El teorema de foliación simpléctica y la Grassmanniana restringida

Trabajo de iniciación a la investigación

Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Claudia Damaris Alvarado

Director: Dr. Eduardo H. Chiumiento

Abril 2017

Índice

1. Introducción

Un resultado fundamental para variedades de Poisson de dimensión finita es el teorema de foliación simpléctica. Este resultado muestra que una variedad de Poisson puede pensarse como unión disjunta de variedades simplécticas maximales, que quedan determinadas unívocamente por el corchete de Poisson. Cada una de estas variedades simplécticas se conocen como hojas simplécticas de la variedad de Poisson, y son subvariedades inmersas que integran a la llamada distribución característica de la variedad de Poisson. La demostración del teorema de foliación simpléctica consiste principalmente en aplicar el teorema de Stefan-Sussmann para integrar distribuciones singulares.

En el contexto de las variedades modeladas sobre espacios de Banach, A. Odzijewicz y T. Ratiu [12] definieron las variedades de Poisson de dimensión infinita. El principal punto de la definición es imponer una condición que asegure la existencia de campos Hamiltonianos, que de otra forma podrían no existir debido al simple hecho que en dimensión infinita los espacios pueden no ser reflexivos. En particular, se estudiaron las variedades de Poisson lineales de dimensión infinita, llamados espacios de Banach Lie-Poisson, que se caracterizan como preduales de álgebras de Lie invariantes para la representación coadjunta. Es interesante notar que la definición del caso lineal contiene ejemplos relacionados con otras ramas de la matemática, por ejemplo el predual de un álgebra de von Neumann es un espacio de Banach Lie-Poisson, así como también ciertos preduales de ideales simétricos.

Una pregunta natural es ver si vale un análogo al teorema de foliación simpléctica para espacios de Banach Lie-Poisson. Se puede definir una distribución característica similar al caso finito dimensional, aunque ahora el teorema de Stefan-Sussmann no puede aplicarse debido a que su demostración se centra en argumentos de dimensión que se pierden en el contexto de variedades de Poisson de dimensión infinita. Veremos que hay condiciones suficientes para construir hojas simplécticas en espacios de Banach-Lie Poisson, y estas hojas resultan órbitas coadjuntas.

Un ejemplo relevante de hoja simpléctica en un espacio de Banach-Lie Poisson es la Grassmanniana restringida. Esta Grassmanniana es un espacio homogéneo de dimensión infinita que desempeña un papel importante en diversas áreas de matemática y física. Está vinculada con los grupos de lazos [14], integrabilidad de ecuaciones del tipo KdV [17, 16]. Su estructura de variedad de Khäler fue estudiada en [19] y como variedad Riemanniana de dimensión infinita, el teorema de Hopf-Rinow fue demostrado en [3].

Los contenidos de este trabajo son los siguientes. En la sección 2 comenzamos repasando las definiciones de variedades simplécticas y variedades de Poisson en dimensión finita. Introducimos la distribución característica, y probamos el teorema de foliación simpléctica. Para dar parte de su demostración antes probamos el teorema de Stefan-Sussmann que caracteriza la integrabilidad de distribuciones singulares. En la sección 3 introducimos los espacios de Poisson en dimensión infinita, y en particular caracterizamos los espacios de Banach Lie-Poisson. Definimos la noción de hojas simplécticas, dando un método general para construirlas. La sección 4 trata de la Grassmanniana restringida. Probamos varias propiedades básicas de esta Grassmanniana, incluyendo diversas caracterizaciones y su estructura de variedad de Banach. En la sección 5 construímos un espacio de Banach Lie-Poisson donde la Grassmanniana restringida es una hoja simpléctica. Aquí resulta de importancia notar que la Grassmanniana restringida se puede caracterizar como una órbita coadjunta por una acción afín.

2. Variedades de Poisson finito dimensional

2.1. Variedades simplécticas

En esta sección trabajaremos con variedades M que posean dimensión finita.

Definición 2.1.1. *Una **estructura simpléctica** en una variedad diferenciable M está definida por una 2-forma Ω que satisface las siguientes propiedades:*

(i) *en todo punto z en M, Ω_z es no degenerada,*

(ii) *la 2-forma Ω es cerrada, i.e., $\mathbf{d}\Omega = 0$.*

*Luego, decimos que el par (M, Ω) es una **variedad simpléctica**, y que la 2-forma Ω es **simpléctica**.*

Ejemplo 2.1.2. El cilíndro $S^1 \times \mathbb{R}$ con coordenadas (θ, p) es una variedad simpléctica con $\Omega = d\theta \wedge dp$.

Ejemplo 2.1.3. Consideramos el espacio $\mathbb{R}^{2n}$, con coordenadas $x^1, ..., x^{2n}$, junto con la 2-forma diferencial

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{d}x^{n+i} \wedge dx^i,$$

es un variedad simpléctica.

Más generalmente, sea (V, Ω) un espacio vectorial simpléctico. El fibrado tangente de V podemos identificarlo con el fibrado trivial $V \times V$. Equipando cada fibra con una 2-forma igual a Ω, definimos una 2-forma diferencial en V, que llamaremos nuevamente Ω, la cual es cerrada ya que sus componentes en las cartas naturales de V determinadas por la elección de una base son constantes. Por lo tanto, el espacio vectorial simpléctico (V, Ω) puede ser considerado como una variedad simpléctica.

Ejemplo 2.1.4. La esfera S^2 de radio r es simpléctica con Ω el elemento de área estándar: $\Omega = r^2 \sin\theta d\theta \wedge d\varphi$.

Ahora recordaremos una serie de definiciones básicas que utilizaremos a lo largo del presente trabajo:

Definición 2.1.5. *Sea M variedad, $z \in M$.*

· *El **espacio tangente** a M en z es el siguiente conjunto de clases de equivalencia*

$$T_zM := \{\dot{\gamma}(0) : \ \gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M \text{ suave}, \ \gamma(0) = x_0\}.$$

*Luego, el **fibrado tangente** de M es la unión disjunta de los espacios tangentes,*

$$TM = \bigcup_{z \in M} T_zM.$$

*La proyección $\pi : TM \longrightarrow M$ es llamada la **proyección canónica**.*

· *El **espacio cotangente** a M en z, T_z^*M es el espacio dual de T_zM, i.e., $\alpha \in T_z^*M$ si y sólo si $\alpha : T_zM \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal. Luego, el **fibrado cotangente** está dado por la siguiente unión disjunta*

$$T^*M = \bigcup_{z \in M} T_z^*M.$$

· *Un **campo vectorial suave** en M es una función suave $X : M \longrightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = I_M$, donde π es la proyección canónica. Denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ al espacio de campos vectoriales en M.*

Observación 2.1.6. Como la variedad M tiene dimensión finita, observamos que podemos realizar la siguiente identificación

$$(T_z^*M)^* = T_z^{**}M \cong T_zM,$$

para z en M.

En lo que sigue nos concentraremos en el papel importante que juegan los campos vectoriales Hamiltonianos. Empecemos por definirlos.

Definición 2.1.7. *Sea (M, Ω) una variedad simpléctica. Un campo vectorial X en M se dice **Hamiltoniano** si existe una función $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\Omega_z(X(z), v) = \mathbf{d}h(z) \cdot v,$$

para todo $v \in T_zM$. En este caso, escribimos X_h en vez de X y h es llamada la función Hamiltoniana o el **Hamiltoniano** para el campo vectorial X.

Ahora bien, en toda variedad simpléctica es posible definir el ***corchete de Poisson*** de dos funciones $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\{f, g\}(z) = \Omega_z(X_f(z), X_g(z)). \tag{2.1}$$

Proposición 2.1.8. *Si φ_t es el flujo de un campo vectorial Hamiltoniano X_h entonces*

$$\varphi_t^*\{f, g\} = \{\varphi_t^* f, \varphi_t^* g\}$$

para toda $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, donde $\mathcal{C}^\infty(M)$ es el espacio de funciones suaves en M.

Corolario 2.1.9. *Se cumple la siguiente identidad de derivación:*

$$X_h[\{f, g\}] = \{X_h[f], g\} + \{f, X_h[g]\} \tag{2.2}$$

donde usamos la notación $X_h[f] = L_{X_h}[f]$ para la derivada de f en la dirección de X_h.

Demostración. Derivando la igualdad

$$\varphi_t^*\{f, g\} = \{\varphi_t^* f, \varphi_t^* g\}$$

con respecto a t en $t = 0$, donde φ_t es el flujo de X_h. El lado izquierdo derivado claramente nos da el lado izquierdo de (2.2).

Para conseguir el lado derecho primero notemos que dado $z \in M$, la forma bilineal $\Omega_z : T_zM \times T_zM \longrightarrow \mathbb{R}$ no degenerada define un isomorfismo

$$\Omega_z^\flat : T_zM \longrightarrow T_z^*M.$$

Con esto en mente, observamos que

$$\begin{aligned}
\Omega_z^\flat\left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, X_{\varphi_t^* f}(z)\right) &= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, \Omega_z^\flat X_{\varphi_t^* f}(z) \\
&= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, \mathbf{d}(\varphi_t^* f)(z) \\
&= (\mathbf{d}X_h[f])(z) \\
&= \Omega_z^\flat(X_{X_h[f]}(z)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, X_{\varphi_t^* f}(z) = X_{X_h[f]}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, \{\varphi_t^* f, \varphi_t^* g\} &= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, \Omega_z(X_{\varphi_t^* f}(z), X_{\varphi_t^* g}(z)) \\
&= \Omega_z(X_{X_h[f]}(z), X_g(z)) + \Omega_z(X_f(z), X_{X_h[g]}(z)) \\
&= \{X_h[f], g\}(z) + \{f, X_h[g]\}(z).
\end{aligned}$$

□

Recordemos que un ***álgebra de Lie*** sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{K}$ provisto de una función bilineal

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}, \\
(x, y) &\longmapsto [x, y],
\end{aligned}$$

cumpliendo:

(i) $[x, y] = -[y, x]$ (antisimetría),

(ii) $[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (identidad de Jacobi).

En tal caso, la función $[\cdot, \cdot]$ se llama ***corchete de Lie***.

Si $\mathfrak{h}$ es otra álgebra de Lie, un ***morfismo de álgebras de Lie*** es una función $\mathbb{K}$-lineal

$$\begin{aligned}
\psi : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{h} \\
[x, y] &\longmapsto \psi([x, y]) = [\psi(x), \psi(y)].
\end{aligned}$$

Proposición 2.1.10. *Las funciones $\mathcal{C}^\infty(M)$ forman un álgebra de Lie bajo el corchete de Poisson.*

Demostración. Como $\{f,g\}$ es claramente una bilineal real antisimétrica, lo único que falta chequear es la identidad de Jacobi. De

$$\{f,g\} = \Omega(X_f, X_g) = \mathbf{d}f(X_g) = X_g[f]$$

tenemos

$$\{\{f,g\},h\} = X_h[\{f,g\}]$$

y por el Corolario anterior nos queda

$$\begin{aligned}\{\{f,g\},h\} &= \{X_h[f],g\} + \{f, X_h[g]\}\\ &= \{\{f,h\},g\} + \{f,\{g,h\}\},\end{aligned}$$

la cual es la identidad de Jacobi.

□

Sabemos que $(\mathfrak{X}(M), [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie donde el corchete $[\cdot,\cdot]$ está dado por: para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$

$$[X,Y](f) = X(Y[f]) - Y(X[f])).$$

Proposición 2.1.11. *El conjunto de los campos vectoriales Hamiltonianos en M es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$ y*

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}. \tag{2.3}$$

Demostración. Sea $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}[X_f, X_g][h] &= X_f X_g[h] - X_g X_f[h]\\ &= X_f[\{h,g\}] - X_g[\{h,f\}]\\ &= \{\{h,g\},f\} - \{\{h,f\},g\}\\ &= -\{h,\{f,g\}\}\\ &= -X_{\{f,g\}}[h].\end{aligned}$$

□

Observación 2.1.12. Por los resultados vistos, podemos ver que si Ω es una 2-forma no degenerada con el corchete de Poisson definido como en (2.1), entonces el corchete de Poisson satisface la identidad de Jacobi si y sólo si Ω es cerrada. En efecto, sean $f,g,h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ y X_f, X_h, X_g sus respectivos campos vectoriales Hamiltonianos

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}\Omega)(X_f, X_g, X_h) &= X_f[\Omega(X_g, X_h)] - X_g[\Omega(X_f, X_h)] + X_h[\Omega(X_f, X_g)]\\ &\quad - \Omega([X_f, X_g], X_h) + \Omega([X_f, X_h], X_g) - \Omega([X_g, X_h], X_f)\\ &= X_f[\{g,h\}] - X_g[\{f,h\}] + X_h[\{f,g\}]\\ &\quad - \Omega(-X_{\{f,g\}}, X_h) + \Omega(-X_{\{f,h\}}, X_g) - \Omega(-X_{\{g,h\}}, X_f)\\ &= \{\{g,h\},f\} - \{\{f,h\},g\} + \{\{f,g\},h\}\\ &\quad + \{\{f,g\},h\} - \{\{f,h\},g\} + \{\{g,h\},f\}\\ &= \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} + \{\{f,g\},h\}\\ &\quad + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} + \{\{f,g\},h\}.\end{aligned}$$

Por lo que, $\mathbf{d}\Omega = 0$ si y sólo si $\{\cdot,\cdot\}$ cumple la identidad de Jacobi.

2.2. Variedades de Poisson

Dotar a una variedad M de una estructura de Poisson es dotar su espacio de funciones $\mathcal{C}^\infty$ de cierta estructura algebraica. Para esto, es necesario recurrir a la estructura del álgebra de Lie para poder definirla.

Definición 2.2.1. *Un* ***corchete de Poisson*** *(o una* ***estructura de Poisson****) en una variedad M es una operación bilineal $\{\cdot,\cdot\}$ en $\mathcal{C}^\infty(M)$ tal que:*

(i) $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ *es un álgebra de Lie;*

(ii) $\{\cdot,\cdot\}$ *es una derivación en cada factor, es decir,*

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\},$$

para toda $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Una variedad M dotada con un corchete de Poisson en $\mathcal{C}^\infty(M)$ es llamada una ***variedad de Poisson****.*

Denotamos a la variedad de Poisson por $(M, \{\cdot,\cdot\})$ o simplemente M si no hay confusión.

Ejemplo 2.2.2. Como vimos en la sección anterior, *toda variedad simpléctica es una variedad de Poisson*. En efecto, sea (P, Ω) una variedad simpléctica, el corchete de Poisson está definido por la forma simpléctica como sigue

$$\{f, g\}(z) = \Omega(X_f(z), X_g(z)),$$

para $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \in M$.

La condición (ii) de la Definición 2.2.1 se cumple por la propiedad de derivación de campos vectoriales

$$\{fg, h\} = X_h[fg] = fX_h[g] + gX_h[f] = f\{g, h\} + \{f, h\}g$$

La estructura de Poisson definida de esta forma en M se dice que está *asociada* a la estructura simpléctica definida por Ω.

Ejemplo 2.2.3. *El corchete de Lie-Poisson.* Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{g}^*$ su espacio vectorial dual. Denotamos al corchete de dos elementos X e Y en $\mathfrak{g}$ por $[X, Y]$. Si f y $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$, para todo punto $x \in \mathfrak{g}$, $\mathbf{d}f(x)$ y $\mathbf{d}g(x)$ son dos formas lineales en $\mathfrak{g}^*$ que podemos considerar como elementos de $\mathfrak{g}$. Entonces, $\mathfrak{g}^*$ es una variedad de Poisson con respecto a cada ***corchete de Lie-Poisson*** $\{\cdot,\cdot\}_+$ y $\{\cdot,\cdot\}_-$ definido mediante

$$\{f, g\}_\pm(x) = \pm\langle x, [\mathbf{d}f(x), \mathbf{d}g(x)]\rangle, \tag{2.4}$$

para todo $x \in \mathfrak{g}^*$. Es fácil ver que se cumplen las propiedades del corchete de Poisson. La bilinealidad y la antisimetría son inmediatas. La propiedad de derivación del corchete se sigue de la regla de Leibniz

$$\mathbf{d}(fg)(x) = f(x)\mathbf{d}g(x) + \mathbf{d}f(x)g(x).$$

La identidad de Jacobi para el corchete de Lie-Poisson se sigue de la identidad de Jacobi para el corchete de Lie y la fórmula

$$\pm\mathbf{d}\{f,g\}_\pm = [\mathbf{d}f(x),\mathbf{d}g(x)] - D^2f(x)\left(\mathrm{ad}^*_{\mathbf{d}g}(x),\cdot\right) + D^2g(x)\left(\mathrm{ad}^*_{\mathbf{d}f}(x),\cdot\right), \qquad (2.5)$$

donde para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, tenemos que $\mathrm{ad}_\xi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ denota el mapeo $\mathrm{ad}_\xi(\eta) = [\xi,\eta]$ y $\mathrm{ad}^*_\xi : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ es su dual.

Ejemplo 2.2.4. *El corchete de Lie-Poisson modificado.* Bajo las mismas hipótesis del ejemplo anterior, sea Θ un cociclo simpléctico del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, i.e., una forma bilineal antisimétrica en $\mathfrak{g}$ que satisface, para toda terna (X,Y,Z) de elementos en $\mathfrak{g}$,

$$\Theta(X,[Y,Z]) + \Theta(Y,[Z,X]) + \Theta(Z,[X,Y]) = 0. \qquad (2.6)$$

Entonces, para cualquier $f,g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$, y todo $x \in \mathfrak{g}^*$, tomamos

$$\{f,g\}_\Theta(x) = \langle x, [\mathbf{d}f(x),\mathbf{d}g(x)]\rangle - \Theta(\mathbf{d}f(x),\mathbf{d}g(x)).$$

Es fácil ver que así definido, este corchete satisface la Definición 2.2.1. La estructura de Poisson definida en $\mathfrak{g}^*$ se denomina la ***estructura de Poisson canónica modificada*** o la ***estructura de Lie-Poisson modificada*** de $\mathfrak{g}^*$ asociada con el cociclo simpléctico Θ. Cuando el cociclo es cero, la estructura es la estructura de Lie-Poisson de $\mathfrak{g}^*$ discutida en el ejemplo anterior.

Este corchete no es el corchete asociado a ninguna estructura simpléctica en $\mathfrak{g}^*$, por lo que es un ejemplo del concepto más general de una variedad de Poisson.

Ejemplo 2.2.5. *El corchete de Lie-Poisson "Frozen".* Fijando (o "freeze") $\nu \in \mathfrak{g}^*$ definimos para cualquier $f,g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ el corchete

$$\{f,g\}^\nu_\pm(x) = \pm\langle \nu, [\mathbf{d}f(x),\mathbf{d}g(x)]\rangle.$$

Las propiedades de un corchete de Poisson se cumplen como en el caso del corchete de Lie-Poisson, la única diferencia es que (2.5) nos queda

$$\pm\mathbf{d}\{f,g\}^\nu_\pm = -D^2f(\nu)\left(\mathrm{ad}^*_{\mathbf{d}g}(x),\cdot\right) + D^2g(\nu)\left(\mathrm{ad}^*_{\mathbf{d}f}(x),\cdot\right).$$

Ahora bien, en forma más general tenemos la siguiente relación entre los campos vectoriales Hamiltonianos y el corchete de Poisson que surge como consecuencia directa de que $\{\cdot,f\}$ es una derivación.

Proposición 2.2.6. *Sea M una variedad de Poisson. Si $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$, entonces existe un único campo vectorial X_h en M tal que*

$$\{g,h\} = X_h[g] = -X_g[h] = \mathbf{d}g(X_h) = -\mathbf{d}h(X_g), \qquad (2.7)$$

para todo $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Llamamos X_h el ***campo vectorial Hamiltoniano*** *de h.*

Antes de seguir, veamos que el mapeo $f \longmapsto (\mathbf{d}f)(x)$ de $\mathcal{C}^\infty(M)$ en T^*_xM es suryectivo.

Lema 2.2.7. *Para todo $\alpha \in T^*M$ y $z \in M$, existe $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $\alpha_z = (\boldsymbol{d}f)(z)$.*

Demostración. Consideremos una carta $\varphi : U \subseteq M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ suave y $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\psi(z) = \begin{cases} \varphi(z) & z \in V_1 \\ 0 & z \in V_2^c \end{cases}$$

donde, $V_1 \subset V_2 \subset M$ abiertos. Así, tomamos

$$f = \alpha \circ (D\varphi)^{-1} \circ \psi.$$

Como ψ y φ son funciones suaves, tenemos que $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y dado $z \in V_1$

$$(\mathbf{d}f)_z = \alpha \circ (D\varphi)^{-1}_{\varphi(z)} \circ (D\psi)_z = \alpha_z \circ (D\varphi)^{-1}_{\varphi(z)} \circ (D\varphi)_z = \alpha_z$$

□

De (2.7) vemos que el corchete depende de f sólo a través de $\mathbf{d}f$. Observemos que la función $(f,g) \longmapsto \{f,g\}$ es bilineal y antisimétrica. Así, dado $z \in M$, $\{f,g\}(z)$ es una función bilineal antisimétrica de $(\mathbf{d}f)(z)$ y $(\mathbf{d}g)(z)$. Luego, existe un $w \in \Lambda^2 TM$ tal que

$$\{f,g\} = w(\mathbf{d}f, \mathbf{d}g)$$

En coordenadas locales (x^i) de M,

$$w(\mathbf{d}f, \mathbf{d}g) = w^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}. \tag{2.8}$$

w es llamado el *bivector de Poisson* de $(M, \{\cdot,\cdot\})$.

Las componentes de w en una carta son corchetes de Poisson de las funciones de coordenadas locales, que son suaves, por lo que w es suave.

