

Ago tado - no prestar

2.14

ASOCIACION ARGENTINA DE ASTRONOMIA



BOLETIN No 5

Correspondiente al año 1962

LA PLATA

1963

ASOCIACION ARGENTINA DE ASTRONOMIA

BOLETIN N° 5
Correspondiente al año 1962

LA PLATA
1963

INTRODUCCION

La Asociación Argentina de Astronomía se complace en presentar este quinto número de su BOLETIN, que contiene las Actas de la Quinta Reunión Científica de la Asociación, realizada en el Observatorio Astronómico de San Juan los días 11, 12 y 13 de 1962.

La impresión de este Boletín se ha podido efectuar gracias a un subsidio del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas que esta Asociación agradece vivamente.

La responsabilidad editorial ha estado confiada a un Comité integrado por la Ing. A. Abraham y los Dres. G.Iannini y C.Jaschek, de acuerdo a una resolución de la Quinta Asamblea de socios.

La preparación del Boletín para su impresión ha estado a cargo del señor A. Guillén, Encargado de Publicaciones del Observatorio Astronómico de La Plata, cuya valiosa colaboración se agradece.

Toda correspondencia debe dirigirse a "Asociación Argentina de Astronomía" Observatorio Astronómico, La Plata, Rep. Argentina.

INTRODUCTION

This volume is the fifth issue of the Argentine Astronomical Society and contains the proceedings of the Fifth Meeting of the Society held at the San Juan Observatory on July 11, 12 and 13, 1962.

Each paper is followed by an English summary. The English index is given on page

The printing was made possible thanks to a grant from the "Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas".

The volume was edited by a Committee integrated by Ing. Adela Abraham, Dr. G. Iannini and Dr. C. Jaschek.

All correspondence should be addressed to "Asociación Argentina de Astronomía", Observatorio Astronómico, La Plata, Argentina.

11 de Julio.

PRIMERA SESION

INFORME

10.00 hs.

1. LANDI DESSY J.(Observatorio Astronómico,Córdoba): Medición de superficies ópticas.

SEGUNDA SESION

COMUNICACIONES

15.00 hs.

1. CESCO R.P. (Observatorio Astronómico, La Plata): Sobre la solución general del problema de los tres cuerpos.
2. LANDI DESSY J.(Observatorio Astronómico,Córdoba): Un nuevo tipo de telescopio-cámara con tres espejos.
3. JASCHEK M. y JASCHEK C.(Observatorio Astronómico,La Plata): El espectro del Si II en estrellas peculiares.
4. SAHADE J.(Observatorio Astronómico,La Plata): Sobre los sistemas R.Canis Majoris.
5. LAVAGNINO C.J.(Observatorio Astronómico,La Plata): Sobre la distribución de la energía en escala cósmica.
6. ALTAVISTA C.(Observatorio Astronómico,La Plata): La versión de Andoyer para el método de Hansen.
7. LAVAGNINO C.J.(Observatorio Astronómico,La Plata): Una interpretación de los criterios de Lambert, Charlier y Eigenson.

INFORMES DE TRABAJO

1. PLATZECK R. y LANDI DESSY J.(Comisión Nacional de Energía Atómica y Observatorio Astronómico,Córdoba): La construcción del nuevo espectrógrafo para Bosque Alegre.
2. SEESIC J.(Observatorio Astronómico,Córdoba): Estabilidad hidromagnética de un plasma en un campo gravitatorio.

12 de Julio.

TERCERA SESION

COMUNICACIONES

8. POEPEL W.G.L.(Facultad de Ciencias,Buenos Aires): Contracción gravitatoria de una nube interestelar.

9. SAHADE J. y FRIEBOES-CONDE H. (Observatorio Astronómico, La Plata): Gama Ursae Minoris.
10. RINGUELET-KASWALDER A. (Observatorio Astronómico, La Plata): Resultados preliminares de alta y mediana dispersión de 48 Libras.
11. RINGUELET-KASWALDER A. (Lick Observatory, EE.UU.) Variaciones de velocidad radial de corto período en 48 Libras.
12. WILKENS H. (Observatorio Astronómico, La Plata): Los cúmulos globulares más ricos en estrellas variables.
13. ZADUNAISKY P. (Smithsonian Astrophysical Observatory, EE.UU. y Facultad de Ciencias Exactas, Buenos Aires): Informe preliminar sobre un nuevo cálculo de la órbita del cometa Halley.

INFORME DE TRABAJO

3. VARSAVSKY C. (Facultad de Ciencias Exactas, Buenos Aires): La instalación de un paraboloide de 30 metros para la observación de la línea de 21 centímetros.

C U A R T A S E S I O N

16.00 hs.

- a) Reunión del Comité Nacional de Astronomía
- b) Reunión de la Comisión Directiva de la Asociación.
- c) Asamblea de socios.

13 de Julio.

Q U I N T A S E S I O N

INFORME

9.00 hs.

- II. VARSAVSKY C. (Facultad de Ciencias Exactas, Buenos Aires): Cálculo de algunas constantes atómicas de interés astrofísico.

COMUNICACIONES

14. RIU P.C. (Observatorio Astronómico, La Plata): Cálculo de las perturbaciones de la anomalía media y del radio vector de un asteroide.
15. LANDI DESSY J. (Observatorio Astronómico, Córdoba): Fórmulas para la aplicación del método de la óptica a superficies de cualquier tipo con aproximación de cualquier orden.

16. CESCO R.P.(Observatorio Astronómico,La Plata): Una tabla útil para sumar algunas series lentamente convergentes o divergentes.
17. JASCHEK M. y JASCHEK C.(Observatorio Astronómico, La Plata): Estrellas australes con espectros peculiares. Nota N.3.
18. JASCHEK C. y JASCHEK M.(Observatorio Astronómico, La Plata): Análisis espectroscópico de la estrella peculiar del tipo O:HD 49798.
19. ALTAVISTA C.(Observatorio Astronómico,La Plata): Determinación de órbitas mediante cuatro observaciones.

NOTAS:

1. Los informes son puestas al día de temas de interés general.
2. Las comunicaciones son trabajos de investigación originales e inéditos.
3. Los informes de trabajo son exposiciones de trabajos realizados que entran en una de las siguientes categorías:
 - 1) Investigaciones que por el tiempo que demanda su realización no permiten aún la presentación de resultados definitivos, pero cuyo estado de realización merece ser relatado.
 - 2) Relato de construcciones de equipos o instrumental empleado para investigaciones, pero que no presentan innovaciones fundamentales.
 - 3) Actividades proseguidas en programas permanentes.

No se han recibido los textos de los trabajos del Dr.C.Varsavsky.

Se incluye un trabajo del Dr. H.Wilkens titulado "Los diámetros de los cúmulos globulares y sus variables", expuesto en la Tercera Reunión de la Asociación y que por omisión no fué incluido en la publicación correspondiente.

Informe

MEDICION DE SUPERFICIES OPTICAS

Jorge Landi Dessy
(Observatorio Astronómico, Córdoba)

La medición y el control de superficies ópticas es un problema que se actualiza cada vez que se construye un espejo de ciertas dimensiones y que todavía ofrece algunas dificultades cuando los espejos a controlar no tienen sección cónica.

En el año 1939 apareció el trabajo de R.P. Platsek y E. Gaviola (1) referente al método de la cáustica. En él se señala también la confusión reinante sobre este problema, citando un artículo aparecido en *Popular Astronomy* de 1902 (2). En 1939 la situación había mejorado, pero no tanto como era de esperar; en 1962 nos encontramos todavía con problemas en ese sentido. Basta para probarlo, el artículo del Dr. Sábato en la *Revista Astronómica* (3); en él se habla del radio de curvatura de la zona medida en el método de Foucault clásico; como se verá más adelante, esa denominación no es correcta y puede inducir a error, aunque está muy generalizada. Por lo tanto creemos un deber comenzar con consideraciones bastante elementales, para evitar errores de interpretación y contribuir a aclarar el tema.

Consideremos primeramente el método de Foucault clásico. Se recubre el espejo con una pantalla con ventanas sucesivas a diversas distancias del centro y se mide la aberración esférica longitudinal. Como se puede ver en la figura 1, lo que en realidad se mide es el valor de la coordenada en función de la distancia del centro de la ventana al centro del espejo, más la subnormal correspondiente a la función

$$x = f(r)$$

es decir se mide

$$OC = OE'_1 + E'_1C = x + \text{Subnormal} = f(r) + r \cdot r'$$

Conociendo la expresión analítica de $x = f(r)$ o su desarrollo en serie se puede calcular fácilmente la cantidad OC para cada r dado.

En el caso de la óptica se proponen correctos los valores longitudinales teóricos ζ y se mide los transversales η siempre en función de las distancias sucesivas del centro de la pantalla al centro del espejo r . Para este caso el cálculo de las expresiones es un poco más laborioso. Las expresiones ζ, η , que nos dan las coordenadas de los centros de los círculos osculadores en función de r son las siguientes:

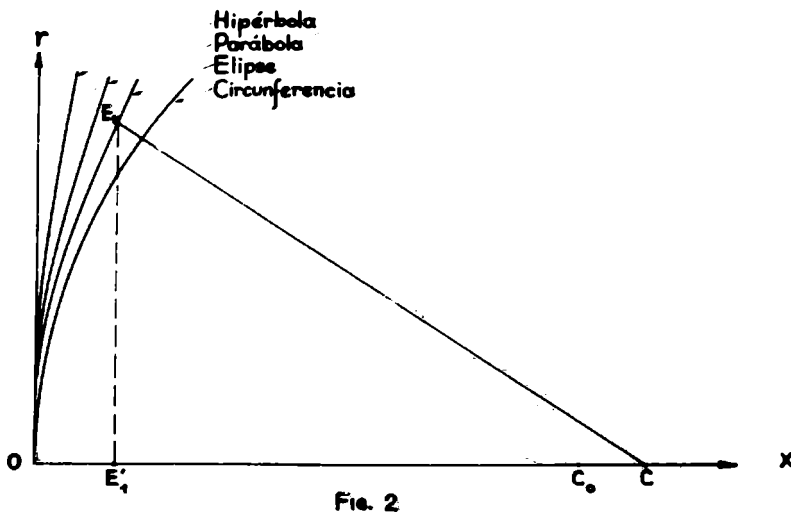
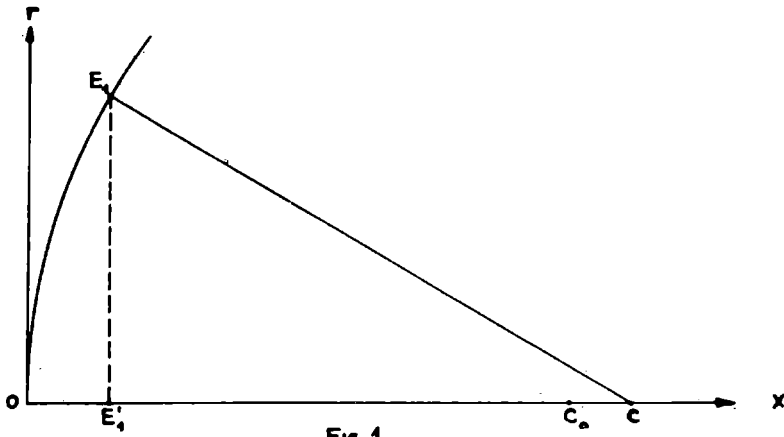
$$\zeta = r - r' \frac{1 + r'^2}{r''} \qquad \eta = r + \frac{1 + r'^2}{r''}$$

teniendo la expresión analítica o el desarrollo en serie de la función se pueden obtener los valores de ζ y η necesarios para medir la superficie.

Es conveniente sin embargo considerar el problema desde otro punto de vista; sobre un par de ejes cartesianos ortogonales, hagamos oscular los diversos tipos de cónicas existentes en el origen y consideremos todas ellas contenidas en el semiplano de las x positivas; en caso de poseer más de una rama, consideremos solamente la rama que cumple las condiciones enunciadas (fig.2). Desarrollemos en serie las diversas cónicas expresadas en general por la ecuación $x = f(r)$ y consideremos:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{r^2}{2R} + \frac{r^4}{8R^3} + \frac{r^6}{16R^5} + \dots && \text{(circunferencia)} \\ (1)x_e &= \frac{r^2}{2R} + (1-e^2) \frac{r^4}{8R^3} + (1-e^2)^2 \frac{r^6}{16R^5} && \text{(elipse e hipérbola)} \\ x_p &= \frac{r^2}{2R} && \text{(parábola)} \end{aligned}$$

Si consideramos ahora la aproximación de Gauss, nos debemos limitar al primer término de las series y por lo tanto no podremos distinguir las cónicas entre sí. Tomando un término más, ya podremos distinguir las diversas cónicas y nos encontraremos en la aproximación de tercer orden o de Seidel; considerando los tres primeros términos estaremos en la aproximación de quinto orden o de Schwarzschild. Como al construir los espejos se parte en general de una superficie con sección circular, es conveniente adoptar la siguiente interpretación sugerida de las ecuaciones (1): si al desarrollo



de la circunferencia le sumamos la cantidad $x_e - x_c$ obtendremos la ecuación de la elipse y por lo tanto podemos interpretar que la sección del espejo está formada por una circunferencia a la que se le sumó un tanto por ciento del término de cuarto grado si nos mantenemos dentro de la aproximación de Seidel.

$$x_e = x_c + (x_e - x_c) = \frac{r^2}{2R} + \frac{r^4}{8R^3} + \dots + (1 - e^2) \frac{r^4}{8R^3} - \frac{r^4}{8R^3} =$$

$$= \frac{r^2}{2R} + (1 - e^2) \frac{r^4}{8R^3}$$

que por supuesto no es otra cosa que los dos primeros términos del desarrollo en serie de la elipse. Como en el caso de la parábola $e = 1$; lógicamente nos queda sólo el primer término. Esto conduce a alguna gente a decir que la parábola es una curva más fácil pues no tiene términos en cuarto grado; con ese criterio la circunferencia sería muy difícil de realizar pues el término de cuarto grado es mayor que el de la elipse, lo que evidentemente no es correcto.

Empleando una aproximación de cualquier orden, podremos considerar una cierta curva -sección de un espejo- como una circunferencia a la que se le añade un cierto porcentaje del término en r^4 , otro porcentaje del término en r^6 , etc. Si la sección del espejo corresponde a una cónica, los distintos porcentajes están relacionados entre sí; pero si queremos un caso más general podemos considerar una curva expresada por la serie:

$$(2) \quad x_k = \frac{r^2}{2R} + a \frac{r^4}{8R^3} + b \frac{r^6}{16R^5} + 5c \frac{r^8}{128R^7} + \dots$$

en donde los coeficientes a , b , c , son arbitrarios, pudiéndose en este caso obtener curvas que no son cónicas, como ocurre en el primario de un Ritchey-Chrétien. En las cónicas, los coeficientes a , b , c , ... están relacionados de la siguiente manera:

$$a^2 = b; \quad a^3 = c; \quad \text{etc.}$$

Definida la ecuación que nos da la sección del espejo debemos ahora encontrar las expresiones que nos permitan medir la superficie del mismo con

el método de Foucault y con el método de la Cústica.

Estas expresiones han sido deducidas por el autor (4) y aplicadas en la medición de espejos cuyas secciones no son cónicas, sin mayor dificultad.

