

Las dialécticas en un Recorrido de Estudio e Investigación para la enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad

Viviana Angélica Costa¹, Marcelo Arlego² y María Rita Otero³

^{1,2,3}NIECYT, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, Argentina. ²Instituto de Física La Plata. Universidad Nacional de La Plata, Argentina. ¹Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina. ^{2,3}CONICET, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas, Argentina. E-mails: ¹vacosta@ing.unlp.edu.ar, ²arlego@fisica.unlp.edu.ar, ³rotero@exa.unicen.edu.ar.

Resumen: En este trabajo se presenta un análisis didáctico relativo a un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) para el estudio del Cálculo Vectorial, considerando las dialécticas propuestas por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). El REI se desarrolló en un curso de matemática en una Facultad de Ingeniería en el marco de la Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM).

Palabras-clave: Didáctica de la matemática; Teoría Antropológica de lo Didáctico; Recorridos de Estudio e Investigación.

Title: Dialectics of a Study and Research for Vector Calculus teaching at the University.

Abstract: In this paper a didactic analysis related to a Research and Study Path (RSP) for the study of Vector Calculus, considering the dialectics proposed by the Anthropologic Theory of the Didactic (ATD) is presented. The RSP was developed in a mathematics course in a Faculty of Engineering under the Pedagogy of the Research and Questioning the World (PRQW).

Keywords: Didactic Mathematical; Anthropological Theory of the Didactic; Research and Study Paths.

1. Introducción

El estudio de los contenidos relativos al Cálculo y en particular al Cálculo Vectorial, son fundamentales para los estudiantes de las carreras de ingeniería. Esta Organización Matemática se vincula con conceptos de la ingeniería y de la física, y les proporciona a los alumnos herramientas básicas e indispensables para modelar matemáticamente diversos fenómenos físicos a partir de una representación vectorial (Feynman, Leighton y Sands, 1998; Marsden y Tromba, 2004).

La problemática de la enseñanza de la matemática y del Cálculo en el nivel universitario, ha sido abordada por diversos investigadores (Azcárate Giménez y Camacho Machín, 2003; Moreno, 2005; Salinas y Alanís, 2009; Dunn y Barbanel, 2000; Kümmerer, 2002; Camarera, 2009; Willcox y Bounova, 2004; Zuñiga, 2007). Algunos mencionan que las dificultades encontradas se vinculan con una enseñanza mecanicista, descontextualizada y técnica, que obstaculiza la

comprensión de los significados de los objetos matemáticos de estudio y sus vínculos con otras ciencias, y proponen diversas alternativas para su enseñanza.

Según Yves Chevallard en la base de esa problemática se encuentra la pérdida de sentido que elimina las razones de ser de las organizaciones matemáticas (OM) que se proponen estudiar en una institución. Este fenómeno se relaciona con otro, al que denomina monumentalización del saber, caracterizado por presentar las OM como monumentos ya creados, sin funcionalidad y a los que solo se los puede "visitar" (Chevallard, 2007, 2012, 2013). Buscando enfrentar esos fenómenos, propone un cambio de paradigma, que consiste en abandonar el paradigma de visitar obras, por el paradigma emergente de cuestionamiento del mundo.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) materializa esto en el aula, a partir del dispositivo didáctico denominado Recorrido de Estudio e Investigación (REI). Los REI parten del planteo de una pregunta generatriz (Q) y organizan el estudio de los contenidos matemáticos como pares de preguntas y respuestas. El desarrollo de un REI, requiere de una pedagogía radicalmente diferente a la tradicional: la Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM) (Ladage y Chevallard, 2011).

Como propuesta alternativa para la enseñanza del Cálculo Vectorial en las carreras de ingeniería, se diseñó, experimentó y evaluó una enseñanza por REI, en un curso habitual de matemática en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (Argentina). Se propuso un REI de carácter codisciplinar (porque involucra tanto a la matemática como a la física) que partió de la pregunta generatriz propuesta por el profesor: ¿Cómo construir edificaciones sostenibles?

En este trabajo se expone el análisis del REI experimentado en relación a las Organizaciones Matemáticas y Organizaciones Físicas estudiadas y a la gestión del mismo considerando las dialécticas que se vivieron y los indicadores de su presencia durante su proceso.

2. La Teoría Antropológica de lo Didáctico

2.1. Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI)

Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) son dispositivos didácticos cuyo objetivo es enfrentar el fenómeno de la *monumentalización de los saberes*. El estudio de las OM surgirá de la búsqueda de respuestas a una pregunta generatriz (Q_0) llevada al curso por el profesor, y de la formulación de preguntas derivadas (Q_i , $i=1..n$) propuestas por el grupo de estudio (Y profesor, X alumnos). Durante el proceso, los alumnos y el profesor asumirán actitudes y roles radicalmente diferentes a los habituales en la enseñanza tradicional. Habrá un reparto de responsabilidades. Los alumnos trabajarán en grupos, serán los encargados de aportar respuestas parciales (R_j^o para $j=1..m$), discutir las, validarlas, comunicarlas y proponer el estudio de ciertas obras (O_p , $p=m+1..l$) que consideren necesario para elaborar una respuesta R^* .

El REI se representa en el esquema Herbartiano reducido de la forma siguiente:

$$[S(X;Y;Q) \rightarrow M] \rightarrow R^*$$

donde $S(X; Y; Q)$ representa el *sistema didáctico* y M el *medio didáctico* que dicho sistema debe construir para responder la pregunta. M además contiene: las *obras*, las *preguntas derivadas* y las *respuestas parciales* (Otero, Fanaro, Corica, Llanos, Sureda y Parra, 2013).

2.2. Las dialécticas

En el marco de la TAD (Chevallard, 2007, 2013) las *dialécticas* son *saberes o saber-hacer*, considerados "*gestos del estudio y de la investigación*". Hasta el momento son nueve y se describen de la siguiente manera:

- *Dialéctica del estudio y de la investigación (o de las preguntas y de las respuestas)*: esta dialéctica es el corazón de una enseñanza por REI. Se refiere al hecho de que toda búsqueda genuina y no simulada de respuestas a las preguntas, genera nuevas preguntas que la comunidad de estudio decidirá cuándo y cómo van a responder.

- *Dialéctica de lo individual y de lo colectivo (o de la autonomía y de la sinonimia)*: es un proceso que consiste en el estudio colectivo de la pregunta problemática que se ha planteado y a la vez en el reparto de las responsabilidades y de asignación de las tareas, para volver a incorporarse a un proceso colectivo, para dar una respuesta. Esta dialéctica desplaza el "actor del estudio", pasa del individuo a la comunidad.