Ahora bien, w tiene asociado un homomorfismo

$$\begin{aligned} \sharp : T^*M &\longrightarrow TM \\ \alpha &\longmapsto \alpha^\sharp, \end{aligned}$$

donde $\alpha^\sharp$ está definido por

$$\beta(\alpha^\sharp) = w(\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta \in T^*M).$$

Observación 2.2.8. Notemos que, en particular, para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tenemos $(\mathbf{d}f)^\sharp = X_f$. En efecto,

$$\beta_z((\mathbf{d}f)^\sharp) = (\mathbf{d}g)(z)((\mathbf{d}f)^\sharp) = w(\mathbf{d}f, \mathbf{d}g(z)) = \mathbf{d}g(z)(X_f).$$

Volviendo a la representación en coordenadas, tenemos que $\{x^i, x^j\} = w^{ij}$. Luego, la identidad de Jacobi se cumple si

$$\{\{x^i, x^j\}, x^k\} + \{\{x^k, x^i\}, x^j\} + \{\{x^j, x^k\}, x^i\} = 0$$

que es equivalente a

$$w^{hi}\partial_h w^{jk} + w^{hj}\partial_h w^{ki} + w^{hk}\partial_h w^{ij} = 0. \tag{2.9}$$

Con esto en mente, podemos decir que esta asociación entre el corchete y el bivector es en cierta forma invertible, es decir, dado un $w : T^*M \times T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ arbitrario, le asignamos el corchete $\{\cdot,\cdot\}_w$ definido como $\{f,g\} = w(\mathbf{d}f, \mathbf{d}g)$. Por lo tanto, una estructura de Poisson en M es equivalente a un bivector w que satisfaga (2.9), por lo que también podemos notar a la variedad de Poisson como el par (M, w).

En base a lo desarrollado hasta ahora, la siguiente observación es de interés.

Observación 2.2.9. Sea (M, w) una variedad de Poisson con w su bivector de Poisson tal que es no degenerado. Entonces, M es una variedad simpléctica con la 2-forma dada por

$$\Omega_z(X_f(z), X_g(z)) = \{f,g\}(z) = w(\mathbf{d}f, \mathbf{d}g).$$

Como w es no degenerado tenemos que el homomorfismo asociado

$$\sharp_z : T_z^*M \longrightarrow T_zM$$

es suryectivo. Así, para todo $v \in T_zM$ existe α_z tal que

$$v = \sharp_z\alpha_z = \sharp_z(\mathbf{d}f)(z) = X_f(z)$$

para algún $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Verifiquemos que Ω_z está bien definida, en efecto: sean $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tales que $X_{f_1}(z) = X_{f_2}(z)$ y $X_{g_1}(z) = X_{g_2}(z)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\Omega_z(X_{f_1}(z), X_{g_1}(z)) &= \{f_1, g_1\}(z) \\
&= (\mathbf{d}f_1)(z)(X_{g_1}(z)) \\
&= (\mathbf{d}f_1)(z)(X_{g_2}(z)) \\
&= -(\mathbf{d}g_2)(z)(X_{f_1})(z) \\
&= -(\mathbf{d}g_2)(z)(X_{f_2})(z) \\
&= (\mathbf{d}f_2)(z)(X_{g_2})(z) \\
&= \{f_2, g_2\}(z) \\
&= \Omega_z(X_{f_2}(z), X_{g_2}(z))
\end{aligned}$$

Por otro lado, la antisimetría de Ω se obtiene de la antisimetría de w y por la Observación 2.1.12, Ω es cerrada. Ya vimos en la fórmula (2.8) que Ω así definida es suave, por lo que faltaría probar que es no degenerada, i.e., si $\Omega_z(v, w) = 0 \; \forall w \in T_z\Sigma$ entonces $v = 0$. Veamos esto, para todo $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}
0 &= \Omega_z(v, X_g(z)) \\
&= (\mathbf{d}g)(z)(v),
\end{aligned}$$

luego, por el Lema 2.2.7, esta igualdad nos dice que $\alpha(v) = 0$, $\forall \alpha \in T_z^*M$, por lo que $v = 0$. Así, Ω es no degenerada. Por lo tanto, (M, Ω) es una variedad simpléctica.

Definición 2.2.10. *Una función $\varphi : (M_1, w_1) \longrightarrow (M_2, w_2)$ entre dos variedades de Poisson es llamada **función de Poisson** o **morfismo de Poisson** si para toda $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$ tenemos*

$$\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_1 = \{f, g\}_2 \circ \varphi, \tag{2.10}$$

*o, equivalentemente, los campos tensoriales w_1 y w_2 están φ-relacionados. Más aún, si φ es un difeomorfismo lo llamaremos un **automorfismo de Poisson**.*

Definición 2.2.11. *Sean M_1, M_2 dos variedades y sea $f : M_1 \longrightarrow M_2$ función suave. Dado $z \in M$, la **tangente a** f **en** z es la función*

$$T_z f : T_z M_1 \longrightarrow T_{f(z)} M_2, \quad T_z f(\dot{\gamma}(0)) = (\dot{\overline{f \circ \gamma}})(0)$$

*. La **tangente de** f es la función*

$$Tf : TM_1 \longrightarrow TM_2, \quad Tf(z, \dot{\gamma}(0)) = (f(z), T_z f(\dot{\gamma}(0)))$$

Volviendo a la Definición 2.2.10, una propiedad importante de las funciones de Poisson es que mandan flujos Hamiltonianos en flujos Hamiltonianos. Escribamos correctamente esto:

Proposición 2.2.12. *Sea $f : M_1 \longrightarrow M_2$ una función de Poisson y dada $h \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$. Si φ_t es el flujo de X_h y ψ_t es el flujo de $X_{h\circ f}$, entonces*

$$\varphi_t \circ f = f \circ \psi_t \quad \text{y} \quad Tf \circ X_{h\circ f} = X_h \circ f.$$

Recíprocamente, si f es una función de Poisson de M_1 en M_2 y para toda $h \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$ los campos vectoriales Hamiltonianos $X_{h\circ f} \in \mathfrak{X}(M_1)$ y $X_h \in \mathfrak{X}(M_2)$ están f-relacionados, i.e.,

$$Tf \circ X_{h\circ f} = X_h \circ f,$$

entonces f es de Poisson.

Demostración. Antes de comenzar, observemos que si φ_t es un flujo en la variedad de Poisson M y sea $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ entonces para cualquier $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, U abierto en M,

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t) = \{f, h\} \circ \varphi_t = \{f \circ \varphi_t, h\}. \tag{2.11}$$

si y sólo si φ_t es el flujo de X_h. En efecto, sea $z \in M$, entonces

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t)(z) = \frac{d}{dt} f(\varphi_t(z)) = \mathbf{d}f(\varphi_t(z)) \frac{d}{dt}\varphi_t(z),$$

por otro lado,

$$\{f, h\} \circ \varphi_t(z) = \{f, h\}(\varphi_t(z)) = \mathbf{d}f(\varphi_t(z))(X_h(\varphi_t(z))).$$

Así, las dos expresiones son iguales para cualquier $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ si y sólo si

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(z) = X_h(\varphi_t(z)),$$

y esto vale para todo $z \in M$ por el Teorema de Hahn-Banach. Es decir, φ_t es el flujo de X_h.

Recíprocamente, si φ_t es el flujo de X_h, tenemos

$$X_h(\varphi_t(z)) = \frac{d}{dt}\varphi_t(z),$$

por lo que, por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt}f(\varphi_t(z)) = df(\varphi_t(z))\frac{d}{dt}\varphi_t(z) = df(\varphi_t(z))X_h(\varphi_t(z)) = \{f, h\}(\varphi_t(z)).$$

Por otro lado,

$$X_h(\varphi_t(z)) = T_z\varphi_t(X_h(z)),$$

y por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(\varphi_t(z)) &= \mathbf{d}f(\varphi_t(z))(X_h(\varphi_t(z))) \\
&= \mathbf{d}f(\varphi_t(z))(T_z\varphi_t(X_h(z))) \\
&= \mathbf{d}(f \circ \varphi_t)(z)(X_h(z)) \\
&= \{f \circ \varphi_t, h\}(z).
\end{aligned}$$

Ahora bien (2.11) junto con la Definición 2.2.10 nos dice que para cualquier $g \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$ y $z \in M_1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}g((f \circ \psi_t)(z)) &= \frac{d}{dt}(g \circ f)(\psi(z)) \\
&= \{g \circ f, h \circ f\}(\psi(z)) \\
&= \{g, h\}(f \circ \psi_t)(z)
\end{aligned}$$

es decir, $(f \circ \psi_t)(z)$ es una curva integral de X_h en M_2 sobre el punto $f(z)$. Como $(\varphi \circ f)(z)$ es otra curva integral de X_h, la unicidad de curvas integrales implica

$$(f \circ \psi_t)(z) = (\varphi \circ f)(z).$$

Derivando esta igualdad con respecto a t obtenemos la relación $Tf \circ X_{h\circ f} = X_h \circ f$.

Ahora, supongamos que para cualquier $h \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$ tenemos $Tf \circ X_{h\circ f} = X_h \circ f$. Luego, por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
X_{h\circ f}[F \circ f](z) &= \mathbf{d}F(f(z))(T_zf(X_{h\circ f}(z))) \\
&= \mathbf{d}F(f(z))(X_h(f(z))) \\
&= X_h[F](f(z)).
\end{aligned}$$

Así, para toda $g \in \mathcal{C}^\infty(M_2)$,

$$\{g, h\} \circ f = f^*\left(X_h[g]\right) = X_{h\circ f}[f^*g] = \{g \circ f, h \circ f\},$$

por lo que, f es de Poisson.

□

2.3. Foliación simpléctica

Sea M una variedad de dimensión n. Primero daremos una serie de definiciones básicas sobre distribuciones para luego concentrarnos en la *distribución característica* y en el rol importante que juega el conjunto de los campos vectoriales Hamiltonianos.

Definición 2.3.1. *Un conjunto de subespacios vectoriales* $\Delta(M) = \{\Delta_{z_0}(M)\}$ *del espacio tangente* $T_{z_0}M$ *es llamada una* ***distribución general****. Dicha distribución se dice que es* ***diferenciable*** *si localmente alrededor de cada punto* $z_0 \in M$ *existe un número finito de campos vectoriales diferenciables* $X_1, ..., X_s \in \Delta(M)$*, tales que* $\Delta_{z_0}(M) = span\{X_1(z_0), ..., X_s(z_0)\}$.

Definición 2.3.2. *Se define una* ***integral*** *de la distribución* $\Delta(M)$ *como un par* (N, h) *donde* N *es una variedad conexa y* h *una inmersión* $h : N \longrightarrow M$ *(*$\boldsymbol{d}h_z : T_zN \longrightarrow T_{h(z)}M$ *inyectiva) tal que* $T_z(h(N)) \subseteq \Delta_z(M)$*. Dicha integral se denomina* ***integral maximal*** *si* $T_z(h(N)) = \Delta_z(M)$*. Una* ***subvariedad integral*** *de* S *es una subvariedad conexa* N *inmersa en* M *tal que* (N, i_N) *es una integral.*

Definición 2.3.3. *Una distribución es* ***completamente integrable*** *si para todo* $z \in M$*, existe una integral maximal* (N, h) *de* $\Delta(M)$ *tal que* $z \in h(N)$*. A* (N, h) *se le llama* ***hoja*** *de* Δ *en* z.

Definición 2.3.4. *Una distribución se dice* ***involutiva*** *si dados* $X, Y \in \Delta(M)$ *entonces* $[X, Y] \in \Delta(M)$*, i.e.,* $X(z), Y(z) \in \Delta_z(M)$*, para todo* $z \in M$.

Definición 2.3.5. *Consideramos* χ_0 *una familia de campos vectoriales sobre* M*. Se define la* ***órbita*** *de* $z \in M$ *de la familia* χ_0 *como el conjunto de puntos de* M *alcanzables desde* z *a tramos por trayectorias de esta familia, es decir:*

$$\Sigma_z = \{\varphi_{k,t_k} \circ \cdots \circ \varphi_{1,t_1}(z) : \ k \geq 1, \ t_1, ..., t_k \in \mathbb{R}\}$$

donde φ_{j,t_j} *es el flujo del campo vectorial* X_j.

Observación 2.3.6. La relación z_1 *pertenece a la órbita de* z es una relación de equivalencia en M. Luego, M es unión disjunta de sus órbitas.

Volviendo a la Definición 2.3.1, tomamos $\rho(z) = \dim \Delta_z$, $z \in M$. Definimos a $\rho(z)$ como el ***rango*** de $\Delta(M)$ en z. Claramente, si $\Delta(M)$ es diferenciable $\rho(z)$ es una función semicontinua inferior, ya que $\rho(z)$ no puede decrecer en un entorno de z. En el caso $\rho(z) = cte$, $\Delta(M)$ es una distribución en el sentido usual, y la llamamos ***distribución regular***. En el caso general, $z \in M$ será un ***punto regular*** si z es un máximo local de $\rho(z)$ o, equivalentemente, $\rho(z) = cte$ en un entorno abierto de z. Todos los demás puntos de M son llamados ***puntos singulares*** de $\Delta(M)$. El conjunto $\mathcal{D}$ de puntos regulares de $\Delta(M)$ es claramente abierto y, además, denso en M ya que, si $z_0 \in M \setminus \mathcal{D}$, y U es cualquier entorno de z_0, U contiene puntos regulares ($\rho|_U$ debe tener un máximo ya que es una función a valores enteros y acotada) i.e., $z_0 \in \overline{\mathcal{D}}$. Pero $\mathcal{D}$ no puede ser conexo, como se verá en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3.7. $M = \mathbb{R}^2$, $\Delta_{(x,y)}(M) = \mathrm{span}\{\frac{\partial}{\partial x}, \varphi(y)\frac{\partial}{\partial y}\}$, donde $\varphi(y)$ es una función $\mathcal{C}^\infty$ que se anula para $y \leq 0$, y es positiva para $y > 0$ (ejemplo: $\varphi(y) = 0$ para $y \leq 0$, y $\varphi(y) = e^{-(1/y^2)}$ para $y > 0$). Entonces los puntos singulares son todo el eje x, y las componentes conexas de $\mathcal{D}$ son los semiplanos $y > 0$ (donde $\rho = 2$), e $y < 0$ (donde $\rho = 1$).

En el caso regular, el clásico Teorema de Frobenius nos da una condición necesaria y suficiente para caracterizar una distribución completamente integrable. Sin embargo, como veremos en el siguiente ejemplo proporcionado por Sussmann, este teorema no se cumple para el caso general.

Ejemplo 2.3.8. $M = \mathbb{R}^2$, $\Delta_{(x,y)}(M) = \{\frac{\partial}{\partial x}, \varphi(x)\frac{\partial}{\partial y}\}$ siendo φ la misma función definida en el ejemplo anterior. Vemos que la condición de involutividad se cumple ya que tenemos

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \varphi(x)\frac{\partial}{\partial y}\right] = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0, \\ \frac{\partial \ln(\varphi)}{\partial x}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial y} & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

Sin embargo, no existen hojas que pasen sobre los puntos del eje y.

Pero vienen Sussmann y Stefan y muy copadamente encuentran una simple condición extra que garantiza la integrabilidad completa en todos los casos. Esta condición es la de *invarianza* de una distribución.

Definición 2.3.9. *Una distribución general $\Delta(M)$ se dice χ_0-**invariante** (o sólo invariante) si existe un conjunto χ_0 de campos vectoriales en M tal que $\forall z \in M$,*

$$\operatorname{span}\{X(z)\}_{X\in\chi_0} = \Delta_z(M),$$

y para todo $X \in \chi_0$, $\forall t$, $|t| < \varepsilon$, ($\varepsilon > 0$) y $\forall z \in M$ tal que $\varphi_t(z)$ está definido, φ_t el flujo del campo vectorial X, tenemos

$$T_z\varphi_t(\Delta_z(M)) = \Delta_{\varphi_t(z)}(M). \tag{2.12}$$

Por ejemplo, esta condición se ve fácilmente que se satisface en el Ejemplo 2.3.7 ya que las orbitas de los campos vectoriales de $\Delta(M)$ se encuentran en las hojas. (Las orbitas de $\varphi(x)\frac{\partial}{\partial y}$ sobre $(x_0, y_0 \leq 0)$ son puntos, y sobre $(x_0, y_0 > 0)$ son semirectas verticales). Sin embargo, en el Ejemplo 2.3.8, la condición (2.12) no se cumple para traslaciones paralelas al eje x y que cruzan el eje y.

Ahora bien, como dijimos, veremos el rol importante que jugarán los campos vectoriales Hamiltonianos en la estructura de Poisson. Para esto definimos el siguiente conjunto:

$$S_{z_0}(M) = \{v \in T_{z_0}M : \; \exists f \in \mathcal{C}^\infty(M), \; X_f(z_0) = v\}, \quad z_0 \in M. \tag{2.13}$$

Es obvio que $S(M) = \{S_{z_0}(M)\}$ dada por la fórmula (2.13) es una distribución diferenciable, y esta es la llamada ***distribución característica*** de la estructura de Poisson w.

Ahora asociemos un poco esto con lo que hablábamos antes. Dada una variedad de Poisson (M, w), si miramos un poquito esto, salta enseguida que la distribución característica no es otra cosa que la imagen del homomorfismo $\sharp_z : T_z^*M \longrightarrow T_zM$ asociado al bivector w, es decir,

$$\sharp_z(T_z^*M) = S_z(M),$$

entonces

$$\sharp(T^*M) = S(M).$$

Así, el rango del bivector w_z es la dimensión del espacio $S_z(M)$ y lo llamamos el ***rango*** de la estructura de Poisson en z.

Observación 2.3.10. De la antisimetría de w, sabemos que el rango de w en un punto z es un entero par. Este entero depende del punto z en M. Por esta razón, en general, la distribución característica no es un subfibrado vectorial de TM.

Antes de pasar a uno de los resultados importantes de esta distribución, daremos algunas definiciones y proposiciones técnicas que luego utilizaremos.

Definición 2.3.11. *Una subvariedad inyectivamente inmersa $i : S \longrightarrow M$ se denomina una **inmersión de Poisson** si cualquier campo vectorial Hamiltoniano definido en un subconjunto abierto de M que contiene a $i(S)$ está en $R(T_z i)$ para todo punto $i(z)$ con $z \in S$.*

Esto es equivalente al siguiente resultado:

Proposición 2.3.12. *Una inmersión $i : S \longrightarrow M$ es Poisson si y sólo si satisface la siguiente condición: si $f, g : V \subseteq S \longrightarrow \mathbb{R}$, donde V es un abierto de S, y si $\bar{f}, \bar{g} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ son extensiones de $f \circ i^{-1}, g \circ i^{-1} : i(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ a un entorno abierto U de $i(V)$ en M, entonces $\{\bar{f}, \bar{g}\} \mid_{i(V)}$ está bien definido y es independiente de las extensiones. La subvariedad inmersa S está, por lo tanto, dotada con una estructura de Poisson, y $i : S \longrightarrow M$ se convierte en un mapeo de Poisson.*

Demostración. Si $i : S \longrightarrow M$ es una variedad de Poisson inyectivamente inmersa, entonces

$$\begin{aligned}\{\bar{f}, \bar{g}\}(i(z)) &= \mathbf{d}\bar{f}(i(z))(X_{\bar{g}}(i(z)))\\ &= \mathbf{d}\bar{f}(i(z))T_z i(z)\\ &= \mathbf{d}(\bar{f} \circ i)(z)(v)\\ &= \mathbf{d}f(z)(v)\end{aligned}$$

donde $v \in T_z S$ es el único vector satisfaciendo $X_{\bar{g}}(i(z)) = T_z i(v)$. Luego, $\{\bar{f}, \bar{g}\}(i(z))$ es independiente de la extensión $\bar{f}$ de $f \circ i^{-1}$. Por la antisimetría del corchete, resulta también independiente de la extensión $\bar{g}$ de $g \circ i^{-1}$.

Luego, podemos definir una estructura de Poisson en S dada por

$$\{f, g\} = \{\bar{f}, \bar{g}\} \mid_{i(V)} \tag{2.14}$$

para todo subconjunto V abierto de S. De esta forma, $i : S \longrightarrow M$ es un mapeo de Poisson ya que $X_{\bar{g}}(i(z)) = T_z i(X_g)$.

Recíprocamente, supongamos que la condición sobre el corchete antes dicha se cumple y sea $h : U \longrightarrow M$ un Hamiltoniano definido en un subconjunto abierto U de M intersecando a $i(S)$. Entonces, S es una variedad de Poisson e $i : S \longrightarrow M$ es un mapeo de Poisson. Como i es Poisson, si $z \in S$ es tal que $i(z) \in U$, tenemos

$$X_h(i(z)) = T_z i(X_{h\circ i}(z)),$$

y así, $X_h(i(z)) \in R(T_z i)$, mostrando así que $i : S \longrightarrow M$ es una inmersión de Poisson.

□

Si $S \subseteq M$ es una subvariedad en M y la inclusión i es Poisson, diremos que S es una ***subvariedad de Poisson*** de M.

Proposición 2.3.13. *Sea M una variedad. Sea $\Delta(M)$ una distribución general invariante, dado $z \in M$ y χ_0 el conjunto de campos vectoriales en M tales que*

$$\Delta_z(M) = span\{X(z)\}_{X\in\chi_0}.$$

Sea $\phi_{j,t}$ el flujo local definido en un entorno de z generado por el campo vectorial $X(z) \in \Delta_z(M)$. Sea

$$\psi^z(t_1, ..., t_k) = (\phi_{1,t_1} \circ ... \circ \phi_{k,t_k})(z)$$

para $t_1, ..., t_k$ suficientemente pequeños. Entonces

(i) *Existe un entorno abierto U_δ de $0 \in \mathbb{R}^k$ tal que*

$$\psi^z : U_\delta \longrightarrow M$$

es un embedding.

(ii) *Las imágenes de $(T\psi^z)(t)$ y $\Delta_z(M)$ son iguales para $t \in U_\delta$.*

(iii) $\psi^z(U_\delta) \subseteq \Sigma_z$.

(iv) *Si*

$$\psi^y : U_\eta \longrightarrow M$$

es otra función construida como antes y sea $y \in \psi^z(U_\delta)$, entonces existe un subconjunto abierto $U_\varepsilon \subset U_\eta$ tal que ψ^y es un difeomorfismo de U_ε a un subconjunto abierto de $\psi^z(U_\delta)$.

Demostración.

(i) Se tiene que esta función ψ^z es suave por ser suave $\phi_{j,t}$ en ambos parámetros. Ahora bien, la condición de invarianza nos dice que para todo $X \in \chi_0$, $\forall t$ pequeño y para todo $z \in M$

$$T_z\phi_t(\Delta_z(M)) = \Delta_{\phi_t(z)}(M),$$

donde ϕ es el flujo de X. Entonces

$$T_0\psi^z\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) = X_j(z) \in \Delta_z(M)$$

por lo que $T_0\psi^z_{f_1,\ldots,f_k}$ es inyectiva ya que manda bases en bases. Luego, ψ^z es una inmersión, y por lo tanto, existe U_δ entorno de 0 tal que $\psi^z(U_\delta)$ es una subvariedad en M y $\psi^z\mid_{U_\delta}$ es un difeomorfismo de U_δ en $\psi^z(U_\delta)$. En particular, $\psi^z\mid_{U_\delta}$ es un embedding. Además, notemos que el rango de $T_0\psi^z$ y $\Delta_z(M)$ coinciden.

