

# Departamento de Aeronáutica

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de La Plata



---

## TRABAJO FINAL

---

---

**Tema: Estudio del Fenómeno de Sloshing y diseño de dispositivos atenuadores para sistemas de almacenamiento de vehículos espaciales**

---

Autor: BRUNO, Leonardo Jesús Antonio.

Directora: Dra. Ing. SCARABINO, Ana.

Marzo de 2013

## Contenido

Índice de Figuras .....	3
Índice de Tablas.....	4
AGRADECIMIENTOS.....	6
INTRODUCCION.....	7
Antecedentes.....	11
OBJETIVO .....	12
DESARROLLO.....	13
Modelo analítico lineal .....	13
Campo de ecuaciones del fluido .....	14
Expresiones analíticas de fuerzas y momentos de sloshing .....	23
Estudio sobre la implementación de dispositivos anti-slosh .....	28
Factor de amortiguación anillos deflectores rígidos.....	33
Calculo analítico:.....	34
Estudio del amortiguamiento de anillos deflectores.....	43
Cálculo de pesos y estructural del sistema de anillos.....	58
Modelo numérico computacional .....	63
Modelado .....	64
Resultados de la simulación .....	67
Modelo mecánico equivalente.....	70
Modelo masa-resorte-amortiguador .....	71
Obtención de las ecuaciones del movimiento (mecánica analítica) .....	73
Parámetros del modelo: .....	76
Análisis de diagrama en bloque (Simulink) .....	76
Resultados.....	81
TRABAJOS FUTUROS.....	82
Desarrollo experimental propuesto.....	83
CONCLUSIONES.....	85
BIBLIOGRAFIA .....	87
ANEXO I.....	88
Código de Matlab – Modelo mecánico.....	88
Diagrama de bloques – Modelo mecánico. ....	91

## Índice de Figuras

FIGURA 1 – TANQUES DE COMBUSTIBLE DE VEHÍCULO ESPACIAL.....	7
FIGURA 2- SISTEMA DE ALIMENTACIÓN .....	8
FIGURA 3 – MODOS DE VIBRAR .....	9
FIGURA 4 – SLOSHING EN TANQUE DE COMBUSTIBLE .....	10
FIGURA 5 - SISTEMA COORDENADO .....	14
FIGURA 6: MODOS NATURALES DE SLOSHING TANQUE CILÍNDRICO VERTICAL (MODELO LINEAL).....	22
FIGURA 7: PRESIÓN MÁXIMA INSTANTÁNEA NORMALIZADA SOBRE LA PARED (MOD. LINEAL)[1].....	27
FIGURA 8: DISTINTOS DISPOSITIVOS AMORTIGUADORES DE SLOSHING[1] .....	30
FIGURA 9: FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO DE UN SUPRESOR CÓNICO .....	31
FIGURA 10 - SUPRESOR CÓNICO VERTICAL PERFORADO .....	31
FIGURA 11: FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO DE UN SUPRESOR CÓNICO INVERTIDO .....	32
FIGURA 12: DISTINTAS CONFIGURACIONES DE ANILLOS ANTISLOSHING.....	33
FIGURA 13 - MODIFICACIÓN DE FRECUENCIA NATURAL DE SLOSHING. ....	34
FIGURA 14: FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO PARA DISTINTAS PARÁMETROS W/R. ....	37
FIGURA 15 - PARÁMETROS DEL TANQUE BAJO ESTUDIO. ....	38
FIGURA 16 - AMORTIGUAMIENTO VISCOZO VS. ALTURA DEL FLUIDO. ....	40
FIGURA 17 – CORRECCIÓN PARA TANQUES CILÍNDRICOS.....	41
FIGURA 18 - OBTENCIÓN DE VALORES PARA LA CORRECCIÓN .....	41
FIGURA 19 - AMORTIGUAMIENTO VISCOZO EN FUNCIÓN DE LA ALTURA DE FLUIDO (CORRECCIÓN) ....	43
FIGURA 20 – CONFIGURACIÓN DE TANQUE CON ANILLOS. ....	44
FIGURA 21 ÁREA BLOQUEADA .....	46
FIGURA 22 . PARÁMETROS FÍSICOS.....	48
FIGURA 23 – AMORTIGUACIÓN VS. UBICACIÓN DE LA SUP. LIBRE .....	50
FIGURA 24 - AMORTIGUACIÓN VS. UBICACIÓN DE LA SUP. LIBRE .....	51
FIGURA 25 - AMORTIGUACIÓN VS. UBICACIÓN DE LA SUP. LIBRE .....	52
FIGURA 26 - COMPARACIÓN DE AMORTIGUACIÓN TEÓRICA Y EXPERIMENTAL .....	52
FIGURA 27 - GRAFICA DE UN SISTEMA DE ANILLOS.....	54
FIGURA 28 – GEOMETRÍA DE ANILLOS .....	55
FIGURA 29 – FACTOR DE AMORTIGUACIÓN VS. NIVEL DE FLUIDO.....	56
FIGURA 30 – VARIACIÓN DE LA AMORTIGUACIÓN SOBRE EL TANQUE CON ANILLOS .....	57
FIGURA 31 – CONFIGURACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS ANILLOS. ....	59
FIGURA 32 – CARGAS Y BC. ....	60
FIGURA 33 - A) DEFORMACIÓN, B) TENSIONES DE VON MISES.....	61
FIGURA 34 - A) DEFORMACIÓN, B) TENSIONES DE VON MISES.....	62
FIGURA 35 – GEOMETRÍA FINAL DEL INTERIOR DEL TANQUE.....	63
FIGURA 36 MALLADO DEL TANQUE .....	64
FIGURA 37 MALLADO ANILLOS.....	65
FIGURA 38 DETALLE MALLA ANILLOS.....	65
FIGURA 39 DETALLE MALLA ANILLOS VISTA .....	66
FIGURA 40 TANQUE INCLINADO.....	66
FIGURA 41 SLOSHING EN TANQUE (1/2 TANQUE).....	67
FIGURA 42 RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN .....	68
FIGURA 43 RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN .....	68
FIGURA 44 – ELEVACIÓN DE LA SUPERFICIE LIBRE – TANQUE SIN ANILLOS.....	69
FIGURA 45 - ELEVACIÓN DE LA SUPERFICIE LIBRE – TANQUE CON ANILLOS.....	70
FIGURA 46- MODELO MASA-RESORTE-AMORTIGUADOR .....	72
FIGURA 47 –DIAGRAMA REPRESENTATIVO DE LA ECUACIÓN 5.....	78

FIGURA 48 – DIAGRAMA REPRESENTATIVO DE LA ECUACIÓN 6 .....	79
FIGURA 49 –SEÑAL FORZANTE X .....	80
FIGURA 50 – SEÑAL FORZANTE $\psi$ .....	80
FIGURA 51 – COMPARACIÓN DE DESPLAZAMIENTO DE LAS MASAS $m_i$ .....	81
FIGURA 52 – FUERZA RESULTANTE (Fx) PARA FRECUENCIA DE 1 [HZ] .....	81
FIGURA 53 – FUERZA RESULTANTE (Fx) PARA FRECUENCIA DE 1.38 [Hz] .....	82
FIGURA 54 – DISPOSITIVO DE ENSAYO PROPUESTO. ....	83

## Índice de Tablas

TABLA 1. NOMENCLATURA .....	5
TABLA 2 – FRECUENCIAS NATURALES DE SLOSHING.....	21
TABLA 3 – VARIACIÓN DEL AMORTIGUAMIENTO EN FUNCIÓN DE LA ALTURA DE FLUIDO .....	39
TABLA 4 – CORRECCIÓN TANQUES CILÍNDRICOS.....	42
TABLA 5 - PRIMER CASO DE ESTUDIO: $w=0,01$ [M], HS DISCRETIZADO CADA $0,05$ [M].....	49
TABLA 6 - SEGUNDO CASO DE ESTUDIO: $w=0,05$ [M], HS DISCRETIZADO CADA $0,05$ [M] .....	50
TABLA 7 - TERCER CASO DE ESTUDIO: $w=0,1$ [M], HS DISCRETIZADO CADA $0,05$ [M] .....	51
TABLA 8 – GEOMETRÍA DE CONFIGURACIÓN DE ANILLOS .....	54
TABLA 9 – AMORTIGUAMIENTO DE ANILLOS .....	55
TABLA 10 - VELOCIDADES.....	58
TABLA 11 - FUERZAS .....	58
TABLA 12 – CARACTERÍSTICAS DEL SISTEMA DE ANILLOS .....	59
TABLA 13 ACELERACIONES EN TANQUE .....	67
TABLA 14– SEÑAL DE SIMULACIÓN.....	79

Tabla 1. Nomenclatura

Variable	Descripción	Unidad
$n$	Modo de vibrar	-
$q$	Velocidad del fluido	m/s
$\frac{\partial q}{\partial t}$	Aceleración local del fluido	m/s <sup>2</sup>
$P$	Presión del fluido	
$\rho$	Densidad	
$\nabla$	Operador diferencial	
$\omega$	Frecuencia angular	rad/s
$\Phi$	Función potencial de velocidades	
$V_0$	Velocidad terna móvil	m/s <sup>2</sup>
$\eta(x, y, t) = \eta(r, \theta, t)$	Elevación de la superficie libre	m
$\dot{X}_0, \dot{Z}_0, \dot{Y}_0$	Componentes del vector Velocidad	m/s
$h$	Altura del fluido	m
$a_{mn}, \beta_{mn}$	Funciones temporales	t
$\lambda_{mn} = \xi_{mn}/R$	Raíces de la función de Bessel del primer tipo	
$g$	Aceleración de la gravedad (cte)	m/s <sup>2</sup>
$R$	Radio del tanque	m
$X_0$	Amplitud de la excitación	m
$\Omega$	Frecuencia de la excitación	Hz
$F_x$	Fuerza en x	N
$F_y$	Fuerza en y	N
$F_z$	Fuerza en z	N
$f$	Frecuencia	Hz
$\xi$	Factor de amortiguamiento viscoso	
$w$	Ancho de anillo	m
$ds=hs$	Distancia entre el anillo y la superficie libre	m
$\gamma$	Factor de amortiguamiento anillo	
$C_d$	Coefficiente de resistencia local	
$A_b$	Área del anillo	m <sup>2</sup>
$A$	Área transversal del tanque	m <sup>2</sup>
$m$	Masa	Kg
$\eta_1$	Máxima amplitud de una ola del líquido	m
$H$	Altura del tanque	m
$T$	Periodo	s
$U_m$	Máxima velocidad en el tiempo	
$Re_l$	Numero adimensional	
$\nu$	Viscosidad cinemática del líquido	
$C_{dome}$	Coefficiente de corrección	
$E$	Energía cinética	J
$C_I$	Coefficiente de área bloqueada	

---

## AGRADECIMIENTOS

---

Haber podido llegar hasta esta instancia es fruto de esfuerzo, esfuerzo que no solo yo he realizado, sino gracias a muchas personas que me han acompañado durante todos estos años y se han esforzado por y junto a mí para cumplir con este sueño. Es por eso que no puedo dejar de agradecer:

En primera instancia a mi familia, que ha sido fundamental en todos estos años. Mis padres Raúl y Cristina; Mis hermanos, Maximiliano, Cecilia, Belén, Natalia y Débora.

Mis compañeros, que hoy son mis amigos y han hecho que todo esto sea más fácil y llevadero.

Mi directora y jefa, Ana, que me ha dado la oportunidad y el honor de trabajar junto a ella.

Y finalmente agradezco a todas esas personas que han aportado y sido parte de este camino que son muchas por cierto y no menos importantes.

Espero seguir siempre mejorando y honrando a todos los seres queridos.

Muchas gracias a todos!

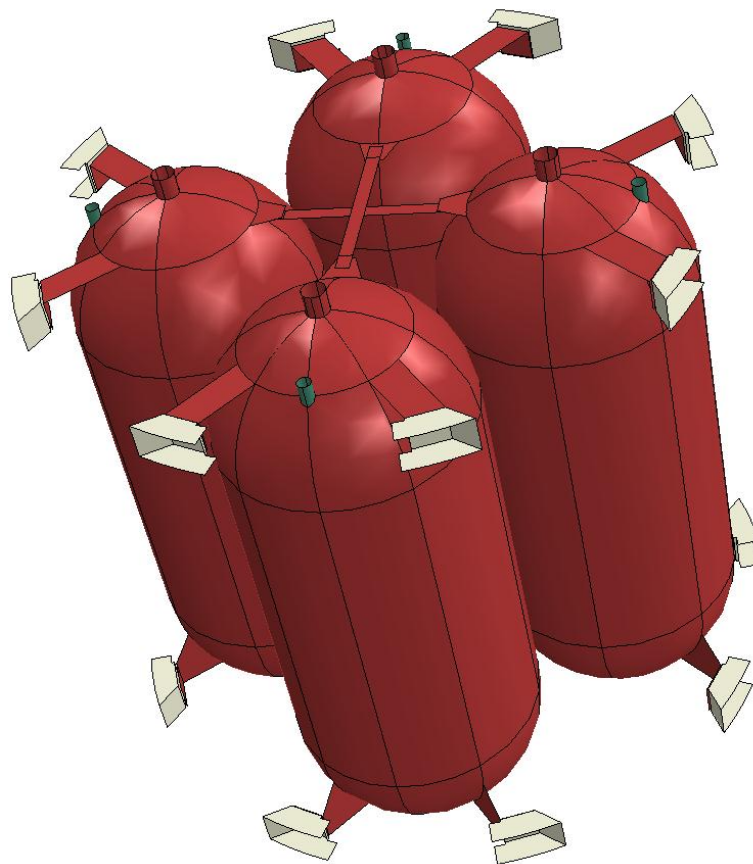
---

Leonardo J. A. Bruno.

## INTRODUCCION

---

Los vehículos espaciales de combustible líquido logran el empuje necesario a través de la combustión en sus motores cohete. En un vehículo con combustible líquido, las bombas impulsan a los propelentes (combustible y oxidante) a través de líneas de alimentación desde sus tanques de almacenamiento hasta la cámara de combustión del motor. Los parámetros termodinámicos (presiones, temperaturas, etc.) presentes y las condiciones de contorno que se dan a lo largo de todo el recorrido que efectúa el líquido hasta ser quemado en la cámara de combustión, dan lugar a distintos fenómenos fluidodinámicos que deben ser estudiados para lograr un óptimo funcionamiento del conjunto.



**Figura 1 – Tanques de combustible de vehículo espacial.**

Los sistemas de alimentación de vehículos espaciales de combustible líquido alimentan al motor mediante tuberías que comunican a éste con los tanques de almacenamiento de combustible que son los encargados de acumular y proveer de combustible a los sistemas de inyección según lo requiera el vehículo en las distintas etapas de vuelo. El fenómeno de *sloshing*, u oleaje, que se describirá en el presente trabajo, tiene lugar en los tanques de combustible y oxidante de este tipo de vehículos y debe ser estudiado con

el objetivo de contribuir de forma positiva al correcto funcionamiento del conjunto, a través del análisis y el diseño de dispositivos pasivos que minimicen los efectos negativos asociados al mismo.

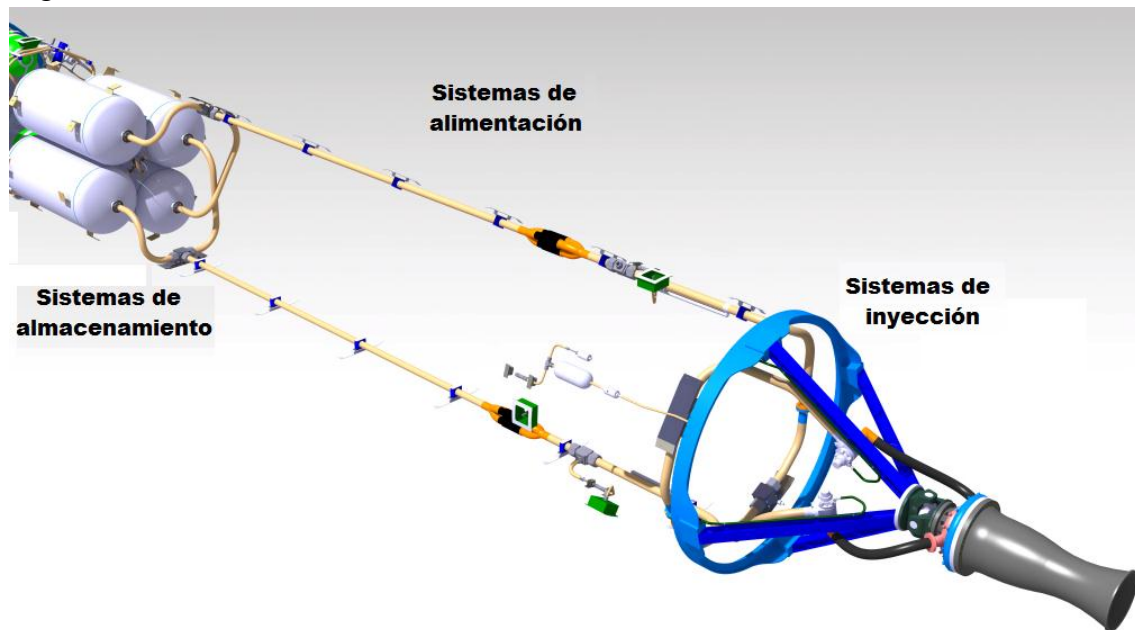


Figura 2- Sistema de alimentación

El *sloshing* es definido como el movimiento que experimenta la superficie libre de un líquido contenido en un recipiente rígido parcialmente lleno debido a la interacción que existe entre el fluido alojado y la estructura contenedora cuando esta es perturbada. Las características del movimiento de la superficie libre, dependerán principalmente del tipo de perturbación que se experimente, de la forma del recipiente contenedor y de las características del fluido, entre otras.

Este fenómeno de “oleaje” dentro de contenedores de líquidos se encuentra dentro de los principales fenómenos fluidodinámicos que contribuyen negativamente a la estabilidad del vehículo espacial ya que estos contienen grandes masas de combustible que generan una importante interacción entre el fluido y la estructura debido a las excitaciones externas que se experimentan durante el vuelo. Este movimiento del fluido trae asociadas inestabilidades dinámicas (dado que posee una determinada frecuencia natural de oscilación), que pueden perjudicar el desempeño e incluso llevar a la falla al conjunto. Bajo excitaciones externas de gran amplitud o cercanas a la frecuencia natural de sloshing, el líquido dentro de un tanque parcialmente lleno es propenso a oscilaciones violentas y presiones de impacto grandes sobre la estructura.

En los vehículos espaciales, las oscilaciones en las masas del combustible y oxidante resultan del desplazamiento lateral o de la rotación angular (spinning) del vehículo durante la fase propulsada del vuelo. Estas perturbaciones del movimiento del vehículo pueden ser causadas por ráfagas de viento, cambios rápidos en el ángulo de ataque del vehículo, pulsos de control en la estabilización en altura o deformaciones elásticas del propio vehículo.

El movimiento del fluido dentro del contenedor posee infinitas frecuencias naturales y modos de vibrar, pero los modos y frecuencias más bajos son los de mayor amplitud y los tienen mayor probabilidad de excitar el movimiento del vehículo.



Dependiendo del tipo de perturbación y del tipo de recipiente en el cual se aloje el fluido, la superficie libre del líquido puede experimentar diferentes tipos de movimientos. Estos pueden ser clasificados en tres tipos de sloshing diferentes:

- Sloshing lateral
- Sloshing vertical
- Sloshing rotacional (Swirling)

Esquemáticamente, se muestra en la figura como se manifiesta una onda de sloshing lateral para los tres primeros modos antisimétrico en un recipiente rectangular (ref.[3]).

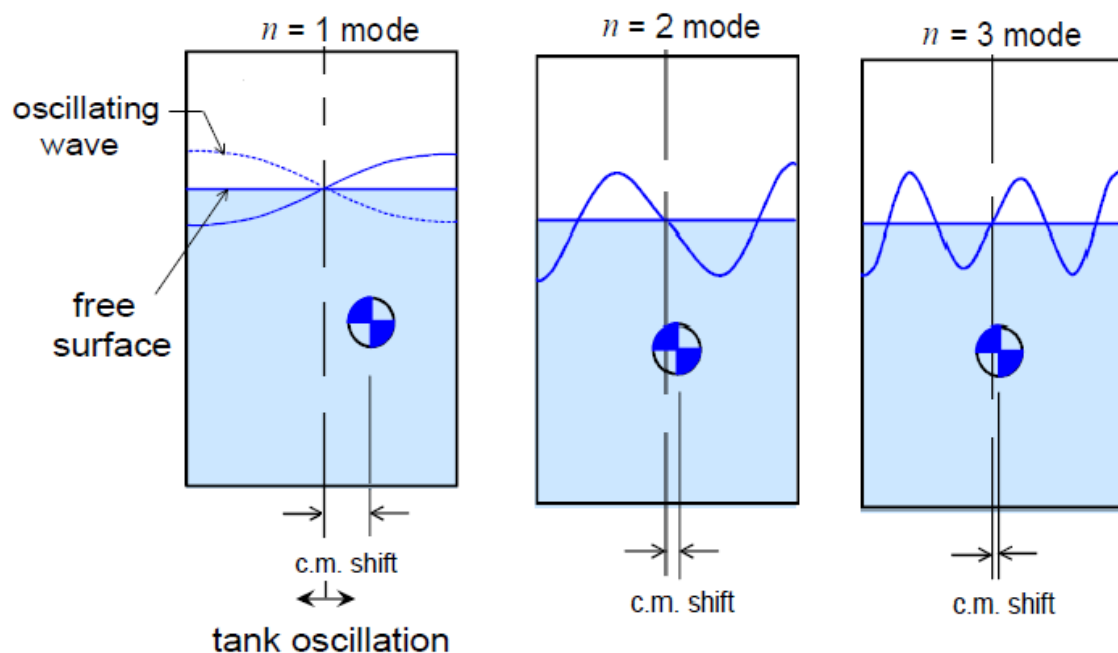


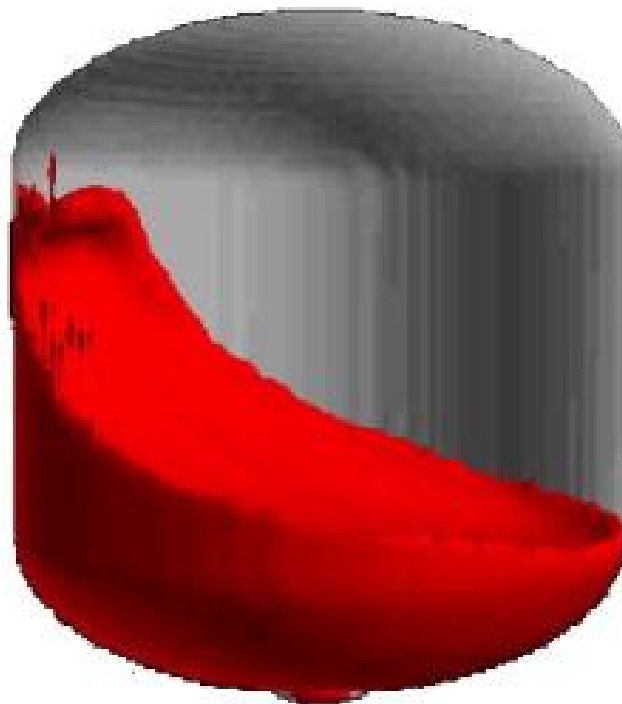
Figura 3 – Modos de vibrar

La onda formada cuando se mueve el recipiente se eleva sobre la superficie libre en una mitad del tanque y desciende en la mitad opuesta y viceversa sucesivamente, generando una oscilación, causante del corrimiento del centro de masas del sistema. Esta oscilación tiene su frecuencia natural asociada, la que acoplada (o en cercanía) con la frecuencia natural de la estructura que contiene al recipiente, puede generar las inestabilidades o la falla.

Por lo tanto, el problema básico que enfrenta el estudio del fenómeno de sloshing consiste en la obtención de las fuerzas y momentos desarrollados durante la oscilación de la superficie libre, así como también, la obtención de las frecuencias y los modos naturales de vibrar de la superficie libre, ya que estos parámetros se relacionan directamente con el diseño de los sistemas de control y performance de vuelo del vehículo.

Para la obtención de los parámetros físicos mencionados con anterioridad, es necesario crear modelos analíticos que representen de forma aproximada el comportamiento físico del sistema bajo estudio para luego alimentarlos con otros modelos y obtener conclusiones que se aproximen a las que se presentan en la operación real del sistema. Los modelos analíticos que serán desarrollados en el presente trabajo, serán para el análisis lineal del fenómeno, ya que estos modelos lineales de sloshing brindan buenas aproximaciones para pequeñas amplitudes de oscilación, necesarias para activar acciones de control. En determinadas etapas del vuelo los movimientos del vehículo pueden ocasionar aceleraciones importantes y el fenómeno entrar rápidamente en régimen no lineal, en tal caso, las aproximaciones lineales dejan de tener validez y el estudio debe necesariamente realizarse en forma experimental o numérica.

Una vez caracterizado el fenómeno, se realizará el diseño de dispositivos antisloshing y la creación de un modelo numérico bajo las mismas condiciones, para comparar resultados y obtener algunas conclusiones sobre el comportamiento del fenómeno con y sin dispositivos antisloshing tanto en el régimen lineal como en el no lineal.



**Figura 4 – Sloshing en tanque de combustible**

Como fue mencionado con anterioridad, el sloshing en los tanques de combustible y oxidante es una fuente potencial de perturbación en la estabilidad de vehículos espaciales que contienen relativamente grandes masas de estos líquidos.

Es por este motivo que es de vital importancia el estudio de los efectos negativos que conlleva el desarrollo del fenómeno de sloshing en los tanques de vehículos espaciales

para el diseño de dispositivos que logren su minimización y así garantizar un óptimo rendimiento del sistema a lo largo de todas las etapas de la misión.

## Antecedentes

En la actualidad, los países con importantes desarrollos en las tecnologías aeroespaciales son, a su vez, los países que tienen mejores avances científicos y tecnológicos en general. Esto es debido a que la ciencia aeroespacial siempre desempeñó un papel crucial en el desarrollo de tecnologías de punta que impulsan el crecimiento industrial en general y en consecuencia el crecimiento de una nación.

Bajo este contexto, y a partir de un convenio de cooperación, la Comisión de Actividades Espaciales (CoNAE) y VENG SA encomiendan a docentes investigadores de la Universidad Nacional de La Plata el desarrollo de varios vehículos lanzadores (inyectores espaciales) experimentales y el desarrollo del vehículo denominado Tronador II LVS (Launch Vehicule System). Hoy en día, Argentina ha demostrado su capacidad de diseñar y desarrollar satélites de uso científico. El lanzamiento y puesta en órbita del satélite SAC-D, en cuyos diseño, desarrollo y construcción la Universidad Nacional de La Plata ha participado activamente, es el mejor indicio de este hecho. Y por esta misma razón, se observa más que nunca la necesidad de desarrollar sistemas de vehículos lanzadores con investigaciones y diseños propios, ya que la información del ámbito aeroespacial es considerada de alto valor estratégico y el acceso a la misma es en su mayor parte restringido. Por ello también resulta primordial contar en nuestro país con programas que apoyen y estimulen el desarrollo de recursos humanos calificados este tema como disparador de muchas otras tecnologías e innovaciones y que las mismas no solo tengan aplicación o injerencia en el marco de los proyectos por las cuales se promueven sino que también puedan ser transferidas a futuros recursos humanos con el fin de ampliar constantemente los horizontes de la innovación en el país y promulgar actividades otras tecnológicas.

En la década del 60, con el advenimiento de la era espacial, cobraron auge los estudios sobre optimización de los sistemas de almacenamiento y transporte de combustible líquido. Más aún cuando se detectaron fallas drásticas en lanzamientos de vehículos espaciales debidos al desarrollo de este fenómeno. Las agencias espaciales de los Estados Unidos y la Unión Soviética crearon divisiones enteras abocadas al estudio de las inestabilidades debidas a la interacción fluido-estructura que se daba lugar en los tanques de combustible de los vehículos espaciales.(Ref.[14])

Predecir los efectos del movimiento relativo entre el fluido y el tanque en vehículos espaciales es una tarea sumamente importante y desafiante, ya que dichos vehículos experimentan diversos movimientos (laterales, giratorios, etc.) durante su operación y exigen que los sistemas de control deban corregir cualquier cambio de trayectoria y/o actitud que no sea la prevista, de manera de no poner en peligro la integridad del vehículo y el éxito de la misión.

Hoy en día, el tema sigue en auge, buscando crear cada vez sistemas más eficientes y optimizados para lograr mejores resultados. El desarrollo de métodos numéricos y la

creciente capacidad de cómputo para problemas de Mecánica de los Fluidos propician los estudios numéricos sobre el tema (REF. [11]), sin dejar por eso de lado los teóricos (REF. [7], [8], [9],[10]) y experimentales (REF. [6], [12]). Se destacan en este campo, por ej. Raouf A. Ibrahim , de la Wayne State University, Department of Mechanical Engineering y Franklin T. Dodge, del Southwest Research Institute, San Antonio, Texas, o A. Timokha, de la Academia Nacional de Ciencias de Ucrania.

La investigación de esta temática enfrenta ciertos desafíos interesantes dado que permite obtener resultados analizando los fenómenos fluidodinámicos implicados desde tres puntos de vista distintos, analítico, numérico computacional y experimental. Por otra parte, prevé un desafío extra en cuanto al diseño, ya que es primordial para el desarrollo del tema proponer soluciones que minimicen el fenómeno a través de dispositivos físicos que pueden ser construidos y ensayados tanto en laboratorio como en un entorno virtual (CFD) y que deberán ser calculados y optimizados tanto del punto de vista fluidodinámico como estructural, permitiendo llegar a conclusiones y resultados mediante la comparación de modelos, como así también la mejora de los mismos.

## OBJETIVO

El objetivo general del trabajo consiste en el estudio analítico, numérico y experimental de dispositivos pasivos que eliminen o minimicen los efectos negativos del fenómeno de *sloshing* (oleaje) dentro de recipientes contenedores de líquidos. En particular, el estudio se centra en tanques de vehículos lanzadores y cohetes de combustible líquido para uso civil.

Dentro del objetivo general, podemos diferenciar distintos objetivos particulares que serán tomados en consideración:

1. Caracterizar mediante el estudio y análisis de las ecuaciones dinámicas los fenómenos físicos que se desarrollan dentro de contenedores líquidos cuando estos son apartados de la posición de equilibrio para estudiar los efectos negativos que el desarrollo del fenómeno trae aparejado a sistemas acoplados entre fluidos y estructuras como lo es el que se propone para el estudio.
2. Implementar modelos teóricos simplificados para predecir el comportamiento de la superficie libre y la obtención de las frecuencias naturales de sloshing del líquido confinado en un recipiente que represente al taque del caso bajo estudio.
3. Proponer y estudiar soluciones a implementar para mitigar de la forma más eficiente posible el fenómeno de sloshing, analizando parámetros como por ejemplo el factor de amortiguamiento necesario, etc.
4. Desarrollar un modelo mecánico equivalente con el fin de obtener las respuestas del sistema cuando es perturbado externamente y así poder determinar

parámetros de interés para el diseño como fuerzas, momentos, corrimientos del centro de gravedad del sistema, entre otros.

5. Comparar los resultados de los modelos mecánico lineal y analíticos con los de modelos computacionales en CFD desarrollados en el Grupo Fluidodinámica Computacional, y comparar estos resultados con los obtenidos de forma analítica para poder obtener conclusiones que nos permitan realizar mejoras y/o correcciones en los diseños desarrollados.
6. Planificar y llevar a cabo ensayos y experiencias de laboratorio para comparar resultados con los restantes modelos estudiados (analítico y numérico computacional) a fin de lograr arribar a un diseño final para su implementación.

## DESARROLLO

---

### Modelo analítico lineal

Como se ha mencionado antes, el objetivo del análisis del fenómeno es la determinación de los parámetros esenciales que influyen en la dinámica de sistemas compuestos por líquidos dentro de contenedores en movimiento. Para ello, se recurre en primer lugar al análisis de un modelo analítico que nos permita determinar estos parámetros.

El estudio dinámico del sloshing se basa en el desarrollo del campo de ecuaciones del fluido, intentando estimar el movimiento de la superficie libre del mismo, las fuerzas y momentos resultantes de este movimiento.

Soluciones explícitas son posibles solo para algunos casos particulares de geometría de contenedores (contenedores cilíndricos y rectangulares, en posición vertical). El problema de valor en la frontera es normalmente resuelto por el análisis modal y por las características de la respuesta dinámica a las excitaciones externas.

El análisis modal del movimiento de la superficie libre del líquido nos permite determinar las frecuencias naturales y los modos de vibrar del mismo. Como se ha mencionado antes, la determinación de las frecuencias naturales que genera el líquido en movimiento dentro de los contenedores es esencial para el diseño de controles activos de la performance del vehículo que cargue estos contenedores.

