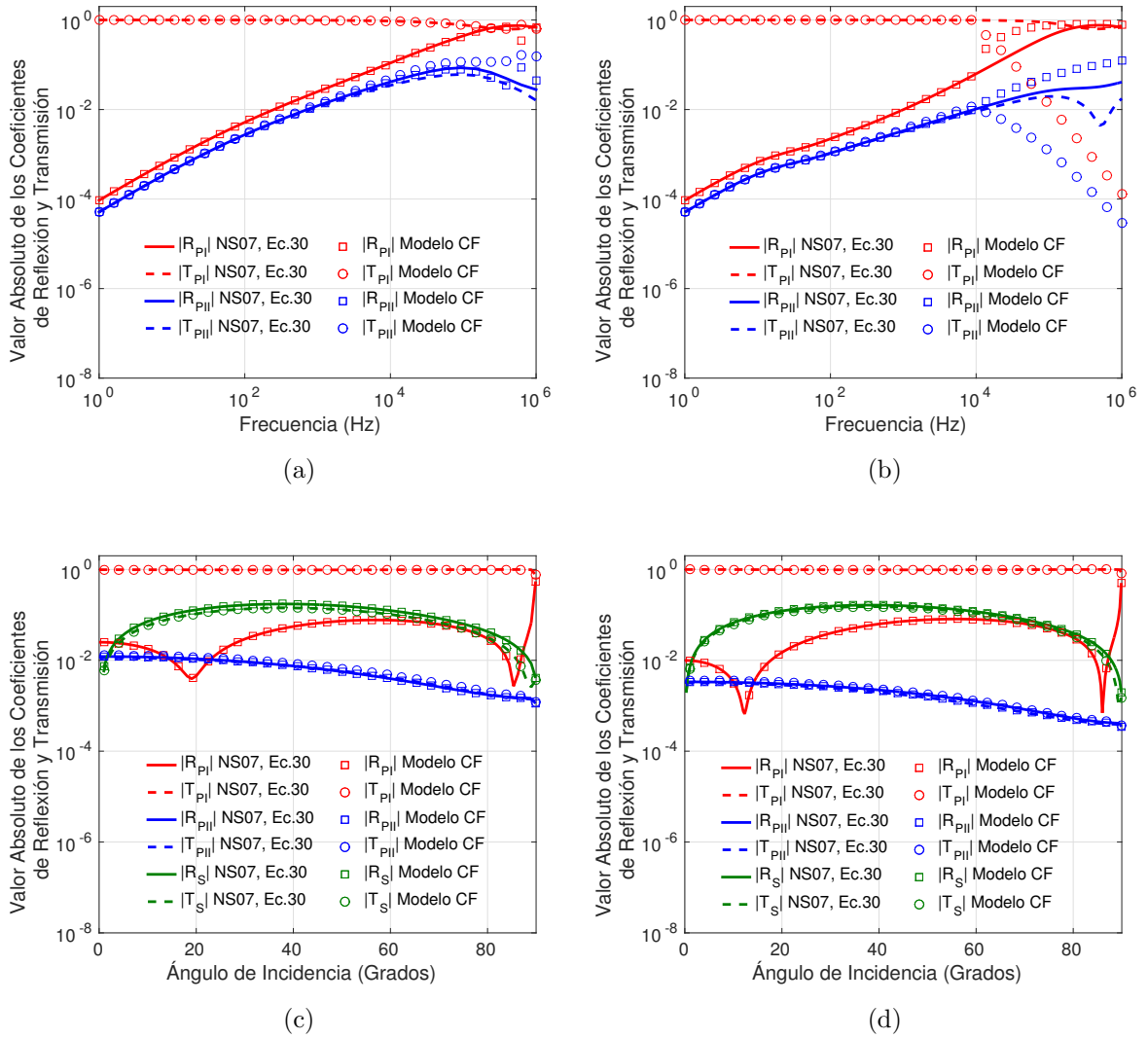


Figura 5.1: Valor absoluto de los coeficientes R-T para una onda incidente tipo  $P_I$ . El espesor de la fractura es  $h = 0.001$  m. Las curvas etiquetadas con *NS07, Ec. 30* corresponden a las condiciones de borde dadas en Nakagawa y Schoenberg (2007), mientras que las curvas etiquetadas con *Modelo CF* corresponden al modelo de capa fina. En las Figuras (a) y (b) se muestra el valor absoluto de los coeficientes para una incidencia normal en función de la frecuencia, para la fractura con permeabilidad de  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2$ , respectivamente. En las Figuras (c) y (d), a una frecuencia de 1 kHz, se muestran los coeficientes en función del ángulo de incidencia, para la fractura con permeabilidad de  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2$ , respectivamente.

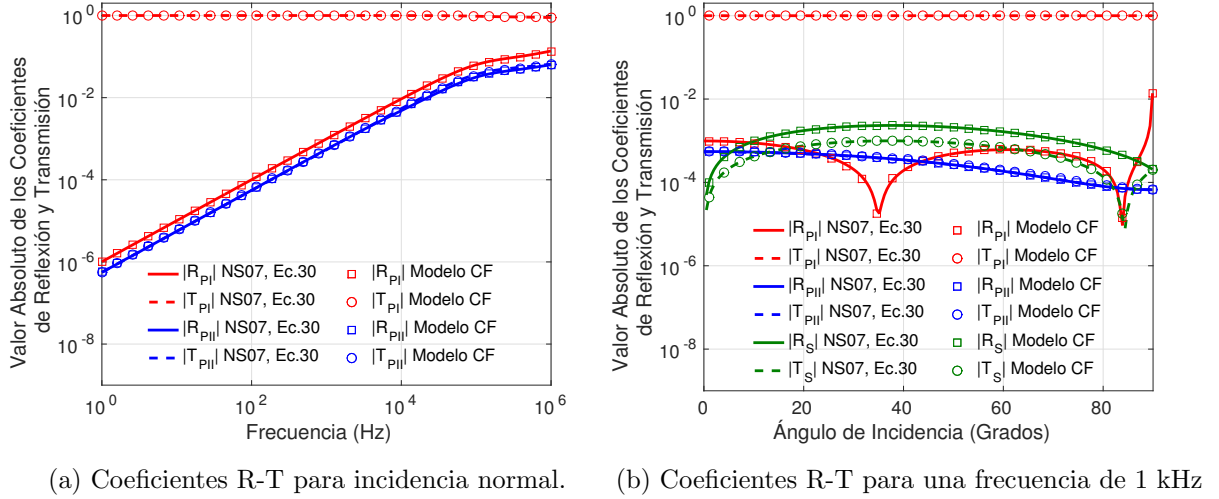


Figura 5.2: Valor absoluto de los coeficientes R-T para una onda incidente tipo  $P_1$ . El espesor y permeabilidad de la fractura es  $h = 0.00001$  m y  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-17}$  m<sup>2</sup>. Las etiquetas *NS07*, *Ec. 30* y *Modelo CF* denotan las condiciones de borde en Nakagawa y Schoenberg (2007) y el modelo de capa fina, respectivamente.

de la fractura varía desde  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-19}$  m<sup>2</sup> a infinito. La Figura 5.3 muestra los coeficientes R-T para cinco valores de permeabilidad.

Se observa que para valores altos de permeabilidad, los coeficientes R-T de la capa fina y los de las condiciones de borde analizadas son similares. Las condiciones de borde (5.13)-(5.18) se ajustan muy bien con el modelo de capa fina, excepto para frecuencias muy altas (arriba de los  $1 \times 10^5$  Hz aproximadamente).

Cuando la permeabilidad de la fractura es mucho mayor que la permeabilidad del background (en este Caso la permeabilidad del background es de  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-14}$  m<sup>2</sup>), hay un buen ajuste entre el modelo CF y las CB, para más valores de frecuencia.

## 2. Variación del espesor de la fractura:

La onda incidente es del tipo  $P_1$ , pero ahora la permeabilidad es  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-13}$  m<sup>2</sup>, la porosidad  $\phi = 0.5$  y varía el espesor de la fractura  $h$ . En las Figuras 5.4

y 5.5 se observa que hay un mejor ajuste entre el modelo CF y las condiciones de borde cuando  $h$  disminuye. Como se espera cuando la fractura se hace muy delgada, los coeficientes de reflexión se hacen más pequeños.

Cerca a los 100 Hz, hay un buen ajuste entre la CF y las CB, para todos los valores de  $h$ . En esta frecuencia la longitud de onda es  $\lambda = 36.00$  m en el background y para  $h = 0.01$  m,  $0.001$  m,  $0.0001$  m, y  $0.00001$  m los correspondientes valores de  $\mathcal{R}$  son  $3.1 \times 10^{-4}$ ,  $3.1 \times 10^{-5}$ ,  $3.1 \times 10^{-6}$ , y  $3.1 \times 10^{-7}$ , respectivamente.

### 3. Variación en la porosidad

Finalmente se calculan los coeficientes R-T variando la porosidad en la fractura,  $\phi = 0.3$ ,  $0.5$  y  $0.7$ . La onda incidente es del tipo  $P_1$ ,  $h = 0.001$  m y  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-13}$  m<sup>2</sup>. La Figura 5.6 muestra los resultados, donde hay un buen ajuste entre las CB (5.6)-(5.11) y el modelo CF, sobre todo en las bajas frecuencias para todos los valores de porosidad.

### 5.3.3 CASO 3

En este Caso, se calculan los coeficientes R-T usando las CB (5.6)-(5.11) en función del ángulo de incidencia, para una frecuencia de 50 Hz. Estos cálculos se hicieron para tres Casos de interés en la geofísica de reservorios. Los parámetros del background y la fractura se muestran en las Tablas 5.1 y 4.1. En las tres pruebas la permeabilidad, la porosidad y el espesor de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11}$  m<sup>2</sup>,  $\phi = 0.5$  y  $h = 0.001$  m respectivamente.

- Agua en el background:

El background es un medio de Biot saturado con agua, de modo tal que  $\mathcal{R} = 1.6 \times 10^{-5}$  (longitud de onda  $\lambda = 64.06$  m) y la fractura contiene agua, petróleo o gas. Las Figuras 5.7 y 5.8 ilustran el valor absoluto y la fase de los coeficientes

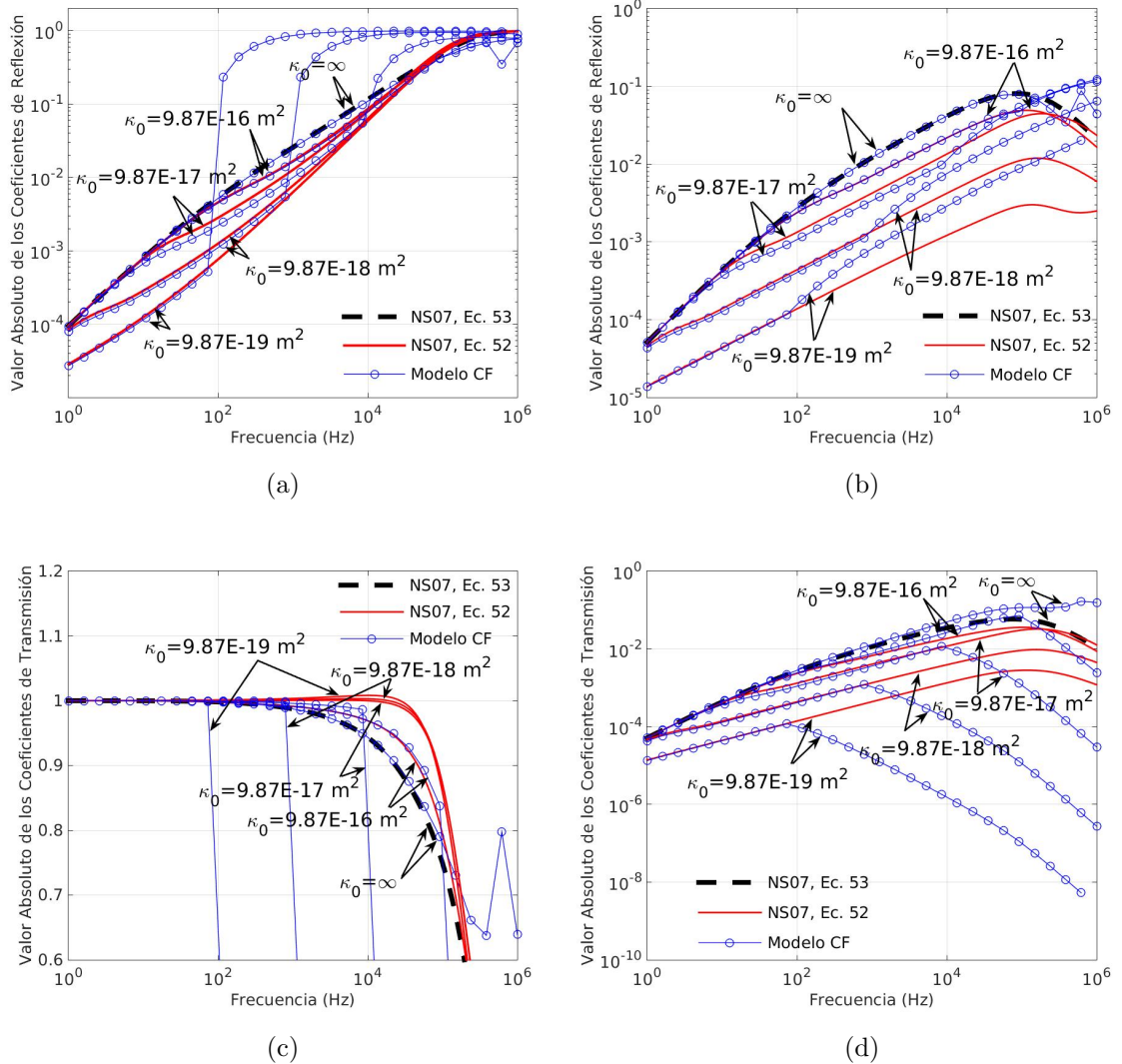


Figura 5.3: Valor absoluto de los coeficientes R-T para las ondas tipo  $P_I$  y  $P_{II}$  en función de la frecuencia. La onda incidente es tipo  $P_I$  y el espesor y la porosidad de la fractura son  $h = 0.001$  m y  $\phi = 0.5$  respectivamente. La permeabilidad varía desde  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2$  a  $\kappa_0 = \infty$ . Las curvas etiquetadas con *NS07, Ec. 52* y *NS07, Ec. 53* son por las condiciones de borde en Nakagawa y Schoenberg (2007), mientras que las curvas etiquetadas con *Modelo CF* es por el modelo de capa fina. (a) y (b) muestran los coeficientes de reflexión para las ondas tipo  $P_I$  y  $P_{II}$ , respectivamente. (c) y (d) corresponden a los coeficientes de transmisión de las ondas tipo  $P_I$  y  $P_{II}$ , respectivamente.

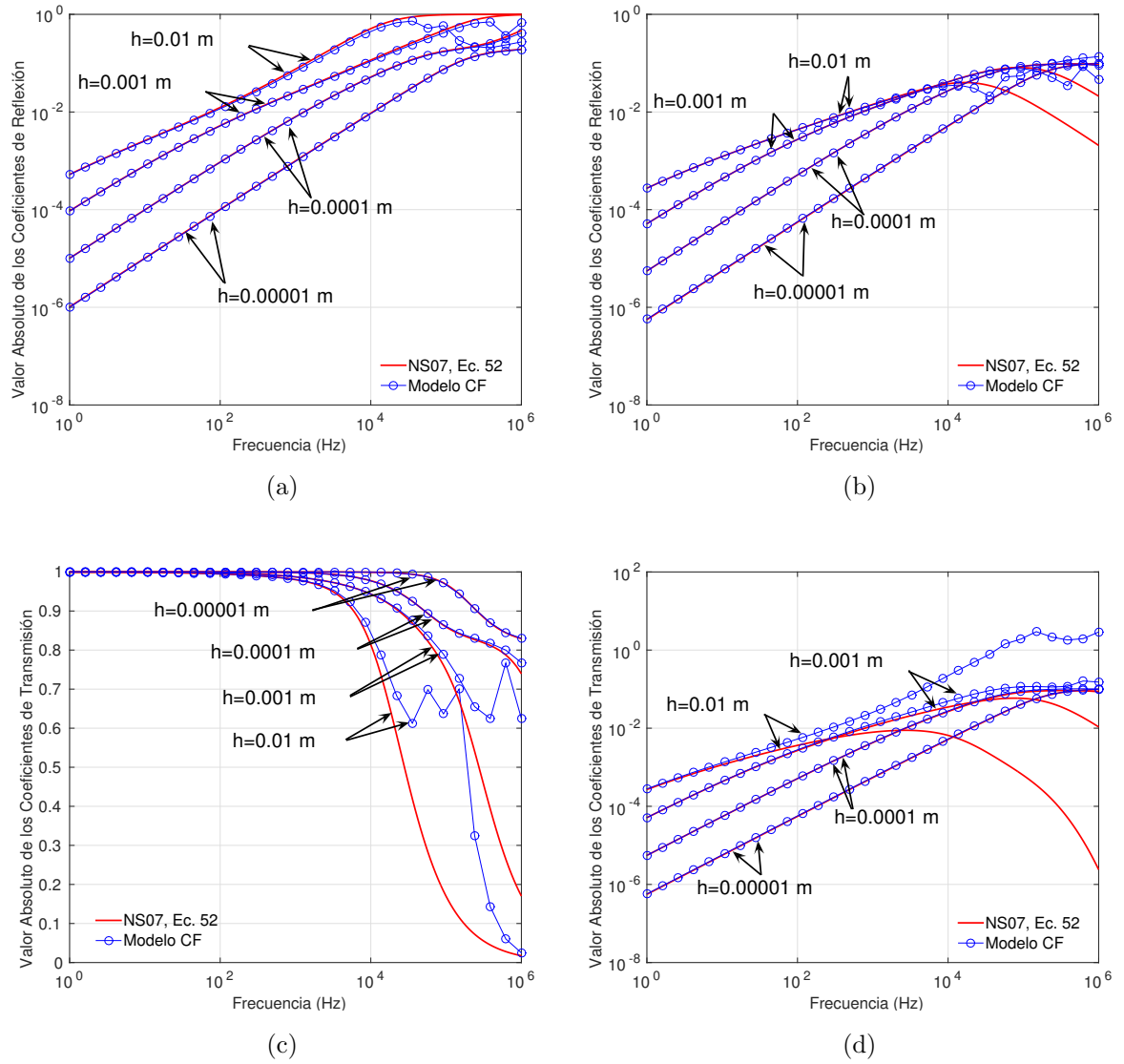


Figura 5.4: Valor absoluto de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$  en función de la frecuencia. La onda incidente es tipo  $P_I$  y la permeabilidad y porosidad de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$   $\phi = 0.5$ , respectivamente. Los espesores de la fractura varían desde 0.00001 m a 0.01 m. La etiqueta *NS07, Ec. 52* se refiere a las condiciones de borde en Nakagawa y Schoenberg (2007). La etiqueta *Modelo CF* se refiere al modelo de capa fina. (a) y (b) ilustran los coeficientes de reflexión para las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$ , respectivamente. (c) y (d) corresponden a los coeficientes de transmisión de las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$ , respectivamente.

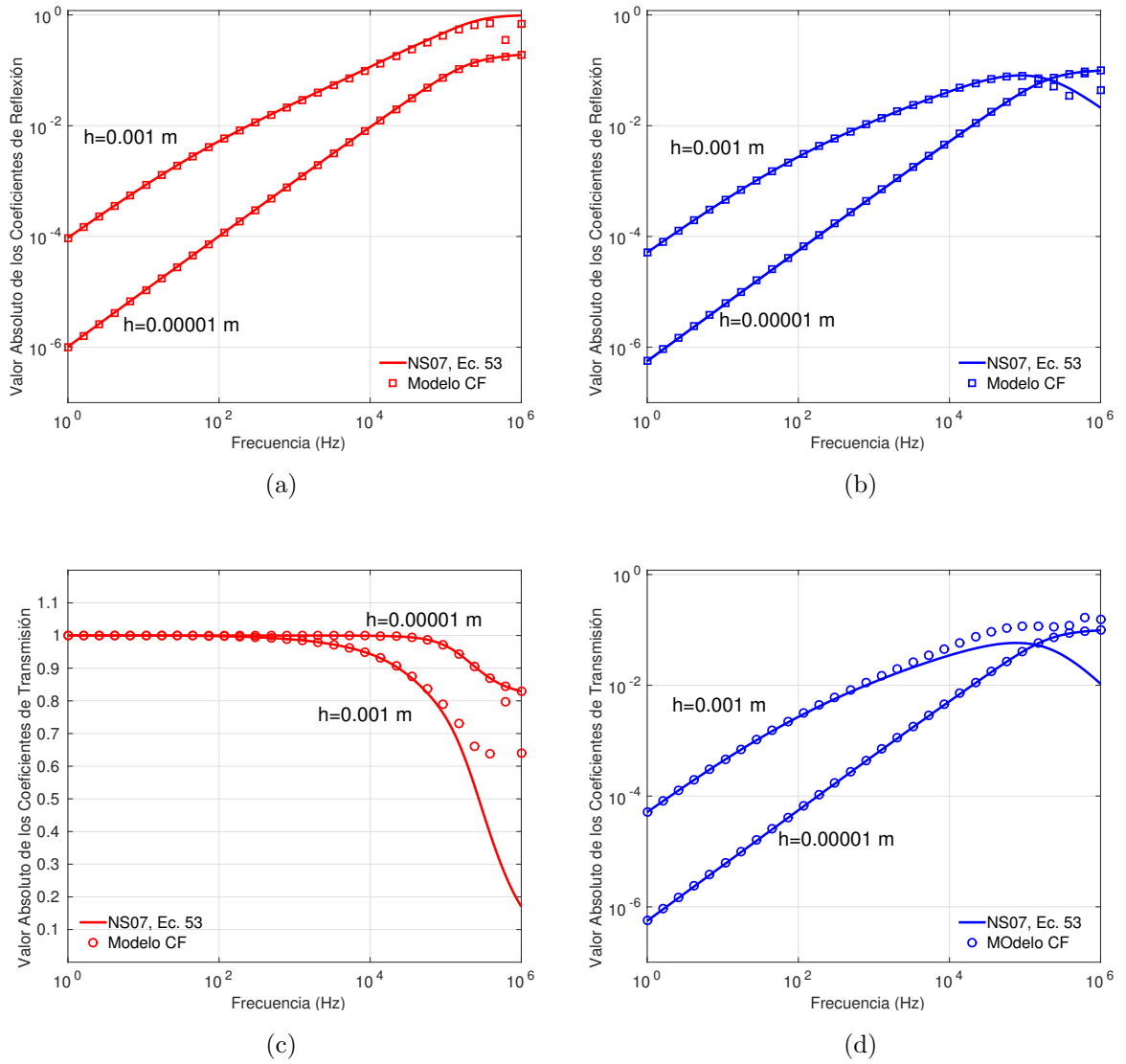


Figura 5.5: Valor absoluto de los coeficientes de reflexión y transmisión para las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$  en función de la frecuencia. La onda incidente es tipo  $P_I$ . La porosidad y la permeabilidad en la fractura son  $\phi = 0.5$  y  $\kappa_0 \rightarrow \infty$ , respectivamente. El espesor de la fractura se indica en las Figuras. La etiqueta *NS07, Ec. 53* corresponde a las condiciones de borde en Nakagawa y Schoenberg (2007), mientras que la etiqueta *Modelo CF* corresponde al modelo de capa fina. (a) y (b) muestran los coeficientes de reflexión de las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$ . (c) y (d) ilustran los coeficientes de transmisión de las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$ , respectivamente.



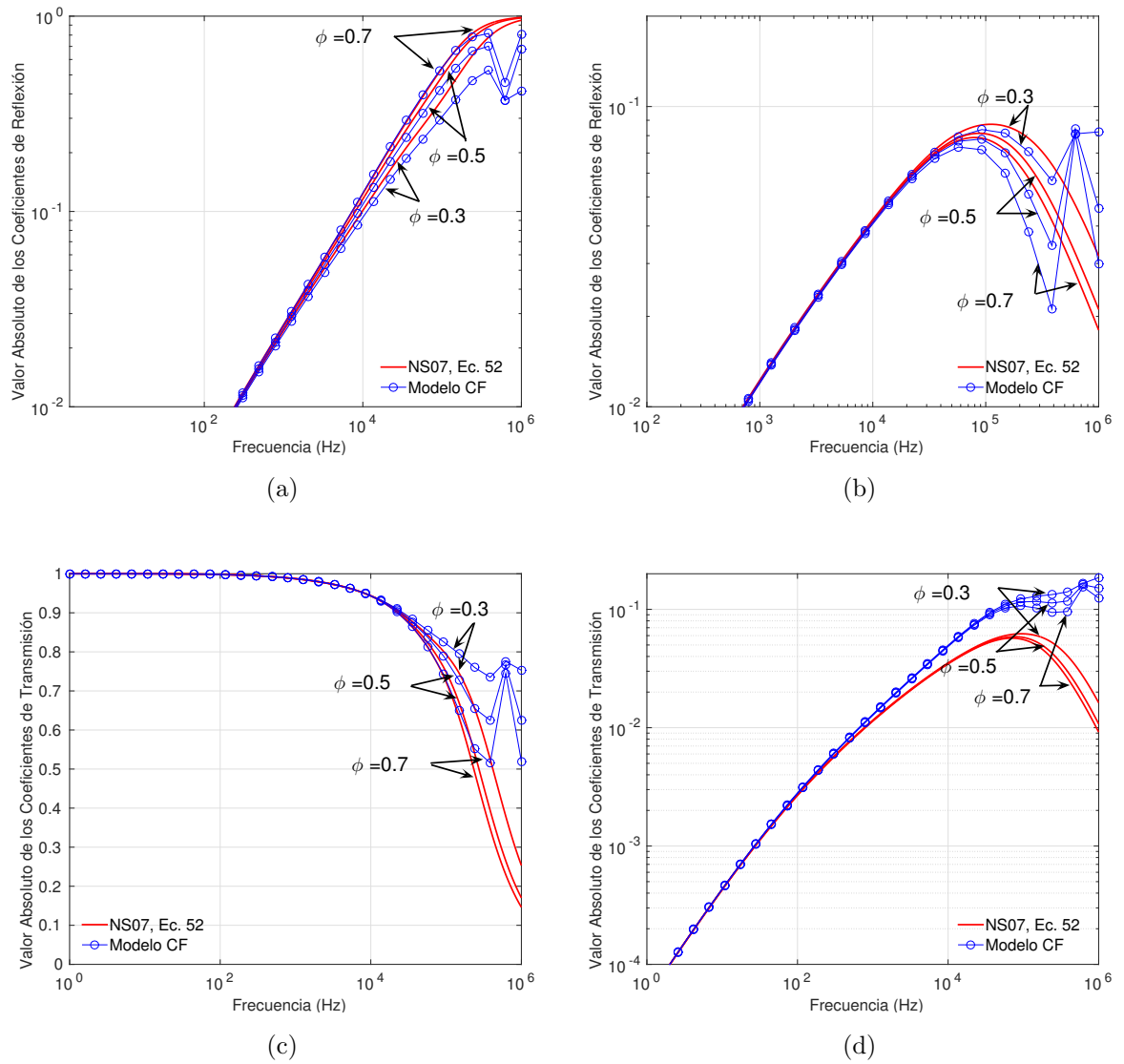


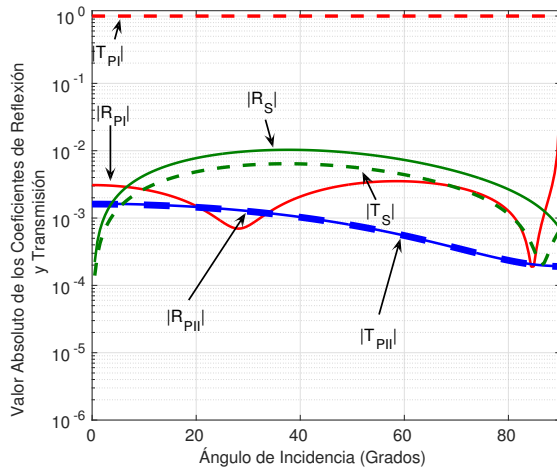
Figura 5.6: Valor absoluto de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$  en función de la frecuencia. La permeabilidad y el espesor de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-13}$   $m^2$  y  $h = 0.001$  m respectivamente. Los valores de  $\phi$  son mostrados en las curvas. La etiqueta *NS07, Ec. 52* se refiere a las condiciones de borde en Nakagawa y Schoenberg (2007)- La etiqueta *Modelo CF* se refiere al modelo de capa fina. (a) y (b) muestran los coeficientes de reflexión de las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$  respectivamente. (c) y (d) ilustran los coeficientes de transmisión de las ondas  $P_I$  y  $P_{II}$  respectivamente.

R-T, para los tres fluidos en la fractura. Se observa que cuando hay petróleo o agua saturando la fractura (Figuras 5.7-(a) y 5.7-(b)) los coeficientes R-T presentan comportamiento similar, con picos cerca a 30 y 83 grados para el coeficiente de reflexión de la onda  $P_I$ . Estos picos se convierten en un indicador de cambio de fase (Figuras 5.8-(a) y 5.8-(b)), como se observó en Martínez et al. (2014), algo similar pasa para el coeficiente de transmisión de la onda de corte con un pico cerca de 85 grados y un cambio de fase en esta misma posición.

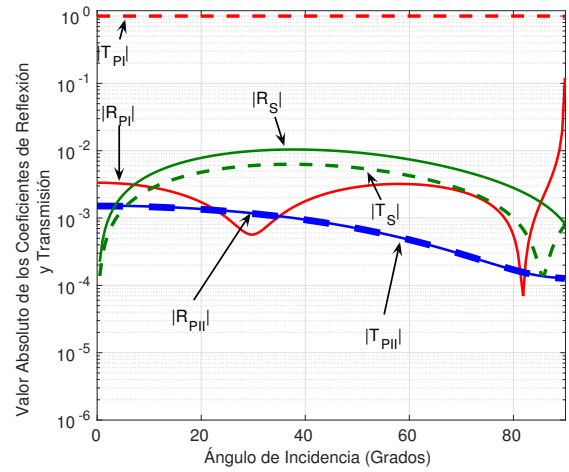
Cuando hay gas en la fractura (Figuras 5.7-(c) y 5.8-(c)), los coeficientes R-T presentan patrones distintos. En la Figura 5.7-(c), observamos picos cerca de los 46 y 64 grados para los coeficientes de reflexión de las ondas  $P_I$ , estos picos indican cambio de fase, pero también hay cambios en la fase para ángulos donde no hay picos, ver Figura 5.9-(c), lo mismo sucede para las ondas de corte, el coeficiente de transmisión presenta cambios de fase en el pico cerca a los 78 grados y otro cambio donde no hay pico cerca a los 30 grados. Por último, para las ondas  $P_{II}$  hay un pico en 50 grados para los coeficientes R-T. Los picos de los coeficientes de reflexión de las ondas  $P_I$  también están presentes en los Casos de la fractura saturada con agua y petróleo, pero más separados que en el Caso del gas.

- **Petróleo en el background:**

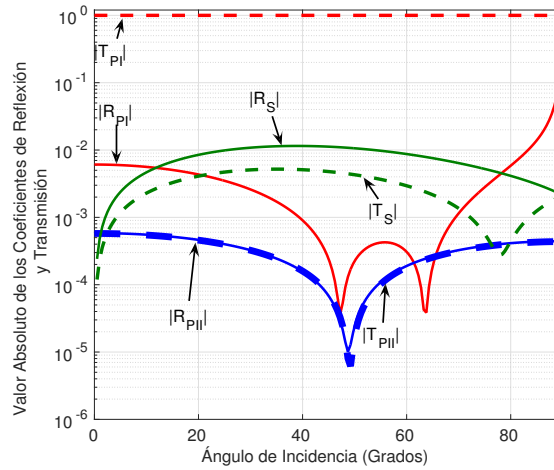
Aquí el background está saturado con petróleo, de modo tal que  $\mathcal{R} = 1.7 \times 10^{-5}$  (longitud de onda  $\lambda = 58.22$  m), cuando la fractura está saturada con agua, petróleo o gas. Las Figuras 5.9 y 5.10 muestran el valor absoluto y la fase de los coeficientes R-T, donde se observan cerradas similitudes entre la fractura saturada con agua y la fractura saturada con petróleo. En cambio, cuando el gas satura la fractura, los coeficientes R-T son bastante diferentes comparados con lo obtenido para los otros dos fluidos, con las diferencias más notorias observadas para el coeficiente de reflexión de la onda  $P_I$  y el coeficiente de transmisión de las ondas de corte. Al igual que en el ejemplo anterior, cuando hay picos en el valor absoluto de los coeficientes R-T esto indica un cambio de



(a) Agua en la fractura.



(b) Petróleo en la fractura.



(c) Gas en la fractura.

Figura 5.7: Valor absoluto de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$ ,  $P_{II}$  y de corte en función del ángulo de incidencia. El background está saturado con agua. Los coeficientes fueron calculados usando las condiciones de borde (5.6)-(5.11). La onda incidente es una onda tipo  $P_I$  con frecuencia 50 Hz, la permeabilidad y apertura de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $h = 0.001 \text{ m}$  respectivamente.