Para el Foucault clásico se obtiene:

Para cónicas :

$$OC = R + e^2 \frac{r^2}{2R} + e^2(1 - e^2) \frac{r^4}{8R^3} + \dots$$

Para curvas expresadas mediante la ecuación (2) :

$$OC = R + (1 - a) \frac{r^2}{2R} + (2a^2 + a - 3b) \frac{r^4}{8R^3} + \dots$$

Para el método de la Cústica se obtienen las siguientes expresiones:

Para cónicas:

$$\zeta = R + 3e^2 \frac{r^2}{2R} - 3e^2(1 - e^2) \frac{r^4}{8R^3} + \dots$$

$$\eta = - e^2 \frac{r^3}{R^2}$$

Vemos que en las cónicas una de las series que nos dan los centros de los círculos osculadores, se reduce a un solo término.

Para curvas expresadas mediante la ecuación (2):

$$\zeta = R + 3(1 - a) \frac{r^2}{2R} + 3(6a^2 - a - 5b) \frac{r^4}{8R^3} - \dots$$

$$\eta = - (1 - a) \frac{r^3}{R^2} - 3(a^2 - b) \frac{r^5}{2R^4} - \dots$$

Esperamos con este informe haber contribuido a aclarar el problema de la medición de superficies ópticas.

Bibliografía

- (1) R. Platzack y E. Gaviola. J. Opt. Soc. Amer. 29, 484 (1939)
- (2) F. L. O. Wadsworth. Pop. Astr. 10, 337 (1902)
- (3) E. Sábato. Rev. Astr. 9, 160-178; 228 - 243 (1937).
- (4) J. Landi Desay. Bol. N° 5, Asoc. Arg. de Astr.

SOBRE LA SOLUCION GENERAL DEL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

Reynaldo P. Cesco
(Observatorio Astronómico, La Plata)

Sean h la constante de la energía, C el vector momento angular r la distancia de los dos cuerpos que pueden participar en una colisión binaria y p la distancia del tercer cuerpo al centro de masa de los dos primeros. Sin suponer como lo hace G.A.Merman (Bol. del Inst. de Astr. Teór. de Lenin grado, 10, 713-731, 1958) $h < 0$, $C \neq 0$, $r = O_{(1)}$ y $p^{-1} = O(1)$, se demuestra que, en ciertas condiciones, las coordenadas de los tres cuerpos y el tiempo pueden desarrollarse en series de polinomios convergentes para todo valor real del pseudo-tiempo (variable de regularización de Sundman).

Actualmente se está elaborando el programa para calcular con la Mercury de Buenos Aires, un ejemplo simple por el método de Merman y las clásicas series de Sundman con el objeto de comparar la potencia y utilidad de ambos. (Enviado al Congreso Internacional de Matemáticas de Estocolmo).

ON THE GENERAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF THREE BODIES

The purpose of this paper is to give an extension of a theorem of G.A. Merman (Bull.Inst.Theor.Astr. 10, 713-731, 1958) on the general solution of the problem of three bodies by series of polynomials, without assuming $h < 0$, $C \neq 0$, $r = O(1)$, $p^{-1} = O(1)$ (h : energy constant, C : angular momentum vector, r : distance between the two bodies which can participate in a binary collision, p : distance between the third body and the center of mass of the first two bodies). A simple numerical example is calculated by Merman's method and by Sundman's classical Series and the usefulness of both methods are compared.

UN NUEVO TIPO DE TELESCOPIO-CÁMARA CON TRES ESPEJOS

Jorge Landi Dessy
(Observatorio Astronómico, Córdoba)

Es conocido el problema que presentan los grandes telescopios reflectores al tener un campo sumamente reducido. La lente de Ross soluciona en parte el problema, pues da un campo más grande, pero sacrifica en parte la calidad del mismo. Los telescopios aplanáticos -todavía no muy difundidos, pese a sus innegables ventajas- dan campos bastante mayores, del orden de medio grado, pero sus razones focales no son tan luminosas como el foco primario de los reflectores corrientes; en general la razón focal no puede bajar de siete.

Otro camino para ampliar el campo y tener además la posibilidad de variar la razón focal es el que se consigue con las cámaras del tipo Meinel, pero también en estos casos el aumento del número de superficies ópticas presenta sus problemas en telescopios de gran tamaño. Si se piensa en sistemas Meinel telecéntricos (1), también se presentan inconvenientes si el telescopio es de muy grandes dimensiones; el campo en este caso no pasa de unos 20 minutos.

La solución que se propone reduce a un mínimo las superficies ópticas y no requiere figurados especiales en el espejo primario del telescopio; los campos que se obtienen son mayores que en las soluciones anteriores y son de buena calidad.

Es conocido que mediante dos espejos se pueden obtener sistemas anastigmáticos. Las soluciones que se obtienen son dos; la primera exige que el secundario está situado en el radio de curvatura del primario: este es el caso del anastigmático de Couder. La otra solución en general no se la tiene en cuenta, pues da una imagen al infinito de un objeto en el infinito. En este caso los espejos son dos paraboloies confocales, uno cóncavo y otro convexo. El haz que se obtiene es anastigmático y su diámetro dependerá de la relación de diámetros entre el primario y el secundario.

Obtenido el haz paralelo se forma la imagen con cualquier sistema óptico conveniente, incluso una cámara Schmidt. Si bien es cierto que en este caso no se trabaja en condiciones ideales -pues el haz barre en parte la lente correctora- para campos del orden de un grado no resultan mayores problemas. Teniendo un juego de cámaras Schmidt de diversas luminosidades se pueden obtener campos del orden de un grado con las razones focales que se deseen. No hay inconveniente en emplear objetivos formados por lentes.

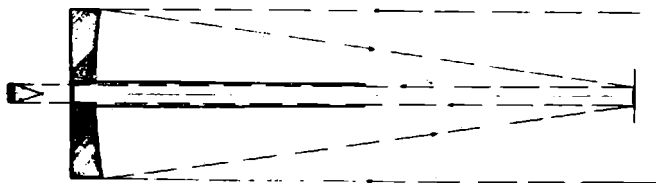
Si se plantea el problema con toda generalidad, se puede eliminar teóricamente la lente correctora, pues disponemos de cinco parámetros, con los cuales se pueden eliminar los cinco errores ópticos de tercer orden.

En este caso se puede conseguir un sistema de muy buena calidad, pero como los parámetros a disposición son los figurados de los tres espejos y sus distancias mutuas, la solución no presenta la versatilidad de la anterior. En la actualidad se está estudiando también esta solución.

En resumen, el sistema funciona como un reflector corriente al que se sustituye el secundario hiperbólico por un parabólico (de manera que estos dos espejos funcionen como el telescopio) más la lente de campo, más el colimador de un telescopio corriente con cámara de Meinel. Posee la ventaja del haz paralelo en el cual se pueden emplear filtros o un elemento dispersor. El sistema está esquemáticamente representados en la fig.1.

Los inconvenientes que presenta son: Primero) Obstrucción central adicional para que no entre luz directa del cielo sobre la lente correctora. En realidad la obstrucción no es mayor que un telescopio Ritchey-Chrétien. Segundo) El mencionado efecto de barrido de la lente correctora.

En el dibujo se dan las dimensiones resultantes para un telescopio hipotético de tres metros de diámetro.



Bibliografía.

- (1) R.P. Platzeck y J. Landi Dessy. "Algunas consideraciones sobre la cámara de Meinel". Boletín Num. 1, Asociación Argentina de Astronomía.
- (2) E.H. Linfoot. Recent Advances in Optics. pg.277. Oxford. Clarendon Press.

Summary.

A NEW TELESCOPE CAMERA SYSTEM WITH THREE MIRRORS

An optical system has been designed which in a common reflector combines both the advantages of a relatively large field and a Meinel camera. The system consists of two confocal paraboloids; it is known that the parallel beam obtained is anastigmatic. The image can be re-formed by means of any type of camera. Theoretically it is possible to eliminate the correction lense of a Schmidt camera with three mirrors, since we have five parameters to correct the errors of third order: the three curvatures of the three mirrors and the two parameters giving their relative distances. Fig. 1 gives an illustration of the system.

EL ESPECTRO DEL Si II EN LAS ESTRELLAS PECULIARES

Mercedes Jaschek y Carlos Jaschek
(Observatorio Astronómico, La Plata)

En los espectros de seis estrellas peculiares del tipo A, se identificó una veintena de líneas, hasta el momento sin identificar, con líneas provenientes de niveles de alta excitación del Si II. Entre otras, la línea $\lambda 4200$ también corresponde al Si II, en blend con Fe III.

El trabajo "in extenso" será publicado en las "Publications of the Astronomical Society of the Pacific".

THE SPECTRUM OF Si II IN PECULIAR A-TYPE STARS

In the spectra of six peculiar A-type stars, twenty lines for which no identification was available, were identified with lines corresponding to high excitation levels of Si II. Among others also $\lambda 4200$ corresponds to Si II, blended with Fe III.

The paper will be published in full in the "Publications of the Astronomical Society of the Pacific".

SOBRE LOS SISTEMAS R CANIS MAJORIS

Jorge Sahade
(Observatorio Astronómico, La Plata)

Se analizan los miembros del llamado grupo de los sistemas R Canis Majoris y se llega a la conclusión de que existe la posibilidad de describirlos como formados por una componente principal con las características que corresponden a su tipo espectral y clase de luminosidad y una componente secundaria que tiene características similares a las componentes secundarias de los sistemas del grupo 3 de la clasificación del autor.

El trabajo se publicará in extenso en otra parte.

ON THE R CANIS MAJORIS SYSTEMS

The so-called R Canis Majoris systems are discussed and the conclusion is reached that there is the possibility of describing them as being formed by a primary component that has the characteristics that correspond to its spectral type and luminosity class and a secondary component with characteristics that are similar to those of the secondary components of the systems belonging in group 3 of the classification proposed by the author.

The discussion in full will be published elsewhere.

Discusión:

Séraic: ¿Qué validez tiene la teoría de las superficies de Hill aplicada a estos casos cuando ella vale sólo para masas puntuales?

¿Qué grado de aproximación tiene ese modelo?

¿Se ha tratado de generalizar la teoría de Hill para masas no puntuales distorsionadas?

Sahade: Plavec ha mostrado que considerando masas no puntuales con una distribución razonable de las densidades, el carácter de las superficies

♦ Miembro de la Carrera del Investigador Científico, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

equipotenciales prácticamente no se modifica, pero que los efectos son serios en otros casos, como por ejemplo cuando hay falta de sincronización entre la velocidad de rotación y la de revolución. Por consiguiente, las dimensiones relativas de las superficies equipotenciales críticas y de las estrellas no deben tomarse al pie de la letra; de ahí la justificación de la alternativa que propongo para describir los sistemas R Canis Majoris.

No conozco generalizaciones de la teoría para el caso de masas distorsionadas.

SOBRE LA DISTRIBUCION DE LA ENERGIA EN ESCALA COSMICA

C.J.Lavagnino
(Observatorio Astronómico, La Plata)

En búsqueda de indicios a favor de las ideas de turbulencia en cosmogonía se ha examinado la distribución de la energía cinética W y de la potencial D en sistemas cósmicos de distintos órdenes n . Se ha puesto de manifiesto dos relaciones bien definidas. En primer lugar, el $\log W$ es una función lineal del orden n . En segundo lugar, la energía cinética de un objeto en la frontera de un sistema es igual a la energía D del mismo objeto (En todos los sistemas planos). La relación $(n, \log W)$ indica que el número n tiene un sentido físico real, precisamente, el de orden de un sistema. En tal caso, como se señaló en un trabajo anterior, la necesidad de un campo de turbulencia es obvia. Por otro lado, la segunda relación $(W=D)$ puede explicarse sencillamente por la distribución de la energía específica en una nube de partículas en la que se establecen órbitas keplerianas. En tal caso, es un indicio a favor de las hipótesis de agregación de partículas y contracción (Schmidt, Fesenkov) que en una forma no contradictoria con un campo de turbulencia ya ha sido propuesta y empleada por el autor (Bol.AAA 4, p.58)

ON THE DISTRIBUTION OF ENERGY ON COSMIC SCALE

Searching for evidences in support of the intervention of turbulence in cosmogony, the distribution of the kinetic energy W and the potential energy D in cosmic systems of different hierarchy n was examined. Two well defined relations were found. In first place $\log W$ is a linear function of the order n . In second place the kinetic energy of an object at the boundary of a flat system equals the potential energy of that object. The relation $(n, \log W)$ indicates that n has a well defined physical interpretation namely that of the order of the system. In this case, as was pointed out in an earlier paper, a field of turbulence is obviously necessary. On the other hand, the second relation $(W=D)$ can be explained readily in terms

of the distribution of the specific energy in a cloud of particles where keplerian orbits are obtained. Thus a new support is found for the hypothesis of aggregation and contraction (Schmidt, Fesenkov) that in conjunction with a field of turbulence was suggested and used by the author (Bol. AAA 4, p.58, 1962).

ANDOYER'S VERSION OF HANSEN'S METHOD

C. Altavista

(Observatorio Astronómico, La Plata)

This paper deals with Hansen's method for calculating perturbations. A brief outline is given of a comparison between Hansen's method in its original form and Andoyer's version of it, as contained in his "Cours de Mécanique Celeste". The summary includes the main distinctive characters and similarities present in both procedures. A final remark gives the author's opinion on Andoyer's method.

A: Distinctive characters in Andoyer's treatment.

- 1.- Fixed reference plane.
- 2.- Quantities to be disturbed:
 - a: semi-major axis of the auxiliary ellipse.
 - l (or γ): mean anomaly
 - h_0 : the constant or areas in the two body problem.
 - z: the ordinate respect to the fixed reference plane.
- 3.- The perturbation in mean anomaly is put as a correction to g_0 , and defined by: $g = \mu t + g_0 + \sigma$
- 4.- The perturbations in a and σ are calculated from the values of the perturbations in h_0 and $-\frac{h_0}{a}$.
- 5.- The orthogonal components of the acceleration are developed in analytical form.
- 6.- There are three determining functions for calculating the perturbations in ω and β . These functions depend on the values of the perturbation in latitude, within small quantities of second order.
- 7.- The equation for the perturbation in latitude is a non homogeneous differential equation of second order.
- 8.- The disturbing function W has two parts:
 - a) The "proper" disturbing function V (which splits also in two parts).

b) A complementary part gives rise when the difference between the value of the mean motion defined by $\mu^2 a^3 = k^2$, should be put into coincidence with the observational value defined by: $g = \nu t + g_0$.

- 9.-Newcomb's method is used to develop the disturbing function, when its analytical development is to be considered.
10. Cauchy's method is suggested for numerical computation of perturbations. Harmonic analysis can then be applied.
11. The differences in the determination of the constants of integration depend on the form in which the absolute elements are defined.
12. Numerical values of those constants got in the first approximation are availed for calculating the increments (of these constants) in the second approximation.
13. No use is made of Hansen's theorem, according to which quantities that depend on the time and are out of the integral sign, can be put under the integral sign, and then the integrations can be performed taking a constant time for these quantities.
14. The determining function P_1 is arbitrary.

B: Similarities.

- 1.- An auxiliary ellipse is chosen on the fixed plane. There are four absolute elliptic constants in the plane. The other two constants determine the position of the fixed plane.
- 2.- The differential equation of motion are put in terms of the orthogonal components of the acceleration. It is understood that the values of the "reduced" radius-vectors must be taken in the formerly quoted equations.
- 3.- There is only a determining function to calculate the perturbations in latitude.
- 4.- The coefficients of the derivatives of the disturbing function are expressed, in both approximations, in terms of periodic series with argument g .