Para el desarrollo del modelo, se plantea un caso general, en el cual se considera a un recipiente moviéndose a lo largo de una trayectoria cualquiera del espacio.

1. Se considera que el recipiente es rígido e impermeable.
2. Flujo incompresible, no viscoso e inicialmente irrotacional

3. La formulación es aplicable tanto a la libre como a la forzada oscilación de la superficie libre del líquido.
4. Se utiliza una terna inercial y una terna móvil, esta última solidaria a la superficie libre del fluido.

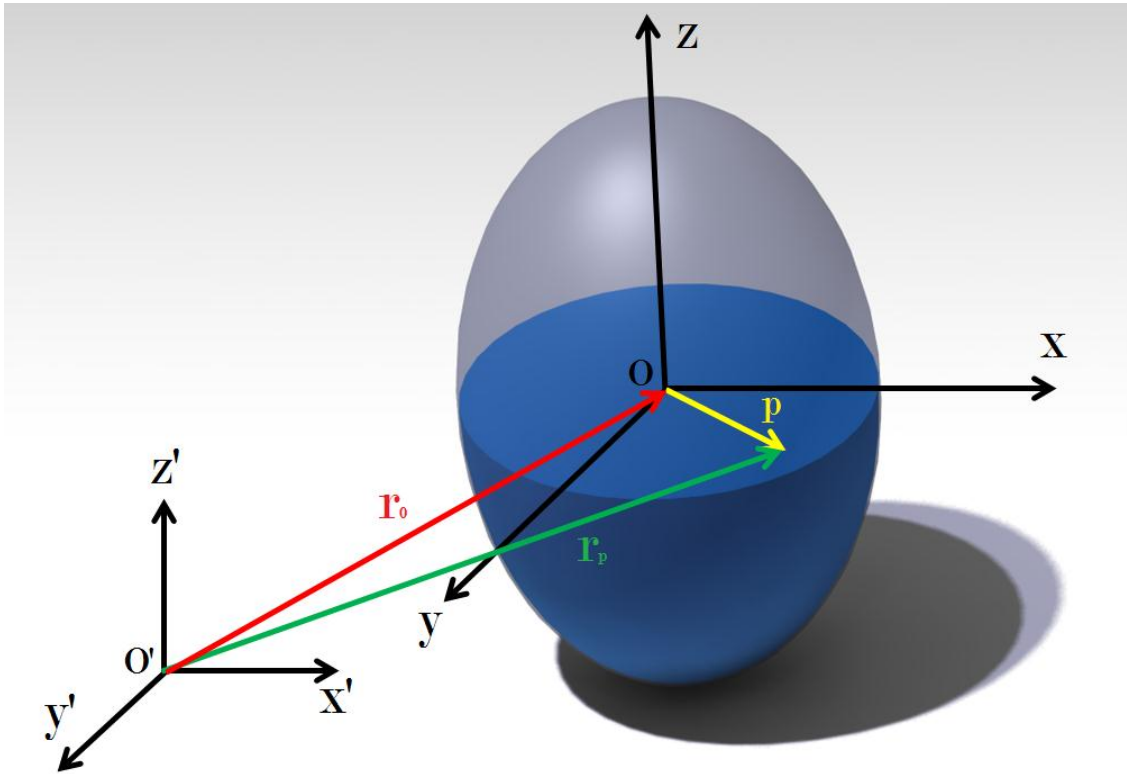


Figura 5 - Sistema coordenado

### Campo de ecuaciones del fluido

El movimiento del fluido es descrito por las ecuaciones de Navier-Stokes, pero al ser considerado el fluido incompresible y no viscoso, estas se reducen a la ecuación de Euler, que en forma vectorial se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + (\bar{q} \cdot \bar{\nabla}) \bar{q} = -\frac{1}{\rho} \bar{\nabla} P - \bar{\nabla}(gZ') \quad [1]$$

Dónde:

- $\bar{q}$  = velocidad del fluido
- $\frac{\partial \bar{q}}{\partial t}$  = aceleración local

- $P$  = presión del fluido
- $(\bar{q} \cdot \bar{\nabla})\bar{q}$  = aceleración convectiva
- $\rho$  = densidad del fluido
- $gz'$  = potencial gravitatorio
- $\bar{\nabla}$  = operador nabla/operador diferencial

El término de la aceleración convectiva, desarrollado, puede ser escrito de la siguiente forma:

$$(\bar{q} \cdot \bar{\nabla})\bar{q} = \frac{1}{2}\bar{\nabla}q^2 + (\bar{\nabla} \times \bar{q}) \times \bar{q} \quad [2]$$

Si el flujo es considerado irrotacional entonces:

$$\bar{\omega} = \bar{\nabla} \times \bar{q} = 0 \quad [3]$$

Por lo tanto, la ecuación [2] se reduce a:

$$(\bar{q} \cdot \bar{\nabla})\bar{q} = \frac{1}{2}\bar{\nabla}q^2 \quad [4]$$

Dado a que el movimiento es considerado irrotacional, se puede expresar una función potencial de velocidades, de manera tal que cumpla:

$$\bar{q} = -\bar{\nabla} \bar{\Phi} \quad [5]$$

Donde  $\bar{\Phi}$  representa el potencial de velocidades.

Si introducimos las ecuaciones [2] y [5] en la ecuación de Euler, tenemos:

$$\frac{\partial(-\bar{\nabla} \bar{\Phi})}{\partial t} + \frac{1}{2}\bar{\nabla}q^2 + \frac{1}{\rho}\bar{\nabla}P + \bar{\nabla}(gz') = 0 \quad [6]$$

- $\frac{\partial(-\bar{\nabla} \bar{\Phi})}{\partial t} = -\bar{\nabla} \frac{\partial(\bar{\Phi})}{\partial t}$
- $\frac{1}{2}\bar{\nabla}q^2 = \bar{\nabla} \frac{q^2}{2}$
- $\frac{1}{\rho}\bar{\nabla}P = \bar{\nabla} \left( \frac{P}{\rho} \right) - P \bar{\nabla} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \bar{\nabla} \left( \frac{P}{\rho} \right)$

Agrupando:

$$\bar{\nabla} \left[ -\frac{\partial(\bar{\Phi})}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \left(\frac{P}{\rho}\right) + gZ' \right] = 0 \quad [7]$$

Integrando la ecuación (1.4),

$$-\frac{\partial(\bar{\Phi})}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + \left(\frac{P}{\rho}\right) + gZ' = C_{(t)} \quad [8]$$

Donde  $C_{(t)}$  es una función arbitraria del tiempo.

La ecuación [8] es de la forma general de la ecuación de Kelvin para flujo no estacionario. En esta ecuación la función potencial depende del tiempo y del espacio.

La cantidad  $\frac{\partial(\bar{\Phi})}{\partial t}$  es interpretada como el trabajo realizado por el fluido por unidad de masa cuyas coordenadas son (X, Y, Z).

La ecuación [8] solo es válida para flujo incompresible para lo cual la condición de continuidad  $\bar{q} \cdot \bar{\nabla} = 0$  genera la ecuación de Laplace, que luego introducida en la ecuación [2] toma la forma

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\Phi} = 0 \quad [9]$$

Ahora consideraremos el movimiento relativo, y llamaremos  $V_0$  a la velocidad que posee el origen de la terna móvil  $O$ , respecto de la terna inercial  $O'$ . El potencial de velocidades  $\Phi$  en un punto de la terna fija  $O', X', Y', Z'$  medida desde un observador ubicado en la terna móvil, nos dará,  $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \bar{V}_0 \cdot \bar{\nabla}\right) \Phi$ , desde ese punto el observador ve una velocidad  $-\bar{V}_0$ . En consecuencia si introducimos esto en la ecuación [8], esta toma la siguiente forma:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{q^2}{2} + gZ' - \frac{\partial(\bar{\Phi})}{\partial t} + \bar{V}_0 \cdot \bar{\nabla} \bar{\Phi} = C_{(t)} \quad [10]$$

La velocidad relativa de una partícula de fluido  $q_{rel}$  es:

$$\bar{q}_{rel} = \bar{q} - \bar{V}_0 = -\bar{\nabla} \bar{\Phi} - V_0 \quad [11]$$

Expresando  $q$  en términos de  $q_{rel}$  y  $V_0$  según la relación [11] y reemplazando en la ecuación [10] nos queda:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} (\bar{q}_{rel} + \bar{V}_0)^2 + gZ' - \frac{\partial(\bar{\Phi})}{\partial t} - V_0 (\bar{q}_{rel} + \bar{V}_0) = C_{(t)}$$



$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q_{rel}^2 + \bar{q}_{rel} \cdot \bar{V}_0 + \frac{V_0^2}{2} + gZ' - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \bar{V}_0 \cdot \bar{q}_{rel} - V_0^2 = C_{(t)}$$

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}q_{rel}^2 - \frac{V_0^2}{2} + gZ' - \frac{\partial\Phi}{\partial t} = C_{(t)} \quad [12]$$

Por lo tanto tenemos que la ecuación [10] está escrita en términos de la velocidad total medida desde el eje inercial o fijo, mientras que la ecuación [12] está dada en términos de la velocidad relativa del fluido al movimiento del tanque.

En la superficie libre del líquido, la presión es constante, igual a la presión atmosférica o presión de presurización del tanque, que podemos tomar como presión de referencia igual a cero. Entonces podemos eliminarla en la ecuación [10]. Esto nos da una condición dinámica de contorno quedando:

$$\frac{1}{2}(\bar{\nabla}\Phi \cdot \bar{\nabla}\Phi) + g\eta - \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \bar{V}_0 \cdot \bar{\nabla}\Phi = 0 \quad [13]$$

Donde la función temporal  $C_{(t)}$  es absorbida en la función potencial  $\Phi$

La velocidad vertical de una partícula ubicada en la superficie libre  $z = \eta(r, \theta, t) = \eta(x, y, z)$ , es igual a la velocidad de la propia superficie libre, condición conocida como condición cinemática de la superficie libre.

La condición cinemática de la superficie libre, está dada por la siguiente expresión

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \bar{q}_{rel} \cdot \bar{\nabla}\eta \quad [14]$$

Si el recipiente está permitido de moverse en un plano vertical, entonces el vector velocidad en coordenadas cartesianas y cilíndricas se escribe de la siguiente manera respectivamente:

$$\bar{V}_0 = \dot{X}_0 i_x + \dot{Z}_0 i_z \quad [15]$$

$$\bar{V}_0 = \dot{X}_0 \cos\theta i_r + \dot{Z}_0 \sin\theta i_\theta + \dot{Z}_0 i_k \quad [16]$$

Y las condiciones de contorno planteadas para la pared y el fondo del recipiente en coordenadas cartesianas y cilíndricas respectivamente, son:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=-h} = \dot{Z}_0 \qquad -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_{x=a} = \dot{X}_0 \quad [17]$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{z=-h} = \dot{Z}_0 \qquad -\frac{\partial \Phi}{\partial r}\Big|_{r=R} = \dot{X}_0 \cos \theta \qquad [18]$$

Es posible dividir la función potencial de velocidades en, una función potencial perturbación  $\tilde{\Phi}$ , y una función potencial  $\Phi_0$ , entonces:

$$\Phi = \tilde{\Phi} + \Phi_0 \qquad [19]$$

Donde la función  $\Phi_0$ , puede ser determinada integrando las ecuaciones [15] y [16], dando como resultado la siguiente expresión:

$$\Phi_0 = -\dot{X}_0 r \cos \theta - \dot{Z}_0 z - \frac{1}{2} \int (\dot{X}_0^2 + \dot{Z}_0^2) dt \qquad [20]$$

Donde  $-\frac{1}{2} \int (\dot{X}_0^2 + \dot{Z}_0^2) dt$  es la constante de integración.

Ahora, si introducimos la ecuación [19] y [20] en la ecuación de condición de contorno de la superficie libre,  $\frac{1}{2}(\bar{\nabla} \Phi \cdot \bar{\nabla} \Phi) + gZ' - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{V}_0 \cdot \bar{\nabla} \Phi = 0$ , termino término, tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\bar{\nabla} \Phi \cdot \bar{\nabla} \Phi) &= \frac{1}{2}[\bar{\nabla}(\tilde{\Phi} + \Phi_0) \cdot \bar{\nabla}(\tilde{\Phi} + \Phi_0)] = \frac{1}{2}[(\bar{\nabla} \tilde{\Phi} + \bar{\nabla} \Phi_0) \cdot (\bar{\nabla} \tilde{\Phi} + \bar{\nabla} \Phi_0)] \\ &= \frac{1}{2}[\bar{\nabla} \tilde{\Phi} \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi} + \bar{\nabla} \tilde{\Phi} \cdot \bar{\nabla} \Phi_0 + \bar{\nabla} \Phi_0 \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi} + \bar{\nabla} \Phi_0 \cdot \bar{\nabla} \Phi_0] \\ &= \frac{1}{2}[V_0^2 - 2 \cdot \bar{V}_0 \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi} + \bar{\nabla} \tilde{\Phi} \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi}] \\ &= \frac{V_0^2}{2} - \bar{V}_0 \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi} + \frac{\bar{\nabla} \tilde{\Phi} \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi}}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(\bar{\nabla} \Phi \cdot \bar{\nabla} \Phi) &= \frac{V_0^2}{2} - \bar{V}_0 \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi} + \frac{\bar{\nabla} \tilde{\Phi} \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\frac{\partial(\tilde{\Phi} + \Phi_0)}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} - \left[ -\ddot{X}_0 r \cos \theta - \ddot{Z}_0 z - \frac{1}{2}(\dot{X}_0^2 + \dot{Z}_0^2) \right] \\ &= -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \ddot{X}_0 r \cos \theta + \ddot{Z}_0 z + \frac{V_0}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_0 \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi} &= \bar{V}_0 \cdot \bar{\nabla}(\tilde{\Phi} + \Phi_0) = \bar{V}_0 \cdot [\bar{\nabla} \tilde{\Phi} + \bar{\nabla} \Phi_0] = \bar{V}_0 \cdot \bar{\nabla} \Phi_0 + \bar{V}_0 \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi} \\ &= -V_0^2 + \bar{V}_0 \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi}\end{aligned}$$

Reagrupando todos los términos, tenemos:

$$\frac{V_0^2}{2} - \bar{V}_0 \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi} + \frac{\bar{\nabla} \tilde{\Phi} \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi}}{2} - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \ddot{X}_0 r \cos \theta + \ddot{Z}_0 z + \frac{V_0^2}{2} - \bar{V}_0 \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi} + g\eta = 0$$

Quedando finalmente:

$$\frac{1}{2}(\bar{\nabla} \tilde{\Phi} \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi}) - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \ddot{X}_0 r \cos \theta + (\ddot{Z}_0 + g)\eta = 0 \quad [21]$$

$$-\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} \quad [22]$$

La correspondiente condición para un tanque rectangular siguiendo el mismo razonamiento, es:

$$\frac{1}{2}(\bar{\nabla} \tilde{\Phi} \cdot \bar{\nabla} \tilde{\Phi}) - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \ddot{X}_0 x + (\ddot{Z}_0 + g)\eta = 0 \quad [23]$$

$$-\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \quad [24]$$

Para la determinación de las frecuencias naturales se hace uso de la formulación variacional, teorema de Hamilton (camino de mínima energía), para de esta manera obtener una formulación linealizada del movimiento de la superficie del fluido. Así también, mediante esta formulación, se obtienen expresiones que permiten hallar las frecuencias naturales a partir de un método variacional aproximado.

La condición de la superficie libre linealizada resulta:

$$-\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + g\eta = 0 \quad [25]$$

Por un lado es posible desarrollar una formulación tendiente a la determinación de las frecuencias naturales y sus correspondientes configuraciones modales para una geometría dada del contenedor, sobre la base de una formulación de comportamiento lineal. El conocimiento de las frecuencias naturales es importante en el proceso de diseño del contenedor con el fin de mantenerlo alejado de condiciones de resonancia. Por ejemplo, para un contenedor cilíndrico la siguiente función potencial satisface las distintas condiciones del modelo analítico:

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_{mn}(t) \cos m\theta + \beta_{mn}(t) \sin m\theta] J_{mn}(\lambda_{mn}r) \frac{\cosh[\lambda_{mn}(z+h)]}{\cosh(\lambda_{mn}h)} \quad [26]$$

Dónde:

- $(r, \theta, z, t)$  son coordenadas cilíndricas
- $h$  altura del cilindro ocupado por fluido
- $\alpha_{mn}, \beta_{mn}$  funciones dependientes del tiempo a ser determinadas de las condiciones iniciales de la superficie libre
- $J_{mn}$  función de Bessel del primer tipo de orden  $m$
- $\lambda_{mn} = \xi_{mn}/R$  son las raíces de  $\frac{\partial J_{mn}(\lambda_{mn}r)}{\partial r} = 0$ .

En este caso las frecuencias naturales están dadas por la expresión:

$$\omega_{mn}^2 = \left[ \frac{g\xi_{mn}}{R} + \frac{\sigma\xi_{mn}^3}{\rho R^3} J_{mn} \right] \tanh\left(\frac{\xi_{mn}h}{R}\right) \quad [27]$$

Si se desprecia la tensión superficial y se suponen oscilaciones lineales, las frecuencias de los modos se pueden aproximar con la expresión:

$$\omega_{mn}^2 = \left[ \frac{g\xi_{mn}}{R} \right] \tanh\left(\frac{\xi_{mn}h}{R}\right) \quad [28]$$

Se consideran los primeros modos simétricos (oscilaciones concéntricas) y asimétricos (oscilaciones laterales) para un tanque cilíndrico vertical de dimensiones  $h = 0.88$  m y  $D = 0.48$  m. Los cálculos analíticos se realizan para el combustible y el oxidante, con *modelo de oscilaciones lineales, fluido no viscoso y por ahora sin considerar la tensión superficial*, hasta obtener los datos correspondientes a la hidracina y el ácido nítrico, propelentes habituales en motores de combustible líquido, para los cuales se realizó el estudio. En el estudio se considera una aceleración vertical del cohete de 0.4 g hacia arriba, es decir una aceleración aparente sobre el líquido de 1.4 g en las fuerzas de masa. Bajo estas hipótesis, la frecuencia de oscilación es independiente de la densidad del fluido.

Las frecuencias de oscilación de los primeros modos son, en Hz:

**Tabla 2 – Frecuencias naturales de sloshing**

Modos Simétricos	1,9936	2,7028	3,2649	3,7524	4,1943
Modos Antisimétricos	1,3809	2,3542	2,9853	3,4309	3,9711

Continuando con el análisis analítico, a partir de las ecuaciones desarrolladas anteriormente para la obtención de las ecuaciones de frecuencia, es posible determinar la deformación de la superficie libre del líquido en forma analítica para la geometría y las condiciones impuestas. Utilizando las ecuaciones [27] y [28] es posible determinar los desplazamientos verticales de la superficie libre para los primeros tres modos simétricos y los primeros tres antisimétricos.

La expresión matemática de la deformación de la superficie libre, para los modos simétricos resultará:

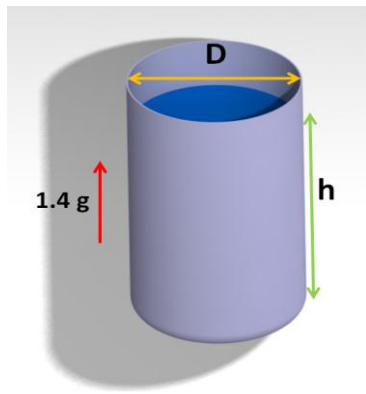
$$\eta(r, \theta, t) = \frac{1}{g} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{mn} \cos(m\theta) J_m(\lambda_{mn}r) \cosh(\lambda_{mn}h) \omega_{mn} \cos(\omega_{mn}t) \quad [29]$$

Y para los antisimétricos:

$$\eta(r, \theta, t) = \frac{1}{g} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_{mn} \sin(m\theta) J_m(\lambda_{mn}r) \cosh(\lambda_{mn}h) \omega_{mn} \cos(\omega_{mn}t) \quad [30]$$

Si estas expresiones son graficadas en función de los parámetros del modelo presentado, podemos observar gráficamente la deformación de la superficie libre para los primeros modos simétricos y antisimétricos.

Para realizar las gráficas que se muestran a continuación, (con parámetros extraídos de la Ref [1].) se hizo uso del software Matlab® en el Grupo de Fluidodinámica Computacional (GFC) del Departamento de Aeronáutica UNLP. A continuación se muestran gráficamente los parámetros geométricos utilizados.



Altura del fluido	0.88 [m]
Diámetro del cilindro	0.48 [m]
Aceleración vertical	1,4 g

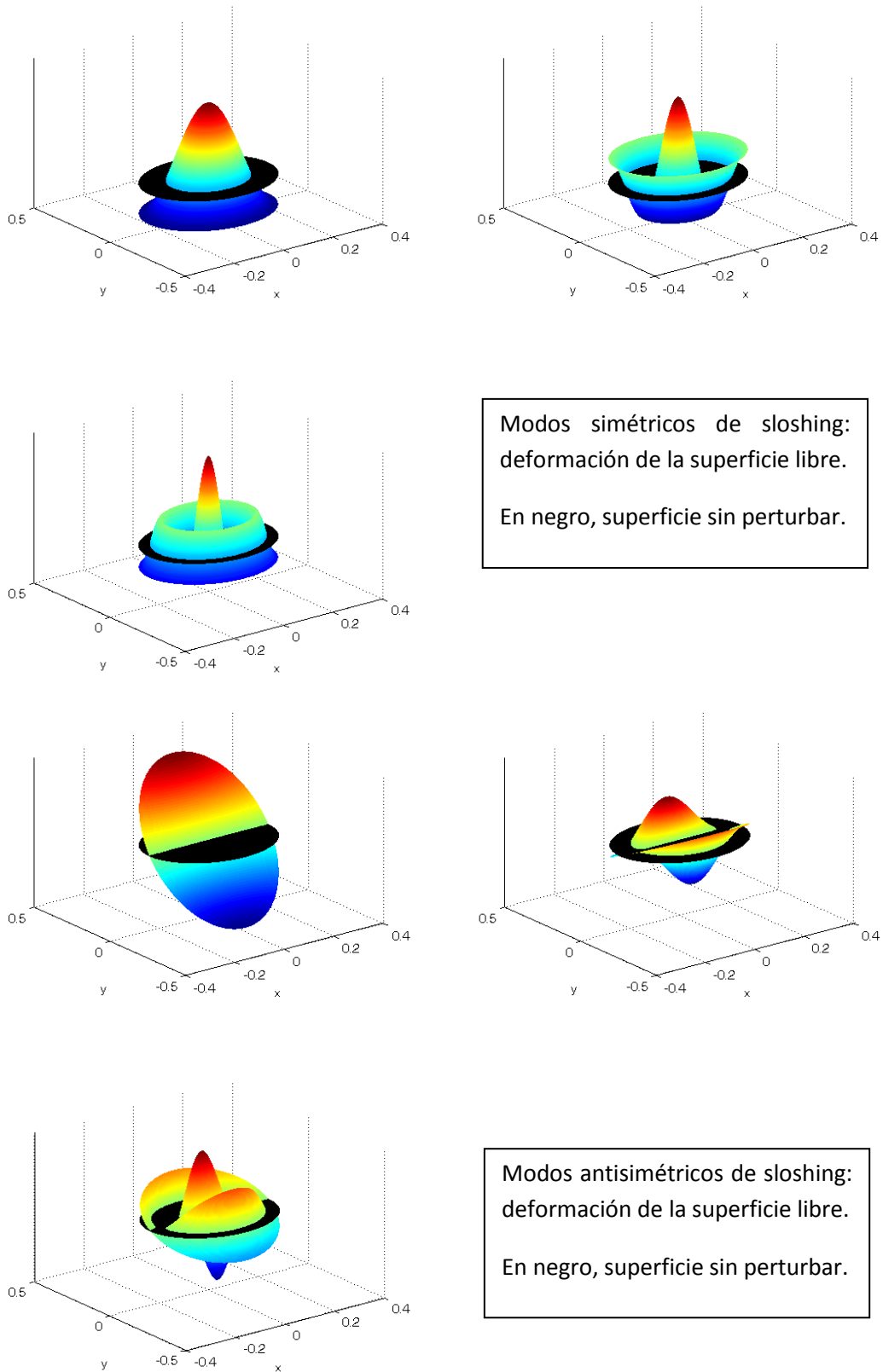


Figura 6: Modos naturales de sloshing tanque cilíndrico vertical (modelo lineal)

De estas nos interesan fundamentalmente los modos antisimétricos, que producen cargas laterales netas, y en particular el primero, que es el que da los mayores valores de fuerza resultante.

### **Expresiones analíticas de fuerzas y momentos de sloshing**

Como se ha mencionado con anterioridad el conocimiento de las frecuencias naturales de la superficie libre del líquido es importante en el diseño de los contenedores sometidos a diferentes oscilaciones. Bajo excitaciones de fuerzas externas es importante determinar las cargas hidrodinámicas actuantes sobre el contenedor y su fase respecto a la excitación para el dimensionamiento estructural del tanque y sus respectivos agarres. Para ello, se recurrirá a la determinación analítica de las expresiones de las fuerzas resultantes a las cuales está sometido un contenedor rígido parcialmente lleno de líquido cumpliendo con las características del tanque considerado hasta el momento para el desarrollo de las ecuaciones de frecuencias. Cabe destacar que el desarrollo de las expresiones analíticas de las fuerzas actuantes en el recipiente nos permiten determinar a través de ciertos parámetros característicos del sistema (como geometría, propiedades del fluido, etc.) la distribución de las fuerzas y momentos a lo largo de todo el contenedor y comparar en distintos puntos de interés con otros modelos creados que serán presentados posteriormente. También es importante la determinación de la altura de las olas de la superficie libre dentro del tanque, las cuales afectan la posición del centro de masa del sistema y, si superan cierto valor (por ejemplo, si llegan hasta el techo del tanque), determinarán el límite de validez del modelo lineal.

Las fuerzas hidrodinámicas son estimadas integrando la distribución de presión sobre el área mojada, por lo que es importante determinar la distribución de presiones en el contenedor.

Para el estudio de las fuerzas de sloshing, se van a considerar las fuerzas y momentos hidrodinámicos del líquido actuando sobre un contenedor de sección circular orientado verticalmente, bajo traslación y excitaciones de cabeceo (excitación lateral-pitching).

### **Excitación lateral**

Se considera una excitación sinusoidal a lo largo de la dirección del eje X (eje y en **Figura 6**), de la siguiente forma:

$$X(t) = X_0 \text{sen}(\Omega t) \quad [31]$$

- $X_0$  = amplitud de la excitación
- $\Omega$  = frecuencia de la excitación

Se asume que las amplitudes de la excitación y de la respuesta del fluido son pequeñas.

Las ecuaciones linealizadas del campo de fluido, toman la siguiente forma (dentro del dominio del fluido):

$$\bar{\nabla}^2 \tilde{\Phi} = 0 \quad [32]$$

Bajo las siguientes condiciones de borde:

- $-\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$  [33] (en la pared del contenedor)
- $-\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$  [34] (en el fondo del contenedor)

Y planteando la condición dinámica y la condición cinemática de la superficie libre respectivamente:

$$-\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + g\eta + \ddot{X}r \cos \theta = 0 \quad [35]$$

Con  $z = \eta(r, \theta, t)$

$$-\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad [36]$$

Si combinamos las anteriores en una sola ecuación, derivando la primera respecto del tiempo

$$g \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} + \ddot{X}r \cos \theta = 0 \quad [37]$$

y finalmente, reemplazando con la segunda ecuación obtenemos:

$$-g \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} + \ddot{X}r \cos \theta = 0 \quad [38]$$

Ahora planteamos una solución típica de la ecuación inicial (1a), dentro de las condiciones (1b) y (1c) y se obtiene:

$$\tilde{\Phi} = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n}(t) \cos \theta + B_{1n}(t) \sin \theta] J_1(k_n r) \frac{\cosh[k_{1n}(z+h)]}{\cosh k_{1n} h} \quad [39]$$

Donde las coordenadas generalizadas,  $A_{1n}$  y  $B_{1n}$  dependen del tiempo. Estas funciones son determinadas satisfaciendo la condición de superficie libre y expresando la coordenada  $r$  en series de Fourier-Bessel como se muestra a continuación:



$$r = \sum_{n=1}^{\infty} F_n J_1(k_{1n} r) \quad [40]$$

Donde

$$F_n = \frac{2R}{(k_{1n}^2 R^2 - 1) J_1(k_{1n} R)} \quad [41]$$

Luego si se introducen las ecuaciones [39] y [40] dentro de la condición de de superficie libre, se llega a una ecuación, la cual se cumple si las coordenadas generalizadas  $A_{1n}$  y  $B_{1n}$  satisfacen el siguiente conjunto lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{A}_{1n}(t) + \omega_{1n}^2 A_{1n}(t) = \frac{\ddot{x} F_n}{\cosh(k_{1n} h)} \quad [42]$$

$$\ddot{B}_{1n}(t) + \omega_{1n}^2 B_{1n}(t) = 0 \quad [43]$$

Las soluciones de estado estacionario de estas ecuaciones son:

$$A_{1n}(t) = -\frac{X_0 \Omega^3 F_n}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2) \cosh(k_{1n} h)} \cos \Omega t \quad [44]$$

$$B_{1n}(t) = 0 \quad [45]$$

Ahora si introducimos estos resultados en la ecuación (1.2), obtenemos:

$$\tilde{\Phi} = -X_0 \Omega \cos \theta \cos \Omega t \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{J_1(\xi_{1n} r / R) \cosh[\xi_{1n} (z + h) / R]}{J_1(\xi_{1n}) \cosh(\xi_{1n} h / R)} \right] \quad [46]$$

Sabemos que la función total potencial es la suma de la función del fluido perturbado,  $\tilde{\Phi}$ , más la función potencial inicial  $\tilde{\Phi}_0$ , donde:

$$\Phi_0 = -X_0 r \Omega \cos \theta \cos \Omega t \quad [47]$$

Por lo tanto la función potencial total nos queda:

$$\Phi = -X_0 r \Omega \cos \theta \cos \Omega t \left\{ r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{J_1(\xi_{1n} r / R)}{J_1(\xi_{1n})} \frac{\cosh[\xi_{1n} (z + h) / R]}{\cosh(\xi_{1n} h / R)} \right] \right\} \quad [48]$$

Si ahora sustituimos la anterior ecuación en la ecuación (1d) para obtener la ecuación de la elevación de la superficie libre, entonces, nos queda:

$$\eta = \frac{X_0 \Omega^2}{g} \cos \theta \cos \Omega t \left\{ r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^3}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{J_1(\xi_{1n} r / R)}{J_1(\xi_{1n})} \right] \right\} \quad [49]$$

Podemos observar que la mayor elevación de la superficie libre se da para los valores de  $r = R$ ,  $\theta = 0$ , y  $\Omega t = \frac{\pi}{2}$

Dando la siguiente expresión:

$$\eta_{\max} = \frac{X_0 \Omega^2}{g} \left\{ R + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^3}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \right] \right\} \quad [50]$$

Nótese que los nodos (altura cero de las olas) se dan para valores de  $r = 0$  y  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$  y que si la frecuencia de excitación  $\Omega$ , se aproxima a alguna frecuencia de sloshing  $\omega_{1n}$ ,  $\eta$  y  $\tilde{\Phi}$ , se hacen arbitrariamente grandes (caso de resonancia). En tal caso estas soluciones no son válidas y debe considerarse el caso no lineal.

La presión hidrodinámica en cualquier punto del líquido, puede ser determinada mediante la siguiente ecuación:

$$p = \rho \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} \quad [51]$$

Entonces:

$$p = \rho X_0 r \Omega^2 \cos \theta \sin \Omega t \left\{ r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{J_1(\xi_{1n} r / R)}{J_1(\xi_{1n})} \frac{\cosh[\xi_{1n} (z + h) / R]}{\cosh(\xi_{1n} h / R)} \right] \right\} \quad [52]$$

Se puede observar de la anterior ecuación que la mayor presión se da en la pared, es decir cuando  $r = R$  y  $\theta = 0$  y  $\Omega t = \pi/2$ , para esta condición se grafica la presión en la pared en función de la altura que alcanza el fluido y luego se muestra en la gráfica (figura 2) la distribución de presiones para distintos números de Froude y una relación  $h/R=2$  (según Abramson y Ransleben).

De forma similar para obtener la presión en el fondo del recipiente, deberemos hacer  $z = -h$ ,  $\theta = 0$  y  $\Omega t = \pi/2$ . Aquí se puede observar la distribución de la presión

adimensionalizada en la pared en función de las distintas alturas del fluido para distintos casos de número de Froude.