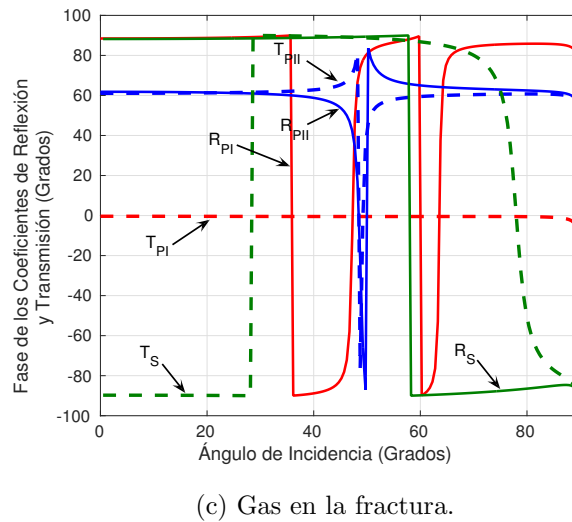
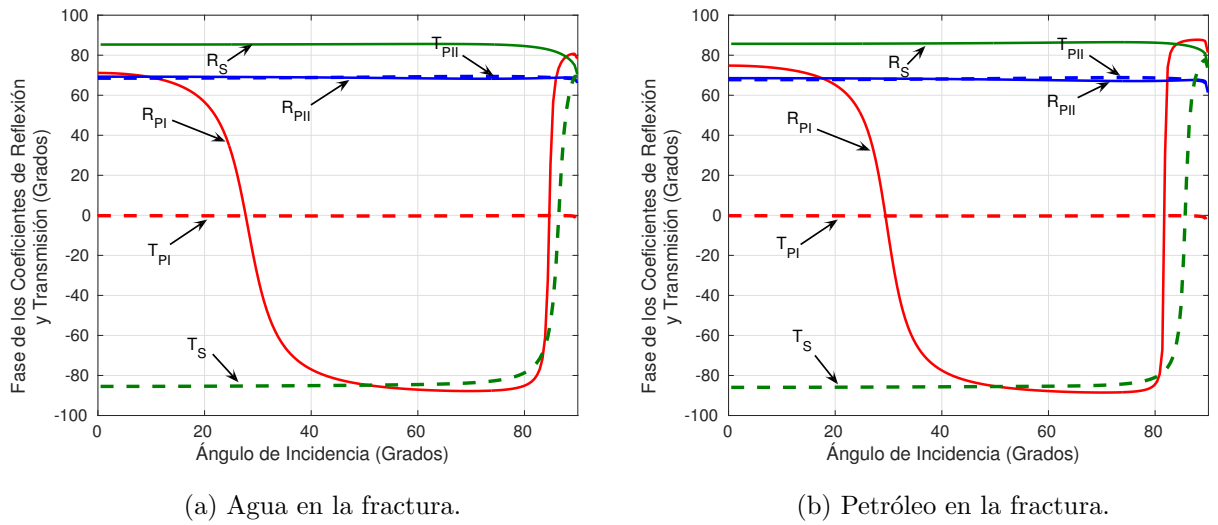


Figura 5.8: Fase de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$ ,  $P_{II}$  y de corte en función del ángulo de incidencia. El background está saturado con agua. Los coeficientes fueron calculados usando las condiciones de borde (5.6)-(5.11). La onda incidente es una onda tipo  $P_I$  con frecuencia 50 Hz, la permeabilidad y apertura de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $h = 0.001 \text{ m}$  respectivamente.

fase.

- Gas en el background:

Finalmente, el background es saturado con gas, con  $\mathcal{R} = 1.76 \times 10^{-5}$  (longitud de onda  $\lambda = 56.59$  m) y la fractura nuevamente es saturada con agua, petróleo o gas. Las Figuras 5.11 y 5.12 muestran el valor absoluto y la fase de los coeficientes R-T para los tres fluidos que saturan la fractura, no se observan diferencias entre los coeficientes obtenidos para cada uno de los fluidos saturantes. El comportamiento es similar indicando cambio de fase cuando hay picos en el valor absoluto de los coeficientes R-T.

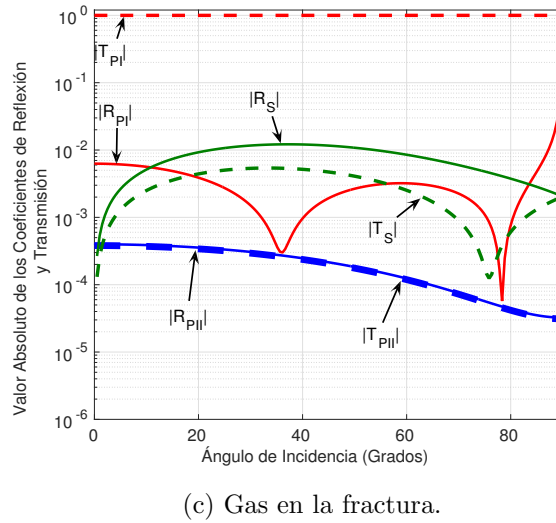
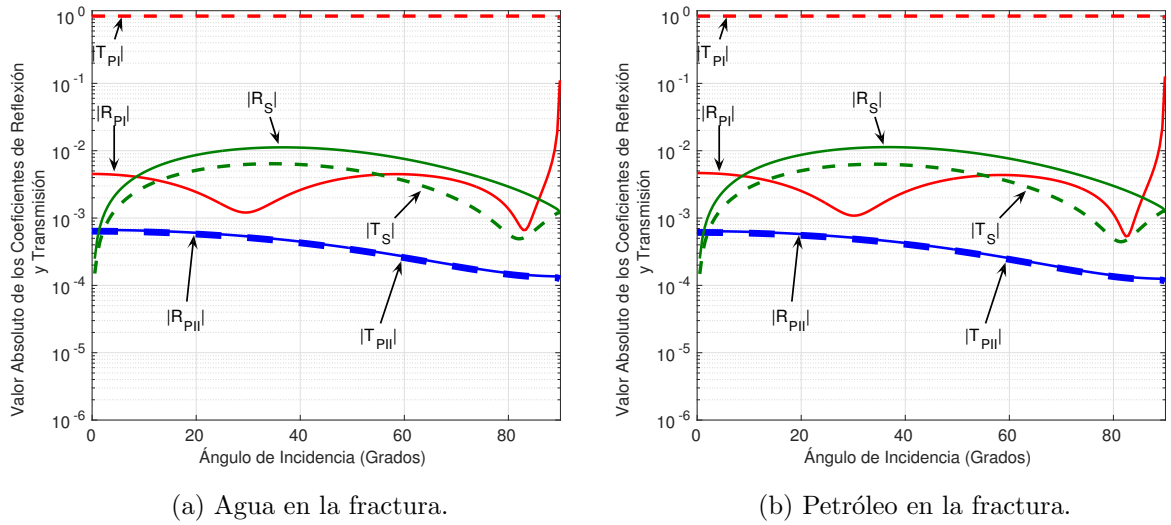


Figura 5.9: Valor absoluto de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$ ,  $P_{II}$  y de corte en función del ángulo de incidencia. El background está saturado con petróleo. Los coeficientes fueron calculados usando las condiciones de borde (5.6)-(5.11). La onda incidente es una onda tipo  $P_I$  con frecuencia 50 Hz, la permeabilidad y apertura de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $h = 0.001 \text{ m}$  respectivamente.

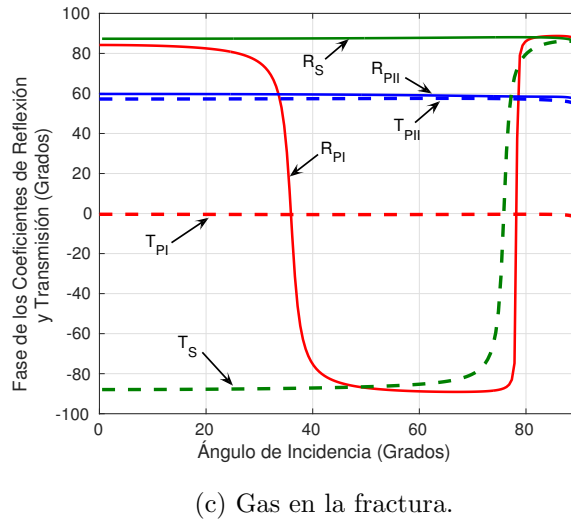
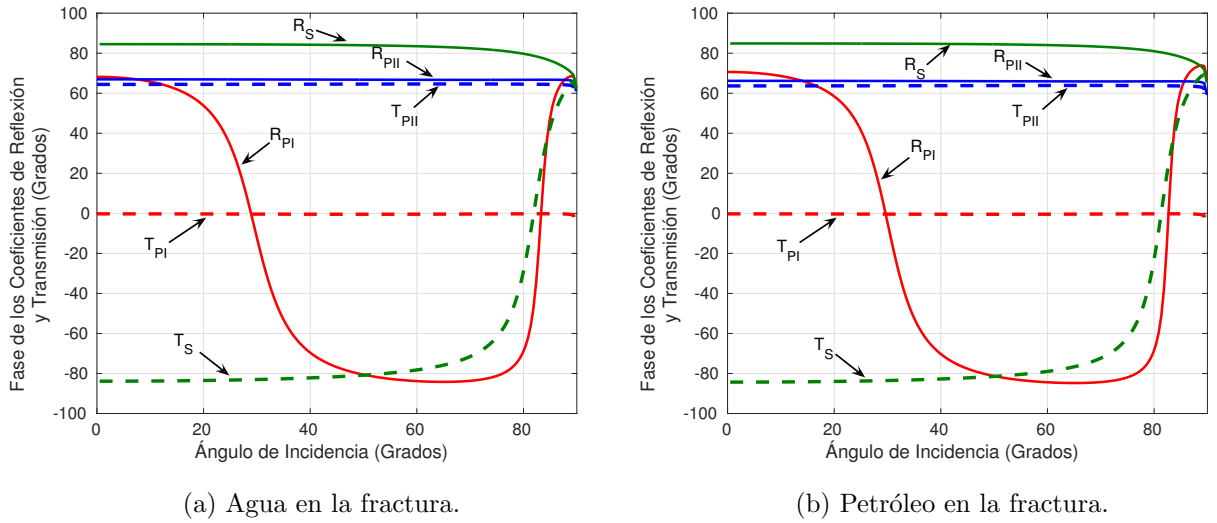
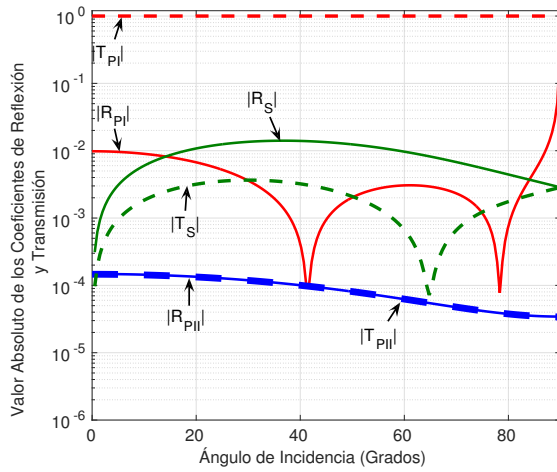
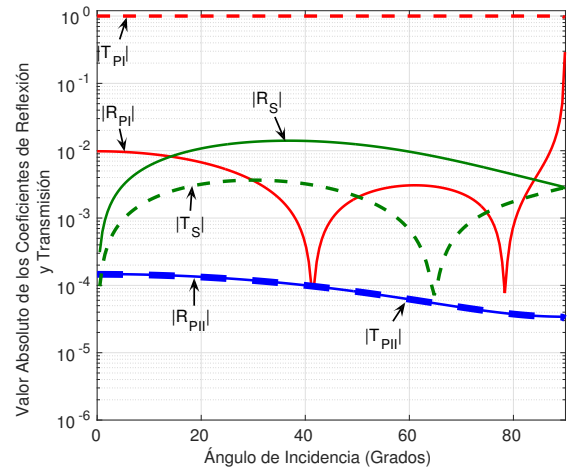


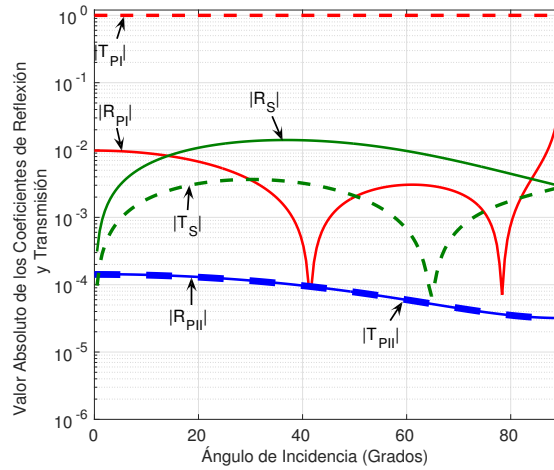
Figura 5.10: Fase de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$ ,  $P_{II}$  y de corte en función del ángulo de incidencia. El background está saturado con petróleo. Los coeficientes fueron calculados usando las condiciones de borde (5.6)-(5.11). La onda incidente es una onda tipo  $P_I$  con frecuencia 50 Hz, la permeabilidad y apertura de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $h = 0.001 \text{ m}$  respectivamente.



(a) Agua en la fractura.



(b) Petróleo en la fractura.



(c) Gas en la fractura.

Figura 5.11: Valor absoluto de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$ ,  $P_{II}$  y de corte en función del ángulo de incidencia. El background está saturado con gas. Los coeficientes fueron calculados usando las condiciones de borde (5.6)-(5.11). La onda incidente es una onda tipo  $P_I$  con frecuencia 50 Hz, la permeabilidad y apertura de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $h = 0.001 \text{ m}$  respectivamente.



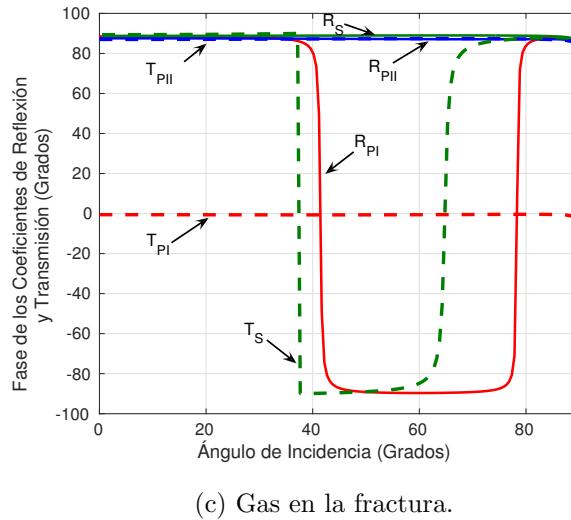
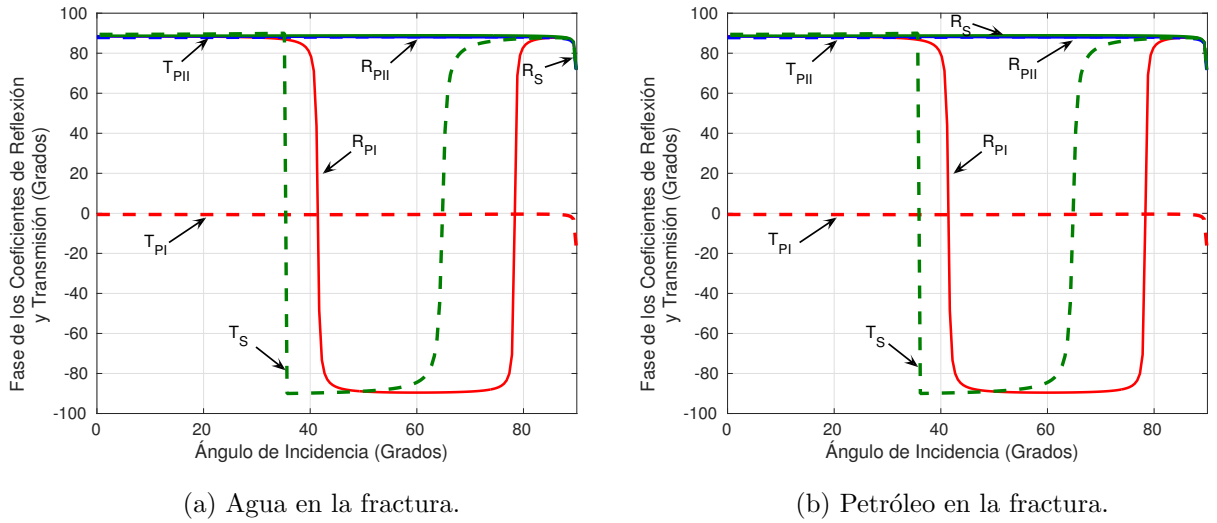


Figura 5.12: Fase de los coeficientes R-T para las ondas  $P_I$ ,  $P_{II}$  y de corte en función del ángulo de incidencia. El background está saturado con gas. Los coeficientes fueron calculados usando las condiciones de borde (5.6)-(5.11). La onda incidente es una onda tipo  $P_I$  con frecuencia 50 Hz, la permeabilidad y apertura de la fractura son  $\kappa_0 = 9.869 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$  y  $h = 0.001 \text{ m}$  respectivamente.

## CAPÍTULO 6

# SISTEMAS DE FRACTURAS MODELADAS COMO CAPAS FINAS EN MEDIOS DE BIOT Y ANISOTROPÍA INDUCIDA

---

Un conjunto denso de fracturas horizontales en un medio poroelástico saturado de fluido se comporta como un medio equivalente transversalmente isótropo con eje de simetría vertical (VTI) si la distancia promedio entre las fracturas es mucho menor que la longitud de onda predominante de las ondas que se propagan. Esto conduce a variaciones de la velocidad y de la atenuación con la frecuencia y el ángulo de propagación de las ondas sísmicas. Una de las principales causas de atenuación es el flujo de fluido inducido por las ondas, que puede tener lugar por la existencia de heterogeneidades de escala mesoscópica (del orden de centímetros), cuando la onda  $P_1$  se convierte en ondas lentas de Biot de tipo difusivo. La anelasticidad de las ondas y la anisotropía son significativas en rocas fracturadas poroelásticas debido a este mecanismo (Carcione et al., 2013).

White et al. (1975) fueron los primeros en introducir el mecanismo de pérdida mesoscópica en el marco de la teoría de Biot considerando capas planas porosas y del-

gadas. Luego, Gelinsky y Shapiro (1997) obtuvieron los coeficientes de rigidez en los casos relajados y no relajados del medio poroviscoelástico equivalente, para un material horizontalmente homogéneo finamente estratificado. Krzikalla y Müller (2011) combinaron los dos modelos anteriores suponiendo que el flujo es perpendicular al plano de estratificación e independiente de la dirección de carga, ellos obtuvieron los cinco coeficientes de rigidez complejos y dependientes de la frecuencia del medio VTI equivalente (Carcione et al., 2011).

Una fractura plana dentro de un background poroelástico saturado de fluido es un caso particular del problema de CF, cuando una de las capas es muy delgada, poco resistente y altamente permeable. Los tests armónicos de comprensibilidad y corte, realizados mediante simulaciones numéricas, fueron primero presentados en Santos et al. (2009) para obtener un medio viscoelástico equivalente para una muestra isótropa altamente heterogénea. Luego, en Carcione et al. (2013), Picotti et al. (2010) y Santos et al. (2011) se extendió el procedimiento para determinar medios equivalentes para medios viscoelásticos y poroelásticos finamente estratificados.

En este Capítulo se realizan estas pruebas armónicas mediante la técnica de elementos finitos a muestras poroelásticas isótropas que presentan un conjunto denso de fracturas horizontales modeladas como capas muy delgadas. Las muestras contienen heterogeneidades de escala mesoscópica debido a diferentes saturaciones de agua salada de formación- $\text{CO}_2$  y porosidad fractal y, en consecuencia, permeabilidad fractal y propiedades de la matriz rocosa fractal. Se analiza la atenuación y velocidad en función de la frecuencia y el ángulo de propagación. El procedimiento se valida utilizando la solución analítica presentada en Krzikalla y Müller (2011) y Carcione et al. (2013). También se analizan casos de interés geofísico, donde se calculan las velocidades de energía y los factores de disipación en función del ángulo, para muestras fracturadas con diferentes tipos de heterogeneidades.

## 6.1 MEDIO EQUIVALENTE VTI

Se considera un medio formado por capas poroelásticas e isotrópicas, saturadas con fluido, como en la Figura 6.1. En cada capa las relaciones esfuerzo-deformación, están dadas por las ecuaciones (2.2) y (2.3). En el rango difusivo las ecuaciones de movimiento en el dominio de la frecuencia (2.26) y (2.27), se transforman en

$$i\omega \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathcal{L}(\mathbf{u}) = 0, \quad (6.1)$$

donde  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  es la frecuencia angular y

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \nabla p_f(\mathbf{u})), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0\mathbf{I}_2 & 0\mathbf{I}_2 \\ 0\mathbf{I}_2 & \frac{\eta}{\kappa}\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

siendo  $\mathbf{I}_2$  la matriz identidad de 2x2.

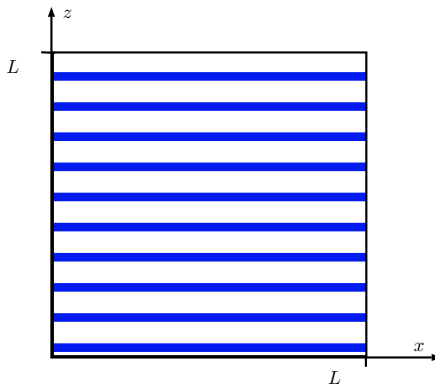


Figura 6.1: Medio laminado formado por capas poroelásticas e isotrópicas.

Considerando los ejes  $x$  y  $z$  como las coordenadas horizontal y vertical respectivamente. Gelinsky y Shapiro (1997) mostraron que el medio formado por capas, se comporta como un medio VTI para longitudes de onda largas, es decir, la longitud de onda mucho más grande que el espesor de las capas. Ellos obtuvieron los coeficientes de la matriz de rigidez para límites en las bajas y altas frecuencias. En todas las frecuencias, el medio se comporta como un medio equivalente VTI con coeficientes de la

matriz de rigidez complejos y dependientes de la frecuencia  $p_{IJ}$ ,  $I, J = 1, \dots, 6$ . Para el caso de flujo normal a la dirección de estratificación de la fractura e independiente de la dirección de carga, estos coeficientes complejos pueden ser determinados como lo mostraron Krzikalla y Müller (2011) y Carcione et al. (2011). En el Apéndice A se encuentra el modelo usado en este trabajo.

Denotando por  $\boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{u}}_s)$  y  $\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_s)$  al tensor de esfuerzos y el tensor de deformaciones del medio equivalente VTI respectivamente, donde  $\tilde{\mathbf{u}}_s$  corresponde al vector desplazamiento del sólido en la macroescala; las correspondientes relaciones esfuerzo-deformación, en el dominio espacio-frecuencia, pueden ser expresadas por

$$\tau_{11}(\tilde{\mathbf{u}}_s) = p_{11}\epsilon_{11}(\tilde{\mathbf{u}}_s) + p_{12}\epsilon_{22}(\tilde{\mathbf{u}}_s) + p_{13}\epsilon_{33}(\tilde{\mathbf{u}}_s), \quad (6.3)$$

$$\tau_{22}(\tilde{\mathbf{u}}_s) = p_{12}\epsilon_{11}(\tilde{\mathbf{u}}_s) + p_{11}\epsilon_{22}(\tilde{\mathbf{u}}_s) + p_{13}\epsilon_{33}(\tilde{\mathbf{u}}_s), \quad (6.4)$$

$$\tau_{33}(\tilde{\mathbf{u}}_s) = p_{13}\epsilon_{11}(\tilde{\mathbf{u}}_s) + p_{13}\epsilon_{22}(\tilde{\mathbf{u}}_s) + p_{33}\epsilon_{33}(\tilde{\mathbf{u}}_s), \quad (6.5)$$

$$\tau_{23}(\tilde{\mathbf{u}}_s) = 2p_{55}\epsilon_{23}(\tilde{\mathbf{u}}_s), \quad (6.6)$$

$$\tau_{13}(\tilde{\mathbf{u}}_s) = 2p_{55}\epsilon_{13}(\tilde{\mathbf{u}}_s), \quad (6.7)$$

$$\tau_{12}(\tilde{\mathbf{u}}_s) = 2p_{66}\epsilon_{12}(\tilde{\mathbf{u}}_s). \quad (6.8)$$

Aquí, se asume que es un sistema cerrado, por lo cual la variación del contenido de fluido  $\zeta = -\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ . Esta formulación proporciona las velocidades complejas de los modos rápidos a escala macroscópica y tiene en cuenta los efectos de flujo entre capas.

Cabe notar que en el medio VTI equivalente se mantiene la relación:

$$p_{12} = p_{11} - 2p_{66}.$$

Los coeficientes  $p_{IJ}$  en (6.3)-(6.8) pueden ser determinados aplicando cinco tests armónicos de compresibilidad y de corte, realizados mediante simulación numérica y empleando el método de elementos finitos, para una muestra representativa del material poroelástico fracturado en 2D. Estos tests están asociados con

problemas de condición de borde para las ecuaciones de Biot (6.1)-(6.2) en el dominio espacio-frecuencia. Las diferentes condiciones de borde representan los siguientes experimentos virtuales (Carcione et al., 2011).

- Un test de compresibilidad en la dirección paralela a las fracturas para determinar  $p_{11}$ .
- Un test de compresibilidad en la dirección normal a las fracturas para determinar  $p_{33}$ .
- Un test aplicando simultáneamente compresiones en la dirección normal y en la dirección paralela a las fracturas para determinar  $p_{13}$ .
- Un test aplicando esfuerzos de corte en el plano  $x - z$ , para determinar  $p_{55}$ .
- Un test aplicando esfuerzos de corte en el plano  $x - y$ , para determinar  $p_{66}$ .

Los coeficientes de rigidez  $p_{IJ}$  permiten calcular las velocidades de las ondas y los factores de calidad del medio VTI equivalente, según se explica en el Apéndice B.

## 6.2 DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES $p_{IJ}$

Para determinar los coeficientes en las ecuaciones (6.3)-(6.8) se resuelve la ecuación (6.1) en el caso 2D sobre un dominio cuadrado de referencia  $\Omega = (0, L)^2$  con borde  $\Gamma$  en el plano  $x - z$ . El borde  $\Gamma$  es la unión de cuatro bordes  $\Gamma = \Gamma^L \cup \Gamma^B \cup \Gamma^R \cup \Gamma^T$  donde

$$\begin{aligned} \Gamma^L &= \{(x, z) \in \Gamma : x = 0\}, & \Gamma^R &= \{(x, z) \in \Gamma : x = L\}, \\ \Gamma^B &= \{(x, z) \in \Gamma : z = 0\}, & \Gamma^T &= \{(x, z) \in \Gamma : z = L\}. \end{aligned}$$

Se define un sistema ortonormal en cada borde  $\Gamma$  dado por  $\{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\chi}\}$ , donde el vector unitario  $\boldsymbol{\nu}$  es la normal externa y el vector unitario  $\boldsymbol{\chi}$  es tangente en la dirección contraria a las manecillas del reloj. La muestra está sujeta a compresiones tiempo-armónicas  $\Delta P e^{i\omega t}$ , donde  $P$  es la presión. También está sujeta a fuerzas tangenciales tiempo-armónicas  $\Delta G e^{i\omega t}$ , donde  $G$  es un esfuerzo de corte.

### 6.2.1 CÁLCULO DE $p_{33}$

Se resuelve la ecuación (6.1) con las siguientes condiciones de borde

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\Delta P, \quad (x, z) \in \Gamma^T, \quad (6.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\chi} = 0, \quad (x, z) \in \Gamma, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad (x, z) \in \Gamma^L \cup \Gamma^B \cup \Gamma^R, \quad (6.11)$$

$$\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad (x, z) \in \Gamma. \quad (6.12)$$

En este experimento  $\epsilon_{11}(\mathbf{u}_s) = \epsilon_{22}(\mathbf{u}_s) = -\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ . Denotando por  $V$  al volumen original de la muestra fracturada, su cambio de volumen (complejo) oscilatorio,  $\Delta V(\omega)$ , nos permite definir  $p_{33}$  usando la relación

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta P}{p_{33}(\omega)}, \quad (6.13)$$

válido para un medio viscoelástico homogéneo en el caso cuasi-estático. La ecuación (6.13) es una forma de relación esfuerzo-deformación, donde  $\Delta V/V$  es la deformación y  $-\Delta P$  es el esfuerzo. Luego, los desplazamientos verticales  $u_{s,z}(x, L, \omega)$  en  $\Gamma^T$  nos permiten obtener un desplazamiento vertical promedio  $u_{s,z}^T(\omega)$  en el borde  $\Gamma^T$ . Entonces para cada frecuencia  $\omega$ , el cambio de volumen producido por el test de compresibilidad puede ser aproximado por  $\Delta V(\omega) \approx Lu_{s,z}^T(\omega)$ .

### 6.2.2 CÁLCULO DE $p_{11}$

Se resuelve la ecuación (6.1) con las siguientes condiciones de borde

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\Delta P, \quad (x, z) \in \Gamma^R, \quad (6.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\chi} = 0, \quad (x, z) \in \Gamma, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad (x, z) \in \Gamma^L \cup \Gamma^B \cup \Gamma^T, \quad (6.16)$$

$$\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad (x, z) \in \Gamma. \quad (6.17)$$

En este experimento  $\epsilon_{33}(\mathbf{u}_s) = \epsilon_{22}(\mathbf{u}_s) = -\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ . Desde la ecuación (6.3) se puede ver que este experimento determina  $p_{11}$  de la misma forma como se obtuvo  $p_{33}$ .

### 6.2.3 CÁLCULO DE $p_{55}$

Se resuelve la ecuación (6.1) con las siguientes condiciones de borde

$$-\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\rho}_1, \quad (x, z) \in \Gamma^T \cup \Gamma^L \cup \Gamma^R, \quad (6.18)$$

$$\mathbf{u}_s = 0, \quad (x, z) \in \Gamma^B, \quad (6.19)$$

$$\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad (x, z) \in \Gamma, \quad (6.20)$$

donde

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \begin{cases} (0, \Delta G), & (x, z) \in \Gamma^L \\ (0, -\Delta G), & (x, z) \in \Gamma^R \\ (-\Delta G, 0), & (x, z) \in \Gamma^T \end{cases} \quad (6.21)$$

El cambio en la forma de la muestra nos permite obtener  $p_{55}(\omega)$  usando la relación

$$\tan(\theta(\omega)) = \frac{\Delta G}{p_{55}(\omega)}, \quad (6.22)$$

donde  $\theta(\omega)$  es el ángulo de separación entre la posición original de los bordes laterales y la posición después de aplicar los esfuerzos de corte (Kolsky, 1963).



Los desplazamientos horizontales  $u_{s,x}(x, L, \omega)$  en el borde superior  $\Gamma^T$  son usados para obtener cada frecuencia, un promedio de los desplazamientos horizontales  $u_{s,x}(\omega)$  en el borde  $\Gamma^T$ . Este valor promedio nos permite aproximar el cambio en la forma sufrida por la muestra, dada por  $\tan(\theta(\omega)) \approx u_{s,x}(\omega)/L$ , y desde la ecuación (6.22) obtenemos  $p_{55}(\omega)$ .

#### 6.2.4 CÁLCULO DE $p_{66}$

Para determinar  $p_{66}$ , ya que este coeficiente de rigidez está asociado con las ondas de corte propagándose en el plano  $x - y$ , hacemos un cálculo equivalente en el plano  $x - z$  (Santos y Carcione, 2015). Se resuelve la ecuación (6.1) con las siguientes condiciones de borde

$$-\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\varrho}_2, \quad (x, z) \in \Gamma^T \cup \Gamma^L \cup \Gamma^R, \quad (6.23)$$

$$\mathbf{u}_s = 0, \quad (x, z) \in \Gamma^B, \quad (6.24)$$

$$\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad (x, z) \in \Gamma, \quad (6.25)$$

donde

$$\boldsymbol{\varrho}_2 = \begin{cases} (\Delta G, 0), & (x, z) \in \Gamma^B \\ (-\Delta G, 0), & (x, z) \in \Gamma^T \\ (0, -\Delta G), & (x, z) \in \Gamma^R. \end{cases} \quad (6.26)$$

Entonces se procede como se hizo en el cálculo de  $p_{55}(\omega)$ . El cambio en la forma de la muestra nos permite obtener  $p_{66}(\omega)$  usando la relación

$$\tan(\theta(\omega)) = \frac{\Delta G}{p_{66}(\omega)}, \quad (6.27)$$

donde  $\theta(\omega)$  es el ángulo de separación entre la posición original de los bordes horizontales y la posición después de aplicar los esfuerzos de corte.

Los desplazamientos verticales  $u_{s,z}(L, z, \omega)$  en el borde derecho  $\Gamma^R$  son usados para obtener cada frecuencia, un promedio de los desplazamientos verticales  $u_{s,z}(\omega)$

en el borde  $\Gamma^R$ . Este valor promedio nos permite aproximar el cambio en la forma sufrida por la muestra, dada por  $\tan(\theta(\omega)) \approx u_{s,z}(\omega)/L$ , y desde la ecuación (6.27) obtenemos  $p_{66}(\omega)$ .

### 6.2.5 CÁLCULO DE $p_{13}$

Se resuelve la ecuación (6.1) con las siguientes condiciones de borde

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\Delta P, \quad (x, z) \in \Gamma^T \cup \Gamma^R, \quad (6.28)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\chi} = 0, \quad (x, z) \in \Gamma, \quad (6.29)$$

$$\mathbf{u}^s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad (x, z) \in \Gamma^L \cup \Gamma^B, \quad (6.30)$$

$$\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad (x, z) \in \Gamma. \quad (6.31)$$

En este test  $\epsilon_{22}(\mathbf{u}_s) = -\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$  y desde las ecuaciones (6.3) y (6.5) tenemos

$$\tau_{11} = p_{11}\epsilon_{11} + p_{13}\epsilon_{33}, \quad (6.32)$$

$$\tau_{33} = p_{13}\epsilon_{11} + p_{33}\epsilon_{33}, \quad (6.33)$$

donde  $\epsilon_{11}$  y  $\epsilon_{33}$  son las componentes de deformación en  $\Gamma^R$  y  $\Gamma^T$ , respectivamente. Entonces desde (6.32) y (6.33) y dado que  $\tau_{11} = \tau_{33} = -\Delta P$ , podemos obtener  $p_{13}(\omega)$  mediante

$$p_{13}(\omega) = \frac{p_{11}\epsilon_{11} - p_{33}\epsilon_{33}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{33}}. \quad (6.34)$$

## 6.3 FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PROBLEMA

Para un dominio rectangular  $\Omega$  con borde  $\Gamma = \Gamma^L \cup \Gamma^B \cup \Gamma^R \cup \Gamma^T$ , se va a obtener la formulación variacional de la ecuación (6.1) con las condiciones de borde planteadas para los cálculos de los  $p_{IJ}$ .