(ii) Nuevamente la condición de invarianza es la clave en esto: si tomamos $X \in \chi_0$, tenemos que $X(z) \in \Delta_z(M)$ para $z \in M$, y ϕ_t el flujo del campo vectorial X, obtenemos

$$T_z\phi_t(X(z)) = Y(\phi_t(z)), \tag{2.15}$$

para algún $Y(\phi_t(z)) \in \Delta_{\phi_t(z)}(M)$, es decir $Y = a^i X_i$, donde $X_i \in \chi_0$.

La fórmula (2.15) nos dice que:

$$(T\phi_t \circ X)(z) = (Y \circ \phi_t)(z), \Rightarrow T\phi_t \circ X = Y \circ \phi_t.$$

Por lo tanto, si $t = (t_1, ..., t_k)$,

$$\begin{aligned} T_t\psi^z\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) &= \left(T\phi_{1,t_1} \circ ... \circ T\phi_{j-1,t_{j-1}} \circ X_j \circ \phi_{j+1,t_{j+1}} \circ ... \circ \phi_{k,t_k}\right)(z) \\ &= (Y \circ \psi^z)(t) \in \Delta_{\psi^z(t)}(M), \end{aligned}$$

donde X_j es el campo vectorial del flujo ϕ_{j,t_j}. Esto muestra que

$$R(T_t\psi^x) \subseteq \Delta_{\psi^x(t)}(M)$$

si $t \in U_\delta$. Como $\Delta(M)$ es invariante tenemos que

$$\dim\Delta_{\psi^z(t)}(M) = \dim\Delta_z(M).$$

Esta última igualdad, la inclusión anterior y la última observación en la prueba de (i) concluyen (ii).

(iii) Esto es claro ya que ψ^z se construye a partir de las los flujos de los campos vectoriales en χ_0 comenzando en z.

(iv) Antes de seguir observemos que si tenemos $\gamma(t)$ curva integral de $X \in \chi_0$, tal que

$$\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}N, \quad \gamma(0) = y,$$

donde N es una subvariedad de M, entonces

$$\gamma(t) \subseteq N$$

para todo t suficientemente pequeño. En efecto, para $y \in N$ existe una carta (Φ, N) con $y \in U$ y $\Phi(U \cap N) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap \Phi(U)$.

Consideramos la curva suave en M dada por

$$\beta(t) := (\Phi^{-1} \circ \pi_{\mathbb{R}^k} \circ \Phi)(\gamma(t))$$

para t suficientemente pequeño, $\beta(t) \subseteq N$.

Ahora bien, vemos que $\beta(0) = y$ y

$$\dot\beta(t) = (T\Phi^{-1} \circ \pi_{\mathbb{R}^k} \circ T\Phi)(\dot\gamma(t)) = \dot\gamma(t).$$

Y por la unicidad de curvas integrales, $\gamma(t) = \beta(t)$ para t pequeño, entonces $\gamma(t) \subseteq N$.

Con esto en mente, en este caso tenemos que $X(z) \in \Delta_z(M)$ para $z \in M$. Por (ii) tenemos que X es tangente a la imagen de ψ^z. Por lo tanto, las curvas integrales de X permanecen tangentes a $\psi^z(U_\delta)$ si comienzan en ese conjunto. Para obtener la función que queremos sólo necesitamos encontrar los flujos asociados a la familia χ_0 que comiencen en y. Por lo tanto, por lo antes visto, podemos restringirnos a la subvariedad $\psi^z(U_\delta)$ cuando calculamos los flujos a lo largo de los campos vectoriales χ_0, por lo que podemos considerar que la imagen de ψ^y está en $\psi^z(U_\delta)$. La derivada en el punto $0 \in \mathbb{R}^k$ de ψ^y es un isomorfismo al espacio tangente de $\psi^z(U_\delta)$ en y. Luego, la existencia de este U_ε está garantizada por el teorema de la función inversa.

$\square$

Ahora bien, un resultado básico en el contexto de distribuciones generales es el siguiente:

Teorema 2.3.14 (Stefan - Sussmann)**.** *Una distribución diferenciable general $\Delta(M)$ es completamente integrable si y sólo si es una distribución invariante.*

Demostración. Si $\Delta(M)$ es completamente integrable, $\forall z_0 \in M$ existe N subvariedad inmersa conexa tal que $T_{z_0}N = \Delta_{z_0}M$, $(z_0 \in N)$. Consideramos el conjunto

$$\chi_0 := \{X \in \mathfrak{X}(M) :\ X(z) \in \Delta_z(M),\ \forall z \in M\}$$

(el espacio de todos los campos vectoriales $\mathcal{C}^\infty$ de $\Delta(M)$). Veamos que se satisface (2.12).

Sea $v \in \Delta_{z_0}(M)$, luego $v = Y(z_0) = a_i X^i(z_0)$, donde X^i son $\mathcal{C}^\infty$ y generan a $\Delta_{z_0}(M)$. Consideramos ψ_t flujo de Y en z_0 y $\alpha(s) = (\varphi_t \circ \psi_s)(z_0)$ curva en N. Así,

$$\frac{d}{ds}\,|_{s=0}\ (\varphi_t \circ \psi_s)(z_0) = T_{z_0}\varphi_t(Y(z_0)) \subseteq T_{\varphi_t(z_0)}N = \Delta_{\varphi_t(z_0)}(M).$$

Por otro lado, sea $v \in \Delta_{\varphi_t(z_0)}(M)$, entonces

$$\begin{aligned} v = b_i X^i(\varphi_t(z_0)) = Y(\varphi_t(z_0)) &= \frac{d}{dt}\varphi_t(z_0) = \frac{d}{dt}\varphi_t((\varphi_t \circ \varphi_{-t})(z_0)) \\ = T_{z_0}\varphi_t((\varphi_t \dot{\circ} \varphi_{-t})(z_0)) &\subseteq T_{z_0}\varphi_t(\Delta_{z_0}(M)) \end{aligned}$$

Así, tenemos que $\Delta(M)$ es invariante.

Veamos la vuelta. Para cada órbita $\Sigma \subset M$ la familia de cartas satisfaciendo (i) en la Proposición 2.3.13, llamemosla

$$\{\psi^z :\ z \in \Sigma,\ \operatorname{span}\{X(z)\}_{X \in \chi_0} \text{ es una base de } \Delta_z(M)\},$$

provee a Σ de una estructura de variedad diferenciable tal que la inclusión es una inmersión. En efecto, sea $x \in \psi^z(U_\delta) \cap \psi^y(U_\varepsilon)$ y consideramos $\psi^x : U_\gamma \longrightarrow M$. Por (iv) de la Proposición 2.3.13, podemos elegir U_γ suficientemente pequeño de forma que

$$\psi^x(U_\gamma) \subset \psi^z(U_\delta) \cap \psi^y(U_\varepsilon)$$

es un difeomorfismo en $\psi^z(U_\delta)\cap\psi^y(U_\varepsilon)$. Esto muestra que las funciones de transición para las cartas dadas son difeomorfismos, por lo que define una estructura de variedad diferenciable en Σ. Veamos que $i:\Sigma\hookrightarrow M$ es una inmersión: sea $c:I\longrightarrow M$ curva suave tal que $c(0)=z$, $T_zi([c]_z)=[i\circ c]_z=[0]_z$, es decir que $i\circ c\sim 0$ entonces $\exists(\Phi,U)$ carta en z tal que

$$(\Phi\circ i\circ c)'(0)=(\Phi\circ 0)'(0)=0. \tag{2.16}$$

Tomamos $(\Phi\mid_\Sigma, U\cap\Sigma)$ carta en z, tenemos que $\Phi\circ i\circ c=\Phi\mid_\Sigma\circ c$. Así, (2.16) nos queda

$$(\Phi\mid_\Sigma\circ c)'(0)=0,$$

luego, $c\sim 0$. Lo que prueba que T_zi es inyectiva. Así, el par (Σ,i) es una integral de la distribución $\Delta(M)$. De (i) y (ii) de la Proposición 2.3.13, obtenemos que $T_z\Sigma=\Delta_z(M)$ y, por ende, la igualdad $\dim\Sigma=\dim\Delta_z(M)$. Se sigue de la definición de una subvariedad de Poisson inmersa que Σ es una subvariedad de M. Por lo tanto, $\Delta(M)$ es completamente integrable.

□

Observación 2.3.15. Una distribución no diferenciable puede ser completamente integrable sin ser invariante en el sentido de la Definición 2.3.9. Veamos el siguiente ejemplo: consideramos $M=\mathbb{R}^2$ con las siguientes hojas: los puntos unitarios que no están sobre el eje x, y todo el conjunto x. La distribución tangente de estas hojas no tiene campo vectorial diferenciable no nulo.

Volviendo al contexto de variedades de Poisson, con todo lo antes visto, llegamos felizmente al Teorema de foliación simpléctica:

Teorema 2.3.16. *La distribución característica $S(M)$ de la variedad de Poisson (M,ω) es completamente integrable, y la estructura de Poisson induce estructuras simplécticas en las hojas de $S(M)$.*

Demostración. Para probar que $S(M)$ es completamente integrable probaremos que es invariante. Para esto basta considerar φ_t flujo Hamiltoniano, como sabemos es una función de Poisson y por la Proposición 2.2.12 junto con la definición de distribución característica tenemos que se cumple (2.12).

Por la definición de la distribución característica y su completa integrabilidad, tenemos que $i:\Sigma\longrightarrow M$ es una inmersión de Poisson. Así, por la Proposición 2.3.12 sabemos que el corchete (2.17) está bien definido y define en la subvariedad Σ una estructura de Poisson. Ahora bien, dado $i:\Sigma\longrightarrow M$, en cada hoja Σ definimos la 2-forma Ω_Σ como

$$\Omega_\Sigma(z)(X_f(z),X_g(z))=\{f,g\}(z)=\{f\circ i,g\circ i\}(z)=w_\Sigma(\mathbf{d}f,\mathbf{d}g). \tag{2.17}$$

y el bivector de Poisson asociado w_Σ es no degenerado. En efecto, si

$$\{f\circ i,g\circ i\}_\Sigma(z)=0$$

para toda función g entonces $\{f,g\}(z)=0$ para toda g, es decir $X_g[f](z)=0$, para toda g. Así, $\mathbf{d}f\mid_{T_z\Sigma}=0$ ya que los campos vectoriales $X_g(z)$ generan $T_z\Sigma$. Además, $i^*\mathbf{d}f=\mathbf{d}(f\circ i)=0$, lo cual muestra que el bivector de Poisson ω_Σ es no degenerado y, por la Observación 2.2.9, Σ es una variedad simpléctica.

□

Las hojas de $S(M)$ son llamadas ***hojas simplécticas*** de la variedad de Poisson M y $S(M)$ es llamada la ***foliación simpléctica de*** M.

Ejemplo 2.3.17. Las hojas simplécticas de la estructura de Lie-Poisson de $\mathfrak{g}^*$ son las órbitas de la representación coadjunta de cualquier grupo de Lie conexo G cuyo álgebra de Lie es $\mathfrak{g}$. Ver [Prop. 3.1, [20]].

Ejemplo 2.3.18. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real finito dimensional, $\mathfrak{g}^*$ su dual, y Θ un cociclo simpléctico de $\mathfrak{g}$. Dotamos a $\mathfrak{g}$ con la estructura de Lie-Poisson modificada asociada al cociclo simpléctico Θ (Ejemplo 2.2.4). Sea G conexo, el grupo de Lie simplemente conexo cuyo álgebra de Lie es $\mathfrak{g}$, y θ el cociclo simpléctico de G cuyo cociclo asociado de $\mathfrak{g}$ es Θ. Tenemos que, [Teor. 4.10, [8]], las hojas simplécticas de la estructura de Poisson de $\mathfrak{g}^*$ son las órbitas de la acción afín $a_\theta : G \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ definida por

$$a_\theta(g, \xi) = \mathrm{Ad}_g^* \xi + \theta(g).$$

Ejemplo 2.3.19. Una forma simple de obtener estructuras de Poisson en espacios $\mathbb{R}^n$ es mediante la inserción de los coeficientes en la estructura simpléctica canónica. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, el bivector

$$w = h(x, y)\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$$

claramente define una estructura de Poisson. Tiene rango 0 en los puntos donde h se anula, y rango 2 en otro caso, por lo tanto, las hojas simplécticas son los puntos donde $h = 0$, y las componentes conexas del subconjunto abierto $h \neq 0$ de $\mathbb{R}^2$. Esta estructura generaliza a $R^{2n+p} = \{(x^k, y^k, z^h)\}$, $(k = 1, ..., n;\ h = 1, ..., p)$ poniendo

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} h_k(x^k, y^k)\frac{\partial}{\partial x^k} \wedge \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

En particular, el bivector

$$\omega = \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2} + \varphi(x^4)\frac{\partial}{\partial x^3} \wedge \frac{\partial}{\partial x^4}$$

donde $\varphi(x^4) = 0$, para $x^4 \leq 0$, y $\varphi(x^4) > 0$ para $x^4 > 0$, define una estructura de Poisson en $\mathbb{R}^4$, donde la hoja simpléctica a través de un punto con $x^4 > 0$ es el semiespacio superior $x^4 > 0$, mientras que las hojas a través de los puntos con $x^4 < 0$ son los planos $x^3 = cte$, $x^4 = cte$.

3. Variedades de Poisson infinito dimensional

3.1. Definiciones básicas

Dado un espacio de Banach $\mathfrak{b}$, la notación $\mathfrak{b}^*$ siempre significará el espacio de Banach dual de $\mathfrak{b}$. Dado $x \in \mathfrak{b}^*$ y $b \in \mathfrak{b}$, denotaremos por $\langle x, b\rangle$ el valor de x en b $(x(b))$. Por lo tanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{b}^* \times \mathfrak{b} \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$, dependiendo si estamos laburando con espacios de Banach y funciones reales o complejas) denotará la dualidad bilineal continua natural entre $\mathfrak{b}$ y su dual $\mathfrak{b}^*$. Los conceptos que utilizaremos en esta sección tales como variedades de Banach, derivada de Frechét, etc. pueden verse en [[1]].

Comenzaremos definiendo el concepto de variedad simpléctica en el caso infinito dimensional.

Definición 3.1.1. *Sea P una variedad modelada en un espacio de Banach $\mathfrak{b}$. Decimos que una 2-forma Ω en P es una **forma simpléctica** si cumple:*

(i) *Ω es cerrada, i.e., $\boldsymbol{d}\Omega = 0$;*

(ii) *para cada $z \in P$, $\Omega_z : T_zP \times T_zP \longrightarrow \mathbb{R}$ es débilmente no degenerada.*

*Así, el par (P, Ω) es llamado una **variedad simpléctica débil**. Si Ω_z en (ii) es no degenerada, hablamos de una **forma simpléctica fuerte** y, por ende, decimos que el par (P, Ω) es una **variedad simpléctica fuerte**.*

Hablemos un poco qué queremos decir con débil o fuertemente no degenerada. Que una 2-forma sea fuertemente no degenerada significa que para cada $z \in P$, la forma bilineal $\Omega_z : T_zP \times T_zP \longrightarrow \mathbb{R}$ define un isomorfismo

$$\Omega_z^\flat : T_zP \longrightarrow T_z^*P.$$

Para una forma simpléctica débil, el mapeo inducido $\Omega^\flat : \mathfrak{X}(P) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(P)$ (donde $\mathfrak{X}(P)$ denota el espacio de campos vectoriales en P) entre campos vectoriales y 1-formas es uno a uno, pero en general no es suryectivo. Por lo tanto, no podemos construir una función que asocie a todo diferencial $\mathbf{d}f$ de una función suave $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ el campo vectorial Hamiltoniano X_f.

Esta distinción en el caso infinito dimensional es esencial ya que los campos vectoriales Hamiltonianos fueron una herramienta clave en el desarrollo de las variedades de Poisson de dimensión finita.

Como estuvimos trabajando en la sección anterior, una variedad de Poisson real de dimensión finita es un par $(M, \{\cdot, \cdot\})$ donde M es una variedad cuyo espacio de funciones suaves está dotado de una estructura de álgebra de Lie $\{\cdot, \cdot\}$ satisfaciendo la propiedad de Leibniz en cada factor. Como discutiremos luego, esta definición no es apropiada para el caso infinito dimensional y necesitamos una condición más estricta.

Para ver esto, asumamos que en el espacio $\mathcal{C}^\infty(P)$ de funciones suaves en la variedad de Banach suave P de dimensión infinita, hay un corchete de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ cumpliendo las mismas propiedades que en el caso finito. Debido a la propiedad de Leibniz, el valor del corchete de Poisson en un punto $p \in P$ dado depende solamente de los diferenciales $\mathbf{d}f(p)$, $\mathbf{d}g(p) \in T_p^*P$ lo que implica que hay una sección suave $\bar{\omega}$ del fibrado vectorial $\Lambda^2 T^{**}P$ satisfaciendo

$$\{f, g\} = \bar{\omega}(\mathbf{d}f, \mathbf{d}g).$$

Sea $\sharp : T^*P \longrightarrow T^{**}P$ tal que

$$\sharp_p(\mathbf{d}h(p)) := \bar{\omega}_p(\cdot, \mathbf{d}h(p)), \tag{3.1}$$

esto es, $\sharp_p(\mathbf{d}h(p))(\mathbf{d}g(p)) = \{g, h\}(p)$, para cualquier par de funciones localmente definidas g y h.

Denotamos por $\mathfrak{b}$ el espacio de Banach que modeliza a la variedad de Banach P. Luego, $T_pP \cong \mathfrak{b}$, $T_p^*P \cong \mathfrak{b}^*$, y $T_p^{**}P \cong \mathfrak{b}^{**}$. Si $\mathfrak{b}$ es no reflexivo, esto es, $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}^{**}$ y $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}^{**}$, entonces

$$X_f := \bar{\omega}(\cdot, \mathbf{d}f) = \sharp(\mathbf{d}f), \text{ ó, como una derivación de funciones } X_f = \{\cdot, f\}$$

es una sección suave de $T^{**}P$ y por lo tanto, en general, no es un campo vectorial en P. Análogamente al caso finito dimensional, queremos que X_f sea el campo vectorial Hamiltoniano definido por la función $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$. Para que esto se cumpla, pediremos que el corchete de Poisson en P satisfaga la condición $\sharp(T^*P) \subseteq TP \subseteq T^{**}P$. Por lo tanto, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.1.2. *Una **variedad de Banach Poisson** es un par $(P, \{\cdot, \cdot\})$ donde P es una variedad de Banach suave y $\{\cdot, \cdot\}$ es un operador bilineal que satisface las siguientes condiciones:*

(i) $(\mathcal{C}^\infty(P), \{\cdot, \cdot\})$ *es un álgebra de Lie;*

(ii) $\{\cdot, \cdot\}$ *satisface la identidad de Leibniz en cada factor;*

(iii) *la función $\sharp : T^*P \longrightarrow T^{**}P$ dada por (3.1) cumple $\sharp_p(T_p^*P) \subseteq T_pP$.*

La condición (iii) nos permite definir para cualquier función $h \in \mathcal{C}^\infty(P)$ el **campo vectorial Hamiltoniano** dado por

$$X_h[f] := \mathbf{d}f(X_h) = \{f, h\},$$

donde f es una función localmente suave arbitraria definida en P.

Ahora daremos algunas definiciones y resultados que hemos visto en el caso finito dimensional pero adaptándolas a este nuevo contexto.

Dadas dos variedades de Banach Poisson $(P_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$ y $(P_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$, una función suave $\varphi : P_1 \longrightarrow P_2$ se dice **canónica** o una **función de Poisson** si

$$\varphi^*\{f, g\}_2 = \{\varphi^* f, \varphi^* g\}_1, \tag{3.2}$$

para cualesquier $f, g \in \mathcal{C}^\infty(P_2)$. La condición (iii) de la definición anterior implica, como en el caso de dimensión finita, que (3.2) es equivalente a

$$X_f^2 \circ \varphi = T\varphi \circ X_{f\circ\varphi}^1 \tag{3.3}$$

para cualquier función $f \in \mathcal{C}^\infty(P_2)$. Por lo tanto, el flujo de un campo vectorial Hamiltoniano es una función de Poisson.

Observación 3.1.3. Volviendo a la Definición 3.1.2, notemos que la condición $\sharp(T^*P) \subseteq TP$ se cumple automáticamente en los siguientes casos:

- Si P es una variedad suave modelada en un espacio de Banach reflexivo, i.e., $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{**}$,

- P es una variedad simpléctica fuerte con una forma simpléctica Ω.

La primer condición se cumple si P es una variedad de Hilbert (y, en particular, de dimensión finita).

Observemos también que toda variedad simpléctica fuerte (P, Ω) es una variedad de Poisson según la Definición 3.1.2. Como dijimos, la condición de fuertemente no degenerada nos dice que para cada $p \in P$ la función

$$v_z \in T_zP \longmapsto \Omega_z(v_z, \cdot) \in T_z^*P \tag{3.4}$$

es lineal biyectiva y continua. Por lo tanto, dada una función suave $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ existe un campo vectorial X_f tal que $\mathbf{d}f = \Omega(X_f, \cdot)$. Como vimos antes, el corchete de Poisson está dado por

$$\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g) = \mathbf{d}f(X_g),$$

y como $\sharp\mathbf{d}f = X_f$, tenemos $\sharp(T^*P) \subseteq TP$.

Por otro lado, una variedad simpléctica débil no es una variedad de Poisson según la Definición 3.1.2. Como la definición del corchete de Poisson debe cumplir $\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g)$, no podemos definir esta operación en funciones y por lo tanto una estructura de variedad simpléctica débil no define, en general, estructuras de variedad de Poisson en el sentido de la Definición 3.1.2.

3.2. Espacios de Banach Lie-Poisson

Como ya vimos en el Ejemplo 2.2.3, el dual de cualquier álgebra de Lie admite una estructura lineal de Poisson, llamada la estructura de Lie-Poisson. En esta sección extenderemos la definición de estas estructuras al caso infinito dimensional de acuerdo con la Definición 3.1.2. Llamaremos a tales espacios *espacios de Banach Lie-Poisson* e investigaremos sus propiedades.