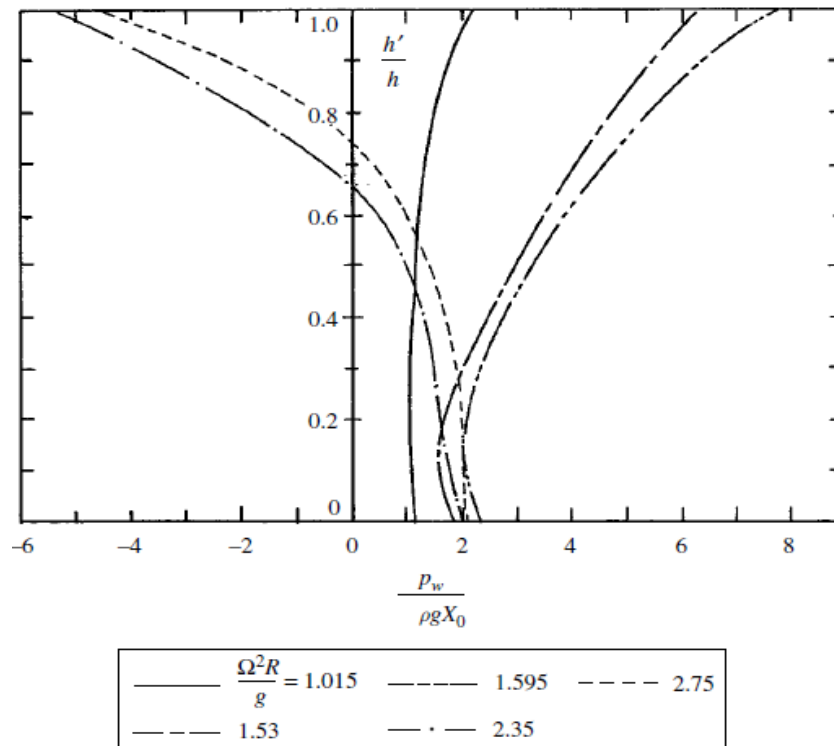


Figura 7: Presión máxima instantánea normalizada sobre la pared (mod. lineal)[1].

Para la obtención de las componentes de la fuerzas neta actuantes en el recipiente, se integra la presión en el área correspondiente. Resolver a lo largo de  $y$  y  $\theta = 0$ , se puede obtener la fuerza que actúa a lo largo del eje  $x$  de la siguiente manera:

$$F_x = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-h}^0 p \cos \theta \cdot R \cdot d\theta \cdot dz \quad [53]$$

Resolviendo y reemplazando, se obtiene:

$$F_x = \rho \pi h R^2 X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_{1n}^2 h} \frac{2R}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \tanh(\xi_{1n} h / R) \right] \quad [54]$$

Lo cual nos da un incremento aproximadamente lineal de la fuerza en el eje  $x$  a medida que aumenta la altura del fluido ( $h$ ).

Este resultado muestra que existe una fuerza neta ejercida a lo largo de la dirección de la excitación ( $F_x$ ). En la dirección perpendicular, la distribución de la presión es simétrica alrededor de la circunferencia del tanque, de tal manera que la integración del mismo es igual a cero. Sin embargo, contribuirá alrededor del eje perpendicular al plano  $XZ$ .

$$F_y = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-h}^0 p \sin \theta \cdot R \cdot d\theta \cdot dz = 0 \quad [55]$$

El momento hidrodinámico debido a las fuerzas actuando sobre el líquido en la pared alrededor del eje y, está dado por:

$$M_{yw} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-h}^0 p_w R \cos \theta \cdot dz d\theta = \rho \pi h R^2 X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left[ \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h} \left( \frac{R}{\xi_{1n}^2} \right)^2 \frac{2}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{1 - \cosh(\xi_{1n} h / R)}{\cosh(\xi_{1n} h / R)} \right] \quad [56]$$

Por otra parte el momento de las fuerzas actuantes en el fondo del tanque alrededor del eje y es:

$$M_{yb} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-h}^0 p_b r \cos \theta \cdot r dr d\theta = \rho \pi h R^2 X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left[ \frac{R^2}{4h} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{h \xi_{1n}^2} \right) \frac{2R^2}{(\xi_{1n}^2 - 1)} \frac{\Omega^2}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{1}{\cosh(\xi_{1n} h / R)} \right] \quad [57]$$

Por lo tanto el momento total sobre el eje y, se da como la suma de los dos anteriores y es igual a:

$$M_y = \rho \pi h R^2 X_0 \Omega^2 \sin \Omega t \left[ \frac{h}{2} + \frac{R^2}{4h} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R}{\xi_{1n}^2} \right)^2 \frac{2\Omega^2}{(\xi_{1n}^2 - 1)(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} \frac{[2 - \cosh(\xi_{1n} h / R)]}{h \cosh(\xi_{1n} h / R)} \right] \quad [58]$$

Haciendo uso de las expresiones determinadas anteriormente, se puede obtener la ubicación del centro de presiones de los modos de oscilación dividiendo el momento en la pared por la fuerza en el líquido a lo largo del eje x:

$$Z_{cp} = \frac{M_{yw}}{F_x} = -\frac{R}{\xi_{1n}} \tanh \left( \frac{\xi_{1n} h}{2R} \right) \quad [59]$$

Esta expresión es importante dado que a partir de ella podemos conocer el punto donde se aplican las fuerzas que ejerce el líquido y en consecuencia los esfuerzos que se transmitirán a la estructura del vehículo.

### Estudio sobre la implementación de dispositivos anti-slosh

A través del modelo analítico lineal desarrollado anteriormente, se pudo caracterizar la ecuación de frecuencias y las expresiones de las fuerzas y momentos actuantes en el contenedor rígido con las características impuestas. Estos parámetros son importantes para caracterizar el fenómeno y nos permitirán ahora abordar el diseño de dispositivos que minimicen los efectos negativos del sloshing.

A continuación se desarrollará el estudio de la implementación de dispositivos minimizadores del oleaje en los tanques. Es de gran importancia la implementación de estos dispositivos, dado que el líquido en movimiento dentro de los contenedores, produce aceleraciones adicionales y corrimientos del centro de masa que son causantes de inestabilidades dinámicas, afectando la estabilidad del vehículo y principalmente el control durante las distintas etapas de vuelo.

Básicamente, estos dispositivos se utilizan para amortiguar el movimiento del líquido y para reducir las cargas inducidas por el fenómeno, estas cargas (fuerzas y momentos) inducidos también pueden ser reducidos mediante el compartimiento de los tanques, lo que reduce el desplazamiento de la masa de líquido, disminuyendo las frecuencias naturales asociadas.

La eficacia de supresión de estos dispositivos, se expresa comúnmente con un factor, el “factor de amortiguamiento”, que da una idea de absorción de energía del dispositivo y que será el principal parámetro de estudio.

A continuación se enumeran los parámetros principales que influyen en el diseño de dispositivos de supresión de sloshing:

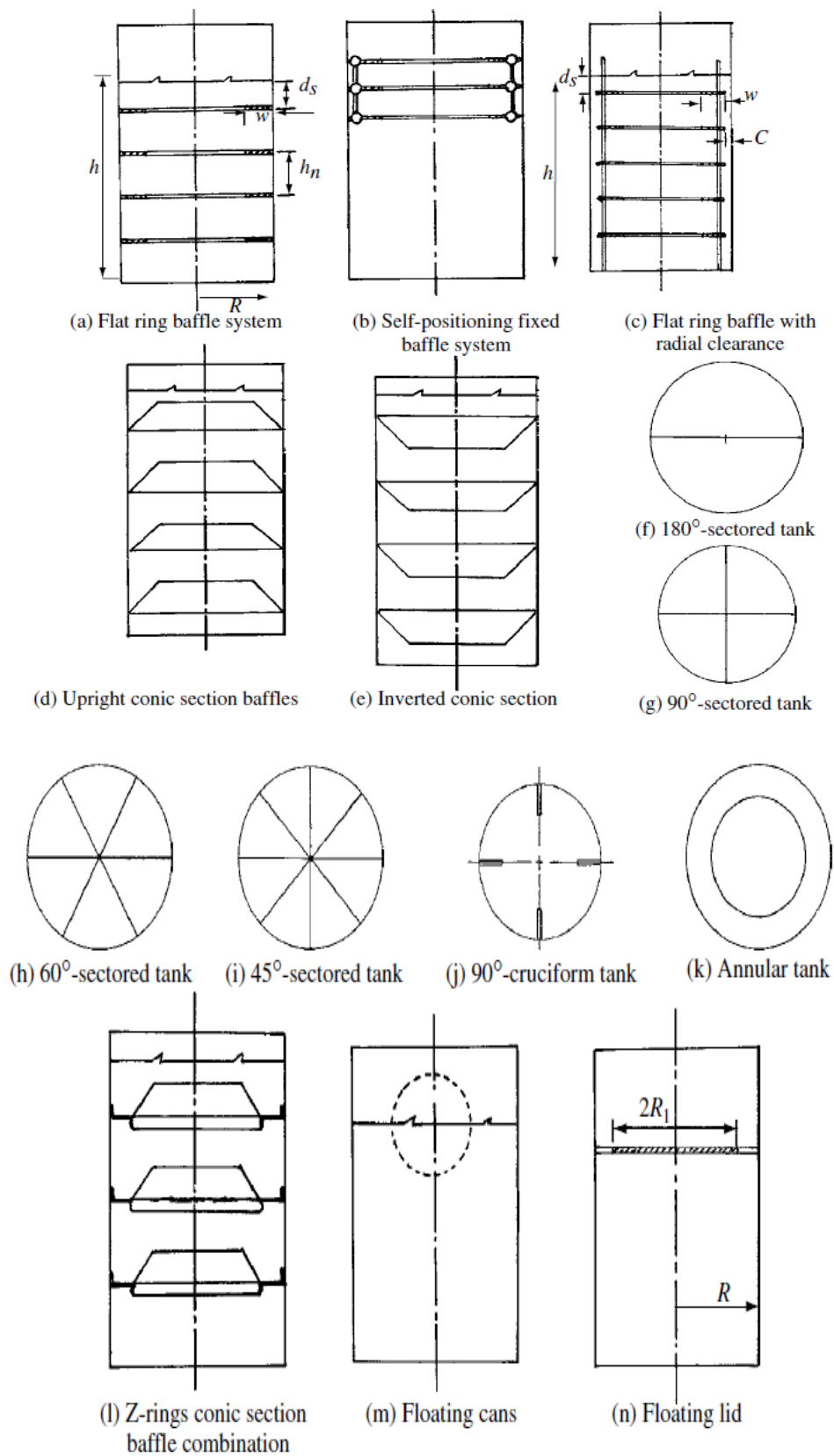
1. Perfil de la misión del vehículo y su trayectoria.
2. Los requerimientos de amortiguación para un tanque específico.
3. Las características físicas del tanque incluyendo su geometría, deformación elástica, y el aislamiento.
4. Características funcionales del sistema, alimentación y vaciado de tanques, requerimientos de ventilación, etc.
5. Propiedades físicas y químicas del líquido.
6. Cargas de impacto que deben soportar los dispositivos.

Mediante una recopilación bibliográfica se examinaron las distintas formas que se han utilizado para la supresión de este fenómeno, con el objetivo de inferir cual sería la solución más indicada y realizar el análisis para la implementación en el presente caso bajo estudio, teniendo en cuenta criterios como efectividad, facilidad constructiva y factibilidad en la implementación, y prever los cambios que introducen en el sistema.

Existen varios tipos de dispositivos de supresión de sloshing que se han empleado con éxito para aumentar la amortiguación y mitigar el fenómeno en los tanques de vehículos espaciales. Estos dispositivos incluyen anillos deflectores rígidos y flexibles (de diversa geometría y orientación), placas en forma de cruz, placas flotantes, etc.

En las siguientes imágenes se pueden observar los principales y más estudiados dispositivos anti-sloshing para tanques de vehículos espaciales:

*Suppression devices*



**Figura 8: Distintos dispositivos amortiguadores de sloshing[1]**

En las siguientes graficas se muestran dispositivos de supresión extraídos de la bibliografía y la variación del factor de amortiguación en función de los parámetros característicos. Estos sistemas presentan características de amortiguamiento superiores a los anillos, pero son de mayor peso y complejidad.

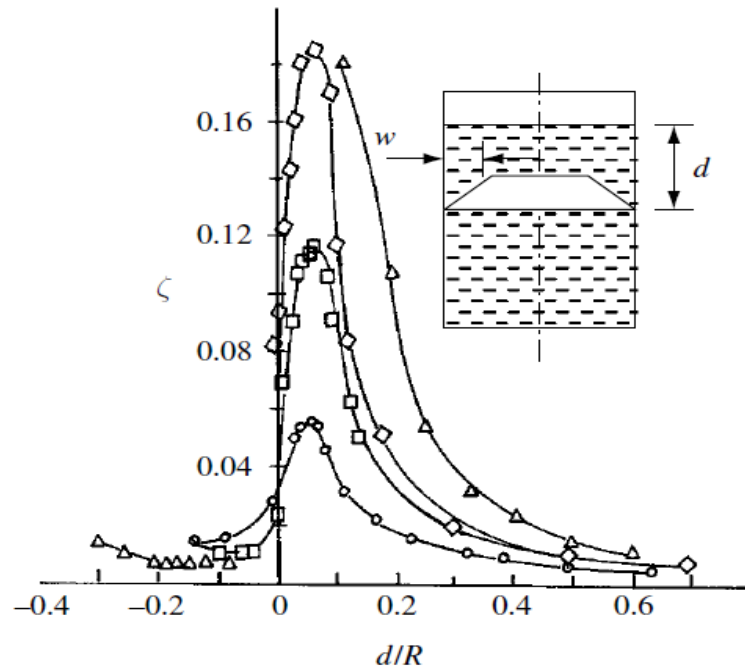


Figura 9: Factor de amortiguamiento de un supresor cónico

La anterior grafica muestra un dispositivo supresor cónico ubicado de forma vertical y su respectivo factor de amortiguamiento para una relación  $h/R = 2$  y  $R = 6$  pulgadas (Silveira et al, 1961)

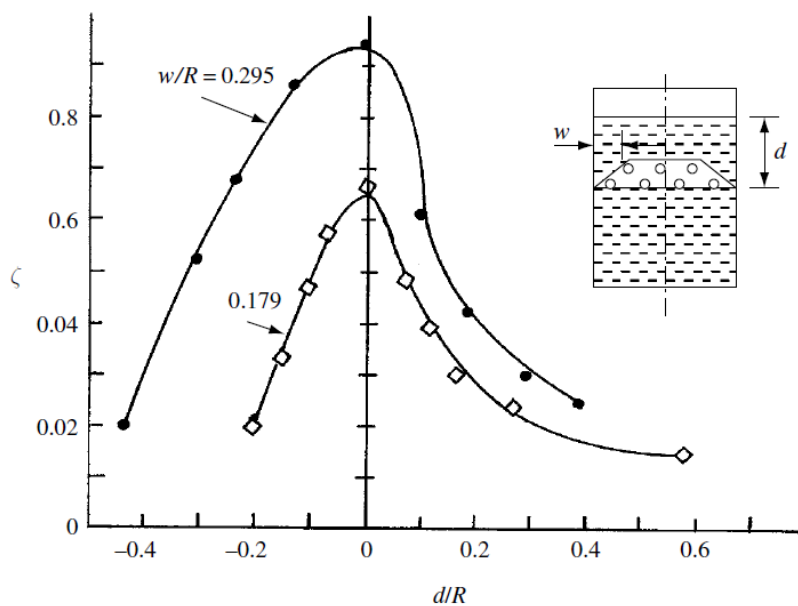
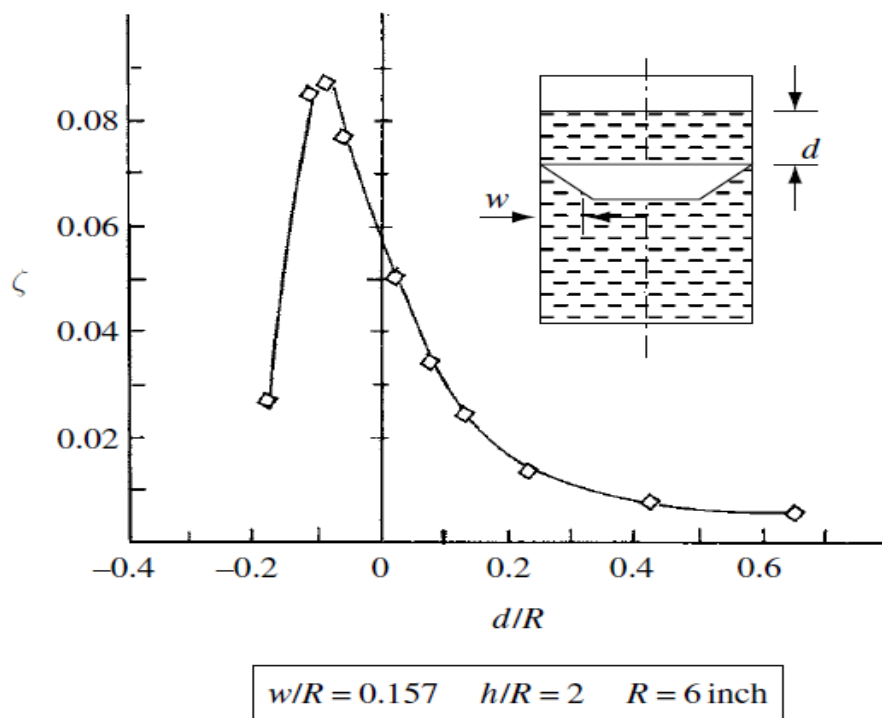


Figura 10 - Supresor cónico vertical perforado



**Figura 11: Factor de amortiguamiento de un supresor cónico invertido**

Si bien, como fue mostrado con antes, existen distintos tipos de dispositivos antisloshing que han sido implementados, por razones de simplicidad constructiva y seguridad operacional, serán estudiados con mayor detalle los dispositivos “anillos”.

Los anillos deflectores, tanto rígidos como flexibles, han tenido gran aplicación como dispositivos de supresión de sloshing y han sido ampliamente utilizados y estudiados en casos de recipientes cilíndricos como lo son los tanques del vehículo espacial bajo estudio. Existen varias configuraciones de anillos que se adaptan a distintas condiciones de operación, elegir la más aplicable y menos sofisticada es uno de los desafíos que enfrenta el diseño, junto con el dimensionamiento y la separación de los mismos para lograr la amortiguación requerida. A modo de presentación, se muestran a continuación algunos ejemplos de anillos utilizados en tanques de vehículos espaciales, extraídos de la bibliografía Ref.[1]:



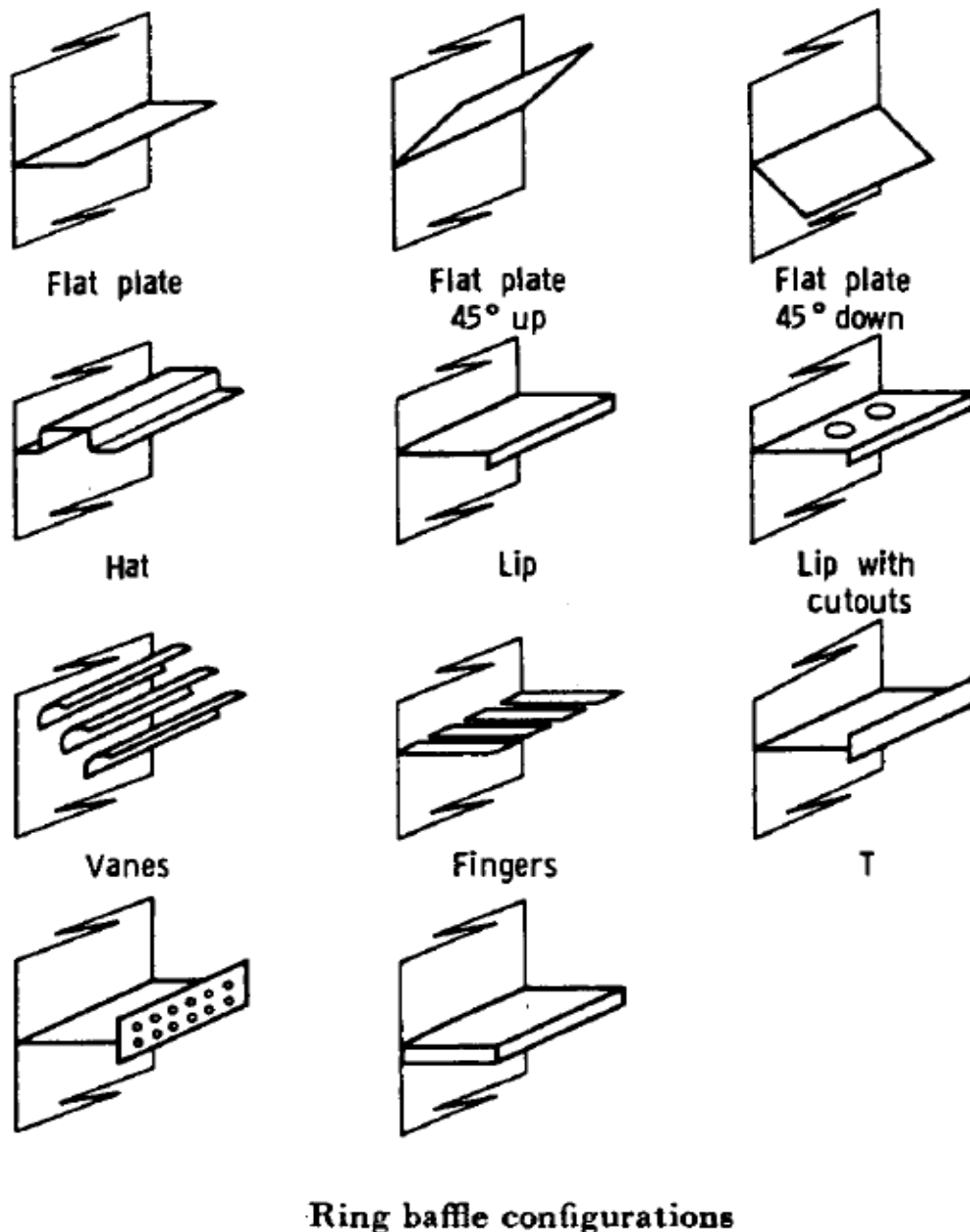


Figura 12: Distintas configuraciones de anillos antisloshing.

### **Factor de amortiguación anillos deflectores rígidos**

Como fue mencionado con anterioridad, el parámetro que caracteriza el estudio de dispositivos antisloshing es el factor de amortiguación, el cual nos da un indicio de como el sistema disipa energía durante el movimiento del líquido. Un óptimo diseño de dispositivo no solo consiste en lograr tener un alto valor de factor de amortiguación, sino también en que la implementación de los dispositivos no perjudique o introduzca cambios que puedan afectar el normal funcionamiento del sistema. Por este motivo, es importante tener en consideración el factor denominado “factor de bloqueo”, que nos

relaciona el área que ocupa el anillo respecto del área total de la sección del tanque, estando este en directa relación con el ancho del anillo y por consiguiente con el factor de amortiguación.

En el siguiente gráfico, se puede observar los cambios que experimenta el sistema con la introducción de un anillo plano rígido para distintas medidas del mismo (área bloqueada) [1], las cuales deben ser consideradas para cuantificar la modificación en las frecuencias naturales de sloshing que resultan al introducir estos dispositivos:

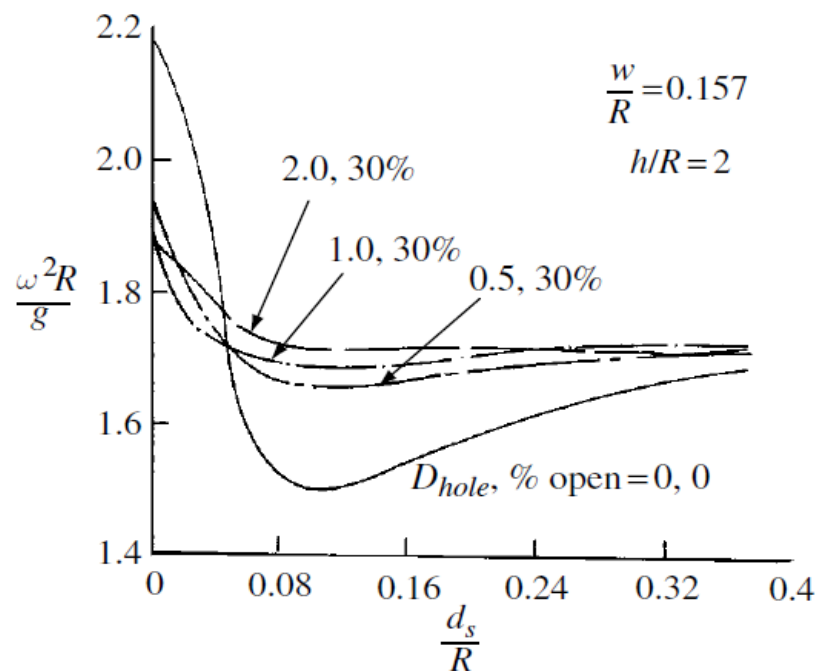


Figura 13 - Modificación de frecuencia natural de sloshing.

Siendo:

- $h$ = altura del fluido
- $w$ = ancho del anillo
- $d_s=h_s$ = distancia entre el anillo y la superficie libre.

El efecto de amortiguación que introduce la implementación de los dispositivos “anillos planos rígidos” y el desarrollo de las expresiones necesarias para el cálculo del factor de amortiguamiento que caracteriza la eficiencia de los anillos será analizado a continuación.

### **Calculo analítico:**

En primer lugar definimos formalmente el amortiguamiento, que para un sistema lineal puede interpretarse como la fracción de energía mecánica disipada en un ciclo de oscilación.

$$\gamma = \frac{|dE/dt|}{2\omega E} \quad [60]$$

Donde  $\omega$  es la frecuencia de oscilación y  $dE/dt$  es el tiempo promedio de disipación de energía.

Vale la pena destacar que por un lado tenemos el amortiguamiento viscoso, que es el que se presenta debido a los efectos viscosos del fluido y modifican su comportamiento y por otro lado el amortiguamiento que imparte un objeto inmerso en el fluido, que es el caso del amortiguamiento que será estudiado utilizando anillos instalados en el tanque, pero sin dejar de lado los efectos viscosos.

Para el cálculo analítico del factor de amortiguación que imparte un anillo inmerso en el fluido, se utiliza la formulación analítica de Miles Ref.[2], que relaciona distintos parámetros que serán mostrados a continuación, considerando que se ubica un anillo en el tanque y este disipa la energía cinética del movimiento del fluido ciclo a ciclo:

$$\gamma = C_D \cdot \phi(\lambda R, \lambda d, \lambda h) \cdot \frac{A_b \cdot \eta_1}{A \cdot R} \quad [61]$$

Dónde:

- $C_D$  es el coeficiente de resistencia local
- $A_b$  es el área del anillo
- $A$  es el área transversal del tanque
- $\eta_1$  es la máxima amplitud de una ola del liquido
- $d$  es la altura del fluido sobre el anillo
- $h$  es la altura total del fluido
- $\lambda_{mn} = \lambda(\text{para } m \text{ y } n = 1) = \xi_{mn}/R = \text{Raíces de: } \left. \frac{\partial J_m(\lambda_{mn} r)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$ ; Donde  $J_1$  es la función de Bessel de primer orden. Con  $\xi_{mn} = 1.841$  (caso  $m$  y  $n = 1$ )
- $\phi(\dots)$  esta dada por la siguiente expresión:

$$\phi = \frac{(4/3\pi)^3 \lambda R \tanh(\lambda h)}{[1 - (1/\lambda R)^2]} \left[ \frac{\sinh \lambda(z+h)}{\sin \lambda h} \right]^3 \quad [62]$$

Para una relación  $h/R > 1$  (como es en nuestro caso bajo estudio) esta expresión se puede aproximar a:

$$\phi \approx 0.5e^{-5.52d/R} \quad [63]$$

El coeficiente de resistencia se puede determinar mediante una relación empírica propuesta por Miles de la siguiente manera:

$$C_D = \frac{15}{\sqrt{\tau}} \quad \text{para } 2 \leq \tau \leq 20$$

$$\tau = U_m T / w$$

Dónde:

- $U_m$  es la máxima velocidad en el tiempo
- $T$  es el periodo
- $w$  es el espesor del anillo

Si este valor de  $\tau$  es mayor o igual a 100, el  $C_D = 2$

Por lo tanto reemplazando estas expresiones en la ecuación de  $\zeta$ , nos da el factor de amortiguamiento correspondiente a cada escala de tiempo quedando de la siguiente manera:

$$\gamma = 2.83e^{-4.5d/R} \left(2 - \frac{w}{R}\right)^{3/2} \left(\frac{w}{R}\right)^{3/2} \left(\frac{\eta_1}{R}\right)^{1/2} \quad [64]$$

Como podemos observar en la anterior expresión, el factor de amortiguamiento depende principalmente del ancho del anillo.

Por lo tanto, es necesario para llevar a cabo el diseño de los dispositivos y obtener su amortiguamiento determinar la anchura, la separación y la profundidad a la cual se colocarán los anillo. En el siguiente grafico extraído de la bibliografía se muestra el factor de amortiguación y su dependencia con el ancho del anillo para distintos casos siguiendo la solución de Miles Ref. [2] y comparando con mediciones experimentales de Stephens Ref.[7].

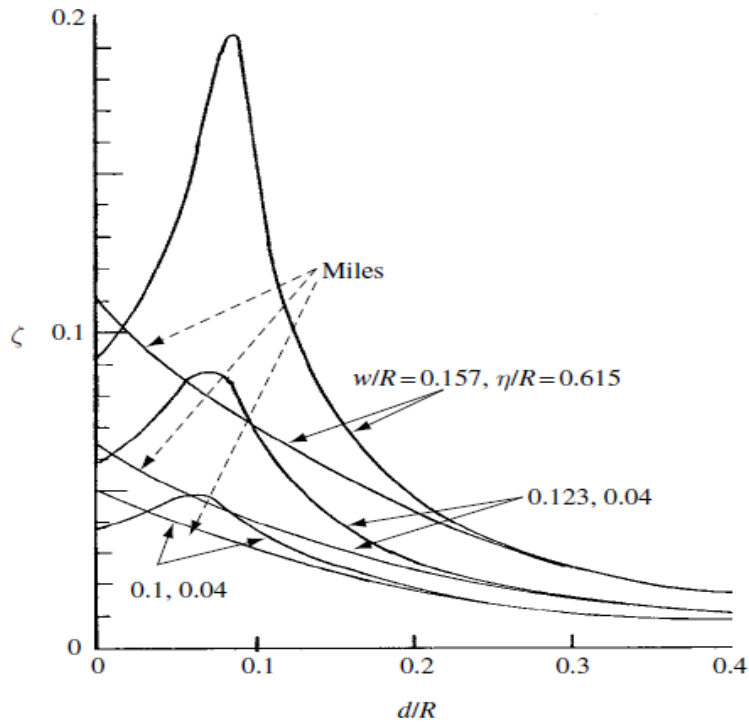


Figura 14: Factor de amortiguamiento para distintos parámetros w/r.

#### Determinación analítica del amortiguamiento viscoso

Antes de comenzar el análisis de los efectos de amortiguamiento que imparten los dispositivos antisloshing por disipación de energía y comenzar con su dimensionamiento, se tendrá en cuenta los efectos de amortiguación viscosos, ya que influyen en la predicción del comportamiento del fluido y aportan disipación de energía.

Como fue mencionado con anterioridad al introducir el tema, este amortiguamiento “extra”, se debe a los efectos viscosos que generan la pérdida de energía en el fluido cuando este se desplaza, logrando modificar el comportamiento del fluido, respecto del que tuviera si no existieran estos efectos.

Se abordará el estudio del amortiguamiento que ocurre en los tanques de combustible sin la presencia de dispositivos amortiguantes, para luego, sumar dichos efectos a los obtenidos con los dispositivos.