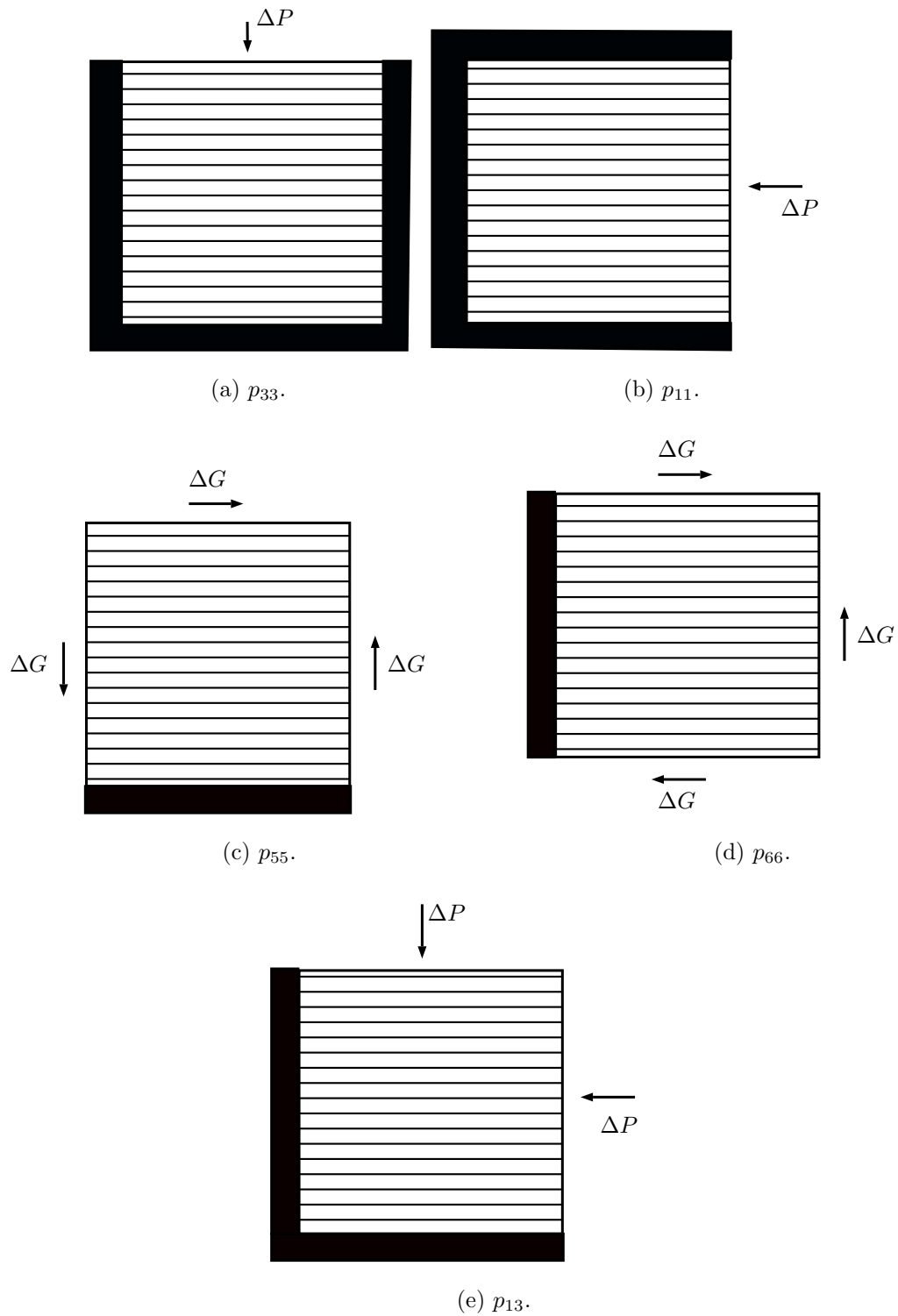


Figura 6.2: Test aplicados para obtener los coeficientes  $p_{IJ}$ . La orientación de los esfuerzos aplicados están indicadas con flechas.

Se introducen los siguientes subespacios cerrados de  $[H^1(\Omega)]^2$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{11}(\Omega) &= \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma^B \cup \Gamma^T \cup \Gamma^L \right\}, \\ \mathcal{W}_{33}(\Omega) &= \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma^L \cup \Gamma^R \cup \Gamma^B \right\}, \\ \mathcal{W}_{13}(\Omega) &= \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma^L \cup \Gamma^B \right\}, \\ \mathcal{W}_{55}(\Omega) &= \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Gamma^B \right\}, \\ \mathcal{W}_{66}(\Omega) &= \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Gamma^R \right\}.\end{aligned}\tag{6.35}$$

También se tienen

$$H_0(\text{div}; \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in [H(\text{div}; \Omega)]^2 : \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma \right\},\tag{6.36}$$

$$H_0^1(\text{div}; \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 : \nabla \cdot \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \right\},\tag{6.37}$$

y para  $(I, J) = (1, 1), (3, 3), (1, 3), (5, 5)$  y  $(6, 6)$ ,

$$\mathcal{Z}_{I,J}(\Omega) = \mathcal{W}_{IJ}(\Omega) \times H_0(\text{div}; \Omega)\tag{6.38}$$

La forma variacional asociada con  $p_{33}$  se obtiene partiendo de la ecuación (6.1), multiplicando por  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) \in \mathcal{Z}_{33}(\Omega)$ , integrando por partes y aplicando las condiciones de borde (6.9)-(6.12). La solución  $\mathbf{u}^{(33)} = (\mathbf{u}_s^{(33)}, \mathbf{w}^{(33)}) \in \mathcal{Z}_{33}(\Omega)$  satisface

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(33)}, \mathbf{v}) = - \langle \Delta P, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^T}, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) \in \mathcal{Z}_{33}(\Omega)\tag{6.39}$$

donde  $\Delta P$  es la amplitud de la compresión armónica que se aplica a la muestra fracturada. La forma bilineal  $\Lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  está dada por

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathbf{u}^{(33)}, \mathbf{v}) &= i\omega \frac{\eta}{\kappa} (\mathbf{w}^{(33)}, \mathbf{v}_f) + \sum_{l,m} (\sigma_{lm}(\mathbf{u}^{(33)}), \varepsilon_{lm}(\mathbf{v}_s)) - (p_f, \nabla \cdot \mathbf{v}_f) \\ &= i\omega \frac{\eta}{\kappa} (\mathbf{w}^{(33)}, \mathbf{v}_f) + (\mathcal{D} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{(33)}), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v})),\end{aligned}\tag{6.40}$$

donde la matriz  $\mathcal{D}$  y los vectores  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{(33)})$  y  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v})$  se definen como

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \lambda_u + 2\mu & \lambda_u & D & 0 \\ \lambda_u & \lambda_u + 2\mu & D & 0 \\ D & D & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\mu \end{pmatrix},\tag{6.41}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{(33)}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(\mathbf{u}_s^{(33)}) \\ \varepsilon_{33}(\mathbf{u}_s^{(33)}) \\ \nabla \cdot \mathbf{w} \\ \varepsilon_{13}(\mathbf{u}_s^{(33)}) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(\mathbf{v}_s) \\ \varepsilon_{33}(\mathbf{v}_s) \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_f \\ \varepsilon_{13}(\mathbf{v}_s) \end{pmatrix}. \quad (6.42)$$

El término  $(\mathcal{D}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{(33)}), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}))$  está asociado con la energía de deformación de nuestro sistema, de modo tal que la matriz  $\mathcal{D}$  debe ser definida positiva.

Similar mente, se puede obtener la forma variacional para los otros coeficientes  $p_{IJ}$ :

- Para  $p_{11}$ : Encontrar  $\mathbf{u}^{11} = (\mathbf{u}_s^{(11)}, \mathbf{w}^{(11)}) \in \mathcal{Z}_{11}(\Omega)$  tal que

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(11)}, \mathbf{v}) = - \langle \Delta P, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^R}, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) \in \mathcal{Z}_{11}(\Omega) \quad (6.43)$$

- Para  $p_{13}$ : Encontrar  $\mathbf{u}^{13} = (\mathbf{u}_s^{(13)}, \mathbf{w}^{(13)}) \in \mathcal{Z}_{13}(\Omega)$  tal que

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(13)}, \mathbf{v}) = - \langle \Delta P, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^R \cup \Gamma^T}, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) \in \mathcal{Z}_{13}(\Omega) \quad (6.44)$$

- Para  $p_{55}$ : Encontrar  $\mathbf{u}^{55} = (\mathbf{u}_s^{(55)}, \mathbf{w}^{(55)}) \in \mathcal{Z}_{55}(\Omega)$  tal que

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(55)}, \mathbf{v}) = - \langle \boldsymbol{\varrho}_1, \mathbf{v}_s \rangle_{\Gamma^L \cup \Gamma^R \cup \Gamma^T}, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) \in \mathcal{Z}_{55}(\Omega) \quad (6.45)$$

- Para  $p_{66}$ : Encontrar  $\mathbf{u}^{66} = (\mathbf{u}_s^{(66)}, \mathbf{w}^{(66)}) \in \mathcal{Z}_{66}(\Omega)$  tal que

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(66)}, \mathbf{v}) = - \langle \boldsymbol{\varrho}_2, \mathbf{v}_s \rangle_{\Gamma^B \cup \Gamma^T \cup \Gamma^R}, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) \in \mathcal{Z}_{66}(\Omega) \quad (6.46)$$

Estos cinco problemas de valores de frontera están asociados con operadores de segundo orden en  $L^2(\Omega)$ . El análisis de existencia y unicidad de los problemas (6.40),(6.43)-(6.46) fue presentado Santos y Carcione (2015).

## 6.4 ALGORITMO DE ELEMENTOS FINITOS

Para el método de elementos finitos se tomó una partición no solapada  $\mathcal{T}^h(\Omega)$  del dominio  $\Omega$  en rectángulos  $\Omega_j$ , con diámetros acotados por  $h$ , tales que  $\bar{\Omega} =$

$\cup_{j=1}^J \bar{\Omega}_j$ . Se denota por  $\Gamma_{jk} = \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k$  al lado común entre dos rectángulos adyacentes  $\Omega_j$  y  $\Omega_k$ , también se tiene  $\Gamma_j = \partial\Omega_j \cap \Gamma$  (donde  $\Gamma$  es el borde del dominio).

En la aproximación de cada componente del desplazamiento del sólido para el caso del cálculo del coeficiente  $p_{33}$ , por ejemplo, se usa el espacio de elementos finitos conformes denotado por  $\mathcal{W}_{33}^h(\Omega)$ . Estos espacios están definidos mediante

$$\mathcal{W}_{11}^h = \{ \mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_j} \in [P_{1,1}(\Omega_j)]^2, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma^B \cup \Gamma^T \cup \Gamma^L \} \cap [C^0(\bar{\Omega})]^2, \quad (6.47)$$

$$\mathcal{W}_{33}^h = \{ \mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_j} \in [P_{1,1}(\Omega_j)]^2, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma^L \cup \Gamma^R \cup \Gamma^B \} \cap [C^0(\bar{\Omega})]^2, \quad (6.48)$$

$$\mathcal{W}_{13}^h = \{ \mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_j} \in [P_{1,1}(\Omega_j)]^2, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma^L \cup \Gamma^B \} \cap [C^0(\bar{\Omega})]^2, \quad (6.49)$$

$$\mathcal{W}_{55}^h = \{ \mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_j} \in [P_{1,1}(\Omega_j)]^2, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma^B \} \cap [C^0(\bar{\Omega})]^2, \quad (6.50)$$

$$\mathcal{W}_{55}^h = \{ \mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_j} \in [P_{1,1}(\Omega_j)]^2, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma^L \} \cap [C^0(\bar{\Omega})]^2, \quad (6.51)$$

$$(6.52)$$

donde  $P_{1,1}$  son los polinomios de grado no mayor a uno, en cada componente. Los nodos para el desplazamiento del sólido están ubicados en los vértices del elemento, ver Figura 6.3, las funciones base están definidas por

$$\varphi^{BL} = \left(1 - \frac{\hat{x}}{h}\right) \left(1 - \frac{\hat{z}}{h}\right), \quad (6.53)$$

$$\varphi^{BR} = \left(\frac{\hat{x}}{h}\right) \left(1 - \frac{\hat{z}}{h}\right), \quad (6.54)$$

$$\varphi^{TR} = \left(\frac{\hat{x}}{h}\right) \left(\frac{\hat{z}}{h}\right), \quad (6.55)$$

$$\varphi^{BL} = \left(1 - \frac{\hat{x}}{h}\right) \left(\frac{\hat{z}}{h}\right). \quad (6.56)$$

Para aproximar el desplazamiento relativo al fluido, se usa un subespacio cerrado de la parte vectorial del espacio de Raviart-Thomas-Nedelec de orden cero, por ejemplo en el cálculo del  $p_{33}$  es denotado por  $\mathcal{V}_{33}^h(\Omega)$  (Nedelec, 1980; Raviart y Thomas, 1977). Para el desplazamiento horizontal se tienen las funciones base  $\psi^L$  y  $\psi^R$  y para el desplazamiento vertical  $\psi^B$  y  $\psi^T$  (ver Figura 6.4). Este espacio está definido como

$$\mathcal{V}^h(\Omega) = \{ \mathbf{v}_f \in H(\text{div}; \Omega) : \mathbf{v}_f|_{\Omega_j} \in P_{1,0} \times P_{0,1}, \mathbf{v}_f \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma \}. \quad (6.57)$$

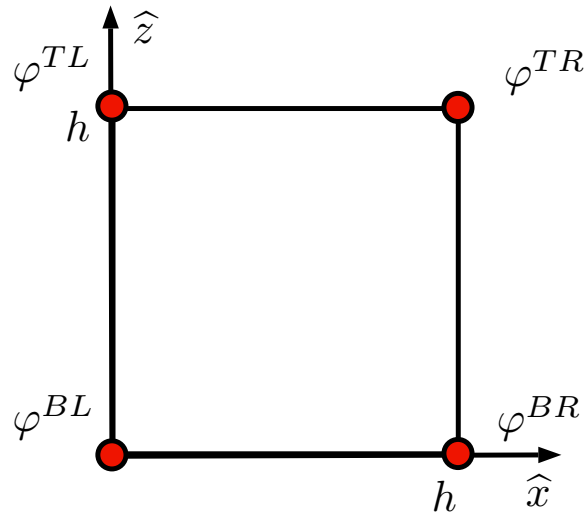


Figura 6.3: Elemento conforme usado para el desplazamiento del sólido, el diámetro es  $h$ .  $\varphi^{BL}$ ,  $\varphi^{BR}$ ,  $\varphi^{TR}$  y  $\varphi^{TL}$  son las funciones base.

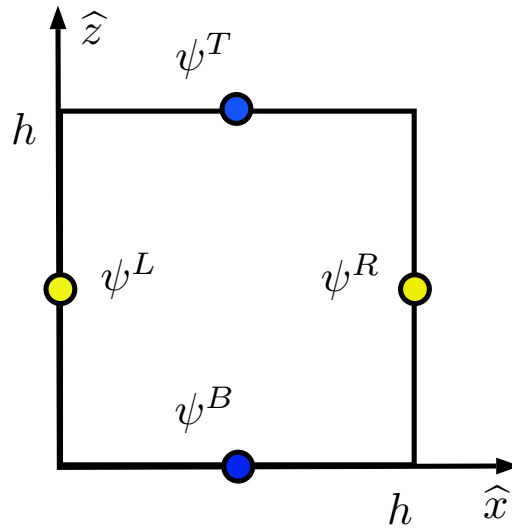


Figura 6.4: Elemento no conforme usado para el desplazamiento del fluido, el diámetro es  $h$ .  $\psi^B$  y  $\psi^T$  son las bases usadas para el desplazamiento vertical del fluido,  $\psi^L$  y  $\psi^R$  son las funciones bases utilizadas para el desplazamiento horizontal del fluido.

y las funciones base son

$$\psi^L(\hat{x}) = 1 - \frac{\hat{x}}{h}, \quad (6.58)$$

$$\psi^R(\hat{x}) = \frac{\hat{x}}{h}, \quad (6.59)$$

$$\psi^B(\hat{z}) = 1 - \frac{\hat{z}}{h}, \quad (6.60)$$

$$\psi^T(\hat{z}) = \frac{\hat{z}}{h}. \quad (6.61)$$

En este caso cada elemento posee 12 incógnitas, 4 para el desplazamiento horizontal del sólido, 4 para el desplazamiento vertical del sólido, 2 para el desplazamiento horizontal relativo al fluido y 2 para el desplazamiento vertical relativo al fluido. Los nodos ubicados en los vértices del elemento poseen 2 grados de libertad y los nodos ubicados en la mitad de los bordes poseen un grado de libertad.

Entonces, para  $(I, J) = (1, 1), (3, 3), (1, 3), (5, 5)$  y  $(6, 6)$  tenemos

$$\mathcal{Z}_{IJ}(\Omega) = \mathcal{W}_{IJ}^h(\Omega) \times \mathcal{V}^h(\Omega). \quad (6.62)$$

En el Capítulo 3 se usaron los elementos finitos no conformes para el caso de propagación de ondas en medios poroelásticos, debido a su baja dispersión numérica y su ventaja en la comunicación entre procesadores para su implementación usando descomposición del dominio y paralelizando la solución. Pero en los casos donde la ecuación es de difusión, no hay problemas de dispersión numérica y se usan los elementos bilineales (conformes) que son de uso más general.

Los procedimientos de elementos finitos para el cálculo de los  $p_{IJ}$  son:

- $p_{33}(\omega)$ : Encontrar  $\mathbf{u}^{(h,33)} \in \mathcal{Z}_{33}(\Omega)$  tal que

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(h,33)}, \mathbf{v}) = - \langle \Delta P, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^T}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{Z}_{33}^h(\Omega) \quad (6.63)$$

- $p_{11}(\omega)$ : Encontrar  $\mathbf{u}^{(h,11)} \in \mathcal{Z}_{11}(\Omega)$  tal que

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(h,11)}, \mathbf{v}) = - \langle \Delta P, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^R}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{Z}_{11}^h(\Omega) \quad (6.64)$$



- $p_{13}(\omega)$ : Encontrar  $\mathbf{u}^{(h,13)} \in \mathcal{Z}_{13}(\Omega)$  tal que

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(h,13)}, \mathbf{v}) = - \langle \Delta P, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^R \cup \Gamma^T}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{Z}_{13}^h(\Omega) \quad (6.65)$$

- $p_{55}(\omega)$ : Encontrar  $\mathbf{u}^{(h,55)} \in \mathcal{Z}_{55}(\Omega)$  tal que

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(h,55)}, \mathbf{v}) = - \langle \boldsymbol{\varrho}_1, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^L \cup \Gamma^R \cup \Gamma^T}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{Z}_{55}^h(\Omega) \quad (6.66)$$

- $p_{66}(\omega)$ : Encontrar  $\mathbf{u}^{(h,66)} \in \mathcal{Z}_{66}(\Omega)$  tal que

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(h,66)}, \mathbf{v}) = - \langle \boldsymbol{\varrho}_2, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^B \cup \Gamma^T \cup \Gamma^R}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{Z}_{66}^h(\Omega) \quad (6.67)$$

La unicidad de los procedimientos de elementos finitos (6.63)-(6.67) y estimaciones a priori del error asociado a los mismos fue publicada en Santos y Carcione (2015).

## 6.5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

El algoritmo de elementos finitos desarrollado arriba, se implementó en Fortran 90 y el sistema global se resuelve con ayuda del solver Pardiso (Petra et al., 2014b,a). Aquí se presentan diferentes casos en los que se calculan los coeficientes complejos  $p_{IJ}$  en función de la frecuencia y sus correspondientes velocidades y coeficientes de disipación. El código usado para obtener los coeficientes  $p_{IJ}$  en cada uno de los test de compresión y corte, usa un paquete público de resolución de sistemas sparse complejos.

En todos los experimentos la muestra fracturada se discretiza usando una malla uniforme de 160x160 elementos, que contienen 10 periodos de 15 cm para el background y 1 cm para las fracturas. Tanto background como fracturas poseen densidad de los granos sólidos  $\rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$ , módulo de volumen de los granos sólidos  $K_s = 37 \text{ GPa}$  y módulo de corte de los granos sólidos  $\mu_s = 44 \text{ GPa}$ . El módulo de volumen de la matriz seca  $K_m$  y el módulo de corte de la matriz seca  $\mu$  fueron determinados

al igual que en el Capítulo 4 usando el modelo de Krief, ecuación (4.45) (Krief et al., 1990).

Para una porosidad en el background de  $\phi = 0.25$  y en las fracturas de  $\phi = 0.5$ , se obtuvo  $K_m = 11.7$  GPa y  $\mu = 14$  GPa para el background y  $K_m = 0.58$  GPa y  $\mu = 0.68$  GPa para las fracturas.

La permeabilidad es obtenida por la expresión (Carcione et al., 2000)

$$\kappa = \frac{r_g^2 \phi^3}{45(1 - \phi)^2}, \quad (6.68)$$

donde  $r_g = 20 \mu\text{m}$  es el promedio del radio de los granos. Las permeabilidades obtenidas fueron  $\kappa_0 = 2.469 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$  para el background y  $\kappa_0 = 4.4 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$  en la fracturas. Las propiedades de los fluidos se muestran en la Tabla 6.1

Parámetro	Agua salada de formación	CO <sub>2</sub>
Modulo de volumen, $K_f$	2.25 GPa	0.025 GPa
Densidad, $\rho_f$	1040 kg/m <sup>3</sup>	500 kg/m <sup>3</sup>
Viscosidad, $\eta$	0.0018 Pa·s	0.00002 Pa·s

Tabla 6.1: Propiedades de los fluidos saturantes

Los casos que se plantean son los siguientes

- Caso 1. *Una muestra fracturada saturada con agua salada de formación.* Tanto el background como las fracturas son medios homogéneos e isotropos, en la Figura 6.5-(a) se muestran los valores del coeficiente  $\lambda_u$  obtenidos para esta muestra fracturada.
- Caso 2. *Una muestra sin fracturas saturada con agua salada de formación y CO<sub>2</sub>.* La muestra no posee fracturas y está saturada por dos fluidos, en la Figura 6.5-(b) se observa el  $\lambda_u$  de la muestra, los patches morados se deben al 10% de saturación de CO<sub>2</sub>.

Las distribuciones de los patches de agua salada y CO<sub>2</sub> se generaron usando el procedimiento explicado en Santos y Carcione (2015). Para generar los patches,

se emplea la función de correlación auto-similar de von Karman, donde la densidad espectral se da por (Frankel y Clayton, 1986)

$$S_d(r_x, r_z) = N_0(1 + R^2 a^2)^{-(H+E/2)}. \quad (6.69)$$

Aquí  $R = \sqrt{r_x^2 + r_z^2}$  es el número de onda radial,  $a$  la longitud de correlación, y  $H$  es un coeficiente de auto-similitud ( $0 < H < 1$ ),  $N_0$  es una constante de normalización y  $E$  es la dimensión Euclidiana.

La correlación de von Karman (6.69) describe un auto-afín, proceso de dimensión fractal  $D = E + 1 - H$  en una escala menor que  $a$ . Para este caso se ha elegido  $E = 2$ ,  $D = 2.2$  y  $a = 4.0$  cm. Una vez que se obtiene una distribución fractal continua del agua sobre la malla de  $160 \times 160$  y se selecciona un valor umbral  $S_b^*$ , en cada celda computacional con saturación de agua por debajo y por encima de  $S_b^*$ , se asigna gas o saturación de agua salada respectivamente. Siguiendo este procedimiento se generó la distribución para el 10 % de saturación de  $\text{CO}_2$ .

- Caso 3. *Una muestra fracturada saturada con patches de agua salada de formación y  $\text{CO}_2$ .* Al igual que en el caso anterior, la muestra se encuentra saturada con dos fluidos, agua salada y 10 % de saturación de  $\text{CO}_2$ , tanto el background como las fracturas. Los diferentes valores de  $\lambda_u$  en la Figura 6.5-(c), indican la presencia de los dos fluidos en la muestra fracturada.
- Caso 4. *Una muestra fracturada saturada con agua salada de formación, fractales en el background y fracturas.* En este caso el medio no es homogéneo, presenta heterogeneidades en la matriz rocosa de la muestra fracturada. La permeabilidad se distribuye por medio de un fractal binario, el cual es obtenido con la siguiente relación logarítmica (Russo y Bouton, 1992; Russo et al., 1997)

$$\log \kappa(x, z) = \langle \log \kappa \rangle + f(x, z), \quad (6.70)$$

con  $f(x, z)$  siendo el fractal representando la fluctuación espacial del campo de permeabilidad, este fractal fue obtenido usando la función de correlación de

von Karman (6.69), donde se escogió la dimensión del fractal  $D = 2.2$  cm y la longitud de correlación 2 cm. La permeabilidad promedio es  $\kappa_0 = 2.469 \cdot 10^{-13}$  m<sup>2</sup> en el background y  $\kappa_0 = 4.4 \cdot 10^{-12}$  m<sup>2</sup> en las fracturas. La porosidad fue obtenida con la relación de Kozeny-Carman (Mavko, 2009). Entonces la muestra heterogénea fue construida como una perturbación fractal de la muestra del caso 1. En la Figura 6.5-(d) se muestra el coeficiente  $\lambda_u$  de la muestra fracturada fractal usada para este caso.

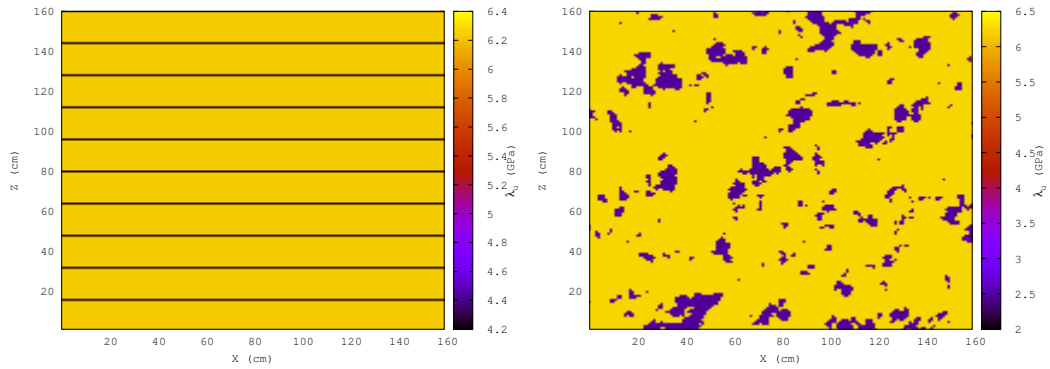
Con los casos enunciados previamente, se hicieron diferentes pruebas comparativas que se detallan a continuación.

### 6.5.1 MODELO TEÓRICO VS. MODELO NUMÉRICO

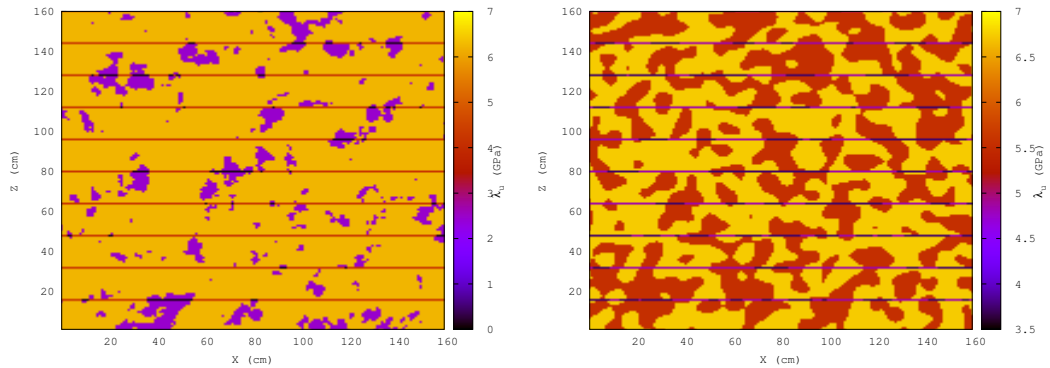
Los resultados numéricos obtenidos se verifican mediante su comparación con el modelo teórico presentado en Krzikalla y Müller (2011); Carcione et al. (2013) para el caso 1, a una frecuencia de 300 Hz. En la Figura 6.6 se muestran los gráficos de los factores de disipación y las velocidades de energía para las ondas qP y qSV. Se observa un buen ajuste entre los resultados numéricos y los teóricos.

Para las ondas qP, se observa mayor atenuación para direcciones normales a la dirección de las fracturas y mayor velocidad en la dirección paralela a las fracturas. Las ondas qSV, presentan mayor atenuación en ángulos cercanos a los 45 grados y un fuerte efecto de la anisotropía en la velocidad, que se refleja en la aparición de las cúspides o triplicaciones de los frente de onda, que representan la llegada de tres frentes de onda diferentes en la misma dirección.

Por último para las ondas SH, se observa un comportamiento similar al de las ondas qP en las velocidades, hay velocidades de mayor magnitud en la dirección paralela a las fracturas, no tiene pérdidas porque es un modo puro en medios transversalmente isótropos (la onda SH está desacoplada de la onda P) y debido



(a) Muestra fracturada saturada con agua sal- (b) Muestra sin fracturas saturada con patch-  
 ada de formación. es de agua salada de formación y CO<sub>2</sub>.



(c) Muestra fracturada saturada con patches (d) Muestra fracturada saturada con agua sal-  
 de agua salada de formación y CO<sub>2</sub>. ada de formación, fractales en el background  
 y fracturas.

Figura 6.5: Valores y distribución de los coeficientes  $\lambda_u$  para todos los casos realiza-  
 dos.

a que la matriz rocosa no presenta heterogeneidades, sólo presenta anisotropía de velocidad de acuerdo a lo esperado.

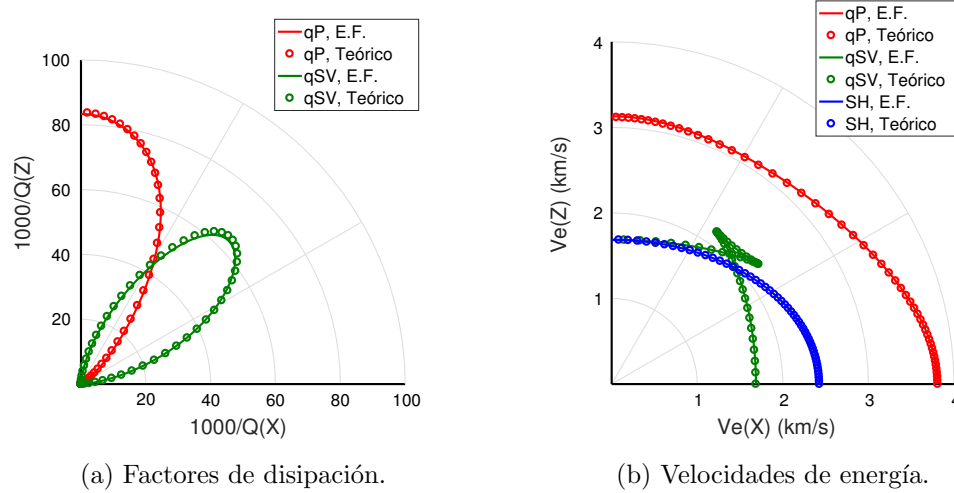


Figura 6.6: Comparación de los resultados obtenidos con los modelos teóricos y el código de elementos finitos desarrollado.

### 6.5.2 CAMBIO EN LA FRECUENCIA DE ANÁLISIS

Para los casos 1, 2 y 3 se obtuvieron los coeficientes  $p_{IJ}$  en dos frecuencias de análisis, 50 y 300 Hz. En la Figura 6.7 se muestran los gráficos de los factores de disipación para las ondas qP y qSV de los casos mencionados. En las ondas qP la mayor atenuación ocurre en la dirección normal a las fracturas, siendo el caso 3 el que tiene mayor atenuación, debido a que posee tanto patches de CO<sub>2</sub> como fracturas. En el caso 2 se observa que los patches no influyen en la anisotropía, ya que la atenuación es constante en todas las direcciones.

En las ondas qSV ocurre la mayor atenuación a un ángulo aproximado de 45 grados con el eje z (ver Figuras 6.7-(c) y 6.7-(d) ). Cuando la frecuencia de análisis es 50 Hz, la mayor atenuación ocurre en el caso 3, pero al aumentar la frecuencia a 300 Hz, es decir, disminuir la longitud de onda, el caso 1 y el Caso 3 tienen similar

disipación, es decir, la atenuación debido a las fracturas se hace mucho más fuerte cuando la longitud de onda disminuye. La atenuación del caso 2 en este tipo de ondas es casi nula.

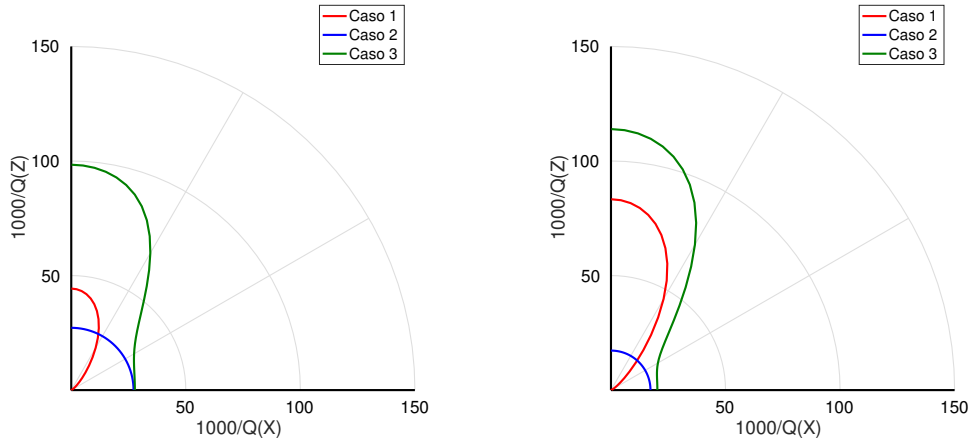
Para las ondas SH la atenuación es nula, como se mencionó antes debido a que es un modo puro y la matriz rocosa no presenta heterogeneidades, por tal motivo no se graficó.

Los gráficos de las velocidades de energía para las ondas qP y qSV, se visualizan en la Figura 6.8. Se puede notar que para el Caso 2, los patches de fluido no afectan la velocidad en ninguna dirección, es decir, tiene un comportamiento isótropo, lo que no se puede decir de los Casos 1 y 3. Las ondas qP tienen mayor velocidad en la dirección paralela a las fracturas y se aproximan a la velocidad del Caso 2. Los valores de velocidad son un poco menores para la muestra saturada con un 10% de CO<sub>2</sub>. Las velocidades de las ondas qSV en los Casos 1 y 3, tienen valores similares y presentan un fuerte efecto de anisotropía o triplicaciones del frente de onda cercano a los 45 grados.