5.- The calculation of second order perturbations has two parts:

- 1) The first part depend directly on terms that contain the values of the first order perturbations. This part must be completed up to terms of second order.
- 2) The second part results from considering the variations of the determining functions. These variations arise from the influence of the perturbations of first order in these functions.

C: Remarks

It could be said that Andoyer's treatment of the statement of the problem is inferior to Hansen's original paper. There are several objections to bear in mind. Firstly there is one more quantity to be disturbed. Secondly, as Andoyer takes a fixed reference plane, he must express the disturbing function in terms of the "reduced" radius-vectors of the different bodies. New troubles arise when the difference between n and g is taken into account. For it, he is obliged to add a complementary part to the disturbing functions.

On the other hand the statement is such that there are three determining functions to calculate the perturbations in h_0 and h_0/a , instead of only one as appears in Hansen's method. And we must also say that the suggestion for using Cauchy's method is not safe of criticism. The troubles are due to the fact that there are two expansions to be performed, instead of only one as it occurs in the ordinary case.

It can finally be said that the method seems to me -from the point of view of the analytical computations- very skillful but it is rather inadequate in its analytical statement.

This does not mean that some special devices of the method can not be used. Besides this the only tests are got when numerical applications are made. And of course it depend also on the case to be considered.

Special attention must be paid to the fact that there are denominators of second order in the first approximation.

UNA INTERPRETACION DE LOS CRITERIOS DE LAMBERT-CHARLIER y EIGENSON

C.J.Lavagnino
(Observatorio Astronómico, La Plata)

Se ha buscado una condición que defina al menor sistema cósmico posible. Se supuso que debe cumplir una condición de Roche y al mismo tiempo la relación empírica de Jascbek. Así resulta fácilmente que el radio mínimo de un objeto que pueda tener satélite es solo función de la densidad, es decir

$$R = p \frac{10^8}{\sqrt{\rho}}$$

si se supone la misma densidad para el cuerpo central y su satélite.

Para el caso general resulta

$$R = p \cdot \frac{10^8}{\rho^{0,56}} \left(\frac{\rho_c}{\rho_s} \right)^{0,23},$$

siendo p un coeficiente que depende de la ley de Roche adoptada. La primera expresión es suficiente para mostrar que en el sistema planetario sólo Ganimedes, Calisto y Titán pueden tener satélites, en concordancia con un resultado anterior del autor. Además, la misma expresión da valores de R que coinciden curiosamente con los de otros sistemas cósmicos si se toma en cuenta las respectivas densidades. Si esta coincidencia no es fortuita, sugiere la posibilidad de justificar cualitativamente los criterios o desigualdades de Lambert-Charlier y Eigenson. En efecto, se muestra que si para densidades próximas a $\underline{1}$ es $\underline{a} > R$ entonces el número de sistemas \underline{N} deberá crecer rápidamente al aumentar el orden \underline{n} de los sistemas, mientras la densidad disminuirá. La expresión completa de R muestra que si la densidad del sistema central se mantiene inferior a la del sistema satélite, deberá ser $R_c \gg R_s$. Pero la secuencia jerárquica no puede crecer sin término, debido a la propagación finita de la gravitación. Se señala que este tamaño límite, sugerido por Zwicky, coincide con el tamaño de la supergalaxia, tal como

este sistema ha sido determinado por V. Cooper-Rubin y G. de Vaucouleurs. Las propiedades de este límite están siendo estudiadas por el autor.

AN INTERPRETATION OF THE CRITERIA OF LAMBERT-CHARLIER AND EIGENSON

A condition able to define the cosmic system of the smallest possible size has been sought. It was assumed that the Roche criterion and Jäschek's empirical relation must be fulfilled. In this way it can be shown that the least radius of an object that could have a satellite is only a function of its density:

$$R = p \frac{10^8}{\sqrt{\rho}}$$

if it is assumed that the central body and the satellite have the same density. In the general case results

$$R = p \cdot \frac{10^8}{0,56} \left(\frac{\rho_c}{\rho_B} \right)^{0,23}$$

where p is a numerical coefficient depending of the adopted Roche criterion. Using the first formula it can be seen that in the solar system only Ganymede, Callisto and Titan could have satellites, in accordance with an earlier result of the author. Furthermore, the same expression gives values of R that curiously agree with the size of the cosmic systems of different orders, if the respective densities are taken into account. This suggests the possibility of a qualitative justification for Lambert-Charlier and Eigenson criteria. Effectively, it is shown that if R and the distance a of the satellite fulfill the condition $a > R$ for densities near 1 , then the number of systems N will increase very fast with the increase of the order of the systems. The reverse will be true for the density. The second expression for R shows that inasmuch the density of the central systems remains lesser than the satellite density $R_c \gg R_B$. Thus the main Eigenson empirical inequalities are justified. But the hierarchical sequence cannot increase endlessly (in an universe of pure newtonian interactions) on account of the finite pro-

pagation of the gravitation. It is pointed out that this limiting size, predicted by Zwicky, coincides with the size of the supergalaxy as determined by V.Cooper-Rubin and de Vaucouleurs. A study is being made of the properties of this limiting size.

LA CONSTRUCCION DEL NUEVO ESPECTROGRAFO PARA BOSQUE ALEGRE

R.Plätzeck

(Comisión Nacional de la Energía Atómica)

J.Landi Dessy

(Observatorio Astronómico, Córdoba)

Se ha calculado todo el sistema óptico y efectuado el diseño completo de la montura del mismo. En el presente el trabajo de diseño entró en la faz de los planos individuales para taller. La óptica de los colimadores ha sido efectuada en los talleres ópticos del Observatorio de La Plata, dejándolos con un parabolizado menor del necesario para permitir el ajuste final en autocolimación con los espejos cámara. Los discos de los espejos cámaras están terminados y se efectuaron estudios para su doblado en horno eléctrico. Los moldes con la curva necesaria fueron efectuados por la Escuela de Cerámica de la Provincia de Córdoba.

ESTABILIDAD HIDROMAGNETICA DE UN FLASMA EN UN CAMPO GRAVITATORIO

José Luis Sérsic
 (Observatorio Astronómico, Córdoba, y
 (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas,
 Buenos Aires).

A través de las ecuaciones viriales tensoriales se establecen las condiciones de equilibrio de un plasma perfecto en un campo magnético exterior, considerando la existencia de un campo gravitatorio. Este último puede tener su origen en una distribución de masa exterior (dinámicamente hablando) o provenir de la autogravitación del plasma.

Restringiendo la generalidad del problema al caso de un campo magnético uniforme de intensidad h en el infinito, las condiciones de simetría reducen a dos las ecuaciones de equilibrio

$$\frac{h^2}{8\pi} \sigma_i V = \int P dv + Q_i \quad i = 1, 3$$

donde P es la presión proveniente de la agitación térmica, V es el volumen de la configuración y Q_i se define como

$$Q_i = \int x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dm$$

siendo $\Phi(r)$ la función potencial de la distribución de masa. Si se introduce el parámetro

$$\zeta = \frac{8\pi}{h^2 V} \int P dv$$

se demuestra que las figuras de equilibrio son elipsoides prolados, cuya excentricidad β satisface la ecuación

$$\zeta = \sigma_3 + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 - \frac{\Omega_1}{\Omega_3}}$$

donde tanto las σ_i como $\frac{\Omega_1}{\Omega_3}$ son funciones unicamente de β . La expresión anterior determina la forma de la configuración.

Si se supone que el campo magnético produce una perturbación del tipo $\delta(r) P_2(\mu)$ en la distribución originalmente esférica de la densidad $\rho(r)$, es posible calcular β sea para el caso autogravitante como para el de un campo gravitatorio exterior de simetría esférica, concéntrico con la configuración.

En cuanto se refiere a la estabilidad, se han calculado los modos de oscilación radial y no-radial λ_R y λ_S , sometiendo a las ecuaciones viales tensoriales a una perturbación del tipo $\delta x_i = \xi_i x_i e^{i \cdot t}$, pero de simetría axial. Para ciertos cálculos del caso autogravitante hemos adoptado algunos resultados de Wentzel, mientras que debió calcularse integralmente el caso del campo gravitatorio exterior.

Los modos de oscilación resultan ser, en primera aproximación,

$$\lambda_R^2 = - (3\Gamma - 4) \frac{\Omega}{J} + 3(2 - \Gamma) \frac{\sigma V}{J} \quad \lambda_S^2 = - \frac{4}{5} \frac{\Omega}{J} - \frac{13}{7} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{J} V$$

para el caso autogravitante, mientras que resultan

$$\lambda_R^2 = (3\theta - 1)(3\Gamma - 4) \frac{\Omega}{J} + 3(2 - \Gamma) \frac{V}{J}, \quad \lambda_S^2 = \frac{\Omega}{J} \left(-\frac{4}{5} + \frac{1}{7} \Delta + \frac{21}{4} \theta + \frac{48}{35} \Delta \theta \right)$$

para el caso del campo exterior. El valor de θ depende de la concentración de la distribución de masa gravitante, valiendo 1 para una distribución uniforme y/o para una concentración infinita.

Un análisis en primera aproximación sugiere que el caso autogravitante es estable respecto de ambos tipos de perturbación, mientras que la estabilidad depende considerablemente de la concentración de masa en el caso de un campo gravitatorio externo, en el sentido de que las configuraciones más estables corresponden a pequeños valores de θ .

Se han calculado, finalmente, σ_1 , ζ, Δ , para diversos valores del argumento β .

El autor agradece la colaboración del señor Z. Pereyra en el cómputo de algunas tablas y la gentileza del señor L. Marzulli al programar el cálculo de σ_1 para la computadora Mercury, de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Buenos Aires.

CONTRACCION GRAVITATORIA DE UNA NUBE INTERESTELAR

Wolfgang G.L.Pöppel

(Departamento de Física de la Facultad de Ciencias
Exactas y Naturales de la Universidad de B.Aires)

El problema aquí considerado se refiere a la evolución de una nube interestelar bajo condiciones físicas muy simplificadas con vistas a su posterior contracción. El tratamiento del problema se hará considerando a la nube como un fluido que obedece a las ecuaciones hidrodinámicas y, luego de elegir condiciones iniciales adecuadas, se buscará su solución analítica.

La ecuación de movimiento de un fluido no homogéneo es, en una forma muy general (Landau-Lifshitz):

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\zeta \frac{\partial v_e}{\partial x_e} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_e}{\partial x_e} \right] \right) + F_i,$$

$$i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

En esta ecuación se usa la convención de Einstein sobre índices repetidos; ρ es la densidad, v la velocidad, p la presión, η y ζ los coeficientes de viscosidad de superficie y de volumen. Estas cinco variables dependen de la posición (x_1, x_2, x_3) y del tiempo t . \vec{F} es la fuerza aplicada por unidad de volumen que actúa en el fluido. La (1) puede transformarse en una forma que hace más visible su carácter vectorial invariante.

Resulta:

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \vec{v} \wedge \text{rot} \vec{v} \right\} - \left\{ \eta (\text{grad} \text{div} \vec{v} - \text{rot} \text{rot} \vec{v}) + \right.$$

$$\left. + [- \text{grad} \eta \wedge \text{rot} \vec{v} + \text{grad} (\text{grad} \eta \times \vec{v}) - \left(\frac{d}{dt} \vec{\nabla} \eta - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \eta \right)] \right\} +$$

$$+ \left\{ \text{grad} p \right\} + \left\{ - \vec{\nabla} (\zeta \text{div} \vec{v}) - \vec{\nabla} \text{div} (\eta \vec{v}) + \text{div} \vec{v} \cdot \text{grad} \eta + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dt} \vec{\nabla} \eta - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \eta + \frac{2}{3} \vec{\nabla} (\eta \text{div} \vec{v}) \right\} = \vec{F}$$

Los símbolos \wedge y \times corresponden respectivamente a los productos vectorial y escalar. El significado de los diferentes términos es: la primera

llave es simplemente $\rho \frac{d\vec{v}}{dt}$, la segunda llave corresponde a la acción de las fuerzas viscosas superficiales, la tercera llave al gradiente de presión, la cuarta llave a las fuerzas viscosas de volumen, y el segundo miembro a las fuerzas aplicadas. Para simplificar, tan sólo consideramos el caso en que el fluido adopta simetría esférica. En dicho caso, considerando al centro de la esfera como origen de coordenadas, la única variable espacial necesaria para describir el movimiento será la distancia r al centro de un elemento de volumen dado. Debido a la simetría esférica, las magnitudes vectoriales \vec{F} y \vec{v} tendrán dirección radial: $\bar{F}(r,t)$ y $v(r,t)$. Las componentes positivas hacia la periferia y negativas hacia el centro. Las demás variables también dependerán solamente de r y t .

Con todas estas condiciones y admitiendo que en el centro no haya masas puntuales, la ecuación (2) se puede reducir a:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} + 2\alpha \frac{v}{r^2} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{2\alpha}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial \kappa}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial \kappa}{\partial r} \frac{v}{r} - 3 \frac{v}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} = \bar{F}$$

con $\alpha = 4/3 \eta + \zeta$

Esta ecuación presupone la no existencia de turbulencia, ni de ondas de choque. Además si la nube presentara una rotación inicial, ésta deberá ser suficientemente pequeña como para no perturbar la simetría esférica. Si ahora se acepta que la única fuerza presente es la gravitatoria de la misma nube (no existiendo entonces campos electromagnéticos o bien estando la nube en estado neutro, etc) podremos escribir:

$$\bar{F} = - \frac{G\rho}{r^2} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \quad (4)$$

donde G es la constante de gravitación universal. Además de la ecuación de movimiento así planteada tenemos que considerar las ecuaciones de continuidad, de conservación de la energía y la ecuación de estado. La primera en este caso simplemente es:

$$- \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) \quad (5)$$

En cuanto a la ecuación de conservación de la energía, ella nos dice que para un elemento de volumen

$$\Sigma \Delta A + \Sigma \Delta Q = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_{p \text{ int.}} \quad (6)$$

donde $\Sigma \Delta A$ es la suma de todos los trabajos realizados sobre el elemento, en este caso el de las fuerzas aplicadas más el de las de presión (incluidas las de viscosidad). $\Sigma \Delta Q$ es la suma de todas las cantidades de calor entregadas al elemento, ya sea por conducción, por radiación o por posibles procesos nucleares; ΔU es el aumento de energía interna y $\Delta E_{p \text{ int.}}$ el de energía potencial interna del elemento y que aquí es nulo. Aceptando que el fluido es químicamente homogéneo y que se comporta además como un gas ideal y aprovechando la ecuación de movimiento, la (6), referida a la unidad de volumen y de tiempo se reduce a

$$\text{div } k \vec{\text{grad}} T + \epsilon_R \rho + E = C_v \frac{\rho}{\mu} \frac{dT}{dt} + \frac{d \rho u_R}{dt} \quad (7)$$

donde k es la conductividad térmica, C_v el calor específico a volumen constante, ϵ_R la energía térmica generada o recibida por procesos nucleares o de radiación, y u_R la energía interna específica de la radiación presente. El primer término representa el calor entregado por conducción, el segundo representa el calor entregado por radiación o por procesos nucleares y el tercero, E , (ver por ejemplo Kotshin, Kibel y Rose) es el proceso mecánico que no se transforma en energía cinética. El segundo miembro es por lo tanto el aumento de energía interna, suma del de un gas ideal y del de la radiación presente (μ es el peso molecular, T la temperatura). La expresión de E , llevada a coordenadas polares y con simetría esférica resulta ser:

$$E = \frac{4}{3} \eta \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 + \zeta \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} \right) - p \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} \right) \quad (8)$$

El primer término del segundo miembro es el trabajo disipado por las fuerzas viscosas de superficie, el segundo el análogo disipado por las de volumen, (ambos son positivos), y el tercero el trabajo de compresión, que es de la forma $-p \frac{d\Delta V}{dt} \times \frac{1}{\Delta V}$, llamando ΔV al volumen del elemento.