- *Dialéctica del análisis y de la síntesis praxeológica y didáctica*: todo análisis didáctico supone un análisis praxeológico y recíprocamente. Para comprender una realidad praxeológica (práctica, técnica, tecnológica o teórica) es indispensable realizar un análisis didáctico. Este análisis tiene un componente epistemológico, que se pregunta por la génesis de las praxeologías en juego, lo cual es, otra cara de la transposición, que produce modificaciones del saber, solo por el hecho inevitable de su difusión.

- *Dialéctica de entrar y salir de tema*: cuando, en el transcurso de un REI, se buscan respuestas en "sentido fuerte" a una pregunta, es preciso habilitar la posibilidad de salirse del tema al que inicialmente pertenece dicha pregunta, incluso hasta la posibilidad de salirse de la disciplina de referencia, para reingresar posteriormente. Resulta evidente que las preguntas generatrices que pueden dar lugar a recorridos amplios de estudio e investigación pocas veces pueden circunscribirse en el ámbito limitado de un único sector o incluso una única disciplina.

- *Dialéctica del paracaidista y del buscador de trufas*: estos dos términos se deben al historiador francés Emmanuel Leroy-Ladurie, quien clasificó a los historiadores en paracaidistas y buscadores de trufas. Por un lado, los paracaidistas realizan una exploración en extensas áreas de territorio – como los soldados franceses en Argelia en 1960 –; mientras los buscadores de trufas sacan a la luz tesoros enterrados. Estas metáforas se refieren a la condición de exploradores que asumen los actores del sistema didáctico, quienes por un lado, toman una gran distancia del problema y exploran el terreno desde muy "arriba", para lo cual, se requiere incorporar el gesto de "inspeccionar zonas de gran alcance". Pero tal inspección, difícilmente encuentra de inmediato lo que se busca, y requiere de gestos de acercamiento y enfoque sobre el terreno de los hallazgos, para analizar la utilidad de lo encontrado, lo cual posibilita hallar cosas "inesperadas",

que pueden resultar "pepitas", a menudo invisibles, que hará avanzar la investigación.

- *Dialéctica de las cajas negras y cajas claras*: se refiere al proceso según el cual se establece qué conocimiento es pertinente y merece ser aclarado, analizado, etc., mientras se dejan, es necesario, ciertos saberes a enseñar en un "nivel de gris". Así, quedan en gris, ciertos saberes que no son necesarios para responder la pregunta generatriz o sus preguntas derivadas. Esta dialéctica se opone al hábito escolar que, en general, aspira a una "claridad" completa.

- *Dialéctica de la conjetura y de la prueba (media-medio)*: se refiere al saber construido en un curso de estudio e investigación, al que se considera como producto de una conjetura y que como tal, debe ponerse a prueba. Luego, esta dialéctica se designó con el nombre de la dialéctica medio-media (entendiendo por "media" a todo sistema que emite mensajes en dirección a ciertos públicos, como por ejemplo, un diario, un programa de televisión, el curso del profesor, un "tratado" sabio, un libro, etc.) y medio a la noción originada en la Teoría de las situaciones Didácticas de Brousseau. Es decir, esta dialéctica hace referencia, a la necesidad de disponer, para la elaboración de las sucesivas respuestas provisionales $R \diamond i$, de algunas respuestas preestablecidas accesibles a través de los media (construcciones elaboradas para dar respuesta a preguntas ya elaboradas, tal vez diferentes a las que se plantean en el proceso de estudio) y, por lo tanto, deben ser, en cierta manera, "de-construidas" y "re-construidas" en función de las propias necesidades. Para y por ello se van a necesitar otro tipo de medios, instrumento indispensable para poner a prueba la validez de estas respuestas.

- *Dialéctica de la "excripción" textual y de la "inscripción" textual (de la lectura y de la escritura)*: se refiere al proceso de evitar la transcripción formal de respuestas parciales ya existentes $R \diamond$, consideradas pertinentes, que pueden conducir a la construcción de la respuesta a la pregunta planteada, mientras se cuestiona el texto donde se ha encontrado inscriptas a las posibles respuestas, se trata entonces de tomar de ellas la parte útil y volver a escribirlas en notas de síntesis, glosarios, etc. Esta dialéctica está relacionada con la dialéctica de las cajas negras y cajas claras, porque es necesario establecer un nivel de "gris", o de profundidad con el cuál transcribir las respuestas parciales ya construidas.

- *Dialéctica de la difusión y de la recepción*: es el proceso que conduce a difundir y defender la respuesta desarrollada por la comunidad de estudio. Los saberes no son importantes per se – monumentalismo –, no por el tipo de respuestas que permiten aportar, se trata de un saber que es el producto de la actividad matemática de la comunidad de estudio.

3. Metodología

El REI se desarrolló en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI UNLP, Argentina) en un curso habitual de matemática con 48 estudiantes de primer año (18 a 20 años) de la carrera ingeniería aeronáutica.

El REI se llevó a cabo en 12 *encuentros*, de cuatro horas cada uno, ajustados según el *calendario académico* que rige en dicha *institución*. Para el estudio e investigación los estudiantes se distribuyeron en nueve grupos permanentes de

trabajo. Se acordó que se dedicarían nueve *encuentros* al proceso de estudio (*etapa 1*) y tres a las puestas en común de los grupos de trabajo (*etapa 2*). Al finalizar el REI se acordó que cada grupo presentaría en el campus virtual que dispone la FI UNLP en la plataforma Moodle un Informe Final del estudio realizado (*etapa 3*).

Con el objetivo de describir y analizar el desarrollo del REI, el profesor del curso recolectó las producciones de cada grupo de modo sistemático. Además se registró la actividad en fotografías y videos, en particular las puestas en común. El profesor además llevó un diario de clase. En ese diario el profesor registró la descripción del escenario en que se realizaron los *encuentros*, los *gestos* de los estudiantes, los acontecimientos que ocurrieron, las conversaciones y diálogos.

Para el *análisis* considerando las *dialécticas* (según fueron definidas en el marco teórico) se identificaron en cada una de las tres *etapas* y en todos los registros obtenidos, *gestos* que fueran *indicadores* de una o varias de ellas.

A continuación se determina para cada *dialéctica*: su *codificación* y las características que fueron consideradas que indicaran su presencia.

(D1 P&R) *Dialéctica de las preguntas y de las respuestas*. Esta dialéctica se codificó en los registros cuando se observaron *preguntas derivadas*, *respuestas parciales*, *resultados matemáticos* y *expresiones o frases* que fueran indicadores de una actividad de *estudio y de investigación*.