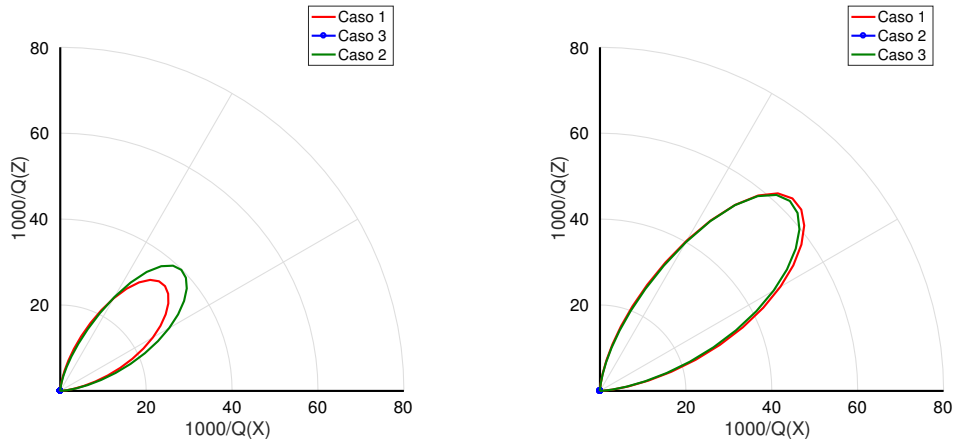
Las ondas SH también presentan anisotropía en los Casos 1 y 3, siendo mayores para direcciones paralelas a las fracturas en las dos frecuencias de análisis (ver Figura 6.9). En el Caso 2, los patches de CO<sub>2</sub> no producen efectos de anisotropía en la muestra y la velocidad es constante para todas las direcciones de propagación.

### 6.5.3 PRESIÓN DE FLUIDO

Continuando con el análisis de la muestra fracturada, se realizó un cálculo de la presión de fluido para la muestra del Caso 3, en los tests de compresión aplicados para la obtención de los coeficientes  $p_{11}$  y  $p_{33}$  con las condiciones de borde antes mencionadas, tanto para 50 Hz como para 300 Hz. En las Figuras 6.10-(a) y 6.10-(b) se visualizan los resultados obtenidos cuando se aplican los esfuerzos paralelos a la dirección de fracturamiento (cálculo del  $p_{11}$ ). La mayor presión de fluido aparece en



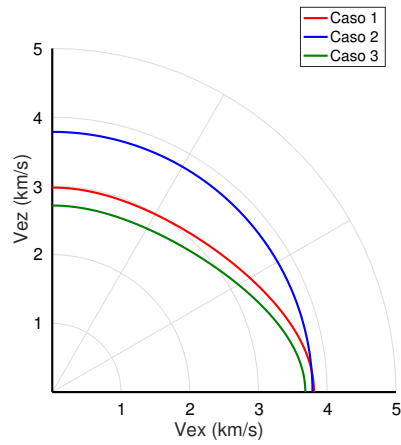
(a) Factor de disipación para las ondas qP a 50 Hz. (b) Factor de disipación para las ondas qP a 300 Hz.



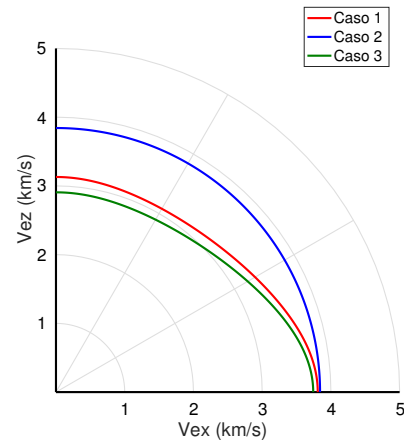
(c) Factor de disipación para las ondas qSV a 50 Hz. (d) Factor de disipación para las ondas qSV a 300 Hz.

Figura 6.7: Factores de disipación de las ondas qP y qSV, para los casos 1, 2 y 3 propuestos. Las frecuencias de análisis son 50 y 300 Hz.

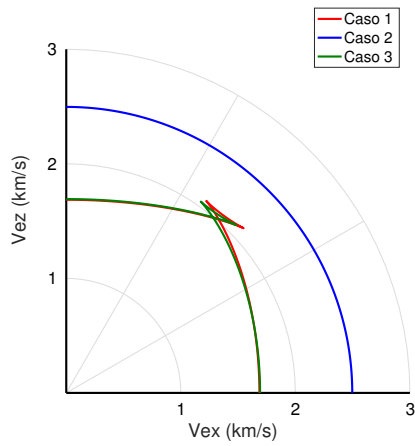




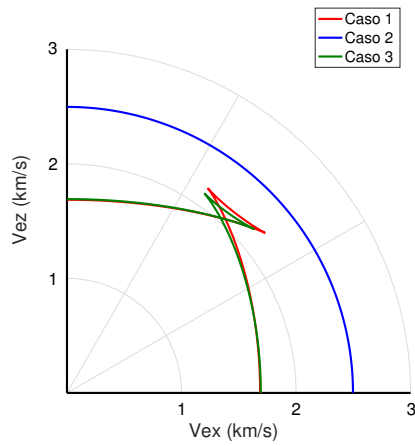
(a) Velocidad de energía para las ondas qP a 50 Hz.



(b) Velocidad de energía para las ondas qP a 300 Hz.

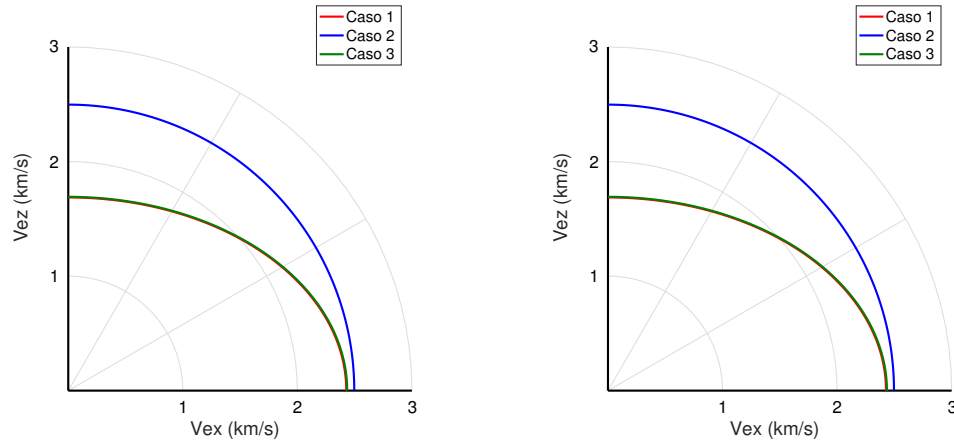


(c) Velocidad de energía para las ondas qSV a 50 Hz.



(d) Velocidad de energía para las ondas qSV a 300 Hz.

Figura 6.8: Velocidades de energía de las ondas qP y qSV, para los casos 1, 2 y 3 propuestos. Las frecuencias de análisis son 50 y 300 Hz.

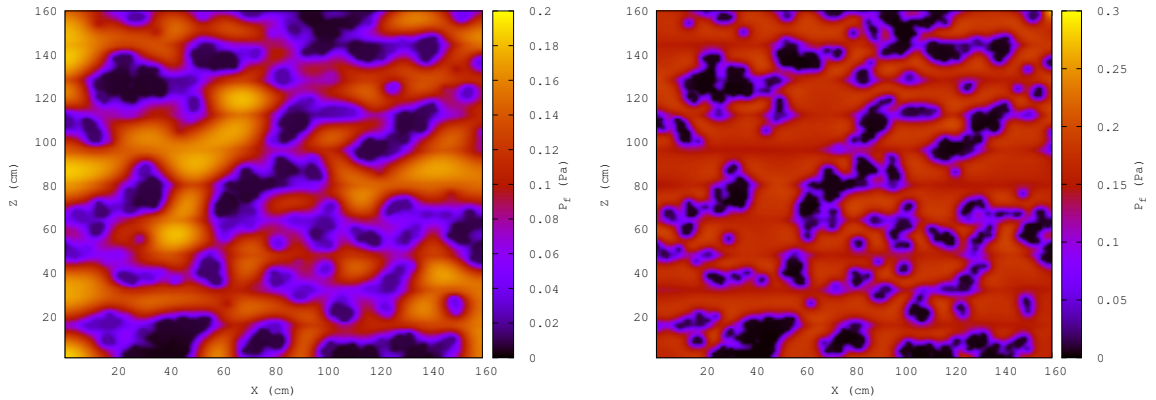


(a) Velocidad de energía para las ondas SH a 50 Hz. (b) Velocidad de energía para las ondas SH a 300 Hz.

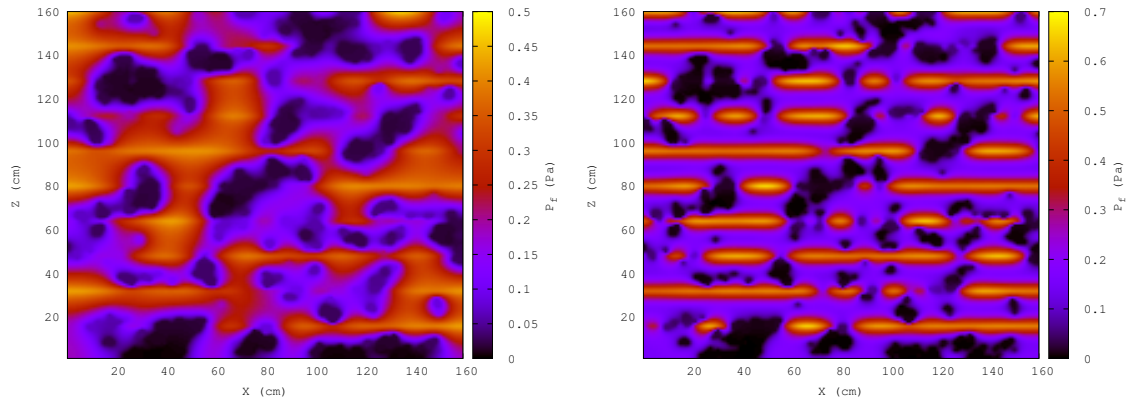
Figura 6.9: Velocidades de energía de las ondas SH, para los casos 1, 2 y 3 propuestos. Las frecuencias de análisis son 50 y 300 Hz.

las zonas saturadas con agua salada de formación, y las menores presiones están en los patches de  $\text{CO}_2$ , para ambas frecuencias de análisis. Se logra observar valores intermedios de presión en las fracturas y a 300 Hz se tiene un mejor detalle de los patches de  $\text{CO}_2$ .

Cuando los esfuerzos son normales a la dirección de fracturamiento, ver Figuras 6.10-(c) y 6.10-(d), los valores máximos de presión del fluido se obtienen en las fracturas y los valores más bajos en los patches de  $\text{CO}_2$ ; al igual que en el caso anterior, hay un mayor detalle de las fracturas y los patches cuando la frecuencia de análisis es 300 Hz.



(a) Presión del fluido para el test de compresión paralela a las fracturas ( $p_{11}$ ), 50 Hz.      (b) Presión del fluido para el test de compresión paralela a las fracturas ( $p_{11}$ ), 300 Hz.



(c) Presión del fluido para el test de compresión normal a las fracturas ( $p_{33}$ ), 50 Hz.      (d) Presión del fluido para el test de compresión normal a las fracturas ( $p_{33}$ ), 300 Hz.

Figura 6.10: Distribución de la presión de fluido para los test de compresión del Caso 3.

#### 6.5.4 APROXIMACIÓN PARA LOS FACTORES DE DISIPACIÓN DE LAS ONDAS qP

Se denota por  $Q_{p1}$ ,  $Q_{p2}$  y  $Q_{p3}$  los factores de calidad de las ondas qP asociados con los Casos 1, 2 y 3 respectivamente. En la Figura 6.11 se muestra la validez de la aproximación que comúnmente se usa para los factores de disipación de las ondas qP y que

$$\frac{1}{Q_{p3}} \approx \frac{1}{Q_{p1}} + \frac{1}{Q_{p2}}, \quad (6.71)$$

relaciona los diferentes mecanismos de atenuación para estos casos en función del ángulo de propagación. La frecuencia de análisis es de 300 Hz y se destaca que esta aproximación también fue probada por Gurevich et al. (1997) y Carcione et al. (2012b).

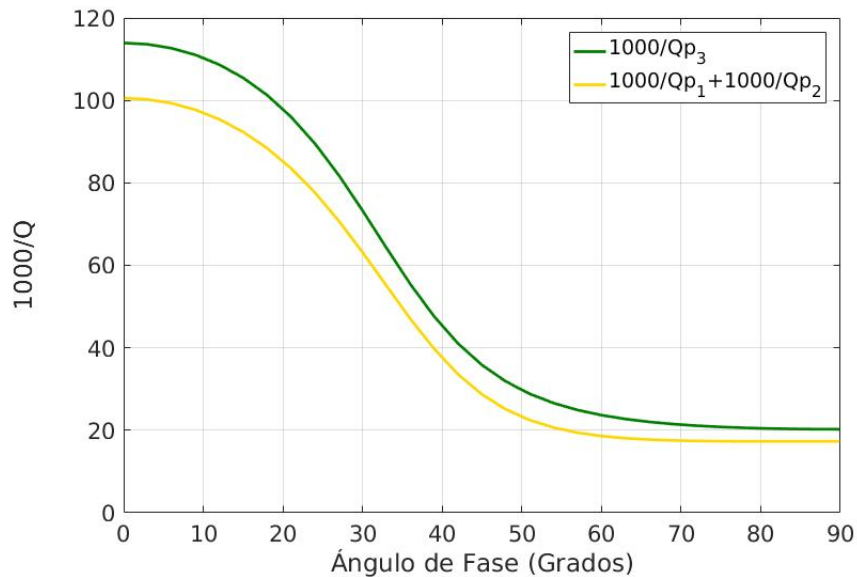


Figura 6.11: Test para validar la aproximación de la Ecuación (6.71), en los Casos 1, 2 y 3 a 300 Hz.

### 6.5.5 CAMBIO DEL PORCENTAJE DE SATURACIÓN.

Para el caso 3 se realiza un análisis de la variación en los factores de disipación y las velocidades al aumentar el porcentaje de saturación del  $\text{CO}_2$  de 10% a 50% (Ver Figura 6.12). Se observa una disminución en la disipación cuando el porcentaje de saturación de  $\text{CO}_2$  aumenta a 50%, tanto en las ondas qP como en las ondas qSV, las ondas SH no presentan disipación.

Las velocidades para los dos porcentajes de saturación poseen similar comportamiento anisótropo, con valores similares en las ondas qSv y SH. En el caso de las ondas qP hay una ligera disminución de la velocidad cuando aumentamos la saturación de  $\text{CO}_2$ .

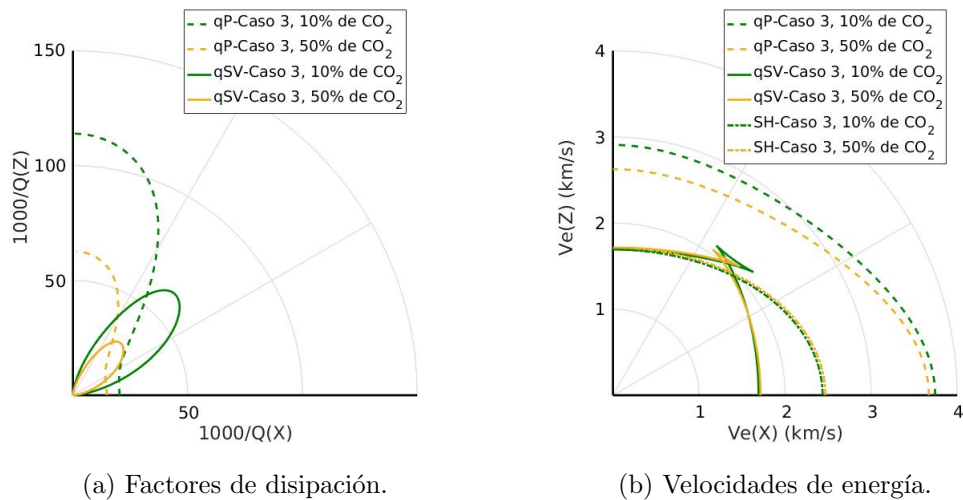


Figura 6.12: Factores de disipación y velocidades de energía para el cambio de saturación en el Caso 3. La frecuencia de análisis es 300 Hz.

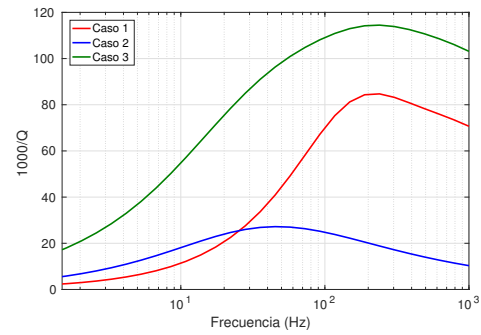
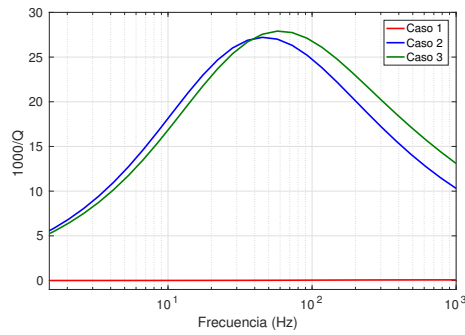
### 6.5.6 FACTOR DE DISIPACIÓN Y VELOCIDADES EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA.

Ahora, se analiza el comportamiento de las ondas en función de la frecuencia para un rango de 1 Hz a 1 kHz. Las Figuras 6.13-(a) y 6.13-(b) muestran los factores de disipación para los Casos 1, 2 y 3 de las ondas paralelas (ondas “11”) y normales (ondas “33”) a la orientación de fracturamiento respectivamente. Y en las Figuras 6.13-(c) y 6.13-(d) se grafican las velocidades.

La Figura 6.13-(a) indica que las ondas “11” en el Caso 1 no tienen pérdidas, mientras que los Casos 2 y 3 poseen atenuaciones similares, aunque los máximos de atenuación se encuentran en frecuencias diferentes. Para las ondas “33”, se muestra en la Figura 6.13-(b) que sufren mayores atenuaciones que las ondas “11”. El Caso 3 es el que presenta mayor atenuación, mientras que el Caso 1 tiene mayor atenuación que el Caso 2 para valores superiores a los 26 Hz; por debajo de esta frecuencia el Caso 2 presenta mayores valores.

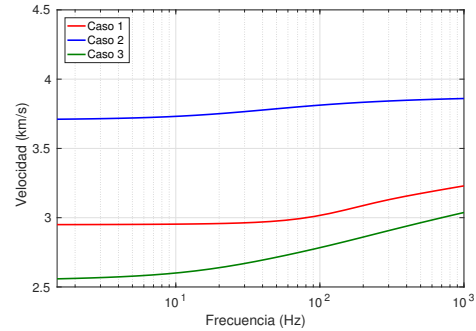
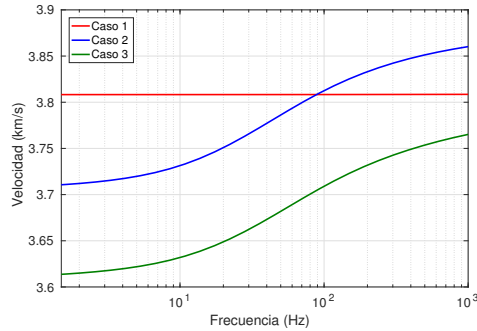
En cuanto a las velocidades, en la Figura 6.13-(c) se observa que para el Caso 1, las ondas “11” no presentan variación en su velocidad, a pesar que la frecuencia cambie. En el Caso 3, las velocidades son siempre menores que en el Caso 1, es decir, la presencia de los parches de CO<sub>2</sub> inducen una disminución en la velocidad para todos los rangos de frecuencia analizadas. Por otro lado se observa que el comportamiento de la velocidad en el Caso 2, es similar al Caso 3, aunque los valores de velocidad son mayores.

Por último, en la Figura 6.13-(d) se observa el comportamiento de la velocidad en las ondas “33” en función de la frecuencia. Los mayores valores de velocidad se presentan en la muestra sin fracturas (Caso 2), seguidos por el Caso 1 y finalmente, se tiene a la muestra del Caso 3. De esta figura se puede notar que para las ondas “33” la presencia de fracturas induce una reducción en las velocidades normales al plano de la fractura, ya sea con presencia de parches o sin ellos.



(a) Factor de disipación para el test de compresión paralela a las fracturas ( $p_{11}$ ).

(b) Factor de disipación para el test de compresión normal a las fracturas ( $p_{33}$ ).



(c) Velocidad de energía para el test de compresión paralelo a las fracturas ( $p_{11}$ ).

(d) Velocidad de energía para el test de compresión normal a las fracturas ( $p_{33}$ ).

Figura 6.13: Factor de disipación y velocidades de energía para los dos tests de compresión en el cálculo de los  $p_{IJ}$ , en función de la frecuencia.

### 6.5.7 CASO HOMOGÉNEO VS. CASO FRACTAL.

En esta última prueba se comparan los resultados obtenidos en una muestra fracturada que presenta heterogeneidades en su matriz rocosa (Caso 4) con los resultados obtenidos en el Caso 1. La Figura 6.14-(a) compara los factores de disipación de estos dos casos, para las ondas qP y qSV, y la Figura 6.14-(b) compara las velocidades de energía. Las pruebas fueron hechas para la frecuencia de 50 Hz.

Al igual que en el caso de patches de CO<sub>2</sub>, los fractales inducen un incremento de la atenuación en la dirección normal a las fracturas para las ondas qP, y para las ondas qSV en ángulos entre 30 y 60 grados. Debido a la presencia de heterogeneidades en la matriz hay disipación en las ondas SH para el caso fractal (este gráfico se omite).

En cuanto a las velocidades, se observa que el comportamiento anisótropo se mantiene con las heterogeneidades, al igual que en el Caso 1, sólo que los valores de velocidad se reducen un poco en el Caso 4. De esto se puede concluir que cuanto más heterogénea sea la muestra, mayor atenuación se tendrá y menores velocidades.

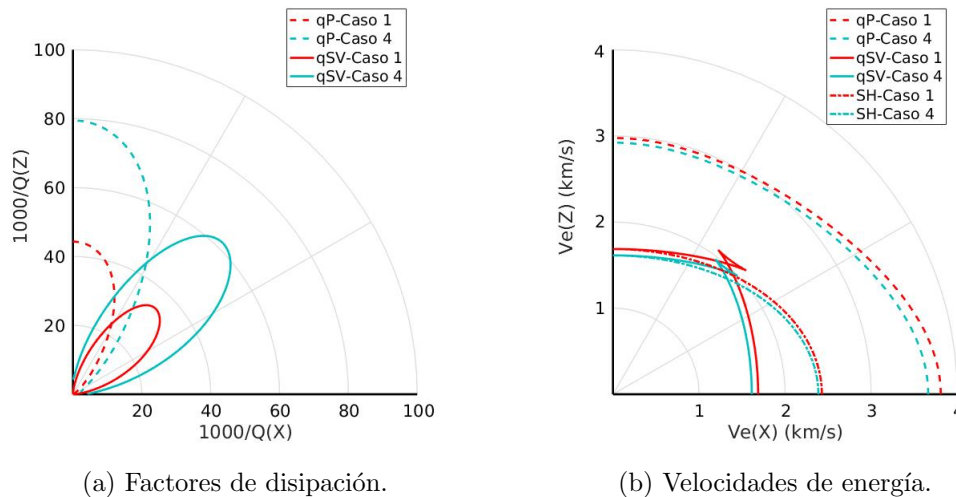


Figura 6.14: Factores de disipación y velocidades de energía para el caso del medio fractal comparado con el medio homogéneo. La frecuencia de análisis es 50 Hz.



## CAPÍTULO 7

# SISTEMAS DE FRACTURAS MODELADAS UTILIZANDO CONDICIONES DE BORDE EN MEDIOS DE BIOT Y ANISOTROPÍA INDUCIDA

---

Una fractura dentro de en un medio de Biot saturado por un fluido es una capa muy delgada y altamente permeable. Dado que el espesor de la capa es del orden de milímetros, mucho más pequeña que las longitudes de onda predominantes de las ondas que se propagan, cualquier discretización espacial por diferencias finitas (DF) o elementos finitos (EF) requeriría mallas muy finas para simular la propagación de ondas en el reservorio, haciendo el procedimiento inviable.

En este Capítulo, las fracturas son modeladas utilizando el conjunto de condiciones de borde propuestas por Nakagawa y Schoenberg (2007) para representar la interacción sólido-fluido dentro de una fractura y el efecto de su permeabilidad en la dispersión de ondas sísmicas. Estas condiciones de borde imponen continuidad de las componentes de las tensiones totales, discontinuidades de presión proporcionales a las velocidades promedio del fluido a través de la fractura, y discontinuidades en el desplazamiento proporcionales a las componentes de tensión y presiones de fluido

promedio a lo largo de la fractura.

Este modelo de interfaz nos permite representar el flujo de fluido inducido por las ondas, mediante el cual las ondas rápidas se convierten en ondas de Biot lentas (difusivas) cuando se propagan a través de fracturas (pérdidas mesoscópicas) (Carcione y Picotti, 2006; Carcione, 2015).

Un conjunto denso de fracturas horizontales en un medio poroelástico saturado con un fluido se comporta como un medio VTI cuando la distancia promedio entre fracturas es mucho mas pequeño que la longitud de onda predominante de las ondas que se propagan. Como ya se ha mencionado, esto conduce a las variaciones de la velocidad y la atenuación de las ondas sísmicas en función de la frecuencia y el ángulo.

Para obtener los coeficientes de rigidez del medio equivalente VTI, se aplican los mismos tests de compresibilidad y cizallamiento detallados en el Capítulo anterior. Cada experimento se asocia con un problema de valor de frontera, lo que permite determinar los  $p_{ij}$  complejos y dependientes de la frecuencia del medio VTI efectivo en la macroescala. Por lo tanto, este procedimiento puede considerarse como un método de escalamiento numérico para llevar el efecto de las fracturas desde la mesoescala a la macroescala.

## 7.1 CONDICIONES DE BORDE DE UNA FRACTURA EN UN MEDIO DE BIOT

Se considera un sólido poroelástico fracturado saturado por un fluido monofásico viscoso y compresible, y se asume que todo el agregado es isótropo. El superíndice  $(\theta)$ ,  $\theta = b, f$  indica las propiedades de la matriz sólida y del fluido saturante, asociados al background y a las fracturas respectivamente.

De acuerdo al Capítulo 2, las relaciones esfuerzo-deformación en un medio

poroelástico fracturado y saturado con un fluido, se pueden escribir así

$$\sigma_{st}(\mathbf{u}) = 2\mu^{(\theta)} \varepsilon_{st}(\mathbf{u}_s) + \delta_{st}(\lambda_U^{(\theta)} \nabla \cdot \mathbf{u}_s - \alpha^{(\theta)} M^{(\theta)} \xi), \quad (7.1)$$

$$p_f(\mathbf{u}) = -\alpha^{(\theta)} M^{(\theta)} \nabla \cdot \mathbf{u}_s + M^{(\theta)} \xi, \quad \theta = b, f, \quad (7.2)$$

donde  $\mathbf{u}_s$  y  $\mathbf{w}$  denotan los vectores desplazamiento promedio del sólido y relativo al fluido ( $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_s, \mathbf{w})$ ),  $\xi = -\nabla \cdot \mathbf{w}$  representa el cambio en el contenido de fluido,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_s)$  es el tensor de deformaciones del sólido,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  el tensor de esfuerzos del agregado sólido-fluido y  $p_f$  es la presión de fluido. Los coeficientes en (7.1)-(7.2) han sido definidos en el Capítulo 2.

Al igual que en el Capítulo 6, en el dominio espacio-frecuencia y en ausencia de fuerzas externas las ecuaciones de Biot en el rango difusivo se pueden escribir como

$$i\omega \mathcal{B}\mathbf{u} - \mathcal{L}(\mathbf{u}) = 0, \quad (7.3)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular,

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \nabla p_f(\mathbf{u})), \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0I & 0I \\ 0I & \frac{\eta^{(\theta)}}{\kappa^{(\theta)}} I \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Se considera un dominio rectangular  $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_3)$  con borde  $\Gamma$  en el plano  $(x, z)$ , donde  $x$  y  $z$  son las coordenadas horizontal y vertical, respectivamente.

Se asume que el dominio  $\Omega$  contiene un conjunto de  $J^{(f)}$  fracturas horizontales  $\Gamma^{(f,l)}, l = 1, \dots, J^{(f)}$ , cada una de longitud  $L_1$  y apertura  $h^{(f)}$ . Este conjunto de fracturas divide el dominio  $\Omega$  en una colección de rectángulos no superpuestos  $R^{(l)}, l = 1, \dots, J^{(f)} + 1$ , de modo tal que

$$\Omega = \cup_{l=1}^{J^{(f)}+1} R^{(l)}. \quad (7.5)$$

La Figura 7.1 ilustra un ejemplo de la muestra fracturada.

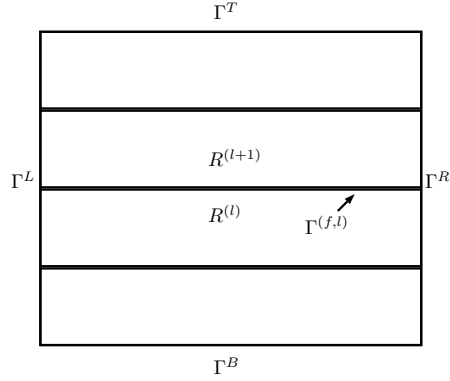


Figura 7.1: Ejemplo del dominio  $\Omega$  con borde  $\Gamma = \Gamma^L \cup \Gamma^R \cup \Gamma^B \cup \Gamma^T$ . Se muestra que  $\Omega$  está dividido en rectángulos  $R^{(l)}$  y una fractura horizontal  $\Gamma^{(f,l)}$  separa  $R^{(l)}$  y  $R^{(l+1)}$ .

Ahora considerando una de las fracturas  $\Gamma^{(f,l)}$  y los dos rectángulos  $R^{(l)}$  y  $R^{(l+1)}$  que tienen como lado en común  $\Gamma^{(f,l)}$ . Se definen  $\boldsymbol{\nu}_{l,l+1}$  y  $\boldsymbol{\chi}_{l,l+1}$  que son los vectores unitarios normal externa y tangente (en el sentido antihorario) en  $\Gamma^{(f,l)}$  desde  $R^{(l)}$  hacia  $R^{(l+1)}$ , de modo que  $\{\boldsymbol{\nu}_{l,l+1}, \boldsymbol{\chi}_{l,l+1}\}$  es un sistema ortonormal en  $\Gamma^{(f,l)}$ .

Se denota por  $[\mathbf{u}_s]$  y  $[\mathbf{w}]$  los saltos en los vectores desplazamiento del sólido y desplazamiento relativo al fluido respectivamente, en  $\Gamma^{(f,l)}$ , es decir

$$[\mathbf{u}_s] = (\mathbf{u}_s^{(l+1)} - \mathbf{u}_s^{(l)})|_{\Gamma^{(f,l)}}, \quad (7.6)$$

donde  $\mathbf{u}_s^{(l)} \equiv \mathbf{u}_s|_{R^{(l)}}$  denota la traza de  $\mathbf{u}_s$  como se ve desde  $R^{(l)}$ .

Las condiciones de borde (5.6)-(5.11), que representan la respuesta acústica aproximada de una fractura muy delgada, poco resistente y altamente permeable, correspondientes a la ecuación (52) de Nakagawa y Schoenberg (2007), se pueden escribir en  $\Gamma^{(f,l)}$  en la forma

$$[\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}] = \eta_{ND} \left( (1 - \alpha^{(f)}) \tilde{B} (1 - \Pi) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu}_{l,l+1} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1} - \alpha^{(f)} \frac{1}{2} \left( (-p_f^{(l+1)}) + (-p_f^{(l)}) \right) \Pi \right), \quad \Gamma^{(f,l)}, \quad (7.7)$$

$$[\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\chi}_{l,l+1}] = \eta_T \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu}_{l,l+1} \cdot \boldsymbol{\chi}_{l,l+1}, \quad \Gamma^{(f,l)}, \quad (7.8)$$

$$[\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}] = \alpha^{(f)} \eta_{ND} (-\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu}_{l,l+1} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}$$

$$+ \frac{1}{\tilde{B}} \frac{1}{2} \left( (-p_f^{(l+1)}) + (-p_f^{(l)}) \right) \Pi, \quad \Gamma^{(f,l)}, \quad (7.9)$$

$$(-p_f^{(l+1)}) - (-p_f^{(l)}) = \frac{i\omega\eta^{(f)}\Pi}{\hat{\kappa}^{(f)}} \frac{1}{2} (\mathbf{w}^{(l+1)} + \mathbf{w}^{(l)}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}, \quad \Gamma^{(f,l)}, \quad (7.10)$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}_{l,l+1} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}_{l+1,l} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l+1,l}, \quad \Gamma^{(f,l)}, \quad (7.11)$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}_{l,l+1} \cdot \boldsymbol{\chi}_{l,l+1} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}_{l+1,l} \cdot \boldsymbol{\chi}_{l+1,l}, \quad \Gamma^{(f,l)}. \quad (7.12)$$

Cabe notar que en la notación del Capítulo 5, el superíndice <sup>(2)</sup> que se refiere al medio 2, es equivalente al superíndice <sup>(f)</sup> que se usa aquí para la fractura. También que  $\Pi = \text{Re}(\Pi) - i \text{Im}(\Pi) \equiv \Pi_R - i \Pi_I$  con  $\Pi_R > 0, \Pi_I > 0$ .

En el límite de las altas permeabilidades ( $\kappa \rightarrow \infty$ ), las ecuaciones (5.13)-(5.18) se escriben en  $\Gamma^{(f,l)}$  como

$$[\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}] = \eta_{N_D} \left( \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}_{l,l+1} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1} - \alpha^{(f)}(-p_f^{(l+1)}) \right), \quad \Gamma^{(f,l)}, \quad (7.13)$$

$$[\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\chi}_{l,l+1}] = \eta_T \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}_{l,l+1} \cdot \boldsymbol{\chi}_{l,l+1}, \quad \Gamma^{(f,l)}, \quad (7.14)$$

$$[\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}] = \alpha^{(f)}\eta_{N_D} \left( -\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}_{l,l+1} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1} + \frac{1}{\tilde{B}}(-p_f^{(l+1)}) \right), \quad \Gamma^{(f,l)}, \quad (7.15)$$

$$(-p_f^{(l+1)}) = (-p_f^{(l)}), \quad \Gamma^{(f,l)}, \quad (7.16)$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}_{l,l+1} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}_{l+1,l} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l+1,l}, \quad \Gamma^{(f,l)}, \quad (7.17)$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}_{l,l+1} \cdot \boldsymbol{\chi}_{l,l+1} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}_{l+1,l} \cdot \boldsymbol{\chi}_{l+1,l}. \quad (7.18)$$

El análisis se llevará a cabo para las condiciones de borde (7.7)-(7.12), considerando las condiciones (7.13)-(7.18) como un caso particular.