Finalmente la ecuación de estado es:

$$p = \frac{\pi}{r} pT + p_r$$

que se compone de un término debido al gas y otro debido a la radiación. Si hay equilibrio termodinámico local $p_r \sim T^4$.

Está planteado así, con las ecuaciones (3), (5), (7) y (9), relacionadas con las (4) y (8) un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro variables dependientes: v , Ω , ρ y ζ , y dos independientes: r y t . Fijadas las condiciones iniciales es necesario hallar la solución que da la evolución del sistema.

La tarea sería ahora hallar y discutir las soluciones analíticas correspondientes a diferentes casos particulares; pero previamente formularemos algunas hipótesis tendientes a simplificar las ecuaciones.

Supondremos que nuestro gas ideal es perfectamente transparente. De esta manera su absorción es nula y, si se halla en equilibrio termodinámico local, también su emisión será nula, de modo que $p_r = 0$, $\epsilon_R = 0$, $u_R = 0$. Nos quedan por estimar los parámetros k, η, ζ . Ello puede hacerse en base a la teoría cinética de los gases. Si nuestro gas ideal es monoatómico resulta (Enskog) que $\zeta = 0$, mientras que, en general (ver p.e. Jeans),

$$\eta \cong \frac{4}{3} b \sqrt{T} \quad \text{y} \quad k = d \sqrt{T}, \quad b \text{ y } d \text{ constantes.}$$

Para el hidrógeno monoatómico neutro resulta:

$$\frac{4}{3} b \cong 0,27 \times 10^{-4} \frac{g}{\text{cm} \text{ sen}(\circ K)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{y} \quad d \cong 3,36 \times 10^{-3} \frac{g \text{ cm}}{\text{seg}^3 (\circ K)^{3/2}}$$

Tenidas en cuenta todas las consideraciones anteriores y eliminando p , el sistema de ecuaciones se reduce al siguiente:

$$\left\{ \begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{R}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} + 2 \frac{bv}{r^2} \sqrt{T} - b\sqrt{T} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - 2b \frac{\sqrt{T}}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{b}{2\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{b}{2\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{v}{r} = \\ & - \frac{G\rho}{r^2} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & - \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & b\sqrt{T} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 - \frac{RT\rho}{\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) + \frac{d}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sqrt{T} \frac{\partial T}{\partial r}) = c_v \frac{\rho}{\mu} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Se trata de plantear condiciones iniciales plausibles para proceder luego a la resolución. Por un lado se han hecho hipótesis demasiado simplificado--ras quizás, que ignoran la extrema complejidad de las nubes interestelares reales como ser: zonas ionizadas, turbulencia, ondas de choque, campos gravitatorios exteriores, presión de radiación, etc. las cuales además en general atentan contra la simetría esférica. Pero por el otro lado existen sistemas de gran simetría esférica, como ser los cúmulos globulares y las galaxias elípticas de poca excentricidad. Los primeros parecen pertenecer evidentemente a los objetos más antiguos de nuestra galaxia y que actualmente no se forman más, de manera que podríamos aventurarnos a tratar la evolución de una nube de "primera generación" con vistas a obtener un cúmulo globular, ya que en este caso parecerían más aceptables algunas de las hipótesis hechas, como por ejemplo lo simple de la composición química elegida (hidrógeno puro), la ausencia de campo de radiación, la no consideración de la rotación diferencial de la galaxia, etc. Por todo lo dicho adoptaremos entonces las condiciones iniciales más simples:

$$\rho(0, r) = \rho_0 = \text{Cte.}, \quad T(r, 0) = T_0 = \text{Cte.}, \quad v(r, 0) = 0 \quad (13)$$

Debemos hacer notar sin embargo que la última condición $v_0 = 0$ es poco satisfactoria, ya que postula un "instante privilegiado" en el cual la nube parte del reposo sin estar no obstante en equilibrio, ya que las fuerzas actuantes no son nulas. Consideremos ahora la solución del problema. Las condiciones (13) permiten apreciar en primera aproximación en todas nuestras

ecuaciones los términos en que figuren $\frac{\partial T}{\partial r}$, $\frac{\partial p}{\partial r}$, $v \frac{\partial v}{\partial r}$ y demás términos de segundo orden en v . Con esto presente, derivando la (11) respecto de r y reemplazando en (10) se obtiene:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \approx -\frac{4}{3} \pi G \rho^2 r, \quad (14)$$

Esta ecuación simplemente nos dice que a velocidades pequeñas las fuerzas viscosas carecen de importancia por lo que, como inicialmente no había gradiente de presión ($\frac{\partial p}{\partial r} = 0 = \frac{\partial T}{\partial r}$), la única fuerza importante es la gravitatoria. Derivando la (14) respecto de t y combinándola con la (11) resulta

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} \right) = 0, \quad (15)$$

ecuación en la cual v es la única variable dependiente. Ensayando v como producto de dos funciones, una de r y otra de t :

$$v = A(t)F(r)$$

resulta, luego de cálculos y consideraciones que no reproduciremos aquí:

$$v = -\frac{2}{3} \omega r \operatorname{tg}(\omega t), \quad (16)$$

donde ω es una constante que vale

$$\omega = \frac{2\pi}{\zeta} \times \frac{1}{4} \quad \text{con} \quad \zeta = (\pi/8G\rho_0)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

Ahora puede hallarse ρ mediante la (14) resultando

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{\cos 2\omega t}, \quad (18)$$

y, finalmente, para hallar T se usa la (12) que aún no se había utilizado, obteniéndose simplemente la ecuación de la adiabática reversible:

$$T = T_0 \left(\rho/\rho_0 \right)^{\gamma-1} \quad (19)$$

donde γ es la relación c_p/c_v de los calores específicos.

Se encuentra así una solución aproximada del problema planteado. Por sustitución puede verificarse que esta solución es más exacta de lo que parecería,

por la manera en que fué hallada, ya que satisface exactamente las (11) y (12), mientras que lo hace con la (13) despreciando solamente el término no lineal en v , es decir, suponiendo que

$$v \frac{\partial v}{\partial r} \ll \frac{v}{t} \quad (20)$$

condición suficiente que puede servir de criterio de validez de la solución. Por otra parte la solución sólo tiene validez en r hasta un valor $R(t)$ radio instantáneo de la nube. Dicho valor se obtiene recordando que para $r = R$ la masa encerrada por dicho radio es la de la nube:

$$\frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \quad (21)$$

donde R_0 es el radio inicial de la nube. De (21) y (18) resulta:

$$R(t) = R_0 \cos^{2/3} \omega t \quad (22)$$

Hagamos ahora algunas consideraciones físicas sobre la solución. La velocidad resulta en cada instante una función lineal de la distancia al centro. Además crece monótonamente con el tiempo (como puede comprobarse calculando $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r}$) terminando por alcanzar un valor infinito luego de un tiempo $t = \frac{\pi}{2}$. En realidad ya mucho antes de que esto suceda nuestra solución deja de tener validez por dejarse de cumplir la ecuación (20) como también por otras razones físicas que analizaremos al tratar una segunda solución particular. En cuanto a la densidad y temperatura, ambas inicialmente uniformes en el espacio, siguen siéndolo en todo instante aunque crezcan monótonamente con el tiempo hasta llegar a una densidad y a una temperatura infinitamente elevadas en el instante $t = \frac{\pi}{2}$. El hecho de que se cumpla la adiabática reversible se debe a que al no haber gradiente de temperatura presente, no hay conducción térmica, y por otra parte tampoco hay disipación viscosa, ya que el primer término de la ec. (12) es nulo. Físicamente esto se debe a que al variar depende la velocidad linealmente del radio, la nube se va contrayendo moviéndose por capas esféricas concéntricas que no tienen roza-

miento mütuo. Al no haber entónces calor entregado se cumple la ecuación de la adiabática. En definitiva, si para tener una idea del comportamiento de la nube se extrapola la solución aproximada hallada más allá de lo permitido por la (20), resulta que la nube se condensa en un tiempo $\tau \sim (G\rho_0)^{-1/2}$ independiente de la masa (o radio) y de la temperatura inicial de la nube y dependiente solo de su densidad inicial y de la constante gravitatoria. Este es un resultado conocido (ver por ejemplo Burbidge y Burbidge)

Examinada, como introducción, esta solución aproximada, vemos ahora una solución analítica exacta. El hecho de que la velocidad se distribuya en forma lineal con la distancia nos induce a elegir las siguientes condiciones iniciales "más estéticas" que aquellas que imponen el reposo inicial de la nube:

$$\rho(0, r) = \rho_0 = \text{Cte.}, \quad T(0, r) = T_0 = \text{Cte.}, \quad v(0, r) = \Lambda_0 r \quad (23)$$

donde Λ_0 es una constante negativa, vale decir que, en este caso, la nube tiene ya una velocidad inicial distribuida linealmente con el radio

Despreciando ahora como primera aproximación los términos en $\frac{\partial v}{\partial r}$ y $\frac{\partial \rho}{\partial r}$ y con procedimientos análogos a los seguidos para hallar la solución anterior, se llega a la ecuación en v más completa que la (15) pues no se desprecia ahora a los que antes eran términos de segundo orden en v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{v}{r} \right) + 2 \frac{v^2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial t} + v \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 = 0 \quad (24)$$

Nuevamente ensayamos $v = \Lambda(t)F(r)$ y tras cálculos y consideraciones que no podemos reproducir aquí, se llega a calcular v , pudiéndose luego calcular ρ y T en forma parecida al caso anterior. El resultado es:

$$v = -\frac{1}{2} r \frac{1}{z-t}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{(1-t/z')^2}, \quad T = T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \quad (25)$$

donde

$$z' = (6\pi G \rho_0)^{-1/2} \quad \text{y} \quad 0 \leq t \leq z$$

Un hecho notable de esta solución es que, a pesar de la forma en que fue obtenida es la solución exacta del sistema (10), (11) y (12) con las condiciones iniciales (23) como puede comprobarse por sustitución directa. Tenien-

do esto presente, discutamos físicamente esta solución que es cualitativa—mente muy parecida a la solución aproximada considerada antes. Nuevamente la velocidad varía linealmente con el radio y crece monótonamente con el tiempo (en valor absoluto) durante todo el proceso de contracción. La densidad y temperatura se mantienen uniformes espacialmente a lo largo de todo el proceso, creciendo monótonamente en el tiempo. Por idéntica razón a la anterior vuelve a cumplirse la adiabática y las tres variables v, T, ρ vuelven a tomar valores ilimitados luego de un tiempo finito $\tau \sim (G \rho_0)^{-1/2}$ durante el cual la nube se "contrae infinitamente". La dependencia del radio de la nube en función del tiempo es ahora

$$R = R_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{2/3} \quad (26)$$

Otra vez el tiempo de contracción τ' de la nube resulta ser independiente de su masa y de su temperatura inicial. Es necesario hacer notar que tampoco esta solución, a pesar de ser exacta, y aún suponiendo esencialmente exactas las condiciones iniciales, la prescindencia de turbulencia, etc., puede aspirar a describir el proceso de contracción en toda su extensión. La razón es que la solución deja de tener significado físico cuando el sistema formado por las ec. (10), (11) y (12) deja de dar una descripción suficientemente aproximada del problema. Por ejemplo, a temperaturas suficientemente altas como para que el gas esté apreciablemente ionizado (para el hidrógeno unos 10000° K), y si hubiere campos magnéticos, habrá que completar las ecuaciones con términos que comprendan las fuerzas magnéticas, energías de ionización, presión de radiación, etc. A su vez se menester que la temperatura inicial no sea tan baja como para que no puedan aplicarse las ecuaciones del gas ideal, constancia de γ etc. Sin embargo, una solución como la hallada podría aspirar a describir una primera etapa de la contracción de la nube. Dicha etapa tendría una duración muy cercana a τ' ya que la evolución del proceso es muy lenta al principio, produciéndose recién en su última parte cambios notables de las dimensiones físicas.

Mencionemos todavía el problema de la obtención de un mecanismo de fraccionamiento de la nube para dar lugar a subsistemas. Si bien en el rango de validez de nuestra solución exacta dicho fraccionamiento todavía no se produce, en una etapa más avanzada del proceso en la que, por la elevada temperatura alcanzada, las (10), (11) y (12) deben ser completadas con términos radioactivos y en la cual cabe esperar que se rompa la isoterma espacial, dicho fraccionamiento podría producirse. Naturalmente, mientras no se abandone la simetría esférica, no puede aspirarse más que a obtener un fraccionamiento por capas esféricas, las cuales luego evolucionarían separadamente. Pero antes de tratar esto sería necesario resolver, siquiera numéricamente, el nuevo sistema de ecuaciones obtenidas de las (10), (11) y (12) con las modificaciones mencionadas.

Finalmente para fijar ideas, daremos algunos valores numéricos para el caso de la solución exacta. Si partiéramos por ejemplo de hidrógeno puro, ($\gamma = 1,66$), con $\rho_0 = 10^{-24}$ el tiempo de contracción sería

$$z' \approx 2,9 \times 10^7 \text{ años,}$$

si fijamos una masa de $M = 10^5 M_\odot$, lo cual equivale a $R_0 = 120$ psc. resulta para la velocidad inicial máxima (en la perifería) $v(0,R) = -2,65$ Km/seg. Por otra parte, el tiempo t necesario para que ρ_0 aumente en un 10%, sería $t = 0,17z'$ y correspondería a un incremento del 7% de T_0 . O sea, como quedara dicho, el proceso es de lenta evolución al principio.

El autor desea expresar su agradecimiento al Prof. C.M. Varsavsky por haberlo dirigido y asesorado durante la realización de este trabajo.

Bibliografía:

- Landau-Lifshitz: Fluid mechanics (trad. del ruso).
 Enskog: Diss. Uppsala 1917.
 Burbidge-Burbidge: Stellar Evolution, Handb. der Phys., LI, 1958.
 Kotshin-Kibel-Rose: Theoretische Hydromechanik (trad. del ruso).

Summary:

GRAVITATIONAL CONTRACTION OF AN INTERSTELLAR CLOUD

An interstellar neutral gas cloud of spherical symmetry is considered. The general hydrodynamical equations are written without considering turbulence or shock waves. Because of the observational difficulty of fixing the initial conditions for the cloud, the most simple are chosen: initial uniform density, temperature and velocity. For such cases analytical solutions are found which indicate that the cloud contracts in a time $\sim (G \rho_0)^{-\frac{1}{2}}$ independent of mass and initial temperature. Some further considerations are made.

γ URSAE MINORIS
J. Sahade* y H. Friebes-Conde
(Observatorio Astronómico, La Plata)

Se analiza la información publicada hasta la fecha sobre la estrella y se comunican los resultados de la medición de una serie de espectros tomados en el Observatorio de Mount Wilson durante cuatro noches consecutivas del mes de abril de 1956. La posible posición de γ UMi en el diagrama M_V , B-V sugiere que es muy probable que la estrella esté relacionada con el grupo de las llamadas cefeidas enanas.