Recordemos que un **álgebra de Lie Banach** $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ es un espacio de Banach que es también un álgebra de Lie tal que el corchete de Lie es una función bilineal continua $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$. Por lo tanto, las funciones adjunta y coadjunta $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}_x y := [x, y]$, y $\mathrm{ad}_x^* : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ son también continuas para cada $x \in \mathfrak{g}$.

Definición 3.2.1. *Un* ***espacio de Banach Lie-Poisson*** $(\mathfrak{b}, \{\cdot,\cdot\})$ *es una variedad de Poisson real o holomorfa tal que* $\mathfrak{b}$ *es un espacio de Banach y el dual* $\mathfrak{b}^* \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$ *es un álgebra de Lie Banach bajo la operación del corchete de Poisson.*

Denotamos por $[\cdot,\cdot]$ la restricción del corchete de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$ al subálgebra de Lie $\mathfrak{b}^*$. Para cada $x, y \in \mathfrak{b}^*$ y $b \in \mathfrak{b}$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle y, \mathrm{ad}_x^* b\rangle &= \langle [x, y], b\rangle \\ &= \{x, y\}(b) \\ &= -\{y, x\}(b) \\ &= -X_x[y](b) \\ &= -\langle Dy(b), X_x(b)\rangle \\ &= -\langle y, X_x(b)\rangle,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la linealidad de $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$ para concluir que la derivada de Fréchet $Dy(b) = y$. Así, obtenemos la siguiente identidad en el bidual $\mathfrak{b}^{**}$:

$$X_x(b) = -\mathrm{ad}_x^* b \quad \text{para} \quad x \in \mathfrak{b}^*,\ b \in \mathfrak{b}. \tag{3.5}$$

Teorema 3.2.2. *El espacio de Banach $\mathfrak{b}$ es un espacio de Banach Lie-Poisson $(\mathfrak{b}, \{\cdot,\cdot\})$ si y sólo si su dual $\mathfrak{b}^*$ es un álgebra de Lie Banach $(\mathfrak{b}^*, [\cdot,\cdot])$ satisfaciendo $ad_x^*\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}^{**}$ para todo $x \in \mathfrak{b}^*$.*

Además, el corchete de Poisson de $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$ está dado por

$$\{f, g\}(b) = \langle [Df(b), Dg(b)], b\rangle, \tag{3.6}$$

donde $b \in \mathfrak{b}$ y D denota la derivada de Fréchet. Si $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$, el campo vectorial Hamiltoniano asociado a h está dado por

$$X_h(b) = -\mathrm{ad}_{Dh(b)}^* b. \tag{3.7}$$

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{b}$ es un espacio de Banach Lie-Poisson relativo al corchete $\{\cdot,\cdot\}$. Por la Definición 3.2.1, su dual $\mathfrak{b}^*$ es un álgebra de Lie Banach relativa al corchete $[\cdot,\cdot] := \{\cdot,\cdot\}\,|_{\mathfrak{b}^*}$. Sin embargo, $\mathfrak{b}$ es también una variedad de Poisson y por lo tanto, por definición, $X_x(b) \in \mathfrak{b}$ para todo $x \in \mathfrak{b}^*$ y $b \in \mathfrak{b}$. La fórmula (3.5) implica que $\mathrm{ad}_x^*(b) \in \mathfrak{b}$ para todo $x \in \mathfrak{b}^*$ y todo $b \in \mathfrak{b}$ que es lo que queríamos.

Recíprocamente, supongamos que $(\mathfrak{b}^*, [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie Banach satisfaciendo $\mathrm{ad}_x^*\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}^{**}$ para todo $x \in \mathfrak{b}^*$. Definimos el corchete $\{f, g\}$ de $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$ por (3.6). La antisimetría y la propiedad de Leibniz son inmediatas. Vamos a chequear la identidad de Jacobi. Para esto, notemos que de la inclusión $\mathrm{ad}_x^*\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}$, $x \in \mathfrak{b}^*$, tenemos

$$D\{f, g\}(b) = \langle [Df(b), Dg(b)], \cdot\rangle - D^2 f(b)\left(\mathrm{ad}_{Dg(b)}^* b, \cdot\right) + D^2 g(b)\left(\mathrm{ad}_{Df(b)}^* b, \cdot\right) \tag{3.8}$$

para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$. Usando (3.8) obtenemos

$$\begin{aligned}\{\{f, g\}, h\}(b) &= \langle [D\{f, g\}(b), Dh(b)], b\rangle \\ &= \langle [[Df(b), Dg(b)], Dh(b)], b\rangle + D^2 f(b)\left(\mathrm{ad}_{Dg(b)}^* b, \mathrm{ad}_{Dh(b)}^* b\right) \\ &\quad - D^2 g(b)\left(\mathrm{ad}_{Df(b)}^* b, \mathrm{ad}_{Dh(b)}^* b\right).\end{aligned}$$

Rotando los roles de f, g y h obtenemos los otros dos términos, usando la identidad de Jacobi del corchete de Lie en la suma de los tres primeros términos y la simetría de la segunda derivada en la suma de los términos restantes, probamos que (3.6) satisface la identidad de Jacobi.

Como

$$\langle Df(b), X_h(b)\rangle = \{f,h\}(b) = \langle [Df(b), Dh(b)], b\rangle = -\left\langle Df(b), \mathrm{ad}^*_{Dh(b)} b\right\rangle$$

para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{b})$ y $\mathrm{ad}^*_x \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}$ para todo $x \in \mathfrak{b}^*$, se sigue que el campo vectorial Hamiltoniano X_h está dado por (3.7).

□

Ejemplo 3.2.3. Un ejemplo inmediato es considerar $\mathfrak{b}$ un álgebra de Lie Banach reflexiva, i.e., $\mathfrak{b}^{**} = \mathfrak{b}$. Luego, su dual $\mathfrak{b}^*$ es un espacio de Banach Lie-Poisson. En efecto, notemos que $\mathfrak{b}^{**} = \mathfrak{b}$ es un álgebra de Lie Banach y que $\mathrm{ad}^*_x(\mathfrak{b}^*) \subseteq \mathfrak{b}^*$ para todo $x \in \mathfrak{b}$, y aplicamos el Teorema 3.2.2.

Ejemplo 3.2.4. Como todo álgebra de Lie finito dimensional es reflexiva, el ejemplo anterior nos da el siguiente resultado clásico: *el dual de cualquier álgebra de Lie finito dimensional es un espacio de Lie-Poisson.*

Una importante clase de espacios de Banach Lie-Poisson son los relacionados con la categoría de álgebras de von Neumann. Para ampliar esta información primero recordemos algunos conceptos.

Definición 3.2.5.

(i) *Una **involución** en un álgebra $\mathcal{A}$ es una operación $* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que*

1) $(a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda} b^*$, *$a, b \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,*
2) $(ab)^* = b^* a^*$,
3) $(a^*)^* = a$.

*El par $(\mathcal{A}, *)$ es llamado una **$*$-álgebra**.*

(ii) *Una **$*$-álgebra de Banach** es una terna $(\mathcal{A}, \|\cdot\|, *)$ tal que*

1) $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ *es un álgebra de Banach,*
2) $(\mathcal{A}, *)$ *es $*$-álgebra,*
3) $\|a^*\| = \|a\|$, $\forall a \in \mathcal{A}$.

*Si, además, $\exists \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ tal que $\|\mathbf{1}_{\mathcal{A}}\| = 1$ decimos que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|, *)$ es **$*$-álgebra de Banach unital**.*

(iii) *Una **C^*-álgebra** es una $*$-álgebra de Banach que satisface:*

$$\|aa^*\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Recordemos que un álgebra de von Neumann es una C^*-álgebra $\mathfrak{m}$ que posee un espacio de Banach predual $\mathfrak{m}_*$, i.e., $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}_*)^*$; este predual es único. Dado que $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}_*)^{**}$, el espacio de Banach predual $\mathfrak{m}_*$ se incrusta canónicamente en el espacio de Banach $\mathfrak{m}^*$ dual a $\mathfrak{m}$. Por lo que podemos pensar siempre a $\mathfrak{m}_*$ como un subespacio de Banach de $\mathfrak{m}^*$. La existencia de $\mathfrak{m}^*$ permite la introducción de la $\sigma(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_*)$-topología sobre el álgebra $\mathfrak{m}$; para simplificar la notación escribiremos

σ-topología. Recordemos que una red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathfrak{m}$ converge a $x \in \mathfrak{m}$ en la σ-topología si, por definición, $\lim_{\alpha\in A}\langle x_\alpha, b\rangle = \langle x, b\rangle$ para todo $b \in \mathfrak{m}_*$. La σ-topología es Hausdorff. El Teorema de Alaoglu indica que la bola unitaria de $\mathfrak{m}$ es compacta en la σ-topología. Podemos caracterizar el espacio predual $\mathfrak{m}_*$ como el subespacio de $\mathfrak{m}^*$ que consiste en todos los funcionales lineales σ-continuos [Ver [15]].

Teorema 3.2.6. *Sea $\mathfrak{m}$ una álgebra de von Neumann y $\mathfrak{m}_*$ el predual de $\mathfrak{m}$. Entonces $\mathfrak{m}_*$ es un espacio de Banach Lie-Poisson con el corchete de Poisson $\{f, g\}$ para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{m}_*)$ dado por (3.6). El campo vectorial Hamiltoniano X_f definido por la función suave $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{m}_*)$ está dado por (3.7).*

Demostración. Probaremos el teorema, chequeando que se cumplen las condiciones del Teorema 3.2.2. Como el álgebra de von Neumann $\mathfrak{m}$ es un álgebra de Banach asociativa podemos definir el corchete de Lie en $\mathfrak{m}$ como el conmutador

$$[x, y] = xy - yx$$

con $x, y \in \mathfrak{m}$. Ahora bien, la multiplicación a izquierda y derecha por $a \in \mathfrak{m}$ define funciones uniformemente σ-continuas

$$\begin{aligned} L_a : \mathfrak{m} &\longrightarrow \mathfrak{m} \\ x &\longmapsto ax \\ R_a : \mathfrak{m} &\longrightarrow \mathfrak{m} \\ x &\longmapsto xa \end{aligned}$$

Luego, $L_a^* : \mathfrak{m}^* \longrightarrow \mathfrak{m}^*$ y $R_a^* : \mathfrak{m}^* \longrightarrow \mathfrak{m}^*$ denota las funciones duales de L_a y R_a respectivamente. Si $v \in \mathfrak{m}_*$, entonces $L_a^*(v)$ y $R_a^*(v)$ son funcionales σ-continuos y por lo tanto, por la caracterización del predual $\mathfrak{m}_*$ como el subespacio de funcionales σ-continuos en $\mathfrak{m}^*$, tenemos que $L_a^*(v), R_a^*(v) \in \mathfrak{m}_*$. Así, $\mathrm{ad}_a = [a, \cdot] = L_a - R_a$ y por lo tanto, $\mathrm{ad}_a^* = L_a^* - R_a^*$. Luego, lo que obtenemos es que $\mathfrak{m}$ es un álgebra de Lie-Banach y $\mathrm{ad}_a^*\mathfrak{m}_* \subset \mathfrak{m}_*$ para cada $a \in \mathfrak{m}$, y por el Teorema 3.2.2, tenemos lo que queremos.

□

Corolario 3.2.7. *Sea $\mathfrak{a}$ una C^*-álgebra. Entonces su dual $\mathfrak{a}^*$ es un espacio de Banach Lie-Poisson.*

Demostración. Veamos que sucede con el bidual de $\mathfrak{a}$. El bidual $\mathfrak{a}^{**}$ de $\mathfrak{a}$ es un álgebra de von Neumann y por la inclusión canónica $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{a}^{**}$ la $\mathcal{C}^*$-álgebra $\mathfrak{a}$ puede considerarse como un C^*-subálgebra de $\mathfrak{a}^{**}$ [Teor. 17.2, [15]]. Como $\mathfrak{a}^*$ es el predual de $\mathfrak{a}^{**}$ y ésta es un álgebra de von Neumann, por el Teorema 3.2.6, tenemos que $\mathfrak{a}^*$ es un espacio de Banach Lie-Poisson.

□

Para ilustrar el Teorema 3.2.6 tomaremos un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$. Por $\mathfrak{G}_1(\mathcal{H})$, $\mathfrak{G}_2(\mathcal{H})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ denotamos las álgebras de Banach de los operadores traza, operadores de Hilbert-Schmidt y los operadores acotados en $\mathcal{H}$ respectivamente.

Recordemos que $\mathfrak{G}_1(\mathcal{H})$ y $\mathfrak{G}_2(\mathcal{H})$ son ideales biláteros en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Sea $\mathfrak{G}_\infty(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ el ideal de los operadores compactos en $\mathcal{H}$. Entonces

$$\mathfrak{G}_1(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{G}_2(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{G}_\infty(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}), \tag{3.9}$$

y las siguientes dualidades se cumplen

$$\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})^* \cong \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}), \quad \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})^* \cong \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \quad \text{y} \quad \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})^* \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}). \tag{3.10}$$

Estas son implementadas por la forma bilineal fuertemente no degenerada

$$\langle x, \rho \rangle = \operatorname{tr}(x\rho) \tag{3.11}$$

donde $x \in \mathfrak{S}_1$, $\rho \in \mathfrak{S}_\infty$ para el primer isomorfismo, $\rho, x \in \mathfrak{S}_2$ para el segundo isomorfismo y $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\rho \in \mathfrak{S}_1$ para el tercer isomorfismo. El isomorfismo $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})^* \cong \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nos da el ejemplo crucial del álgebra de von Neumann de operadores acotados en el espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$.

Con esto en mente, tenemos el siguiente resultado que escribiremos como Corolario del Teorema 3.2.6.

Corolario 3.2.8. *El espacio de Banach $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ de los operadores traza en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un espacio de Banach Lie-Poisson relativo al corchete de Poisson dado por*

$$\{f, g\}(\rho) = \operatorname{tr}([Df(\rho), Dg(\rho)]\rho), \tag{3.12}$$

donde $\rho \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ y el corchete $[Df(\rho), Dg(\rho)]$ denota al conmutador de los operadores acotados $Df(\rho), Dg(\rho) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})^*$. El campo vectorial Hamiltoniano asociado a $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$ está dado por

$$X_f(\rho) = [Df(\rho), \rho]. \tag{3.13}$$

Demostración. Como $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un álgebra de von Neumman y $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ es su predual, sale directo que $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ es un espacio de Banach Lie-Poisson.

La fórmula (3.12) se obtiene de (3.6) usando (3.11) para la bilineal entre $\mathfrak{S}_1$ y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Para obtener (3.13) de (3.7), notemos que

$$\langle y, -\mathrm{ad}_x^*\rho \rangle = -\langle [x, y], \rho \rangle = -\operatorname{tr}([x, y]\rho) = \operatorname{tr}(y[x, \rho]) = \langle y, [x, \rho] \rangle \tag{3.14}$$

para $\rho \in \mathfrak{S}_1$ y $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por lo tanto,

$$-\mathrm{ad}_x^*\rho = [x, \rho] \in \mathfrak{S}_1,$$

ya que $\mathfrak{S}_1$ es un ideal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Luego,

$$X_f(\rho) = -\mathrm{ad}_{Df(\rho)}^*\rho = [Df(\rho), \rho].$$

□

Los otros dos isomorfismos en (3.10) también nos dan espacios de Banach Lie-Poisson, pero salen como corolario del Teorema 3.2.2; el Teorema 3.2.6 no puede aplicarse ya que $\mathfrak{S}_2$ y $\mathfrak{S}_1$ no son álgebras de von Neumann.

Ejemplo 3.2.9. $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ *es un espacio de Banach Lie-Poisson.* Es inmediato ya que $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ es un espacio de Hilbert. Las fórmulas para el corchete de Poisson y para el campo vectorial Hamiltoniano son (3.12) y (3.13) respectivamente con $x, \rho \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Ejemplo 3.2.10. El espacio de Banach $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, como un predual de $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$, es un espacio de Banach Lie-Poisson. Procediendo igual que en el Corolario 3.2.8 llegamos a que $\mathrm{ad}_x^*\mathfrak{S}_\infty \subseteq \mathfrak{S}_\infty$ y aplicamos el Teorema 3.2.2.

3.3. Hojas simplécticas y órbitas coadjuntas

Recordemos que una función suave $f : M \longrightarrow N$ entre variedades finito dimensional es llamada una inmersión, si para todo $m \in M$ la derivada $T_m f : T_m M \longrightarrow T_{f(m)}N$ es inyectiva. En dimensión infinita la cosa se complica y existen varias nociones que generalizan este concepto.

Definición 3.3.1. *Una función suave $f : M \longrightarrow N$ entre variedades de Banach es llamada una*

(i) ***inmersión*** *si para todo $m \in M$ la función tangente $T_m f : T_m M \longrightarrow T_{f(m)}N$ es inyectiva y con rango cerrado y complementado;*

(ii) ***cuasiinmersión*** *si para todo $m \in M$ la función tangente $T_m f : T_m M \longrightarrow T_{f(m)}N$ es inyectiva con rango cerrado;*

(iii) ***inmersión débil*** *si para todo $m \in M$ la función tangente $T_m f : T_m M \longrightarrow T_{f(m)}N$ es inyectiva.*

Una inmersión entre variedades de Banach tiene las mismas propiedades que una inmersión entre variedades finito dimensional. Por ejemplo, se caracteriza por la propiedad de que localmente está dada por un mapeo de la forma $u \longmapsto (u, 0)$, donde el espacio modelo de la carta en N necesariamente es complementado.

Desafortunadamente, en el estudio de las variedades de Banach Poisson, ni siquiera el concepto más débil de la cuasiinmersión se satisface y uno se ve obligado a trabajar con inmersiones débiles, como veremos en esta sección.

Concentremonos nuevamente en la distribución característica pero ahora en el contexto de las variedades de Banach Poisson.

Sea $(P, \{\cdot, \cdot\}_P)$ una variedad de Banach Poisson, el subespacio vectorial

$$S_p(P) := \{X_f(p) : \ f \in \mathcal{C}^\infty(P)\}$$

de T_pP es llamado ***subespacio característico*** en p. Notemos que $S_p(P)$ es, en general, un subespacio no cerrado del espacio de Banach T_pP. La unión

$$S(P) := \bigcup_{p \in P} S_p(P) \subset TP$$

es llamada ***la distribución característica*** de la estructura de Poisson en P.

Notemos que incluso si $S_p(P)$ fuera cerrado y complementado en T_pP para todo $p \in P$, $S(P)$ no necesariamente es un subfibrado de TP. Sin embargo, la distribución característica $S(P)$ es siempre **diferenciable**, en el sentido de que para todo $v_p \in S_p(P) \subset T_pP$ existe un campo vectorial suave localmente definido (llamemoslo X_f) cuyo valor en p es v_p. Asumamos que la distribución característica es completamente integrable. Para variedades de dimensión finita esto es automático por el Teorema de Stefan-Sussmann, pero este no está disponible para el caso infinito.

Sea $\mathfrak{L}$ una ***hoja*** de la distribución característica, i.e.,

- $\mathfrak{L}$ es una variedad de Banach conexa suave;
- la inclusión $i : \mathfrak{L} \hookrightarrow P$ es una inmersión inyectiva débil;

- $T_q i(T_q\mathfrak{L}) = S_q$ para cada $q \in \mathfrak{L}$;
- si la inclusión $i' : \mathfrak{L}' \hookrightarrow P$ es otra inmersión inyectiva débil satisfaciendo las tres condiciones anteriores y $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}'$, entonces necesariamente $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$, es decir, $\mathfrak{L}$ es maximal.

Si, además, asumimos que en la hoja $\mathfrak{L}$ existe una forma simpléctica débil $\omega_{\mathfrak{L}}$ consistente con la estructura de Poisson en P, entonces $\mathfrak{L}$ será llamada una ***hoja simpléctica***.

Veamos que significa esta "consistencia" que pedimos: consideremos de la Definición 3.1.2 la función $\sharp : T^*P \longrightarrow TP$ asociada al bivector de Poisson $\bar{\omega}$ en P y notemos que para cada $p \in P$, la función lineal continua $\sharp_p : T_p^*P \longrightarrow T_pP$ induce una función biyectiva continua $[\sharp_p] : T_p^*P/\mathrm{Ker}\sharp_p \longrightarrow S_p(P)$. Por definición, $\omega_{\mathfrak{L}}$ es ***consistente*** con la estructura de Poisson en P si

$$(\omega_{\mathfrak{L}})_q(u_q, v_q) = \bar{\omega}_{i(q)}\left(([\sharp_{i(q)}]^{-1} \circ T_q i)(u_q), [\sharp_{i(q)}]^{-1} \circ T_q i)(v_q)\right) \tag{3.15}$$

Esto nos muestra que la forma simpléctica débil $\omega_{\mathfrak{L}}$ consistente con la estructura de Poisson en P es única.

Para las variedades de Poisson de dimensión finita, hemos visto que todas las hojas son simplécticas y, por lo tanto, no es necesaria la última suposición. En el caso infinito dimensional, esta pregunta está abierta, incluso en el caso de un grupo de Lie-Banach G cuyo álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tiene un predual $\mathfrak{g}_*$ invariante bajo la acción coadjunta ($\mathrm{Ad}_g^*(\mathfrak{g}_*) \subset \mathfrak{g}_*$). En este caso, $\mathfrak{g}_*$ es un espacio de Banach Lie-Poisson y caracterizaremos una gran clase de puntos en $\mathfrak{g}_*$ cuyas órbitas coadjuntas son todas variedades simplécticas débiles. Sus componentes conexas son por lo tanto hojas simplécticas.

A continuación daremos una clase de variedades de Banach Poisson para las cuales algunas de las hojas simplécticas pueden ser determinadas explícitamente. En lo que sigue G denota un grupo de Lie-Banach (real o complejo), L_g y R_g son los difeomorfismos en G dados por las traslaciones a izquierda y derecha respectivamente para $g \in G$, y $\mathfrak{g}$ denota el álgebra de Lie de G.