En la figura 1 se muestra la codificación de esta dialéctica al observarse la frase: “*se debatieron varias propuestas...*”. Ello indica que hubo entre los estudiantes, un intercambio de ideas, de argumentos y de propuestas. En ese caso sobre cual edificación seleccionar para *iniciar el estudio* de la *pregunta generatriz*. También mostramos en las figuras 2 y 3, la codificación de esta dialéctica al observarse las *preguntas derivadas* *¿Cuál será el flujo neto de calor para cada hangar propuesto? ¿Cómo circula el aire en el interior del edificio?*

(D2 I&C) *Dialéctica de lo individual y de lo colectivo*. Esta dialéctica se codificó en los registros en los cuales se observó que el proceso de estudio, las decisiones, las argumentaciones, las propuestas y las respuestas a las preguntas derivadas, fueron el resultado de un trabajo *colectivo*. También, cuando se observaron expresiones del estilo: “*se decidió*”, “*propusimos*”, “*debatimos*”, entre otros.

Por ejemplo en la figura 1 se codificó esta dialéctica al expresar el estudiante: “*...se debatieron varias propuestas, optando de común acuerdo entre todos los grupos, por la propuesta realizada por nuestro grupo...*”. En la figura 4 codificamos esta dialéctica por lo expresado por el grupo de alumnos en relación al estudio de campos vectoriales aplicados a los hangares: “*...Viento: Decidimos que va a tener una dirección desde el norte, orientada hacia el sur, y una velocidad constante en metros sobre segundos...*”.

(D3 ASP&D) *Dialéctica del análisis y de la síntesis praxeológica y didáctica*. El indicador para codificar esta dialéctica fue la presencia de un análisis y/o una síntesis en la que se observe el estudio de la OM y OF como un saber *funcional* y adecuado para dar respuesta a la pregunta generatriz.

Por ejemplo en la figura 5 se observa la codificación de esta dialéctica en las conclusiones presentadas por un grupo en su Trabajo Final. Allí expresan la *funcionalidad* del estudio matemático realizado.

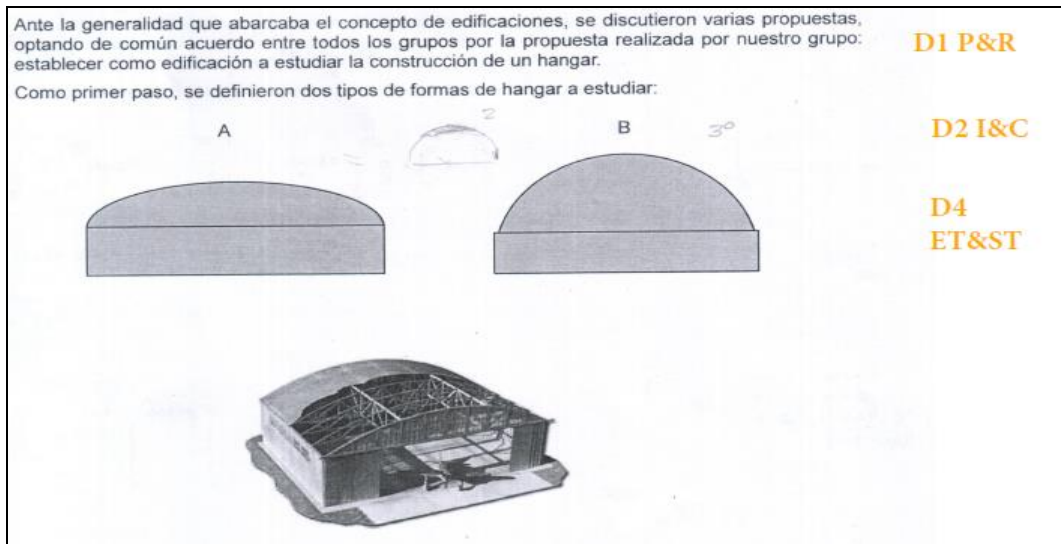


Figura 1. Dialéctica D1. Etapa 1. Encuentro 1

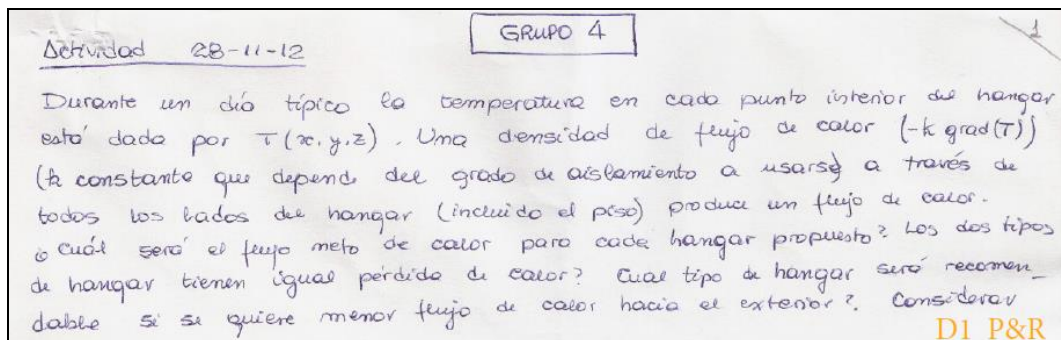


Figura 2. Dialéctica D1. Etapa 1. Encuentro 4

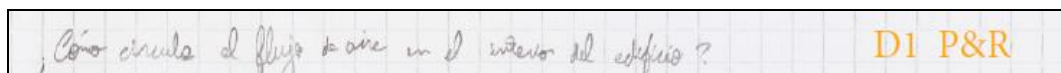


Figura 3. Dialéctica D1. Etapa 1. Encuentro 8

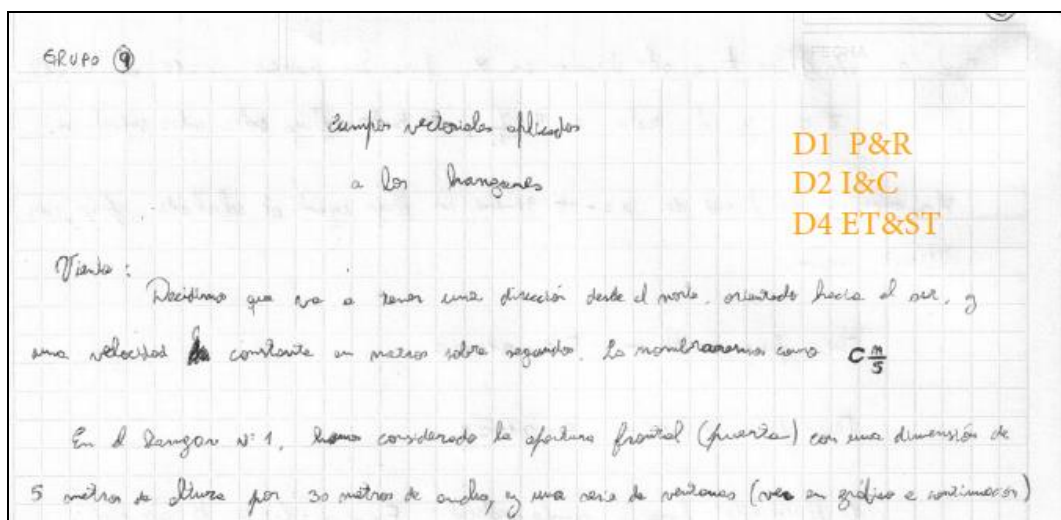


Figura 4. Dialéctica D2. Etapa 1. Encuentro 3

(D4 ET&ST) *Dialéctica de entrar y salir del tema.* Los indicadores que se consideraron para codificar esta dialéctica se corresponden con la presencia de

las *entradas y salidas de tema*. Con *entrar a un tema*, nos referimos al estudio de contenidos en diversas áreas: la matemática, la física, la construcción sostenible.