El trabajo in extenso se publicará en otra parte.

γ URSAE MINORIS

The information available on the star is discussed and a report is made of the results of the measurement of a series of spectra taken at the Mount Wilson Observatory on four consecutive nights in the month of April, 1956. The location of γ UMi in the M_V , B-V plane suggests that the star might be related with the so-called dwarf cepheids.

The discussion in full will be published elsewhere.

* Miembro de la Carrera del Investigador Científico, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

RESULTADOS PRELIMINARES DE PLACAS DE ALTA Y MEDIANA DISPERSION DE
48 LIBRAE

Adela E. Ringuélet-Kaswaller
(Observatorio Astronómico, La Plata)

De los espectrogramas estudiados se concluye:

a) los núcleos de las absorciones originadas en la envoltura son dobles, correspondiendo cada componente a distintas regiones de la misma.

b) la presencia de una línea estelar en λ 4619, no identificable con OII. Se sugiere que la misma línea se halla presente, sin identificar, en algunas estrellas ricas en He.

El trabajo in extenso se publicará en otra parte.

PRELIMINARY RESULTS FROM PLATES OF HIGH AND LOW DISPERSION OF 48 LIBRAE

From the spectra studied we conclude:

a) the absorption cores originated in the shell are double. They seem to be originated in different layers of the ring.

b) the stellar line λ 4619 can not be identified with OII. We suggest that this line is present too in some B-type helium-rich stars (where it has been thought as OII).

The results will be published somewhere else.

VARIACIONES DE VELOCIDAD RADIAL DE CORTO PERIODO EN 48 LIBRAE

Adela E. Ringuet Kaswalder
(Observatorio de Lick.U.S.A.)

Variaciones de velocidad radial de 30 km/seg. de amplitud con un periodo de 0.115^d han sido determinadas en la variable V/R 48 Librae. Observaciones fotométricas por A. Feinstein y la autora no dan variación de luz en las regiones ultravioletas y azul (colores V y B).

Se discute la posibilidad de que la variación se debe a pulsación o a movimiento orbital.

El trabajo in extenso se publicará en otra parte.

SHORT PERIOD RADIAL VELOCITY VARIATIONS IN 48 LIBRAE

Short period radial velocity variations have been observed in the V/R variable 48 Librae. An amplitude of 30 km/sec and a period of 0.115^d have been determined. Photometric observations in U, V by the author and A. Feinstein show no variation within 0.02 mg. The possibilities of pulsation or binary motion are discussed.

The paper will be published somewhere else.

LOS CUMULOS GLOBULARES MAS RICOS EN ESTRELLAS VARIABLES

Herbert Wilkens
(Observatorio Astronómico, La Plata)

En una publicación anterior del mismo autor de este trabajo (H. Wilkens (1960): I. Los diámetros de los cúmulos globulares y sus variables. Serie Circular No. 16, Publ. del Observatorio Astronómico de La Plata), se trató de comprobar por los datos de observación, una fórmula sencilla que relaciona la luminosidad aparente m (en magnitudes) de los cúmulos globulares con su diámetro aparente ω (en minutos de arco):

$$\frac{m}{5} + \lg \omega = \text{const.} + 0.54 \quad (1a.)$$

Pasando a valores absolutos por medio de la distancia R (en Kpc) del cúmulo globular resulta:

$$\frac{W}{5} + \lg D_m = \text{const.} \quad (1b.)$$

en donde la magnitud absoluta está dada por $W = M + 10$ y el diámetro absoluto (lineal) D_m está medido en parsecs. La constante vale muy exactamente 2.20 ± 0.01 .

La condición necesaria de esta investigación es la corrección de los datos de observación por absorción interestelar S (en magnitudes) según las fórmulas:

$$\begin{aligned} \frac{m_s}{5} - \frac{S}{5} &= \frac{m}{5} \\ \lg R_s - \frac{S}{5} &= \lg R \\ \lg \omega_s + \frac{S}{10} &= \lg \omega \end{aligned} \quad (1c.)$$

y la estimación de los diámetros aparentes ω en base a la distribución aparente de las estrellas variables que pueblan los cúmulos globulares y sus alrededores.

De los 108 cúmulos globulares conocidos hasta hoy, recién 76 cúmulos han sido revisados por la existencia de estrellas variables (H. Wilkens (1960) Tabla 1a. y 1b.). Nuestras fórmulas (1a) y (1b) se basan esencialmente sobre la riqueza de estrellas variables en aquellos 32 cúmulos,

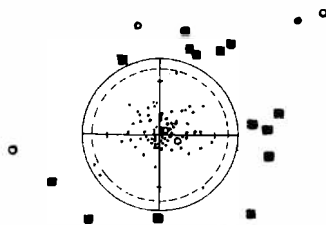
(17 en latitud galáctica positiva en la tabla 1a.

y 15 " " " negativa " " " 1b),

de los cuales cada uno en particular contiene más de 10 variables, que son verdaderos miembros del cúmulo (Var. de Cu).

Muchos cúmulos globulares poseen varias variables de campo (Var. de Ca) en su cercana vecindad. Para la latitud galáctica positiva existen además

cinco cúmulos cuyas variables de cúmulo y de campo suman ≥ 10 .



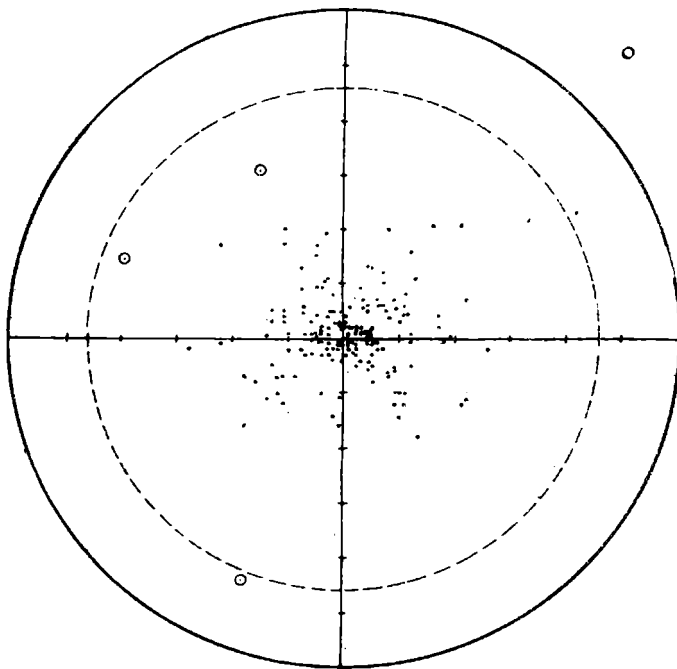
NGC 3201

No siempre fué fácil decidir si una estrella variable puede ser considerada todavía como miembro del cúmulo, ó si debe ser considerada ya como estrella de campo, fuera del cúmulo. En los últimos años H.B. Sawyer Hogg comenzó en algunos casos a clasificar las variables recién descubiertas en uno de

los dos grupos. En base a nuestras estimaciones de los diámetros hemos separado en todos los cúmulos las variables en estrellas de cúmulo y de campo (ver tabla 1a y 1b).

Será de gran importancia exponer lo conseguido hasta ahora al lector y especialmente al futuro investigador. Por esta razón consideramos necesario exponer con este trabajo dos modelos de estos treinta y siete cúmulos globulares mas ricos en estrellas variables, dibujados solamente en base a estas variables dentro y fuera de cada cumulos. Fotografías de casi todos estos cúmulos (de algunos de ellos hay varias fotografías) existen muy dispersas y lamentablemente muchas veces en escala muy distinta en la literatura astronómica.

Para poder estimar correctamente el peso de los datos observacionales de todos los cúmulos globulares tratados aquí, es necesaria en los dibujos una escala uniforme de las distancias. Se podría pensar en tomar, p.e. 1"=1 cm en el dibujo. Sin embargo las distancias de los cúmulos globulares (R en Kpc) son tan diferentes, que los cúmulos más grandes aparecerían demasiado grandes y los cúmulos más pequeños demasiado pequeños.



ω Cen = N G C 5139

Además para la investigación de los cúmulos más lejanos se usan naturalmente sólo los instrumentos más grandes (para que aparezcan tan grandes y detallados como los demás cúmulos). Por eso hemos considerado que lo mejor es representar todos los cúmulos, juntamente con las variables, uniformemente en escala lineal, como corresponde a una distancia uniforme de

$R = 3,438$ Kpc. A esta distancia es $1' = 1$ parsec. Entonces, en nuestras figuras vale $1' (R = 3,4 \text{ Kpc}) = 1 \text{ parsec} = 1 \text{ mm}$. Además el diámetro aparente (estimado por nosotros) se indica débilmente por una circunferencia discontinua, mientras que el diámetro lineal D_m (calculado en base al diámetro aparente estimado) se representa por una circunferencia continua. El primero casi siempre es menor, porque la mayoría de los cúmulos se encuentra en distancias $R > 3.4$ Kpc. Llama la atención el hecho siguiente: En latitud negativa tenemos 15 cúmulos, cuyo diámetro mínimo es todavía $D_m > 30$ parsecs. En latitud positiva tenemos igualmente 15 cúmulos, cuyo diámetro mínimo es todavía $D_m > 30$ parsecs y además 7 cúmulos especialmente pequeños del tipo siguiente: $29 \text{ pc} \geq D_m \geq 19 \text{ pc}$. La magnitud absoluta $\frac{M}{5}$ de cada uno de estos 7 cúmulos es especialmente débil.

Summary:

THE RICHEST GLOBULAR CLUSTERS IN VARIABLE STARS

The publication of the figures of 37 globular clusters (only 2 figures in this Bulletin) characterized by possessing variable stars in them - while the variables of the surrounding field appear more or less separated from them - has the object of proving that the apparent diameter of these clusters were estimated correctly with the help of these variables. These apparent diameters were the base of a previous theoretical investigation of the author on "Luminosity and diameter of globular clusters I". La Plata, Serie Circular N° 16.

The paper will be published in the same "Serie Circular."

INFORME PRELIMINAR SOBRE UN NUEVO CALCULO DE LA ORBITA DEL COMETA HALLEY

Pedro E. Zadunaisky
(Smithsonian Astrophysical Observatory (EE.UU) y
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Bs.As.)

J. Bobone, del Observatorio de Córdoba, ha mejorado una órbita calculada por Cowell y Crommelin. Para ello usó 1146 observaciones que cubrían el lapso agosto de 1909 a marzo de 1910. Se realiza un cálculo definitivo en base a los resultados de Bobone, y usando 2862 observaciones efectuadas entre agosto de 1909 y mayo de 1911. También se lleva a cabo una revisión de los residuos de las observaciones a fin de controlar la posible influencia de fuerzas no-gravitatorias que actúan sobre el cometa cerca de su pasaje por el perihelio.

A PRELIMINARY REPORT ON A NEW COMPUTATION OF THE ORBIT OF HALLEY'S COMET

An improvement of the orbit computed by Cowell and Crommelin has been made by J. Bobone, from Cordoba. He used 1146 observations covering the period from August 1909 to March 1910. A final computation is being made based on Bobone's results and using 2862 observations made between August 1909 and May 1911. A survey of the residuals of the observations is being made to check a possible influence of non-gravitational forces acting on the comet near its perihelion pass.

CALCULO DE LAS PERTURBACIONES DE LA ANOMALIA MEDIA Y DEL RADIO VECTOR DE UN

ASTEROIDE

Pedro Carlos Riú
(Observatorio Astronómico, La Plata)

1): La función perturbadora $R = \Sigma B. \cos(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2) + \Sigma C. \sin(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2)$ no es utilizable para la mayoría de los asteroides, porque en la integración de R, en el caso $-k_1/k_2$, aproximadamente igual a n'/n , el divisor $(k_1 n + k_2 n')$ es muy pequeño y origina desigualdades de largos períodos que pueden alcanzar valores muy considerables. Para evitar esa dificultad, Hansen y Bohlin han ideado teorías que seguimos en este trabajo, donde resolvemos las ecuaciones diferenciales de los mencionados autores por medio de series trigonométricas, utilizando como variable independiente a la función $\zeta = \Delta \int_0^t \Delta_0^{-3} (t) dt$, en lugar de la anomalía excéntrica.

En nuestra contribución sobre este tema, publicada en el Boletín N° 4 de la Asociación Argentina de Astronomía, hemos empleado un método numérico. En este trabajo, desarrollamos un método analítico para el cálculo de las perturbaciones de la anomalía medio y del radio vector, en primera aproximación, con una aplicación para el caso particular del asteroide Thule.

Aunque la variable independiente ζ no es una variable regularizadora en el sentido de las teorías de Levi-Civita y Sundman, sin embargo tiene la propiedad de absorber las singularidades de carácter práctico cuando la distancia mutua $\Delta > 0$, alcanza valores muy pequeños.

Suponemos (caso particular del problema de los tres cuerpos) que las órbitas del planeta perturbador Júpiter y del asteroide no perturbado son coplanares y que la órbita de Júpiter es circular. La pequeñez de la excentricidad del asteroide, permite hacer algunas consideraciones que contribuyan a simplificar los desarrollos, como veremos en el próximo párrafo.

2): Por la hipótesis que formulamos, la distancia mútua debe expresarse:

$$(1) \quad \Delta = (r^2 + a'^2 - 2ar' \cos H)^{\frac{1}{2}}$$

donde a' es el semieje de Júpiter y r el radiovector Sol-Asteroide. Por otra parte, de $r = a(1 - e \cdot \cos E)$, resulta:

$$r^2 = a^2 + a^2 e^2 \cos^2 E - 2 a e \cos E$$

de donde:

$$(a'^2 + a^2 + a^2 e^2 \cos^2 E - 2 a e \cos E - 2 a a' \cos H + 2 a a' e \cos H \cdot \cos E)^{\frac{1}{2}}$$

Sea:

$$\Delta_0^2 = a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos H$$

$$e \cdot C = 2 a a' e \cos H \cdot \cos E - 2 a e \cos E$$

de manera que, despreciando el término $a^2 e^2 \cos^2 E$, la (1) puede escribirse:

$$(2) \quad \Delta = \Delta_0 (1 + e \cdot C \cdot \Delta_0^{-2})^{\frac{1}{2}}$$

y su desarrollo en pocos términos es el siguiente:

$$(3) \quad \Delta = \Delta_0 + \frac{1}{2} e \cdot C \cdot \Delta_0^{-1} - 1/8 e^2 C^2 \Delta_0^{-3} + \dots$$

En primera aproximación es suficiente considerar $\Delta = \Delta_0$ y por consiguiente la variable independiente puede expresarse:

$$\zeta = A \int_0^t \Delta_0^{-3}(t) \cdot dt$$

3): Sean e, e' anomalías excéntricas del Asteroide y Júpiter, respectivamente.

n, n' , movimientos medios diarios del Asteroide y Júpiter, resp.

c, c' , constantes

a, a' semiejes del Asteroide y Júpiter, resp.