Haciendo

$$\begin{aligned} a_{11} &= \eta_{N_D} \left( 1 - \alpha^{(f)}\tilde{B}(1 - \Pi) \right), & a_{12} &= \alpha^{(f)}\eta_{N_D}\Pi, \\ a_{22} &= \frac{\alpha^{(f)}\eta_{N_D}\Pi}{\tilde{B}}, & \Theta &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \end{aligned} \quad (7.19)$$

entonces desde (7.7) y (7.9) se obtiene

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nu}_{l,l+1} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1} = \frac{a_{22}}{\Theta} [\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}] + \frac{a_{12}}{\Theta} [\mathbf{u}_f \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}], \quad \Gamma^{(f,l)} \quad (7.20)$$

$$(-p_f^{(l+1)}) + (-p_f^{(l)}) = 2\frac{a_{12}}{\Theta} [\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}] + 2\frac{a_{11}}{\Theta} [\mathbf{u}_f \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}], \quad \Gamma^{(f,l)}. \quad (7.21)$$

Sumando (7.10) y (7.21),

$$\begin{aligned} (-p_f^{(l+1)}) &= \frac{a_{12}}{\Theta} [\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}] + \frac{a_{11}}{\Theta} [\mathbf{u}_f \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}] \\ &\quad + \frac{i\omega\eta^{(f)}\Pi}{\widehat{\kappa}^{(f)}} \frac{1}{4} \left( \mathbf{u}_f^{(l+1)} + \mathbf{u}_f^{(l)} \right) \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}, \quad \Gamma^{(f,l)}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Usando (7.22) en (7.21) se tiene

$$\begin{aligned} (-p_f^{(l)}) &= \frac{a_{12}}{\Theta} [\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}] + \frac{a_{11}}{\Theta} [\mathbf{u}_f \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}] \\ &\quad - \frac{i\omega\eta^{(f)}\Pi}{\widehat{\kappa}^{(f)}} \frac{1}{4} \left( \mathbf{u}_f^{(l+1)} + \mathbf{u}_f^{(l)} \right) \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}, \quad \Gamma^{(f,l)}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

En el análisis que sigue se emplea la forma más conveniente de las condiciones de contorno dadas por las ecuaciones (7.8), (7.11), (7.12), (7.20) (7.22) y (7.23).

Denotando por  $\tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}_s)$  y  $\epsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}_s)$  los tensores de esfuerzos y deformaciones del medio equivalente VTI, donde  $\tilde{\mathbf{u}}_s$  denota el desplazamiento del sólido en la macroescala. Las correspondientes relaciones esfuerzo-deformación, en el dominio espacio-frecuencia se muestran en las ecuaciones (6.3)-(6.8). Como se asumió que es un sistema cerrado, la variación de fluido será  $\zeta = -\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ .

Los coeficientes complejos  $p_{IJ}$  son dependientes de la frecuencia y fueron determinados a través de experimentos armónicos, los cuales se mencionaron en el Capítulo 6, y las velocidades y los factores de calidad del medio equivalente VTI, se determinan mediante las expresiones del Apéndice B.

## 7.2 FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PROBLEMA

Se introducen los siguientes subespacios cerrados de  $[L^2(\Omega)]^2$ :

$$\mathcal{V}_{11}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v}|_{R^{(l)}} \in [H^1(R^{(l)})]^2, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma^B \cup \Gamma^T \cup \Gamma^B\}, \quad (7.24)$$

$$\mathcal{V}_{33}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v}|_{R^{(l)}} \in [H^1(R^{(l)})]^2, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma^L \cup \Gamma^R \cup \Gamma^B\}, \quad (7.25)$$

$$\mathcal{V}_{13}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v}|_{R^{(l)}} \in [H^1(R^{(l)})]^2, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma^L \cup \Gamma^B\}, \quad (7.26)$$

$$\mathcal{V}_{55}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : v|_{R^{(l)}} \in [H^1(R^{(l)})]^2, \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Gamma^B\}, \quad (7.27)$$

$$\mathcal{V}_{66}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v}|_{R^{(l)}} \in [H^1(R^{(l)})]^2, \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Gamma^L\}. \quad (7.28)$$

Se definen además los espacios

$$H_0(\text{div}; \cup_l R^{(l)}) = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v}|_{R^{(l)}} \in H(\text{div}, R^{(l)}), \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma\}, \quad (7.29)$$

$$H_0^1(\text{div}; \cup_l R^{(l)}) =$$

$$\{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v}|_{R^{(l)}} \in [H^1(R^{(l)})]^2 : \nabla \cdot \mathbf{v} \in H^1(R^{(l)}), \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma\}. \quad (7.30)$$

Asimismo, para  $(I, J) = (1, 1), (3, 3), (1, 3), (5, 5), (6, 6)$  se define

$$\mathcal{Z}_{IJ}(\Omega) = \mathcal{V}_{IJ}(\Omega) \times H_0(\text{div}; \cup_l R^{(l)}). \quad (7.31)$$

Para obtener la formulación variacional asociada con  $p_{33}$ , se multiplica la ecuación (7.3) por  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) \in \mathcal{Z}_{33}(\Omega)$ , usando integración por partes para cada rectángulo  $R^{(l)}$  y aplicando las condiciones de borde (7.8), (7.11), (7.12), (7.20), (7.22) y (7.23) y las condiciones de borde adicionales (6.9)-(6.12) se obtiene la forma débil del sistema: encontrar  $\mathbf{u}^{(33)} = (\mathbf{u}_s^{(33)}, \mathbf{u}_f^{(33)}) \in \mathcal{Z}_{33}(\Omega)$  tal que:

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{u}^{(33)}, \mathbf{v}) &\equiv i\omega \left( \frac{\eta^{(b)}}{\kappa^{(b)}} \mathbf{w}^{(33)}, \mathbf{v}_f \right) \\ &+ \sum_l \left( \boldsymbol{\tau}_{st}(\mathbf{u}^{(33)}), \boldsymbol{\varepsilon}_{st}(\mathbf{v}_s) \right)_{R^{(l)}} - \left( p_f(\mathbf{u}^{(33)}), \nabla \cdot \mathbf{v}_f \right)_{R^{(l)}} \\ &+ \sum_l \left\langle \mathbf{F} \left( [\mathbf{u}_s^{(33)} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}], [\mathbf{u}_s^{(33)} \cdot \boldsymbol{\chi}_{l,l+1}], [\mathbf{w}^{(33)} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}] \right)^t, \right. \\ &\quad \left. ([\mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}], [\mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\chi}_{l,l+1}], [\mathbf{v}_f \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}])^t \right\rangle_{\Gamma^{(f,l)}} \\ &+ \sum_l \left\langle \frac{i\omega\eta^{(f)}\Pi}{\widehat{\kappa}^{(f)}} \frac{1}{4} \left( \mathbf{w}^{(33,l+1)} + \mathbf{w}^{(33,l)} \right) \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}, \left( \mathbf{v}_f^{(l+1)} + \mathbf{v}_f^{(l)} \right) \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1} \right\rangle_{\Gamma^{(f,l)}} \\ &= - \langle \Delta P, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^T}, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) \in \mathcal{Z}_{33}(\Omega). \end{aligned} \quad (7.32)$$

En (7.32) el superíndice  $^t$  indica la transpuesta y la matriz compleja  $\mathbf{F}$  de  $3 \times 3$

está dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_R + i\mathbf{F}_I = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & f_{12} \\ 0 & \frac{1}{\eta_T} & 0 \\ f_{12} & 0 & f_{22} \end{pmatrix} \quad (7.33)$$

donde (ver (7.19))

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{a_{22}}{\Theta} = f_{11,R} + if_{11,I}, & f_{12} &= \frac{a_{12}}{\Theta} = f_{22,R} + if_{22,I}, \\ f_{22} &= \frac{a_{11}}{\Theta} = f_{22,R} + if_{22,I}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Se asumirá que  $\mathbf{F}_R$  es definida positiva, que  $f_{11,R} > 0$  y  $\mathbf{F}_I$  es no negativa. Estas consideraciones son válidas para datos con significado físico.

Notar que en (7.32), se puede escribir

$$\begin{aligned} &\sum_l (\tau_{st}(\mathbf{u}^{(33)}), \varepsilon_{st}(\mathbf{v}_s))_{R^{(l)}} - (p_f(\mathbf{u}^{(33)}), \nabla \cdot \mathbf{v}_f)_{R^{(l)}} \\ &= \sum_{l=1}^{J(f)} (\mathbf{S}^{(b)} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{(33)}), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}))_{R^{(l)}}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

En (7.35), la matriz  $\mathbf{S}^{(b)}$  y el vector columna  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{(33)})$  están definidos por

$$\mathbf{S}^{(b)} = \begin{pmatrix} \lambda_u^{(b)} + 2\mu^{(b)} & \lambda_u^{(b)} & \alpha^{(b)}M^{(b)} & 0 \\ \lambda_u^{(b)} & \lambda_u^{(b)} + 2\mu^{(b)} & \alpha^{(b)}M^{(b)} & 0 \\ \alpha^{(b)}M^{(b)} & \alpha^{(b)}M^{(b)} & M^{(b)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\mu^{(b)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{(33)}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(\mathbf{u}_s^{(33)}) \\ \varepsilon_{33}(\mathbf{u}_s^{(33)}) \\ \nabla \cdot \mathbf{w}^{(33)} \\ \varepsilon_{13}(\mathbf{u}_s^{(33)}) \end{pmatrix}.$$

Entonces la forma variacional (7.32) se escribe de una forma equivalente: encontrar  $\mathbf{u}^{(33)} = (\mathbf{u}_s^{(33)}, \mathbf{u}_f^{(33)}) \in \mathcal{Z}_{33}(\Omega)$  tal que:

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{u}^{(33)}, \mathbf{v}) &\equiv i\omega \left( \frac{\eta^{(b)}}{\kappa^{(b)}} \mathbf{w}^{(33)}, \mathbf{v}_f \right) + \sum_l (\mathbf{S}^{(b)} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}^{(33)}), \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}))_{R^{(l)}} \\ &+ \sum_l \left\langle \mathbf{F} \left( [\mathbf{u}_s^{(33)} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}], [\mathbf{u}_s^{(33)} \cdot \boldsymbol{\chi}_{l,l+1}], [\mathbf{w}^{(33)} \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}] \right)^T, \right. \\ &\quad \left. ([\mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}], [\mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\chi}_{l,l+1}], [\mathbf{v}_f \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}])^T \right\rangle_{\Gamma^{(f,l)}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \sum_l \left\langle \frac{i\omega\eta^{(f)}\Pi}{\widehat{\kappa}^{(f)}} \frac{1}{4} \left( \mathbf{w}^{(33,l+1)} + \mathbf{w}^{(33,l)} \right) \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1}, \left( \mathbf{v}_f^{(l+1)} + \mathbf{v}_f^{(l)} \right) \cdot \boldsymbol{\nu}_{l,l+1} \right\rangle_{\Gamma^{(f,l)}} \\
 & = - \langle \Delta P, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^T}, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) \in \mathcal{Z}_{33}(\Omega). \tag{7.36}
 \end{aligned}$$

De una manera similar se puede obtener una formulación débil para los problemas asociados con los otros  $p_{IJ}$  aplicando las condiciones de borde correspondientes y las condiciones de borde de la fractura (7.8), (7.11), (7.12), (7.20), (7.22) y (7.23):

- Para  $p_{11}$ : encontrar  $\mathbf{u}^{(11)} = (\mathbf{u}_s^{(11)}, \mathbf{w}^{(11)}) \in \mathcal{Z}_{11}(\Omega)$  tal que:

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(11)}, \mathbf{v}) = - \langle \Delta P, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^R}, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) \in \mathcal{Z}_{11}(\Omega). \tag{7.37}$$

- Para  $p_{13}$ : encontrar  $\mathbf{u}^{(13)} = (\mathbf{u}_s^{(13)}, \mathbf{w}^{(13)}) \in \mathcal{Z}_{13}(\Omega)$  tal que:

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(13)}, \mathbf{v}) = - \langle \Delta P, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^R \cup \Gamma^T}, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) \in \mathcal{Z}_{13}(\Omega). \tag{7.38}$$

- Para  $p_{55}$ : encontrar  $\mathbf{u}^{(55)} = (\mathbf{u}_s^{(55)}, \mathbf{w}^{(55)}) \in \mathcal{Z}_{55}(\Omega)$  tal que:

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(55)}, \mathbf{v}) = - \langle \boldsymbol{\varrho}_1, \mathbf{v}_s \rangle_{\Gamma^L \cup \Gamma^R \cup \Gamma^T}, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) \in \mathcal{Z}_{55}(\Omega). \tag{7.39}$$

- Para  $p_{66}$ : encontrar  $\mathbf{u}^{(66)} = (\mathbf{u}_s^{(66)}, \mathbf{w}^{(66)}) \in \mathcal{Z}_{66}(\Omega)$  tal que:

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(66)}, \mathbf{v}) = - \langle \boldsymbol{\varrho}_2, \mathbf{v}_s \rangle_{\Gamma^B \cup \Gamma^T \cup \Gamma^R}, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) \in \mathcal{Z}_{66}(\Omega). \tag{7.40}$$

El análisis de existencia y unicidad de la solución de los problemas (7.36)-(7.40) fue realizado en Santos et al. (2017).

### 7.3 ALGORITMO DE ELEMENTOS FINITOS

Sea  $\mathcal{T}^h(\Omega)$  una partición no solapada del dominio  $\Omega$  en rectángulos  $\Omega_j$  de diámetro acotado por  $h$  tales que  $\overline{\Omega} = \cup_{j=1}^J \overline{\Omega}_j$ . Se asume que los  $\Omega_j$  en sus lados horizontales coinciden con una fractura o no coinciden con ninguna.

Sea

$$\Omega^f = \cup_{j=1}^{I_f} \Omega_j,$$

donde  $I_f$  es el número de  $\Omega_j$  que tiene un lado superior o inferior contenido en alguna fractura  $\Gamma^{(f,l)}$  para algún  $l$  en el rango  $1 \leq l \leq J^{(f)}$ .

Entonces

$$\Omega^{Nf} = \Omega \setminus \Omega^f = \cup_{j=1}^{I_{Nf}} \Omega_j,$$

donde  $I_{Nf}$  es el número de todos los  $\Omega_j$  tales que  $\partial\Omega_j \cap \Gamma^{f,l} = \emptyset \quad \forall l$ .

Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_j^h &= P_{1,1}(\Omega_j) \times P_{1,1}(\Omega_j), \\ \mathcal{RTN}_j^h &= P_{1,0}(\Omega_j) \times P_{0,1}(\Omega_j), \end{aligned} \tag{7.41}$$

donde  $P_{s,t}(\Omega_j)$  denota los polinomios de grado  $s$  en  $x$  y de grado  $t$  en  $z$  sobre  $\Omega_j$ . Se denota por  $\Gamma_{jk} = \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k$  al lado común de dos rectángulos adyacentes  $\Omega_j$  y  $\Omega_k$ , y  $\boldsymbol{\nu}_{jk}$  al vector unitario normal desde  $\Omega_j$  hasta  $\Omega_k$ . También, sea  $\Gamma_{jk}^{(f,l)} = \Gamma_{jk} \cap \Gamma^{(f,l)}$ .

Para aproximar el desplazamiento del sólido, se usan los siguientes espacios de elementos finitos, dependiendo del coeficiente de rigidez  $p_{I,J}$  que se esté calculando

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{33}^{h,Nf}(\Omega^{Nf}) &= \{\mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_j} \in \mathcal{N}_j^h, \mathbf{v}_s \text{ es continuo a través de } \Gamma_{jk} \text{ para todo} \\ &\quad \Omega_j \subset \Omega^{Nf}, \Omega_k \subset \Omega^{Nf}, \quad \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma \setminus \Gamma^T\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{33}^{h,f}(\Omega^f) &= \{\mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_j} \in \mathcal{N}_j^h, \forall \Omega_j \subset \Omega^f, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu}_{jk} \text{ es continuo a través de } \Gamma_{jk} \\ &\quad \text{si } \Omega_k \subset \Omega^{Nf}, \quad \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma \setminus \Gamma^T\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{11}^{h,Nf}(\Omega^{Nf}) &= \{\mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_j} \in \mathcal{N}_j^h, \mathbf{v}_s \text{ es continuo a través de } \Gamma_{jk} \text{ para todo} \\ &\quad \Omega_j \subset \Omega^{Nf}, \Omega_k \subset \Omega^{Nf}, \quad \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma \setminus \Gamma^R\}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{V}_{11}^{h,f}(\Omega^f) = \{\mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_j} \in \mathcal{N}_j^h, \forall \Omega_j \subset \Omega^f, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu}_{jk} \text{ es continuo a través de } \Gamma_{jk}$$

si  $\Omega_k \subset \Omega^{Nf}$ ,  $\mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$  en  $\Gamma \setminus \Gamma^R$ .

$$\mathcal{V}_{13}^{h,Nf}(\Omega^{Nf}) = \{\mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_j} \in \mathcal{N}_j^h, \mathbf{v}_s \text{ es continuo a través de } \Gamma_{jk} \text{ para todo } \Omega_j \subset \Omega^{Nf}, \Omega_k \subset \Omega^{Nf}, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma^L \cup \Gamma^B\}.$$

$$\mathcal{V}_{13}^{h,f}(\Omega^f) = \{\mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_j} \in \mathcal{N}_j^h, \forall \Omega_j \subset \Omega^f, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu}_{jk} \text{ es continuo a través de } \Gamma_{jk} \text{ si } \Omega_k \subset \Omega^{Nf}, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma^L \cup \Gamma^B\}.$$

$$\mathcal{V}_{55}^{h,Nf}(\Omega^{Nf}) = \{\mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_j} \in \mathcal{N}_j^h, \mathbf{v}_s \text{ es continuo a través de } \Gamma_{jk} \text{ para todo } \Omega_j \subset \Omega^{Nf}, \Omega_k \subset \Omega^{Nf}, \mathbf{v}_s = 0 \text{ en } \Gamma^B\}.$$

$$\mathcal{V}_{55}^{h,f}(\Omega^f) = \{\mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_j} \in \mathcal{N}_j^h, \forall \Omega_j \subset \Omega^f, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu}_{jk} \text{ es continuo a través de } \Gamma_{jk} \text{ si } \Omega_k \subset \Omega^{Nf}, \mathbf{v}_s = 0 \text{ en } \Gamma^B\}.$$

$$\mathcal{V}_{66}^{h,Nf}(\Omega^{Nf}) = \{\mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_{2,j}} \in \mathcal{N}_j^h, \mathbf{v}_s \text{ es continuo a través de } \Gamma_{jk} \text{ para todo } \Omega_j \subset \Omega^{Nf}, \Omega_k \subset \Omega^{Nf}, \mathbf{v}_s = 0 \text{ en } \Gamma^L\}.$$

$$\mathcal{V}_{66}^{h,f}(\Omega^f) = \{\mathbf{v}_s : \mathbf{v}_s|_{\Omega_j} \in \mathcal{N}_j^h, \forall \Omega_j \subset \Omega^f, \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\nu}_{jk} \text{ es continuo a través de } \Gamma_{jk} \text{ si } \Omega_k \subset \Omega^{Nf}, \mathbf{v}_s = 0 \text{ en } \Gamma^L\}.$$

Los nodos están ubicados en los vértices del elemento rectangular (ver Figura 6.3) y las bases usadas se enuncian en las ecuaciones (6.53)-(6.56).

Ahora, para el desplazamiento relativo del fluido, se definen los siguientes espacios de elementos finitos

$$\mathcal{W}^{h,Nf}(\Omega^{Nf}) = \{\mathbf{v}_f : \mathbf{v}_f|_{\Omega_j} \in \mathcal{RTN}_j^h, \mathbf{v}_f \cdot \boldsymbol{\nu}_{jk} \text{ es continuo a través de } \Gamma_{jk} \text{ para todo } \Omega_j \subset \Omega^{Nf}, \Omega_k \subset \Omega^{Nf}, \mathbf{v}_f \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma\},$$

$$\mathcal{W}^{h,f}(\Omega^f) = \{\mathbf{v}_f : \mathbf{v}_f|_{\Omega_j} \in \mathcal{RTN}_{j}^h, \forall \Omega_j \subset \Omega^f, \mathbf{v}_f \cdot \boldsymbol{\nu}_{jk} \text{ es continuo a través de } \Gamma_{jk} \\ \text{si } \Omega_k \subset \Omega^{Nf}, \quad \mathbf{v}_f \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ en } \Gamma\}.$$

Para el desplazamiento horizontal se tienen las funciones base  $\psi^L$  y  $\psi^R$  (ecuaciones (6.58)-(6.59)) y para el desplazamiento vertical  $\psi^B$  y  $\psi^T$  (ecuaciones (6.60)-(6.61)). En la Figura 6.4 se observa ubicación de los nodos.

Entonces, para determinar los  $p_{IJ}$ , donde  $(I, J) = (1,1), (3,3), (1,3), (5,5), (6,6)$  se empleará el espacio de elementos finitos

$$\mathcal{Z}_{IJ}^h(\Omega) = \left( \mathcal{V}_{IJ}^{h,Nf}(\Omega^{Nf}) \cup \mathcal{V}_{IJ}^{h,f}(\Omega^f) \right) \times \left( \mathcal{W}^{h,Nf}(\Omega^{Nf}) \cup \mathcal{W}^{h,f}(\Omega^f) \right). \quad (7.42)$$

Luego, para  $(I, J) = (1, 1), (3, 3), (1, 3), (5, 5), (6, 6)$  sean

$$\boldsymbol{\Pi}_{IJ}^h : [H^{3/2}(\cup_l R^{(l)})]^2 \rightarrow \mathcal{V}_{IJ}^{h,Nf}(\Omega^{Nf}) \cup \mathcal{V}_{IJ}^{h,f}(\Omega^f)$$

los operadores de interpolación bilineal localmente definidos en cada rectángulo  $R^{(l)}$  y asociados con los espacios  $\mathcal{V}_{IJ}^h$ .

También, sea

$$\mathbf{Q}^h : H_0^1(\text{div}; \cup R^{(l)}) \rightarrow \mathcal{W}^{h,Nf}(\Omega^{Nf}) \cup \mathcal{W}^{h,f}(\Omega^f)$$

la proyección definida por

$$\langle (\mathbf{Q}^h \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}) \cdot \boldsymbol{\nu}, 1 \rangle_B = 0, \quad B = \Gamma_{jk} \text{ o } B = \Gamma_j.$$

Las propiedades de la aproximación de  $\boldsymbol{\Pi}_{IJ}^h$  y  $\mathbf{Q}^h$  son (Raviart y Thomas, 1977; Ciarlet, 1978; Nedelec, 1980)

$$\|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\Pi}_{IJ}^h \boldsymbol{\varphi}\|_0 + h \sum_{l=1}^{J^{(f)}+1} \|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\Pi}_{IJ}^h \boldsymbol{\varphi}\|_{1,R^{(l)}} \leq Ch^s \|\boldsymbol{\varphi}\|_s, \quad 1 \leq s \leq 2 \quad (7.43)$$

$$\|\boldsymbol{\psi} - \mathbf{Q}^h \boldsymbol{\psi}\|_0 \leq Ch \sum_{l=1}^{J^{(f)}+1} \|\boldsymbol{\psi}\|_{1,R^{(l)}}, \quad (7.44)$$

$$\|\nabla \cdot (\boldsymbol{\psi} - \mathbf{Q}^h \boldsymbol{\psi})\|_0 \leq Ch \sum_{l=1}^{J^{(f)}+1} (\|\boldsymbol{\psi}\|_{1,R^{(l)}} + \|\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}\|_{1,R^{(l)}}). \quad (7.45)$$

Ahora, vamos a formular el procedimiento de los elementos finitos para el cálculo de los coeficientes complejos de la matriz de rigidez  $p_{IJ}$ :

- $p_{33}(\omega)$ : encontrar  $\mathbf{u}^{(h,33)} \in \mathcal{Z}_{33}^h(\Omega)$  tal que

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(h,33)}, \mathbf{v}) = - \langle \Delta P, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^T}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{Z}_{33}^h(\Omega). \quad (7.46)$$

- $p_{11}(\omega)$ : encontrar  $\mathbf{u}^{(h,11)} \in \mathcal{Z}_{11}^h(\Omega)$  tal que

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(h,11)}, \mathbf{v}) = - \langle \Delta P, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^R}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{Z}_{11}^h(\Omega). \quad (7.47)$$

- $p_{13}(\omega)$ : encontrar  $\mathbf{u}^{(h,13)} \in \mathcal{Z}_{13}^h(\Omega)$  tal que

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(h,13)}, \mathbf{v}) = - \langle \Delta P, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \rangle_{\Gamma^R \cup \Gamma^T}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{Z}_{13}^h(\Omega). \quad (7.48)$$

- $p_{55}(\omega)$ : encontrar  $\mathbf{u}^{(h,55)} \in \mathcal{Z}_{55}^h(\Omega)$  tal que

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(h,55)}, \mathbf{v}) = - \langle \boldsymbol{\varrho}_1, \mathbf{v}_s \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma^B}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{Z}_{55}^h(\Omega). \quad (7.49)$$

- $p_{66}(\omega)$ : encontrar  $\mathbf{u}^{(h,66)} \in \mathcal{Z}_{66}^h(\Omega_2)$  tal que

$$\Lambda(\mathbf{u}^{(h,66)}, \mathbf{v}) = - \langle \boldsymbol{\varrho}_2, \mathbf{v}_s \rangle_{\Gamma \setminus \Gamma^L}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{Z}_{66}^h(\Omega). \quad (7.50)$$

La unicidad para los procedimientos de elementos finitos (7.46)-(7.50) puede ser mostrado con el mismo argumento mostrado para el caso continuo. La existencia se sigue desde la dimensionalidad finita.

Para una estimación a priori del error de los procedimientos (7.46)-(7.50) ver Santos et al. (2017).

## 7.4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

El procedimiento con elementos finitos fue el usado para determinar los coeficientes complejos  $p_{IJ}(\omega)$ ; las velocidades de energía y los coeficientes de disipación fueron calculados como se indica en el Apéndice B. Se hicieron cinco casos variando diferentes propiedades del background y las fracturas, además de las propiedades de los fluidos saturantes.

- Teórico Vs. Numérico. Background y fracturas homogéneas.
- Background y fracturas con patches de agua salada de formación y gas.
- Parámetros de los medios fractales.
- Variación del espesor de la fractura.
- Variación de la presión poral.

### 7.4.1 BACKGROUND Y FRACTURAS HOMOGÉNEAS

En este experimento se considera una muestra con dimensiones  $2.0 \times 2.009$  m, con 9 fracturas horizontales de apertura 0.001 m, es decir, el background tiene dimensiones  $2.0 \times 2.0$  m, cada 0.2 m hay una fractura y es discretizado con un mallado de  $50 \times 50$  elementos. En la Tabla 7.1 se muestran los parámetros para el background y las fracturas. Los dos medios están saturados por agua con densidad  $\rho_f = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, viscosidad  $\eta = 0.001$  Pa·s y módulo de volumen  $K_f = 2.25$  GPa. La frecuencia de análisis es de 30 Hz.

Con este primer experimento se valida la solución del algoritmo con elementos finitos implementado (ver Figuras 7.2-7.3), donde se compara la solución con el modelo presentado en Krzikalla y Müller (2011) o Carcione et al. (2013), el cual se tomó como datos teóricos; también se grafica la solución obtenida con el modelo

Propiedades	Background	Fractura
Porosidad, $\phi$	0.15	0.5
Densidad granos sólidos, $\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> )	2700	2700
Módulo de volumen de los granos sólidos, $K_s$ (GPa)	36	36
Módulo de volumen de la matriz seca, $K_m$ (GPa)	9	0.0055
Módulo de corte de la matriz seca, $\mu_m$ (GPa)	7	0.0033
Permeabilidad, $\kappa_0$ (m <sup>2</sup> )	$9.869 \cdot 10^{-14}$	$9.869 \cdot 10^{-12}$
Tortuosidad, $S$	3	1

Tabla 7.1: Propiedades para el background y para las fracturas.

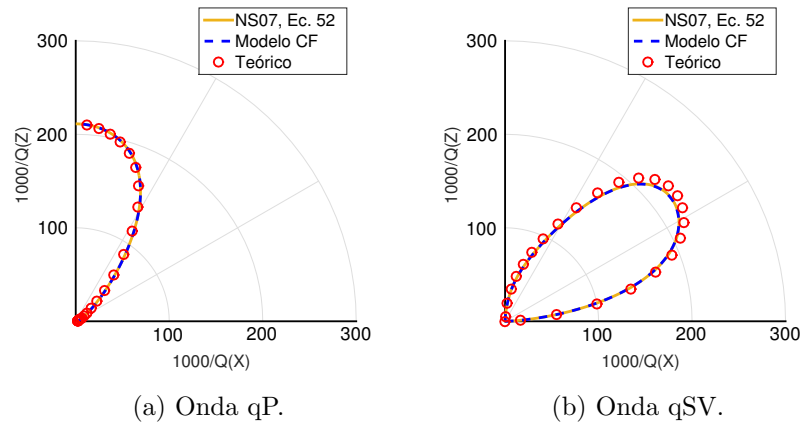


Figura 7.2: Representación polar del factor de disipación ( $1000/Q$ ) para las ondas qP y qSV en función del ángulo de propagación. La frecuencia de la onda es 30 Hz. La respuesta teórica corresponde al modelo presentado en Krzikalla y Müller (2011) o Carcione et al. (2013), el modelo CF es el modelo de la fractura como capa fina y NS07 Ec. 52 corresponde al modelo de condición de borde presentado en la ecuación (52) de Nakagawa y Schoenberg (2007).

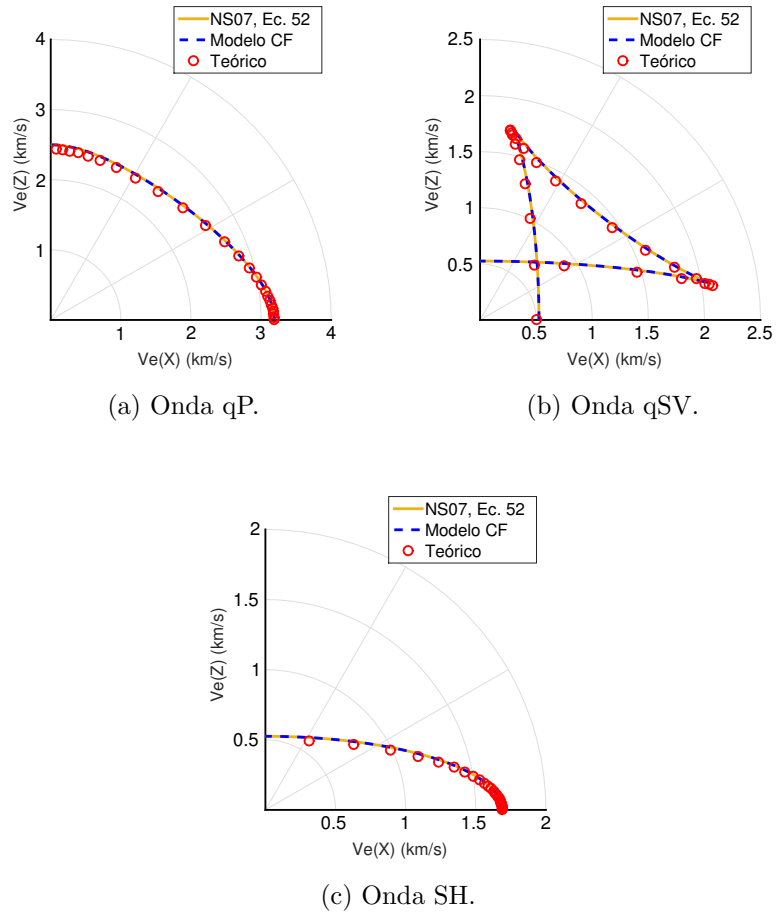


Figura 7.3: Representación polar de la velocidad de energía para las ondas qP, qSV y SH en función del ángulo de propagación. La frecuencia de la onda es 30 Hz. La respuesta teórica corresponde al modelo presentado en Krzikalla y Müller (2011) o Carcione et al. (2013), el modelo CF es el modelo de la fractura como capa fina y NS07 Ec. 52 corresponde al modelo de condición de borde presentado en la ecuación (52) de Nakagawa y Schoenberg (2007).



de capa fina. Se observó un buen ajuste con la solución teórica y un mejor ajuste con el modelo de capa fina, verificándose así que el modelo de la fractura como una condición de borde es una buena aproximación.

En las ondas qP se observa una fuerte atenuación en la dirección normal a las fracturas (ver Figura 7.2-(a)) y una disminución de la velocidad en la misma dirección (ver Figura 7.3-(a)). Para las ondas qSV se observa una fuerte atenuación para los ángulos cercanos a 45 grados de la dirección de fracturamiento (ver Figura 7.2-(b)) y un efecto de la anisotropía mucho más fuerte que en las ondas qP. Se observa además un fenómeno que se conoce en la literatura como triplicaciones (ver Figura 7.3-(b)). Por último las velocidades de las ondas SH se ven fuertemente disminuidas para los ángulos normales a las fracturas (ver Figura 7.3-(c)).

#### 7.4.2 BACKGROUND Y FRACTURAS CON PATCHES DE FLUIDO

En este segundo caso se considera la misma muestra que en el caso anterior pero con patches de gas tanto en el background como en las fracturas. Las propiedades del gas son: densidad  $\rho_f = 78 \text{ kg/m}^3$ , viscosidad  $\eta = 0.00015 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  y módulo de volumen  $K_f = 0.012 \text{ GPa}$ . Las propiedades del agua son las mismas que en el caso anterior. Se realiza un mallado de  $100 \times 100$  elementos para el background y la frecuencia de análisis es de 30 Hz.

Las distribuciones de los patches de gas y agua se generaron usando la función de correlación auto-similar de von Karman (6.69), donde se ha elegido  $E = 2$ ,  $D = 2.2$  y  $a=2.0 \text{ cm}$ . Se generaron dos distribuciones de gas-agua, para el 10% y 50% de saturación de gas, en la Figura 7.4 se observa la distribución de patches de  $\rho_f$  en el background, para la saturación de 10% de gas. Cabe señalar que en las fracturas también hay patches.

