Cálculo Numérico de la Solución del Problema de Poisson Mediante la Simulación del Proceso de Wiener

Cecilia Paciel[1], Gonzalo Hornos[1], Agustín Estramil[1], Fernando Binaghi[1], Leonardo Moreno[2] y Enrique Cabaña[3]

[1] Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, Universidad de la República, Uruguay.

[2] Instituto de Estadística, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, Universidad de la República, Uruguay.

[3] Instituto de Matemática y Estadística Prof. Rafael Laguardia, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay.

Palabras Claves: Movimiento Browniano, tiempo de llegada, proceso detenido, problema de Dirichlet, trayectoria browniana, montecarlo.

1 Introducción

Se plantea resolver numéricamente con R el Problema de Poisson [PP] mediante la simulación de su solución probabilística. Se busca la optimización del costo computacional a partir de distintos métodos para la solución del problema mencionado, implementando los algoritmos a partir de las funciones contenidas en R base. Dada la complejidad computacional del problema, se tendrán en cuenta funciones que permitan mejorar los tiempos de cálculo al utilizar estructuras de control.

El problema involucra la resolución de una ecuación en derivadas parciales con condición de borde, que si bien es de carácter multidimensional, esto es que existe para cualquier región abierta y acotada de un espacio vectorial de dimensión finita, será abordado únicamente en regiones del plano.

Sea D una región abierta y acotada en el plano, el PP está dado por:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= f(x,y) \quad \text{si } (x,y) \in D \\ u(x,y) &= g(x,y) \quad \text{si } (x,y) \in \partial D \end{aligned}$$

Una posible solución a este problema está dada por la suma de las soluciones de los Problema de Dirichlet [PD] tomando $f = 0$ y de Poisson con condición de borde nula.

2 Materiales y Métodos

Dado que para el PP no necesariamente se puede hallar una solución analítica exacta, lo cual depende de las funciones f y g, se suelen hacer aproximaciones numéricas de la verdadera solución.

Puesto que el problema que nos concierne puede ser resuelto como la suma de las soluciones del PD y del PP con condición de borde nula, se iniciará a partir de una aproximación numérica del PD propuesta en [2] y se implementarán simulaciones en R que permitan obtener una aproximación del PP con condición de borde nula.

Las soluciones probabilísticas de PP con condición de borde nula y PD, se definen a través de procesos de Wiener, detenidos en el borde de D y de su tiempo esperado de llegada a dicho borde. Estas soluciones involucran el cálculo de dos valores esperados. En el primer caso será estimado con un promedio muestral de tiempos de llegada de trayectorias del proceso de Wiener. En el segundo caso se promediarán los valores de la condición de borde evaluada en los puntos de llegada en la frontera de D. Se obtendán dichos promedios a partir de la simulación de trayectorias de los procesos de Wiener.

La simulación de las trayectorias se hará de al menos dos maneras y estas se compararán en cuanto a su eficiencia desde el punto de vista computacional. Las estimaciones se realizarán considerando casos en los que se conoce la solución analítica exacta del PP con el fin de compararlas, de forma de validar los procedimientos simulados.

Se pretende además construir una cota para el error global cometido y compararla de manera empírica con el verdadero error cometido, calculado como la diferencia de la solución exacta conocida y la aproximación.

Asimismo se comparará de forma empírica el rendimiento computacional de los métodos que serán propuestos, además de estimar el tiempo de cálculo y almacenamiento requerido por las simulaciones.

Referencias

1. Atkinson, K. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*, Second Edition, Wiley.

2. Estramil, A. (2017). *Simulación de la Solución Probabilística del Problema de Dirichlet (trabajo final de grado)*, Licenciatura en Estadística, Universidad de la República.

3. Granero, R. (2009) *Sobre algunas relaciones entre la probabilidad y las ecuaciones diferenciales.* (Trabajo del Máster en Matemáticas y Aplicaciones), Universidad Autónoma de Madrid.

4. Hwang, C; Mascagni, M; Given, J. (2003). *A Feynman–Kac path-integral implementation for Poisson's equation using an h-conditioned Green's function*, Mathematics and Computers in Simulation 62, pp.347–355.