ϕ variable auxiliar

$$\alpha = a/a' \quad H = e - e' \quad e' = nt + c \quad e' = n't + c' \quad n'/n = \mu$$

$$\beta = (1 - \mu)^{-1} \quad m = 2(1 - \mu_0)^{-1} \quad H = 2\phi + \pi$$

de donde:

$$e' = \mu e - \mu c + c' \quad (5) \quad H = (1 - \mu)e + \mu c - c' \quad (6) \quad H = (1 - \mu)nt + c - c'$$

$$(7) \quad \beta dH = d e \quad (8) \quad d e = 2 \beta d \phi$$

Efectuado el cambio de variable en (4), para $A = n/2\beta$, resulta:

$$\zeta = b_0 \int_{\varphi_0}^{\varphi} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} d\varphi$$

$$k^2 = 4a/(1+a)^2 \quad b_0 = [(1+a)^3 a^3]^{-1}$$

de donde, haciendo $\zeta - \text{Const} = \zeta''$

$$(9) \quad \zeta'' = b_0 \int_0^{\varphi} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} d\varphi$$

La integral (9), elíptica de tercera especie, puede expresarse:

$$(10) \quad \zeta'' = \frac{b_0}{k'^2} \left(E(\varphi) - \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \right) \quad k'^2 = 1 - k^2$$

donde:

$$(11) \quad E(\varphi) = \frac{2E(\pi/2)}{\pi} \varphi + \sum_{p=1}^{\infty} B_p \sin 2p\varphi \quad (*)$$

$$(12) \quad \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} = k^2 \sin \varphi \cos \varphi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} k^{2p} \sin^{2p} \varphi$$

Con los desarrollos (11) y (12), la función (10) queda expresada por la serie trigonométrica:

$$\zeta'' = c_0 \varphi + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{c_p}{p} \sin 2p\varphi$$

y haciendo $2\varphi = \varphi'$

$$(13) \quad \zeta'' = \frac{1}{2} c_0 \varphi' + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{c_p}{p} \sin p\varphi'$$

Como necesitamos obtener $\varphi = F(\zeta'')$, es decir, debemos efectuar la inversión de la serie (13), y a tal efecto procedemos de la siguiente manera(*):

$$(14) \quad \sin p\varphi' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(p\varphi')^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(*) Houel: Recueil de Formules ... (1901) pag. XLV

y reemplazando con (14) en la serie (13), obtenemos:

$$\zeta^n = d_0 \varphi' + d_3 \varphi'^3 + d_5 \varphi'^5 + d_7 \varphi'^7 + \dots$$

$$(15) \quad \frac{\zeta^n}{d_0} = \bar{\zeta} = \varphi' + \frac{d_3}{d_0} \varphi'^3 + \frac{d_5}{d_0} \varphi'^5 + \frac{d_7}{d_0} \varphi'^7 + \dots$$

y de la inversión de la serie de potencias (15), resulta la serie:

$$\varphi' = \bar{\zeta} + f_3 \bar{\zeta}^3 + f_5 \bar{\zeta}^5 + f_7 \bar{\zeta}^7 + \dots$$

o sea:

$$(16) \quad \varphi = 0,5 (\bar{\zeta} + f_3 \bar{\zeta}^3 + f_5 \bar{\zeta}^5 + f_7 \bar{\zeta}^7 + \dots)$$

La serie de potencias (16) la expresamos en una serie trigonométrica de sen $p \bar{\zeta}$. En efecto: (ver Comrie, Mathematical Tables, vol. II)

$$\bar{\zeta} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2p} \right) \frac{\sin^{2p+1} \bar{\zeta}}{(2p+1)}$$

de donde:

$$(17) \quad \varphi = g_0 \bar{\zeta} + g_1 \sin \bar{\zeta} + g_2 \sin 2 \bar{\zeta} + g_3 \sin 3 \bar{\zeta} + \dots$$

4): De las teorías de Hansen y Bohlin, tenemos:

$$(18) \quad e - e \sin e = n t + n \delta z + c \quad (19) \quad r = r_0 (1 + v) \quad (20) \quad T = \frac{dW}{dz}$$

$$(21) \quad \frac{d(n \delta z)}{dz} = \bar{W}$$

donde $n \delta z$ y v son las perturbaciones de la anomalía media y del radio vector, respectivamente, y T es la función:

$$(22) \quad T = M' a \frac{\partial \Omega}{\partial u} + N' a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

donde:

$$\Omega = m' \left(\frac{1}{4 a_0^2} - \frac{r}{r^2} \cos H \right)$$

(*) No utilizamos el desarrollo de Lagrange $F(\varphi) = F(\bar{\zeta}) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h^p}{p!} \frac{d^{p-1}}{d\bar{\zeta}^{p-1}} (F'(\bar{\zeta}) \varphi^p(\bar{\zeta}))$ porque en el caso particular de $n'/n = 3/4$, resultan series que convergen muy lentamente.

Hacemos (23) $\epsilon = m\varphi + \theta + B$

$$\theta = -(\mu_0 \beta m) w \varphi \quad B = \alpha' - \alpha / (1 - \mu)$$

donde w es el parámetro que se determina de la relación:

$$(24) \mu_0 - \mu = w \mu_0$$

siendo μ_0 el valor numérico de la fracción de dos números enteros más próximos a n' y n . La función T para $\mu \sim 3/4$ es la siguiente (*):

$$(25) T = m' \left\{ 3G_0 \operatorname{sen} 2\varphi + \operatorname{sen}(\psi - \theta - B) \left[3G_0 (\cos 6\varphi - \frac{1}{3} \cos 10\varphi) + 2a^3 \Delta_0^{-3} \cos 8\varphi \right] \right. \\ \left. + \cos(\psi - \theta - B) \left[3G_0 (\frac{1}{3} \operatorname{sen} 10\varphi - \operatorname{sen} 6\varphi) - 2a^3 \Delta_0^{-3} \operatorname{sen} 8\varphi \right] \right\}$$

donde:

$$G_0 = (a^2 - a^2 a' \Delta_0^{-3})$$

Efectuamos el cambio de variable en la e.d. (20) y siendo $\frac{d\varphi}{d\bar{t}} = \Delta_0^3$ resulta $\frac{dW}{d\bar{t}} = 2\beta T \Delta_0^3$. Reemplazando Δ_0^3 por $a'^3 B_0^3 = \Delta_0^3$ y dividiendo ambos miembros de (25) por a'^3 , resulta:

$$(26) \frac{dW}{d\bar{t}} = 2\beta T B_0^3 = 6m' \beta a^2 G_1 \operatorname{sen} 2\varphi + \\ + \operatorname{sen}(\psi - \theta - B) (6m' \beta a^2 G_1 (\cos 6\varphi - \frac{1}{3} \cos 10\varphi) + 4m' \beta a^3 \cos 8\varphi) + \\ + \cos(\psi - \theta - B) (6m' \beta a^2 G_1 (\frac{1}{3} \operatorname{sen} 10\varphi - \operatorname{sen} 6\varphi) - 4m' \beta a^3 \operatorname{sen} 8\varphi)$$

donde:

$$G_1 = (B_0^3 - 1)$$

Diferenciando la serie (17), resulta:

$$(27) \Delta_0^3 = \frac{d\varphi}{d\bar{t}} = g_0 + g_1 \cos \bar{t} + 2 g_2 \cos 2\bar{t} + 3 g_3 \cos 3\bar{t} + \dots$$

$$(28) G_1 = (B_0^3 - 1) = a'^3 (g_0 + g_1 \cos \bar{t} + 2 g_2 \cos 2\bar{t} + \dots) - 1$$

(*) Tisserand: Mec. Céleste, Tomo IV.

5): Con la fórmula (24) queda determinado el parámetro w , en función del cual expresamos φ, α y β . A tal efecto, con la fórmula de Taylor:

$$f(w) = f(0) + \left(\frac{\partial f(w)}{\partial w} \right)_{w=0} w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(w)}{\partial^2 w} \right)_{w=0} w^2 + \dots$$

y además:

$$(29) \quad \alpha = \mu_0^{2/3} (1-w)^{2/3}$$

resultan:

$$(30) \quad \begin{cases} \beta^2 = h_0 + h_1 w + h_2 w^2 + \dots \\ 6m' \beta \alpha^2 = q_0 + q_1 w + q_2 w^2 + \dots \\ 4m' \beta \alpha^3 = s_0 + s_1 w + s_2 w^2 + \dots \end{cases}$$

donde los coeficientes dependen de μ_0 .

Por otra parte, de (5), (24) y $H = 2\varphi + \pi$, obtenemos:

$$(31) \quad 2\varphi = [(1-\mu_0)\varepsilon + \mu_0 c - c' - \pi] + [w(\varepsilon - c) \mu_0]$$

y a efectos de obtener $\sin p\varphi$ y $\cos p\varphi$ como funciones del parámetro w , utilizamos la fórmula de Taylor y resulta:

$$(32) \quad \sin p\varphi = \sin \frac{1}{2} p [(1-\mu_0)\varepsilon + \mu_0 c - c' - \pi] + [(d_0 \varphi + d_1) p \cos \frac{1}{2} p [(1-\mu_0)\varepsilon + \mu_0 c - c' - \pi]] w + \dots$$

$$(33) \quad \cos p\varphi = \cos \frac{1}{2} p [(1-\mu_0)\varepsilon + \mu_0 c - c' - \pi] - [(d_0 \varphi + d_1) p \sin \frac{1}{2} p [(1-\mu_0)\varepsilon + \mu_0 c - c' - \pi]] w + \dots$$

donde hacemos $\frac{1}{2} [(1-\mu_0)\varepsilon + \mu_0 c - c' - \pi] = \varphi$ por ser $\mu_0 = \mu$ y obtenemos:

$$(34) \quad \sin p\varphi = \sin p\varphi + (d_0 \varphi + d_1) p \cos p\varphi w + \dots$$

$$(35) \quad \cos p\varphi = \cos p\varphi - (d_0 \varphi + d_1) p \sin p\varphi w + \dots$$

siendo:

$$d_0 = (\beta \mu_0 - \frac{1}{2} p (1 - \mu_0)) = \beta \mu_0^2$$

$$d_1 = \frac{1}{2} p (1 - \mu_0) [\beta \mu_0 c (1 - \beta + \mu) + \mu_0 (c' - \mu c + \pi - c)]$$

Las funciones trigonométricas deben ser expresadas en función de la variable independiente $\bar{\zeta}$. A tal efecto, con la serie (17) se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \varphi &= \operatorname{sen} g_0 \bar{\zeta} \operatorname{cosp}(g_1 \operatorname{sen} \bar{\zeta} + g_2 \operatorname{sen} 2\bar{\zeta} + \dots) + \operatorname{cosp} g_0 \bar{\zeta} \operatorname{senp}(g_1 \operatorname{sen} \bar{\zeta} + g_2 \operatorname{sen} 2\bar{\zeta} \dots) \\ \operatorname{cosp} \varphi &= \operatorname{cosp} g_0 \bar{\zeta} \operatorname{cosp}(g_1 \operatorname{sen} \bar{\zeta} + g_2 \operatorname{sen} 2\bar{\zeta} + \dots) - \operatorname{senp} g_0 \bar{\zeta} \operatorname{senp}(g_1 \operatorname{sen} \bar{\zeta} + g_2 \operatorname{sen} 2\bar{\zeta} \dots) \end{aligned}$$

que pueden desarrollarse en series trigonométricas rápidamente convergentes del tipo:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosp}(g_j \operatorname{sen} j \bar{\zeta}) &= J_0(p g_j) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(p g_j) \cos 2jn \bar{\zeta} \\ \operatorname{senp}(g_j \operatorname{sen} j \bar{\zeta}) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(p g_j) \operatorname{sen}(2n+1) \cdot j \bar{\zeta} \end{aligned}$$

cuyos coeficientes son las funciones de Bessel de primera especie. Reemplazando con estas series en las series (34) y (35), donde también la variable φ es reemplazada por la serie (17) y poniendo las series (30) en lugar de $6m \beta \alpha^2$ y $4m \beta \alpha^3$ la (26) queda expresada:

$$(36) \quad \frac{dW}{d\bar{\zeta}} = L_1 + L_1' w + \cos(\psi - \theta - B)(L_2 + L_2' w) + \operatorname{sen}(\psi - \theta - B)(L_3 + L_3' w)$$

donde $L_n = L_n(\bar{\zeta})$ y $L_n' = L_n'(\bar{\zeta})$ son funciones trigonométricas.

6): Si en la (6) hacemos $\tau = t + \frac{c - c' - \pi}{(1 - \mu)n}$, entonces $\varphi = \frac{1}{2}(1 - \mu)n\tau$ de donde, para $\tau=0$ es $\varphi=0$ y también $\bar{\zeta}=0$ en virtud de la serie (15). De esto, el límite inferior de las integrales que determinan W y $n \delta z$ es $\bar{\zeta} = 0$, para $\varphi = 0$:

$$(37) \quad W = 2\beta \int_0^{\bar{\zeta}} T \cdot S_0^3 \cdot d\bar{\zeta} \quad (38) \quad n \delta z = 2\beta \int_0^{\bar{\zeta}} \bar{W} \cdot \Delta_0^3 \cdot d\bar{\zeta}$$

Para integrar la e.d. (20) donde $W = W(\bar{\zeta}, \theta, w)$, suponemos que la solución es desarrollable en la serie $W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + \dots$ y satisface a la ecuación a derivadas parciales:

$$(39) \quad \frac{dW}{d\bar{\zeta}} = \frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\bar{\zeta}} = T = T_0 + T_1 w + T_2 w^2 + \dots$$

Por lo visto para β y θ en los párrafos 4 y 5, de la ecuación (39) resulta:

$$(40) \quad \frac{\partial W_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial W_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial W_3}{\partial \bar{z}} + \dots - m \mu_0 (h_0 + h_1 w + h_2 w^2) w \left(\frac{\partial W_1}{\partial \theta} \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \frac{\partial W_3}{\partial \theta} \right) \Delta_0^3 =$$

$$= (T_0 + T_1 w + T_2 w^2 + T_3 w^3 + \dots)$$

Iguando los términos a derecha e izquierda en (40) que tienen w del mismo orden, resulta el siguiente sistema de e.d. para determinar W :

$$(41) \quad \frac{\partial W_1}{\partial \bar{z}} = 0$$

$$(42) \quad \frac{\partial W_2}{\partial \bar{z}} = -m \mu_0 h_0 w \cdot \Delta_0^3 \cdot \left(\frac{\partial W_1}{\partial \theta} \right) = T_0$$

$$(43) \quad \frac{\partial W_3}{\partial \bar{z}} = -m \mu_0 h_0 w \cdot \Delta_0^3 \left(\frac{\partial W_2}{\partial \theta} \right) - m \mu_0 h_1 w^2 \cdot \Delta_0^3 \left(\frac{\partial W_1}{\partial \theta} \right) = T_1$$

donde:

$$(44) \quad T_0 = L_1 + \cos(\psi - \theta - B) L_2 + \operatorname{sen}(\psi - \theta - B) L_3$$

$$(45) \quad T_1 = L_1' + \cos(\psi - \theta - B) L_2' + \operatorname{sen}(\psi - \theta - B) L_3'$$

En la e.d. (41) la función W_1 no depende de \bar{z} y es función de la variable θ o sea $W_1 = F_1(\theta)$ y suponemos por las condiciones iniciales sea $W_1 = \text{Constante}$. Integramos la e.d. (42):

$$(46) \quad W_2 = \int_0^{\bar{z}} T_0 d\bar{z} + F_2(\theta)$$

y con la condición deducida de $F_1(\theta)$ para que W_2 no contenga términos secundarios en \bar{z} y que $F_2(\theta) \neq 0$, resulta:

$$(47) \quad W_2 = \int_0^{\bar{z}} L_1(\bar{z}) d\bar{z} + \cos(\psi - \theta - B) \int_0^{\bar{z}} L_2(\bar{z}) d\bar{z} +$$

$$+ \operatorname{sen}(\psi - \theta - B) \int_0^{\bar{z}} L_3(\bar{z}) d\bar{z}$$

y así sucesivamente para $W_3, W_4 \dots W_p$.