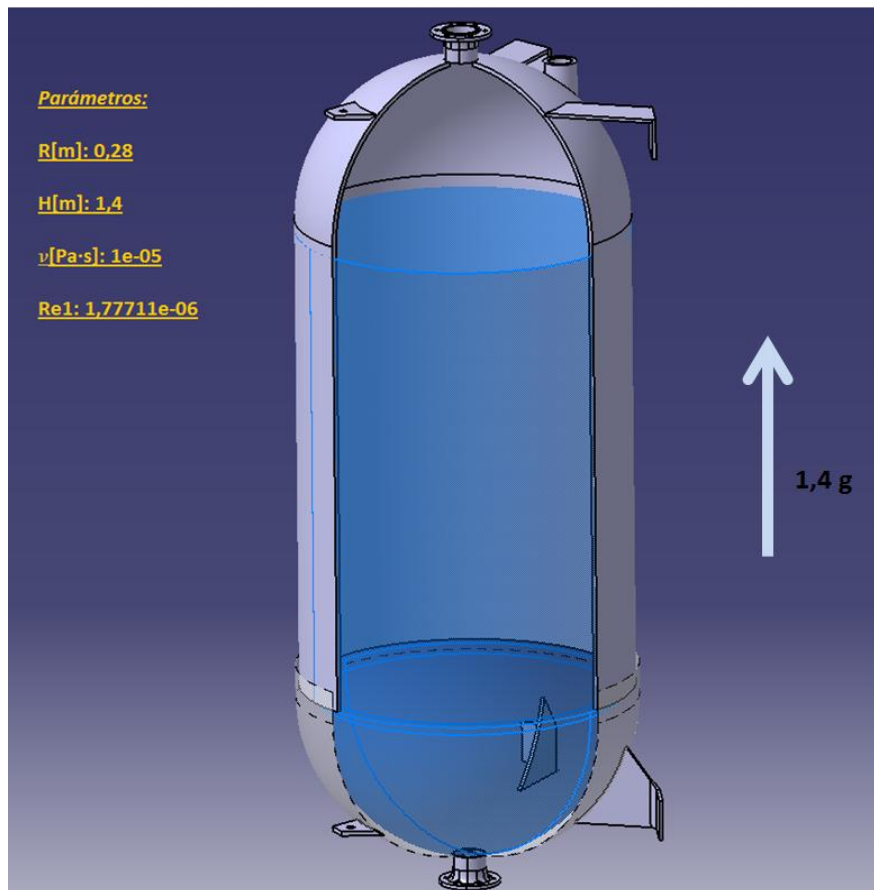
Una de las investigaciones más completas para la determinación del amortiguamiento viscoso, fue realizada por MIKISHEV AND DOROZHKIN [1961], llegando a la siguiente expresión.

$$\gamma = 0.79\sqrt{R_{el}} \left[ 1 + \frac{0.318}{\sinh(1.84h/R)} \left( 1 + \frac{1-h/R}{\cosh(1.84h/R)} \right) \right] \quad [65]$$

$$Re_1 = \frac{v}{\sqrt{gL^3}} \quad [66]$$

- $Re_1$  = numero adimensional
- $R$  = radio del tanque (utilizado como longitud característica para el numero dimensional  $Re_1$ )
- $h$  = altura de la columna de fluido: variable.
- $\nu$  = viscosidad cinemática del líquido:  $1,0e-05$
- $L$  = longitud característica
- $g$  = aceleración de la gravedad local:  $1.4g$

Los parámetros del tanque bajo estudio, se muestran a continuación:



**Figura 15 - Parámetros del tanque bajo estudio.**

A través de la anterior expresión, se determinan los valores de amortiguación viscosa en función de la altura  $h$  que va ocupando el fluido en el tanque a medida que este se vacía (decreciente con el tiempo). Esta altura de fluido se discretiza cada cinco centímetros:

Tabla 3 – Variación del amortiguamiento en función de la altura de fluido

h [m]	h/R	% Líquido respecto al tanque lleno (100%=H)	$\gamma$
0,01	0,035714	0,71	0,01104585
0,05	0,178571	3,57	0,00283416
0,1	0,357143	7,14	0,00177721
0,15	0,535714	10,71	0,00143185
0,2	0,714286	14,29	0,00127486
0,25	0,892857	17,86	0,0011931
0,3	1,071429	21,43	0,0011464
0,35	1,250000	25,00	0,0011176
0,4	1,428571	28,57	0,00109874
0,45	1,607143	32,14	0,00108584
0,5	1,785714	35,71	0,00107676
0,55	1,964286	39,29	0,00107025
0,6	2,142857	42,86	0,00106555
0,65	2,321429	46,43	0,00106214
0,7	2,500000	50,00	0,00105967
0,75	2,678571	53,57	0,00105786
0,8	2,857143	57,14	0,00105656
0,85	3,035714	60,71	0,00105561
0,9	3,214286	64,29	0,00105492
0,95	3,392857	67,86	0,00105442
1	3,571429	71,43	0,00105407
1,05	3,750000	75,00	0,00105381

El gráfico correspondiente a la amortiguación en función de altura h del fluido, con una mayor discretización es mostrado a continuación.

### Amortiguamiento viscoso en función de la altura de fluido en el tanque

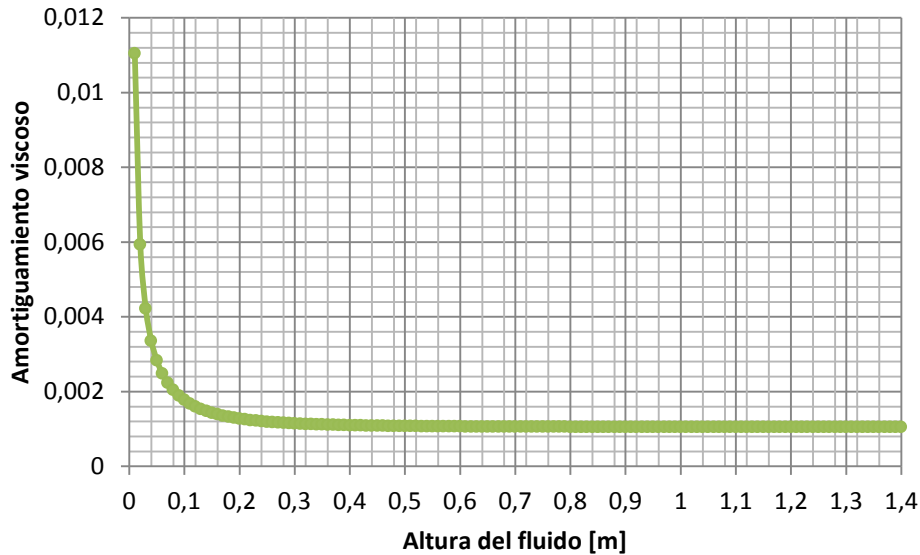


Figura 16 - Amortiguamiento viscoso Vs. Altura del fluido.

Se puede observar en el anterior gráfico, que el mayor amortiguamiento se da cuando existe menor cantidad de fluido en el tanque, por ejemplo, para el valor de 0,08 [m] de altura de fluido, tenemos un valor aproximado de amortiguación viscosa de 0,002. Para valores superiores a 0,25 [m] de altura de fluido, el valor del factor se vuelve aproximadamente constante (con valor 0,001). Esto se debe a que el fluido pierde mayor cantidad de energía cinética cerca del fondo a causa de la condición de no deslizamiento.

La expresión presentada para el cálculo del amortiguamiento viscoso en función de la altura del fluido, obtenido con anterioridad, no considera la presencia de las tapas, y debido a que en el caso estudiado, el tanque posee fondo esférico (dome), el amortiguamiento viscoso debe ser corregido para tal condición.

Experimentalmente se obtuvo un factor de corrección por fondo esférico en función de la altura que ocupa el fluido sobre el radio del tanque, [MIKISHEV AND DOROZHKIN], este factor ( $C_{dome}$ ), se encuentra graficado a continuación:



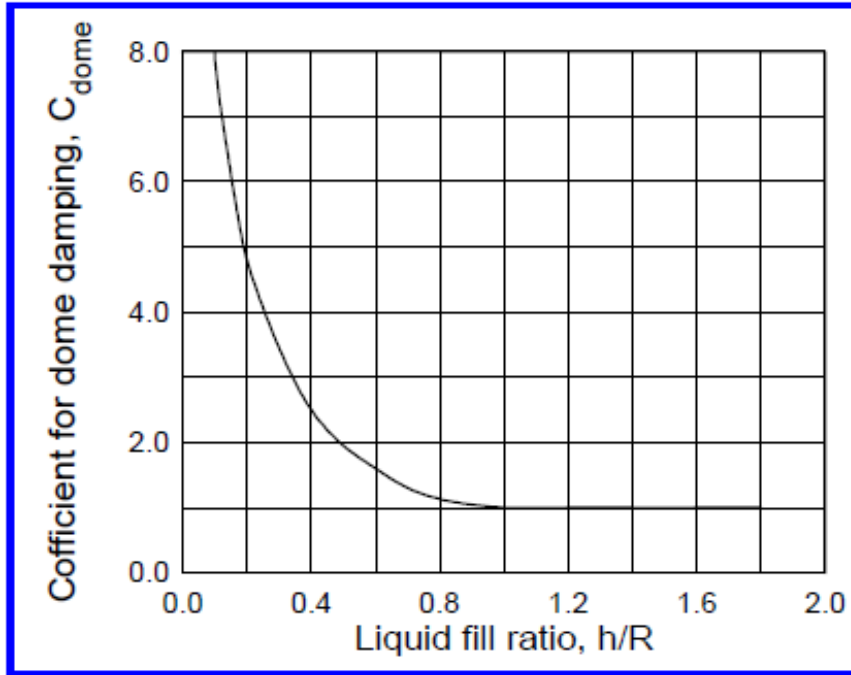


Figura 17 – Corrección para tanques cilíndricos

Para precisar el amortiguamiento en función de  $h$ , con la corrección por fondo esférico, se interpoló en base a valores obtenidos del gráfico anterior, para obtener las relaciones  $h/R$  de interés en nuestro caso bajo estudio.

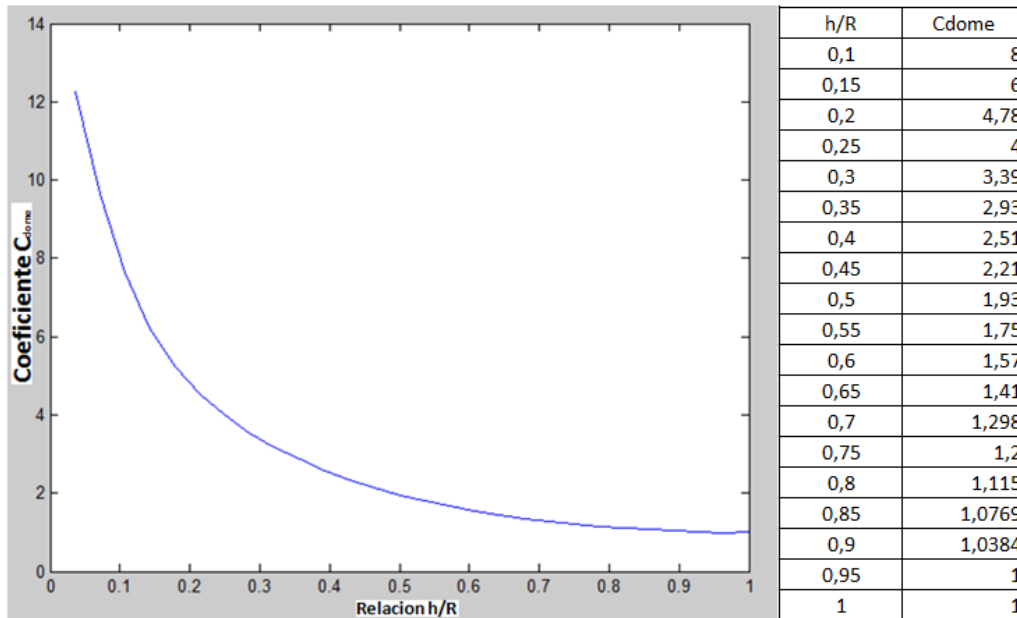


Figura 18 - Obtención de valores para la corrección

Cabe destacar del gráfico anterior que para los valores de  $h/R > 1$  el coeficiente tiene un valor de 1, por eso no se expresa en el gráfico.

La ecuación utilizada para determinar el amortiguamiento corregido, [MIKISHEV AND DOROZHKIN], es la siguiente:

$$\gamma' = 0.79 \sqrt{R_{el}} \left[ 1 + \frac{0.318}{\sinh(1.84h/R)} \left( 1 + \frac{1-h/R}{\cosh(1.84h/R)} \right) \right] \cdot C_{dome} \quad [67]$$

A continuación se muestra la tabla de valores para la obtención del amortiguamiento viscoso teniendo en cuenta la corrección por fondo esférico.

Tabla 4 – Corrección tanques cilíndricos

h [m]	h/R	% Líquido respecto al tanque lleno (100%=H)	$\gamma'$	Cdome Interpolado
0,01	0,03571429	0,71	0,135434303	12,2611
0,02	0,07142857	1,43	0,05709356	9,623
0,03	0,10714286	2,14	0,032291555	7,6537
0,04	0,14285714	2,86	0,020908044	6,2301
0,05	0,17857143	3,57	0,014819831	5,229
0,06	0,21428571	4,29	0,011245179	4,5274
0,07	0,25	5,00	0,008928394	4
0,08	0,28571429	5,71	0,00724697	3,5479
0,09	0,32142857	6,43	0,006029676	3,1818
0,1	0,35714286	7,14	0,005095093	2,8669
0,11	0,39285714	7,86	0,004309439	2,5632
0,12	0,42857143	8,57	0,003733717	2,3307
0,13	0,46428571	9,29	0,003264751	2,126
0,14	0,5	10,00	0,002855597	1,93
0,15	0,53571429	10,71	0,002572455	1,7966
0,16	0,57142857	11,43	0,002329209	1,6746
0,17	0,60714286	12,14	0,002093828	1,5446
0,18	0,64285714	12,86	0,001894398	1,4298
0,19	0,67857143	13,57	0,0017421	1,3419
0,2	0,71428571	14,29	0,001618685	1,2697
0,21	0,75	15,00	0,001505169	1,2
0,22	0,78571429	15,71	0,001402934	1,1349
0,23	0,82142857	16,43	0,001335902	1,0949
0,24	0,85714286	17,14	0,001292899	1,0722
0,25	0,89285714	17,86	0,001246197	1,0445
0,26	0,92857143	18,57	0,001198606	1,0143
0,27	0,96428571	19,29	0,001164682	0,9942
0,28	1	20,00	0,001162262	1

Obteniendo así la gráfica del amortiguamiento viscoso en función de la altura del fluido  $h$ , corregida por fondo esférico.

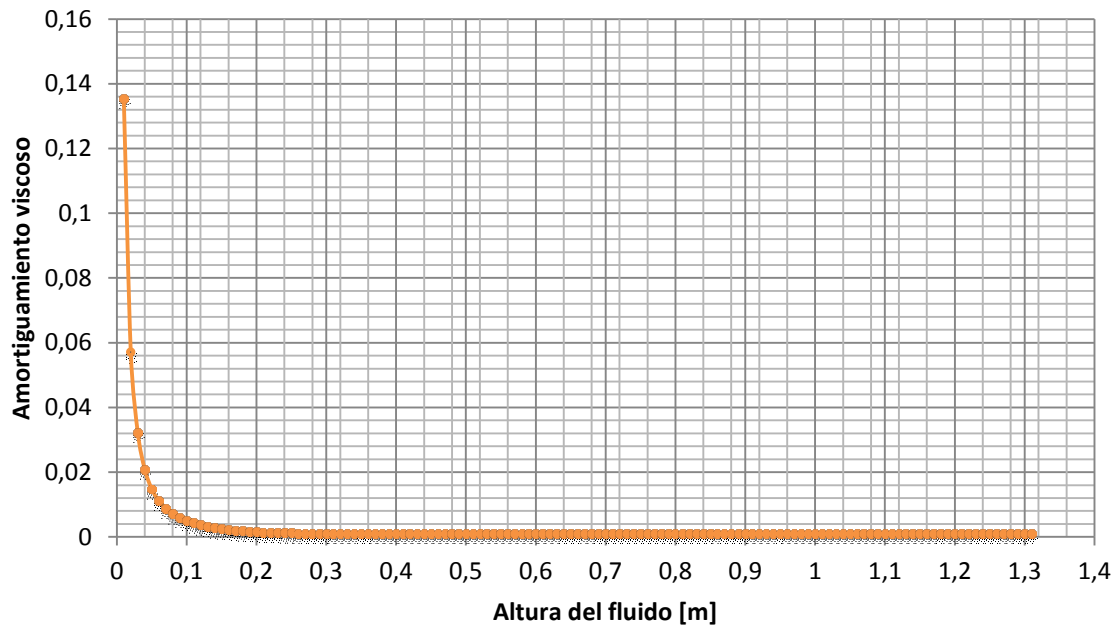
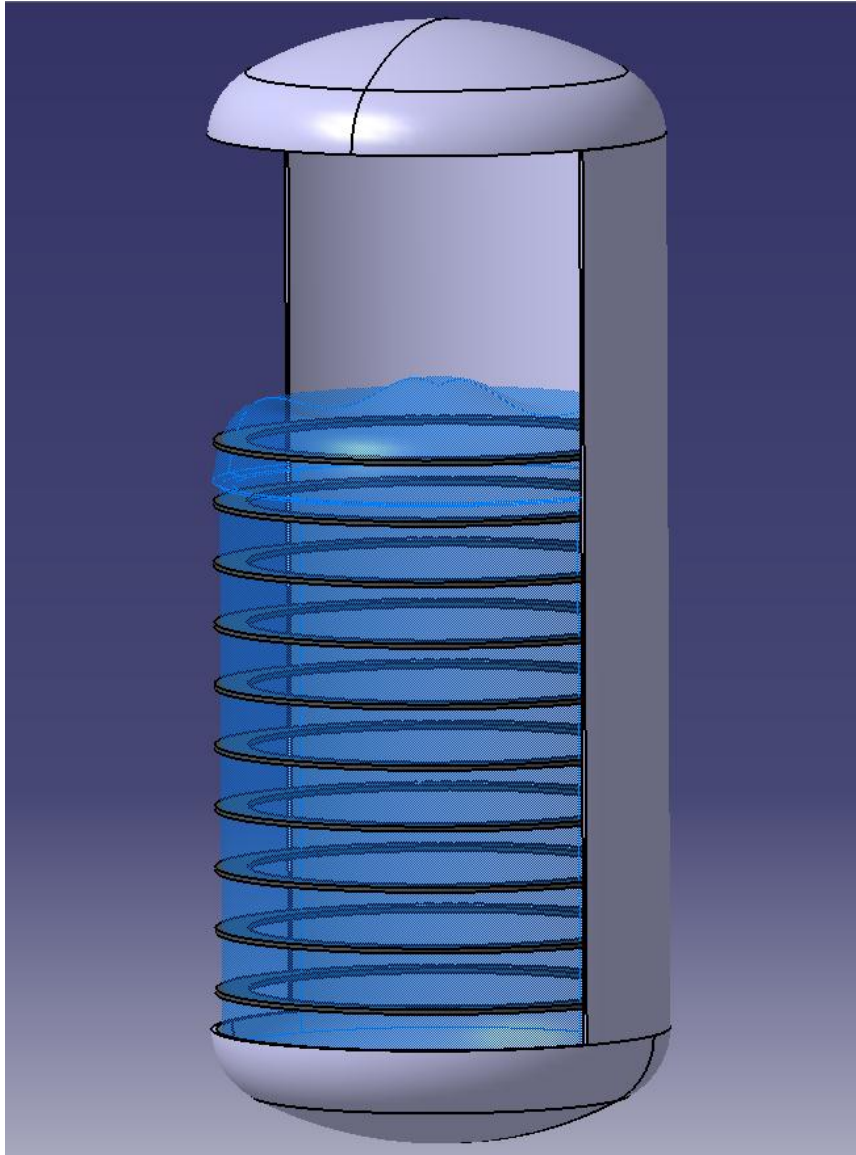


Figura 19 - Amortiguamiento viscoso en función de la altura de fluido (corrección)

Tal como se puede observar en el gráfico, el amortiguamiento aumenta en relación al que habría si no se considerara la corrección en un 10% aproximadamente en la primera parte de la zona constante ( hasta que el coeficiente de corrección toma el valor 1) y en mayor porcentaje cuando la altura del fluido es menor a 0.1 m,

### **Estudio del amortiguamiento de anillos deflectores**

A continuación, se estudiará el efecto de amortiguamiento que introduce la presencia de anillos deflectores rígidos y como varía en función de la profundidad de ubicación de los mismos.



**Figura 20 – Configuración de tanque con anillos.**

El amortiguamiento proporcionado por un anillo deflector rígido se analiza por analogía al arrastre que se genera en una placa plana inmersa en un flujo oscilatorio.

Para ello se consideran las siguientes hipótesis:

- El líquido oscila en los modos fundamentales de sloshing
- La dirección del flujo se supone normal al anillo
- El flujo en las proximidades del anillo no se ve afectado por la superficie libre ni por el fondo del tanque. Esto requiere suponer que el anillo ocupa un pequeño porcentaje de la superficie transversal del tanque y que no se encuentra cercano al fondo.

Por lo tanto, para la obtención del factor de amortiguamiento debido a la incorporación de anillos deflectores al sistema, se utiliza la ecuación [60] mostrada anteriormente.

$$\gamma = \frac{|dE/dt|}{2\omega E} \quad [60]$$

Para desarrollar la anterior expresión, es necesario determinar en primera instancia la energía mecánica, la cual es la suma instantánea de la energía potencial más la energía cinética, pero es también igual al máximo valor de esta última, la cual puede ser calculada en términos de la velocidad potencial o a partir de un modelo mecánico masa-resorte, en el cual la máxima energía cinética será:

$$E = \frac{1}{2} m_s \omega^2 X_{\max}^2 \quad [68]$$

Donde  $m_s$  es la masa del oscilador y  $X_{\max}$  es el pico de amplitud oscilatoria, la cual se relaciona linealmente con la amplitud de la onda de sloshing  $\delta$ , ya que cuando se traslada la superficie libre hacia arriba, la masa del oscilador se traslada horizontalmente en proporción,  $X_{\max} = \Gamma \delta$ , donde  $\Gamma$ , es un número que depende de la forma del tanque.

Por lo tanto reescribiendo la ecuación 2.1 en términos de  $\Gamma$ , obtenemos:

$$E = \frac{1}{2} m_s \omega^2 \Gamma^2 \delta^2 \quad [69]$$

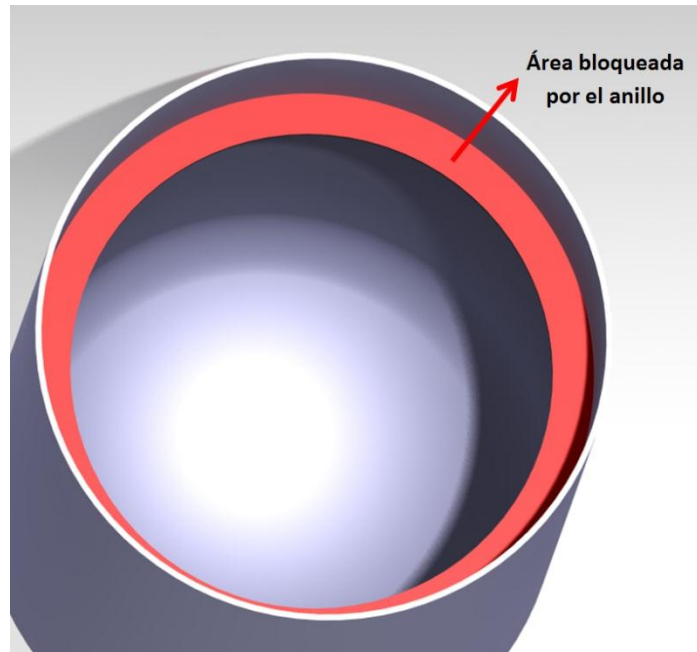
Obtenida la expresión de la energía cinética, es necesario determinar la disipación de energía ( $dE/dt$ ), por lo tanto para un anillo orientado de manera normal al flujo, la energía disipada está dada principalmente por la resistencia (drag) de presión. La fuerza instantánea de resistencia es igual a un medio del producto de la densidad del líquido  $\rho$ , el cuadrado de la velocidad en la placa, el coeficiente de drag  $C_d$  y el área total del anillo  $A_b$ . La tasa de disipación de energía es el producto de la fuerza de resistencia y la velocidad.

Podemos escribir el promedio de la tasa de disipación como:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{4}{3\pi} \right) C_\theta C_D A_b (\omega \delta_z)^3 \quad [70]$$

Donde  $\delta_z$  es la amplitud del movimiento del líquido sobre el anillo. Ésta se relaciona con la altura de la ola  $\delta$  y es función de la profundidad debajo de la superficie a la cual se ubica el anillo y se puede expresar como  $\delta_z = f_d \cdot \delta$ .

El termino  $\omega\delta_z \sin \omega t$  es la velocidad del líquido, el factor  $(4/3\pi)$  es el resultado del promedio del valor absoluto de  $(\sin \omega t)^3$  y  $C_\theta$  es similar al promedio espacial del valor absoluto del cubo de la altura de la ola de slosh alrededor de la circunferencia del anillo.  $A_b$ , representa el área bloqueada, es decir, el área transversal que ocupa el anillo instalado en el tanque.



**Figura 21 Área bloqueada**

De manera que si ponemos las ecuaciones anteriores en la ecuación (1), tenemos:

$$\gamma_{drag} = \frac{\left(\frac{4}{3\pi}\right) C_\theta C_D A_b f_d^3}{2(m_s / \rho) \Gamma^2} \quad [71]$$

El coeficiente de drag,  $C_D$  utilizado, es el correspondiente al de una placa plana inmersa en un flujo oscilatorio, según la siguiente expresión obtenida de la referencia [3]:

$$\gamma_{drag} = \frac{\left(\frac{4}{3\pi}\right) C_\theta C_D A_b f_d^3}{2(m_s / \rho) \Gamma^2} \quad [71]$$

$$C_D = 15 / \sqrt{UT/w} \quad \text{cuando } UT/w > 20$$

Donde  $w$  es el ancho del anillo,  $U = \omega \cdot f_d \cdot \delta$ , que es la amplitud de la velocidad de oscilación y  $T = 2\pi / \omega$ , es el periodo de oscilación.

Ab, está caracterizada por el factor  $A \cdot C_1$ , donde A es el área de la sección del tanque y  $C_1$  es la relación de áreas entre el baffle y la sección total del tanque.

Por lo tanto, si introducimos todas estas relaciones en la ecuación (2.4), obtenemos la expresión de amortiguamiento para el tanque cilíndrico:

$$\gamma_{baffle} = \frac{15 \left( \frac{4}{3\pi} \right)^2 C_1 A f_d^{2.5} \sqrt{\delta w}}{2\sqrt{\pi} (m_s / \rho) \Gamma^2} \quad [72]$$

En los casos en que la altura de la columna de líquido es considerable respecto al radio, ( $h/R > 2$ ), se pueden utilizar las siguientes expresiones para cada factor de la anterior ecuación:

$$m_s = 0.456(\rho AR)$$

$$C_1 = \frac{w}{R} \left( 2 - \frac{w}{R} \right)$$

$$f_d = e^{-1.84h_s/R}$$

$$\Gamma = 0.649$$

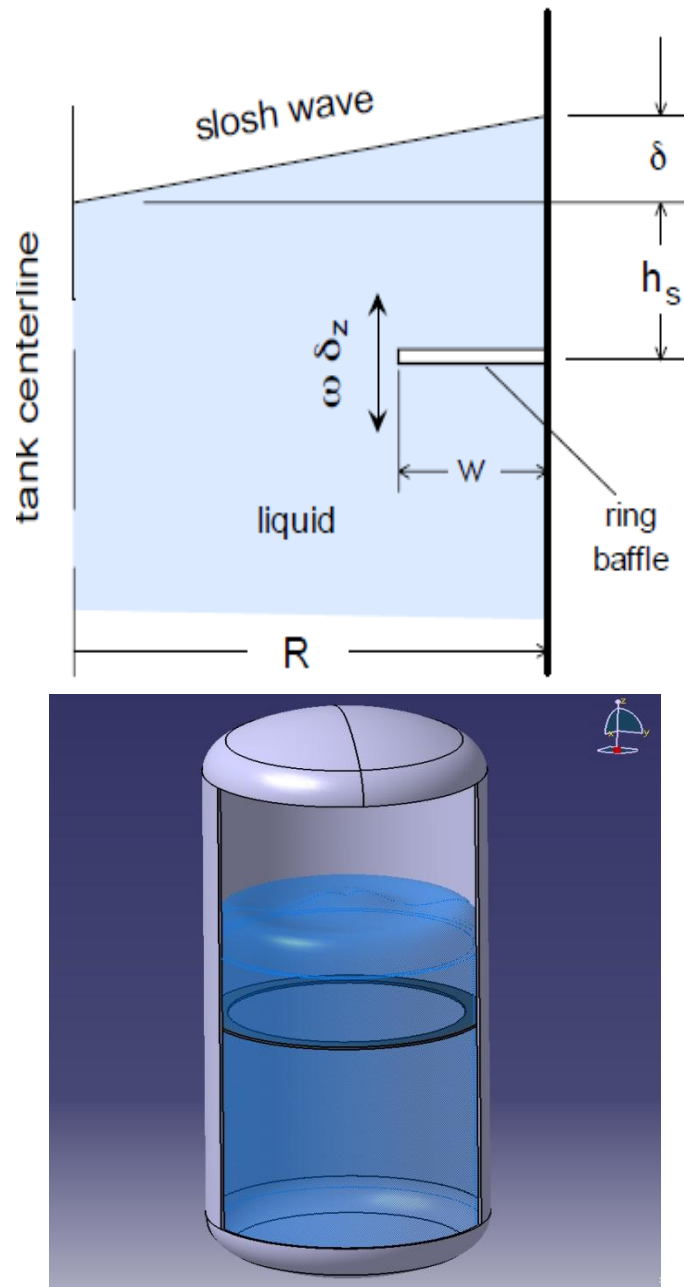
$$w \approx \frac{1}{2} RC_1$$

Poniendo estas relaciones en la ecuación (2.5), obtenemos la siguiente expresión:

$$\gamma_{baffle} = 2.83 e^{-4.6(h_s/R)} C_1^{3/2} (\delta/R)^{1/2} \quad [73]$$

Dicha ecuación, predice el factor de amortiguamiento que corresponde a un anillo sumergido en el fluido para un tanque cilíndrico.

En el siguiente esquema se pueden observar todas las variables que intervienen en el cálculo del amortiguamiento impartido por los anillos rígidos.



**Figura 22 . Parámetros físicos**

Haciendo uso de la ecuación desarrollada para determinar el amortiguamiento de un anillo, se tabulan los valores de este factor en función de  $h_s$  que determina la profundidad de ubicación del dispositivo sobre la superficie libre.