Teorema 3.3.2. *Sea G un grupo de Lie-Banach (real o complejo) con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Supongamos que:*

i) *$\mathfrak{g}$ admite un predual $\mathfrak{g}_*$, i.e, $\mathfrak{g}_*$ es un espacio de Banach cuyo dual es $\mathfrak{g}$;*

ii) *la acción coadjunta de G en el dual $\mathfrak{g}^*$ deja al predual $\mathfrak{g}_*$ invariante, es decir, $Ad_g^*(\mathfrak{g}_*) \subset \mathfrak{g}_*$, para cualquier $g \in G$;*

iii) *para un $\rho \in \mathfrak{g}_*$ fijo, el grupo coadjunto de isotropía $G_\rho := \{g \in G : \ Ad_g^*\rho = \rho\}$, que es cerrado en G, es un subgrupo de Lie de G (en el sentido de que es una subvariedad de G y no sólo inyectivamente inmerso).*

Entonces, el álgebra de Lie de G_ρ es $\mathfrak{g}_\rho := \{\xi \in \mathfrak{g} : \ ad_\xi^*\rho = 0\}$ y el espacio topológico cociente $G/G_\rho := \{gG_\rho : \ g \in G\}$ admite una única estructura de variedad de Banach suave (real o compleja) haciendo de la proyección canónica $\pi : G \longrightarrow G/G_\rho$ una submersión suryectiva. La variedad G/G_ρ es débilmente simpléctica relativa a la 2-forma ω_ρ dada por

$$(\omega_\rho)_{[g]}\left(T_g\pi(T_eL_g\xi), T_g\pi(T_eL_g\eta)\right) := \langle \rho, [\xi, \eta] \rangle \tag{3.16}$$

donde $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, $g \in G$, $[g] := \pi(g) = gG_\rho$, *y* $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{g}_* \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ *(o* $\mathbb{C}$*) es la bilineal canónica entre* $\mathfrak{g}_*$ *y* $\mathfrak{g}$*. Alternativamente, esta forma puede expresarse como*

$$(\omega_\rho)_{[g]}\left(T_g\pi(T_eR_g\xi), T_g\pi(T_eR_g\eta)\right) := \left\langle \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho, [\xi,\eta]\right\rangle. \tag{3.17}$$

La 2-forma ω_ρ *es invariante bajo la acción a izquierda de* G *en* G/G_ρ *dada por* $g\cdot[h] := [gh]$*, para* $g, h \in G$*.*

Demostración. El subgrupo G_ρ es claramente cerrado. Para grupos de Lie-Banach no es cierto que subgrupos cerrados son subgrupos de Lie [Cap. III, 8.2, [6]]. Sin embargo, como en el caso finito dimensional, si asumimos que G_ρ es un subgrupo de Lie de G, entonces $\xi \in \mathfrak{g}$ es un elemento del álgebra de Lie de G_ρ si y sólo si $\exp t\xi \in G_\rho$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$).

Por otro lado, en [Lema 6.2.15, [11]] tenemos la igualdad

$$\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)} = e^{\mathrm{ad}_{t\xi}}, \quad \text{donde} \quad e^a = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!},\ a \in L(\mathfrak{g}).$$

Derivando esta igualdad con respecto a t obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)} &= \frac{d}{dt}e^{\mathrm{ad}_{t\xi}}\\
&= \frac{d}{dt}\left(1 + [t\xi,\cdot] + \frac{1}{2}[t\xi,[t\xi,\cdot]] + \frac{1}{6}[t\xi,[t\xi,[t\xi,\cdot]]] + \cdots\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(1 + t[\xi,\cdot] + \frac{t^2}{2}[\xi,[\xi,\cdot]] + \frac{t^3}{6}[\xi,[\xi,[\xi,\cdot]]] + \cdots\right)\\
&= [\xi,\cdot] + t[\xi,[\xi,\cdot]] + \frac{t^2}{2}[\xi,[\xi,[\xi,\cdot]]] + \cdots\\
&= \left(1 + t[\xi,\cdot] + \frac{t^2}{2}[\xi,[\xi,\cdot]] + \cdots\right)([\xi,\cdot])\\
&= \left(e^{\mathrm{ad}_{t\xi}}\right)(\mathrm{ad}_\xi)\\
&= \mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)}(\mathrm{ad}_\xi).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}^*_{\exp t\xi}\rho = \mathrm{Ad}^*_{\exp t\xi}\mathrm{ad}^*_\xi\rho,$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\exp t\xi \in G_\rho &\iff \mathrm{Ad}^*_{\exp t\xi}\rho = \rho\\
&\iff 0 = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}^*_{\exp t\xi}\rho = \mathrm{Ad}^*_{\exp t\xi}\mathrm{ad}^*_\xi\rho\\
&\iff 0 = \mathrm{ad}^*_\xi\rho\\
&\iff \xi \in \mathfrak{g}_\rho,
\end{aligned}$$

lo cual muestra que el álgebra de Lie de G_ρ es $\mathfrak{g}_\rho$.

Como suponemos que G_ρ es un subgrupo de Lie de G, el conjunto G/G_ρ tiene una única estructura de variedad suave tal que la proyección canónica $\pi : G \longrightarrow$

G/G_ρ es una submersión (i.e., $T_g\pi : T_gG \longrightarrow T_{\pi(g)}G/G_\rho$ es suryectiva y Ker$T_g\pi$ es complementado en T_gG $\forall g \in G$) [Teor. 9.1.16, [9]]. La topología de variedad de G/G_ρ es la topología cociente. La acción a izquierda

$$(g, [h]) \in G \times G/G_\rho \longmapsto g \cdot [h] := [gh]$$

es suave.

Observemos que la condición (ii) implica que $\mathrm{ad}^*_\xi(\mathfrak{g}_*) \subset \mathfrak{g}_*$ para cualquier $\xi \in \mathfrak{g}$.

Las 2-formas definidas en las fórmulas (3.16), (3.17) son iguales. En efecto, tomando (3.16) como en la definición pero aplicandola a vectores tangentes de la forma $T_g\pi(T_eR_g\xi)$, $T_g\pi(T_eR_g\eta)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
(\omega_\rho)_{[g]}\left(T_g\pi(T_eR_g\xi), T_g\pi(T_eR_g\eta)\right) &= (\omega_\rho)_{[g]}\left(T_g\pi(T_eL_g(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi)), T_g\pi(T_eL_g(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\eta))\right) \\
&= \langle \rho, [\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\eta]\rangle \\
&= \langle \rho, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}[\xi, \eta]\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho, [\xi, \eta]\right\rangle,
\end{aligned}$$

la cual es la fórmula (3.17).

Ahora veamos que la 2-forma (3.17) está bien definida. En efecto, si $[g] = [g']$ y $T_g\pi(T_eR_g\xi) = T_{g'}\pi(T_eR_{g'}\xi')$, entonces existe algún $h \in G_\rho$ tal que $g' = gh$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
T_g\pi(T_eR_g\xi) &= T_{g'}\pi(T_eR_{g'}\xi') \\
&= T_{gh}\pi(T_eR_{gh}\xi') \\
&= T_g(\pi \circ R_h)(T_eR_g\xi') \\
&= T_g\pi(T_eR_g\xi'),
\end{aligned}$$

lo que significa que $T_g\pi(T_eR_g(\xi - \xi')) = 0$. Dado que las fibras de π son de la forma gG_ρ, esto es equivalente a $T_eR_g(\xi - \xi') \in T_eL_g(\mathfrak{g}_\rho)$, es decir, $\xi - \xi' \in \mathrm{Ad}_g(\mathfrak{g}_\rho)$. Así, existe algún $\zeta \in \mathfrak{g}_\rho$ tal que $\zeta' = \zeta + \mathrm{Ad}_g\zeta$. Análogamente, si $T_g\pi(T_eR_g\eta) = T_{g'}\pi(T_eR_{g'}\eta')$ existe algún $\zeta' \in \mathfrak{g}_\rho$ tal que $\eta' = \eta + \mathrm{Ad}_g\zeta'$. Por lo tanto, como $\mathrm{ad}^*_\zeta\rho = \mathrm{ad}^*_{\zeta'}\rho = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\omega_\rho)_{[g']}\left(T_{g'}\pi(T_eR_{g'}\xi'), T_{g'}\pi(T_eR_{g'}\eta')\right) &= \left\langle \mathrm{Ad}^*_{(g')^{-1}}\rho, [\xi', \eta']\right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{Ad}^*_{(gh)^{-1}}\rho, [\xi + \mathrm{Ad}_g\zeta, \eta + \mathrm{Ad}_g\zeta']\right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho, [\xi + \mathrm{Ad}_g\zeta, \eta + \mathrm{Ad}_g\zeta']\right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho, [\xi, \eta]\right\rangle + \left\langle \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho, [\mathrm{Ad}_g\zeta, \eta]\right\rangle \\
&\quad + \left\langle \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho, [\xi, \mathrm{Ad}_g\zeta']\right\rangle + \left\langle \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho, \mathrm{Ad}_g[\zeta, \zeta']\right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho, [\xi, \eta]\right\rangle + \langle \rho, [\zeta, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\eta]\rangle \\
&\quad + \langle \rho, [\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi, \zeta']\rangle + \langle \rho, [\zeta, \zeta']\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho, [\xi, \eta]\right\rangle + \left\langle \mathrm{ad}^*_\zeta\rho, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\eta\right\rangle \\
&\quad - \left\langle \mathrm{ad}^*_{\zeta'}\rho, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi\right\rangle + \left\langle \mathrm{ad}^*_\zeta\rho, \zeta'\right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho, [\xi, \eta]\right\rangle \\
&= (\omega_\rho)_{[g]}(T_g\pi(T_eR_g\xi), T_g\pi(T_eR_g\eta)).
\end{aligned}$$

La 2-forma ω_ρ es débilmente no degenerada. En efecto, dado $[g] \in G/G_\rho$ si

$$(\omega_\rho)_{[g]}(T_g\pi(T_eL_g\xi), T_g\pi(T_eL_g\eta)) = 0$$

para todo $T_g\pi(T_eL_g\eta)$ entonces, por (3.16), $\langle \mathrm{ad}^*_\xi\rho, \eta\rangle = 0$ para todo $\eta \in \mathfrak{g}$, luego $\mathrm{ad}^*_\xi\rho = 0$ y, por lo tanto $\xi \in \mathfrak{g}_\rho$ (ya que $\mathrm{ad}^*_\xi\rho \in \mathfrak{g}_*$) que es equivalente a $T_g\pi(T_eL_g\xi) = 0$.

Para ver que la 2-forma ω_ρ es suave y cerrada en G/G_ρ pasaremos por ver que la 1-forma suave en G dada por

$$\nu_\rho(g)(T_eL_g\xi) := -\langle\rho, \xi\rangle$$

satisface $d\nu_\rho = \pi^*\omega_\rho$. Como π es una submersión suryectiva esto implica inmediatamente que ω_ρ es suave y cerrada. Calculemos la derivada exterior de ν_ρ, denotaremos por X, Y los campos vectoriales en G dados por $X(g) = T_eL_g\xi$ y $Y(g) = T_eL_g\eta$, así $\nu_\rho(X)(g) = -\langle\rho,\xi\rangle$ es constante y $[X,Y](g) = T_eL_g[\xi,\eta]$. Por lo tanto, por [M-R, Cap.4, pág. 140, id. 6],

$$\begin{aligned}
d\nu_\rho(g)(T_eL_g\xi, T_eL_g\eta) &= d\nu_\rho(X,Y)(g)\\
&= X[\nu_\rho(Y)](g) - Y[\nu_\rho(X)](g) - \nu_\rho([X,Y])(g)\\
&= -\nu_\rho([X,Y])(g)\\
&= -\nu_\rho(g)(T_eL_g[\xi,\eta])\\
&= \langle\rho, [\xi,\eta]\rangle\\
&= (\pi^*\omega_\rho)_g(T_eL_g\xi, T_eL_g\eta).
\end{aligned}$$

Para probar que ω_ρ es G-invariante, notemos que π es G-equivariante, $\omega_\rho = \pi^*\nu_\rho$, y que ν_ρ es G-invariante.

□

Ahora estudiaremos las órbitas coadjuntas de G a través de los puntos de $\mathfrak{g}_*$.

Teorema 3.3.3. *Sea G el grupo de Lie Banach y el elemento $\rho \in \mathfrak{g}_*$ satisfaciendo las hipótesis del Teorema 3.3.2. Entonces el mapeo*

$$\begin{aligned}
\iota : G/G_\rho &\longrightarrow \mathfrak{g}_*\\
[g] &\longmapsto \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho
\end{aligned}$$

es una inmersión débil inyectiva de la variedad cociente G/G_ρ en el espacio predual $\mathfrak{g}_*$. Dotamos a la órbita $\mathcal{O} := \{Ad^*_g\rho : \ g \in G\}$ con la estructura de variedad que hace de ι un difeomorfismo. El push forward $\iota_*(\omega_\rho)$ de la forma simpléctica débil ω_ρ a $\mathcal{O}$ tiene la expresión

$$(\omega_{\mathcal{O}})_{Ad^*_{g^{-1}}\rho}\left(\mathrm{ad}^*_{Ad_g\xi}\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho, \mathrm{ad}^*_{Ad_g\eta}\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho\right) = \langle\rho, [\xi,\eta]\rangle, \qquad (3.18)$$

para $g \in G$, $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, y $\rho \in \mathfrak{g}_*$. Relativa a esta forma simpléctica las componentes conexas de la órbita coadjunta $\mathcal{O}$ son hojas simplécticas del espacio de Banach Lie-Poisson $\mathfrak{g}_*$.

Demostración. Ya observamos que por el Teorema 3.2.2 el predual $\mathfrak{g}_*$ es un espacio de Banach Lie-Poisson cuyo corchete de Poisson está dado por (3.6). Para cada $\rho \in \mathfrak{g}_*$, por la fórmula (3.7), su subespacio característico está dado por

$$S_\rho = \{\mathrm{ad}^*_\xi \rho : \ \xi \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{g}_*$$

ya que $\mathrm{ad}^*_\xi(\mathfrak{g}_*) \subset \mathfrak{g}_*$, para cualquier $\xi \in \mathfrak{g}$.

El mapeo $\iota : [g] \in G/G_\rho \longmapsto \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho \in \mathcal{O}$ es una biyección, por lo que dotamos a $\mathcal{O}$ con la estructura de variedad de Banach haciendo de esta biyección un difeomorfismo. Como el mapeo $g \in G \longmapsto \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\rho \in \mathfrak{g}_*$ es continua, se tiene que la inclusión $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}_*$ es también continua.

Probaremos ahora que el mapeo $g \in G \longmapsto \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\rho \in \mathfrak{g}_*$ es suave. En efecto, su derivada

$$T_eL_g\xi \in T_gG \longmapsto -\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\left(\mathrm{ad}^*_\xi\rho\right) = -\mathrm{ad}^*_{Ad_g\xi}\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho \in \mathfrak{g}_* \tag{3.19}$$

es un mapeo lineal continuo de T_gG en $\mathfrak{g}_*$, es decir, el mapeo $g \in G \longmapsto \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\rho \in \mathfrak{g}_*$ es $\mathcal{C}^1$. Realizando inducción, obtenemos que este mapeo es $\mathcal{C}^\infty$. Además, el rango de la derivada en g es el subespacio característico $S_{Ad^*_{g^{-1}}\rho}$ en $Ad^*_{g^{-1}}\rho$.

Como el mapeo $g \in G \longmapsto \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\rho \in \mathfrak{g}_*$ es G_ρ-invariante, obtenemos que $\iota : [g] \in G/G_\rho \longmapsto \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\rho \in \mathfrak{g}_*$ es suave y que el rango de su derivada en $[g]$, está dado por

$$T_{[g]}\iota : T_g\pi(T_eL_g\xi) \in T_{[g]}(G/G_\rho) \longmapsto -\mathrm{ad}^*_{Ad_g\xi}\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho \in \mathfrak{g}_*$$

es igual a $S_{Ad_{g^{-1}}\rho}$. Ahora bien, el mapeo $T_{[g]}\iota$ es inyectivo. En efecto, si

$$T_{[g]}\iota(T_g\pi(T_eL_g\xi)) = -\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\left(\mathrm{ad}^*_\xi\rho\right),$$

entonces $\xi \in \mathfrak{g}_\rho$ y por lo tanto $T_g\pi(T_eL_g\xi) = 0$. Lo que nos dice que ι es una inmersión débil inyectiva.

Vamos a dotar a la variedad $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}_*$ con el push forward de la forma simpléctica débil, $\omega_{\mathcal{O}}$ dado por el difeomorfismo ι. De la fórmula de su derivada (3.19) y por (3.16), es inmediato que esta forma simpléctica débil en $\mathcal{O}$ tiene la expresión

$$(\omega_{\mathcal{O}})_{Ad^*_{g^{-1}}\rho}\left(\mathrm{ad}^*_{Ad_g\xi}\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho, \mathrm{ad}^*_{Ad_g\eta}\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho\right) = \langle\rho, [\xi,\eta]\rangle. \tag{3.20}$$

Ahora bien, consideramos $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}_*)$ y $\rho \in \mathfrak{g}_*$. Como

$$X_f(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho) = -\mathrm{ad}^*_{Df(Ad^*_{g^{-1}}\rho)}\left(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho\right) \in S_{Ad^*_{g^{-1}}\rho},$$

y $S_{Ad^*_{g^{-1}}\rho}$ es el espacio tangente en $\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho$ a la órbita $\mathcal{O}$, así, tenemos que esta órbita es una subvariedad de Poisson de $\mathfrak{g}_*$. Como

$$Df(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho) = \mathrm{Ad}_g\left(D(f \circ \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}})(\rho)\right)$$

para $g \in G$ y $\rho \in \mathfrak{g}_*$. Reescribiendo lo anterior

$$X_f(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho) = -\mathrm{ad}^*_{Ad_g\left(D(f\circ Ad^*_{g^{-1}})(\rho)\right)}\left(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho\right),$$

y por lo tanto, para cualquier $\eta \in \mathfrak{g}$

$$(\omega_{\mathcal{O}})_{Ad^*_{g^{-1}}\rho}\left(X_f(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho), \mathrm{ad}^*_{Ad_g\eta}\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho\right)$$

reemplazando por las identidades vistas

$$\begin{aligned}
&(\omega_{\mathcal{O}})_{Ad^*_{g^{-1}}\rho}\left(-\mathrm{ad}^*_{Ad_g\left(D(f\circ Ad^*_{g^{-1}})(\rho)\right)}\left(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho\right), \mathrm{ad}^*_{Ad_g\eta}\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho\right)\\
&= \langle \rho, [D(f\circ \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}})(\rho), \eta]\rangle\\
&= -\langle \mathrm{ad}^*_{\eta}\rho, D(f\circ \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}})(\rho)\rangle\\
&= -Df(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho)\left(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\left(\mathrm{ad}^*_{\eta}\rho\right)\right)\\
&= -Df(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho)\left(\mathrm{ad}^*_{Ad_g\eta}\left(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\rho\right)\right),
\end{aligned}$$

Lo que muestra que el campo vectorial Hamiltoniano X_f relativo a la estructura de Lie-Poisson (3.6) calculado en un punto de la órbita $\mathcal{O}$ también es Hamiltoniano relativo a la forma simpléctica débil $\omega_{\mathcal{O}}$. Por lo tanto, la estructura de Lie-Poisson en $\mathfrak{g}_*$ y la forma simpléctica débil en la órbita son compatibles, i.e., la estrutura de Lie-Poisson (3.6)induce la forma simpléctica débil (3.18) en la órbita.

En resumen, hemos probado que cada componente conexa de la órbita coadjunta es una variedad de Banach suave y conexa, que la inclusión de la órbita en $\mathfrak{g}_*$ es una inmersión inyectiva débil tal que su función tangente en cada punto tiene de rango al subespacio característico en dicho punto. Por último, probamos que la estructura de Lie-Poisson en $\mathfrak{g}_*$ induce una forma simpléctica débil en la órbita dada por el difeomorfismo canónico de la órbita con el espacio cociente G/G_ρ. Luego, como las órbitas son una partición de $\mathfrak{g}_*$, la condición de maximalidad se cumple automáticamente.

$\square$

4. La Grassmanniana restringida

4.1. Algunas definiciones y notaciones

En esta breve sección recordaremos definiciones básicas en el contexto a trabajar y daremos notaciones que utilizaremos a lo largo del presente trabajo.

Supongamos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable con la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$. Asumiremos que estos subespacios $\mathcal{H}_+$ y $\mathcal{H}_-$ son ortogonales entre sí, cerrados e infinito dimensionales. Las proyecciones ortogonales sobre $\mathcal{H}_+$, $\mathcal{H}_-$ las denotaremos por $p_+ : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_+$ y $p_- : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_-$ respectivamente.

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ será el álgebra de todos los operadores acotados en $\mathcal{H}$. Denotamos por $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ al espacio los operadores de Hilbert-Schmidt en $\mathcal{H}$. Recordemos, además, que $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}), \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Hilbert, donde $\|\cdot\|_2$ es la norma de Hilbert-Schmidt dada por

$$\|A\|_2 = \left(\sum_i \|Ae_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

para $\{e_i\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Además, $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ es un ideal bilátero del álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

El grupo de Lie-Banach de operadores unitarios en $\mathcal{H}$ los denotamos por $\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \ U^*U = UU^* = I\}$, y su álgebra de Lie está dada por

$$\mathfrak{u}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \ A^* = -A\}.$$

Definición 4.1.1. Definimos el ***álgebra de Banach restringida*** de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{res} &= \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \ [d, A] \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})\} \\ &= \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \ \|A\|_{res} := \|A\| + \|[d, A]\|_2 < \infty\}, \end{aligned}$$

donde d es el elemento antihermitiano

$$d := i(p_+ - p_-) \in \mathfrak{u}(\mathcal{H}).$$

Veamos que efectivamente $\mathcal{B}_{res}$ es un $*$-álgebra de Banach. Claramente, de las definiciones dadas, $(\mathcal{B}_{res}, \|\cdot\|_{res})$ es un espacio de Banach, verifiquemos entonces que se cumple la subaditividad de la norma $\|\cdot\|_{res}$: sean $A, B \in \mathcal{B}_{res}$

$$\begin{aligned} \|AB\|_{res} &= \|AB\| + \|[d, AB]\|_2 \\ &\leq \|A\|\|B\| + \|[d, A]B + A[d, B]\|_2 \\ &\leq \|A\|\|B\| + \|[d, A]B\|_2 + \|A[d, B]\|_2 \\ &\leq \|A\|\|B\| + \|[d, A]\|_2\|B\| + \|A\|\|[d, B]\|_2 \\ &\leq \|A\|_{res}\|B\|_{res}. \end{aligned}$$

Donde usamos que $[d, \cdot] : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una derivación. Por lo tanto, $\mathcal{B}_{res}$ es un $*$-álgebra de Banach.