A modo de ejemplo en la figura 1 se observa la codificación de esta dialéctica al observarse *entrar al tema* "Geometría y Cálculo", en relación a la modelación matemática del edificio y al cálculo de algunas de sus magnitudes que permitiría dar respuesta a preguntas derivadas en relación al "uso eficiente de los recursos naturales", "relación costo-beneficio", "uso de energías renovables", "cuidado del medio ambiente" y "aprovechamiento de los fenómenos naturales". En la figura 6, se categorizó esta dialéctica al observarse la entrada al *tema* "campos vectoriales" necesario para modelar matemáticamente los *fenómenos físicos* seleccionados.

Conclusiones finales del trabajo

Con la experiencia realizada de "¿Cómo construir edificaciones sustentables?", fuimos viendo cómo las herramientas matemáticas utilizadas para realizar los cálculos dejaron de ser algo abstracto. Estas se pudieron asociar con cuestiones que se nos presentan en la vida diaria como lo vimos al tener que calcular áreas de superficies, volúmenes, etc. De esta forma se fueron aprendiendo a utilizar los conceptos y herramientas matemáticas y su aplicación práctica, ante la necesidad de ir resolviendo los problemas concretos que se nos planteaba. Así fuimos viendo, estableciendo condiciones simples para simplificar el problema, cómo:

- ▲ croquizar las formas de hangar propuestas y representarlas en un sistema de ejes cartesianos
- ▲ definir las ecuaciones que representan dichas formas
- ▲ modelización matemática de fenómenos naturales con el uso de magnitudes y campos escalares y vectoriales, operaciones entre ellos y uso del operador nabla.
- ▲ cálculo de volúmenes mediante integral triple
- ▲ cálculo de área de superficies parametrizándolas, usando integral de superficie
- ▲ cálculo del flujo a través de una superficie usando integral de superficie, concepto de divergencia y Teorema de Gauss.
- ▲ cálculo de circulación usando integral de línea, concepto de campos vectoriales, rotor, campos conservativos, Teorema de Green, Teorema de Stokes.

Figura 5. Dialéctica D3. Etapa 3. Trabajo Final. Grupo 4

(D5 P&BT) *Dialéctica del paracaidista y del buscador de trufas*. Se codifica esta dialéctica, en presencia de indicadores que dieran indicio por parte de un alumno o de un grupo de alumnos de una "búsqueda de gran alcance" o una "inspección minuciosa" que sirvieran para responder a la pregunta generatriz o derivadas.

En la figura 7 se observa la categorización de esta dialéctica. Un grupo de alumnos realiza una "búsqueda de gran alcance (*paracaidista*)" en la exploración de respuestas a la pregunta generatriz. Por otro lado, en la figura 8 se observa que uno de los grupos, realiza una "búsqueda minuciosa" (*buscador de trufas*) durante el estudio relativo al *flujo de campos vectoriales de gradientes de temperatura* en respuesta a *¿qué cantidad de flujo de calor atraviesa las paredes del edificio?* (aquí solo se expone una parte de los registros de los estudiantes en relación a ese estudio por razones de espacio).

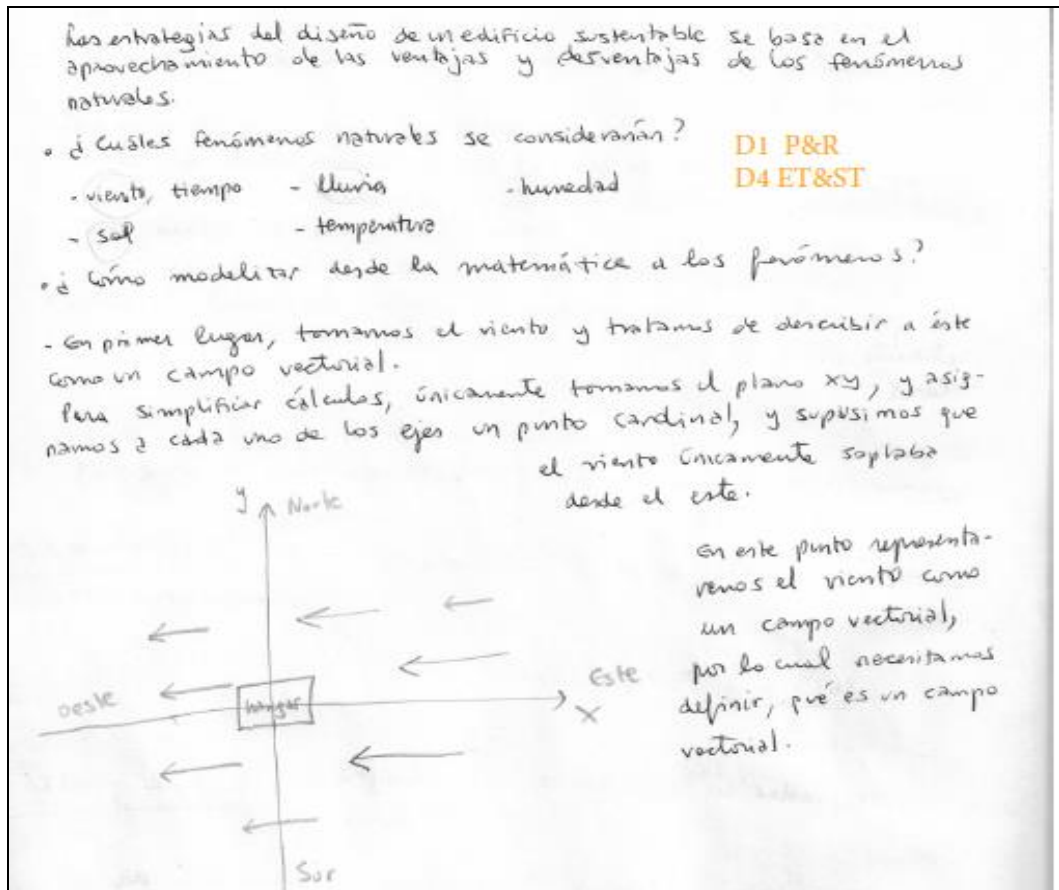


Figura 6. Dialéctica D4 ET&ST. Etapa1. Encuentro 3

(D6 CN&CC) *Dialéctica de las cajas negras y cajas claras.* Codificamos esta dialéctica en procesos en los que se observa que los estudiantes *deciden* cuales temas y conocimientos (o saberes) estudiar y en qué medida profundizar los mismos (*nivel de gris*) para responder la pregunta generatriz o preguntas derivadas.