En consecuencia queda determinada W :

$$W = \text{Const} + W_2 + W_3 + W_4 + \dots$$

donde $W_2, W_3 \dots$ son series trigonométricas.

Reemplazando el parámetro ψ por $\epsilon = m\varphi + \theta + B$, los $\cos(\psi - \theta - B)$ y $\sin(\psi - \theta - B)$ se escriben $\cos m\varphi$ y $\sin m\varphi$ que pueden expresarse como funciones de $\bar{\zeta}$ siguiendo el método indicado en el párrafo 5 y reemplazando en las series que resultan de la integración de (44) y (46), se tiene la función \bar{w} :

$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \dots$$

Efectuando el cambio de variable en la e.d. de Hansen (21) e integrando, resulta:

$$n \delta z = 2\beta \int_0^{\bar{\zeta}} \bar{w} \Delta_0^3 d\bar{\zeta}$$

de donde obtenemos las series trigonométricas:

$$(n \delta z)_1 = \sum_{p=1} s_{0,p} \operatorname{sen} p \bar{\zeta}$$

$$(n \delta z)_2 = w \sum_{p=1} s_{1,p} \operatorname{sen} p \bar{\zeta}$$

para calcular las perturbaciones de la anomalía media $(n \delta z)_1$ y $(n \delta z)_2$ de primer y segundo orden, respectivamente, en primera aproximación.

7): Para el caso particular del asteroide Thule, hemos obtenido el siguiente resultado para la perturbación de primer orden de la anomalía media:

$$(48) \quad (n \delta z)_1 = 0,00333 \operatorname{sen} \bar{\zeta} + 0,00246 \operatorname{sen} 2 \bar{\zeta} - 0,00209 \operatorname{sen} 3 \bar{\zeta} - \\ - 0,00015 \operatorname{sen} 4 \bar{\zeta} - 0,00060 \operatorname{sen} 5 \bar{\zeta} - 0,00023 \operatorname{sen} 6 \bar{\zeta} - \\ - 0,00004 \operatorname{sen} 7 \bar{\zeta} + 0,00007 \operatorname{sen} 8 \bar{\zeta} + 0,00005 \operatorname{sen} 9 \bar{\zeta} + \\ + 0,00001 \operatorname{sen} 10 \bar{\zeta} \dots$$

Las series de Bohlín (') cuyos coeficientes hemos calculado para $\mu \sim 3/4$, están publicadas en nuestra contribución al Boletín no.4, de la Asoc.Arg.de Astronomía. En este trabajo nos limitamos al cálculo de las perturbaciones de primer orden de la anomalía media y los resultados, comparados con los obtenidos según la teoría de Bohlín, son los siguientes:

(') Bohlín: Formeln und Tafeln zur Gruppenweise... (Upsala, 1896). En esta publicación los coeficientes de las series para calcular las perturbaciones están dados para $\mu \sim 1/3$. Nosotros los hemos modificado para $\mu \sim 3/4$.

$\frac{\tau}{\text{días}}$	ψ	ζ	$\bar{\zeta}$	$(n \delta z)_1$	$(n \delta z)_1^{(1)}$
0	0	0	0	0	0
10	0,0023	0,000005	0,005	- 2"18	- 2"89
20	0,0046	0,000010	0,010	- 4"36	- 4"43
30	0,0069	0,000015	0,015	- 6"54	- 6"83
40	0,0092	0,000016	0,016	- 7"33	- 7"00
50	0,0115	0,000020	0,020	- 9"00	- 8"55
60	0,0138	0,000024	0,024	- 9"95	- 9"23
120	0,0276	0,000044	0,044	-19"40	-18"13
200	0,0460	0,000070	0,070	-29"65	-29"21
400	0,0920	0,000110	0,110	-43"31	-40"98

donde:

$$\varphi = 0,00023 \tau$$

8): Para calcular la perturbación u del radio vector, tenemos la e.d. de

Hansen:

$$\frac{du}{d\varepsilon} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \psi}$$

donde, efectuando el cambio de variable, resulta:

$$\frac{du}{d\bar{\zeta}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \psi} S_o^3 \beta$$

La derivada parcial $\frac{\partial \bar{W}}{\partial \psi}$ significa que primero se deriva W respecto al parámetro ψ y despues se hace $\psi = \varepsilon = m\varphi + \theta + B$. Como ya hemos obtenido el desarrollo de las funciones W, S_o^3 , el cálculo no ofrece dificultades.

(1) Valores de la perturbación obtenidos con las series de Bohlin.

Summary:

CALCULATION OF THE PERTURBATIONS OF THE MEAN ANOMALY AND THE RADIUS VECTOR
OF AN ASTEROID

The classical disturbing function R is not suitable to most of the Asteroids because in the integration of R , the very small divisor $(k_1 n + k_2 n')$, in the case $-k_1/k_2 \sim n'/n$, gives origin to a very large period inequality. In order to avoid such a difficulty, we have solved the differential equation of the Hansen-Bohlin method, by means of trigonometrical series using as independent variable $\zeta = A \int_0^t \Delta_0^{-3}(t) dt$, instead of the excentrical anomaly. We used an analytical method and an application is made in the particular case of asteroid Thule for which $n'/n \sim 3/4$.

FORMULAS PARA LA APLICACION DEL METODO DE LA CAUSTICA A SUPERFICIES DE
CUALQUIER TIPO CON APROXIMACION DE CUALQUIER ORDEN

Jorge Landi Dessy
(Observatorio Astronómico, Córdoba)

Se han deducido fórmulas para emplear en el caso de Foucault clásico y en el método de la cáustica, en el caso de cónicas y de superficies de cualquier tipo.

I. Si la superficie tiene sección cónica expresada mediante la serie:

$$(1) \quad x = \frac{r^2}{2R} + (1-e^2) \frac{r^4}{8R^3} + (1-e^2)^2 \frac{r^6}{16R^5} + 5(1-e^2)^3 \frac{r^8}{128R^7} + \dots$$

con el método de Foucault clásico se debe emplear la siguiente expresión:

$$(2) \quad OC = x + rr' = R + e^2 \frac{r^2}{2R} - e^2(1-e^2) \frac{r^4}{8R^3} - e^2(1-e^2)^2 \frac{r^6}{16R^5} - \\ - 5 e^2(1-e^2)^3 \frac{r^8}{128R^7} + \dots$$

con el método de la cáustica las coordenadas de los centros de los círculos osculadores están dadas por las siguientes expresiones:

$$(3) \quad \xi = R + 3e^2 \frac{r^2}{2R} + 3e^2(1-e^2) \frac{r^4}{8R^3} + e^2(1-e^2)^2 \frac{r^6}{16R^5} + 3e^2(1-e^2)^3 \frac{r^8}{128R^7} + \\ \eta = - e^2 \frac{r^3}{R^2} + \dots$$

II. Si la sección de la superficie se expresa en cambio mediante la serie:

$$(4) \quad x_k = \frac{r^2}{2R} + a \frac{r^4}{8R^3} + b \frac{r^6}{16R^5} + 5c \frac{r^8}{128R^7} + 7d \frac{r^{10}}{256R^9} + \dots$$

con el método de Foucault clásico se debe emplear la siguiente expresión:

$$(5) \quad OC = R + (1-a) \frac{r^2}{2R} + (a + 2a^2 - 3b) \frac{r^4}{8R^3} - (2a^3 - 6ab - b + 5c) \frac{r^6}{16R^5} + \\ + (8a^4 + 40ac - 36a^2b + 18b^2 + 5c - 35d) \frac{r^8}{128R^7} - \dots$$

en el método de la cáustica, las coordenadas de los centros de los círculos osculadores están dados por la siguiente expresión:

$$(6) \quad \xi = R + 3(1-a) \frac{r^2}{2R} + 3(6a^2 - a - 5b) \frac{r^4}{8R} - \\ - (54a^3 - 16a^2 - 90ab + 17b + 35c) \frac{r^6}{16R^5} + \\ + (648a^4 - 192a^3 - 1620a^2b + 384ab + 840ac + 450b^2 - 195c - 315d) \frac{r^8}{128R^7} - \dots \\ \eta = - (1-a) \frac{r^3}{R^2} - 3(a^2 - b) \frac{r^5}{2R^4} - 3(2a^2 - 6a^3 + 11ab - 2b - 5c) \frac{r^7}{8R^6} - \dots$$

Mediante estas expresiones queda resuelto el problema de medir cualquier superficie óptica con la precisión que se desee. La interpretación de las fórmulas y sus parámetros es la corriente; se puede recurrir al informe "Medición de Superficies Ópticas" que figura en el presente Boletín.

Como ejemplo se dan los valores para un Ritchey-Chrétien:

$F = 1$ (distancia focal del sistema = 15,625 metros)

$D_p = 2,50$ m (primario) $D_s = 0,75$ m (secundario)

$d = 4,286$ m = 0,274 304 (separación de los espejos)

$f_1 = 6,25$ m (distancia focal del primario) = 0,4

$f_2 = 3,2775$ m (distancia focal del secundario) = 0,209 760

$a = -0,146 666 7$ $b = -0,119 616 3$ $c = +0,096 801 63$

Se puede expresar en función del porcentaje de parabolizado de los diversos órdenes:

$A_1 = e^2 = 1-a = 1,146 666 7$; $A_2 = 1-b = 1,119 616 3$; $A_3 = 1-c = 0,903 198 4$

El valor de los diferentes coeficientes de los desarrollos en serie se dan a continuación; para el caso de la cónica se ha tomado para el e^2 el valor de A_1 .

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= + 215,000\ 000 + 0,078833 - 0,000\ 019 && \text{(Cónica)} \\ \Delta\eta &= - 14,333\ 333 && \text{"} \\ \Delta\xi &= + 215,000\ 000 + 0,409601 + 0,000\ 577 && \text{(Ritchey-Chrétien)} \\ \Delta\eta &= - 14,333\ 333 - 0,026\ 461 - 0,000\ 005 && \text{"} \end{aligned}$$

Las medidas están expresadas en milímetros y corresponden al borde del espejo. Es de notar que el espejo considerado es un 1:5; si se considera uno más luminoso los terceros términos de las series se hacen importantes.

Bibliografía:

Ver la bibliografía del informe "Medición de Superficies Ópticas" en el presente Boletín.

Summary:

FORMULAS FOR THE APPLICATION OF THE METHOD OF THE CAUSTIC TO SURFACES OF ANY TYPE WITH APPROXIMATION OF ANY ORDER

Formulas have been deduced to apply both the caustic and the common Foucault methods to any surface whose sections can be expressed by equations (1) or (4). A primary mirror of a Ritchey-Chrétien type is given as an example.

UNA TABLA UTIL PARA SUMAR ALGUNAS SERIES LENTAMENTE CONVERGENTES 6 DI-
VERGENTES

Reynaldo P. Cesco
(Observatorio Astronómico, La Plata)

En 1950 O.Szász ha demostrado que la transformación inversa del método de sumación de series divergentes de Riesz puede ser útil para sumar series lentamente convergentes (J.Math.Physios 28, 272-279). En el presente trabajo se demuestra que en muchos casos, particularmente en el de series alternadas, es mucho más útil el potente método de sumación de series divergentes de la integral de Borel.

El trabajo será publicado in extenso en los Proceedings del Congreso Internacional de Matemáticas de Estocolmo.

A USEFUL TABLE FOR SUMMING SOME SLOWLY CONVERGENT OR DIVERGENT SERIES

O.Szász (1950) has shown that the inverse transformation of Riesz's method of summation of divergent series can be used for summing slowly convergent series (J.Math.Physics 28, 272-279). In this paper it is shown that in many cases and particularly in cases of alternating series, the integral method of summability of Borel is more useful.

ESTRELLAS AUSTRALES CON ESPECTROS PECULIARES. NOTA N.3

Mercedes Jaschek y Carlos Jaschek
(Observatorio Astronómico, La Plata)

Se lista una docena de nuevas estrellas con espectros peculiares y espectros de líneas metálicas. La estrella β Sculptoris, conocida como estrella de manganeso, resulta ser variable de espectro. El elemento de variación más conspicuo es el europio.

El trabajo "in extenso" será publicado en otro lugar.

SOUTHERN STARS WITH PECULIAR SPECTRA. PAPER III.

A dozen objects of the peculiar A and metallic line type is listed. The star β Sculptoris, known as a manganese object, is a spectrum variable. The element showing the most conspicuous variations is europium.

The paper will be published in full elsewhere.

ANÁLISIS ESPECTROSCÓPICO DE LA ESTRELLA PECULIAR DEL TIPO O, HD 49798

Carlos Jaschek y Mercedes Jaschek
(Observatorio Astronómico, La Plata).

En base al análisis de placas tomadas en Bosque Alegre esta estrella tiene las siguientes características: a) tipo espectral aproximado O7; b) Serie de Balmer visible hasta $n = 9$; c) series de HeI muy débiles para este tipo; d) serie de Pickering muy reforzada; e) anomalías en las abundancias de ^{NITRÓGENO} ~~carbono~~ (ligeramente reforzado), ^{OXÍGENO} ~~nitrogeno~~ (casi ausente) y ^{CARBÓN} ~~carbono~~ (muy débil). A juzgar por el efecto Stark en la serie de Balmer, se trataría de una estrella sub-luminosa.

El trabajo "in extenso" será publicado en otro lugar.

SPECTROSCOPIC ANALYSIS OF THE PECULIAR O TYPE STAR, HD 49798

On the basis of material taken at Bosque Alegre, (dispersion 42 Å/mm), this star shows the following peculiarities: a) the approximate spectral type is O7; b) the Balmer series is visible up to $n = 9$; c) the He I series is very weak for the spectral type; d) the Pickering series is very much enhanced; e) there are abnormalities in other elements: ^{NITRÓGENO} ~~carbon~~ is slightly enhanced, ^{OXÍGENO} ~~nitrogen~~ practically absent and ^{CARBÓN} ~~carbon~~ very weak. According to the Stark effect in the Balmer series, the star appears to be subluminoous. The paper will be published in full elsewhere.