Definición 4.1.2. *$\mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H})$ es el subgrupo de $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$ que consiste en todos los operadores $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que el conmutador $[d, A]$ es un operador de Hilbert-Schmidt, i.e.*

$$\mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{G}l(\mathcal{H}) : \ [d, A] \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})\}.$$

Observación 4.1.3. Podemos ver al conjunto $\mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H})$ de la siguiente manera: si $A \in \mathcal{G}l(\mathcal{H})$ lo escribimos en su forma matricial según la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Así, $A \in \mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H})$ si y sólo si a_{12} y a_{21} son operadores de Hilbert-Schmidt.

Observemos también que podemos escribir a este grupo como

$$\mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}_{res} \cap \mathcal{G}l(\mathcal{H}).$$

En efecto, sea $A \in \mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H})$ si y sólo si $\exists B \in \mathcal{B}_{res}$: $AB = BA = I$. Luego, $A \in \mathcal{B}_{res} \cap \mathcal{G}l(\mathcal{H})$. Por otro lado, si $A \in \mathcal{B}_{res} \cap \mathcal{G}l(\mathcal{H})$ entonces $\exists B \in \mathcal{G}l(\mathcal{H})$ tal que $AB = BA = I$, es decir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
&(1) \quad a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \\
&(2) \quad a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0 \\
&(3) \quad a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \\
&(4) \quad a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1.
\end{aligned}$$

Como $A \in \mathcal{B}_{res}$, tenemos que $a_{12}, a_{21} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Así, de la primera igualdad (junto con la igualdad conmutando las matrices) concluimos que a_{11}, b_{11} son operadores de Fredholm y de (2) que $a_{11}b_{12} = -a_{12}b_{22} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Luego, como a_{11} es Fredholm entonces $p_{Ker(a_{11})^{\perp}}b_{12} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, y como $\dim\mathrm{Ker}(a_{11}) < \infty$ obtenemos $b_2 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Con un razonamiento análogo y usando las fórmulas (3) y (4) tenemos que $b_{21} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H})$.

Así, dotando a este grupo con la topología definida por $\| \cdot \|_{res}$ observamos que como $\mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H})$ es el grupo de operadores inversibles de un álgebra de Banach, y por lo tanto resulta un grupo de Lie-Banach.

Definición 4.1.4. *$\mathcal{U}_{res}(\mathcal{H})$ es el subgrupo de $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$ que consiste en todos los operadores unitarios, i.e.,*

$$\mathcal{U}_{res}(\mathcal{H}) = \{U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : \ [d, U] \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})\} = \mathcal{U}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{B}_{res}.$$

Proposición 4.1.5. *$\mathcal{U}_{res}(\mathcal{H})$ es un grupo de Lie .*

Demostración. Para probar esto veamos que $\mathcal{U}_{res}(\mathcal{H})$ es una subvariedad de $\mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H})$:

Consideramos la función

$$\Phi : \mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}_{res} \cap \mathcal{A}(\mathcal{H})$$

dada por $\Phi(A) = A^*A$. Donde $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ denota a los operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjuntos.

Es claro que $\mathcal{U}_{res}(\mathcal{H}) = \Phi^{-1}(I)$.

Ahora bien, Φ así definida es una submersión en todo $\Phi^{-1}(I)$. En efecto, podemos escribir

$$\Phi(A) = m(s(A), A),$$

donde

$$\begin{aligned} m : \mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H}) \times \mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H}), \\ m(a, b) &\longmapsto ab \end{aligned}$$

es suave y

$$\begin{aligned} s : \mathcal{B}_{res} &\longrightarrow \mathcal{B}_{res}, \\ A &\longmapsto A^* \end{aligned}$$

es suave. Por lo tanto, Φ es suave.

Por otro lado,

$$D\Phi(A) : \mathcal{B}_{res} \longrightarrow \mathcal{B}_{res} \cap \mathcal{A}(\mathcal{H}), \quad D\Phi(A)(X) = A^*X + X^*A = A^{-1}X + X^*A,$$

es suryectiva ya que considerando $Y = \frac{AX}{2}$ obtenemos

$$D\Phi(A)(Y) = A^{-1}Y + Y^*A = A^{-1}\frac{AX}{2} + \frac{X^*A^{-1}}{2}A = \mathrm{Re}(X)$$

y sabemos que $X \longmapsto \mathrm{Re}(X)$ es una función suryectiva.

Nos falta ver que $Ker(D\Phi(A))$ es complementado en $\mathcal{B}_{res}$. Observemos que

$$X \in Ker(D\Phi(A)) \iff A^{-1}X + X^*A = 0 \iff X = -AX^*A.$$

Llamemos $\mathcal{S} := Ker(D\Phi(A))$. De este modo,

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathcal{B}_{res} : \ X = -AX^*A\}$$

es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}_{res}$. Podemos escribir

$$X = \frac{X + AX^*A}{2} + \frac{X - AX^*A}{2}, \quad \frac{X + AX^*A}{2} \in \mathcal{T}, \ \frac{X - AX^*A}{2} \in \mathcal{S}.$$

donde

$$\mathcal{T} = \{X \in \mathcal{B}_{res} : \ X = AX^*A\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \{0\}$ entonces $\mathcal{S} \oplus \mathcal{T} = \mathcal{B}_{res}$.

Luego, $Ker(D\Phi(A))$ es complementado en $\mathcal{B}_{res}$. Por lo tanto, Φ es una submersión para todo $A \in \Phi^{-1}(I) = \mathcal{U}_{res}(\mathcal{H})$.

De este modo $\mathcal{U}_{res}(\mathcal{H})$ es un subgrupo de Lie de $\mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H})$. Y por ende, un grupo de Lie.

□

Así, consideraremos el álgebra de Lie de $\mathcal{U}_{res}(\mathcal{H})$ que está dada por la siguiente álgebra de Lie-Banach

$$\mathfrak{u}_{res} = \{A \in \mathfrak{u}(\mathcal{H}) : \ [d, A] \in \mathfrak{G}_2(\mathcal{H})\}.$$

Observación 4.1.6. Notemos que si tomamos $U \in \mathcal{U}_{res}(\mathcal{H})$ y expresamos su forma matricial con respecto a la descomposición de $\mathcal{H}$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

donde u_{11} y u_{22} son operadores de Fredholm en $\mathcal{H}_+$ y $\mathcal{H}_-$ respectivamente, y $\text{índ}(u_{11}) = -\text{índ}u_{22}$. Así, $\text{índ}(U) = \text{índ}(u_{11})$.

Luego, las componentes conexas de $\mathcal{U}_{res}(\mathcal{H})$ se parametrizan por el índice de Fredholm, ver [7],

$$\mathcal{U}_{res}^k = \{U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : \ \text{índ}(u_{11}) = k, \}, \ k \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

4.2. La Grassmanniana restringida

Con todo lo antes visto pasaremos ahora a la definición de la *Grassmanniana restringida* o *Grassmanniana de Sato*:

Definición 4.2.1. *La **Grassmanniana restringida**, que notamos por $Gr_{res}(\mathcal{H})$, es el conjunto de todos los subespacios cerrados W de $\mathcal{H}$ tales que:*

(i) *La proyección ortogonal $p_+ |_W : W \longrightarrow \mathcal{H}_+$ es un operador de Fredholm, y*

(ii) *la proyección ortogonal $p_- |_W : W \longrightarrow \mathcal{H}_-$ es un operador de Hilbert-Schmidt.*

Cuando se sobreentienda cual es el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ considerado, notaremos a la $\text{Gr}_{res}(\mathcal{H})$ sólo por Gr_{res}. Antes de comenzar a ver resultados sobre Gr_{res}, es necesario tener en cuenta una serie de observaciones que se desprenden directamente de la Definición 4.2.1:

Observación 4.2.2.

(i) $W \in \text{Gr}_{res}$ si y sólo si

$$p_W = \begin{pmatrix} x & a \\ a^* & y \end{pmatrix},$$

donde x es un operador de Fredholm y $a, y \in \mathfrak{G}_2(\mathcal{H})$. Ver [Lema 3.3, [2]].

(ii) Si W es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ que satisface: $\dim(W \ominus \mathcal{H}_+) < \infty$ y $\dim(\mathcal{H}_+ \ominus W) < \infty$ entonces $W \in \text{Gr}_{res}$. Veamos esto: es fácil ver que $p_- |_W \in \mathfrak{G}_2(\mathcal{H})$. Por otro lado, tenemos que $R(p_+ |_W)$ es cerrado y

$$\text{Ker}(p_+ |_W) = W \cap \mathcal{H}_- = W \cap \mathcal{H}_+^\perp \subset W \cap (\mathcal{H}_+ \cap W)^\perp = W \ominus \mathcal{H}_+,$$

entonces $\dim\text{Ker}(p_+ |_W) < \dim(W \ominus \mathcal{H}_+) < \infty$. Escribiendo $p_+ |_W = p_+ p_W$ tenemos que

$$\text{Ker}((p_+ |_W)^*) = \text{Ker}(p_W p_+ |_{\mathcal{H}_+}) = \mathcal{H}_+ \cap W^\perp \subset \mathcal{H}_+ \cap (\mathcal{H}_+ \cap W)^\perp = \mathcal{H}_+ \ominus W,$$

por lo que $\dim\text{Ker}((p_+ |_W)^*) < \dim(\mathcal{H}_+ \ominus W) < \infty$. Así, $p_+ |_W$ es un operador de Fredholm.

(iii) Si $T : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}_-$ es un operador de Hilbert-Schmidt, su gráfica

$$E_T = \{(x, Tx) : \ x \in \mathcal{H}_+\} \in \mathrm{Gr}_{res}.$$

En efecto, que E_T es cerrado es consecuencia del Teorema del Gráfico cerrado. Veamos que $p_+ |_{E_T}$ es un operador de Fredholm: es claro que $R(p_+ |_{E_T})$ es cerrado. Por otro lado, tenemos que $\mathrm{Ker}(p_+ |_{E_T}) = \mathcal{H}_- \cap E_T$, sea

$$t = (x, y) \in \mathcal{H}_- \cap E_T \iff x = 0, \ y = Tx = 0 \iff t = 0.$$

Entonces, $\mathrm{dimKer}(p_+ |_{E_T}) = 0$. Considerando $\mathrm{Ker}(p_+ |_{E_T})^* = \mathrm{Ker}(p_{E_T} |_{\mathcal{H}_+}) = \mathcal{H}_+ \cap E_T^\perp$, de forma análoga resulta $\mathrm{dimKer}((p_+ |_{E_T})^*) = 0$.

Veamos ahora que $p_- |_{E_T} \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$: para esto consideremos la descomposición de Schmidt del operador T

$$T = \sum s_n f_n \otimes e_n,$$

donde s_n son los valores singulares del operador T, $\{e_n\}_n$ es una base ortonormal de $\mathrm{Ker}(T)^\perp$ y $\{f_n\}_n$ una base ortonormal de $\overline{R(T)}$ tal que $Te_n = s_n f_n$. Ahora bien, sea $\{g_n\}_n$ base ortonormal de $\mathrm{Ker}(T)$, obtenemos

$$\{b_n\}_n = \{(g_n, 0)\}_n \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + s_n^2}} (e_n, Te_n) \right\}_n$$

es una base ortonormal de E_T. Luego,

$$\begin{aligned} \|p_- |_{E_T}\|_2^2 &= \sum_n \|p_- b_n\|^2 \\ &= \sum_n \frac{1}{\sqrt{1 + s_n^2}} \|Te_n\|^2 \\ &\leq \sum_n \|Te_n\|^2 < \infty \end{aligned}$$

ya que $T \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Por lo tanto, $p_- |_{E_T}$ es un operador de Hilbert-Schmidt.

(iv) La Definición 4.2.1 corresponde a la Grassmanniana restringida asociada a $\mathcal{H}_+$. La Grassmannina restringida asociada a $\mathcal{H}_-$ está dada de forma equivalente como todos los subespacios cerrados W' en $\mathcal{H}$ tales que $p_- |_{W'}$ es Fredholm y $p_+ |_{W'}$ es Hilbert-Schmidt. Por lo que, una equivalencia inmediata es la siguiente:

$$W \in \mathrm{Gr}_{res}(\mathcal{H}_+) \iff W^\perp \in \mathrm{Gr}_{res}(\mathcal{H}_-)$$

(v) Si $W \in \mathrm{Gr}_{res}$ entonces $\mathrm{dim}W = \mathrm{dim}W^\perp = \infty$. Llamemos $c = p_+ |_W : W \longrightarrow \mathcal{H}_+$, podemos escribir

$$W = \mathrm{Ker}(c) + \mathrm{Ker}(c)^\perp, \quad \mathcal{H}_+ = R(c) + R(c)^\perp.$$

Como c es un operador de Fredholm tenemos que $\mathrm{dim}R(c)^\perp < \infty$ y como $R(c) \equiv \mathrm{Ker}(c)^\perp$, y $\mathrm{dim}\mathcal{H}_+ = \infty$ resulta $\mathrm{dim}W = \infty$.

Existe otra forma de presentar a la Grassmanniana restringida que deriva del siguiente lema.

Lema 4.2.3. *$W \in Gr_{res}(\mathcal{H})$ si y sólo si $\exists A : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $R(A) = W$, p_+A es Fredholm y p_-A es Hilbert-Schmidt.*

Demostración. En efecto, dado $W \in \mathrm{Gr}_{res}$ llamamos $c = p_+ |_W$, así escribimos

$$W = \mathrm{Ker}(c) \oplus \mathrm{Ker}(c)^\perp, \quad \mathcal{H}_+ = R(c) \oplus R(c)^\perp.$$

Por un lado, tenemos que $c |_{Ker(c)^\perp}$: $\mathrm{Ker}(c)^\perp \longrightarrow R(c)$ es un isomorfismo. Ahora bien, si índ(c)= 0, i.e, $\dim(\mathrm{Ker}(c)) = \dim(R(c))^\perp$, existe $b : R(c)^\perp \longrightarrow \mathrm{Ker}(c)$ isomorfismo. De este modo consideramos el operador

$$Ax = \begin{cases} \left(c |_{Ker(c)^\perp}\right)^{-1} x & \text{si } x \in R(c) \\ bx & \text{si } x \in R(c)^\perp \end{cases}$$

Así definido $A : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}$ es continuo y $R(A) = W$. Sea $x \in R(c)$,

$$p_+Ax = p_+ |_W \left(\left(c |_{Ker(c)^\perp}\right)^{-1} x\right) = \left(c \left(c |_{Ker(c)^\perp}\right)^{-1}\right) x = x. \tag{4.2}$$

Si $x \in R(c)^\perp$,

$$p_+A(x) = bx \in \mathrm{Ker}(c),$$

como tenemos que $W \in \mathrm{Gr}_{res}(\mathcal{H})$ sabemos que $\dim\mathrm{Ker}(c) < \infty$ y $\dim(R(c))^\perp < \infty$. Esto junto con la fórmula (4.2), nos muestra que $\dim\mathrm{Ker}(p_+A) < \infty$.

Por otro lado,

$$R(p_+A) = p_+(R(A)) = p_+(W)$$

el cual es un conjunto cerrado por ser W cerrado y p_+ una proyección ortogonal. Veamos que $\dim R(p_+A)^\perp < \infty$: en efecto,

$$\begin{aligned} R(p_+A)^\perp &= \mathcal{H}_+ \ominus R(p_+A) = \mathcal{H}_+ \ominus p_+(W) \\ &= \mathcal{H}_+ \cap (p_+(W))^\perp \subseteq W^\perp \cap \mathcal{H}_+. \end{aligned}$$

Luego, como $W \in \mathrm{Gr}_{res}$, tenemos que $\dim W^\perp \cap \mathcal{H}_+ < \infty$, así $\dim R(p_+A) < \infty$. El caso en que índ(c) $\in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ es similar.

Veamos la vuelta. Consideramos $A : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $R(A) = W$, p_+A es Fredholm y p_-A es Hilbert-Schmidt. Luego,

$$p_+A = p_+ |_W A \;\Rightarrow\; p_+A |_{Ker(A)^\perp} = p_+ |_W A |_{Ker(A)^\perp},$$

Ahora bien, $A |_{Ker(A)^\perp}$: $\mathrm{Ker}(A)^\perp \longrightarrow W$ es un isomorfismo. Por lo que, escribimos

$$p_+ |_W = \left(p_+A |_{Ker(A)^\perp}\right) \left(A |_{Ker(A)^\perp}\right)^{-1}. \tag{4.3}$$

Veamos que $p_+A |_{Ker(A)^\perp}$ es un operador de Fredholm. Como $R(p_+A |_{Ker(A)^\perp}) = R(p_+A)$ tenemos que es cerrado. Por otro lado,

$$\dim\mathrm{Ker}\left(p_+A |_{Ker(A)^\perp}\right)^* = \dim R\left(p_+A |_{Ker(A)^\perp}\right)^\perp = \dim R(p_+A)^\perp < \infty$$

y

$$\operatorname{Ker}\left(p_+A\mid_{Ker(A)^\perp}\right)=\operatorname{Ker}(p_+A)\cap\operatorname{Ker}(A)^\perp\subseteq\operatorname{Ker}(p_+A)\ \Rightarrow\ \operatorname{dimKer}\left(p_+A\mid_{Ker(A)^\perp}\right)<\infty.$$

Por lo tanto, $p_+\mid_W$ es un operador de Fredholm.

Veamos que $p_-\mid_W\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$:

$$p_-A=p_-\mid_W A\ \Rightarrow\ \ p_-A\mid_{Ker(A)^\perp}=p_-\mid_W A\mid_{Ker(A)^\perp}.$$

Luego,

$$p_-\mid_W=\left(p_-A\mid_{Ker(A)^\perp}\right)\left(A\mid_{Ker(A)^\perp}\right)^{-1},$$

con $p_-A\mid_{Ker(A)^\perp}\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Por lo tanto, $p_-\mid_W\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

□

El grupo $\mathcal{U}_{res}(\mathcal{H})$, que vimos en la sección anterior, actúa sobre $\mathrm{Gr}_{res}(\mathcal{H})$ mediante la acción

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{res}\times\mathrm{Gr}_{res}&\longrightarrow\mathrm{Gr}_{res}\\(U,W)&\longmapsto U(W).\end{aligned}$$

Considerando la otra caracterización de la Grassmanniana restringida, observación 4.2.2 (i), podemos escribir esta acción como:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{res}\times\mathrm{Gr}_{res}&\longrightarrow\mathrm{Gr}_{res}\\(U,p_W)&\longmapsto Up_WU^*.\end{aligned}$$

Más aún, el siguiente resultado muestra que esta acción es transitiva.

Proposición 4.2.4. *El subgrupo $\mathcal{U}_{res}(\mathcal{H})$ de $\mathcal{G}l_{res}(\mathcal{H})$ actúa transitivamente en $Gr_{res}(\mathcal{H})$.*

Demostración. Supongamos que $W\in\mathrm{Gr}_{res}(\mathcal{H})$ queremos encontrar $U\in\mathcal{U}_{res}(\mathcal{H})$ tal que $U(\mathcal{H}_+)=W$.

Como $W\in Gr_{res}(\mathcal{H})$, existe $w:\mathcal{H}_+\longrightarrow\mathcal{H}$ isometría tal que $R(w)=W$ y $w^\perp:\mathcal{H}_-\longrightarrow\mathcal{H}$ isometría tal que $R(w^\perp)=W^\perp$. Entonces

$$w\oplus w^\perp:\mathcal{H}_+\oplus\mathcal{H}_-\longrightarrow\mathcal{H}_+\oplus\mathcal{H}_-$$

tomando $U=w\oplus w^\perp$, U es un operador unitario tal que $U(\mathcal{H}_+)=W$. Ahora bien, escribimos

$$U=\begin{pmatrix}w_+ & w_+^\perp\\ w_- & w_-^\perp\end{pmatrix}.$$

Como $W\in\mathrm{Gr}_{res}(\mathcal{H})$ sabemos que $w_+=p_+U\mid_{\mathcal{H}_+}=(p_+\mid_W)w$ es Fredholm ya que $p_+\mid_W$ es Fredholm y $w:\mathcal{H}_+\longrightarrow W$ es inversible (por lo tanto, w_+^* es Fredholm. Por otro lado, $w_-=p_-U\mid_{\mathcal{H}_+}=p_w=(p_-\mid_W)w$ es Hilbert-Schmidt ya que $p_-\mid_W$ lo es. Pero como U es unitario, en particular, tenemos que

$$w_+^*w_+^\perp+w_-^*w_-^\perp=0.$$

Así, como $w_-^*w_-^\perp\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, $p_{Ker(w_+^*)^\perp}w_+^\perp\in\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ lo que implica que $w_+^\perp$ también es Hilbert-Schmidt. Luego $U\in\mathcal{U}_{res}(\mathcal{H})$.

□

Observación 4.2.5. Una consecuencia directa de esta proposición es que el grupo de isotropía de $\mathcal{H}_+$ está dado por $\mathcal{U}(\mathcal{H}_+) \times \mathcal{U}(\mathcal{H}_-)$.

Observación 4.2.6. Si W pertenece a $\mathrm{Gr}_{res}(\mathcal{H})$ y consideramos un operador de Hilbert-Schmidt $T : W \longrightarrow W^{\perp}$ arbitrario entonces su gráfica

$$E_T = \{(w, Tw) : \ w \in W\}$$

también pertenece a $Gr_{res}(\mathcal{H})$. En efecto, consideramos $A : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}$ dada por

$$Ax = p_W V x + T p_W V x,$$

donde $V : \mathcal{H}_+ \longrightarrow W$ es una isometría suryectiva. Es claro que $R(A) = E_T$. Verifiquemos las demás condiciones:

$$p_+ A : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}_+, \quad p_+ A = p_+ p_W V + p_+ T p_W V = p_+ \mid_W p_W V + p_+ T p_W V.$$

Como $V : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}$ isomorfismo tenemos $R\left(p_+ \mid_W p_W V\right) = R\left(p_+ \mid_W\right)$ cerrado,

$$R\left(p_+ \mid_W p_W V\right)^{\perp} = R\left(p_+ \mid_W\right)^{\perp} \ \Rightarrow \ \mathrm{dim} R\left(p_+ \mid_W p_W V\right)^{\perp} < \infty$$

y

$$\mathrm{Ker}\left(p_+ \mid_W p_W V\right) = \mathrm{Ker}\left(p_+ \mid_W\right) \ \Rightarrow \ \mathrm{dimKer}\left(p_+ \mid_W p_W V\right) < \infty.$$

Luego, $p_+ \mid_W p_W V$ es Fredholm. Por otro lado,

$$p_- A : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}_-, \quad p_- A = p_- p_W V + p_- T p_W V = p_- \mid_W p_W V + p_+ T p_W V,$$

como $p_- \mid_W, p_- T p_W V \in \mathfrak{G}_2(\mathcal{H})$ entonces $p_- A \in \mathfrak{G}_2(\mathcal{H})$.