En la figura 9 se codificó esta dialéctica durante el proceso de estudio para el cálculo del *flujo* de un *campo vectorial a través de una superficie*. Los estudiantes recurren al estudio de este tema en la búsqueda de respuesta a la pregunta derivada *¿Cómo "fluye" el aire en el interior y exterior del edificio?* Para los cálculos matemáticos que consideran pertinentes para responder a esa pregunta utilizan la *integral de flujo*, dejando en un *nivel de gris* el proceso que arriba al planteo de la mencionada *integral de superficie*.

(D7 C&P) *Dialéctica de la conjetura y de la prueba.* Se codificó esta dialéctica cuando se observa durante el proceso de estudio que la información (*media*) traída al *medio* pasa por un proceso de *puesta a prueba* por la comunidad de estudio.

(D8 ET&IT) *Dialéctica de la "excripción" textual y de la "inscripción" textual.* Categorizamos esta dialéctica cuando se observa en los registros que la información tomada por los estudiantes en los *media* es *inscripta* en sus textos no en *forma textual* si no que se observa una readequación y selección de los mismos que sea adecuada al estudio realizado.

Trabajo:
¿Cómo construir edificación sustentable?

Propuestas:

- Presupuesto
- Armonía con el medioambiente
- dimensiones
- materiales
- ubicación
- energías renovables
- buen uso de los recursos

- edificio ecológico, verde; que sea amigable con el medio ambiente
- minimizar el impacto ambiental
- eficiente
- aprovechamiento eficiente de la energía
- clima del lugar
- buen balance (costo)

Este mismo día se planteó que nuestro problema va a estar referido a la creación de un hangar para un tipo de avión modelo Airbus 320.

D5 P&BT

Largo: 37 m
 Ancho: 34 m
 Alto: 13 m

Por lo tanto, nuestro hangar tomará las medidas aproximadas de 40 x 40 x 15.

Figura 7. Dialéctica D5 P&BT. Etapa 1. Encuentro 1

* Para el día de hoy, a propuesta de la profesora, pasamos a conducir con la parte de nuestro estudio relativa a "Flujo."

* 2 grupos son los encargados de exponer sus ideas con respecto a la formulación de un modelo matemático para la temperatura:

D1 P&R
D2 I&C
D4 ET&ST
D5 P&BT

Uno de los grupos propuso el siguiente modelo:

$$\text{Cambio de } T^{\circ} = \frac{(r_i - r_s) t}{C_c}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{r}{C_c}$$

$$C_c \Delta T = R t \Delta t$$

Integrando: $\int C_c \Delta T = \int R t \Delta t \Rightarrow r T C_c = \frac{t^2 R}{2 C_c} + C$

Otro de los grupos halló una manera más fácil de calcular la temperatura,

$z=0 \rightarrow T=20^{\circ}\text{C}$ $T(x,y,z) = \frac{4}{13}z + 20$
 $z=13 \rightarrow T=24^{\circ}\text{C}$

$$\nabla T = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle = \langle 0, 0, \frac{4}{13} \rangle$$

campo vectorial.
campo gradiente.




Figura 8. Dialéctica D5 P&BT. Etapa 1. Encuentro 5

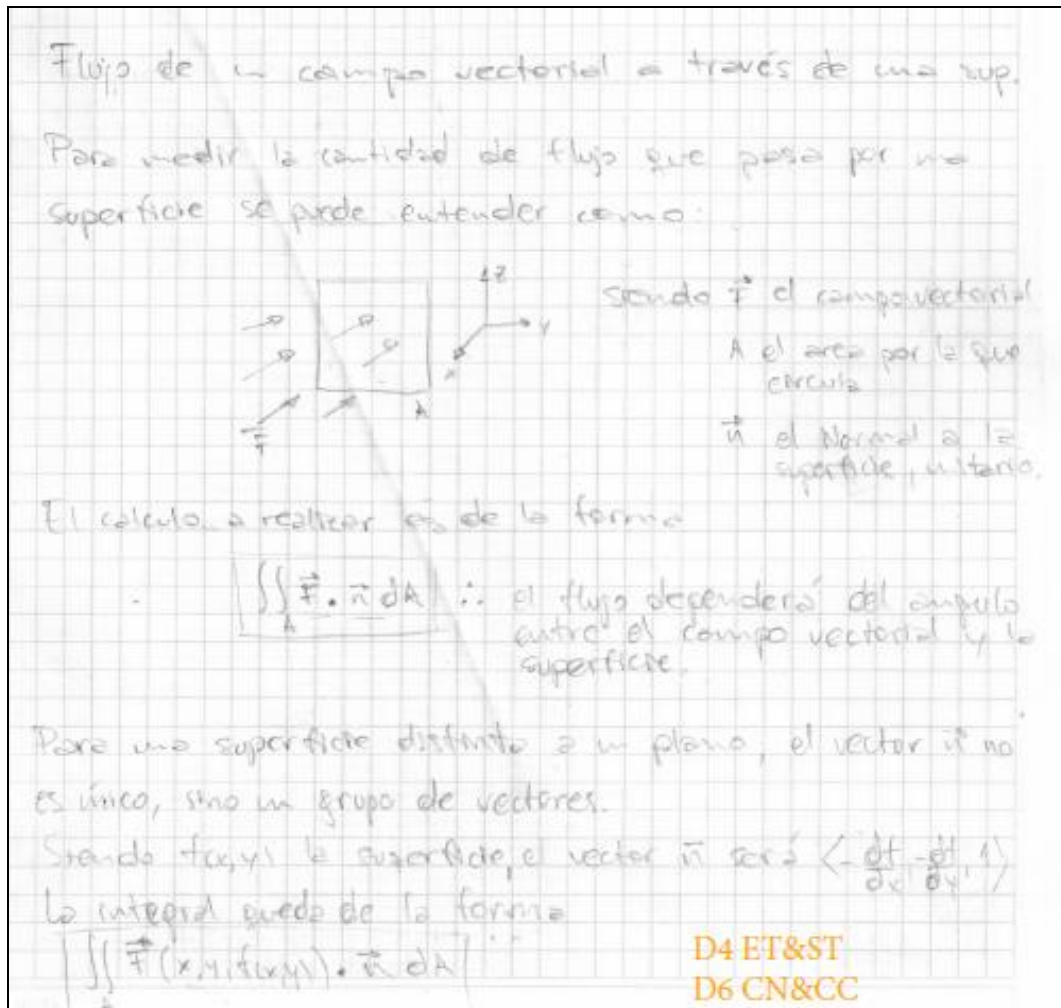


Figura 9. Dialéctica D6 CN&CC. Etapa 1. Encuentro 4

A modo de ejemplo se observa en la figura 10 la categorización de esta dialéctica. Los estudiantes transcriben el Teorema de Gauss en forma "adecuada" en sus textos.