Las Figuras 7.5 y 7.6 muestran los gráficos polares para los factores de disipación  $1000/Q$  y las velocidades de energía para las ondas qP y qSV en función de

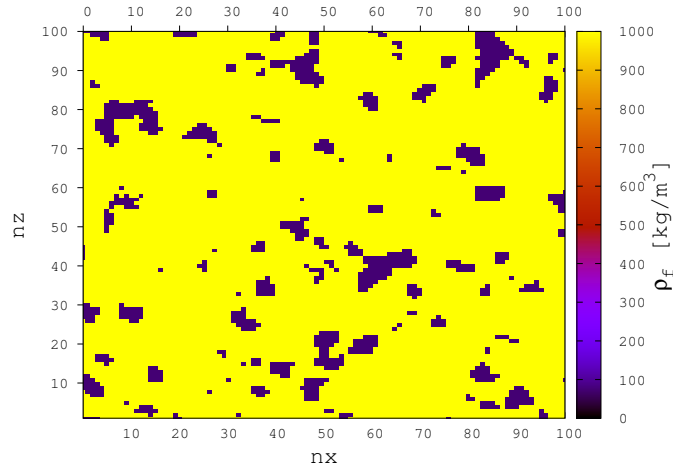


Figura 7.4: Distribución de patches de gas y agua en el background, para un 10% de saturación de gas. Se observan los valores de densidad del fluido.

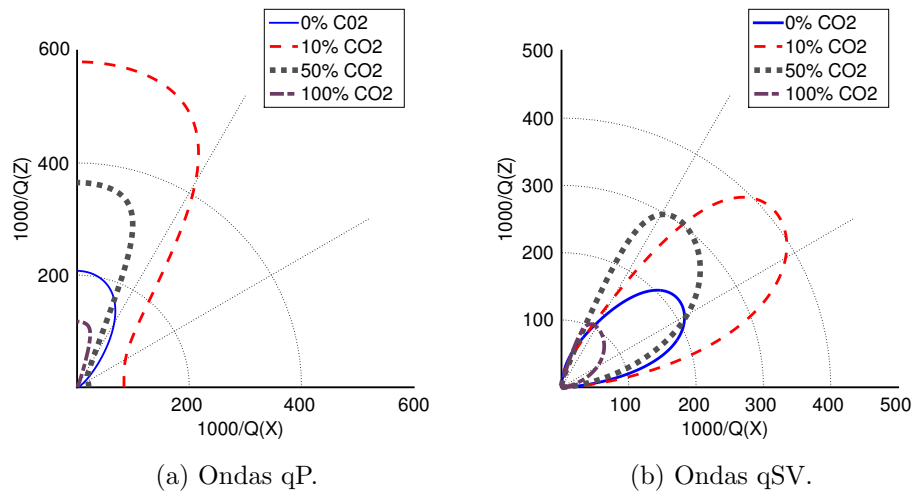


Figura 7.5: Representación polar del factor de disipación ( $1000/Q$ ) para las ondas qP y qSV en función del ángulo de propagación. Se grafican los casos sólo agua, sólo gas (CO<sub>2</sub>), 10% y 50% de gas. La frecuencia de análisis es 30 Hz.

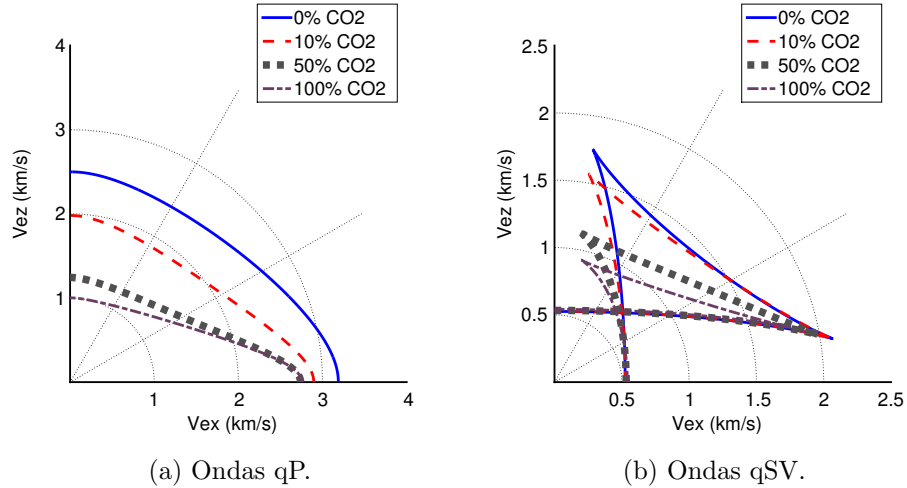


Figura 7.6: Representación polar de la velocidad de energía para las ondas qP y qSV en función del ángulo de propagación. Se grafican los casos sólo agua, sólo gas (CO<sub>2</sub>), 10 % y 50 % de gas. La frecuencia de análisis es 30 Hz.

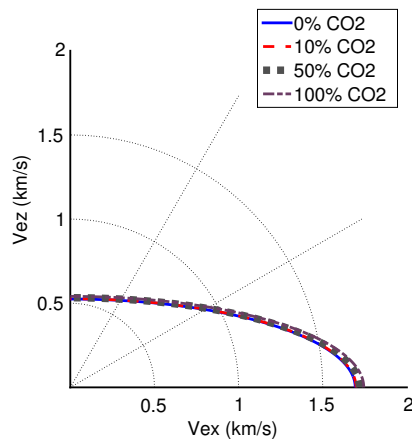


Figura 7.7: Representación polar de la velocidad de energía para la onda SH en función del ángulo de propagación. Se grafican los casos sólo agua, sólo gas (CO<sub>2</sub>), 10 % y 50 % de gas. La frecuencia de análisis es 30 Hz.

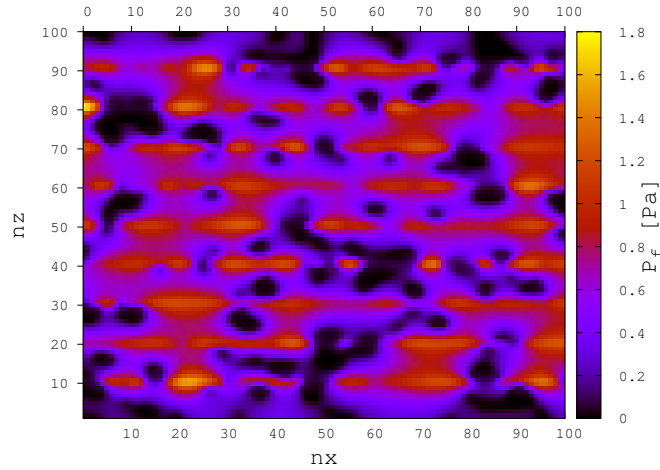


Figura 7.8: Presión del fluido para compresiones normales al plano de la fractura con 10 % de saturación de gas. Frecuencia de análisis 30 Hz.

los ángulos de propagación. La saturación de gas varía desde 0 % hasta un 100 %, a una frecuencia de 30 Hz.

Para las ondas qP se observa mayor disipación cuando hay 10 % de saturación de gas (Figura 7.5-(a)) y luego decae a medida que se aumenta la saturación, para todos los porcentajes la mayor disipación ocurre en la dirección normal a las fracturas. En las ondas qSV ocurre algo similar que para las ondas qP, la mayor disipación se observa para el caso de 10 % de saturación de gas (Figura 7.5-(b)), pero aquí ocurre entre los 30 y 60 grados de la dirección de fracturamiento.

La Figura 7.6-(a) indica que la velocidad de las ondas qP decrece cuando la saturación de gas aumenta y el efecto de la anisotropía aumenta para ángulos normales a las fracturas. Para las ondas qSV, también el efecto de la anisotropía varía con la saturación de gas, pero aquí el comportamiento es diferente que para las ondas qP, se observan triángulos cuspidales o triplicaciones, cuyos valores decaen a medida que aumenta el porcentaje de saturación de gas, en la dirección normal a la dirección de fracturamiento.

Por otra parte, la velocidad de las ondas SH no se ve afectada por la saturación de gas y presentan mayor velocidad en la dirección paralela a las fracturas (Figura

Propiedades de las rocas			
	Material 1	Material 2	Material 3
$K_s$ (GPa)	36	36	36
$\rho_s$ (Kg/m <sup>3</sup> )	2700	2700	2700
$\phi$	0.15	0.5	0.65
$K_m$ (GPa)	9.0	0.0055	0.0044
$\mu$ (GPa)	7.0	0.0033	0.0022
$\kappa$ (m <sup>2</sup> )	$9.86 \cdot 10^{-14}$	$9.86 \cdot 10^{-12}$	$1.97 \cdot 10^{-11}$

Tabla 7.2: Propiedades físicas de los materiales usados en el caso fractal.

7.7).

La Figura 7.8 muestra la distribución de presión de fluido (en Pa) para las compresiones normales a la dirección de fracturamiento (experimento para el cálculo del  $p_{33}$ ), con 10% de saturación de gas, donde los mayores valores de saturación ocurren en las posiciones donde hay fracturas, mientras que los valores mínimos ocurren en los patches de gas. Esta Figura ilustra como los mecanismos de atenuación mesoscópica afectan las ondas compresionales y de corte a una escala macro.

### 7.4.3 MEDIOS FRACTALES

En este experimento se tiene una muestra fracturada de  $2.0 \times 2.009$  m, con 9 fracturas de espesor  $h = 0.001$  m, es decir, el background tiene dimensiones de  $2.0 \times 2.0$  m, se usó una malla de  $100 \times 100$  elementos rectangulares para discretizar el background, mientras que para las fracturas se usaron las condiciones de borde de Nakagawa y Schoenberg (2007), ecuación (52).

El Material 1 de la Tabla 7.2 forma el background y el Material 2 forma parte de

las fracturas. Se analizó la sensibilidad de la velocidad de energía al incluir fracciones del Material 3 tanto en el background como en las fracturas, el algoritmo usado para crear los fractales fue el mismo que para el Caso de los patches de fluido, usando los mismos parámetros para generar el fractal. La frecuencia de análisis es 60 Hz y tanto el background como las fracturas están saturados con agua.

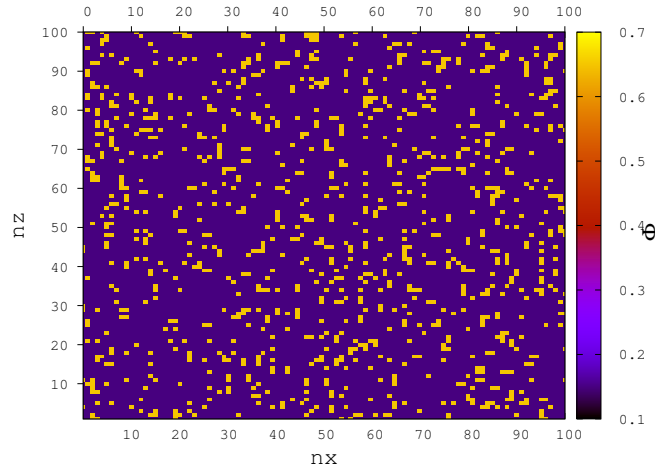


Figura 7.9: Distribución fractal de la porosidad para un 10% de Material 3 en el background.

En la Figura 7.9 se observa la distribución fractal para la porosidad en el background. Para las fracturas también se incluyeron fractales del Material 3, las que no se muestran en la Figura debido a que las fracturas son modeladas como condiciones de borde.

La Figura 7.10 muestra la velocidad de energía en las muestras con fractales. Los valores de velocidad decrecen cuando el porcentaje de Material 3 crece, efecto esperado debido a las propiedades de este Material 3 (más poroso y permeable). También se puede observar que las velocidades tienden a ser isótropas con el incremento de dicho Material.

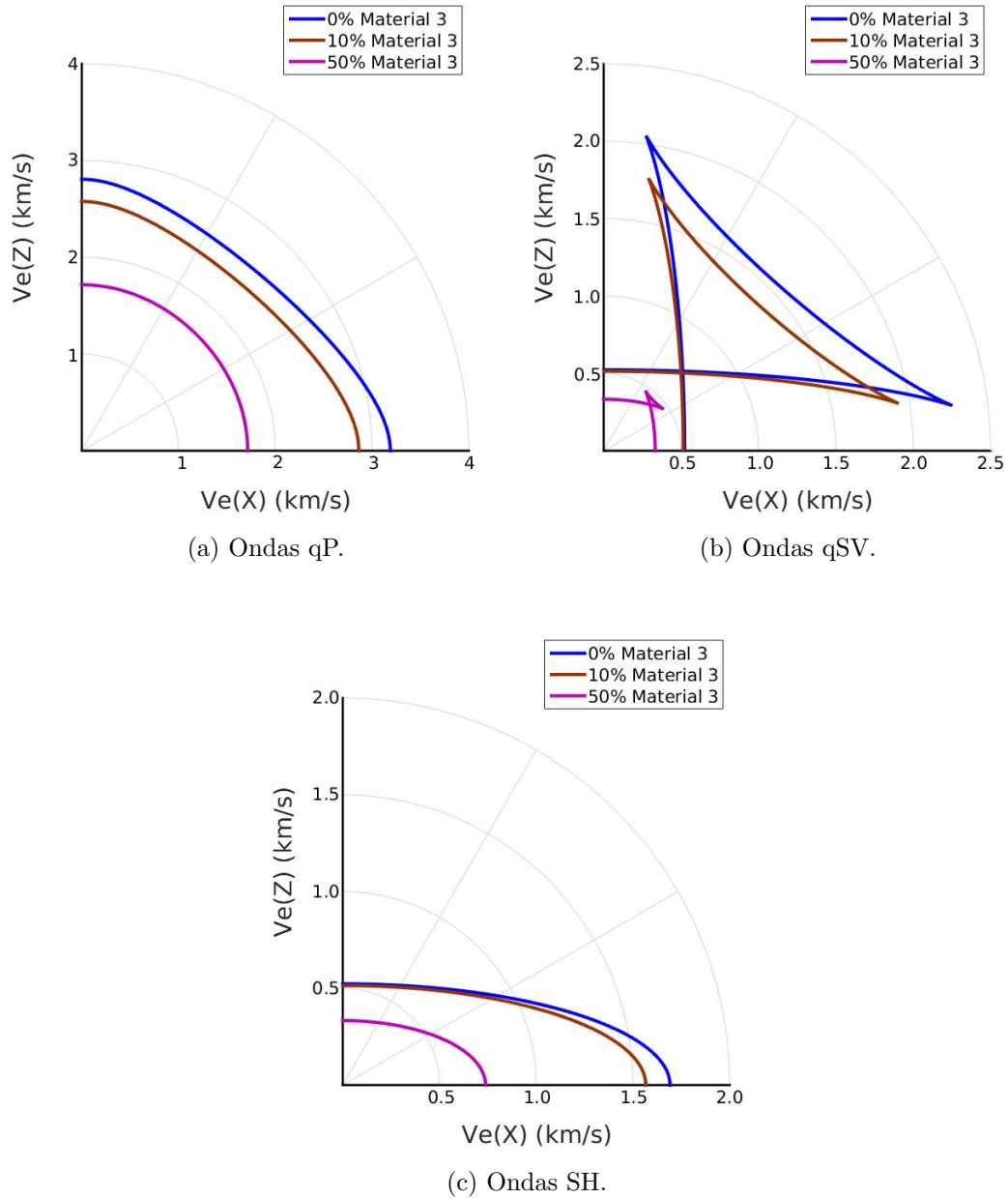


Figura 7.10: Representación polar de la velocidad de energía para las ondas qP, qSV y SH en función del ángulo de propagación. La muestra fracturada contiene 0%, 10% y 50% del Material 3 de la Tabla 7.2, tanto para el background como para las fracturas. El fluido que satura la muestra es agua y la frecuencia de análisis es 60 Hz.

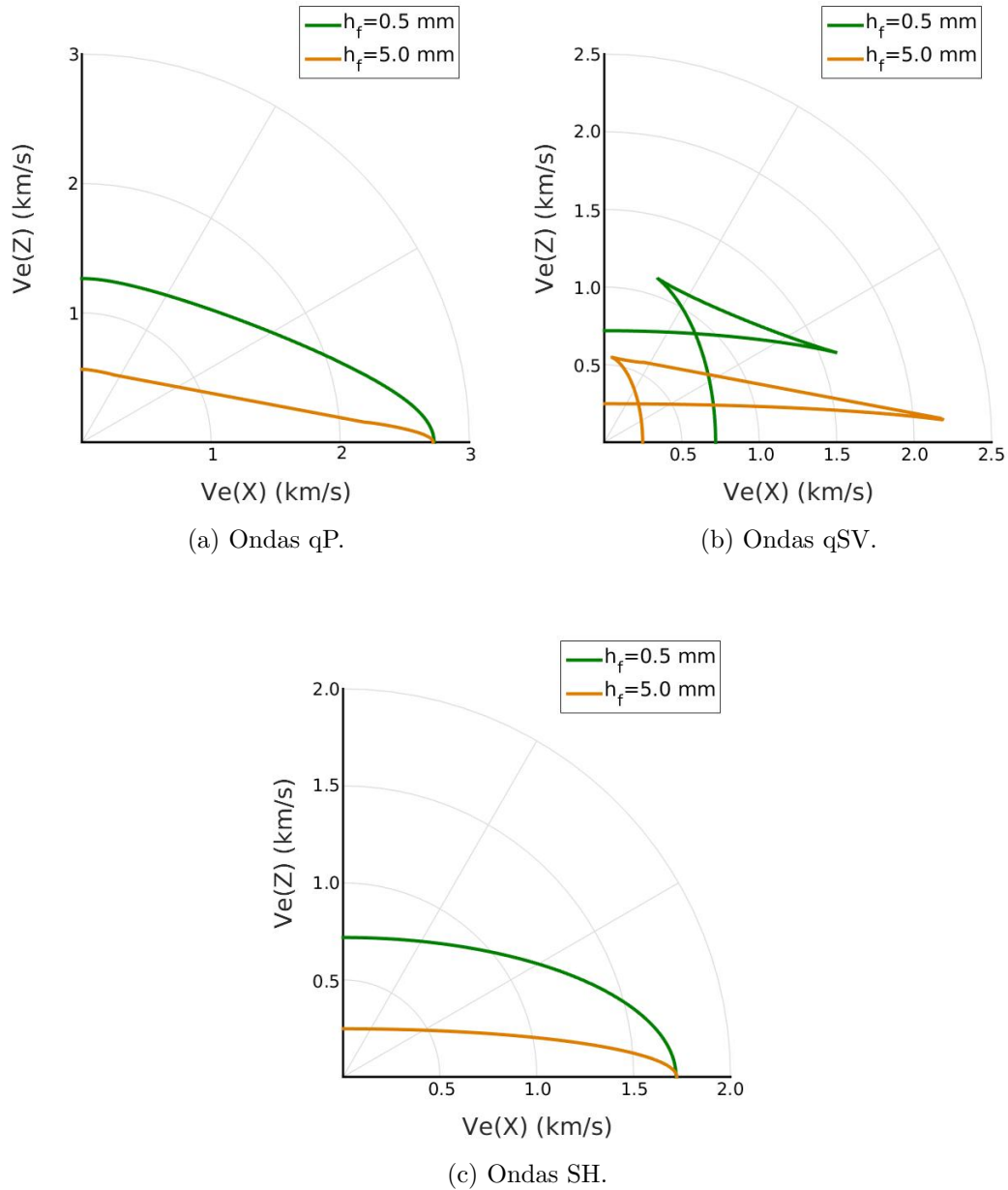


Figura 7.11: Representación polar de la velocidad de energía para las ondas qP, qSV y SH en función del ángulo de propagación. Se realizaron pruebas para dos espesores de fractura,  $h = 0.005$  m y  $h = 0.0005$  m. El background está saturado con gas y las fracturas con agua. La frecuencia de análisis es 60 Hz.



#### 7.4.4 VARIACIÓN DEL ESPESOR DE LA FRACTURA

En este experimento se analizó como afecta el espesor de la fractura las velocidades de las ondas qP, qSV y SH. Se comienza por definir los parámetros de la muestra, el background se discretiza con una malla de  $100 \times 100$  elementos rectangulares y tiene iguales dimensiones que en el ejemplo anterior, es decir, es de  $2.0 \times 2.0$  m. La muestra contiene 9 fracturas y está saturada en el background con gas de densidad  $\rho_f = 500 \text{ kg/m}^3$ , viscosidad  $\mu = 2.0 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  y módulo de volumen  $K_f = 0.025 \text{ GPa}$ ; y las fracturas están saturadas con agua de propiedades idénticas a las del primer ejemplo.

El background tiene las propiedades del Material 1 de la Tabla 7.2 y las fracturas tienen las propiedades del Material 2. Se hacen pruebas para dos espesores de fracturas,  $h = 0.005 \text{ m}$  y  $h = 0.0005 \text{ m}$  y la frecuencia de análisis es 60 Hz. En la Figura 7.11 se observan las velocidades de energía para las ondas qP, qSV y SH, donde se aprecia como al aumentar la apertura de la fractura aumentan los efectos de anisotropía y las velocidades disminuyen para ondas incidiendo en dirección normal al plano de las fracturas.

#### 7.4.5 VARIACIÓN DE LA PRESIÓN PORAL

Con el fin de relacionar la presión poral y la presión de confinamiento con las complianzas de las fracturas, siguiendo a Brajanovski et al. (2005); Daley et al. (2006); Carcione et al. (2012a) se definen las complianzas

$$Z_N = \eta_N/L, \quad Z_T = \eta_T/L$$

que caracterizan las fracturas, donde  $L$  es la distancia media entre ellas.

Se asume que las complianzas  $Z_N$  y  $Z_T$  dependen de los esfuerzos efectivos

$\sigma = p_c - p$ , donde  $p_c$  es la presión de confinamiento y  $p$  es la presión poral. Esta dependencia se modela

$$Z_q = Z_{q\infty} + (Z_{q0} - Z_{q\infty}) e^{(-\sigma/\tau_q)} \quad q = N, T \quad (7.51)$$

donde  $Z_{q0}$  es el valor que toma la complianza cuando el esfuerzo efectivo es cero,  $Z_{q\infty}$  el valor que toma la complianza cuando el esfuerzo efectivo es infinito y  $\tau_q$  es una constante de decaimiento.

Para analizar el efecto de la presión poral en las velocidades y la atenuación, se escogió una muestra de tamaño  $10.0 \times 10.0$  m de background, con una fractura cada metro ( $L = 1$  m). El background es homogéneo e isótropo, con módulo de volumen de los granos sólidos  $K_s = 37$  GPa, módulo de corte de los granos sólidos  $\mu_s = 44$  GPa y densidad de los granos sólidos  $\rho_s = 2650$  kg/m<sup>3</sup> (Carcione et al., 2013). El módulo de volumen de la matriz seca  $K_m$  y el módulo de corte de la matriz seca  $\mu_m$  son calculados con el modelo de Krief (Krief et al., 1990), ecuación (4.45).

La porosidad y permeabilidad son 0.25 y  $2.4673 \cdot 10^{-13}$  m<sup>2</sup> en el background y 0.75 y  $6.0 \cdot 10^{-11}$  m<sup>2</sup> en las fracturas, estas dos propiedades se relacionan por la ecuación (6.68).

EL fluido saturante es agua salada de formación con densidad 1040 Kg/m<sup>3</sup>, módulo de volumen  $K_f = 2.25$  GPa y viscosidad  $\eta = 0.003$  Pa·s.

Las complianzas definidas arriba, varían como en Daley et al. (2006)

$$\mu^{(b)} Z_{N_0} = 1.5, \quad (\lambda_u^{(b)} + 2\mu^{(b)}) Z_{T_0} = 0.25. \quad (7.52)$$

para este caso las propiedades de la matriz rocosa no varían con la presión poral y se concentró el análisis en las complianzas.

También

$$Z_{T\infty} = Z_{T_0}/5, Z_{N\infty} = Z_{N_0}/2, \tau_T = 5\text{MPa}, \text{ y } \tau_N = 4\text{MPa}.$$

La Figura 7.12 muestra las complianzas  $Z_N, Z_T$  en función de la presión poral.

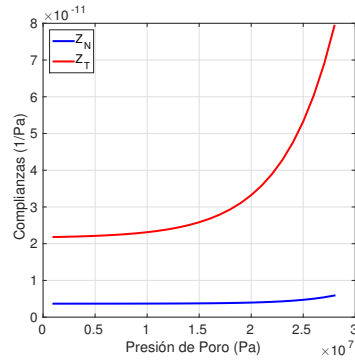


Figura 7.12: Complianzas en función de la presión poral.

Se van a considerar una presión de confinamiento constante  $p_c = 30$  MPa y tres presiones porales 5, 15 y 28 MPa; el primer valor es normal, el segundo es un valor medio y el tercero es una sobrepresión. La Figura 7.13 muestra que la disipación es más fuerte para el caso de sobrepresión, con valores máximos en la dirección normal a la dirección de fracturamiento. También, en la Figura 7.14 se muestra que el efecto de la anisotropía se hace más fuerte cuando se incrementa la presión poral.

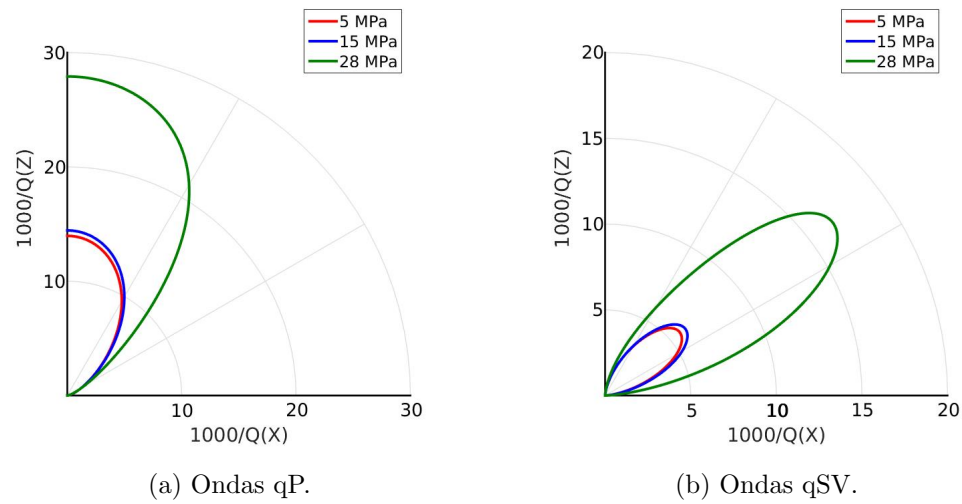


Figura 7.13: Representación polar del factor de disipación para las ondas qP y qSV a 60 Hz. Se analizan tres valores de presión poral, valor normal de presión (línea roja, 5 MPa), valor medio (línea azul, 15 MPa) y sobrepresión (línea verde, 28 MPa). Las fracturas se modelan usando condiciones de borde.

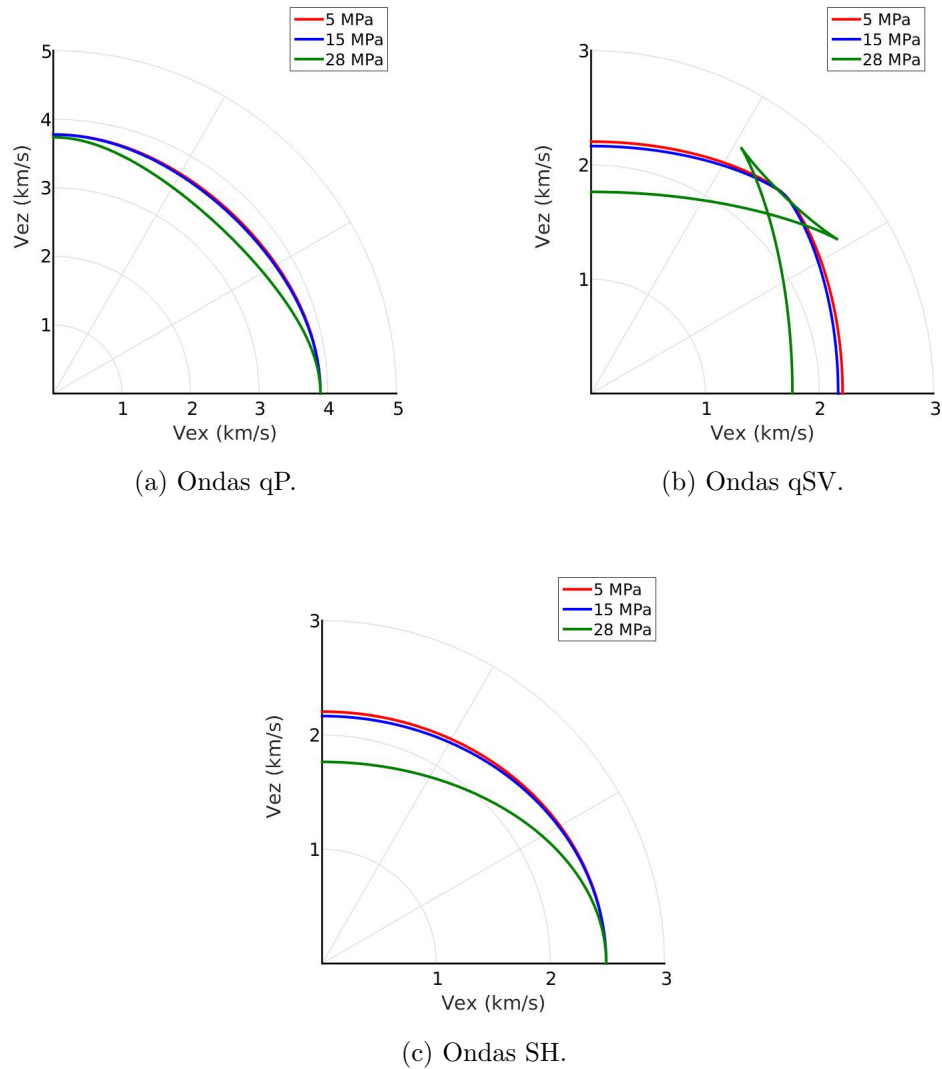


Figura 7.14: Representación polar de la velocidad de energía para las ondas qP, qSV y SH a 60 Hz. Se analizan tres valores de presión de poro, valor normal de presión (línea roja, 5 MPa), valor medio (línea azul, 15 MPa) y sobrepresión (línea verde, 28 MPa). Las fracturas se modelan usando condiciones de borde.

## CAPÍTULO 8

# PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS POROELÁSTICOS FRACTURADOS UTILIZANDO MEDIOS VISCOELÁSTICOS EQUIVALENTES

---

Un medio poroelástico saturado que contiene un conjunto denso de fracturas orientadas en una dirección preferencial se comporta como un medio VTI equivalente en la macroscale. Los coeficientes de rigidez obtenidos con las metodologías explicadas en los Capítulos anteriores, son usados en el algoritmo de elementos finitos para medios viscoelásticos que se explica en este Capítulo.

Aunque en la literatura existen muchos métodos para la simulación de ondas en medios viscoelásticos, se escogió el algoritmo explicado por Gauzellino et al. (2001) y para mayor sencillez se usó un mallado estructurado con elementos finitos rectangulares.

En la última sección del Capítulo se muestran diferentes ejemplos donde se visualizan los efectos de la anisotropía en la propagación de ondas en medios viscoelásticos equivalentes.

## 8.1 FORMA DÉBIL DEL PROBLEMA

En esta sección se enunciará la forma débil del problema para el modelado de la propagación de ondas con el método de los elementos finitos, en el dominio espacio-frecuencia, los efectos anelásticos son descriptos con exactitud en Carcione et al. (2006) y Carcione (2015). Se considera un volumen 2D de un medio anisótropo y viscoelástico,  $\Omega = (0, 1)^2$ , con bordes  $\Gamma = \partial\Omega$ . Sea  $\mathbf{u}(x, z, \omega) = (\mathbf{u}_1(x, z, \omega), \mathbf{u}_3(x, z, \omega))$  la transformada de Fourier del vector desplazamiento en la frecuencia  $\omega$ .

También sea  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = \tau_{jk}(\mathbf{u})$  y  $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \epsilon_{jk}(\mathbf{u})$  la transformada de Fourier de los tensores esfuerzo y deformación de los materiales viscoelásticos.

La ecuación que gobierna el movimiento es

$$-\rho(x, z)\omega^2\mathbf{u}(x, z, \omega) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}[\mathbf{u}(x, z, \omega)] = \mathbf{f}(x, z, \omega), \quad x, z \in \Omega, \quad (8.1)$$

con condiciones de borde absorbentes

$$-\boldsymbol{\tau}[\mathbf{u}(x, z, \omega)] \cdot \boldsymbol{\nu} = i\omega\sqrt{\rho}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{u}(x, z, \omega), \quad x, z \in \Gamma, \quad (8.2)$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} p_{11}\nu_1^2 + p_{55}\nu_3^2 & (p_{15}\nu_1^2 + p_{35}\nu_3^2) \\ (p_{15}\nu_1^2 + p_{35}\nu_3^2) & p_{55}\nu_1^2 + p_{33}\nu_3^2 \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

El borde  $\Gamma$  es transparente para ondas que inciden normalmente y  $\boldsymbol{\nu}$  es el vector normal externo y unitario en  $\Gamma$ . La derivación de estas condiciones de borde pueden ser consultadas en Love (1892) y Lovera y Santos (1988).

La forma variacional o forma débil de la ecuación (8.1) queda definida como: Encontrar  $\mathbf{u}(x, z, \omega) \in [H^1(\Omega)]^2$  tal que,

$$-(\rho\omega^2\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) + i\omega \left\langle \sqrt{\rho}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{u}, \mathbf{v} \right\rangle_{\Gamma} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2. \quad (8.4)$$

Aquí  $(s, g) = \int_{\Omega} sg^* dx dz$  y  $\langle s, g \rangle = \int_{\Gamma} sg^* d\Gamma$  indican los productos internos complejos  $[L^2(\Omega)]^2$  y  $[L^2(\Gamma)]^2$ , donde  $*$  denota el complejo conjugado. Los argumentos

dados en Ha et al. (2002) y Douglas et al. (1994) pueden ser usados para demostrar que la existencia y unicidad se mantienen para la ecuación (8.4).

## 8.2 ALGORITMO USANDO ELEMENTOS NO CONFORMES

La dispersión numérica es un aspecto muy importante a tener en cuenta en cuando se utilizan algoritmos de propagación de ondas. Se muestra en Zyserman et al. (2003) que usar el espacio de elementos finitos no conformes  $\mathcal{NC}^h$  descrito en Jim Douglas y Santos (1995) permite utilizar aproximadamente la mitad del número de puntos por longitud de onda para conseguir una tolerancia deseada en dispersión numérica, en comparación con los elementos bilineales conformes estándar. Por lo tanto, se empleará el espacio de elementos finitos no conformes  $\mathcal{NC}^h$  que se describe a continuación para calcular la solución aproximada de (8.4).