Con esto en mente podemos probar el siguiente resultado:

Lema 4.2.7. *Sea $W \in Gr_{res}$, consideramos el conjunto*

$$U_W = \{W' \in \mathrm{Gr}_{res} : \ p_W \mid_{W'} : W' \longrightarrow W \text{ es un isomorfismo}\} \tag{4.4}$$

Entonces, la función

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_2(W, W^{\perp}) &\longrightarrow U_W \\ T &\longmapsto E_T \end{aligned}$$

es una biyección.

Demostración. Supongamos que $E_{T_1} = E_{T_2}$ para $T_1, T_2 \in \mathfrak{G}_2(W, W^{\perp})$ entonces $\exists w' \in W$:

$$w + T_1 w = w' + T_2 w', \quad \text{donde} \quad w, w' \in W, \ T_1 w, T_2 w' \in W^{\perp}.$$

Luego, $T_1 = T_2$. Por lo que la aplicación es inyectiva.

Veamos la suryectividad, es decir, sea $W' \in U_W$ queremos ver que $\exists T \in \mathfrak{G}_2(W, W^{\perp})$ tal que $E_T = W'$. Para esto, llamamos $h = p_W \mid_{W'} : W' \longrightarrow W$ y definimos

$T = (I - p_W)\mid_{W'} h^{-1} : W \longrightarrow W^{\perp}$. Verifiquemos que se cumple lo pedido: sea $x \in W'$, como h^{-1} es isomorfismo, $\exists y \in W$ tal que $h^{-1}y = x$. Ahora bien

$$\begin{aligned} x &= h^{-1}y = (p_W + I - p_W)h^{-1}y \\ &= p_W h^{-1}y + (I - p_W)\mid_{W'} h^{-1}y \\ &= y + Ty, \end{aligned}$$

luego, $E_T = W'$. Nos falta ver que así definido $T \in \mathfrak{S}_2(W, W^{\perp})$, en efecto, tenemos que

$$T = (I - p_W)\mid_{W'} h^{-1} = (p_{W'} - p_W)h^{-1}$$

por lo que, veremos que $p_{W'} - p_W$ es Hilbert-Schmidt. Como la acción de $\mathcal{U}_{res}$ en Gr_{res} es transitiva, $\exists U, V \in \mathcal{U}_{res}$ tales que

$$p_W = Up_+U^*, \quad p_{W'} = Vp_+V^*,$$

obtenemos

$$Up_+U^* = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 \\ u_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}u_{11}^* & u_{11}u_{21}^* \\ u_{21}u_{11}^* & u_{21}u_{21}^* \end{pmatrix}$$

por un lado tenemos que $u_{11}u_{21}^*, u_{21}u_{11}^*, u_{21}u_{21}^*$ son operadores de Hilbert-Schmidt. Ahora bien, como $U \in \mathcal{U}_{res}$ tenemos que

$$UU^* = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}u_{11}^* + u_{12}u_{12}^* & u_{11}u_{21}^* + u_{12}u_{22}^* \\ u_{21}u_{11}^* + u_{22}u_{12}^* & u_{21}u_{21}^* + u_{22}u_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir que, en particular, $u_{11}u_{11}^* + u_{12}u_{12}^* = 1$. Procediendo de forma análoga con $V \in \mathcal{U}_{res}$, $V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$ obtenemos que $v_{11}v_{11}^* + v_{12}v_{12}^* = 1$. Como

$$p_{W'} - p_W = Vp_+V^* - Up_+U^*,$$

realizando el desarrollo en bloques tenemos que $u_{11}u_{11}^* - v_{11}v_{11}^* = -u_{12}u_{12}^* + v_{12}v_{12}^* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Por lo tanto, $T \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

□

Con todo lo antes visto, hemos llegado a uno de los resultados más relevantes de esta sección.

Teorema 4.2.8. *$Gr_{res}(\mathcal{H})$ es una variedad de Hilbert modelada en $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$.*

Demostración. Supongamos que U_{W_0} y U_{W_1} (definidos como en (4.4)) son subconjuntos de $\mathrm{Gr}_{res}(\mathcal{H})$ descriptos por los espacios de Hilbert $I_0 = \mathfrak{S}_2(W_0, W_0^{\perp})$ e $I_1 = \mathfrak{S}_2(W_1, W_1^{\perp})$ respectivamente.

Sea $U_{W_0} \cap U_{W_1}$ el subconjunto correspondiente a I_{01} en I_0 e I_{10} en I_1. Veamos que estos subconjuntos son abiertos y el cambio de coordenadas $I_{01} \longrightarrow I_{10}$ es suave.

Consideramos la expresión matricial de la transformación identidad

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

correspondiente a la descomposición

$$W_0 \oplus W_0^{\perp} \longrightarrow W_1 \oplus W_1^{\perp},$$

Con el mismo razonamiento utilizado en la prueba de la Proposición 4.2.4, sabemos que a y d son Fredholm y b y c son Hilbert-Schmidt.

Ahora bien, tomemos $W \in \mathrm{Gr}_{res}(\mathcal{H})$ de forma que $W = E_{T_0} = E_{T_1}$, donde $T_0 : W_0 \longrightarrow W_0^{\perp}$ y $T_1 : W_1 \longrightarrow W_1^{\perp}$. Como $p_{W_1} |_W \colon W \longrightarrow W_1$ es un isomorfismo, la función

$$a + bT_0 = p_{W_1} \circ I_{\mathcal{H}} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ T_0 \end{pmatrix} : W_0 \longrightarrow W_0 \oplus W_0^{\perp} \longrightarrow W_1 \oplus W_1^{\perp} \longrightarrow W_1$$

es un isomorfismo de W_0 en W_1. De este modo, las funciones

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ T_0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ T_1 \end{pmatrix} (a + bT_0)$$

de W_0 en $W_1 \oplus W_1^{\perp}$ son iguales. Así, tenemos que

$$T_1 = (c + dT_0)(a + bT_0)^{-1}. \tag{4.5}$$

Por lo tanto, $\varphi_{10}(T_0) := T_1$ es una función holomorfa de

$$I_{01} = \varphi_0^{-1}(U_{W_0} \cap U_{W_1}) = \{T_0 \in I_0 : \ a + bT_0 \text{ es inversible}\}.$$

en $\varphi_1^{-1}(U_{W_0} \cap U_{W_1}) = I_{10}$, donde $\varphi_j : \mathfrak{G}_2(W_j, W_j^{\perp}) \longrightarrow U_{W_j}$, $j = 0, 1$.

Así, Gr_{res} está dotada de una estructura de variedad dada por los conjuntos U_W y las funciones de transición están dadas por (4.5).

□

Observación 4.2.9. Podemos escribir de forma más específica el atlas a considerar: tomamos el conjunto $\mathcal{I} = \{S \subseteq \mathbb{Z} : \ |S - \mathbb{N}| \text{ y } |\mathbb{N} - S| \text{ son finitos}\}$ y fijamos una base ortonormal $\{e_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{H}$ de forma que $\{e_i\}_{i>0}$ y $\{e_i\}_{i<0}$ generan a $\mathcal{H}_+$ y $\mathcal{H}_-$ respectivamente. Asociamos a S en $\mathcal{I}$ el subespacio cerrado $\mathcal{H}_S$ generado por $\{e_i\}_{i\in S}$, donde $\mathcal{H}_S \in \mathrm{Gr}_{res}$.

Ahora bien, lo que obtenemos es que para todo $W \in \mathrm{Gr}_{res}$ existe $S \in \mathcal{I}$ tal que $p_{\mathcal{H}_S} |_W \colon W \longrightarrow \mathcal{H}_S$ es un isomorfismo. En otras palabras, los conjuntos $\{U_S\}_{S\in\mathcal{I}}$, donde $U_S = U_{\mathcal{H}_S}$ forman un cubrimiento abierto de $\mathrm{Gr}_{res}(\mathcal{H})$. En efecto, como la proyección $p_+ |_W \colon W \longrightarrow \mathcal{H}_+$ es un operador de Fredholm tenemos que $\dim\mathrm{Ker}(p_+ |_W) < \infty$ por lo que podemos encontrar $S_0 \in \mathcal{I}$ tal que $p_{\mathcal{H}_{S_0}} |_W$ es inyectiva. Ahora veamos que es suryectiva, si no lo fuera entonces existe un $s \in S_0$ tal que lo generado por el no se encuentra en $\mathcal{H}_{S_0}$ por lo que consideramos la proyección $p_{\mathcal{H}_{S_1}} |_W \colon W \longrightarrow \mathcal{H}_{S_1}$, donde $S_1 = S_0 \setminus \{s\}$, la cual es inyectiva. Repitiendo este procedimiento, en finitos pasos obtenemos el S deseado.

Así, obtenemos el cubrimiento de Gr_{res} indexado por el conjunto $\mathcal{I}$ y las funciones de transición son las que dimos anteriormente.

Para terminar esta subsección notemos lo siguiente

Observación 4.2.10. Los conjuntos dos a dos disjuntos

$$\mathrm{Gr}_{res}^{k} := \{W \in \mathrm{Gr}_{res} : \ \mathrm{índ}(p_+ \,|_W) = k\}, \ k \in \mathbb{Z},$$

que son la imagen de las componentes conexas de $\mathcal{U}_{res}$, dadas en (4.1), por la proyección continua

$$\mathcal{U}_{res} \longrightarrow \mathrm{Gr}_{res} = \mathcal{U}_{res}/(\mathcal{U}(\mathcal{H}_+) \times \mathcal{U}(\mathcal{H}_-)),$$

son las componentes conexas de Gr_{res}, [Prop. III.5 (iv), [21]].

5. Estructura simpléctica de Gr_{res}

En base a todo lo estudiado a lo largo del presente trabajo es natural preguntarnos (bueno... quizá no natural pero es una buena pregunta dadas las propiedades de la Grassmanniana que trabajamos) "¿Son las componentes conexas de la Grassmanniana restringida hojas simplécticas de un espacio de Banach Lie-Poisson?"

Con todo lo antes visto, desarrollaremos un poco más de conceptos para probar que la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

5.1. El espacio $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$

En esta sección contruiremos un espacio de Banach Lie-Poisson, que llamaremos $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$, cuyo dual es la extensión central universal del álgebra restringida $\mathfrak{u}_{res}$.

Teorema 5.1.1. *El álgebra de Lie $(\mathfrak{u}_{res})_*$ es un predual del álgebra unitaria restringida $\mathfrak{u}_{res}$, la bilineal de dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle$ está dada por*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : (\mathfrak{u}_{res})_* \times \mathfrak{u}_{res} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (b,c) \longmapsto \mathrm{tr}(bc). \tag{5.1}$$

Demostración. Consideramos dos elementos arbitrarios

$$a = \begin{pmatrix} a_{++} & a_{+-} \\ -a_{+-}^* & a_{--} \end{pmatrix} \in \mathfrak{u}_{res} \quad \text{y} \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_{++} & -\rho_{-+}^* \\ \rho_{-+} & \rho_{--} \end{pmatrix} \in (\mathfrak{u}_{res})_*.$$

Entonces

$$a\rho = \begin{pmatrix} a_{++}\rho_{++} + a_{+-}\rho_{-+} & -a_{++}\rho_{-+}^* + a_{+-}\rho_{--} \\ -a_{+-}^*\rho_{++} + a_{--}\rho_{-+} & a_{+-}^*\rho_{-+}^* + a_{--}\rho_{--} \end{pmatrix},$$

por lo tanto,

$$\mathrm{tr}(a\rho) = \mathrm{tr}(a_{++}\rho_{++}) + 2\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(a_{+-}\rho_{-+})) + \mathrm{tr}(a_{--}\rho_{--}), \tag{5.2}$$

donde $\mathrm{Re}(z)$ denota la parte real del número complejo z. Como vimos en la segunda sección, la bilineal

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pm) \times \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}_\pm) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (b,c) \longmapsto \mathrm{tr}(bc),$$

induce el isomorfismo de espacios de Banach complejos $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}_\pm)^* \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pm)$. Así, vemos que la traza induce un isomorfismo de espacios de Banach reales

$$(\mathfrak{u}(\mathcal{H}_\pm) \cap \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}_\pm))^* \cong \mathfrak{u}(\mathcal{H}_\pm). \tag{5.3}$$

En efecto, la $\mathbb{C}$-linealidad de la traza implica que para $b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pm)$ las siguientes condiciones son equivalentes:

$$\forall c \in \mathfrak{u}(\mathcal{H}_\pm) \cap \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}_\pm), \quad \mathrm{tr}(bc) = 0 \iff \forall c \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}_\pm), \quad \mathrm{tr}(bc) = 0.$$

Además, la condición

$$\forall c \in \mathfrak{u}(\mathcal{H}_\pm) \cap \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}_\pm), \quad \mathrm{tr}(bc) \in \mathbb{R}$$

implica

$$\forall c \in \mathfrak{u}(\mathcal{H}_\pm) \cap \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}_\pm), \quad \mathrm{tr}((b + b^*)c) = 0,$$

por lo tanto, b pertenece a $\mathfrak{u}(\mathcal{H}_\pm)$. Por otro lado, la bilineal de dualidad de espacios de Hilbert complejos

$$\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+) \times \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (b, c) \longmapsto \mathrm{tr}(bc),$$

induce una bilineal de dualidad en los espacios de Hilbert reales dada por

$$\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+) \times \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (b, c) \longmapsto \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(bc)). \tag{5.4}$$

Por la fórmula (5.2), concluimos que la traza induce un isomorfismo topológico de espacios de Banach real

$$((\mathfrak{u}_{res})_*)^* \cong \mathfrak{u}_{res}.$$

Es decir, $(\mathfrak{u}_{res})_*$ es un predual de $\mathfrak{u}_{res}$, la bilineal de dualidad es la dada por (5.3) y (5.4).

$\square$

Definición 5.1.2. *Definimos el álgebra de Lie-Banach $\tilde{\mathfrak{u}}_{res}$ como la extensión central de $\mathfrak{u}_{res}$, consideramos el 2-cociclo continuo s en $\tilde{\mathfrak{u}}_{res}$ dado por*

$$s(A, B) := \mathrm{tr}(A[d, B]),$$

para todo $A, B \in \mathfrak{u}_{res}$. Es decir, $\tilde{\mathfrak{u}}_{res}$ es el álgebra de Lie-Banach $\mathfrak{u}_{res} \oplus \mathbb{R}$ dotado con el corchete $[\cdot, \cdot]_d$ definido por

$$[(A, a), (B, b)]_d = ([A, B], s(A, B)).$$

Proposición 5.1.3. *El espacio de Banach $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$ es un espacio de Banach Lie-Poisson con el corchete de Poisson dado por*

$$\{f, g\}_d(\mu, \gamma) := \langle \mu, [D_\mu f(\mu), D_\mu g(\mu)] \rangle + \gamma s(D_\mu f, D_\mu g), \tag{5.5}$$

donde $f, g \in \mathcal{C}^\infty((\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*)$, (μ, γ) es un elemento arbitrario en $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$, y D_μ denota la derivada parcial de Fréchet con respecto a $\mu \in (\mathfrak{u}_{res})_*$.

Observación 5.1.4. La bilineal en (5.5) es la bilineal de dualidad dada en (5.1). Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ la bilineal de dualidad entre $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_* = (\mathfrak{u}_{res})_* \oplus \mathbb{R}$ y $\tilde{\mathfrak{u}}_{res} = \mathfrak{u}_{res} \oplus \mathbb{R}$ dada por

$$\langle (\mu, \gamma), (A, a) \rangle_d = \langle \mu, A \rangle + \gamma a.$$

Demostración. Por el Teorema 3.2.2, el espacio de Banach $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$ es un espacio de Banach Lie-Poisson si y sólo si su dual $\tilde{\mathfrak{u}}_{res}$ es un álgebra de Lie-Banach satisfaciendo $\mathrm{ad}_x^*(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_* \subseteq (\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_* \subseteq (\tilde{\mathfrak{u}}_{res})^*$ para todo $x \in \tilde{\mathfrak{u}}_{res}$. Vemos que el hecho de que $\tilde{\mathfrak{u}}_{res}$ es un álgebra de Lie-Banach se tiene como consecuencia de la continuidad de s y de la identidad del 2-cociclo la cual implica la identidad de Jacobi de $[\cdot, \cdot]_d$. Para ver que la acción coadjunta de $\tilde{\mathfrak{u}}_{res}$ preserva al predual $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$, notemos que para todo $(A,a),(B,b) \in \tilde{\mathfrak{u}}_{res}$ y todo $(\mu,\gamma) \in (\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle -\mathrm{ad}^*_{(A,a)}(\mu,\gamma),(B,b)\rangle_d :&= \langle(\mu,\gamma), -\mathrm{ad}_{(A,a)}(B,b)\rangle_d \\
&= \langle(\mu,\gamma), -[(A,a),(B,b)]_d\rangle_d \\
&= \langle(\mu,\gamma), (-[A,B], -s(A,B))\rangle_d \\
&= -\mathrm{tr}(\mu[A,B]) - \gamma \mathrm{tr}(A[d,B]) \\
&= -\mathrm{tr}(\mu[A,B]) - \gamma \mathrm{tr}([A,d]B) \\
&= \langle(-\mathrm{ad}^*_A(\mu) - \gamma[A,d], 0), (B,b)\rangle_d.
\end{aligned}$$

Como

$$[(\mathfrak{u}_{res})_*, \mathfrak{u}_{res}] \subseteq (\mathfrak{u}_{res})_*, \quad \text{y} \quad [d, \mathfrak{u}_{res}] \subseteq (\mathfrak{u}_{res})_*,$$

tenemos que $-\mathrm{ad}^*_A(\mu) - \gamma[A,d]$ pertenece a $(\mathfrak{u}_{res})_*$ para todo $A \in \mathfrak{u}_{res}$. Por lo tanto, la acción coadjunta preserva el predual $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$. Nuevamente por el Teorema 3.2.2, tenemos que el corchete de Poisson de $f,g \in \mathcal{C}^\infty((\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*)$ está dado por

$$\{f,g\}_d(\mu,\gamma) = \langle(\mu,\gamma), [Df(\mu,\gamma), Dg(\mu,\gamma)]_d\rangle_d.$$

Denotando por D_μ y D_γ las derivadas parciales de Fréchet con respecto a $\mu \in (\mathfrak{u}_{res})_*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned}
\{f,g\}_d(\mu,\gamma) &= \langle(\mu,\gamma), [(D_\mu f, D_\gamma f), (D_\mu g, D_\gamma g)]_d\rangle_d \\
&= \langle(\mu,\gamma), ([D_\mu f, D_\mu g], s(D_\mu g, D_\mu f))\rangle_d \\
&= \langle\mu, [D_\mu f, D_\mu g]\rangle + \gamma s(D_\mu f, D_\mu g).
\end{aligned}$$

□

Observación 5.1.5. El Teorema 3.2.2 nos proporciona también la fórmula del campo vectorial Hamiltoniano asociado a una función $h \in \mathcal{C}^\infty((\mathfrak{u}_{res})_*)$, la cual es

$$X_h(\mu,\gamma) = -\mathrm{ad}^*_{(D_\mu h, D_\gamma h)}(\mu,\gamma) = (-\mathrm{ad}^*_{D_\mu h}\mu - \gamma[D_\mu h, d], 0). \tag{5.6}$$

Observación 5.1.6. Notemos que, fijado $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$(\mathfrak{u}_{res})_* \oplus \{\gamma\}$$

es una subvariedad de Poisson de $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$ con el siguiente corchete de Poisson en el primer factor

$$\{f,g\}_{d,\gamma}(\mu) = \langle\mu, [D_\mu f(\mu), D_\mu g(\mu)]\rangle + \gamma s(D_\mu f, D_\mu g).$$

Proposición 5.1.7. *El grupo unitario $\mathcal{U}_{res}(\mathcal{H})$ actúa en la variedad de Poisson $(\mathfrak{u}_{res})_* \oplus \{\gamma\} \subseteq (\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$ mediante la acción coadjunta afín de la siguiente manera: Para $g \in \mathcal{U}_{res}(\mathcal{H})$,*

$$g \cdot (\mu,\gamma) := (\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}(\mu) - \gamma\sigma(g), \gamma),$$

donde $\mu \in (\mathfrak{u}_{res})_*$, $\gamma \in \mathbb{R}$, y donde

$$\begin{aligned}
\sigma : \mathcal{U}_{res} &\longrightarrow (\mathfrak{u}_{res})_*, \\
g &\longmapsto gdg^{-1} - d.
\end{aligned}$$

Demostración. Primero verifiquemos que $\forall g \in \mathcal{U}_{res}$ tenemos que $gdg^{-1} - d \in (\mathfrak{u}_{res})_*$. Como siempre, consideramos la descomposición matricial de g con respecto a la suma directa $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$

$$g = \begin{pmatrix} g_{++} & g_{+-} \\ g_{-+} & g_{--} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{res}.$$

Tenemos que

$$\begin{pmatrix} g_{++} & g_{+-} \\ g_{-+} & g_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{++}^* & g_{-+}^* \\ g_{+-}^* & g_{--}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ig_{++}g_{++}^* - ig_{+-}g_{+-}^* & ig_{++}g_{-+}^* - ig_{+-}g_{--}^* \\ ig_{-+}g_{++}^* - ig_{--}g_{+-}^* & ig_{-+}g_{-+}^* - ig_{--}g_{--}^* \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Como $g_{\pm\mp}$ pertenece a $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_\mp, \mathcal{H}_\pm)$, la codiagonal de la matriz del lado derecho está en $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_\pm, \mathcal{H}_\mp)$. Por lo que, $[d, (gdg^{-1} - d)] \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Por otro lado, como $g \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$

$$\begin{pmatrix} g_{++} & g_{+-} \\ g_{-+} & g_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{++}^* & g_{-+}^* \\ g_{+-}^* & g_{--}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{++}g_{++}^* + g_{+-}g_{+-}^* & g_{++}g_{-+}^* + g_{+-}g_{--}^* \\ g_{-+}g_{++}^* + g_{--}g_{+-}^* & g_{-+}g_{-+}^* + g_{--}g_{--}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y como $\mathfrak{S}_2 \cdot \mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_1$, tenemos

$$g_{++}g_{++}^* = \mathrm{id} - g_{+-}g_{+-}^* \in I_{\mathcal{H}_+} + \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}_+)$$

y

$$g_{--}g_{--}^* = 1 - g_{-+}g_{-+}^* \in I_{\mathcal{H}_-} + \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}_-).$$

Por lo tanto,

$$g_{++}g_{++}^* - g_{+-}g_{+-}^* \in I_{\mathcal{H}_+} + \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}_+)$$

y

$$g_{-+}g_{-+}^* - g_{--}g_{--}^* \in -I_{\mathcal{H}_-} + \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}_-).$$

Por otra parte, es claro que el resultado de la multiplicación en (5.7) es antisimétrica. Por lo tanto, para todo $g \in \mathcal{U}_{res}$ tenemos que $gdg^{-1} - d \in (\mathfrak{u}_{res})_*$.