(D9 D&R) *Dialéctica de la difusión y de la recepción.* Se categorizó esta dialéctica al observarse en los registros: *conclusiones, difusión y defensa* de las respuestas parciales. En la figura 11 se observa la categorización de esta dialéctica. Los estudiantes de un grupo difunden los resultados obtenidos en relación a los dos edificios seleccionados y el *flujo de calor*.

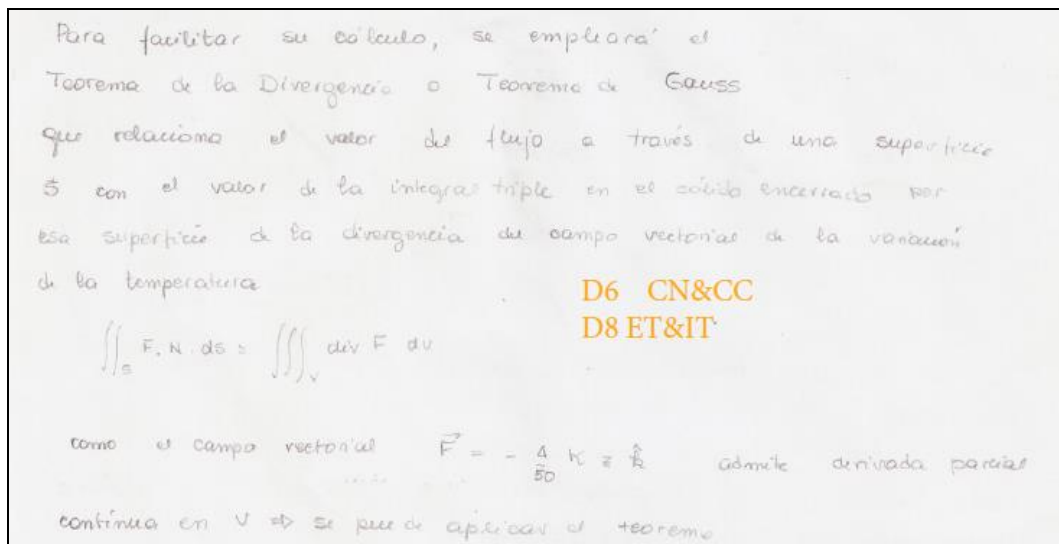


Figura 10. Dialéctica D8 ET&IT. Etapa 1. Encuentro 6

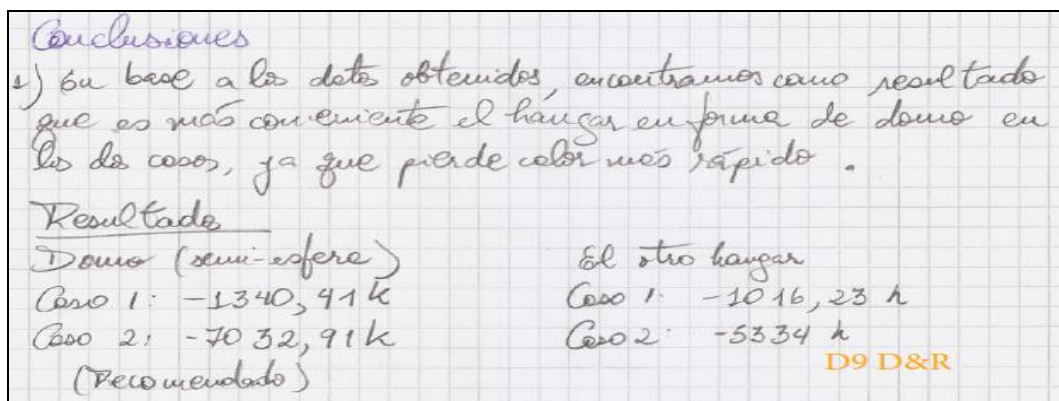


Figura 11. Dialéctica D9 D&R. Etapa 1. Encuentro 6

4. Resultados y análisis didáctico

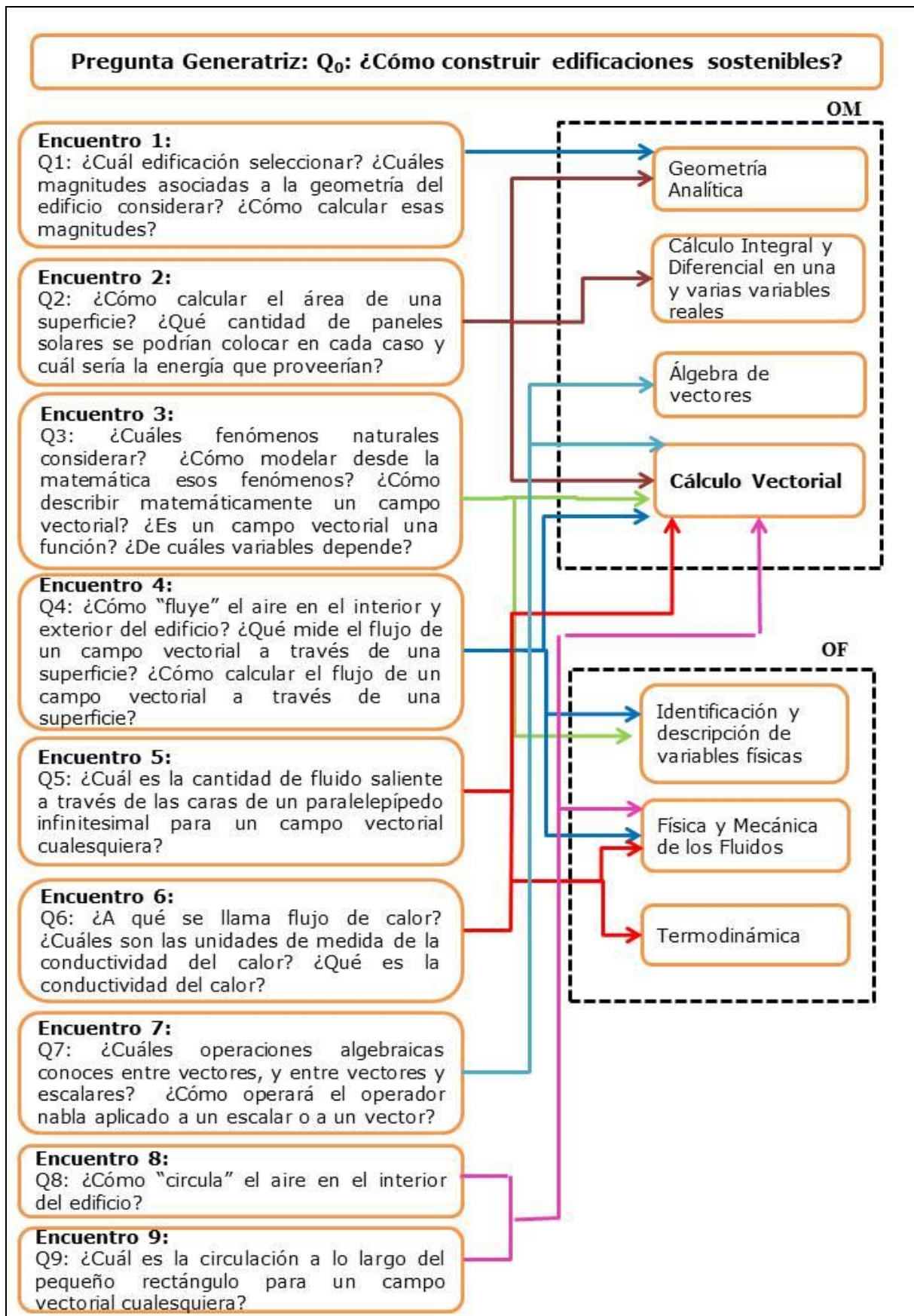
4.1. Organización Matemática y Organización Física estudiada