Se consideran tres casos distintos, los cuales corresponden a diferentes valores de ancho de anillo ( $w$ ). A través de la variación del factor de amortiguamiento en función de la profundidad de ubicación del anillo (tomando valor igual a cero cuando de la superficie libre del fluido se encuentra sobre el anillo) obtendremos la separación necesaria entre dispositivos para lograr el amortiguamiento que deseamos instalando un grupo de anillos y solapando el efecto que generan:



Tabla 5 - Primer caso de estudio:  $w=0,01$  [m],  $h_s$  discretizado cada  $0,05$  [m]

Ancho del anillo	Relación de Bloqueo	Profundidad de ubicación del anillo	Amortiguamiento Anillo
$w$ [m]	C1	$h_s$ [m]	
0,01	0,070153061	0,01	0,01995368
		0,05	0,010342594
		0,1	0,004548703
		0,15	0,002000533
		0,2	0,00087984
		0,25	0,000386956
		0,3	0,000170184
		0,35	7,48476E-05
		0,4	3,29182E-05
		0,45	1,44775E-05
		0,5	6,36726E-06
		0,55	2,80034E-06
		0,6	1,2316E-06
		0,65	5,4166E-07
		0,7	2,38224E-07
		0,75	1,04771E-07
		0,8	4,60788E-08
0,85	2,02656E-08		
0,9	8,91286E-09		
0,95	3,9199E-09		
1	1,72398E-09		
1,05	7,58214E-10		

Grafico correspondiente al primer caso (con una mayor discretizacion que la tabulada)

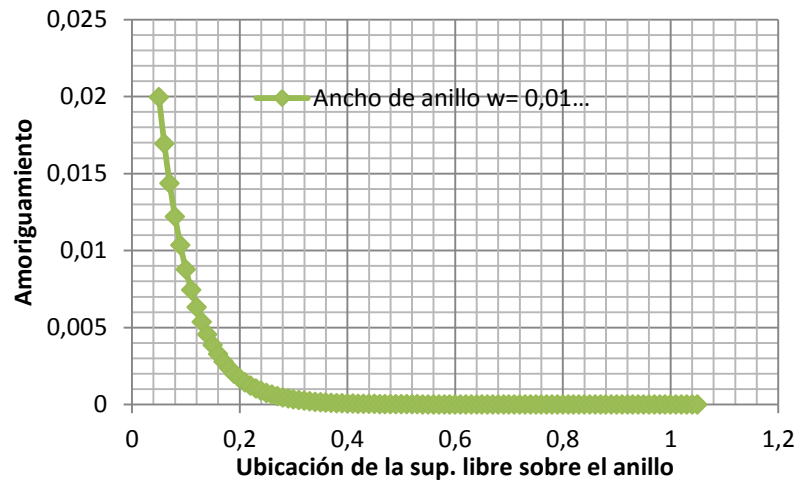


Figura 23 – Amortiguación Vs. Ubicación de la sup. Libre

- Segundo caso de estudio:  $w=0,05[m]$ ,  $h_s$  discretizado cada  $0,05 [m]$

Tabla 6 - Segundo caso de estudio:  $w=0,05[m]$ ,  $h_s$  discretizado cada  $0,05 [m]$

Ancho del anillo	Relación de Bloqueo	Profundidad de ubicación del anillo	Amortiguamiento anillo
$w[m]$	C1	$h_s [m]$	
0,05	0,325255102	0,01	0,199199953
		0,05	0,103251344
		0,1	0,045410242
		0,15	0,019971557
		0,2	0,008783549
		0,25	0,00386303
		0,3	0,001698972
		0,35	0,000747213
		0,4	0,000328626
		0,45	0,000144531
		0,5	6,35651E-05
		0,55	2,79561E-05
		0,6	1,22952E-05
		0,65	5,40746E-06
		0,7	2,37821E-06
		0,75	1,04595E-06
		0,8	4,6001E-07
0,85	2,02314E-07		
0,9	8,89782E-08		
0,95	3,91329E-08		
1	1,72107E-08		
1,05	7,56934E-09		

Grafico correspondiente al segundo caso (con una mayor discretizacion que la tabulada)

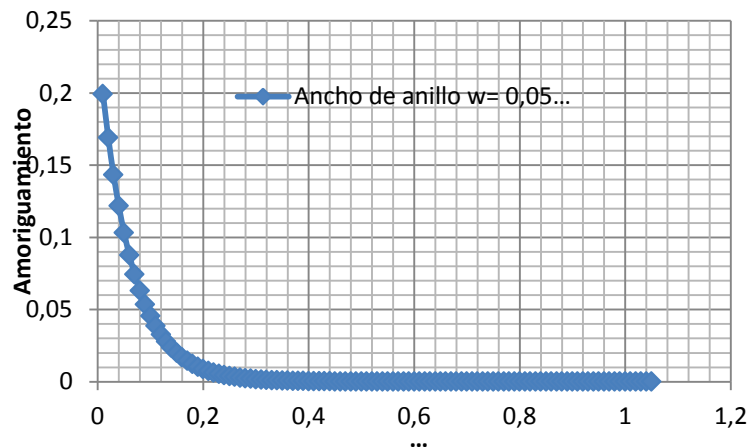


Figura 24 - Amortiguación Vs. Ubicación de la sup. Libre

Tabla 7 - Tercer caso de estudio:  $w=0,1[m]$ ,  $h_s$  discretizado cada  $0,05 [m]$

Ancho del anillo	Relación de Bloqueo	Profundidad de ubicación del anillo	Amortiguamiento anillo
$w[m]$	C1	$h_s [m]$	
0,1	0,586734694	0,01	0,482631549
		0,05	0,25016249
		0,1	0,110022192
		0,15	0,048388081
		0,2	0,021281219
		0,25	0,009359542
		0,3	0,004116354
		0,35	0,001810384
		0,4	0,000796212
		0,45	0,000350177
		0,5	0,000154009
		0,55	6,77335E-05
		0,6	2,97894E-05
		0,65	1,31015E-05
		0,7	5,76206E-06
		0,75	2,53417E-06
		0,8	1,11454E-06
0,85	4,90176E-07		
0,9	2,15581E-07		
0,95	9,4813E-08		
1	4,16991E-08		
1,05	1,83394E-08		

Grafico correspondiente al tercer caso (con una mayor discretizacion que la tabulada)

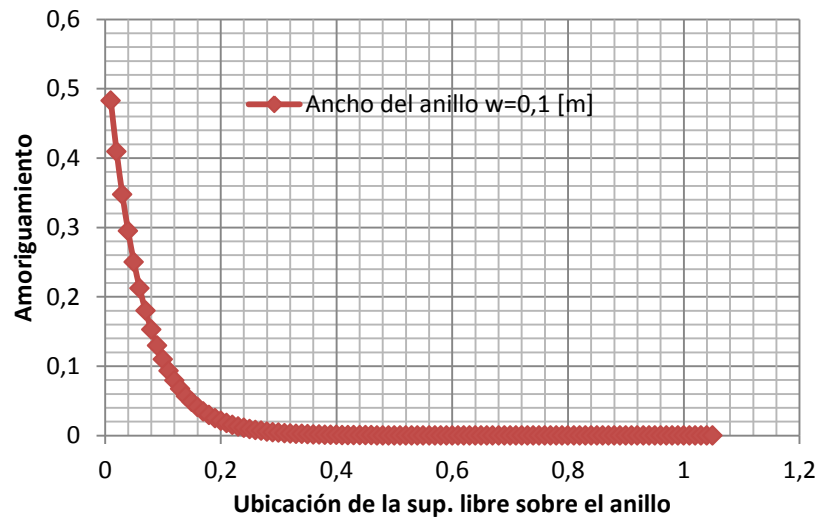


Figura 25 - Amortiguación Vs. Ubicación de la sup. Libre

Cabe destacar que según se obtiene en la bibliografía Ref.[3], el efecto de amortiguamiento de los anillos cerca de la superficie libre (cuando  $h_s$  tiende a hacerse cero), se ve incrementado más de lo obtenido teóricamente, tal como es mostrado en la gráfica a continuación:

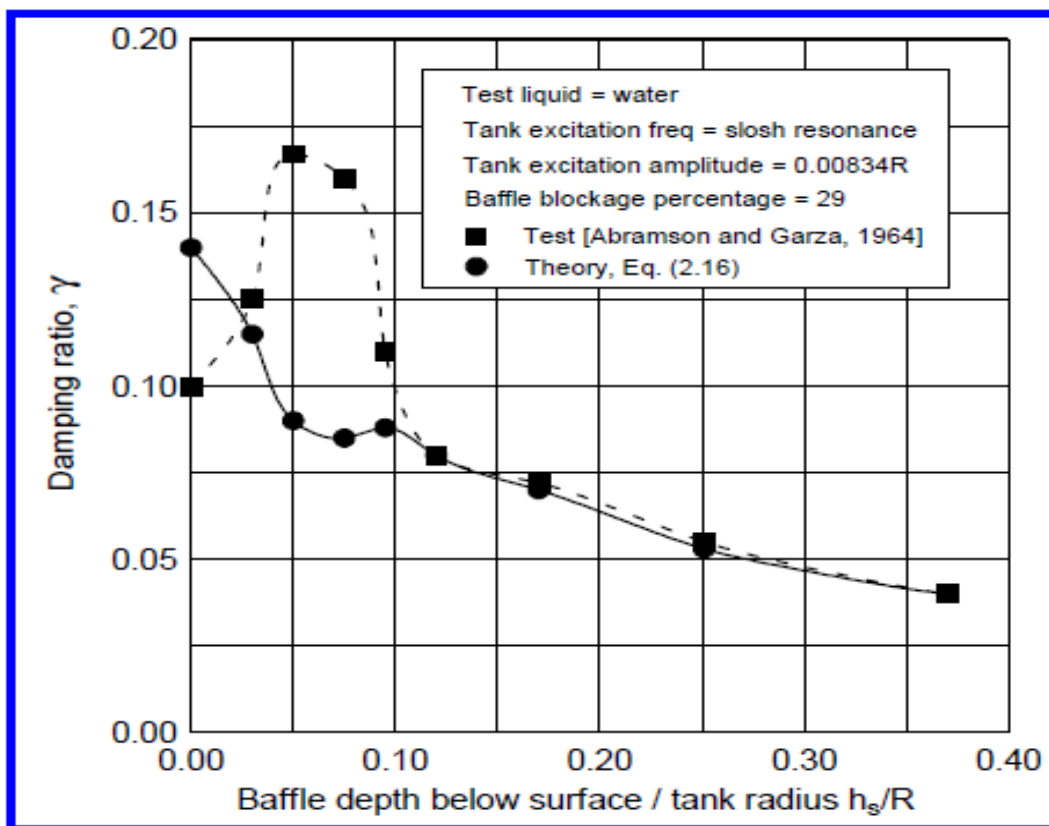
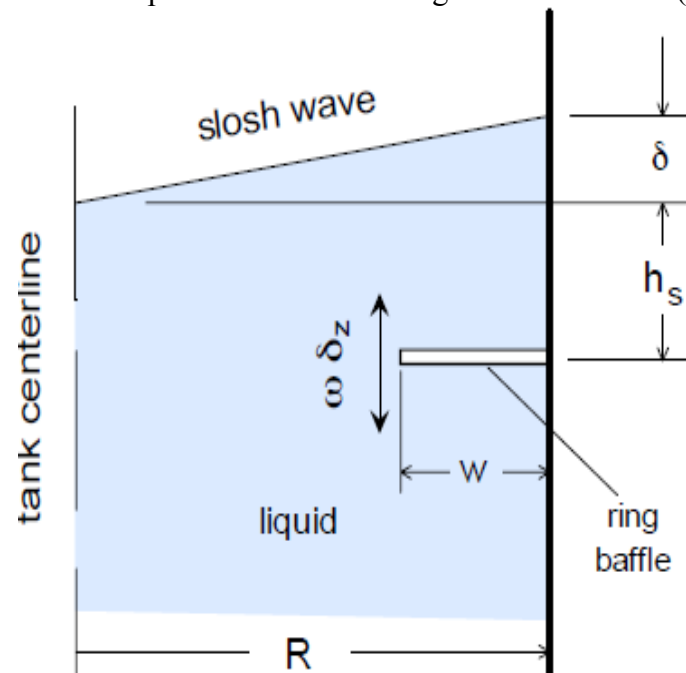


Figura 26 - Comparación de amortiguación teórica y experimental

Como se puede observar en las gráficas anteriores (



,Figura 23 y Figura 24), a medida que el parámetro  $w$  (ancho de anillo) es mayor, la amortiguación que este genera al sistema cuando la superficie libre del fluido se acerca al dispositivo aumenta considerablemente. Si bien este aumento en el amortiguamiento es beneficioso, un excesivo ancho de dispositivo bloquearía la sección transversal del tanque y aumentaría en gran medida el peso de la totalidad de los anillos. Esto no es aceptable, por lo tanto, se debe lograr cumplir con el objetivo de reducir el movimiento relativo del fluido de la forma más óptima posible.

Hasta el momento, se ha considerado la amortiguación que genera un anillo solo ubicado en el tanque, pero para el diseño interior de los tanques, debemos proponer una configuración de anillos. Por lo tanto, a través de los resultados obtenidos, ahora debemos determinar la separación entre anillos para lograr generar al sistema amortiguación a medida que el tanque comienza a vaciarse (solapando el efecto que los dispositivos generan).

El siguiente gráfico extraído de la bibliografía Ref.[3], muestra el efecto de la ubicación de varios anillos deflectores. En la parte izquierda se puede observar que el menor amortiguamiento se da cuando la superficie libre se ubica ligeramente por debajo del deflector más cercano. Por lo tanto sumando este efecto, se puede lograr una mayor amortiguación del fenómeno y asegurar que mantendrá a lo largo de todo el vaciado del tanque.

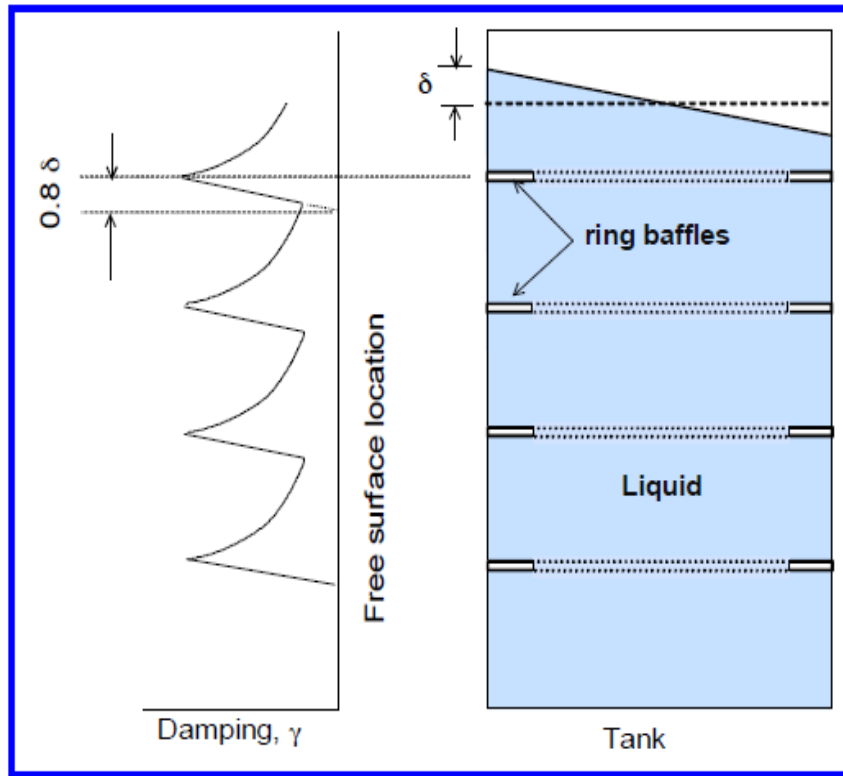


Figura 27 - Grafica de un sistema de anillos

Si consideramos la ecuación [73] y teniendo en cuenta que tomamos como elevación de la superficie libre un 20% del radio del tanque ( $\delta = 0,2R$ ) la misma se reduce a:

$$\gamma_{baffle} = 1.266e^{-4.6(h_s/R)} C_1^{3/2} \quad [74]$$

A través de la anterior ecuación, se probaron distintas separaciones y anchos de anillos para lograr un factor de amortiguamiento de un valor entre 0,1 y 0,2 (que resulta un valor más que aceptable, dado que representa entre un 10 y un 20% de disipación de energía del fluido por ciclo).

A continuación se muestra la geometría elegida para la configuración de anillos que mejor se adaptó a las características del caso bajo estudio y los valores de amortiguación correspondientes.

Tabla 8 – Geometría de configuración de anillos

Geometría [metros]				
Ancho	Separación	Espesor	Radio Interno	Radio Externo
0,04	0,7	0,001	0,24	0,28

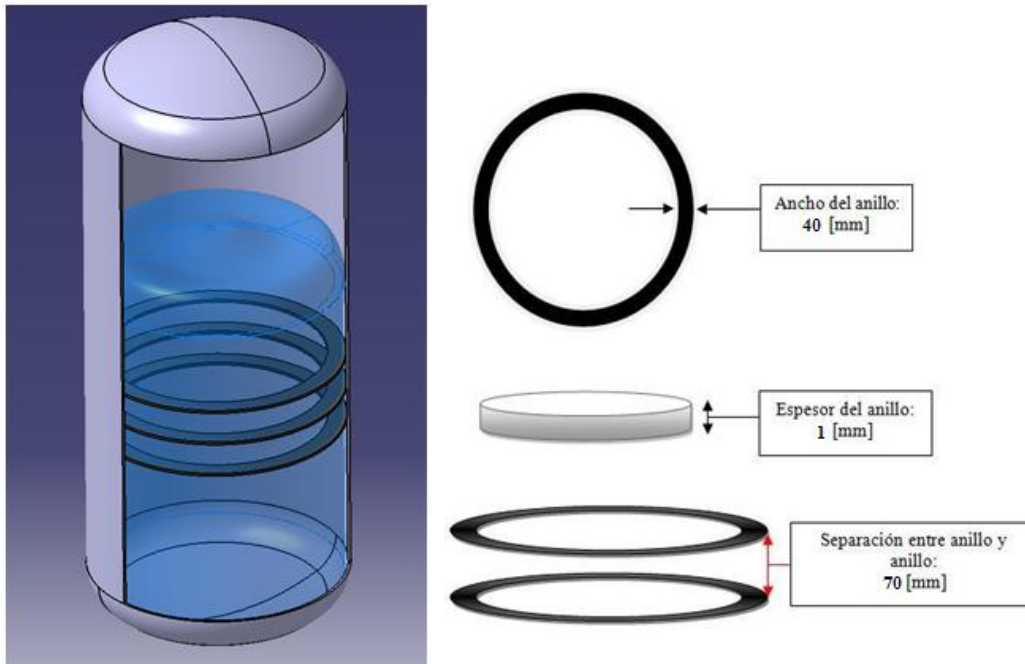


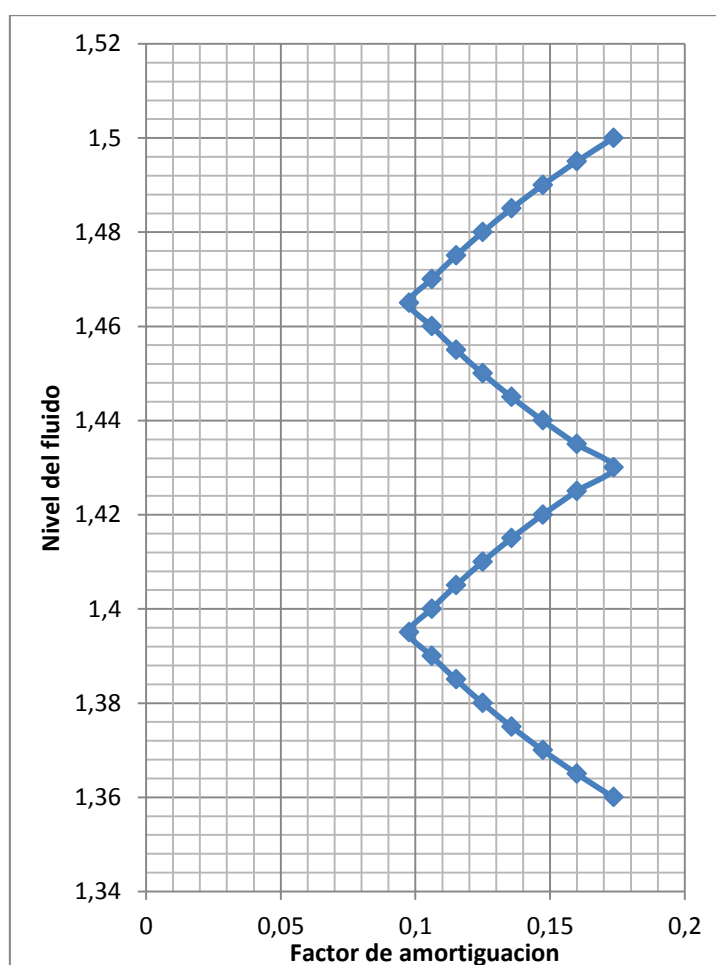
Figura 28 – Geometría de anillos

Utilizando la geometría propuesta, se calcula el amortiguamiento que se daría entre tres anillos, arrojando los siguientes resultados.

Tabla 9 – Amortiguamiento de anillos

Nivel del Fluido entre anillos	Amortiguamiento	h	Ubicación de anillo
0	0,173550005	1,5	Anillo1
0,005	0,159863913	1,495	
0,01	0,147257102	1,49	
0,015	0,13564446	1,485	
0,02	0,124947586	1,48	
0,025	0,115094264	1,475	
0,03	0,106017972	1,47	
0,035	0,097657433	1,465	
0,03	0,106017972	1,46	
0,025	0,115094264	1,455	
0,02	0,124947586	1,45	
0,015	0,13564446	1,445	
0,01	0,147257102	1,44	
0,005	0,159863913	1,435	
0	0,173550005	1,43	Anillo2
0,005	0,159863913	1,425	
0,01	0,147257102	1,42	
0,015	0,13564446	1,415	

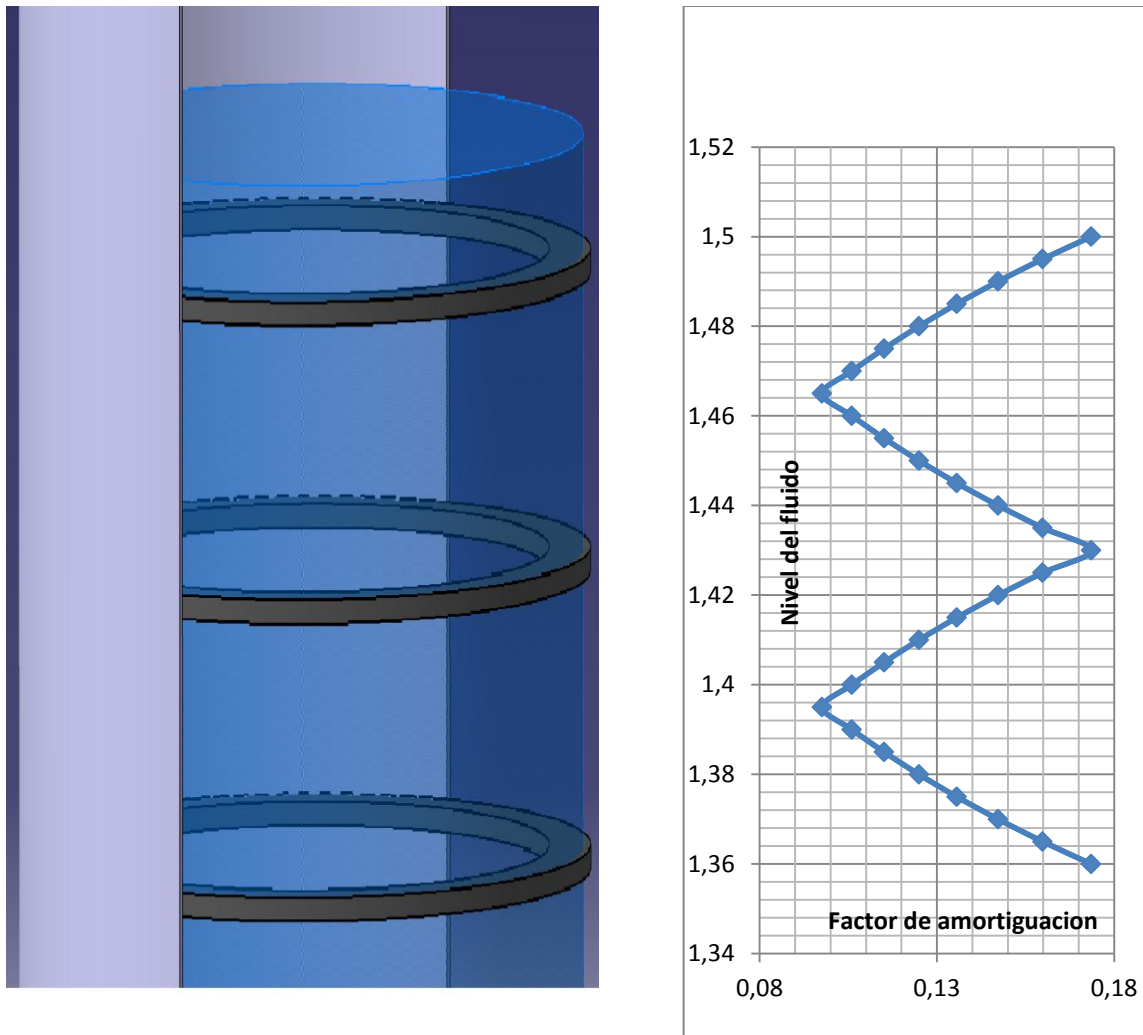
0,02	0,124947586	1,41	
0,025	0,115094264	1,405	
0,03	0,106017972	1,4	
0,035	0,097657433	1,395	
0,03	0,106017972	1,39	
0,025	0,115094264	1,385	
0,02	0,124947586	1,38	
0,015	0,135644446	1,375	
0,01	0,147257102	1,37	
0,005	0,159863913	1,365	
0	0,173550005	1,36	Anillo3



**Figura 29 – Factor de amortiguación Vs. Nivel de fluido**

Para obtener una visualización más gráfica del caso anterior, se presenta a continuación un esquema que representa como va variando el factor de amortiguación entre anillos a medida que el fluido trascurre entre ellos.





**Figura 30 – Variación de la amortiguación sobre el tanque con anillos**

Como se ha mencionado con anterioridad, la implementación de anillos supresores es importante para el reducir las inestabilidades dinámicas en el sistema fluido-estructura (combustible-tanque) pero es preciso determinar también que el aporte al peso total al tanque sea el mínimo sin que la eficiencia para suprimir los efectos dinámicos indeseables sea afectada. Por lo tanto, se realizará un análisis del peso que implicaría la introducción de este sistema de anillos amortiguantes.

Para lograr incluir el menor peso posible al tanque, se puede utilizar un pequeño espesor de anillos, ya que este no interfiere en el cálculo debido a que el análisis se basa en la teoría que tiene en cuenta a estos como placa plana, por lo tanto, en la consideración de placa plana no interviene el espesor a los efectos fluidodinámicos. La única limitación presente será estructural, ya que los mismos deberán soportar las cargas que les trasmite el fluido en movimiento sin deformarse.

**Cálculo de pesos y estructural del sistema de anillos**

Para determinar su espesor, y por lo tanto el peso del conjunto, se realizará un cálculo estructural con el fin de obtener el menor espesor de anillo posible que resista las cargas a las que se enfrentará dentro del tanque.

Las cargas se determinaran como una fuerza de resistencia sobre el área del anillo para cada modo.

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_i^2 \cdot A \cdot C_d = F_i \quad [75]$$

Las velocidades se obtienen multiplicando la amplitud máxima de una ola de sloshing por la frecuencia del correspondiente modo:

Si suponemos una amplitud máxima igual a 0,5 metros, se tabulan las velocidades a continuación:

**Tabla 10 - Velocidades**

Modo	Hz		[m/seg]
1	1,6327	Vmax1	0,81635
2	2,7794	Vmax2	1,3897
3	3,5156	Vmax3	1,7578
4	4,0281	Vmax4	2,01405
5	4,63372	Vmax5	2,31686

Utilizando:

- $C_d = 2$  (placa plana)
- Densidad del combustible utilizado = 1003,6 [kg/m<sup>3</sup>]
- Área del anillo= 0,065 [m<sup>2</sup>]

**Tabla 11 - Fuerzas**

	Fuerza máxima [N]	Modo
F1	43,70455016	1
F2	126,6531441	2
F3	202,6342161	3
F4	266,0200411	4
F5	352,0249485	5

Obtenidos estos parámetros se realiza el cálculo estructural en un programa de elementos finitos, utilizando Aluminio 6061 T6 como materia de los anillos:

**Material**

Aluminio 6061 T6

Densidad = 2710 kg/m<sup>3</sup>

Módulo de elasticidad = 70 GPa

Coefficiente de Poisson: 0.3

$\sigma_{flu} = 250$  MPa

$\sigma_{rot} = 290$  MPa

**Características geométricas**

Tabla 12 – Características del sistema de anillos

<i>Cantidad de anillos</i>	<b>15</b>
<i>Volumen de todos los anillos[m3]</i>	0,002289588
<i>Peso los anillos [Kg]</i>	6,204784125
<i>Área de un anillo[m2]</i>	0,065345127
<i>Separación entre anillos</i>	0,07
<i>Espesor del anillo[m]</i>	0,00238125 (3/32 in )
<i>Ancho del anillo [m]</i>	0,04

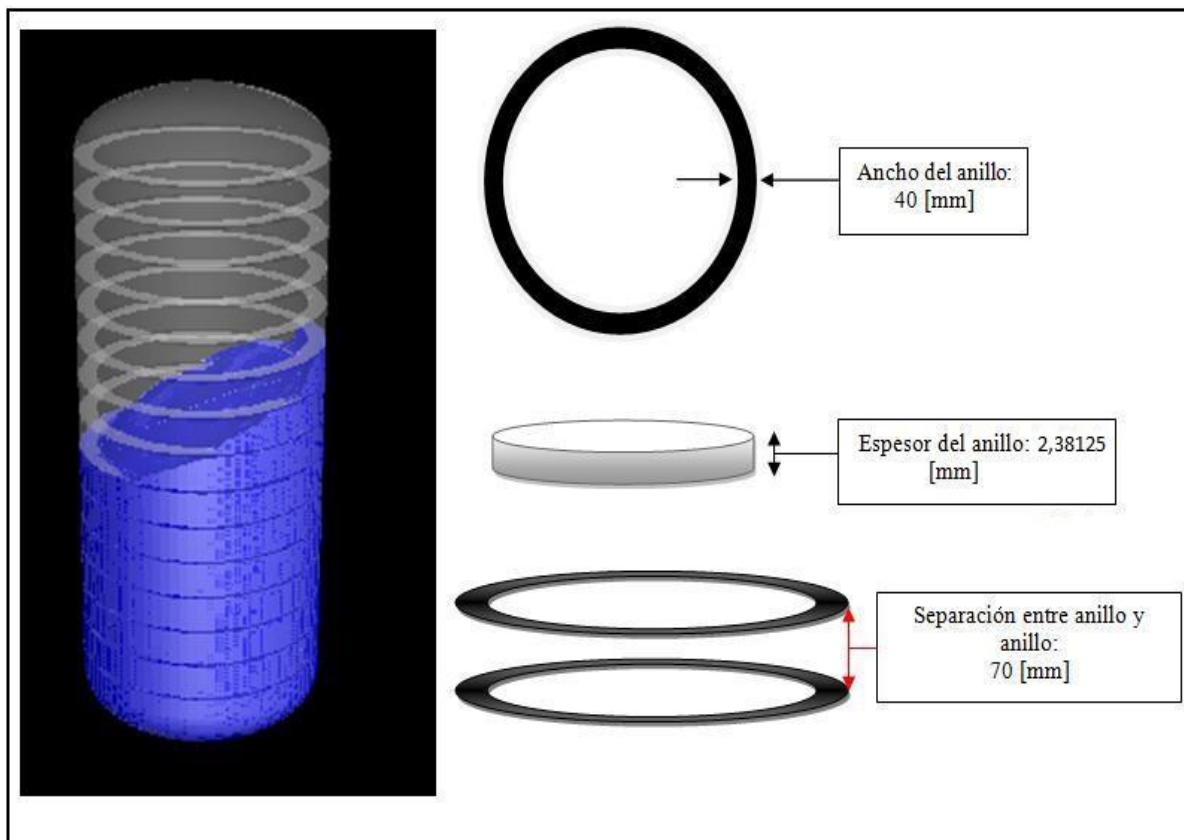


Figura 31 – Configuración geométrica de los anillos.

Se utiliza para el dimensionamiento una fuerza de 300 [N] distribuida en el perímetro del anillo, dado a que se supone esta carga como conservativa debido a que el quinto modo (el que se presenta la mayor carga) no llegará a la máxima amplitud que se utilizó para el cálculo de la misma.

El cálculo se realiza para los dos espesores MINIMOS SOLDABLES que presenta el material seleccionado.

### Cargas y condiciones de borde

Cargado sobre el radio externo con carga tipo Shell Edge Load (Carga lineal distribuida en el perímetro externo) de 198.95 N/m (estimado de la oscilación del fluido, peor condición)

BC sobre 4 zonas simulando soldadura sobre 4 largueros de 20mm de ala (especificación impuesta de diseño).

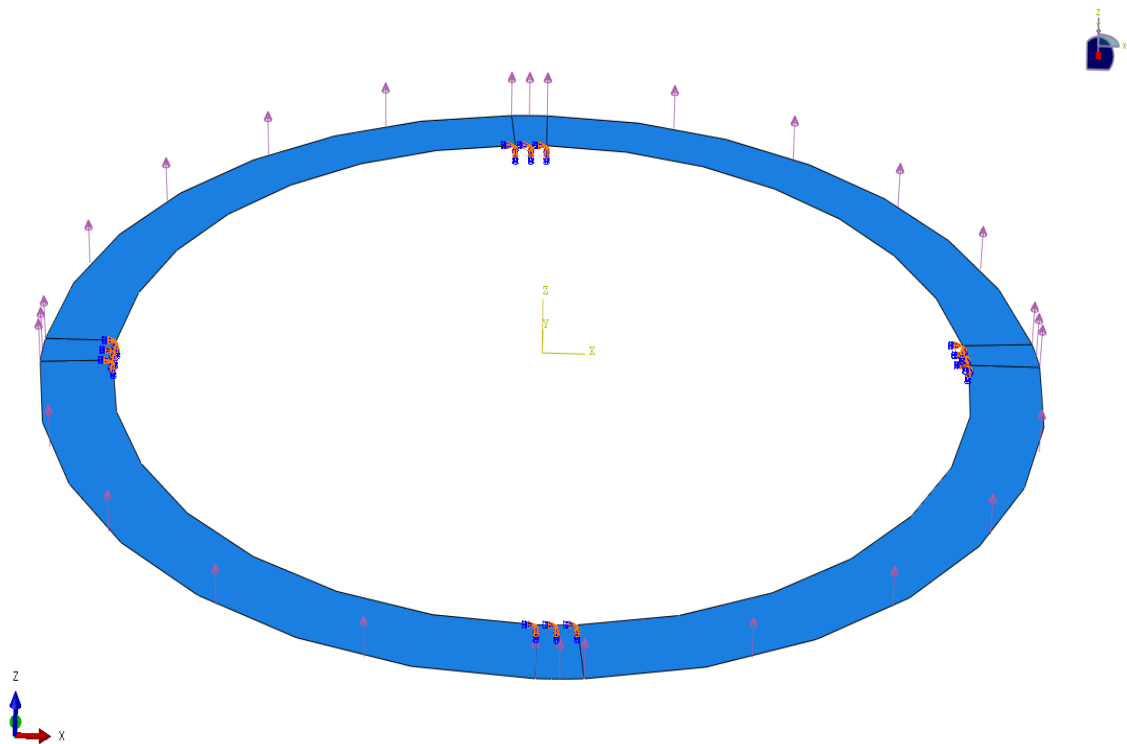


Figura 32 – Cargas y BC.