Sea  $\tau^h$  una partición cuasi regular de  $\Omega$ , tal que  $\bar{\Omega} = \cup_{j=1}^J \Omega_j$  con  $\Omega_j$  siendo rectángulos de diámetro delimitado por  $h$ . Además, sean  $\Gamma_j = \partial\Omega \cap \partial\Omega_j$  y  $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj} = \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k$  las intersecciones de los elementos con el borde del dominio y las intersecciones de los elementos con otros elementos respectivamente, con puntos medios  $\xi_j$  y  $\xi_{jk}$ . Considerando el elemento de referencia:

$$\hat{R} = [-h/2, h/2]^2 \quad S(\hat{R}) = \text{Span} \left\{ 1, \hat{x}, \hat{z}, \left( \hat{x}^2 - \frac{5}{3}\hat{x}^4 \right) - \left( \hat{z}^2 - \frac{5}{3}\hat{z}^4 \right) \right\}, \quad (8.5)$$

los grados de libertad asociados con  $S$ , están ubicados en los puntos medios de  $\hat{R}$  (ver Figura 3.1). Las funciones base son las mismas descritas en las ecuaciones (3.23)-(3.26) del Capítulo 3. Asimismo, recordar que

$$\mathcal{NC}^h = \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{v}_j \in [S(\Omega_j)]^2, \mathbf{v}_j(\xi_{jk}) = \mathbf{v}_k(\xi_{jk}) \forall (j, k) \right\}, \quad (8.6)$$

donde  $\mathbf{v}_j$  denota la restricción de  $\mathbf{v}$  tal como se observa desde  $\Omega_j$ .



Ahora, la aproximación global no conforme  $\mathbf{u}^h$  de la solución  $\mathbf{u}$  de (8.4), se puede expresar de la siguiente forma: Encontrar  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{NC}^h$  tal que:

$$-(\rho\omega^2\mathbf{u}^h, \mathbf{v}) + \sum_j (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}))_{\Omega_j} + i\omega \left\langle \sqrt{\rho}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{u}^h, \mathbf{v} \right\rangle_{\Gamma} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \mathcal{NC}^h. \quad (8.7)$$

Se puede demostrar que para  $h$  lo suficientemente pequeño el error asociado con el procedimiento global (8.7) es del orden de  $h^2$  en la norma  $L^2$  y de orden  $h$  en la norma  $H^1$ , solo si los coeficientes son suaves o constantes (ver en Ha et al. (2002) la demostración hecha para el caso isótropo).

### 8.3 EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se mostrarán los resultados del modelado de medios porosos fracturados a través de medios efectivos, para esto se calculan los coeficientes de rigidez complejos  $p_{ij}$  con alguna de las dos metodologías mostradas en los dos Capítulos anteriores (la fractura modelada como condición de borde). Una vez obtenidos los  $p_{ij}$  se procede a modelar la propagación de la onda usando el algoritmo de elementos finitos para medios viscoelásticos.

La fuente usada para estos ejemplos es similar a la usada en el Capítulo 2, descrita por la ecuación (3.42), pero con frecuencia central de 30 Hz y  $A_f = 1.0 \times 10^{11}$  (ver Figura 8.1). El tiempo de muestreo fue de 1.0 ms y la solución se calculó para 250 frecuencias equidistantes entre 0 y 150 Hz.

Para todos los casos vistos, los coeficientes  $p_{ij}$  fueron calculados en una muestra fracturada de 1.0 m  $\times$  1.0 m y un espesor de fractura de 0.01 m donde se usó un mallado de 100  $\times$  100 elementos en el background. Los coeficientes de rigidez se calcularon para 30 frecuencias desde 1.0 Hz hasta 150 Hz, que luego son interpolados en el código de propagación debido a que el muestreo de frecuencia que usa, depende del número de frecuencias que se deseen analizar.

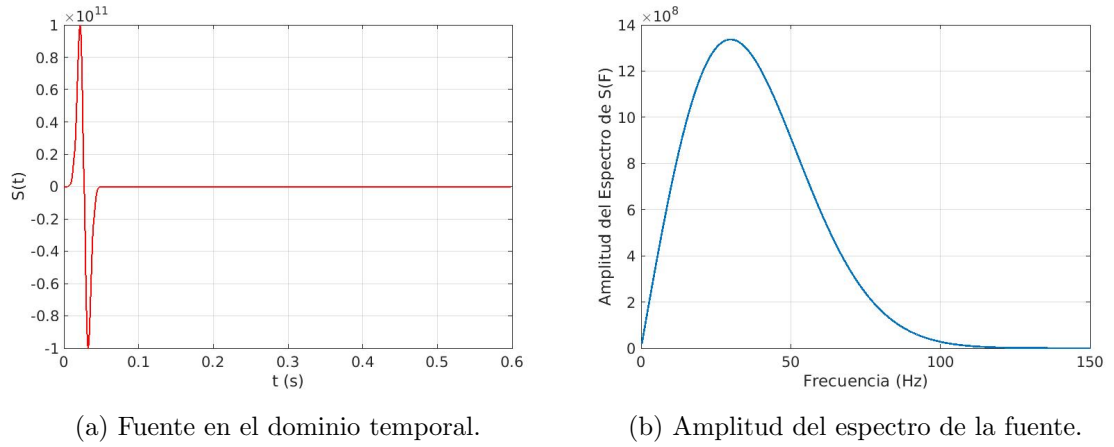


Figura 8.1: Fuente usada para el algoritmo de propagación de ondas en medios viscoelásticos de frecuencia central 30 Hz y amplitud  $A_f = 1.0 \times 10^{11}$ .

Las propiedades de los materiales usados en los diferentes casos se muestran en la Tabla 8.1, estos fueron obtenidos con la relación de Krief (4.45) y la permeabilidad con la ecuación (6.68). Para el background se usó el Material 2 y para las fracturas se usó el Material 3 que es más poroso y permeable. En los diferentes casos se usaron tres fluidos, agua salada de formación, gas a 20 MPa de presión y petróleo, las propiedades del agua salada aparecen en la Tabla 6.1 y las propiedades del gas y el petróleo en la Tabla 2.2.

### 8.3.1 VARIACIÓN DE LA DENSIDAD DE FRACTURAS

En este primer caso se modela para un medio con densidad de fracturamiento de 0, 4, 9 y 19 fracturas por metro, las dimensiones del dominio viscoelástico son de 1600 m  $\times$  1600 m, dividido en una malla de 800  $\times$  800 elementos. El medio fracturado fue saturado con agua salada de formación.

La Figura 8.2 visualiza las ondas propagándose en el plano  $x - z$ , a un tiempo de 0.21 s, para las diferentes densidades de fracturamiento mencionadas. En el caso no fracturado, se observa un frente de onda isótropo de onda P, y no se observan

*CAPÍTULO 8. PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS POROELÁSTICOS  
FRACTURADOS UTILIZANDO MEDIOS VISCOELÁSTICOS  
EQUIVALENTES*

---

Propiedades de las rocas				
	Material 1	Material 2	Material 3	Material 4
$K_s$ (GPa)	37	37	37	25
$\mu_s$ (GPa)	44	44	44	9
$\rho_s$ (Kg/m <sup>3</sup> )	2650	2650	2650	2550
$\phi$	0.15	0.25	0.5	0.3
$K_m$ (GPa)	20.84	11.7	0.578	5.42
$\mu_m$ (GPa)	24.79	13.9	0.6875	1.95
$\kappa$ (m <sup>2</sup> )	$4.15 \times 10^{-14}$	$2.47 \times 10^{-13}$	$4.44 \times 10^{-12}$	$4.9 \times 10^{-13}$

Tabla 8.1: Propiedades físicas de los materiales usados para los casos analizados.

conversión de modos. A medida que se aumenta la cantidad de fracturas por metro, las ondas sufren con mayor fuerza el efecto de la anisotropía y la velocidad disminuye tanto para las ondas qP como para las ondas qSV, ver Tablas 8.2 y 8.3. En los Casos de 9 y 19 fracturas por metro se observa muy bien el efecto de la triplicación del frente de onda para la onda qSV, tal como se mencionó en los Capítulos anteriores.

Densidad Fracturamiento	Velocidad qP (km/s)	Velocidad qSV (km/s)
4 fracturas/metro	3.839	1.877
9 fracturas/metro	3.770	1.517
19 fracturas/metro	3.626	1.173

Tabla 8.2: Velocidades de energía para las ondas qP y qSV en la dirección normal a las fracturas, variando la densidad de fracturamiento. El fluido saturante es agua salada de formación.

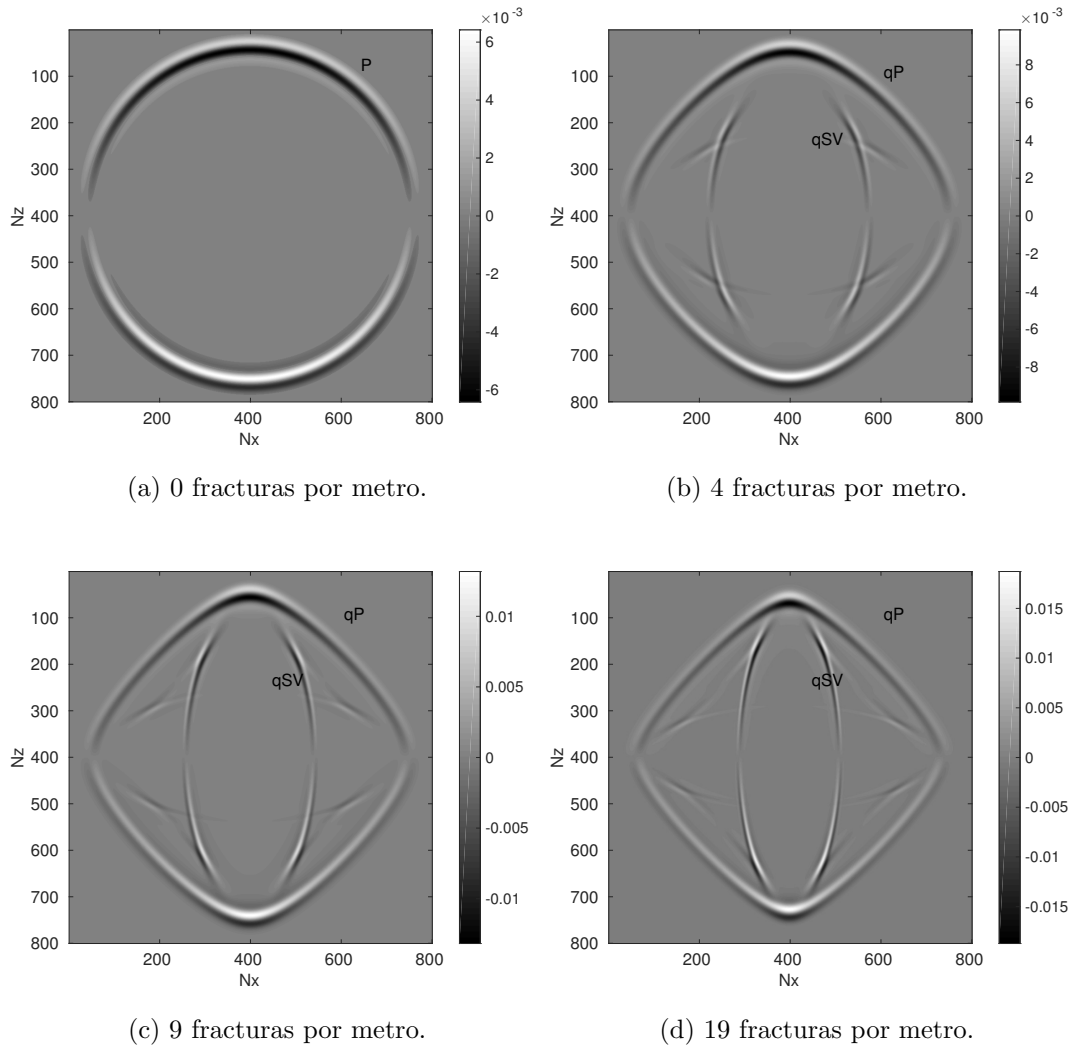


Figura 8.2: Imágenes de la componente  $z$  en el plano  $x - z$  a  $0.21$  s, para diferentes densidades de fracturamiento, el fluido saturante es agua salada de formación.

Densidad Fracturamiento	Velocidad qP (km/s)	Velocidad qSV (km/s)
4 fracturas/metro	3.296	2.132
9 fracturas/metro	2.928	1.978
19 fracturas/metro	2.573	1.742

Tabla 8.3: Velocidades de energía para las ondas qP y qSV a 45 grados de la dirección de fracturamiento, variando la densidad de fracturas por metro. El fluido saturante es agua salada de formación.

### 8.3.2 VARIACIÓN DEL FLUIDO SATURANTE

Tomando la muestra con densidad de 9 fracturas por metro saturada con agua salada de formación del ejemplo anterior, se cambió el fluido saturante por gas y petróleo para observar los efectos de este cambio en las propiedades del medio efectivo. En la Figura 8.3 se observa el modelado obtenido con los tres fluidos saturantes. Para los tres Casos es muy notorio la aparición de las cúspides en el frente de onda de la onda qSV. La mayor y la menor velocidad en la dirección normal a las fracturas para la onda qP se obtiene cuando la roca es saturada agua salada de formación y petróleo, a 45 grados de la dirección de fracturamiento la mayor velocidad también es para la roca saturada con agua salada, pero la menor velocidad se obtiene con la roca saturada con gas, ver Tablas 8.4 y 8.5.

En cuanto a la onda qSV, para la dirección normal a las fracturas, la mayor y la menor velocidad se da para la roca saturada con gas y para la saturada con agua salada, respectivamente. Igual sucede para 45 grados de la dirección de fracturamiento, ver Tablas 8.4 y 8.5.

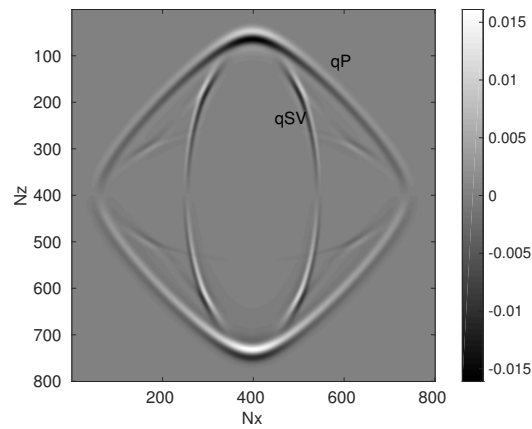
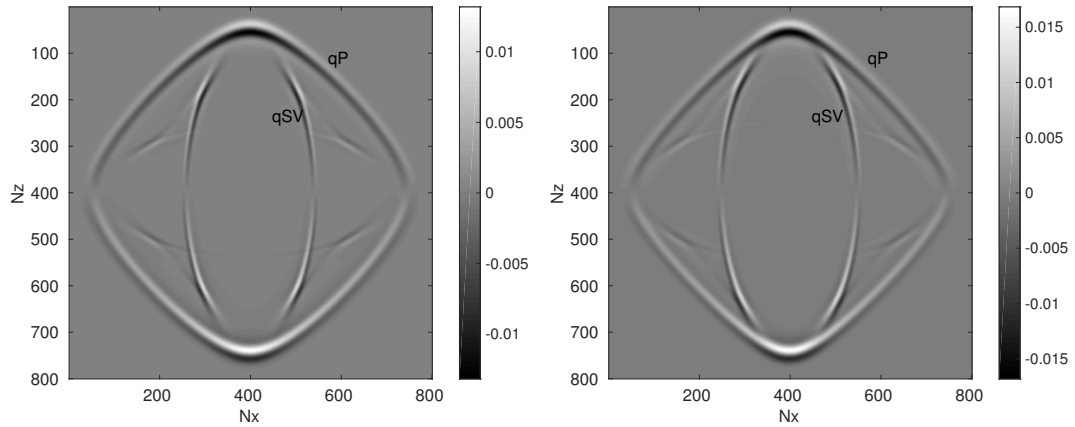


Figura 8.3: Imágenes de la componente  $z$  en el plano  $x-z$  a 0.21 s, para una densidad de nueve fracturas por metro, variando el fluido saturante.

Fluido saturante	Velocidad qP (km/s)	Velocidad qSV (km/s)
Agua salada	3.770	1.517
Gas	3.768	1.620
Petróleo	3.674	1.550

Tabla 8.4: Velocidades de energía para las ondas qP y qSV en la dirección normal a las fracturas, variando el fluido saturante. La densidad de fracturamiento es 9 fracturas por metro.

Fluido saturante	Velocidad qP (km/s)	Velocidad qSV (km/s)
Agua salada	2.928	1.978
Gas	2.646	2.054
Petróleo	2.692	2.021

Tabla 8.5: Velocidades de energía para las ondas qP y qSV a 45 grados de la dirección de fracturamiento, variando el fluido saturante. La densidad de fracturamiento es 9 fracturas por metro.

### 8.3.3 BACKGROUND Y FRACTURAS CON PATCHES DE AGUA SALADA Y GAS

Para analizar los efectos de la presencia de patches de gas y agua salada de formación en la propagación de ondas, se tomó la muestra con densidad de 9 fracturas por metro saturada con agua salada de formación y se agregaron patches de gas, usando la función de correlación auto-similar de von Karman (6.69), donde se ha elegido  $E = 2$ ,  $D = 2.2$  y  $a=2.0$  cm. En la Figura 8.4 se observan las muestras que se usaron para obtener los coeficientes de rigidez para una saturación de 10 % y 50 % de gas, allí se visualizan la distribución de densidad de fluido usando la ecuación de von Karman (6.69) para cada elemento que conforma el background y cada elemento que pertenece a las fracturas, por esta razón la Figura tiene 109 elementos en la dirección  $z$  y 100 en la dirección  $x$ .

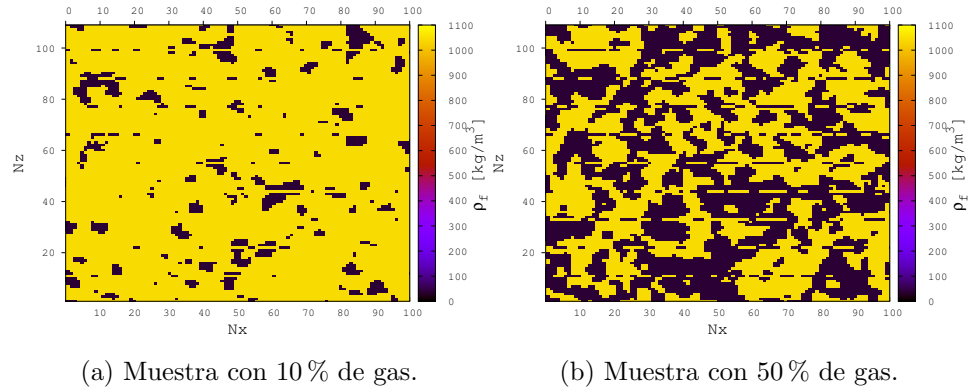


Figura 8.4: Distribución de las densidades de fluido para la muestra fracturada con patches de agua salada de formación y gas.

En la Figura 8.5 se visualizan los resultados de la simulación para 4 porcentajes de saturación de gas, se observa la aparición de las mencionadas cúspides en la onda qSV para los 4 porcentajes de saturación con gas.

La velocidad de la onda qP disminuye cuando aparecen los primeros patches de gas comparada con la roca saturada con solo agua salada, pero a medida que aumentamos el porcentaje de gas, la velocidad empieza a aumentar hasta llegar a las velocidades de la roca saturada por sólo gas, tanto para la dirección normal a las fracturas como a 45 grados de la dirección de fracturamiento, ver Tablas 8.6 y 8.7.

Para la onda qSV, en la dirección normal a las fracturas, la velocidad aumenta a medida que aumenta el porcentaje de gas, pero para 45 grados de la dirección de fracturamiento sucede lo mismo que en las ondas qP, cuando aparecen los primeros patches la velocidad disminuye, pero al aumentar el porcentaje de gas la velocidad empieza a aumentar de nuevo hasta llegar a la velocidad de la roca saturada solo por gas, ver Tablas 8.6 y 8.7.



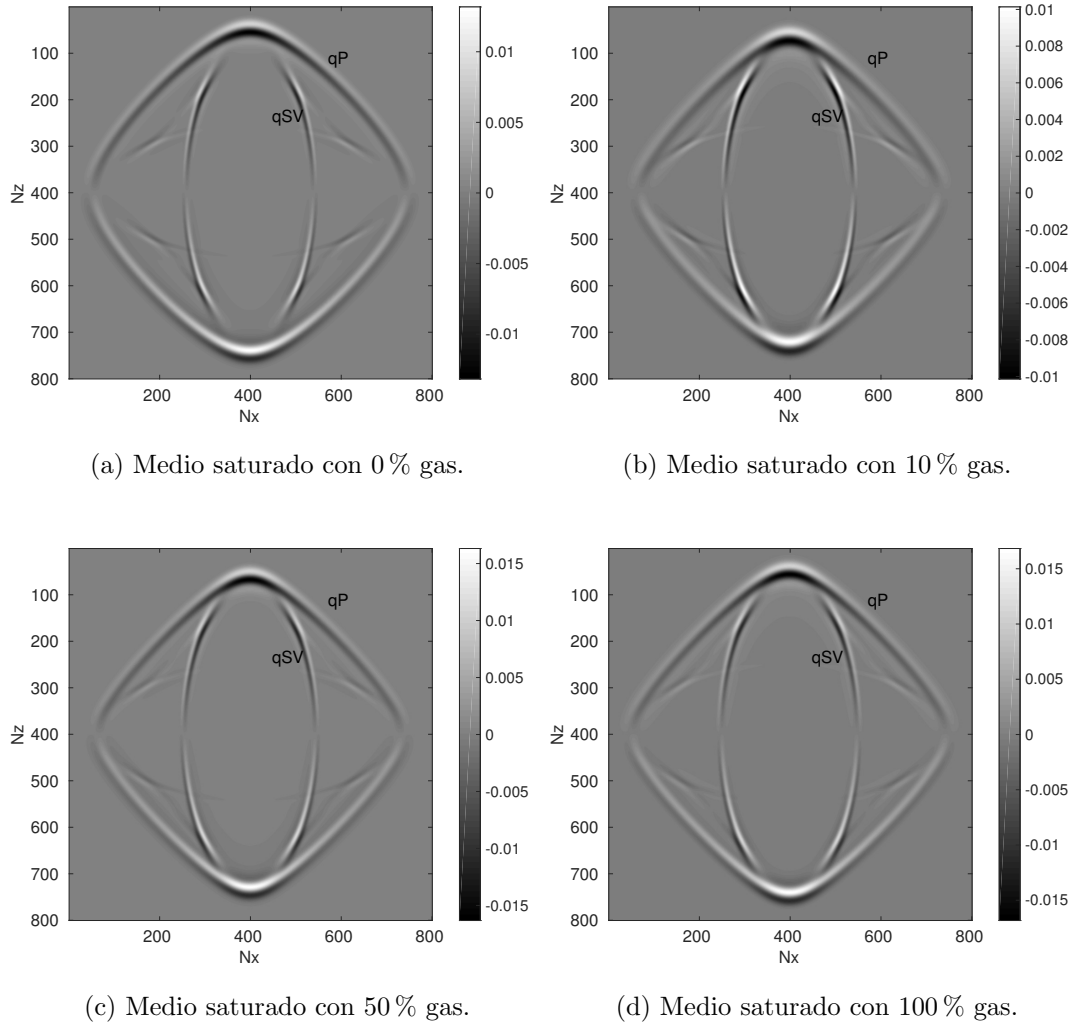


Figura 8.5: Imágenes de la componente  $z$  en el plano  $x - z$  a 0.21 s, para una densidad de 9 fracturas por metro, variando el fluido saturante.

Porcentaje de gas	Velocidad qP (km/s)	Velocidad qSV (km/s)
0 %	3.770	1.517
10 %	3.571	1.527
50 %	3.644	1.567
100 %	3.768	1.620

Tabla 8.6: Velocidades de energía para las ondas qP y qSV en la dirección normal a las fracturas, para la roca saturada con agua salada y gas. La densidad de fracturamiento es 9 fracturas por metro.

Porcentaje de gas	Velocidad qP (km/s)	Velocidad qSV (km/s)
0 %	2.928	1.978
10 %	2.522	1.943
50 %	2.558	1.987
100 %	2.646	2.054

Tabla 8.7: Velocidades de energía para las ondas qP y qSV a 45 grados de la dirección de fracturamiento, para la roca saturada con agua salada y gas. La densidad de fracturamiento es 9 fracturas por metro.

### 8.3.4 PARÁMETROS ANISÓTROPAS DE THOMSEN

En este último ejemplo, se mostrará uno de los usos más comunes del modelado de propagación de ondas sísmicas en la exploración sísmica de hidrocarburos. El modelo se visualiza en la Figura 8.6 y se compone de tres capas horizontales, dos isótropas y una anisótropa VTI, cuyo dominio tiene un tamaño de  $1600 \times 1200$  m, discretizado con una malla de  $800 \times 600$  elementos. La fuente está ubicada en la posición  $(x_f, z_f) = (0, 0)$  y el receptor más cercano está ubicado a 5 metros de la fuente con una distancia de 5 metros entre receptores, el offset (distancia entre fuente y receptor) máximo es 1600 metros.

Las dos capas isótropas están compuestas por el Material 1 de la Tabla 8.1

saturado con agua salada de formación. El medio VTI tiene una densidad de fracturamiento de 9 fracturas por metro y está saturado con petróleo.

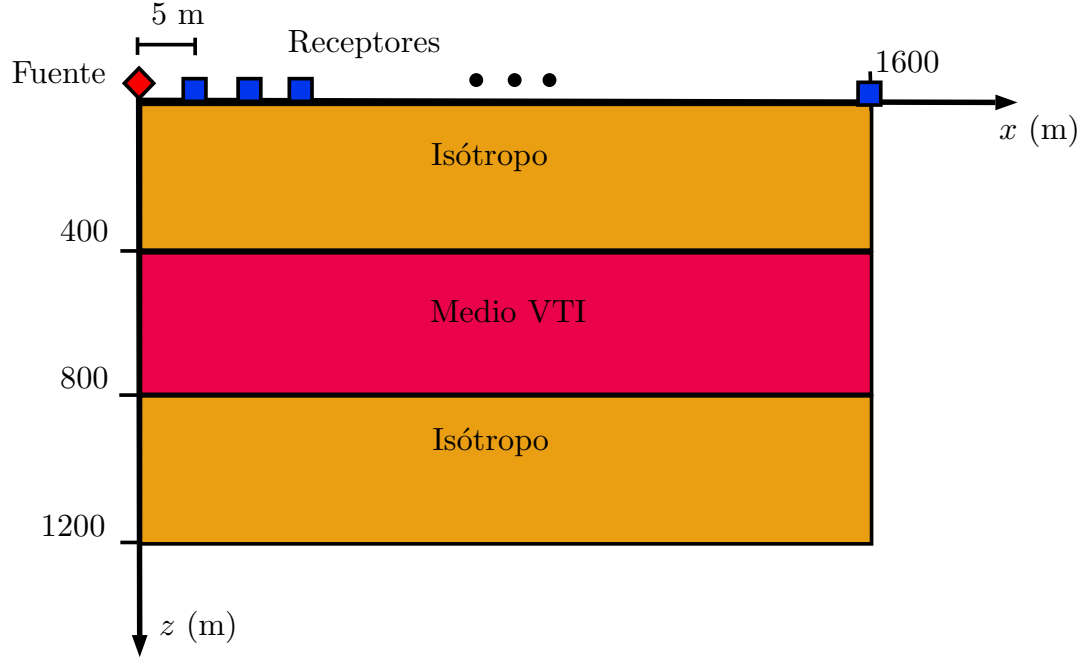


Figura 8.6: Modelo de capas planas utilizado para el modelado de propagación de ondas sísmicas. El modelo se compone de dos capas isotrópicas y una capa VTI.

Antes de continuar es conveniente definir los parámetros anisótropos de Thomsen (Thomsen, 1986), el cual definió un medio con anisotropía débil, a aquel donde las velocidades varían con la dirección y estas no superan el 20% de su magnitud. Por lo tanto los parámetros de Thomsen toman valores pequeños. Los parámetros de Thomsen para anisotropía débil en un medio VTI, se definen así:

$$\varepsilon = \frac{p_{11} - p_{33}}{2p_{33}}, \quad \gamma = \frac{p_{66} - p_{55}}{2p_{55}}, \quad (8.8)$$

$$\delta = \frac{(p_{13} - p_{55})^2 - (p_{33} - p_{55})^2}{2p_{33}(p_{33} - p_{55})}, \quad (8.9)$$

donde  $\varepsilon$  representa la diferencia entre la velocidad de onda P vertical con la velocidad de onda P horizontal. El parámetro  $\gamma$  es la diferencia entre la velocidad de onda SH vertical y la velocidad de onda SH horizontal. El parámetro  $\delta$  está relacionado con

las variaciones de la velocidad de ondas P y SV en la dirección vertical. La diferencia  $\varepsilon - \delta$  es la constante que controla la forma del frente de onda P.

Los parámetros mencionados antes, son muy útiles en el procesamiento sísmico de datos de reflexión para ubicar los eventos a sus posiciones reales.

Cuando las capas son isótropas, las curvas de reflexiones obtenidas para los tiempos de propagación doble, son hipérbolas. La corrección para estos tiempos se hace con la ecuación

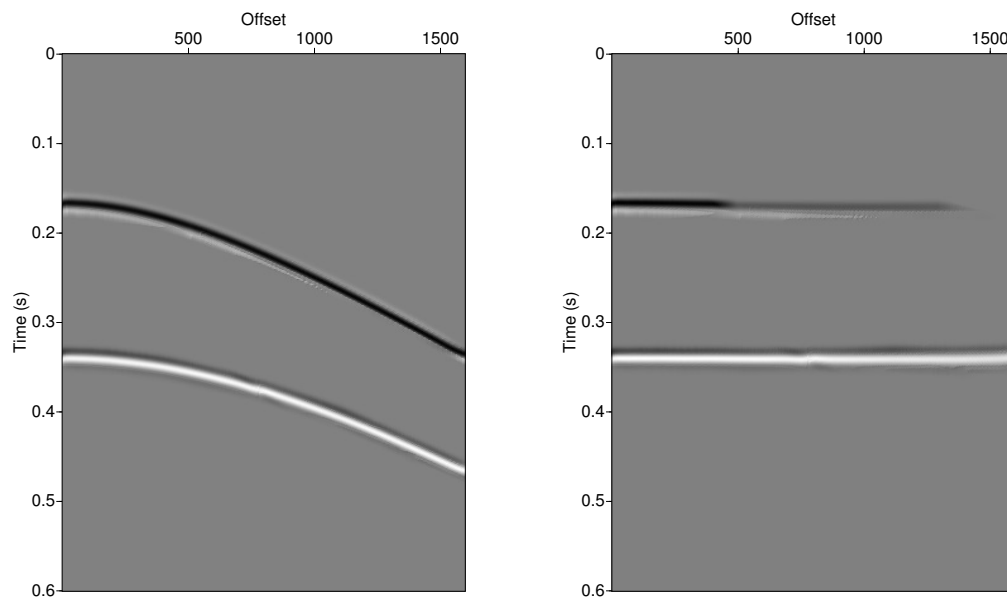
$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{V_{NMO}^2} \quad (8.10)$$

donde  $t_0$  es el tiempo de propagación vertical, es decir a offset cero,  $x$  es la distancia fuente-receptor (offset) y  $V_{NMO}$  es la velocidad de apilamiento o velocidad de normal moveout (NMO). Para estimar la velocidad de intervalo a partir de la velocidad de moveout, a esta última se la identifica con la velocidad cuadrática o  $V_{RMS}$  (RMS, root-mean-square). Esta simplificación es válida para offsets relativamente pequeños (offsets menores a la profundidad del reflector) en el caso de estratificación horizontal, con estratos homogéneos e isótropos (Calderón et al., 2003). Si en el modelo de la Figura 8.6, las tres capas fuesen isótropas, la corrección de velocidad para el apilado se haría con la ecuación (8.10). En la Figura 8.7 se observa el registro de los arribos para la componente vertical de las ondas P, cuando las tres capas son isótropas, cuando se hace la corrección NMO con la ecuación (8.10), los eventos se horizontalizan y se pueden apilar o sumar para mejorar la relación señal-ruido de la sección sísmica.

Si la segunda capa es anisótropa, al hacer la corrección NMO hiperbólica, los eventos no se horizontalizan como se muestra en la Figura 8.8, y eso trae errores en el momento de apilar.

Para solucionar este problema se hace la corrección de velocidad usando la ecuación propuesta por Alkhalifah y Tsvankin (1995)

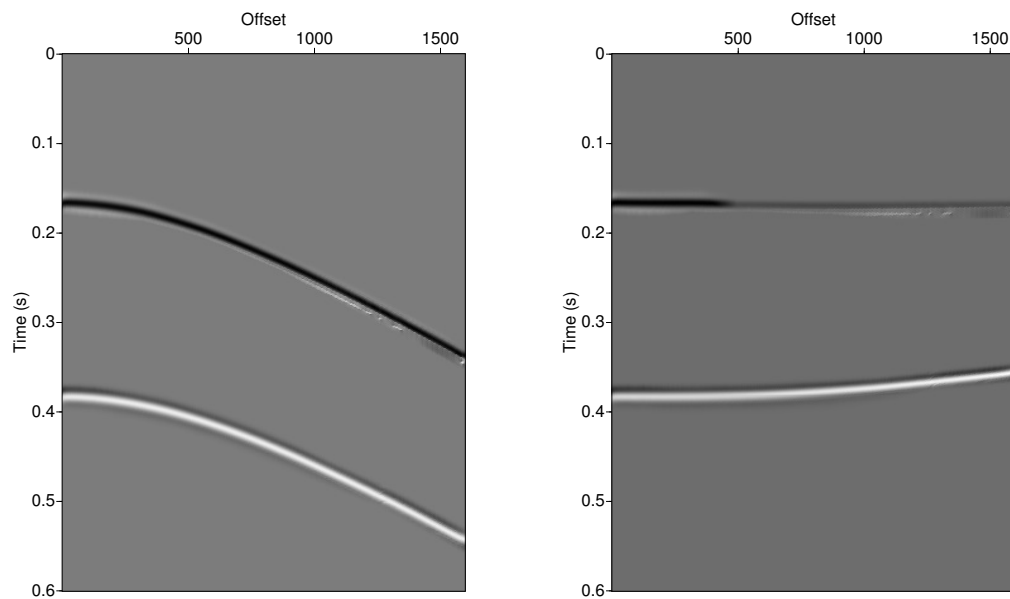
$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{V_{NMO}^2} - \frac{2\eta x^4}{V_{NMO}^2 [(t_0 V_{NMO})^2 + (1 + 2\eta) x^2]}, \quad (8.11)$$



(a) Registro sin corrección NMO.