El REI experimentado permitió el estudio de diversas OM y OF en respuesta a las *preguntas derivadas* que se propusieron (cuadro 1).

La pregunta generatriz *¿Cómo construir edificaciones sostenibles?* dio lugar en una primera etapa a la selección de un edificio. Todos los alumnos acordaron estudiar sobre la construcción de un hangar. Se propusieron diversos diseños y se los modeló matemáticamente. Se estudió el cálculo de diversas magnitudes en relación al edificio que aportaran *respuestas parciales* a las preguntas Q_1 y Q_2 .

En *encuentros* posteriores y en relación a la *sustentabilidad* se decidió estudiar e investigar sobre los siguientes aspectos: "uso eficiente de los recursos naturales", "relación costo-beneficio", "uso de energías renovables", "cuidado del medio ambiente" y "aprovechamiento de los fenómenos naturales", entre otros, dando lugar a las preguntas derivadas Q_i , $i=3..9$.

Durante el REI se estudiaron "temas" de las OM: *Geometría Analítica*, *Cálculo Integral en una y varias Variables* y *Cálculo Vectorial*; conjuntamente con nociones básicas de las OF: *Física de Fluidos*, *Mecánica de los Fluidos* y *Termodinámica*.



Cuadro 1. Preguntas derivadas Q_i propuestas durante el encuentro i , para $i=1..9$. OM y OF estudiadas

4.2. Las Dialécticas

El resultado de la codificación de las *dialécticas* en los registros obtenidos se resumió en una tabla de doble entrada en la cual para cada una de ellas y para cada *etapa* se "tilda" si la misma se ha manifestado (cuadro 2). Esto permite interpretar el proceso de estudio experimentado y realizar el siguiente análisis.

REI		Dialécticas								
		D1 P & R	D2 I & C	D3 ASP & D	D4 ET & ST	D5 P & BT	D6 CN & CC	D7 C & P	D8 ET & IT	D9 D & R
Etapa 1	Encuentro 1	✓	✓	-	✓	✓	✓	✓	-	-
	Encuentro 2	✓	✓	-	✓	✓	✓	✓	-	✓
	Encuentro 3	✓	✓	-	✓	-	-	✓	✓	-
	Encuentro 4	✓	✓	-	✓	-	-	✓	-	✓
	Encuentro 5	✓	✓	-	✓	✓	✓	-	-	✓
	Encuentro 6	✓	✓	-	✓	-	✓	✓	✓	✓
	Encuentro 7	✓	✓	-	✓	-	✓	✓	-	-
	Encuentro 8	✓	✓	-	✓	-	✓	✓	-	-
	Encuentro 9	✓	✓	-	✓	-	✓	-	-	-
Etapa 2	Exposiciones	✓	✓	✓	✓	-	✓	-	-	✓
Etapa 3	Informes	✓	✓	✓	✓	-	✓	✓	✓	✓

Cuadro 2. Dialécticas codificadas en los registros obtenidos del REI experimentado

Como se observa en el cuadro 2, las *dialécticas de las preguntas y de las respuestas*, la *dialéctica de lo individual y de lo colectivo*, y la *dialéctica de entrar y salir de tema*, se encontraron durante todo el proceso de estudio. Esto exhibe la potencialidad y amplitud de la pregunta Q_0 en generar numerosas preguntas derivadas que dieran lugar a diversas "entradas y salidas de tema". Esto también se refleja en el cuadro 1.

La *dialéctica de las cajas negras y cajas claras*, y la *dialéctica de la conjetura y de la prueba*, se vivieron solo en algunos *encuentros* (cuadro 2). Los estudiantes fueron los que gestionaron, buscaron y decidieron cual información pasaría a formar parte del *medio*, y hasta donde sería pertinente el estudio de una *obra* (nivel de gris). Los principales *medias* utilizados por los estudiantes fueron una Guía de Estudio que les provee la Cátedra, libros, internet, software matemático y el profesor del curso. Consideramos que la limitación de la *dialéctica de las cajas negras y cajas claras* durante los *encuentros 3 y 4*, se debió en parte, a la intervención del profesor, en relación al estudio de las preguntas Q_3 *¿Cuáles fenómenos naturales considerar?* y Q_4 *¿Cómo "fluye" el aire en el interior y exterior del edificio?* (cuadro 1). Por otro lado, la limitación de la *dialéctica de la conjetura y de la prueba* durante los *encuentros 5 y 9* durante el estudio de las preguntas derivadas que se observan en el cuadro 1, se debió a la no puesta a prueba de alguno de los resultados teóricos utilizados por los estudiantes en los cálculos matemáticos. Esto principalmente ocurrió con las argumentaciones que prueban los resultados de los teoremas del Cálculo Vectorial (Teoremas de Green, Gauss y Stokes) encontrados por los estudiantes en los *medias* mencionados.