Espesor 1 = 3/32 in = 2.38125 mm (mínimo espesor soldable)

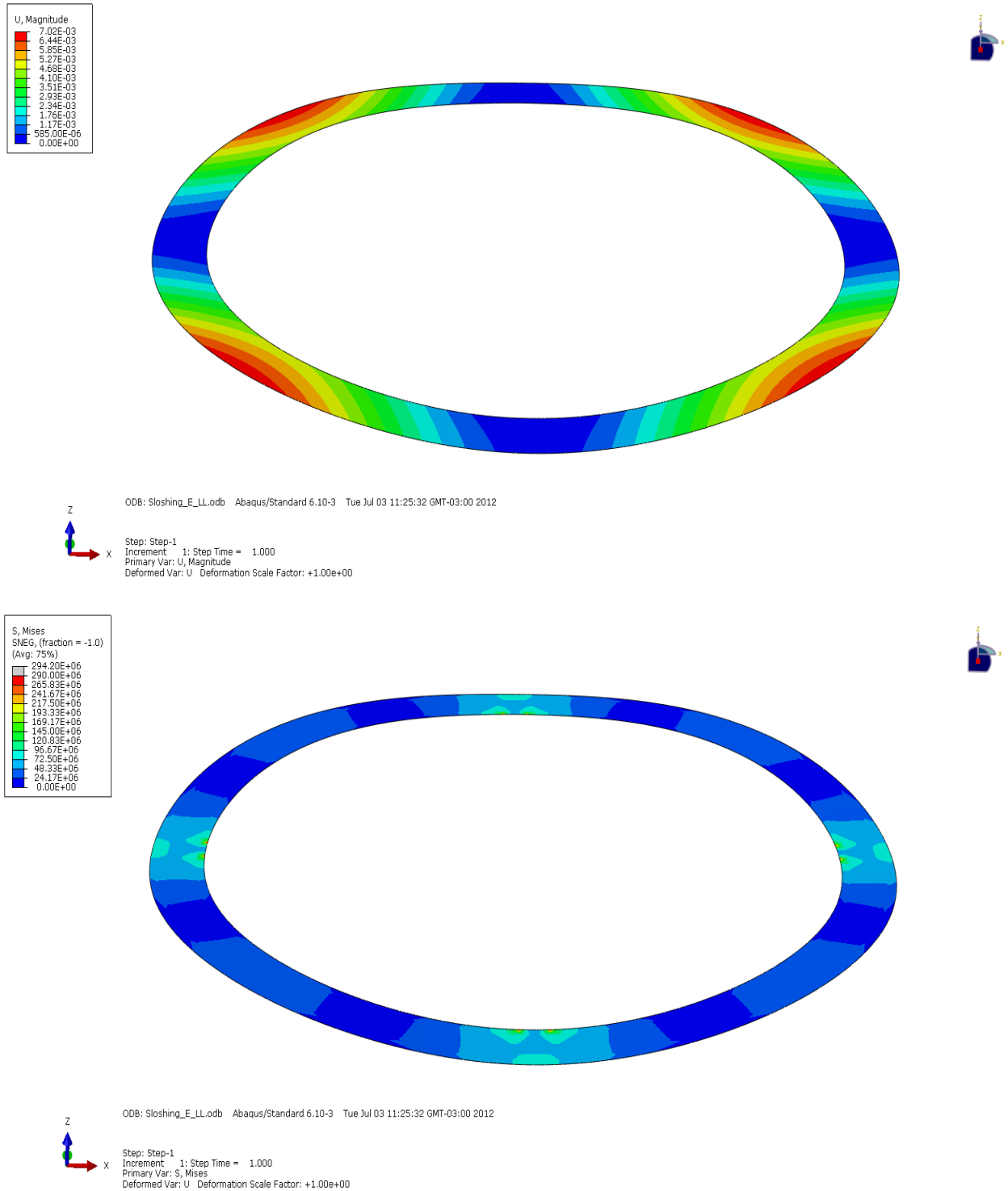


Figura 33 - a) Deformación, b) tensiones de Von mises.

Espesor 2 = 1/8 in = 3.175 mm

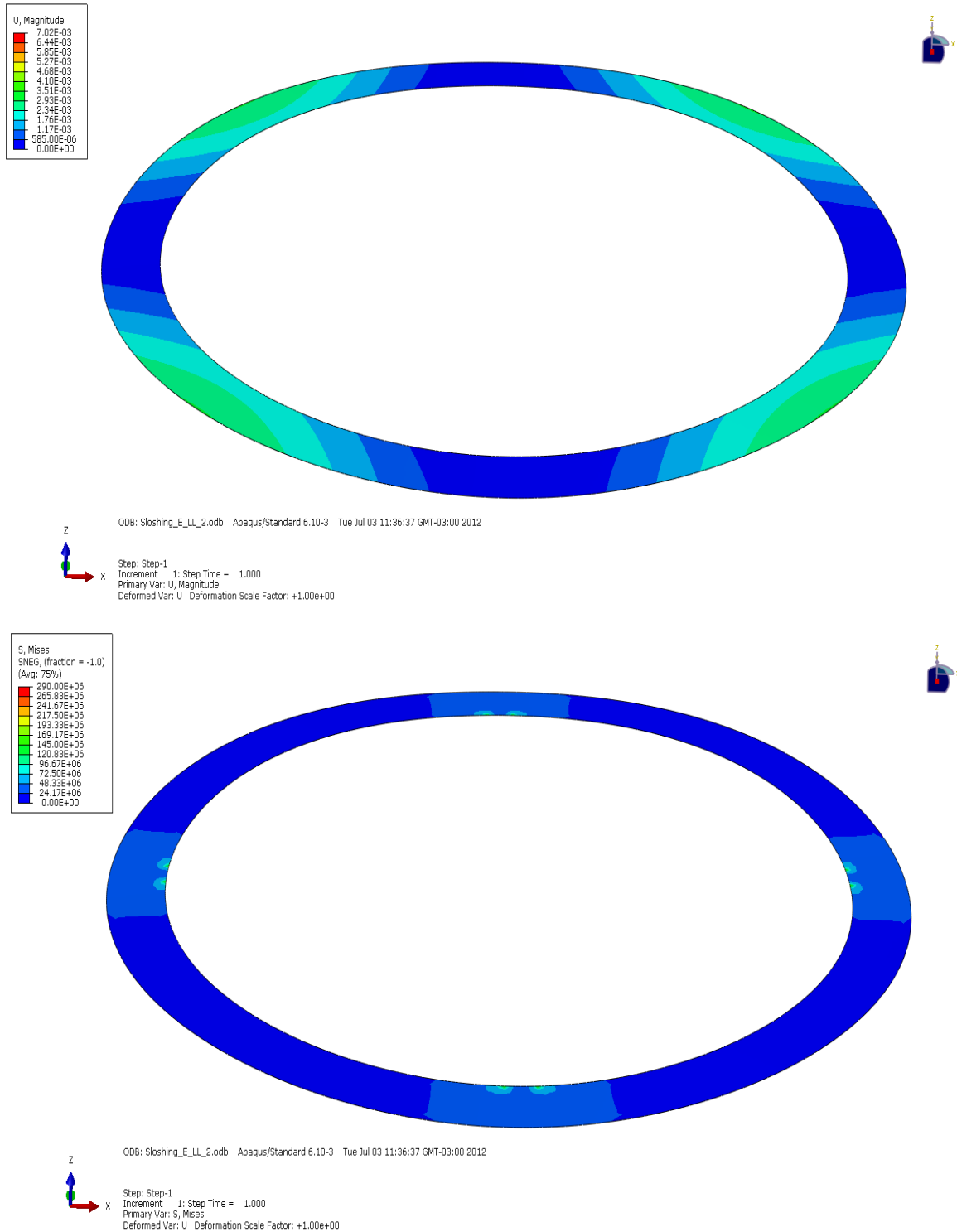
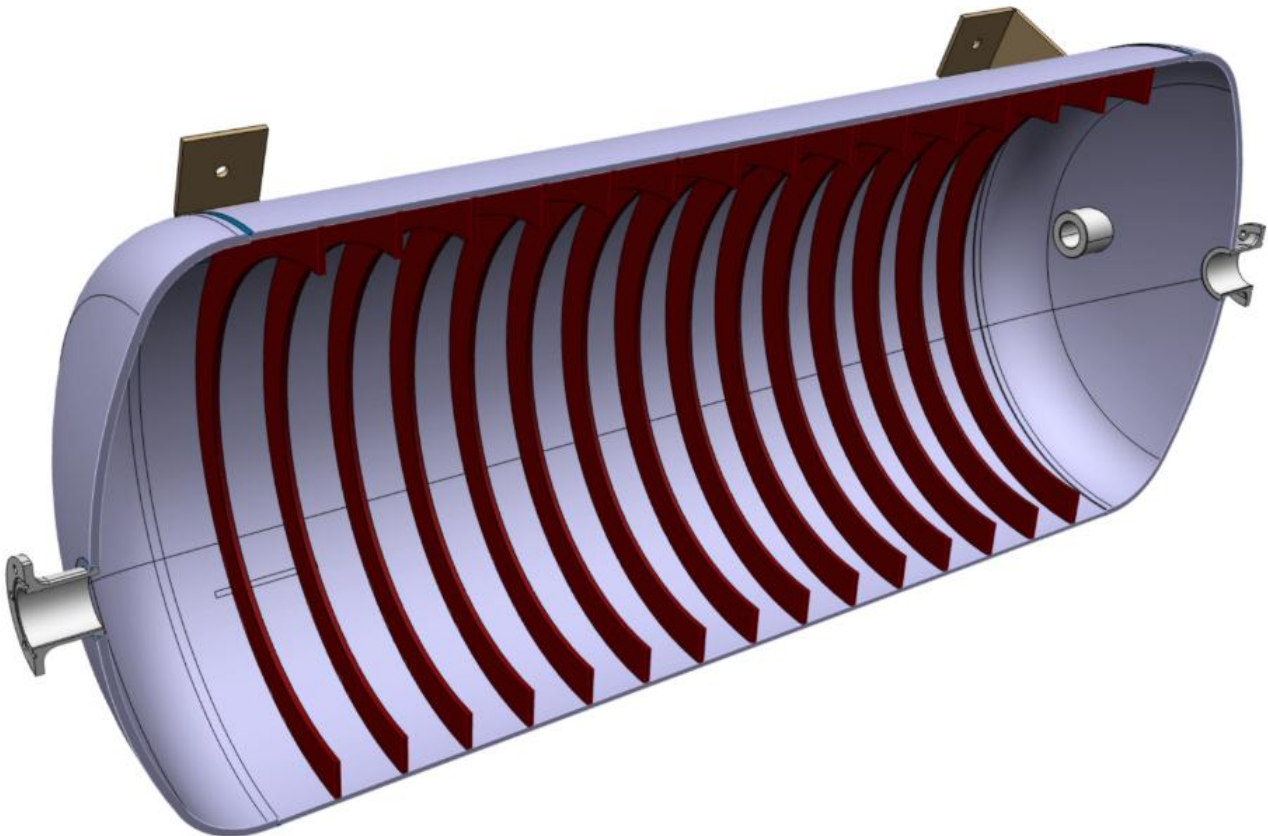


Figura 34 - a) Deformación, b) tensiones de Von mises.

Podemos observar que ni las cargas ni la deformación alcanzan valores no admisibles con el espesor 1 y tampoco con el espesor 2.

Por lo tanto se define como apta la geometría presentada en la Figura 31, garantizando la resistencia estructural de los anillos.



**Figura 35 – Geometría final del interior del tanque.**

### **Modelo numérico computacional**

Si bien los modelos lineales de sloshing brindan buenas aproximaciones para pequeñas amplitudes de oscilación, los movimientos del vehículo pueden ocasionar aceleraciones importantes y el fenómeno entrar rápidamente en régimen no lineal. En este caso, las aproximaciones lineales dejan de tener validez y el estudio debe necesariamente realizarse en forma experimental o numérica. La ventaja de esta última metodología es que permite realizar los cálculos con las características físicas de cada propelente y en condiciones de  $g$  variable, a diferencia de los ensayos experimentales, que deben realizarse con agua u otro líquido económico e inerte y con la gravedad constante del laboratorio.

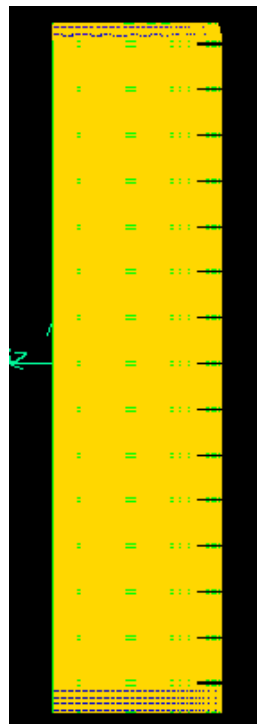
Para continuar con el estudio, se realizaron simulaciones de un tanque que presenta las características del estudiado en el modelo analítico lineal con y sin anillos antisloshing. El objetivo principal en este caso es cuantificar el efecto del fluido en estas condiciones comparándolos con el caso sin anillos. De esta manera podríamos encontrar las aceleraciones y fuerzas involucradas en este fenómeno para que de esta manera poder detallar con más información la dinámica de vuelo del vehículo y su sistema de control asociado.

### **Modelado**

Se realizaron simulaciones preliminares con el objetivo de poner a punto el modelo, obtener visualizaciones del flujo y evaluar el comportamiento global del fluido ante una configuración de aceleraciones arbitraria. En este caso particular se analizó para la condición de medio tanque y con la incorporación de los anillos antisloshing.

El dominio fue discretizado en una malla híbrida de 1250000 elementos con refinamiento en la capa límite y con un modelo multifásico.

La malla empleada para este caso es similar a las empleadas en los modelos de estudio de ondas en tanques, esto es, una malla de las denominadas híbridas pero con un número de elementos significativamente mayor debido a la geometría y cantidad de anillos dispuestos en el interior del tanque como puede apreciarse en las Figura 36, Figura 37, Figura 38 y Figura 39. Se dimensionó la capa límite siguiendo criterios adecuados para el problema a resolver. El problema es intrínsecamente tridimensional, por lo que el modelo es 3d.



**Figura 36** Mallado del tanque



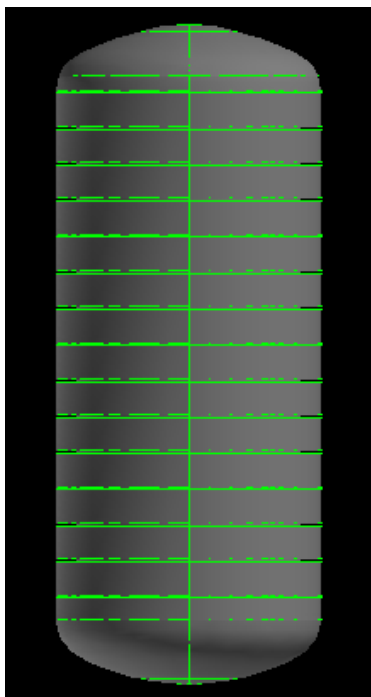


Figura 37 Mallado anillos

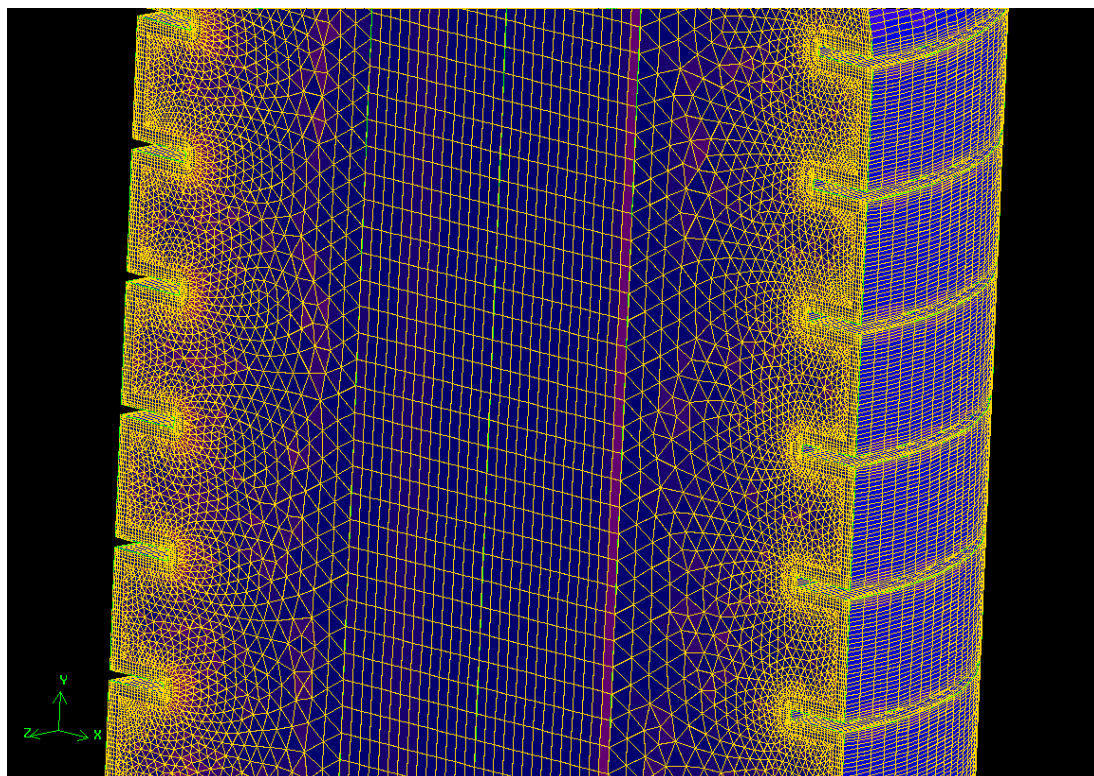


Figura 38 Detalle malla anillos

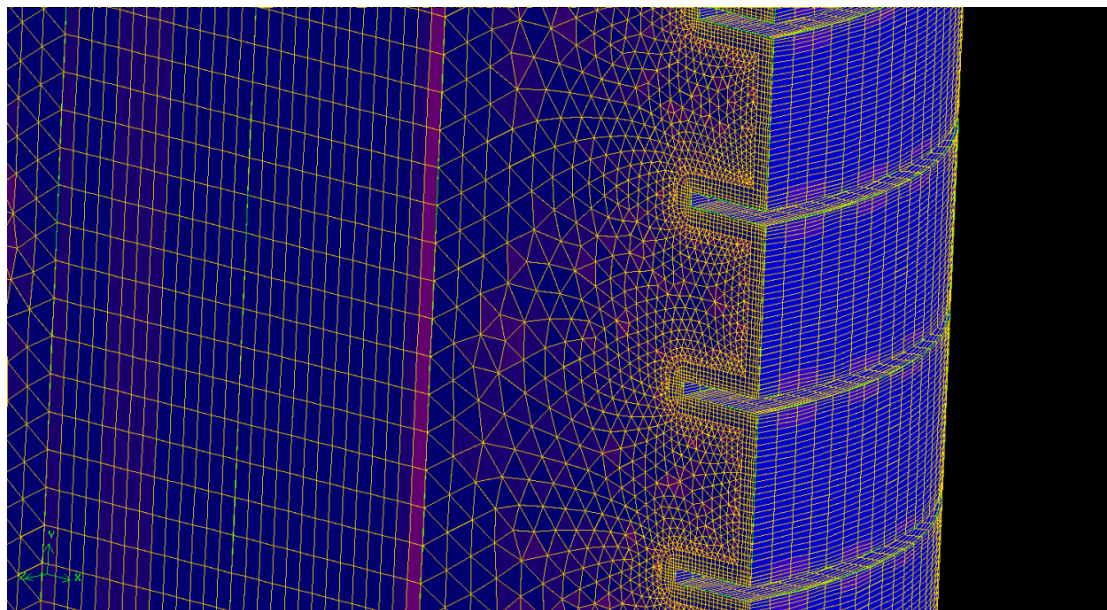


Figura 39 Detalle malla anillos vista

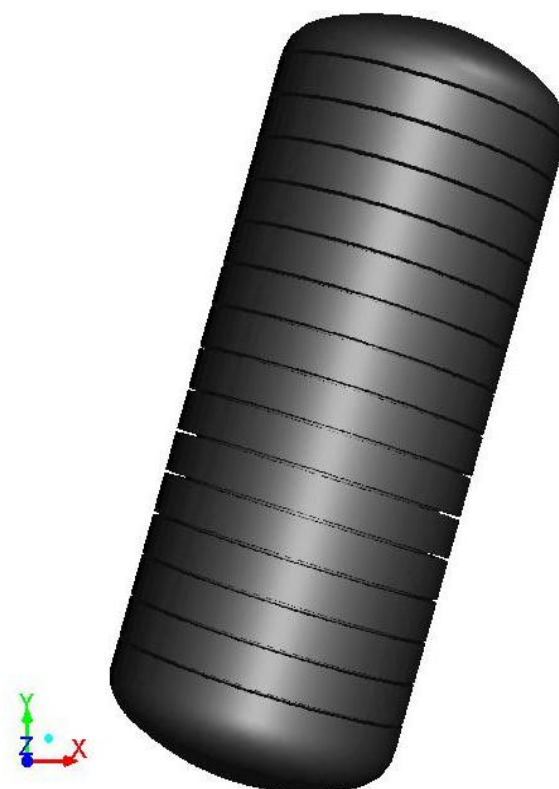


Figura 40 Tanque inclinado

### **Resultados de la simulación**

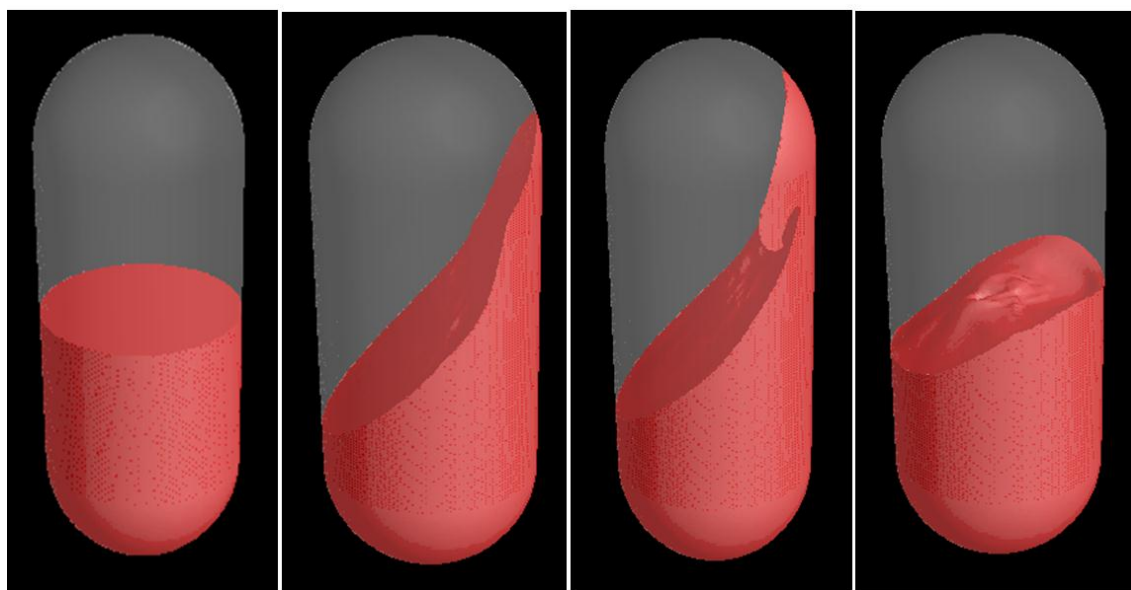
#### Tanques con aceleraciones - Inclinados

Las condiciones de la simulación fueron: Tanque cargado al 50% de su capacidad correspondiente a las máximas aceleraciones longitudinal y lateral. En esta etapa del vuelo el tanque se encuentra inclinado  $16^\circ$  con respecto a la vertical. Estas aceleraciones se aplicaron en forma constante durante 7 segundos. Si bien estos resultados son preliminares, el modelo respondió aceptablemente, reproduciendo la oscilación esperable de la superficie libre ante esas sollicitaciones. Las aceleraciones que en la Tabla 13 se muestran provienen de suponer una determinada trayectoria para un vehículo que posee tanques como los estudiados en el presente trabajo. También, para ser coherente con un vehículo “tipo” (que contenga tanques similares a los estudiados), se simuló considerando tanques presurizados con Helio a 25 bares.

**Tabla 13 Aceleraciones en tanque**

Tiempo (seg)	% Volumen	Aceleración Y %g	Aceleración X %g
<b>0</b>	100	-	-
<b>15</b>	75	0.9166	0.27
<b>30</b>	<b>50</b>	<b>0.928</b>	<b>0.5</b>
<b>45</b>	25	0.3	0.165

A continuación se muestran los resultados de la simulación en las mismas condiciones pero con los tanques configurados sin anillos. (**Figura 41**).



**Figura 41 Sloshing en tanque (1/2 tanque)**

En las siguientes figuras se muestran la evolución del movimiento del flujo para el caso propuesto. Se analiza para medio tanque.

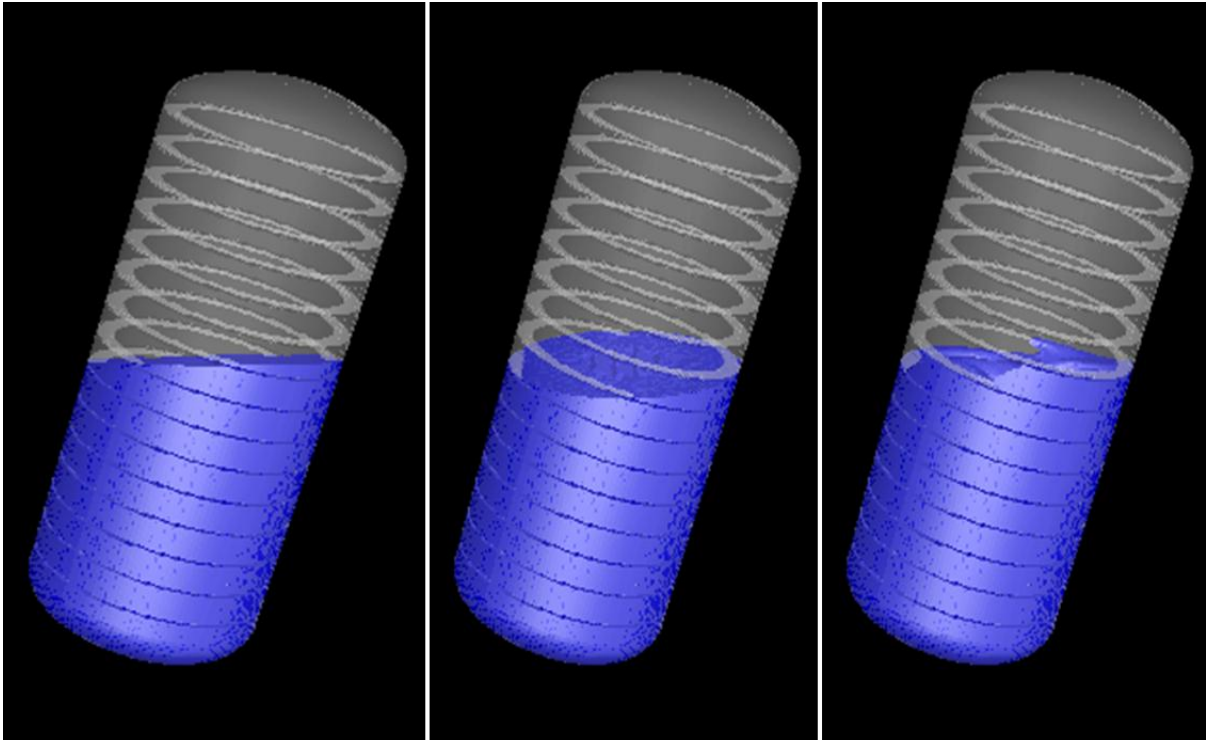


Figura 42 Resultados de la simulación

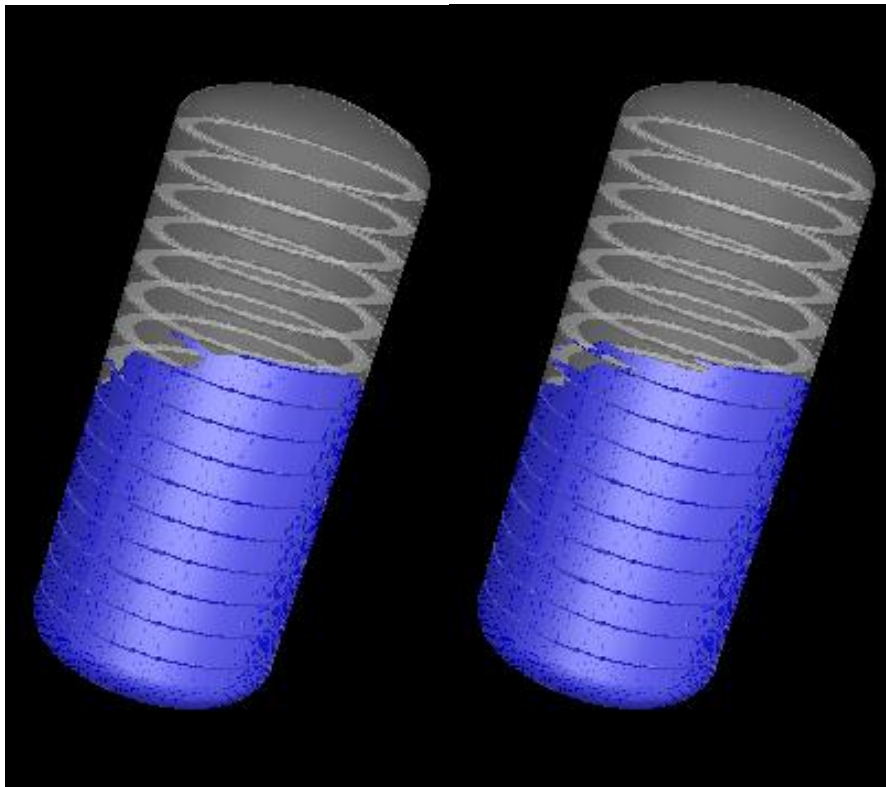


Figura 43 Resultados de la simulación

Como podemos apreciar en la **Figura 42** y **Figura 43**, la atenuación del movimiento del fluido disminuye rotundamente con respecto al caso analizado sin anillos antisloshing. De todas maneras el caso sin anillos no tiene los tanques inclinados. En este caso particular se simuló un instante de la trayectoria del vehículo obteniendo estos resultados.

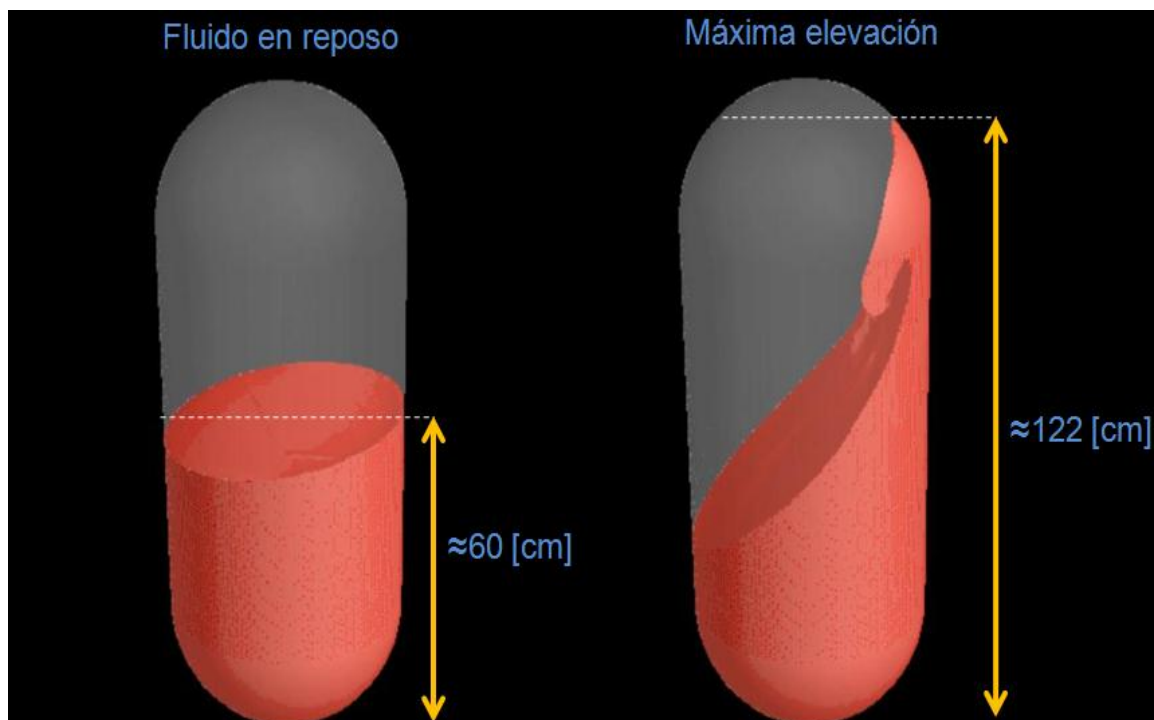
### Análisis de las ondas de slosh

La problemática principal que presenta el fenómeno de sloshing es la aparición de aceleraciones a causa del desplazamiento relativo del fluido dentro del tanque. El objetivo principal del estudio se centra en tratar de minimizar estos desplazamientos relativos mediante la implementación de anillos deflectores rígidos.