DETERMINATION OF ORBITS BY MEANS OF FOUR OBSERVATIONS

C.A. Altavista
(Observatorio Astronómico, La Plata)

According to Lagrange the expressions for the coordinates in the problem of two bodies can be put in the following form:

$$(1) \quad u_1 = fu_1 + gu_1' \quad (u = x, y, z)$$

Let us have four complete observations at the instants t_1, t_2, t_3 and t_4 . By eliminating the velocities in the group (1): a) from the first and third equations; b) from the second and third equations, we shall have then two groups of equations:

$$(2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_4 x_2 &= \varepsilon_2 x_4 + f' x_1 \\ \varepsilon_4 y_2 &= \varepsilon_2 y_4 + f' y_1 \\ \varepsilon_4 z_2 &= \varepsilon_2 z_4 + f' z_1 \\ f' &= f_2 \varepsilon_4 - f_4 \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_4 x_3 &= \varepsilon_3 x_4 + f'' x_1 \\ \varepsilon_4 y_3 &= \varepsilon_3 y_4 + f'' y_1 \\ \varepsilon_4 z_3 &= \varepsilon_3 z_4 + f'' z_1 \\ f'' &= f_3 \varepsilon_4 - f_4 \varepsilon_3 \end{aligned}$$

If we remember that:

$$x = \rho \lambda - X \quad y = \rho \mu - Y \quad z = \rho \nu - Z$$

where: $\lambda = \cos \alpha \cos \delta \quad \mu = \sin \alpha \cos \delta \quad \nu = \sin \delta$

we can eliminate in the group (2) the geocentric distance ρ_2 and in the group (3) the geocentric distance ρ_3 . We can write: ($k_i = \cotg \alpha_i$)

$$(4) \quad \begin{aligned} \varepsilon_2(\lambda_4 - k_2 \mu_4) \rho_4 + f'(\lambda_1 - \mu_1 k_2) \rho_1 &= \varepsilon_4(k_2 Y_2 - X_2) + \varepsilon_2(X_4 - k_2 Y_4) + f'(X_1 - k_2 Y_1) \\ \varepsilon_3(\lambda_4 - k_3 \mu_4) \rho_4 + f''(\lambda_1 - \mu_1 k_3) \rho_1 &= \varepsilon_4(k_3 Y_3 - X_3) + \varepsilon_3(X_4 - k_3 Y_4) + f''(X_1 - k_3 Y_1) \end{aligned}$$

From this system we obtain an equation in the unknown ρ_1 . Adding to this equation the following: $r_1^2 = \rho_1^2 + R_1^2 + 2\rho_1 S_1$

we can solve the system:

$$\rho_1 = P + \frac{Q + \epsilon \rho_1}{r_1^3} \quad r_1^2 = \rho_1^2 + R_1^2 + 2 \rho_1 \epsilon_1$$

by means of an iterative process.

Next we calculate ρ_4 from (4) and (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) from (2) and (3) respectively.

Finally we compute the velocities from the formulas:

$$\dot{u}_1 = \frac{f_2 u_4 - f_4 u_2}{f_2 \epsilon_4 - f_4 \epsilon_2}$$

REMARKS. It will be not convenient in general to take t_1 or t_4 as origin of the time, mainly owing to the length of the interval between the extreme observations. Besides in these cases such observations will be out of the interval used to calculate the observations.

However we used this scheme in our calculations for investigating their possible influences.

To the present subject Jekhowski and Rours have made some contributions.

THE ORBIT OF INO (173)

Observations: L.Boyer (Algiers).

U.T. 1954	a	b
July 1.04559	303°06250	- 6°59686
July 21.96597	299°12737	- 8°62248
August 5.94212	296°04033	- 10°73358
August 25.88145	293°23254	- 13°76797

Sun Coordinates

	1	2	3	4
X	- 0.1522304	- 0.4857517	-0.6902529	-0.8927214
Y	0.9222733	0.8186990	0.6818577	0.4346262
	0.3999277	0.3550127	0.2956623	0.1884462

The comparison O - C

Coordinates and velocities of INO

$x_1 = 1.024475$	$\dot{x}_1 = 0.525629$
$y_1 = -2.262209$	$\dot{y}_1 = 0.378388$
$z_1 = -0.584830$	$\dot{z}_1 = 0.005824$

The series F and G

	F	G
2	0.996033	0.359405
3	0.988185	0.615037
4	0.971005	0.950975

O - C

$\Delta \alpha \cos \delta$	-0°00008	-0°00006	-0°00006	-0°00009
$\Delta \delta$	0°00002	-0°00033	-0°00010	-0°00002

LOS DIAMETROS DE LOS CUMULOS GLOBULARES Y SUS VARIABLES

Herbert Wilkens
(Observatorio Astronómico, La Plata)

El punto de partida para esta investigación fué el artículo de Shapley y Sayer (1935) "The angular diameters of globular clusters". Allí se estableció la relación siguiente entre el diámetro aparente ω (en minuto de arco) y la distancia R (en Kiloparsec) de los cúmulos globulares:

$$\omega_s \cdot R_s = 215 = 3.44 D_m \quad (1)$$

El subíndice s, indica que los valores no están corregidos por absorción interestelar. D_m es el diámetro lineal, medido en parsec. Una investigación posterior de Mowbray (1946) dejó entrever, sin embargo, que los diámetros lineales no son constantes y que dependen de la luminosidad absoluta, la cual según Parenago, Kukarkin y Florin (1949) depende de la clase de concentración.

La dispersión en todas las relaciones citadas es muy grande, por dos razones:

1) Es muy difícil estimar o medir el diámetro aparente de un cúmulo globular.

2) Aunque estuviese determinado con seguridad, todavía ignoramos en cuanto hay que corregirlo por absorción interestelar.

En este trabajo se hizo el ensayo de eliminar estas dos dificultades por el siguiente camino:

1) Si un cúmulo contiene una cantidad relativamente grande de estrellas variables, su diámetro puede ser definido por el círculo que contiene todas sus variables. Este diámetro aparente se llama ω porque es independiente de la absorción interestelar.

2) En una cantidad grande de cúmulos no han sido descubiertas todavía bastantes variables.

Por la comparación de nuestras dos figuras 1a. con 2a., y 1b. con 2b., obtuvimos sin embargo una fórmula simple para corregir los diámetros apa-

rentes ω_g de Shapley y Sayer por absorción interestelar, es decir, para reducirlos a ω .

Se han excluido de antemano de esta investigación todos los cúmulos que, por falta de variables, por su gran distancia o por otras causas, tienen datos de observación inseguros. Estos son 43 cúmulos "mal visibles". De los 65 cúmulos "bien visibles" sólo 55 de ellos ofrecen en 1955 bastantes datos de observación para entrar en la solución definitiva de los problemas considerados.

Estos problemas se ven claramente, considerando las dos siguientes relaciones, independientes para cada cúmulo:

$$\frac{m}{5} - \frac{W}{5} = \lg R \quad (2)$$

$$\lg \omega - \lg D_m = 0.54 - \lg R \quad (3)$$

donde $W = M + 10$. De los datos observacionales m , R , ω , resulta de la ecuación (2) un valor para W y de la (3) un valor para $\lg D_m$, es decir, se puede encontrar una relación entre W y $\lg D_m$.

Nosotros no conocemos, sin embargo, los datos m , R y ω , sino m_g, R_g y ω_g , es decir, los valores falsados por la absorción interestelar S . Esta fué calculada según la fórmula:

$$S_{ob} = \frac{E_{ob}}{E_{ta}(B;R)} \cdot S_{ta}(B;R)$$

donde $E_{ob} = 0.05 + E_{st}$. E_{st} es el exceso de color observado por Stebbins y Whitford (1936) en los cúmulos globulares. E_{ta} y S_{ta} fueron tomados de las publicaciones de H. Wilkens (1945, Tabla 15).

Para resolver la ecuación (3), es decir, para calcular $\lg D_m$, falta ahora solamente el diámetro aparente ω . Sólo unos 15 cúmulos contienen un número suficiente de variables y distribuidas en forma regular, para que se pueda determinar por ellas directamente y con exactitud, el diámetro aparente ω .

Por otra parte, Shapley y Sayer (1935) han dado los diámetros aparentes de 70 cúmulos medidos con sensitómetro, los cuales son seguramente exactos; pero están falseados todavía por la absorción interestelar en una forma hasta ahora desconocida. Para determinar la influencia de la absorción, utilizábamos las figuras 1a + 2a y 1b + 2b, respectivamente.

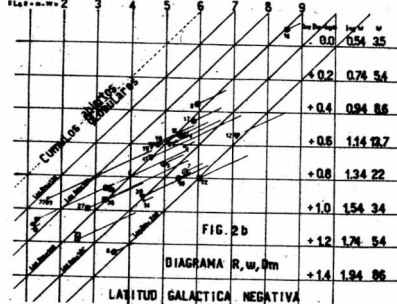
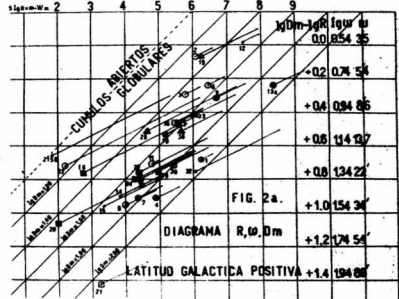
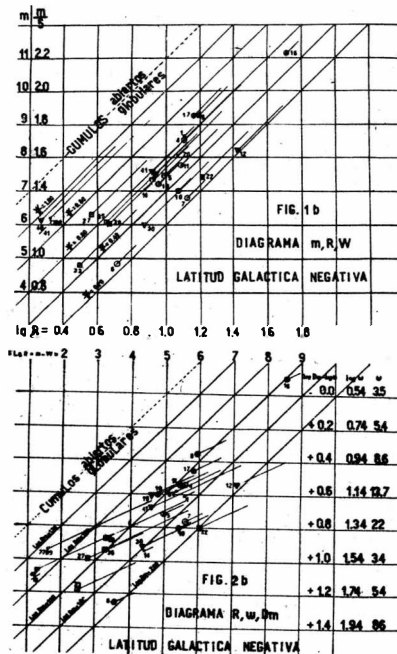
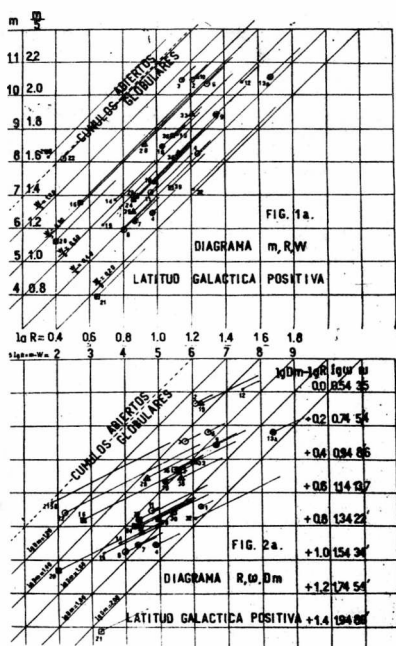


Fig. 1a. Fig. 2a.

Fig. 1b. Fig. 2b.

Estas dos figuras 1 y 2 se basan en las dos fórmulas (2) y (3), las cuales como se dijo, son completamente independientes.

La abscisa común para estas dos figuras es $x = \lg R$

La ordenada de la figura 1 es $y = m$

y la ordenada de la figura 2 es $y = -\lg w$

Ahora los datos observados: m_g , $\lg R_g$ y $\log \omega_g$, al entrar en las figuras, se corrigen por absorción interestelar s . Si todas las coordenadas observadas se corrigen por el mismo valor $\frac{S}{5}$, entonces la constelación de todos los cúmulos, como se ven en conjunto en la figura 1, no se reproduce bien en la figura 2; además, esos diámetros ω verdaderos resultan entonces realmente demasiado grandes, sobre todo cuando la absorción es fuerte.

Por eso la ordenada de la figura 2, se ha corregido excepcionalmente, según la fórmula:

$$\lg \omega_g + \frac{S}{10} = \lg \omega$$

La figura 1 muestra, sin duda alguna, que las magnitudes absolutas W de los cúmulos globulares, se extienden sobre varias magnitudes que corresponden a varias rectas inclinadas en esta figura.

Asimismo, la figura 2 muestra que los diámetros lineales D_m de los cúmulos globulares varían casi en un factor 10. La relación entre luminosidad absoluta y diámetro lineal fué buscada en base a una fórmula de Mowbray

$$\text{Const.} - \frac{W}{5} = \lg D_m$$

Tomando en cuenta las dos fórmulas básicas (2) y (3) resulta la otra relación:

$$\text{Const.} + 0.54 - \frac{m}{5} = \lg \omega$$

Esta última se puede comprobar directamente por los datos observacionales, como se vé en la figura 3. Lo mismo se ve en la figura 4, que se refiere a las magnitudes absolutas y los diámetros lineales.

El valor de la constante resultó = 2.20
 ± 0.01

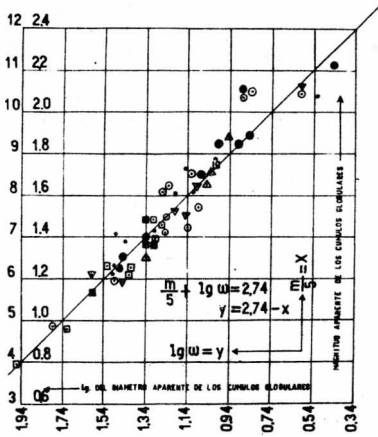


Fig.3

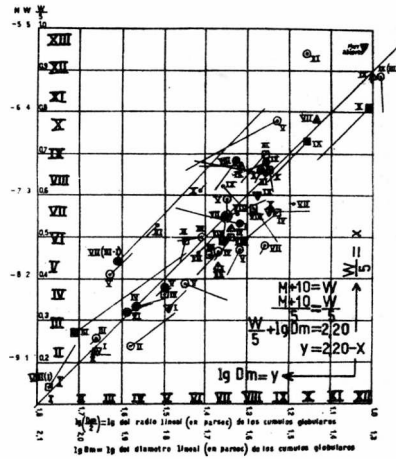


Fig. 4

Summary:

THE DIAMETERS OF THE GLOBULAR CLUSTERS AND THEIR VARIABLES

In this theoretical investigation (which was published in 1960, Serie Circular N°16, La Plata Observatory) for 55 among 65 globular cluster well visibles, a strictly linear relation has been found between the logarithm of the diameter of the cluster defined by its variables and the total luminosity of the cluster, in apparent scale as well as in absolute or linear scale.

ENGLISH INDEX

	Page
Mise au point:	
Control of optical surfaces. J.Landi Dessy	6
Communications:	
On the general solution of the problem of three bodies.R.P.Cesco...	11
A new type of telescopic camera with three mirrors.J.Landi Dessy...	12
The spectrum of Si II in peculiar A-type stars. M.Jaschek,C.Jaschek	15
On the R Canis Majoris systems. J. Sahade	16
On the distribution of the energy on cosmic scale.C.J.Lavagnino ...	18
Andoyer's version of Hansen's method. C.Altavista	20
An interpretation of the criteria of Lambert-Charlier and Eigenson. C.J.Lavagnino	23
Preliminary reports:	
The construction of the new spectrograph for Bosque Alegre. R.Flat- zeck and J. Landi Dessy	26
Hydromagnetic stability of a plasma in a gravitational field.J.Sér- sic	27
Communications:	
Gravitational contraction of an interstellar cloud.W.G.L.PoeppeL...	29
Gamma Ursae Minoris. J.Sahade and H.Friisboes-Conde	40
Preliminary results from high and medium dispersion material of 48 Librae. A.E.Ringuelet-Kaswalder	41
Short period radial velocity variations in 48 Librae.A.E.Ringuelet- Kaswalder	42
The richest globular clusters in variable stars.H.Wilkens	43
A preliminary report on a new computation of the orbit of Halley's comet. P.E.Zadunaisky	47
Communications:	
Calculation of the perturbations of the mean anomaly and the radius vector of an asteroid. P.Riú	48
Formulas for the application of the method of the caustic to sur- faces of any type with approximations of any order.J.Landi Dessy ..	59
A useful table for summing some slowly convergent or divergent series. R.P.Cesco	62
Southern stars with peculiar spectra. Paper III.M.Jaschek,C.Jaschek	63
Spectroscopic analysis of the peculiar O type star,HD 49798. C.Jaschek and M.Jaschek	64
Determination of orbits by means of four observations.C.Altavista..	65
Addendum:	
The diameters of the globular clusters and their variables. H.Wilkens	68