La *dialéctica del paracaidista y del buscador de trufas* estuvo presente en los primeros *encuentros* y en otro posterior en la *etapa 1* (cuadro 2). En el inicio del REI el profesor presenta la *pregunta generatriz* y los estudiantes se posicionan a gran distancia del problema, tal como lo haría un *paracaidista* para inspeccionar zonas de gran alcance. Proponen y acuerdan diversas formas para estudiarlo. Además, establecen consideraciones generales sobre el *edificio* a construir y sobre la *sustentabilidad*. Mencionan varios aspectos en relación a la sustentabilidad: "*uso eficiente de los recursos naturales*", "*eficiencia costo-beneficio*", "*materiales, forma, ubicación, clima*", "*uso de energías renovables*", "*cuidado del medio ambiente*", "*aprovechamiento de los fenómenos naturales*". En relación al edificio acuerdan seleccionar un "*hangar*". Para *modelar* el mismo, los estudiantes en actitud tal como lo haría un *paracaidista*, buscan diversos "tipos de hangares" y las distintas magnitudes posibles a considerar según sea el estilo de aeronave a guardar en el mismo. La presencia de *buscadores de trufas* se manifiesta en *encuentros* posteriores, cuando por ejemplo, los estudiantes realizan una búsqueda minuciosa en diversos *medias* en relación al estudio del *flujo de un campo de gradientes de temperatura*.

La *dialéctica de la "excripción" textual y de la "inscripción" textual*, tal como se observa en el cuadro 2, se codificó durante algunos *encuentros* y en la *etapa 3*. Su presencia estuvo vinculada con las *dialécticas de las cajas negras y cajas claras* y con la *dialéctica de la conjetura y de la prueba*. Los alumnos "extrañaron" información de los diversos *media* (D6 CN&CC) relativa a las OM y OF estudiadas y a la construcción de edificaciones y a la sustentabilidad. De esta información extraída, decidieron en qué nivel de "gris" transcribir la misma. Los resultados matemáticos encontrados por los estudiantes en los libros de texto y en la Guía de Estudio, en general fueron transcritos textualmente sin someterlos a prueba (D7 C&P).

La *dialéctica de la difusión y de la recepción* se categorizó durante algunos *encuentros* y especialmente durante la *etapa 2*, momento en el cual los grupos de trabajo exponen y defienden el estudio por ellos realizado.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un análisis de las *dialécticas* durante un REI codisciplinar experimentado en un curso de matemática en una Facultad de Ingeniería en la Universidad para la enseñanza del Cálculo Vectorial, en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Los resultados obtenidos de la experimentación muestran que en mayor o menor medida, todas las *dialécticas* funcionaron durante el REI. La *dialéctica del estudio y de la investigación*, la *dialéctica de lo individual y de lo colectivo*, y la *dialéctica de entrar y salir del tema*, son las que prevalecieron. Esto se debería por un lado a la amplitud de la pregunta generatriz Q_0 , cuya respuesta convoca al estudio de obras pertenecientes a diversas disciplinas. En menor medida se desarrollaron las *dialécticas de las cajas negras y cajas claras*, la *dialéctica de la conjetura y de la prueba*, y la *dialéctica del paracaidista y del buscador de trufas*. La limitación de estas dialécticas podría deberse a condicionamientos y restricciones encontrados en un análisis realizado en base a la *escala de codeterminación didáctica*, llevado a cabo sobre el presente REI codisciplinar (Costa, Arlego y Otero, 2014). En dicho análisis se observó que los principales condicionamientos se manifiestan principalmente en los niveles superiores de la escala. Es decir, se presentan restricciones sociales e institucionales, entre las

que se desatacan la monodisciplinaridad, la selección y distribución de los contenidos a estudiar, el calendario académico y el modo de evaluación y acreditación de las asignaturas.

Es importante finalmente destacar que el REI experimentado permitió el estudio de elementos centrales del *Cálculo Vectorial* conjuntamente con nociones básicas de *Física*, de *Mecánica de los Fluidos* y de *Termodinámica*, tal como se observó en el cuadro 1. Constituyendo así el REI codisciplinar propuesto una alternativa posible, a la enseñanza tradicional de la matemática y la física en carreras de ingeniería.

Referencias

Azcárate Giménez, C. y Camacho Machín, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2), 135.

Camarrera, G. P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación educativa*, 9 (48), 15-25. (Disponible en: <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=179414894003#> consulta Marzo 2011)

Costa, V. A. (2013). *Recorridos de Estudio e Investigación Codisciplinarios en la Universidad para la enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de Ingeniería*. Tesis doctoral en Enseñanza de las Ciencias, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas.

Costa, V. A., Arlego, M. y Otero, M. R. (2014). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. *REFIEDU. Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*, 7 (1), 20-40. http://webs.uvigo.es/refiedu/Refiedu/Vol7_1/REFIEDU_7_1_3.pdf

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz- Higuera, A. Estepa y F. J. García (eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica* (pp. 705-746). Universidad de Jaén. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8

Chevallard, Y. (2012). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. *12th International Congress on Mathematical Education*, 8-15 July, 2012, Seoul, Korea. Con acceso el 04-06-2013 <http://yves.chevallard.free.fr/> .

Chevallard, Y. (2013). *Journal du Seminaire TAD/IDD. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement* <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2012-2013-5.pdf> .

Dunn, J. W. y Barbanell, J. (2000). One model for an integrated math/physics course focusing on electricity and magnetism and related calculus topics. *American Journal of Physics*, 68 (8), 749-757. American Association of Physics Teachers.

Feynman, R., Leighton, R. B. y Sands, M. (1998). *Física: Electromagnetismo y materia*. Volumen 2. Reedición de Addison Wesley.

Kümmerer, B. (2002). Trying the imposible. Teaching Mathematics to Physicists and Engineers. En D. Holton (ed.), *The teaching and learning of*

mathematics at university level (pp. 321-334). An ICMI Study. Kluwer Academic Publishers New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow. <http://ebooks.kluweronline.com>.

Marsden, J. E. y Tromba, A. J. (2004). *Cálculo Vectorial*. Edición 5. Addison Wesley.

Moreno, M. M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 81-96). Córdoba, España, Universidad de Córdoba.

Otero, M. R., Fanaro, M. A., Córica, A. R., Llanos, V. C., Sureda, P. y Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Editorial Dunken.

Otero, M. R., Fanaro, M. A. y Llanos, V. C. (2013). La Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo y el Inquirir un análisis desde la enseñanza de la Matemática y la Física. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 8 (1), 77-89.

Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12. <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33511859004>

Willcox, K. y Bounova, G. (2004). Mathematics in Engineering: Identifying, Enhancing and Linking the Implicit Mathematics Curriculum. *Proceedings of the 2004 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition*, Copyright 2004. American Society for Engineering Education.

Zuñiga, S. L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (1), 145-155. <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33500107>.