Por otro lado para ver que efectivamente esta aplicación es una acción, por [Prop. 7.3, [8]], basta chequear que

$$\sigma(g_1 g_2) = \mathrm{Ad}^*_{g_1^{-1}}(\sigma(g_2)) + \sigma(g_1)$$

para todo $g_1, g_2 \in \mathcal{U}_{res}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \sigma(g_1 g_2) &= g_1 g_2 d g_2^{-1} g_1^{-1} - d \\ &= g_1(g_2 d g_2^{-1} - d) g_1^{-1} + (g_1 d g_1^{-1} - d) \\ &= \mathrm{Ad}^*_{g_1^{-1}}(\sigma(g_2)) + \sigma(g_1). \end{aligned}$$

□

Proposición 5.1.8. *El grupo de isotropía de $(0, \gamma) \in (\mathfrak{u}_{res})_* \oplus \{\gamma\}$ por la acción coadjunta $\mathcal{U}_{res}$-afín es un subgrupo de Lie de $\mathcal{U}_{res}$.*

Demostración. Dado X un elemento en el álgebra de Lie $\mathfrak{u}_{res}$ de $\mathcal{U}_{res}$ induce por la acción afín coadjunta infinitesimal en $(\mathfrak{u}_{res})_* \oplus \{\gamma\}$ el siguiente campo vectorial:

$$\begin{aligned} X\cdot(\mu,\gamma) :&= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,[\exp(tX)\cdot(\mu,\gamma)] \\ &= \left(\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,[\mathrm{Ad}^*_{\exp(-tX)}(\mu)-\gamma\sigma(\exp(tX))],0\right) \\ &= (-\mathrm{ad}^*_X(\mu)-\gamma[X,d],0). \end{aligned}$$

Por definición, el álgebra de Lie del grupo de isotropía de (μ,γ) es

$$\mathfrak{u}_{(\mu,\gamma)} := \{X\in\mathfrak{u}_{res}:\ -\mathrm{ad}^*_X(\mu)-\gamma[X,d]=0\}.$$

La proposición es trivial cuando μ y γ se anulan. Para $\mu=0$ y $\gamma\neq 0$, el álgebra de Lie $\mathfrak{u}_{(0,\gamma)}$ consiste de todos los elementos de $\mathfrak{u}_{res}$ que conmutan con d. Por lo tanto, para $\gamma\neq 0$ tenemos que

$$\mathfrak{u}_{(0,\gamma)} = \mathfrak{u}(\mathcal{H}_+)\oplus\mathfrak{u}(\mathcal{H}_-).$$

Un complemento topológico a $\mathfrak{u}_{(0,\gamma)}$ en $\mathfrak{u}_{res}$ es

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{u}(\mathcal{H})\cap(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_+,\mathcal{H}_-)\oplus\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_-,\mathcal{H}_+)).$$

Por lo tanto, el grupo de isotropía de $(0,\gamma)$ es un subgrupo de Lie de $\mathcal{U}_{res}$.

□

Proposición 5.1.9. *Las órbitas coadjuntas afines de $\mathcal{U}_{res}$ que son suaves, son tangentes a la distribución característica de la variedad de Poisson $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$.*

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_{(\mu,\gamma)} : \mathcal{U}_{res} &\longrightarrow (\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_* \\ g &\longmapsto g\cdot(\mu,\gamma). \end{aligned}$$

Por lo que, dado $X\in\mathfrak{u}_{res}$

$$(T_e\pi_{(\mu,\gamma)})(X) = (-\mathrm{ad}^*_X(\mu)-\gamma[X,d],0).$$

Luego,

$$\mathfrak{u}_{res}\cdot(\mu,\gamma) = \{(-\mathrm{ad}^*_X(\mu)-\gamma[X,d],0):\ X\in\mathfrak{u}_{res}\}.$$

Por la Observación 5.1.5, el espacio característico en $(\mu,\gamma)\in(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$ es

$$\begin{aligned} S_{(\mu,\gamma)} &= \{X_h(\mu) = (-\mathrm{ad}^*_{D_\mu h}(\mu)-\gamma[D_\mu h,d],0):\ h\in\mathcal{C}^\infty((\mathfrak{u}_{res})_*)\} \\ &= \{(-\mathrm{ad}^*_X(\mu)-\gamma[X,d],0):\ X\in\mathfrak{u}_{res}\}. \end{aligned}$$

Luego, se cumple lo pedido.

□

5.2. Gr_{res} como espacio homogéneo

En esta breve subsección veremos a la Grassmanniana restringida como un espacio homogéneo y analizaremos su estructura simpléctica. Comenzaremos recordando algunos conceptos sobre espacios homogéneos.

En general, si G un grupo de Lie-Banach y H un subgrupo de Lie de G denotamos por $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ al álgebra de Lie-Banach de G y H respectivamente. Considerando el espacio cociente $M = G/H$, sabemos que posee una estructura de variedad. Dado $x_0 \in G/H$, tenemos la siguiente identificación $T_{x_0}M \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Ahora bien, dado $\eta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicación bilineal, antisimétrica tal que

(i) para todo $a, b, c \in \mathfrak{g}$

$$\eta(a, [b, c]) + \eta(b, [c, a]) + \eta(c, [a, b]) = 0.$$

(es decir, η es un 2-cociclo);

(ii) $\mathfrak{h} = \{a \in \mathfrak{g} : \ \eta(a, b) = 0, \forall b \in \mathfrak{g}\}$;

entonces η define una forma simpléctica ω en M de la siguiente forma:

Notamos a la acción en M

$$\begin{aligned} \alpha : G \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (g, kH) &\longmapsto \alpha_g(kH) := gkH. \end{aligned}$$

Dado $x_0 \in G/M$, definimos

$$\omega_{x_0} : T_{x_0}M \times T_{x_0}M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega_{x_0}(a + \mathfrak{h}, b + \mathfrak{h}) = \eta(a, b)$$

Luego, para $g \in G$ arbitrario y $x := \alpha_g(x_0) \in M$ tenemos $T_x(\alpha_{g^{-1}}) : T_xM \longrightarrow T_{x_0}M$, así, podemos definir

$$\omega_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega_x(v, w) = \omega_{x_0}(T_x(\alpha_{g^{-1}})v, T_x(\alpha_{g^{-1}})w)$$

Esta forma simpléctica es invariante bajo la acción [Teor. 4.30, [4]]. En nuestro caso, vimos en la Observación 4.2.10 que

$$\mathrm{Gr}_{res} = \mathcal{U}_{res}/(\mathcal{U}(\mathcal{H}_+) \times \mathcal{U}(\mathcal{H}_-)),$$

es decir Gr_{res} es un espacio homogéneo de $\mathcal{U}_{res}$. Ahora bien, recordando el 2-cociclo de la Definición 5.1.2 teníamos que

$$s(A, B) = \mathrm{tr}(A[d, B])$$

para todo $A, B \in \mathfrak{u}_{res}$. Es fácil ver que el álgebra de Lie $\mathfrak{u}_{res}$ verifica (ii).

Así, si identificamos

$$T_{\mathcal{H}_+}\mathrm{Gr}_{res} \cong \mathfrak{u}_{res}/(\mathfrak{u}(\mathcal{H}_+) \times \mathfrak{u}(\mathcal{H}_-)) \cong \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_+, H_-)$$

la forma simpléctica puede expresarse como

$$\omega_{\mathcal{H}_+}(A + \mathfrak{h}, B + \mathfrak{h}) = \mathrm{tr}(A[d, B]),$$

la cual es una forma simpléctica invariante, donde $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(\mathcal{H}_+) \times \mathfrak{u}(\mathcal{H}_-)$.

Observación 5.2.1. Desarrollemos un poco la fórmula para $\omega_{\mathcal{H}_+}$. Tenemos que $s(A,B) = \mathrm{tr}(A[d,B]) = i\mathrm{tr}\left(A\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, B\right]\right)$. Luego,

$$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, B\right] &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ -b_{12}^* & b_{22}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ -b_{12}^* & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12}^* & -b_{22}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}b_{11} & -b_{12}\\ -b_{12}^* & -b_{22}\end{pmatrix}\\ &= 2\begin{pmatrix}0 & b_{12}\\ b_{12}^* & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Entonces

$$A\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, B\right] = 2\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ -a_{12}^* & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & b_{12}\\ b_{12}^* & 0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}a_{12}b_{12}^* & a_{11}b_{12}\\ a_{22}b_{12}^* & -a_{12}^*b_{12}\end{pmatrix}.$$

Obtenemos

$$\begin{aligned}s(A,B) &= 2i\mathrm{tr}\begin{pmatrix}a_{12}b_{12}^* & a_{11}b_{12}\\ a_{22}b_{12}^* & -a_{12}^*b_{12}\end{pmatrix}\\ &= 2i(\mathrm{tr}(a_{12}b_{12}^*) - \mathrm{tr}(a_{12}^*b_{12}))\\ &= 2i(\mathrm{tr}(a_{12}b_{12}^*) - \overline{\mathrm{tr}(a_{12}b_{12}^*)})\\ &= -4\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(a_{12}b_{12}^*)).\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$-\frac{1}{2}s(A,B) = 2\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(a_{12}b_{12}^*)) = 2\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(XY^*)) =: \omega_{Gr}(X,Y)$$

donde $X = a_{12}$, $Y = b_{12}$, $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$.

Observación 5.2.2. Notemos que $\omega_{Gr}(X,Y)$ es una forma simpléctica fuerte. En efecto, tenemos que $(\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-), \mathrm{Re}(\mathrm{tr}))$ es un espacio de Hilbert real, que notaremos por $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)_{\mathbb{R}}$. Por lo que, esto se deriva del hecho de que el mapeo

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-) &\longrightarrow \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)_{\mathbb{R}}\\ Y &\longmapsto 2\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(\cdot\, Y^*))\end{aligned}$$

es suryectivo.

Proposición 5.2.3. *Para todo $\gamma \neq 0$, las componentes conexas de la órbita coadjunta por la acción afín de $\mathcal{U}_{res}$, $\mathcal{O}_{(0,\gamma)}$ de $(0,\gamma) \in (\mathfrak{u}_{res})_* \oplus \{\gamma\}$ son hojas simplécticas en el espacio de Banach Lie-Poisson $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$.*

Demostración. Recordemos de la Proposición 5.1.3 que $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$ es un espacio de Banach Lie-Poisson. Por la Proposición 5.1.8, el grupo de isotropía $U_{(0,\gamma)}$ de $(0,\gamma)$ por la acción coadjunta afín de $\mathcal{U}_{res}$ es un subgrupo de Lie-Banach de $\mathcal{U}_{res}$ ya que su álgebra de Lie $\mathfrak{u}_{(0,\gamma)}$ es complementada en $\mathfrak{u}_{res}$. Luego, existe $\tilde{\mathcal{U}}_{res}$ extensión central de $\mathcal{U}_{res}$ tal que su álgebra de Lie es $\tilde{\mathfrak{u}}_{res}$. Ahora bien, puede verse que la acción coadjunta de $\tilde{\mathcal{U}}_{res}$ en el dual de su álgebra de Lie deja al predual $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$ invariante.

El grupo de isotropía de $\tilde{U}_{(0,\gamma)}$ de $(0,\gamma) \in (\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$ para la acción coadjunta usual de $\tilde{\mathcal{U}}_{res}$ es un subgrupo de Lie de $\tilde{\mathcal{U}}_{res}$ ya que su álgebra de Lie

$$\tilde{\mathfrak{u}}_{(0,\gamma)} := \{(A,a) \in \mathfrak{u}_{res} : \ -\mathrm{ad}^*_{(A,a)}(0,\gamma) = 0\} = \mathfrak{u}_{(0,\gamma)} \oplus \mathbb{R}$$

es complementada en $\tilde{\mathfrak{u}}_{res}$. Por el Teorema 3.3.2, tenemos que el espacio homogéneo $\tilde{\mathcal{U}}_{res}/\tilde{U}_{(0,\gamma)}$ admite una única estructura de variedad de Banach suave tal que la proyección canónica $\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{U}}_{res} \longrightarrow \tilde{\mathcal{U}}_{res}/\tilde{U}_{(0,\gamma)}$ es una submersión suryectiva, y posee una 2-forma simpléctica débil $\omega_{(0,\gamma)}$ dada por

$$(\omega_{(0,\gamma)})_{[\tilde{g}]}(T_{\tilde{g}}\tilde{\pi}(T_eL_{\tilde{g}}\xi), T_{\tilde{g}}\tilde{\pi}(T_eL_{\tilde{g}}\eta)) := \langle (0,\gamma), [\xi,\eta]_d \rangle_d, \tag{5.8}$$

donde $\xi, \eta \in \tilde{\mathfrak{u}}_{res}$, $\tilde{g} \in \tilde{U}_{res}$, $[\tilde{g}] := \tilde{\pi}(\tilde{g})$.

Sea $p : \tilde{\mathcal{U}}_{res} \longrightarrow \mathcal{U}_{res}$ tal que

$$\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}(\mu,\gamma) = p(\tilde{g}) \cdot (\mu,\gamma),$$

donde $(\mu,\gamma) \in (\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$. Esto nos relaciona la acción coadjunta usual de $\tilde{\mathcal{U}}_{res}$ en el predual $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$ y la acción coadjunta afín de $\mathcal{U}_{res}$ en $(\tilde{u}_{res})_*$. Vía esta relación tenemos que la órbita coadjunta $\mathcal{O}_{(0,\gamma)}$ dada por la acción coadjunta afín de $\mathcal{U}_{res}$ es la órbita coadjunta de $(0,\gamma)$ dada por la acción coadjunta usual de $\tilde{\mathcal{U}}_{res}$. Luego, por el Teorema 3.3.3, tenemos que el mapeo

$$\iota : [\tilde{g}] \in \tilde{\mathcal{U}}_{res}/\tilde{U}_{(0,\gamma)} \longmapsto \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}(0,\gamma) \in (\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$$

es una inmersión inyectiva débil de la variedad cociente $\tilde{\mathcal{U}}_{res}/\tilde{U}_{(0,\gamma)}$ en el espacio predual $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$, y las componentes conexas de la órbita coadjunta afín $\mathcal{O}_{(0,\gamma)}$ están dotadas con una estructura suave de variedad haciendo de ι un difeomorfismo, y por la forma simpléctica dada por $\iota_*(\omega_{(0,\gamma)})$. Luego, son hojas simplécticas del espacio de Banach Lie-Poisson $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$.

□

El siguiente resultado es el que nos contesta la pregunta realizada al principio de la sección.

Teorema 5.2.4. *Las componentes conexas de la Grassmanniana restringida son hojas simplécticas fuertes en el espacio de Banach Lie-Poisson $(\tilde{\mathfrak{u}}_{res})_*$. Más precisamente, para todo $\gamma \neq 0$, la órbita coadjunta $\mathcal{O}_{(0,\gamma)}$ de $(0,\gamma) \in (\mathfrak{u}_{res})_* \oplus \{\gamma\}$ dada por la acción afín de $\mathcal{U}_{res}$ es isomorfa a la Grassmanniana restringida vía el mapeo*

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma : \mathrm{Gr}_{res} &\longrightarrow \mathcal{O}_{(0,\gamma)}, \\ W &\longmapsto 2i\gamma(p_W - p_+), \end{aligned}$$

donde p_W denota la proyección ortogonal en W. El pull-back mediante Φ_γ de la forma simpléctica $\mathcal{O}_{(0,\gamma)}$ es (-2γ)-veces la forma simpléctica ω_{Gr} en Gr_{res}.

Demostración. Un elemento en la órbita coadjunta afín $\mathcal{O}_{(0,\gamma)}$ de $(0,\gamma)$ es de la forma (ρ,γ) con

$$\rho = \gamma(gdg^{-1} - d) = 2i\gamma(gp_+g^{-1} - p_+),$$

para alguna $g \in \mathcal{U}_{res}$ (donde usamos la identidad $p_- = id - p_+$ para simplificar la fórmula para la acción coadjunta afín dada en la Proposición 5.1.7). Por [Coro. III 4 (ii), [21]], Φ_γ es una biyección para $\gamma \neq 0$. Como la estructura de variedad de la órbita $\mathcal{O}_{(0,\gamma)}$ es inducida por la identificación $\mathcal{O}_{(0,\gamma)} = \mathcal{U}_{res}/(\mathcal{U}(\mathcal{H}_+) \times \mathcal{U}(\mathcal{H}_-))$, se tiene que Φ_γ es un difeomorfismo. La forma simpléctica $\omega_{\mathcal{O}}$ en $\mathcal{O}_{(0,\gamma)}$ es la forma simpléctica $\mathcal{U}_{res}$-invariante cuyo valor en el punto $(0,\gamma) \in \mathcal{O}_{(0,\gamma)}$ está dado por

$$(\omega_{\mathcal{O}})_{(0,\gamma)}(X_f(0,\gamma), X_g(0,\gamma)) = \{f, g\}_d(0,\gamma),$$

donde $f, g \in \mathcal{C}^\infty((\mathfrak{u}_{res})_*)$. Usando las fórmulas (5.5) y (5.6), obtenemos

$$(\omega_{\mathcal{O}})_{(0,\gamma)}(\gamma[D_\mu f, d], \gamma[D_\mu g, d]) = \gamma s(D_\mu f, D_\mu g).$$

Por lo tanto, para todo $A, B \in \mathfrak{u}_{res}$, tenemos

$$(\omega_{\mathcal{O}})_{(0,\gamma)}(\gamma[A, d], \gamma[B, d]) = \gamma s(A, B) = -2\gamma\left(-\frac{1}{2}s(A, B)\right).$$

Se tiene que la forma bilineal antisimétrica a valores reales en $\mathfrak{u}_{res}$ correspondiente a la forma simpléctica $\omega_{\mathcal{O}}$ en $\mathcal{O}_{(0,\gamma)} = \mathcal{U}_{res}/(\mathcal{U}(\mathcal{H}_+) \times \mathcal{U}(\mathcal{H}_-))$ es igual a $-2\gamma\omega_{Gr}$.

□

Referencias

[1] R. Abraham, J.E. Marsden, T.S. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Third Edition, Applied Mathematical Sciences 75, NewYork, NY: Springer-Verlag, 2002.

[2] E. Andruchow, E. Chiumiento, M.E. Di Iorio y Lucero *Essentially commuting proyections*, J. Funct. Anal. 268 (2015) 336-362.

[3] E. Andruchow, G. Larotonda, *Hopf-Rinow theorem in the Sato Grassmannian*, J. Funct. Anal. 255 (2008), no. 7, 1692–1712.

[4] D. Beltiţă, *Smooth Homogeneous Structures in Operator Theory*, Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math., vol. 137, Chapman & Hall/CRC, New York, 2006.

[5] D. Beltiţă, T. S. Ratiu, A. B. Tumpach, *The restricted Grassmannian, Banach Lie-Poisson spaces, and coadjoint orbits* , J. Funct. Anal. 247 (2007), no. 1, 138-168.

[6] N. Bourbaki. *Lie Groups and Lie Algebras*, Chapter 3, 1975.

[7] A.L. Carey, C.A. Hurst, D.M. O'Brien, *Automorphisms of the Canonical Anticommutation Relations and Index Theory*, J. Funct. Anal 48 (1982), 360-393.

[8] P. Libermann, C-M. Marle , *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics,* Dordredut: Kluwer Academic Publishers, 1987.

[9] J.E. Marsden, T.S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Texts in Applied Mathematics, 17, Second Edition, Second printing 2003, New York, NY: Springer-Verlag, 1998.

[10] G.J Murphy, *C^*-algebras and Operator Theory*, San Diego: Academic Press, 1990.

[11] K-H. Neeb, *Lie Groups*, 2010.

[12] A. Odzijewicz, T. Ratiu, *Banach Lie-Poisson spaces and reduction*, Comm. Math. Phys. 243 (2003), 1-54.

[13] G.K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, London Math. Soc. Monogr. No. 14, Academic Press, 1979.

[14] A. Pressley, G. Segal. *Loop groups*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[15] S. Sakai, *C^*-algebras and W^*-algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 60, 1998 (reprint of the 1971 edition) NewYork, NY: Springer-Verlag, 1971 .

[16] G. Segal, G. Wilson. *Loop groups and equations of KdV type*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 61 (1985), 5–65.

[17] G. Segal, G. Wilson. *Loop groups and equations of KdV type.* Surveys in differential geometry: integral systems [integrable systems], 403–466, Surv. Differ. Geom., IV, Int. Press, Boston, MA, 1998.

[18] H. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Transactions of the Amer. Math. Soc., Vol. 180, June 1973.

[19] A.B. Tumpach, *Hyperkähler structures and infinite-dimensional Grassmannians*, J. Funct. Anal. 243 (2007), 158-206.

[20] I. Vaisman, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds.* Progress in Mathematics, 118, Basel: Birkhäuser Verlag, 1994.

[21] T. Wurzbacher, *Fermionic second quantization and the geometry of the restricted Grassmannian*, in Infinite Dimensional Kähler Manifolds (Oberwolfach, 1995), DMV Sem., 31, Birkhäuser, Basel, 2001.