La simulación computacional (CFD) es una herramienta que nos permite visualizar el comportamiento del fluido dentro del tanque en una determinada condición dinámica del vehículo, lo cual es importante en este caso para realizar una comparación entre los efectos que se dan lugar cuando en el tanque se implementan dispositivos antisloshing en contraste con el tanque sin la presencia de los mismos. Esta comparación entre ambos casos nos brinda una idea de la eficiencia en la supresión de los efectos dinámicos indeseables del fenómeno.

A continuación, se muestra la comparación entre las alturas que alcanza el fluido en la simulación:

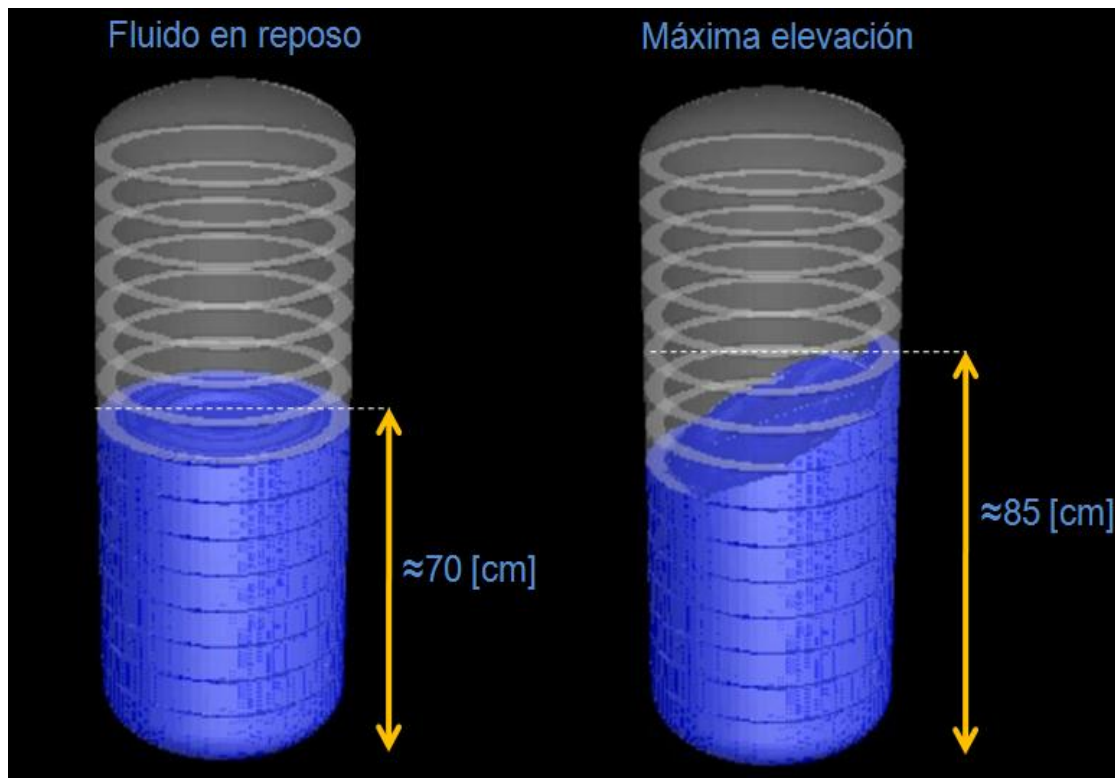
#### Tanque sin anillos



**Figura 44 – Elevación de la superficie libre – Tanque sin anillos**

Se puede observar en la **Figura 44** que la máxima altura alcanzada por la superficie libre del fluido en la simulación del tanque sin anillos es aproximadamente dos veces mayor que la condición de reposo. Por lo tanto, esta gran elevación genera un gran corrimiento del centro de masas, que se traduce en aceleraciones indeseadas en el sistema.

#### Tanque con anillos



**Figura 45 - Elevación de la superficie libre – Tanque con anillos.**

En la simulación realizada con los anillos, se puede observar que la altura máxima que alcanza la superficie libre es ampliamente menor que para el caso sin anillos, lo cual indica que la implementación de los dispositivos reduce los efectos dinámicos del fenómeno en gran medida.

La altura máxima alcanzada para el caso utilizando anillos resulta en un 21% respecto a la altura de la superficie libre sin perturbar.

El modelo computacional fue desarrollado por el Ing. Federico Bacchi y la simulación numérica fue llevada a cabo en el Grupo Fluidodinámica Computacional, GFC, con la geometría diseñada con los criterios descritos en los capítulos anteriores.

#### **Modelo mecánico equivalente**

A partir del modelo analítico desarrollado con anterioridad, se determinaron las fuerzas y momentos de forma analítica, así como también las frecuencias naturales del sistema bajo estudio. Si bien estas expresiones analíticas nos predicen las fuerzas que se generan

en el movimiento, una representación más realista de la dinámica del sistema, se puede obtener a través de la creación de un modelo mecánico equivalente. También la creación de un modelo mecánico es de gran utilidad obtener parámetros característicos del sistema, como lo son masas y constantes elásticas.

Hasta el momento se han calculado frecuencias naturales y los factores de amortiguación que imparten los dispositivos supresores estudiados (anillos rígidos), ahora, a través del modelo mecánico es precisa la determinación de las magnitudes dinámicas que se generan y transmiten en el sistema cuando este es perturbado.

Para ello estudiaremos la dinámica de un contenedor parcialmente lleno bajo la acción de perturbaciones externas mediante la construcción de un modelo mecánico equivalente.

Los sistemas equivalentes mecánicos (compuestos por masas, resortes y amortiguadores, según su complejidad) nos brindan una representación realista de la dinámica del líquido dentro del contenedor rígido y nos proporcionan información acerca de las magnitudes dinámicas que intervienen en el sistema tanque-líquido como respuesta a una excitación externa (es decir, esta excitación simula la interacción entre la estructura del vehículo y el sistema bajo estudio a través de determinadas perturbaciones). De manera que se puede obtener la respuesta en fuerzas y momentos del sistema perturbado. La precisión de dicha “simulación” quedará definida por la interpretación y complejidad del modelo planteado que debe tender a adaptarse a cada rango dinámico por el cual el sistema real se desempeñará.

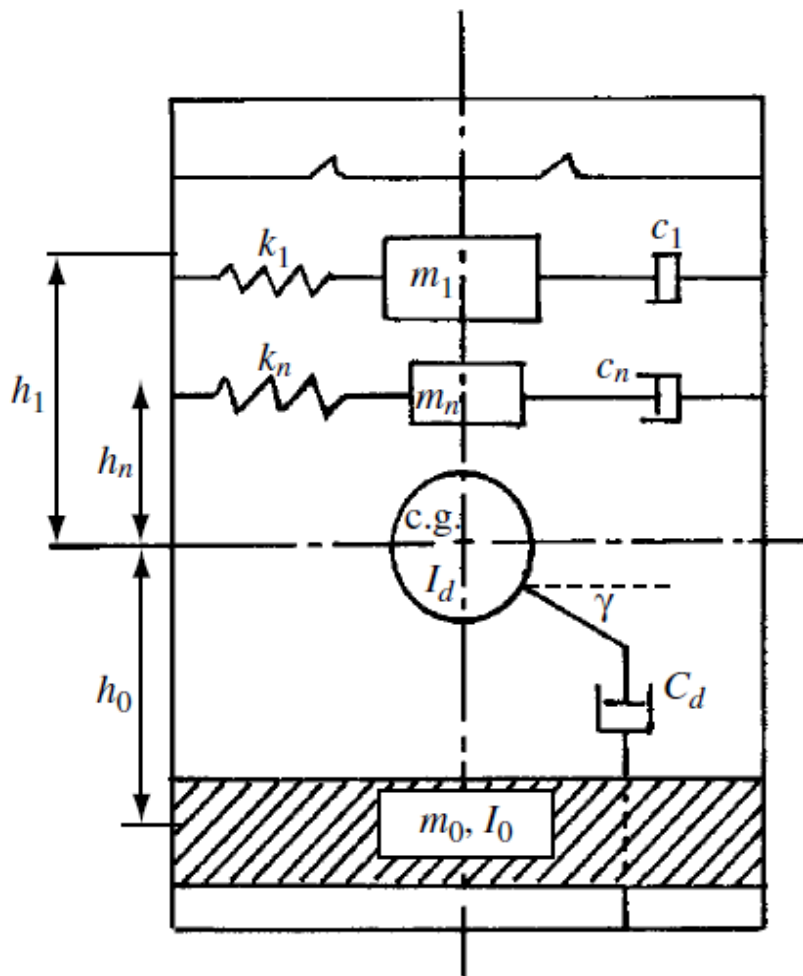
Existen distintos tipos de estos modelos que podrían utilizarse, pero en este caso, se analizará el sistema masa – resorte – amortiguador, el cual nos brinda una buena representación en el régimen lineal y para movimientos planos de la superficie libre del líquido (frecuencias lejanas a la resonancia). A su vez, el sistema masa resorte se puede transformar (con algunas consideraciones), en un modelo de péndulo, el cual también es ampliamente utilizado en la representación de este tipo de dinámica.

A continuación se desarrollará el estudio teórico de un modelo mecánico equivalente de sloshing.

### **Modelo masa-resorte-amortiguador**

Para la construcción del modelo mecánico se dividirá la masa total del líquido dentro del tanque en una masa ( $m_0$ ) que se mueve junto al tanque (sin desplazamiento relativo) y una serie de masas ( $m_n$ ), que representan las masas equivalentes de cada modo de vibrar del sistema. Cada una de estas masas se encuentra sujeta a un resorte de constante  $K_n$  y a un amortiguador de constante de amortiguación  $C_n$  (que representa la amortiguación que le imparten al sistema los anillos anti-sloshing) La distancia en la dirección Z de la masa  $m_0$  al  $C_g$  se denomina  $h_0$  y las distancias en la misma dirección de

las masas  $m_n$  al  $C_g$  se denominan  $h_n$ . En la figura **Figura 46** se puede observar un esquema representativo del modelo junto con todos los parámetros mencionados.



**Figura 46- Modelo masa-resorte-amortiguador**

Se incorpora al sistema, como se puede observar en la figura **Figura 46**, un disco con momento de inercia  $I_d$  ubicado en el centro de gravedad, el cual se encuentra conectado a un amortiguador de coeficiente de amortiguación  $C_d$ . El giro del disco relativo al fondo del tanque es descrito por un ángulo  $\gamma$ . Se destaca que en primera instancia se consideran todos los parámetros para la obtención de las ecuaciones de la dinámica del sistema y que luego se realizarán las simplificaciones y suposiciones pertinentes.

Como se mencionó anteriormente, las masas discretas más la masa  $m_0$ , suman la masa total del fluido en el contenedor, a la que se llamará  $M_f$ :

$$M_f = m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \quad [76]$$



El momento de inercia total del sistema alrededor del eje Y (en el cual gira el contenedor), está dado por la siguiente expresión:

$$I_f = I_0 + m_0 h_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n^2 \quad [77]$$

El centro de masa del sistema se conserva, por lo tanto:

$$m_0 h_0 = \sum_{n=1}^{\infty} m_n h_n \quad [78]$$

### **Obtención de las ecuaciones del movimiento (mecánica analítica)**

Las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico equivalente se obtendrán a través de la aplicación de las ecuaciones de Lagrange (mecánica lagrangiana/analítica). Para ello es necesario identificar las coordenadas generalizadas ( $q_i$ ), las fuerzas generalizadas ( $Q_i$ ) y los términos disipativos del sistema.

Se considera a la coordenada generalizada  $X$  como el desplazamiento que puede efectuar el contenedor en la dirección horizontal, y  $\psi$  como el giro que puede efectuar el contenedor alrededor del eje  $y$ . El desplazamiento relativo de las masas  $m_n$ , se denota como  $X_n$  y el giro del disco de inercia  $I_d$ , se denota  $\gamma$ .

### **Ecuación de Lagrange**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} L = - \frac{\partial}{\partial q_i} \zeta + Q_i \quad [79]$$

Dónde:

- $L = T - V$  (Lagrangiano);
- $T$  Energía cinética;
- $V$  Energía Potencial;
- $q_i$  Coordenadas generalizadas;
- $Q_i$  Fuerzas generalizadas;
- $\zeta$  Función disipación;

### Determinación de la energía cinética

La energía cinética del sistema, dado que es una magnitud aditiva, la podemos calcular para cada componente del sistema y luego sumarla para obtener la total.

$$T = T_0 + T_i + T_d \quad [80]$$

### Determinación de la energía potencial

La determinación de la energía potencial del sistema, al igual que la energía cinética se calcula para cada componente del sistema y luego se suma para obtener la total.

$$V = V_0 + V_i \quad [81]$$

### Función disipación

$$\zeta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} C_i \dot{X}_i^2 + \frac{1}{2} C_d \dot{\gamma}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \zeta_i m_i \dot{X}_i^2 + \frac{1}{2} C_d \dot{\gamma}^2 \quad [82]$$

$$C_i = 2\omega_i \zeta_i m_i \quad [83]$$

Cabe destacar que en todos los términos de energía se aproxima el seno y coseno (según corresponda), mediante los primeros términos de las series de Maclaurin.

### Lagrangiano

Se crea el Lagrangiano para obtener las ecuaciones de movimiento, obteniendo:

$$\begin{aligned} L = T - V = & \frac{1}{2} m_0 (\dot{X} - \dot{\psi} h_0 \cos \psi)^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} m_i (\dot{X} + \dot{X}_i - \dot{\psi} h_i \cos \psi)^2 \\ & + \frac{1}{2} I_d (\dot{\psi} + \dot{\gamma})^2 - \frac{1}{2} g \psi^2 m_0 h_0 + \frac{1}{2} g \psi^2 \sum_{i=1}^{\infty} m_i h_i + g \psi \sum_{i=1}^{\infty} m_i X_i \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} K_i X_i^2 \quad [84] \end{aligned}$$

### Coordenadas generalizadas

$$\{q_i\} = \left\{ \begin{array}{c} X \\ X_i \\ \psi \\ \gamma \end{array} \right\}$$

### Fuerzas generalizadas

$$\{Q_i\} = \{Fx \quad 0 \quad My \quad 0\}$$

### Ecuaciones resultantes

Las ecuaciones obtenidas a partir de resolución de la ecuación de lagrange para cada coordenada generalizada, resultan:

$q_1 = X$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{X}} L \right) - \frac{\partial}{\partial X} L = 0 + Fx \quad [85]$$

$$m_0(\ddot{X} - \ddot{\psi}h_0) + \sum_{i=1}^{\infty} m_i(\ddot{X} + \ddot{X}_i + \ddot{\psi}h_i) = -Fx \quad [86]$$

$q_2 = X_i$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{X}_i} L \right) - \frac{\partial}{\partial X_i} L = -\frac{\partial}{\partial X_i} \zeta + 0 \quad [87]$$

$$m_i(\ddot{X} + \ddot{X}_i + \ddot{\psi}h_i) + K_i X_i + 2\omega_i \zeta_i m_i \dot{X}_i - g\psi m_i = 0 \quad [88]$$

$q_3 = \psi$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} L \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} L = 0 + My \quad [89]$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}I_0 + h_0 m_0(\ddot{X} - h_0 \ddot{\psi}) - g \sum_{i=1}^{\infty} X_i m_i + \sum_{i=1}^{\infty} h_i m_i(\ddot{X} + \ddot{X}_i + \ddot{\psi}h_i) + I_d(\ddot{\psi} + \ddot{\gamma}) \\ = My \quad [90] \end{aligned}$$

$q_4 = \gamma$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}} L \right) - \frac{\partial}{\partial \gamma} L = \frac{\partial}{\partial \gamma} \zeta \quad [91]$$

$$I_d(\ddot{\psi} + \ddot{\gamma}) + C_d \dot{\gamma} = 0 \quad [92]$$

**Parámetros del modelo:**

$$m_i = m_f \left[ \frac{2R}{\xi_{1i} h (\xi_{1i}^2 - 1)} \tanh(\xi_{1i} h/R) \right] \quad [93]$$

$$m_0 = m_f \left[ 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2R}{\xi_{1i} h (\xi_{1i}^2 - 1)} \tanh(\xi_{1i} h/R) \right] \quad [94]$$

$$h_i = \frac{h}{2} \left[ 1 - \frac{4R}{\xi_{1i} h} [\tanh(\xi_{1i} h/R)] \right] \quad [95]$$

$$h_0 = \left[ \frac{h}{1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2R}{\xi_{1i} h (\xi_{1i}^2 - 1)} \tanh(\xi_{1i} h/R)} \right] \times \left[ \frac{2}{2(h/R)^2} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_{1i} \tanh(\xi_{1i} h/R) + 4(R/(h \cosh(\xi_{1i} h/R)))}{\xi_{0i}^2 (\xi_{1i}^2 - 1) h/R} \right] \quad [96]$$

**Análisis de diagrama en bloque (Simulink)**

Una vez obtenidas las ecuaciones que describen la dinámica del modelo masa resorte y sus parámetros asociados, es deseable obtener una relación entre entradas y las salidas para poder evaluar cómo responde el sistema bajo una cierta condición impuesta. Estas relaciones entre entradas y salidas se obtienen mediante diagramas de bloques asociados a funciones de transferencia que las relaciona. El planteo consiste en crear una señal para el desplazamiento X y para el giro  $\psi$ , con sus respectivas amplitudes y frecuencias, es decir:

$$X = X_0 \text{sen} \Omega t$$

$$\psi = \psi_0 \text{sen} \Omega t$$

Siendo  $X_0$  la amplitud del desplazamiento forzante del sistema,  $\psi_0$  la amplitud del giro forzante del sistema y  $\Omega$  la frecuencia asociada a estas dos variables.

Estas forzantes (de desplazamiento y giro) generan que el sistema responda mediante una fuerza y un momento resultante que poseen también sus amplitudes y frecuencias y es el objetivo del planteo de diagramas en bloques su obtención.

Para desarrollar un análisis mediante diagramas, se utiliza el programa Simulink de Matlab (ver anexo).

En primera instancia se traducen las ecuaciones de movimiento obtenidas en el dominio de Laplace.

De la ecuación número [88], se obtiene la relación que guarda el desplazamiento forzante  $X$  y el giro forzante con  $X_i$  (desplazamiento relativo de las masas  $m_i$ ):

$$m_i(\ddot{X} + \ddot{X}_i + \ddot{\psi}h_i) + K_iX_i + 2\omega_i\zeta_i m_i\dot{X}_i - g\psi m_i = 0 \quad [88]$$

Se consideran condiciones iniciales nulas y se transforma la ecuación anterior al dominio de Laplace y se despeja la coordenada  $X_i(s)$  para obtenerla en función del desplazamiento y giro forzante.

El objeto de obtener el desplazamiento relativo  $X_i(s)$  consiste en respetar la relación que guarda este parámetro con los forzantes del sistema mecánico (implícito en la ecuación [88]) y así poder obtener la función de transferencia de las variables forzantes (entradas) y la fuerza resultante (salida).

Una vez obtenida la expresión del desplazamiento relativo de las masas  $X_i(s)$ , se reemplaza en la ecuación [86] que transformada en dominio de Laplace y reordenada quedará de la siguiente manera:

$$F_x(s) = -S^2 \left[ X(s)m_f + \sum_{i=1}^{\infty} m_i X_i(s) \right] \quad [97]$$

Esta ecuación, nos proporciona la respuesta del sistema ante un desplazamiento y giro del mismo (forzantes). El giro forzante, denotado  $\psi$ , está implícito en el desplazamiento relativo de las masas  $X_i$ .

Para la construcción del diagrama de bloque, que consiste en la traducción de las ecuaciones desarrolladas con anterioridad, se crea en primera instancia la señal correspondiente a cada  $X_i$  a partir de las forzantes (**Figura 47**). Se consideran para el modelo cinco masas  $m_i$  (es decir  $0 < i \leq 5$ ).

A continuación se muestra como se obtienen las señales  $X_i$  para cada una de las cinco masas a partir de las señales forzantes, según el planteo en diagramas de bloques:

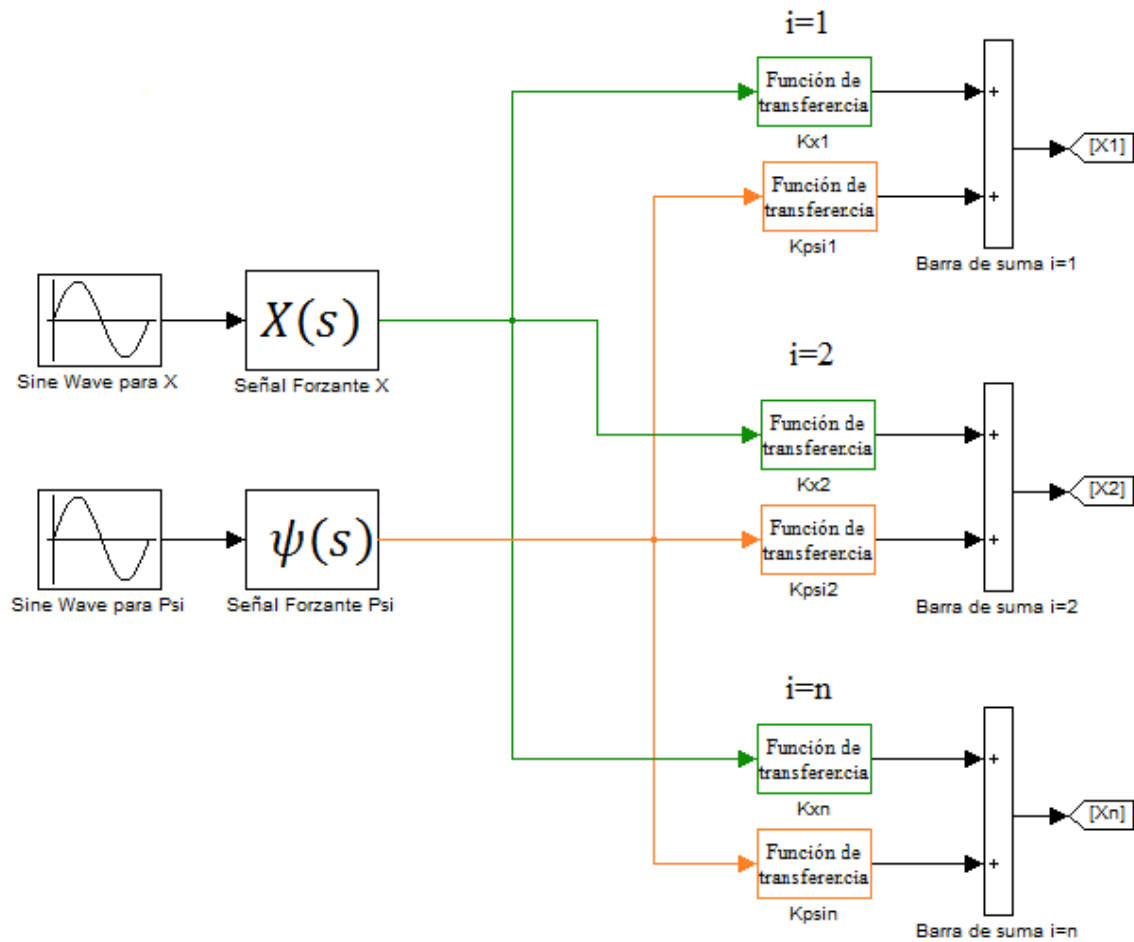


Figura 47 –Diagrama representativo de la ecuación 5

En concordancia con la ecuación [97] las variables  $X_i$  determinadas en el anterior diagrama, se multiplican con las correspondientes masas, se suman a la masa total  $m_f$  por la forzante de desplazamiento  $X$  y todo se deriva dos veces para obtener la fuerza resultante. Dicho procedimiento es mostrado a continuación en diagramas de bloques:

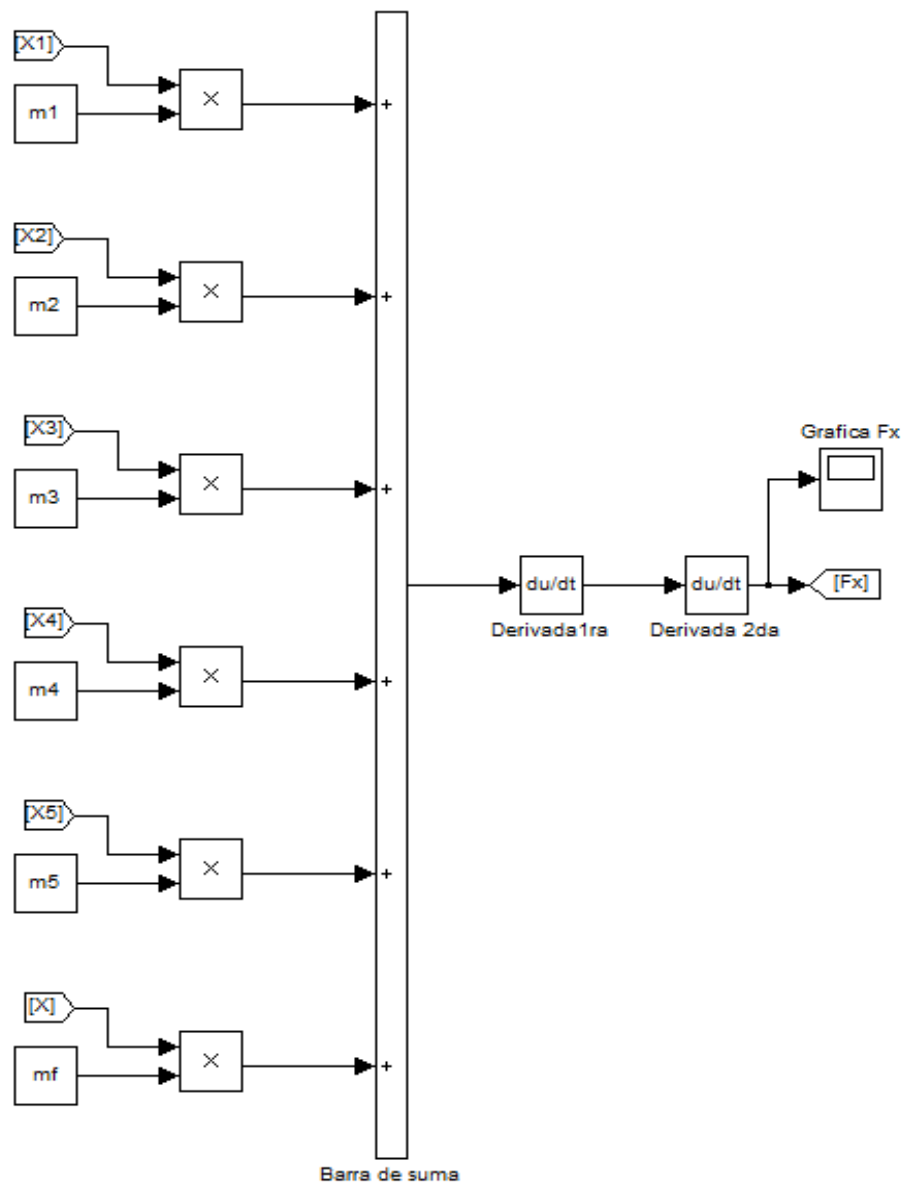


Figura 48 – Diagrama representativo de la ecuación 6

**Forzantes**

La señales de entrada (forzantes) tanto para el desplazamiento  $X$ , como el giro  $\psi$  fueron creadas mediante una señal senoidal con las siguientes características para cada caso:

Tabla 14– Señal de simulación

Forzante	Amplitud	Unidad	Frecuencia	Unidad
$\psi_a$	5	[°]	1	Hz
$X_a$	0.03	[m]	1	[Hz]
Tiempo de simulación				20 [seg]

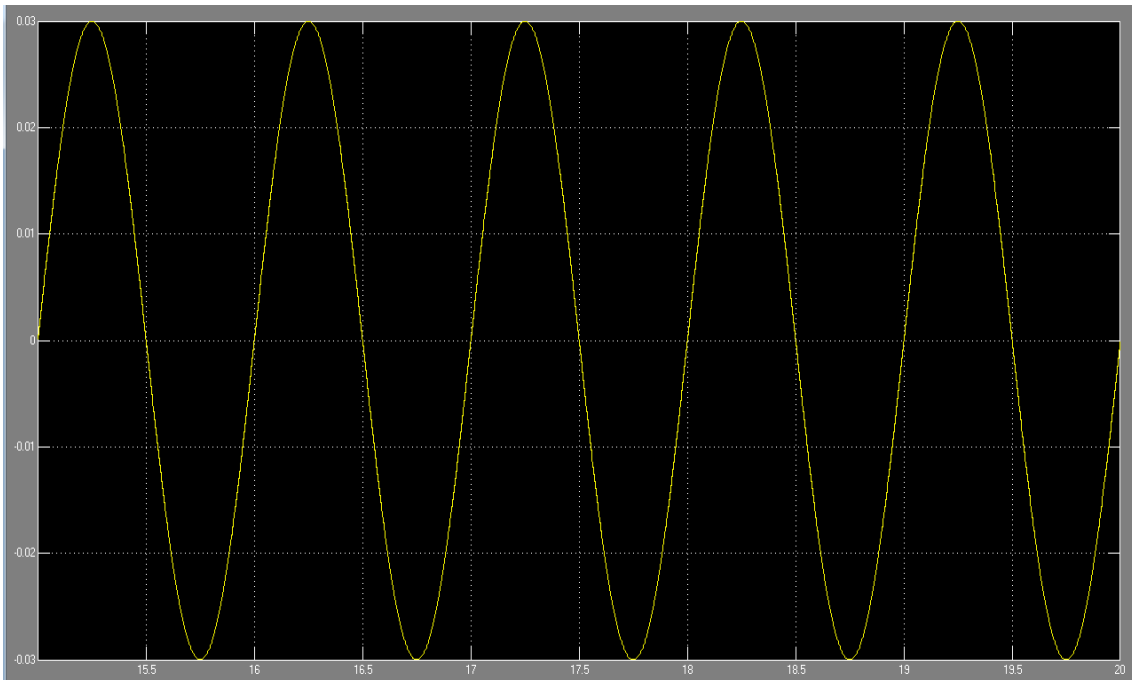


Figura 49 – Señal forzante X

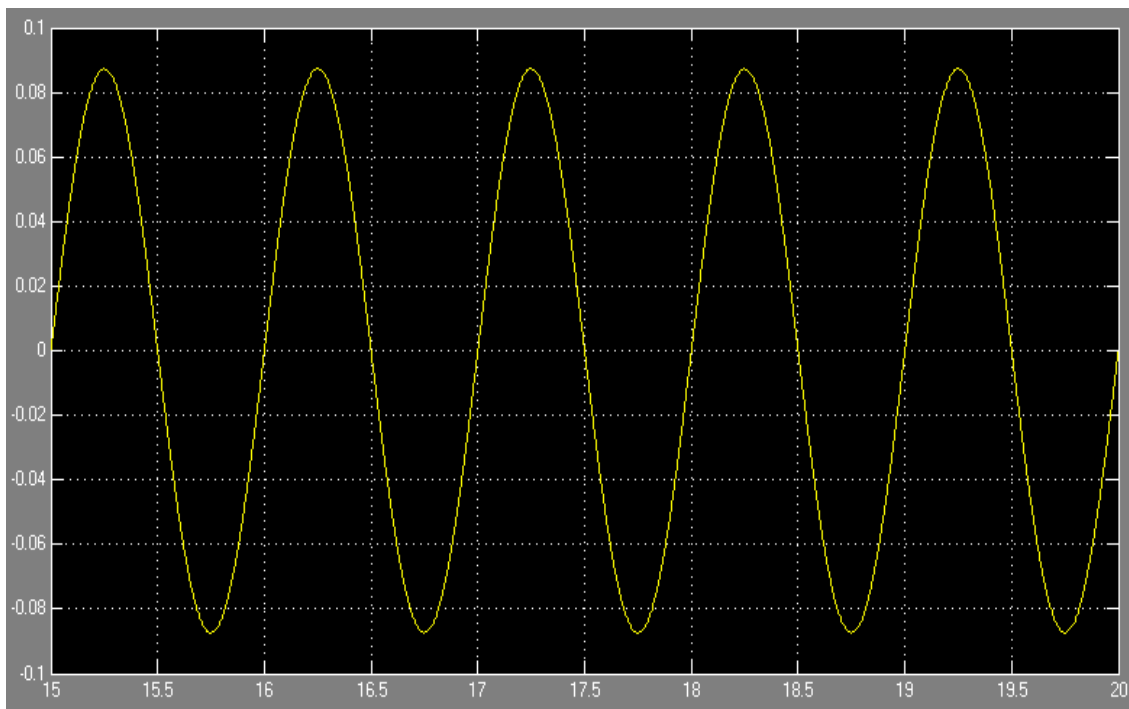
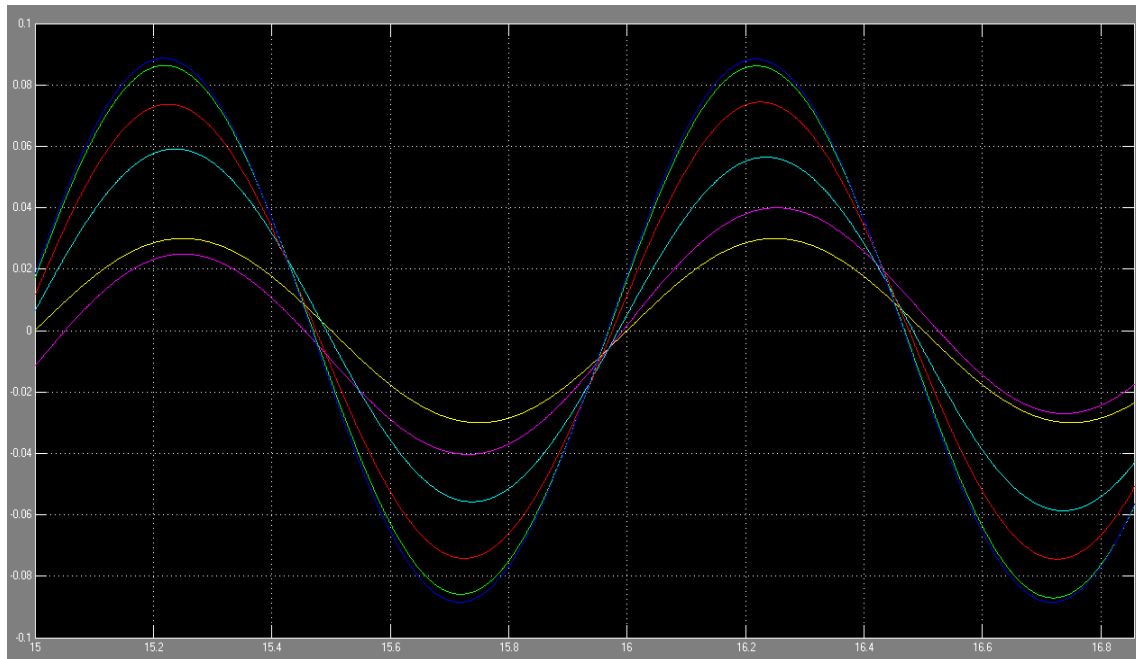


Figura 50 – Señal forzante  $\psi$



**Resultados**

A través de un comparador, se obtuvo una gráfica de los desplazamientos relativos de cada masa del sistema. Como se puede ver en la siguiente imagen, el mayor desplazamiento corresponde a las masa  $m_5$  (color azul) y el menor desplazamiento corresponde a la masa  $m_0$  (color amarillo).