(b) Aplicando al registro corrección de NMO hiperbólica.

Figura 8.7: Registro sísmico de tres capas isotropas con y sin corrección NMO hiperbólica.



(a) Registro sin corrección NMO.

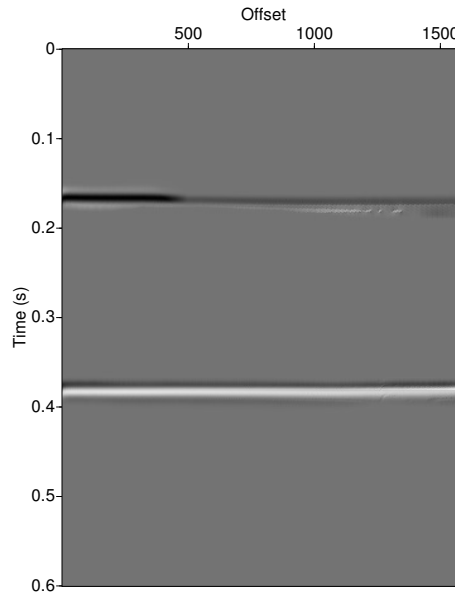
(b) Aplicando al registro corrección de NMO hiperbólica.

Figura 8.8: Registro sísmico de dos capas isotrópicas y una anisótropa VTI, con y sin corrección NMO hiperbólica.

que es una modificación de la ecuación (8.10), donde  $\eta$  es la anelipticidad que depende de los parámetros de anisotropía de Thomsen

$$\eta = \frac{\varepsilon - \delta}{1 + 2\delta}. \quad (8.12)$$

Cuando se hace la corrección con la ecuación (8.11), el evento correspondiente a la interfaz de la capa anisótropa se horizontaliza, como se observa en la Figura 8.9 y por lo tanto el apilado será correcto.



(a)

Figura 8.9: Registro sísmico de dos capas isótropas y una anisótropa VTI, con corrección NMO no hiperbólica.

Hay que tener en cuenta que cuando se está en el dominio espacio-temporal como en el caso anterior, los parámetros de Thomsen son valores RMS.

Los parámetros de Thomsen en profundidad son cantidades que varían en intervalos de profundidad. Para el caso de la capa VTI de este ejemplo, se obtuvieron los parámetros  $\varepsilon = 0.57$ ,  $\gamma = 0.75$  y  $\delta = -0.07$  a partir de los coeficientes de rigidez  $p_{ij}$  calculados. Estos parámetros obtenidos, son útiles también en los algoritmos de

*CAPÍTULO 8. PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS POROELÁSTICOS  
FRACTURADOS UTILIZANDO MEDIOS VISCOELÁSTICOS  
EQUIVALENTES*

---

migración en profundidad, donde la determinación de la velocidad de migración es el parámetro crítico que conlleva a un procesamiento del dato bien hecho.



## CAPÍTULO 9

# CONCLUSIONES

---

La tesis comenzó con una revisión de la teoría de Biot de propagación de ondas en medios poroelásticos saturados (medios de Biot). Se analizó el comportamiento de los tres tipos de onda cuando un medio poroelástico se satura con diferentes fluidos. Se observó que la onda de tipo  $P_{II}$  pasa de ser difusiva en bajas frecuencias a onda de propagación en altas frecuencias. Las ondas  $P_I$  y  $S$  presentan comportamiento similar en todo el rango de frecuencias.

Luego se pasó a modelar la propagación de ondas en medios de Biot usando elementos finitos no conformes, lo que requiere 12 nodos por elemento. Los resultados mostraron que al saturar una roca con dos fluidos diferentes se observa la aparición de ondas convertidas y lo mismo ocurre en el caso de dos tipos de roca saturada por el mismo fluido. También se observó como al saturar una misma roca con agua y petróleo, la velocidad varía dependiendo de las propiedades del fluido, aunque la matriz rocosa sea la misma.

Se resolvió el problema de dispersión para ondas que inciden en un sistema poroso saturado por un fluido, compuesto por una capa plana que separa dos semiespacios, donde los medios se describen por la teoría de poroelasticidad de Biot. Los resultados se validaron con casos límites conocidos, como porosidad cero (sólidos elásticos) y 100 % de porosidad (fluidos no viscosos), y el caso de una única interfaz

entre dos semiespacios poroelásticos cuando el espesor de la capa tiende a cero.

Las ecuaciones predicen todas las ondas convertidas, los ángulos críticos y los cambios de polaridad, dependiendo del tipo de onda incidente. Se estudiaron casos específicos, como una capa porosa altamente permeable. Las ecuaciones planteadas se pueden utilizar para estudiar muchos casos prácticos, como por ejemplo, la respuesta sísmica de fracturas en reservorios de areniscas y de carbonatos y los efectos AVO de una fractura (capa porosa delgada y permeable) en función del tipo de fluido y las características de la matriz rocosa, como la porosidad y la permeabilidad.

Para el cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión modelando la fractura como una condición de borde, en todos los casos analizados (coeficientes R-T), a frecuencias sísmicas, se observaron buenos ajustes con los coeficientes R-T obtenidos modelando la fractura como una capa delgada. En los ejemplos que se analizaron, las diferencias entre la respuesta acústica de la fractura debido a los fluidos que la saturan, se podría usar para inferir que tipo de fluido satura las fracturas de una roca, pero esto necesita un estudio más profundo.

Pasando al modelado de medios de Biot que contienen conjuntos de fracturas orientadas en direcciones preferenciales, se presentó un conjunto de experimentos armónicos cuasiestáticos para determinar los coeficientes complejos de rigidez y dependientes de la frecuencia para un medio viscoelástico transversalmente isótropo (VTI) equivalente a un medio poroelástico saturado de fluido que contiene un conjunto denso de fracturas. El simulador numérico desarrollado, se basa en la solución por el método de los elementos finitos de las ecuaciones de Biot en el rango difusivo con condiciones de borde que representan pruebas de compresibilidad y cizallamiento. Las fracturas se modelan como capas poroelásticas delgadas y permeables.

A diferencia de los modelos desarrollados hasta el presente donde el background y las fracturas son homogéneos e isótropos, el algoritmo que se desarrolló permite la inclusión heterogeneidades en las capas poroelásticas analizadas, background y fracturas. En los ejemplos desarrollados se observó direcciones preferenciales para

la atenuación y para la velocidad dependiendo del tipo de onda analizada, lo que demuestra los efectos de la anisotropía en el medio viscoelástico equivalente.

Siguiendo con esta temática, se modeló la fractura como una condición de borde usando el método de los elementos finitos y los mismos tests armónicos desarrollados con el anterior algoritmo. Así se obtienen los coeficientes complejos de la matriz de rigidez del medio viscoelástico equivalente VTI, reduciendo el número de incógnitas debido a que la fractura se modela como discontinuidades en las presiones del fluido y en los desplazamientos, manteniendo continuas las componentes de las tensiones totales. El algoritmo fue validado con modelos preexistentes y con el modelo de capa fina. En cuanto a los ejemplos desarrollados se analizaron los efectos de la anisotropía en la atenuación y en la velocidad de la energía para diferentes casos donde los medios son homogéneos o contienen heterogeneidades. También se observó como al aumentar el espesor de las fracturas, los efectos de la anisotropía sobre las velocidades aumentan de forma considerable. Por último, también se destaca el efecto de la presión poral, que al aumentar, incrementa los efectos de anisotropía de las diferentes ondas.

Finalmente, se realizó el modelado de propagación de ondas en medios viscoelásticos a partir de los coeficientes de rigidez calculados con los algoritmos de modelado de medios de Biot con conjuntos densos de fracturas. Para este modelado se usaron elementos no conformes y 8 nodos por elemento, lo que reduce el número de incógnitas, en comparación del modelado de medios poroelásticos. Otra ventaja del modelado de medios equivalentes, es que no se necesita hacer un mallado tan fino para modelar fracturas delgadas orden de centímetros o milímetros, basta con obtener los coeficientes de rigidez del medio viscoelástico equivalente VTI.

En los ejemplos vistos se observaron los efectos de la densidad de fracturamiento, donde al aumentar el número de fracturas por metro, el efecto de la anisotropía se hace más fuerte y la triplicación del frente de onda para la onda qSV se hace más evidente. También se analizó el efecto del fluido saturante y como el caso de saturación

en forma de patches de gas y agua afecta la velocidad de las ondas. Se mostró la importancia de tener en cuenta la anisotropía en el procesamiento de datos sísmicos de reflexión y la posibilidad de conocer los parámetros de anisotropía a partir del cálculo de los coeficientes de rigidez obtenidos en el modelado.

# AGRADECIMIENTOS

---

En este espacio quiero agradecer a todas las personas que me apoyaron durante el desarrollo de esta tesis.

A mis padres por su esfuerzo y dedicación, gracias por enseñarme a nunca renunciar e insistir hasta lograr mis metas.

Al Dr. Juan Santos y a la Dra. Patricia Gauzellino les agradezco por su orientación, ya que sin su ayuda este trabajo no hubiera sido posible.

Al Dr. José Carcione por sus consejos y su tiempo.

Por último a la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica de Argentina, a través del FONARSEC FSTIC 06/10 y el CONICET.

## APÉNDICE A

# TEORÍA DE LA ATENUACIÓN DEL FLUJO MESOSCÓPICO PARA MEDIOS PORO-ELÁSTICOS ANISÓTROPOS

---

La teoría de White para la atenuación del flujo mesoscópico (White et al., 1975; Carcione y Picotti, 2006) describe el medio viscoelástico equivalente de un apilado de 2 capas porosas isotropas, delgadas e intercaladas, con espesores  $d_1$  y  $d_2$  menores que la longitud de onda de la onda que se propaga, de modo que el período de la estratificación es  $d = d_1 + d_2$ . Dicha teoría nos da el coeficiente de rigidez complejo y dependiente de la frecuencia  $p_{33}$ .

Este modelo de White fue generalizado en Krzikalla y Müller (2011) para un medio anisótropo, en otras palabras, ellos obtuvieron los cinco coeficientes de rigidez del medio VTI equivalente, denotados por  $p_{IJ}$ . Las relaciones esfuerzo-deformación están dadas por las ecuaciones (6.3)-(6.8) y

$$p_{IJ}(\omega) = c_{IJ} + \left( \frac{c_{IJ} - c_{IJ}^r}{c_{33} - c_{33}^r} \right) [p_{33}(\omega) - c_{33}], \quad (\text{A.1})$$

donde  $c_{IJ}^r$  y  $c_{IJ}$  son los coeficientes de rigidez relajados y no relajados.

De acuerdo con Gelinsky y Shapiro (1997)-Eq. (14), las constantes efectivas

cuasi-estáticas o relajadas de un apilados de capas poro-elásticas son

$$\begin{aligned}
 c_{66}^r &= B_1^* = \langle \mu \rangle, \\
 c_{11}^r - 2c_{66}^r &= c_{12}^r = B_2^* = 2 \left\langle \frac{\lambda_m \mu}{H_m} \right\rangle + \left\langle \frac{\lambda_m}{H_m} \right\rangle^2 \left\langle \frac{1}{H_m} \right\rangle^{-1} + \frac{B_6^{*2}}{B_8^*}, \\
 c_{13}^r &= B_3^* = \left\langle \frac{\lambda_m}{H_m} \right\rangle \left\langle \frac{1}{H_m} \right\rangle^{-1} + \frac{B_6^* B_7^*}{B_8^*}, \\
 c_{33}^r &= B_4^* = \left\langle \frac{1}{H_m} \right\rangle^{-1} + \frac{B_7^{*2}}{B_8^*} = \left[ \left\langle \frac{1}{H_m} \right\rangle - \left\langle \frac{\alpha}{H_m} \right\rangle^2 \left\langle \frac{H_u}{M H_m} \right\rangle^{-1} \right]^{-1}, \\
 c_{55}^r &= B_5^* = \langle \mu^{-1} \rangle^{-1}, \\
 B_6^* &= -B_8^* \left( 2 \left\langle \frac{\alpha \mu}{H_m} \right\rangle + \left\langle \frac{\alpha}{H_m} \right\rangle \left\langle \frac{\lambda_m}{H_m} \right\rangle \left\langle \frac{1}{H_m} \right\rangle^{-1} \right), \\
 B_7^* &= -B_8^* \left\langle \frac{\alpha}{H_m} \right\rangle \left\langle \frac{1}{H_m} \right\rangle^{-1}, \\
 B_8^* &= \left[ \left\langle \frac{1}{M} \right\rangle + \left\langle \frac{\alpha^2}{H_m} \right\rangle - \left\langle \frac{\alpha}{H_m} \right\rangle^2 \left\langle \frac{1}{H_m} \right\rangle^{-1} \right]^{-1},
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

donde

$$\lambda_m = K_m - \frac{2}{3}\mu \quad \text{and} \quad H_m = K_m + \frac{4}{3}\mu, \tag{A.3}$$

y  $\langle \cdot \rangle$  se refiere al valor promedio ponderado de la cantidad dentro de las llaves angulares.

En el caso cuando no hay flujo entre capas, es decir, en el régimen no relajado, las constantes son (Gelinsky y Shapiro (1997)-Ec. 15)

$$\begin{aligned}
 c_{66} &= c_{66}^r, \\
 c_{11} - 2c_{66} &= c_{12} = 2 \left\langle \frac{(H_u - 2\mu)\mu}{H_u} \right\rangle + \left\langle \frac{H_u - 2\mu}{H_u} \right\rangle^2 \left\langle \frac{1}{H_u} \right\rangle^{-1}, \\
 c_{13} &= \left\langle \frac{H_u - 2\mu}{H_u} \right\rangle \left\langle \frac{1}{H_u} \right\rangle^{-1}, \\
 c_{33} &= \left\langle \frac{1}{H_u} \right\rangle^{-1}, \\
 c_{55} &= c_{55}^r
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

donde

$$H_u = H_m + \alpha^2 M, \tag{A.5}$$

y  $M$  está dado en la ecuación (2.7).

Finalmente, el módulo de la onda P  $p_{33}$  es (White et al., 1975; Carcione, 2015)

$$p_{33} = \left[ \frac{1}{c_{33}} + \frac{2(r_2 - r_1)^2}{i\omega(d_1 + d_2)(I_1 + I_2)} \right]^{-1}, \quad (\text{A.6})$$

donde

$$r = \frac{\alpha M}{H_u} \quad (\text{A.7})$$

y

$$I = \frac{\eta}{\kappa a} \coth\left(\frac{ad}{2}\right), \quad a = \sqrt{\frac{i\omega\mu H_u}{\kappa M H_m}}, \quad (\text{A.8})$$

para cada capa.

La principal consideración en Krzikalla y Müller (2011) es que el flujo de fluido es perpendicular a la dirección de fracturamiento y que el comportamiento de relajación se describe por una sola función de rigidez, en otras palabras,  $p_{33}(\omega)$ . Por lo tanto, la teoría es válida para las capas planas y no se puede utilizar cuando están presentes heterogeneidades 2D o 3D.



## APÉNDICE B

# VELOCIDADES Y FACTORES DE CALIDAD DEL MEDIO EQUIVALENTE VTI

---

Las velocidades complejas del medio VTI equivalente están dadas por (Carcione, 2015)

$$v_{qP} = (2\bar{\rho})^{-1/2} \sqrt{p_{11}l_1^2 + p_{33}l_3^2 + p_{55} + A}, \quad (\text{B.1})$$

$$v_{qSV} = (2\bar{\rho})^{-1/2} \sqrt{p_{11}l_1^2 + p_{33}l_3^2 + p_{55} - A}, \quad (\text{B.2})$$

$$v_{SH} = \bar{\rho}^{-1/2} \sqrt{p_{66}l_1^2 + p_{55}l_3^2}, \quad (\text{B.3})$$

$$A = \sqrt{[(p_{11} - p_{55})l_1^2 + (p_{55} - p_{33}l_3^2)]^2 + 4[(p_{13} + p_{55})l_1l_3]^2}. \quad (\text{B.4})$$

donde  $\bar{\rho} = \langle \rho_b \rangle$  es el promedio ponderado de la densidad de masa del agregado sólido-fluido,  $l_1 = \sin(\theta)$  y  $l_3 = \cos(\theta)$  son los cosenos directores,  $\theta$  es el ángulo de propagación entre el vector número de onda y el eje de simetría  $z$ . Las tres velocidades corresponden a las ondas  $qP$ ,  $qSV$  y  $SH$ . La velocidad de fase y el factor de calidad están dados por

$$\left[ \operatorname{Re} \left( \frac{1}{v} \right) \right]^{-1}, \quad Q = \frac{\operatorname{Re}(v^2)}{\operatorname{Im}(v^2)}, \quad (\text{B.5})$$

donde  $v$  representa las velocidades  $V_{qP}$ ,  $V_{qSV}$  o  $V_{SH}$ .

La vector velocidad de energía  $\mathbf{V}_e$  de las ondas  $qP$  y  $qSV$  es

$$\frac{\mathbf{v}_e}{v_p} = (l_1 + l_3 \cot \Phi)^{-1} \hat{\mathbf{e}}_1 + (l_1 \tan \Phi + l_3)^{-1} \hat{\mathbf{e}}_3, \quad (\text{B.6})$$

con  $\Phi$  siendo el ángulo entre el vector velocidad de energía y el eje  $z$  (Carcione, 2015). El vector velocidad de energía de la onda  $SH$  es (Carcione, 2015)

$$\mathbf{v}_e = \frac{1}{\rho} (l_1 p_{66} \hat{\mathbf{e}}_1 + l_3 p_{55} \hat{\mathbf{e}}_3). \quad (\text{B.7})$$

# BIBLIOGRAFÍA

---

- Alkhalifah, T. y Tsvankin, I. (1995). Velocity analysis for transversely isotropic media. *Geophysics*, 60(5):1550–1566.
- Allard, J., Bourdier, R., y Depollier, C. (1986). Biot waves in layered media. *Journal of Applied Physics*, 60(6):1926–1929.
- Arntsen, B. y Carcione, J. M. (2001). Numerical simulation of the biot slow wave in water-saturated nivelsteiner sandstone. *Geophysics*, 66(3):890–896.
- Bakke, N. E. y Ursin, B. (1998). Thin-bed avo effects. *Geophysical Prospecting*, 46(6):571–587.
- Bakuh, A. y Molotkov, L. (2005). *Poroelastic medium with fractures as limiting case of stratified poroelastic medium with thin and soft Biot layers*, pages 1001–1004.
- Berryman, J. G. (1980). Confirmation of biot’s theory. *Applied Physics Letters*, 37(4):382–384.
- Berryman, J. G. (1982). Elastic waves in fluid-saturated porous media. In *Macroscopic Properties of Disordered Media: Proceedings of a Conference Held at the Courant Institute June 1–3, 1981*, pages 38 – 50. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Berryman, J. G. (2003). Dynamic permeability in poroelasticity. *Stanford Exploration Project, Report*, 113:443–453.
- Bidner, M. (2010). *Propiedades de la roca y los fluidos en reservorios de petróleo*. Manuales. EUDEBA.

- Biot, M. A. (1956a). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2):168–178.
- Biot, M. A. (1956b). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. ii. higher frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2):179–191.
- Biot, M. A. (1962). Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics*, 33(4):1482–1498.
- Brajanovski, M., Gurevich, B., y Schoenberg, M. (2005). A model for p-wave attenuation and dispersion in a porous medium permeated by aligned fractures. *Geophysical Journal International*, 163(1):372–384.
- Calderón, M. C., Ramos, M. J., Kerdan, T., Raúl, C. G., y González, I. A. (2003). Procesamiento en tiempo de datos sísmicos de reflexión de ondas p en medios con isotropía transversal con eje de simetría vertical (itv). *GEOS*, 23(3):302–309.
- Carcione, J. M. (1996). Elastodynamics of a non-ideal interface: Application to crack and fracture scattering. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 101(B12):28177–28188.
- Carcione, J. M. (1997). Reflection and transmission of qp-qs plane waves at a plane boundary between viscoelastic transversely isotropic media. *Geophysical Journal International*, 129(3):669–680.
- Carcione, J. M. (1998). Scattering of elastic waves by a plane crack of finite width in a transversely isotropic medium. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 22(4):263–275.
- Carcione, J. M. (2001). Amplitude variations with offset of pressure-seal reflections. *Geophysics*, 66(1):283–293.
- Carcione, J. M. (2015). *Wave Fields in Real Media. Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media*. Elsevier, Oxford, third edition.

- Carcione, J. M., Gurevich, B., y Cavallini, F. (2000). A generalized biot-gassmann model for the acoustic properties of shaley sandstones1. *Geophysical Prospecting*, 48(3):539–557.
- Carcione, J. M., Gurevich, B., Santos, J. E., y Picotti, S. (2013). Angular and frequency-dependent wave velocity and attenuation in fractured porous media. *Pure and Applied Geophysics*, 170(11):1673–1683.
- Carcione, J. M., Morency, C., y Santos, J. E. (2010). Computational poroelasticity — a review. *Geophysics*, 75(5):75A229–75A243.
- Carcione, J. M. y Picotti, S. (2006). P-wave seismic attenuation by slow-wave diffusion: Effects of inhomogeneous rock properties. *Geophysics*, 71(3):O1–O8.
- Carcione, J. M. y Picotti, S. (2012). Reflection and transmission coefficients of a fracture in transversely isotropic media. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 56(2):307–322.
- Carcione, J. M., Picotti, S., Gei, D., y Rossi, G. (2006). Physics and seismic modeling for monitoring co2 storage. *pure and applied geophysics*, 163(1):175–207.
- Carcione, J. M., Picotti, S., y Santos, J. E. (2012a). Numerical experiments of fracture-induced velocity and attenuation anisotropy. *Geophysical Journal International*, 191(3):1179–1191.
- Carcione, J. M., Santos, J. E., y Picotti, S. (2011). Anisotropic poroelasticity and wave-induced fluid flow: harmonic finite-element simulations. *Geophysical Journal International*, 186(3):1245–1254.
- Carcione, J. M., Santos, J. E., y Picotti, S. (2012b). Fracture-induced anisotropic attenuation. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 45(5):929–942.
- Carcione, J. M., Santos, J. E., Ravazzoli, C. L., y Helle, H. B. (2003). Wave simulation in partially frozen porous media with fractal freezing conditions. *Journal of Applied Physics*, 94(12):7839–7847.

- 
- Chung, H. y Lawton, D. C. (1995a). Amplitude responses of thin beds: Sinusoidal approximation versus ricker approximation. *Geophysics*, 60(1):223–230.
- Chung, H. y Lawton, D. C. (1995b). Frequency characteristics of seismic reflections from thin beds. *Can. J. Expl. Geophys.*, 31:32–37.
- Ciarlet, P. (1978). *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Studies in Mathematics and its Applications. Elsevier Science.
- Daley, T. M., Schoenberg, M. A., Rutqvist, J., y Nihei, K. T. (2006). Fractured reservoirs: An analysis of coupled elastodynamic and permeability changes from pore-pressure variation. *Geophysics*, 71(5):O33–O41.
- Douglas, J., Sheen, D., y Santos, J. E. (1994). Approximation of scalar waves in the space-frequency domain. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 04(04):509–531.
- Douglas, Jim Jr., S. J. E. S. D. Y. X. (1999). Nonconforming galerkin methods based on quadrilateral elements for second order elliptic problems. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 33(4):747–770.
- Dutta, N. C. y Odé, H. (1979a). Attenuation and dispersion of compressional waves in fluid-filled porous rocks with partial gas saturation (white model)-part i: Biot theory. *Geophysics*, 44(11):1777–1788.
- Dutta, N. C. y Odé, H. (1979b). Attenuation and dispersion of compressional waves in fluid-filled porous rocks with partial gas saturation (white model)-part ii: Results. *Geophysics*, 44(11):1789–1805.
- Dutta, N. C. y Odé, H. (1983). Seismic reflections from a gas-water contact. *Geophysics*, 48(2):148–162.
- Fellah, M., Fellah, Z. E. A., Mitri, F. G., Ogam, E., y Depollier, C. (2013). Transient ultrasound propagation in porous media using biot theory and fractional calculus:

- 
- Application to human cancellous bone. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(4):1867–1881.
- Frankel, A. y Clayton, R. W. (1986). Finite difference simulations of seismic scattering: Implications for the propagation of short-period seismic waves in the crust and models of crustal heterogeneity. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 91(B6):6465–6489.
- Gassmann, F. (1951). *Über die Elastizität poröser Medien*. Mitteilungen aus dem Institut für Geophysik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich. Inst. für Geophysik an der ETH.
- Gauzellino, P. M., Santos, J. E., y Sheen, D. (2001). Frequency domain wave propagation modeling in exploration seismology. *Journal of Computational Acoustics*, 09(03):941–955.
- Gelinsky, S. y Shapiro, S. A. (1997). Poroelastic backus averaging for anisotropic layered fluid and gas saturated sediments. *Geophysics*, 62(6):1867–1878.
- Grechka, V. (2007). Comparison of the non-interaction and differential schemes in predicting the effective elastic properties of fractured media. *International Journal of Fracture*, 144(3):181–188.
- Gu, B., Nihei, K. T., Myer, L. R., y Pyrak-Nolte, L. J. (1996). Fracture interface waves. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 101(B1):827–835.
- Gurevich, B. (2003). Elastic properties of saturated porous rocks with aligned fractures. *Journal of Applied Geophysics*, 54(3):203 – 218. *Advances in Seismic Anisotropy*.
- Gurevich, B., Zyrianov, V. B., y Lopatnikov, S. L. (1997). Seismic attenuation in finely layered porous rocks: Effects of fluid flow and scattering. *Geophysics*, 62(1):319–324.

- 
- Ha, T., Santos, J. E., y Sheen, D. (2002). Nonconforming finite element methods for the simulation of waves in viscoelastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(49):5647 – 5670.
- Hsu, C. y Schoenberg, M. (1993). Elastic waves through a simulated fractured medium. *Geophysics*, 58(7):964–977.
- Jim Douglas, Jr., F. P. y Santos, J. E. (1995). A parallelizable approach to the simulation of waves in dispersive media. in mathematical and numerical aspects of wave propagation (mandelieu-la napoule, 1995). *SIAM*, 247:673–682.
- Jocker, J. y Smeulders, D. (2009). Ultrasonic measurements on poroelastic slabs: Determination of reflection and transmission coefficients and processing for biot input parameters. *Ultrasonics*, 49(3):319 – 330.
- Johnson, D. L., Koplik, J., y Dashen, R. (1987). Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 176:379–402.
- Johnson, D. L., Plona, T. J., y Kojima, H. (1994). Probing porous media with first and second sound. ii. acoustic properties of water-saturated porous media. *Journal of Applied Physics*, 76(1):115–125.
- Juhlin, C. y Young, R. (1993). Implications of thin layers for amplitude variation with offset (avo) studies. *Geophysics*, 58(8):1200–1204.
- Kolsky, H. (1963). *Stress waves in solids*. Dover publications, NewYork.
- Krief, M., Garat, J., Stellingwerff, J., y Ventre, J. (1990). A petrophysical interpretation using the velocities of p and s waves (full waveform sonic). *The Log Analyst*, 31:355–369.
- Krzikalla, F. y Müller, T. M. (2011). Anisotropic p-sv-wave dispersion and attenuation due to inter-layer flow in thinly layered porous rocks. *Geophysics*, 76(3):WA135–WA145.



- 
- Lambert, G., Gurevich, B., y Brajanovski, M. (2005). Frequency-dependent anisotropy of porous rocks with aligned fractures. *poromechanics iii - biot centennial (1905-2005)*. pages 309–314.
- Liu, Y. y Schmitt, D. R. (2003). Amplitude and avo responses of a single thin bed. *Geophysics*, 68(4):1161–1168.
- Love, A. (1892). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, volume 1.
- Lovera, O. M. y Santos, J. E. (1988). Numerical methods for a model for wave propagation in composite anisotropic media. *ESAIM: M2AN*, 22(1):159–176.
- Martínez, R., Santos, J. E., Gauzellino, P. M., y Carcione, J. M. (2014). Reflection and transmission coefficients of a single layer in poroelastic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 135(6):3151–3162.
- Martínez, R., Santos, J. E., Gauzellino, P. M., y Carcione, J. M. (2016). Validation of the boundary conditions to model the seismic response of fractures. *Geophysical Prospecting*, 64(4):1149–1165.
- Mavko, Gary; Mukerji, T. D. J. (2009). *The rock physics handbook : tools for seismic analysis in porous media*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition.
- McCoy, R. (1983). *Reservoir engineering and formation evaluation*. Microcomputer programs for petroleum engineers. Gulf Pub. Co.
- Nakagawa, S. y Schoenberg, M. A. (2007). Poroelastic modeling of seismic boundary conditions across a fracture. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 122(2):831–847.
- Nedelec, J. C. (1980). Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numerische Mathematik*, 35(3):315–341.

- 
- Petra, C. G., Schenk, O., y Anitescu, M. (2014a). Real-time stochastic optimization of complex energy systems on high-performance computers. *IEEE Computing in Science & Engineering*, 16(5):32–42.
- Petra, C. G., Schenk, O., Lubin, M., y Gärtner, K. (2014b). An augmented incomplete factorization approach for computing the schur complement in stochastic optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36(2):C139–C162.
- Picotti, S., Carcione, J. M., Gei, D., Rossi, G., y Santos, J. E. (2012). Seismic modeling to monitor co2 geological storage: The atzbach-schwanenstadt gas field. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 117(B6):n/a–n/a. B06103.
- Picotti, S., Carcione, J. M., Santos, J. E., y Gei, D. (2010). Q-anisotropy in finely-layered media. *Geophysical Research Letters*, 37(6):n/a–n/a. L06302.
- Pilant, W. L. (1979). *Elastic Waves in the Earth*. Elsevier Science, Amsterdam, 1st edition.
- Plona, T. J. (1980). Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. *Applied Physics Letters*, 36(4):259–261.
- Pride, S. R., Tromeur, E., y Berryman, J. G. (2002). Biot slow-wave effects in stratified rock. *Geophysics*, 67(1):271–281.
- Pyrak-Nolte, L. J., Myer, L. R., y Cook, N. G. W. (1990). Transmission of seismic waves across single natural fractures. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 95(B6):8617–8638.
- Quintal, B., Schmalholz, S. M., y Podladchikov, Y. Y. (2009). Low-frequency reflections from a thin layer with high attenuation caused by interlayer flow. *Geophysics*, 74(1):N15–N23.
- Raviart, P. A. y Thomas, J. M. (1977). *A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems*, pages 292–315. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

- 
- Russo, D. y Bouton, M. (1992). Statistical analysis of spatial variability in unsaturated flow parameters. *Water Resources Research*, 28(7):1911–1925.
- Russo, D., Russo, I., y Laufer, A. (1997). On the spatial variability of parameters of the unsaturated hydraulic conductivity. *Water Resources Research*, 33(5):947–956.
- Santos, J. E. y Carcione, J. M. (2015). Finite-element harmonic experiments to model fractured induced anisotropy in poroelastic media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283:1189 – 1213.
- Santos, J. E., Carcione, J. M., y Picotti, S. (2011). Viscoelastic-stiffness tensor of anisotropic media from oscillatory numerical experiments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9):896 – 904.
- Santos, J. E., Corbero, J. M., Ravazzoli, C. L., y Hensley, J. L. (1992). Reflection and transmission coefficients in fluid-saturated porous media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 91(4):1911–1923.
- Santos, J. E., Corredor, R. M., y Carcione, J. M. (2017). Determination of a transversely isotropic medium equivalent to a fractured fluid-saturated poroelastic medium. a finite element approach. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 39(2):B244–B271.
- Santos, J. E., Douglas, JR, J., Morley, M. E., y Lovera, O. M. (1988). Finite element methods for a model for full waveform acoustic logging. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 8(4):415.
- Santos, J. E., Ravazzoli, C. L., y Carcione, J. M. (2004). A model for wave propagation in a composite solid matrix saturated by a single-phase fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(6):2749–2760.
- Santos, J. E., Rubino, J. G., y Ravazzoli, C. L. (2009). A numerical upscaling procedure to estimate effective plane wave and shear moduli in heterogeneous fluid-saturated poroelastic media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(27):2067 – 2077.

- Santos, J. E. y Sheen, D. (2007). Finite element methods for the simulation of waves in composite saturated poroviscoelastic media. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(1):389–420.
- Schmidt, H. y Tango, G. (1986). Efficient global matrix approach to the computation of synthetic seismograms. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 84(2):331–359.
- Schoenberg, M. (1980). Elastic wave behavior across linear slip interfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 68(5):1516–1521.
- Schoenberg, M. y Douma, J. (1988). Elastic wave propagation in media with parallel fractures and aligned cracks. *Geophysical Prospecting*, 36(6):571–590.
- Standing, M. (1977). *Volumetric and phase behavior of oil field hydrocarbon systems*. Soc. Petroleum Eng. AIME, Dallas.
- Thomsen, L. (1986). Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, 51(10):1954–1966.
- White, J. E., Mihailova, N., y Lyakhovitsky, F. (1975). Low-frequency seismic waves in fluid-saturated layered rocks. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 57(S1):S30–S30.
- Widess, M. B. (1973). How thin is a thin bed? *Geophysics*, 38(6):1176–1180.
- Wu, K., Xue, Q., y Adler, L. (1990). Reflection and transmission of elastic waves from a fluid-saturated porous solid boundary. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 87(6):2349–2358.
- Zyserman, F. I. y Gauzellino, P. M. (2005). Dispersion analysis of a nonconforming finite element method for the three-dimensional scalar and elastic wave equations. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41(13):1309 – 1326.
- Zyserman, F. I., Gauzellino, P. M., y Santos, J. E. (2003). Dispersion analysis of a non-conforming finite element method for the helmholtz and elastodynamic equa-

- tions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(9):1381–1395.
- Zyserman, F. I. y Santos, J. E. (2007). Analysis of the numerical dispersion of waves in saturated poroelastic media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45):4644 – 4655.