**Figura 51 – Comparación de desplazamiento de las masas  $m_i$**



**Figura 52 – Fuerza resultante ( $F_x$ ) para frecuencia de 1 [Hz]**

La respuesta del sistema genera en su pico una fuerza resultante de aproximadamente 350 Newtons para esta simulación.

En el caso en la cual se excita el sistema con una frecuencia igual a la frecuencia del primer modo, la fuerza se ve altamente incrementada (aproximadamente al doble) como es mostrada a continuación. El resto de los parámetros de la señal se mantienen iguales a la primera simulación:

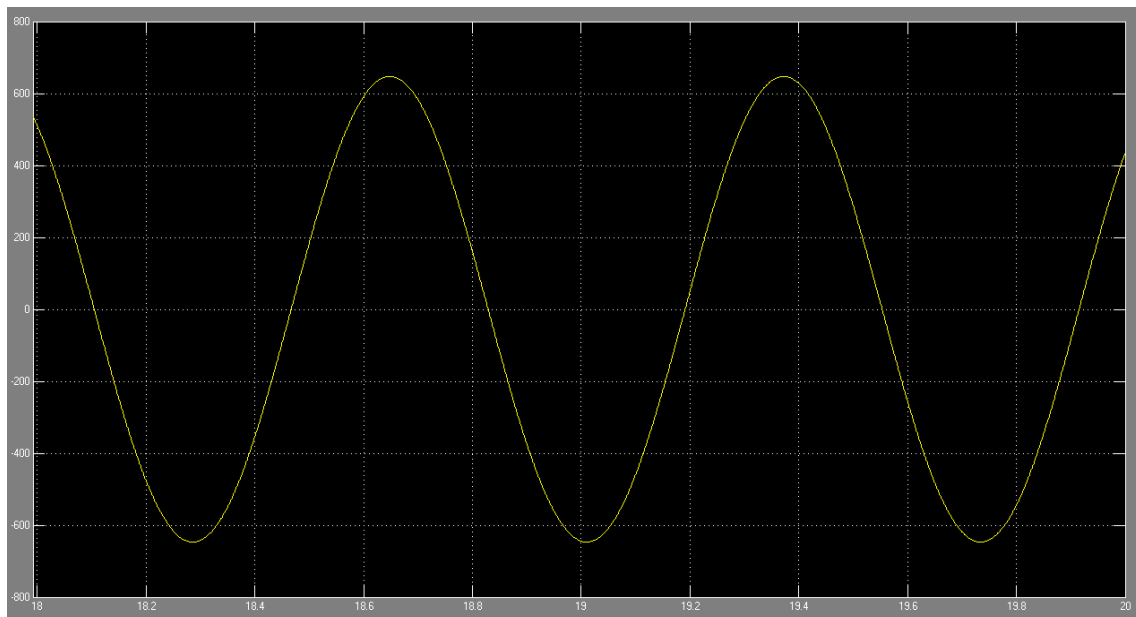


Figura 53 – Fuerza resultante ( $F_x$ ) para frecuencia de 1.38 [Hz]

## TRABAJOS FUTUROS

Para logra poder validar el sistema de anillos calculado y verificar a través de los tres frentes posibles, (analítico, numérico y experimental), es necesaria la realización de un ensayo a escala en el laboratorio del conjunto tanque-anillos, con las condiciones para las cuales se desarrolló el presente trabajo y simulando a las que se enfrentaría el sistema en su operación normal. Por otro lado, la experimentación de laboratorio podría ser una fuente muy importante para la determinación de ciertos parámetros que se utilizan de forma empírica, pudiendo retroalimentar los modelos creados con coeficientes obtenidos de nuestras experiencias, permitiendo predecir de manera más acertada el desarrollo del fenómeno de *sloshing* en nuestro caso y su mitigación. Por lo tanto, debido a la importancia que cobra el ensayo a la hora de la definición de un

diseño, el próximo paso que propone el estudio del fenómeno es el desarrollo experimental.

A continuación, se muestra una propuesta de desarrollo experimental planteada para validar los resultados obtenidos en el presente trabajo.

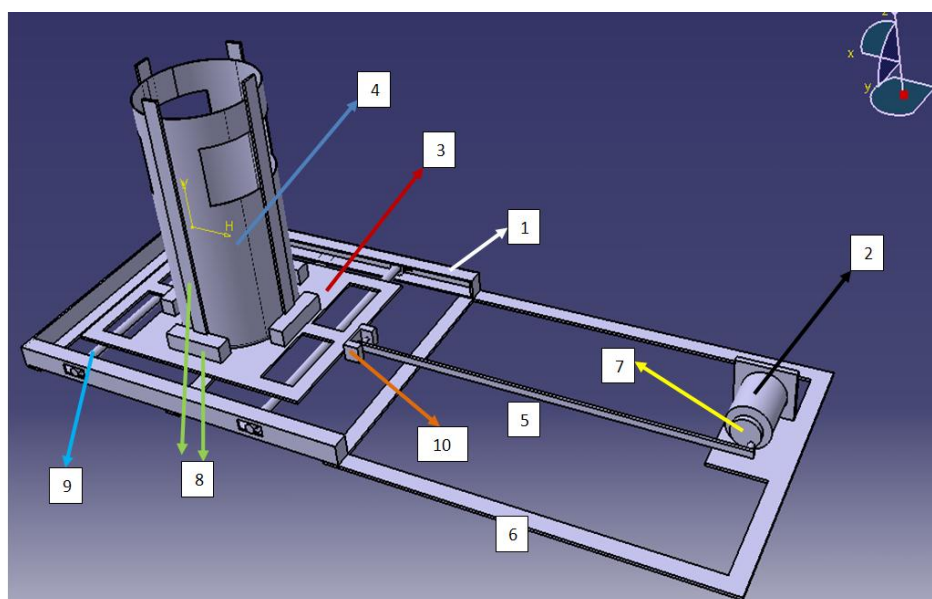
### **Desarrollo experimental propuesto**

Para la confección de un ensayo de laboratorio que nos permita validar experimentalmente los resultados obtenidos, es necesaria la construcción en primera instancia de un tanque a escala real, el cual se realizará de un material trasparente o ranurado en el sector donde debe observarse el fenómeno, de manera de obtener una buena visualización del desarrollo del mismo cuando el líquido se excite con las frecuencias de *sloshing* correspondientes, y que pueda ser lo suficientemente rígido como para soportar dichas excitaciones y el movimiento del fluido dentro del tanque. De manera que se propone implementar un tanque con “ventanas” de acrílico en sus laterales (Figura 54)

Vale la pena destacar que por simplicidad constructiva se van a utilizar tapas planas, ya que el efecto del fondo esférico afecta solo cuando el nivel del fluido ( $h$ ) es relativamente pequeño (menor al 10% de la altura total) y la parte crítica del fenómeno se estima que puede darse en un rango cercano al 75% de la altura total del fluido, por lo que tanto no se introduciría un error importante en la zona crítica haciendo uso de tapas planas.

### **Set-up y consideraciones del ensayo**

El siguiente esquema muestra gráficamente como se dispone el dispositivo para la realización del ensayo.



**Figura 54 – dispositivo de ensayo propuesto.**

- 1- Guía.
- 2- Motor de RPM variables.
- 3- Plataforma móvil.
- 4- Tanque contenedor.
- 5- Biela.
- 6- Estructura (contiene a 1 fija a la misma).
- 7- Disco (posee un excéntrico que oficia de manivela).
- 8- Soportes del tanque.
- 9- Eje fijo ( contiene a los rulemanes que se desplazan por la guía 1)
- 10- Articulacion (vincula la biela con la plataforma.

El dispositivo consiste en un motor eléctrico (1), al cual se adapta una barra excéntrica (2) que desplaza en forma horizontal la plataforma (3) en la cual se apoya el tanque contenedor (4) que es excitado con este movimiento lateral. La plataforma se encuentra adaptada mediante unas guías que solo permiten el desplazamiento horizontal de la plataforma.

La rotación del motor se encuentra calibrada para brindar la amplitud del movimiento (ya) y la frecuencia (f) necesaria para cada modo de sloshing.

En el tanque debe preverse la instalación de algún dispositivo que permita la fácil ubicación de los anillos deflectores para cuando se ensaye el tanque con los mismos, de ser posible se pretende realizar el ensayo con más de un anillo para obtener conclusiones del efecto de amortiguación y del comportamiento de los mismos con distintas separaciones relativas y distintas profundidades de ubicación dentro del tanque.

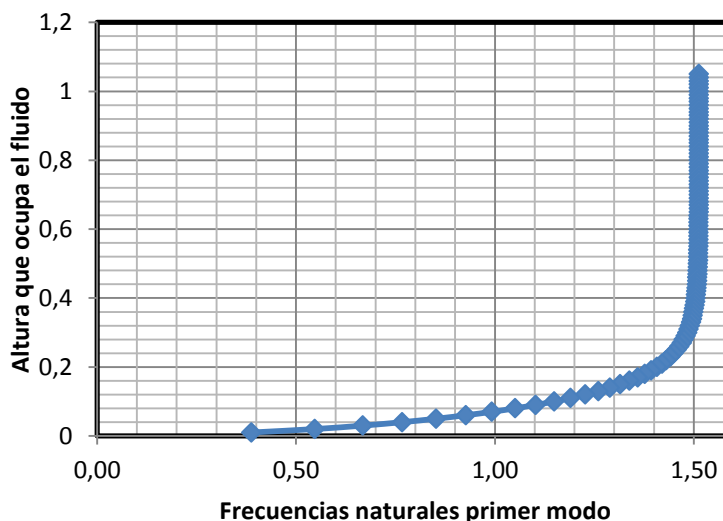
Para la realización del ensayo, en primer lugar se llenara parcialmente el tanque (75% de su capacidad, lo que es 1,05 metros de columna de líquido) y progresivamente se bajara el nivel de fluido, para observar las variaciones que ocurren con el cambio de altura de líquido dentro del tanque. El líquido de ensayo será agua.

Este ensayo contemplará los modos antisimétricos, es decir, las excitaciones laterales, ya que los modos simétricos no generan fuerza resultante, por lo que no resultan críticos para este fenómeno en este caso en particular. También se incluirán en el ensayo los anillos deflectores rígidos estudiados en este trabajo, para poder obtener conclusiones respecto a su implementación y comparar con los resultados obtenidos analíticamente.

A continuación se muestran las variaciones de frecuencias para los modos antisimétricos (se muestra solo para el primer modo) en función de la altura de la columna de fluido, obtenidos analíticamente, de manera de luego comparar con los resultados que arroje el ensayo de laboratorio.

**Variación de las frecuencias naturales (geometría de ensayo)**

Primer modo antisimétrico	
h[m]	Frecuencias naturales
1,0500	1,5124
1,0000	1,5124
0,9500	1,5124
0,9000	1,5124
0,8500	1,5124
0,8000	1,5124
0,7500	1,5123
0,7000	1,5122
0,6500	1,5121
0,6000	1,5118
0,5500	1,5113
0,5000	1,5103
0,4500	1,5083
0,4000	1,5046
0,3500	1,4973
0,3000	1,4834
0,2500	1,4569
0,2000	1,4070
0,1500	1,3148
0,1000	1,1485
0,0500	0,8521
0,0100	0,3875



## CONCLUSIONES

Se ha destacado la importancia que cobra en el diseño de tanques de vehículos espaciales el estudio del fenómeno de sloshing para la implementación de dispositivos que logren minimizar los efectos negativos asociados. El desarrollo del fenómeno de *sloshing* dentro de los tanques de combustible de vehículos espaciales podría llevar a falla todo el sistema y es por ello que se torna imprescindible la implementación de mecanismos que logren mitigarlo. Las soluciones propuestas y desarrolladas en el presente trabajo fueron realizadas teniendo en cuenta diferentes criterios que nos permitan implementar de forma segura, efectiva y al menor peso y costo posible sistemas que logren minimizar los efectos negativos del fenómeno. En el caso bajo

estudio, todo el sistema agrega un peso extremadamente bajo respecto (no mayor al 1%) del peso total del sistema.

A través del estudio y análisis de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno, se pudo crear un modelo analítico simplificado para nuestro caso bajo estudio que nos permitió caracterizar y obtener los parámetros físicos que luego fueron utilizados como “inputs” en el progreso del trabajo. A través de este estudio dinámico del fenómeno se logró obtener las frecuencias naturales de sloshing y predecir el comportamiento de la superficie libre del fluido para el régimen lineal. La importancia de este estudio para la obtención de la ecuación de frecuencias naturales recae en el hecho de que resulta necesario para el diseño de fijación del tanque el conocimiento de las mismas (de modo de evitar que la interacción fluido-estructura se vea amplificada).

Se realizó un estudio del “estado del arte” acerca de la implementación de los distintos dispositivos antisloshing utilizados en la bibliografía disponible, de manera de poder seleccionar de antemano los que mejor se adapten a las necesidades y objetivos planteados para su posterior análisis e implementación.

El estudio de los “anillos rígidos” como dispositivos pasivos antisloshing arrojó buenos resultados en cuanto a la mitigación del fenómeno, pudiendo comparar dichos resultados a través de la creación de un modelo teórico (desarrollo de las ecuaciones del factor de amortiguamiento, que es el principal parámetro que caracteriza la efectividad de mitigación) con el modelo numérico computacional creado en el GFC. Con el sistema de anillos propuesto, se obtuvo un factor de amortiguación de 0,12 promedio (**Figura 29**) (es decir, una disipación de energía del 12% por ciclo) y se agregaron al tanque solo 6,2 kg de masa estructural (**Tabla 12**).

Se dimensionó y verificó estructuralmente el espesor de los anillos para la peor condición que se podría dar en el interior del , de manera que pueda resistir las cargas presentes sin deformarse y afectar su rendimiento amortiguante (**Figura 33** y **Figura 34**).

Como fue mencionado más anteriormente, la creación del modelo numérico computacional nos permitió comparar y verificar los resultados obtenidos de forma teórica, pudiendo observar en las simulaciones el importante efecto de amortiguación que introduce al sistema la implementación de anillos (**Figura 44** y **Figura 45**).

Una vez obtenida la configuración de anillos a implementar en los tanques, resultó necesario la determinación de las fuerzas y momentos que se generan en el sistema cuando este es excitado o retirado de su posición de equilibrio, de manera de poder predecir los esfuerzos a los cuales se somete el tanque para su posterior diseño estructural de las fijaciones del mismo y para alimentar los sistemas de control y guiado del vehículo. Para ello, se efectuó la creación del modelo mecánico equivalente, a través de la modelización con masas, resortes y amortiguadores, que representan las características, dinámicas, elásticas y disipativas del sistema. A través del software Matlab/Simulink ® se creó un comando mediante la implementación de diagramas de

bloques, que nos permite obtener la respuesta en fuerza y los desplazamientos de las masas asociadas a las frecuencias naturales de sloshing cuando el sistema es excitado y retirado de su posición de equilibrio.

La importancia de este comando recae en el hecho de que brinda la posibilidad de ajustar los parámetros para cualquier geometría de tanque y permite también la creación de la señal excitante, arrojando como resultado las fuerzas y desplazamientos que se producen en el sistema como respuesta a dicha señal. Esto permite comparar resultados con experimentaciones y brinda un modelo de cálculo rápido para incluir en los sistemas de control activo del vehículo.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Ibrahim, R, Liquid Sloshing Dynamics. Theory and Applications. Cambridge University Press. 2005
- [2] Miles J. W. (1956), - Miles J. W. (1958b), Ring damping of free surface oscillations in a circular tank, J. Appl Mech. 25(2),274–276 - On the sloshing of liquid in a cylindrical tank, Ramo-Wooldridge Corp. Guided Missile Research Div., GM-TR-18.
- [3] THE NEW “DYNAMIC BEHAVIOR OF LIQUIDS IN MOVING CONTAINERS” - Franklin T. Dodge - Southwest Research Institute - San Antonio, Texas.
- [4] Bauer H.F., Liquid sloshing in a Cylindrical Quarte Tank, AIAA Journal Vol. 1 Nro. 11, 2601-2606, oct. 1963.
- [5] Abramson H.N., The Dynamic Behavior Of Liquids In Moving Containers- With Applications to Space Vehicle Technology, NASA SP 106, 1966.
- [6] Abramson H. N., Chu W., and Kana D. D. Some Studies Of Nonlinear Lateral Sloshing In Rigid Containers. J. of Appl. Mech. 33(4), 1966.
- [7] Stephens D. G., Leonard H.W., Perry T.W., Investigation of the damping of liquids in right circular tanks including the effects of a time-variant liquid depth, NASA TN D-1367, 1962
- [8] Silveira M. A., Stephens D.C and Leonard H.W. An experimental investigation of damping of liquid oscillations in cylindrical tanks with various baffles, NASA TN 715.
- [9] Faltinsen, O.M., Timokha, A.N. (2012): On sloshing modes in a circular tank. Journal of Fluid Mechanics, 695, 467-477.
- [10] Faltinsen, O.M., Firoozkoobi, R., Timokha, A.N. (2011): Effect of central slotted screen with a high solidity ratio on the secondary resonance phenomenon for liquid sloshing in a rectangular tank. Physics of Fluids, 23, Issue 6, Art. No. 062106, 1-13
- [11] Miles J. W. (1956), On the sloshing of liquid in a cylindrical tank, Ramo-Wooldridge Corp. Guided Missile Research Div., GM-TR-18.
- [12] Gavriluk, I., Lukovsky, I., Trotsenko, Yu., Timokha, A. (2006): Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part 1. Linear fundamental solutions. Journal of Engineering Mathematics, 54, 71-88
- [13] Gavriluk, I., Lukovsky, I., Trotsenko, Yu., Timokha, A. (2007): Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part 2. Nonlinear resonant waves. Journal of Engineering Mathematics, 57, 57-78.
- [14] <http://www.nasa.gov/home/index.html>

- [15] Godderidge, B., Tan, M., Earl, C. and Turnock, S.R. (2006) Multiphase CFD modelling of a lateral sloshing tank. In, 10th Numerical Towing Tank Symposium, Le Croisic, France, 01 - 03 Oct 2006. Nantes, France, Ecole Centrale de Nantes, 59-64.
- [16] P. Pal - Department of Civil Engineering, MNNIT Allahabad, India. Sloshing of Liquid in Partially Filled Container – An Experimental Study International Journal of Recent Trends in Engineering, Vol. 1, No. 6, May 2009.
- [17] Rebouillat S., Liksonov D. Fluidstructure interaction in partially filled liquid containers: a comparative review of numerical approaches. Computers & Fluids 2010; 5: 739-746.
- [18] Bruno L.J. A., Bacchi F., Scarabino A. Diseño de dispositivos anti-sloshing para un vehiculo espacial de combustible líquido, aceptado en la XII Reunión de Física de Fluidos, 5-7 de noviembre de 2012, Buenos Aires, Argentina.
- [19] Abbas Maleki, Mansour Ziyaeifar, Sloshing damping in cylindrical liquid storage tanks with baffles Journal of Sound and Vibration 311 (2008) 372-385
- [20] The Boeing Delta IV launch vehicle—Pulse-settling approach for second-stage hydrogen propellant management -Michael D. Berglunda, Charles E. Bassetta, James M. Kelsoa, John Mishicb, Dean Schrageba The Boeing Company, Huntington Beach, CA 92647, USA Analex Corporation, Brook Park, OH 44142, USA

## ANEXO I

### Código de Matlab – Modelo mecánico.

```
% Modelo Mecánico - SLOSHING
h=.9 %[altura del fluido]
D = .56;
g=9.81
R = D/2
T= 300
sigma = 0.139903-.24637e-3*T ;           % para Hidracina N/m
% sigma = 0.03032-6.66497e-5*T;         % para Ac. Nitrico 70% -
Tetróxido 30%
% sigma = 0;
%-----
rho = 1003.6;   % Hidracina
% rho = 1550;   % Ac. Nitrico-Tetr.
vol= pi*R^2*h
%-----
Ns = 0:4;
R = D/2;
%-----
%Modos simétricos:
xi0 = [3.832 7.0156 10.173 13.324 16.471];

%Con tensión superficial:

wmS = (g*xi0/R+sigma*xi0.^3/(rho*R^3)).*tanh(xi0*h/R);
frecS = sqrt(wmS)/(2*pi)
%-----
%Modos antisimétricos:
xi1 = [1.841 5.335 8.535 11.205 14.850];
```



```

wmA = (g*xil/R+sigma*xil.^3/(rho*R^3)).*tanh(xil*h/R);
%wi es para tener las frec en rad/seg
wi = sqrt(wmA)
w1=wi(1)
w2=wi(2)
w3=wi(3)
w4=wi(4)
w5=wi(5)
%-----
%Frec en Hz
fi = (wi)/(2*pi)
f1=fi(1)
f2=fi(2)
f3=fi(3)
f4=fi(4)
f5=fi(5)
%-----
%masas del sistema
mf=rho*vol
mi=mf.*(2*R*tanh(xil*h/R)./(xil*h.*(xil.^2-1)));
m1=mi(1)
m2=mi(2)
m3=mi(3)
m4=mi(4)
m5=mi(5)
m0=mf-(sum(mi(1:5)))
%-----
%constante del resorte i
ki=(wi.^2).*mi;
k1=ki(1)
k2=ki(2)
k3=ki(3)
k4=ki(4)
k5=ki(5)
%-----
%alturas de las masas i
hi=(h/2).*(1-(4*R.*tanh(xil*h/R)./(xil*h)));
%-----
%Coeficientes contruidos para calcular las alturas hi
coef=(2*R./(xil.*h.*(xil.^2-1)).*tanh(xil*h/R);
coef2=(xil.*tanh(xil*h/R)+4.*(R./(h.*cosh(xil*h/R))));
coef3=(xil.^2).*((xil.^2-1).*(h/R);
coef4=(1/(2*(h/R)^2));
%-----
%Alturas hi
h1=hi(1)
h2=hi(2)
h3=hi(3)
h4=hi(4)
h5=hi(5)
%-----
%Alturas de la masa m0
h0=(h./(1-sum(coef)).*(coef4-sum(coef2/coef3)))
%-----
%Coeficientes de amortiguación de cada masa mi -----> ci
%"am" es el amortiguamiento de cada masa, considero 10% que es el
%amortiguamiento estimada para los anillos antisloshing
ami= [0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
ci=2.*mi.*wi.*ami;

```

```

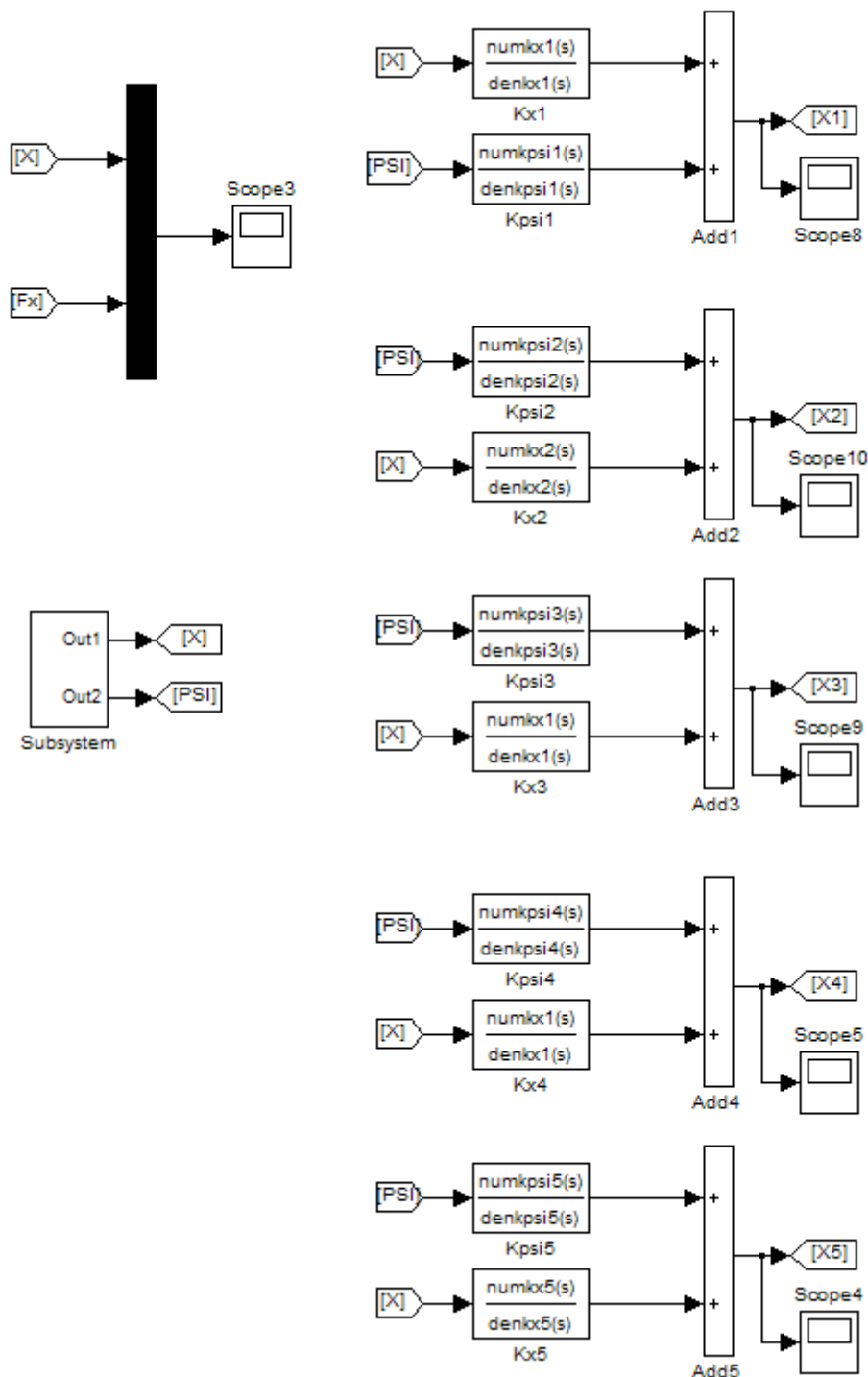
c1=ci(1);
c2=ci(2);
c3=ci(3);
c4=ci(4);
c5=ci(5);
%-----
%Momento de inercia total I0
% I0 ----> voy a considerar al I0 que es una placa de masa m0 de 0.336
de largo (70 %del diámetro)
%y 0.24 de ancho ( 50%del diámetro)

I0=(1/12)*m0*((0.5*D)^2+(0.7*D)^2); %[kg*m^2]
%-----
%Momento de inercia total If
If=sum(mi.*hi.^2)+m0*h0^2+I0;
%-----
%parametros para el bloque referencia asociados a X
numkxi=[-mi 0 0];
numkx1=[-m1 0 0];
numkx2=[-m2 0 0];
numkx3=[-m3 0 0];
numkx4=[-m4 0 0];
numkx5=[-m5 0 0];
denkxi=[mi 2.*mi.*wmS.*xi0 ki];
denkx1=[mi(1) 2*mi(1)*wi(1)*ami(1) ki(1)];
denkx2=[mi(2) 2*mi(2)*wi(2)*ami(2) ki(2)];
denkx3=[mi(3) 2*mi(3)*wi(3)*ami(3) ki(3)];
denkx4=[mi(4) 2*mi(4)*wi(4)*ami(4) ki(4)];
denkx5=[mi(5) 2*mi(5)*wi(5)*ami(5) ki(5)];
%-----
%parametros para el bloque referencia asociados al angulo PSI
numkpsii=[hi.*mi 0 -g.*mi];
numkpsi1=[h1.*m1 0 -g.*m1];
numkpsi2=[h2.*m2 0 -g.*m2];
numkpsi3=[h3.*m3 0 -g.*m3];
numkpsi4=[h4.*m4 0 -g.*m4];
numkpsi5=[h5.*m5 0 -g.*m5];
denkpsii=[mi 2.*mi.*wi.*xi0 ki];
denkpsi1=[mi(1) 2*mi(1)*wi(1)*ami(1) ki(1)];
denkpsi2=[mi(2) 2*mi(2)*wi(2)*ami(2) ki(2)];
denkpsi3=[mi(3) 2*mi(3)*wi(3)*ami(3) ki(3)];
denkpsi4=[mi(4) 2*mi(4)*wi(4)*ami(4) ki(4)];
denkpsi5=[mi(5) 2*mi(5)*wi(5)*ami(5) ki(5)];
%-----
Frechz=2*pi;
Frecx=Frechz*(w1) %entre parentesis poner el valor de la frecuencia de
la onda en hz para X
Frecpsi=Frechz*(w1)%entre parentesis poner el valor de la frecuencia
de la onda en hz para PSI
Ampgiro=pi/180;
Giro=Ampgiro*(5) %entre parentesis poner el valor en grados del giro
maximo
Ampx= 0.01*(3) %entre parentesis poner el valor de la amplitud en X en
[cm]
%-----
stx=0.001 %Sample time para X
stpsi=0.001 %Sample time para Psi

```

### Diagrama de bloques - Modelo mecánico.

Creación de la señal forzante y obtención de los desplazamientos a través de las funciones de transferencias:



**Obtención de las fuerzas:**

