UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Trabajo de Tesis Doctoral:

TÉCNICAS DE TEORÍA DE OPERADORES Y ANÁLISIS MATRICIAL EN LA TEORÍA DE MARCOS EN ESPACIOS DE HILBERT

Noelia Belén Rios

Director: Dr. Pedro G. Massey

Co-director: Dr. Demetrio Stojanoff

2019

A mamá y papá

Agradecimientos

Sin dudas, haber llegado hasta aquí no ha sido una tarea fácil, en general para nadie lo es y quizás allí está un poco la gracia, en aceptar el desafío. Pero en el camino he tenido la suerte de conocer gente que ha hecho que el recorrido sea mucho más ameno, no sé si es correcto decir que sin ellos esto no hubiera sido posible, pero sí estoy segura de que no hubiera sido tan grato.

Para empezar quiero agradecerle a Pedro, mi director, quien además de ser una guía y un referente académico ha sabido transmitirme sus valores, su simpleza y su generosidad. Siempre ha estado ahí para lo que fuera necesario; sin peros, sin quejas y con toda la predisposición. Un matemático de primera y un ser humano excepcional. También le agradezco a Demetrio, mi co-director y la cabeza del grupo de Análisis Funcional y Teoría de Operadores; generoso como pocos y como diría Pedro: *"por suerte juega para nuestro equipo"*.

Gracias a Carlos Cabrelli, Daniel Galicer y Eduardo Chiumiento, por haber aceptado ser jurados de esta tesis, por haberse tomado el tiempo para leerla con detalle y por las devoluciones y comentarios que nos han hecho al respecto.

Quiero agradecerle también a mis amigas y compañeras: Adri y Lupe. Dos mujeres importantísimas en mi vida con quienes he compartido casa, carrera, viajes y han sido imprescindibles para sobrellevar los malos momentos y compartir los buenos.

Majo, mi hermana académica y de la vida; quien supo llegar en el momento justo para darme el empujón que necesitaba, para alentarme y acompañarme; para contagiarme su alegría y sus ganas de seguir adelante. Indudablemente, ella también es una gran responsable de esto y al igual que a mis otros "hermanos": Ana y Sebas, les agradezco permitirme ser parte de esta linda familia.

Gracias a Lau y a Iván; a "las chicas de la oficina": Belén, Gi, Romi y Vicky; a "los bibliotekids": Clau, Edu, Pablo; al grupo de Análisis Funcional y Teoría de Operadores de la Facultad y del IAM; a mis compañeros docentes, en especial a "Mamá Kladniew" quien siempre creyó en mi; a mis amigos y familiares; a Uri, mi ahijado.

Por supuesto que si hay dos personas que han hecho hasta lo imposible para que este momento llegara, esos son mis queridos viejos; decirles gracias es decir poco.

No puedo dejar de agradecerle a esta casa de estudios que me ha brindado mucho más que una carrera y las herramientas para el futuro. En la UNLP aprendí que uno no es nadie por sí sólo, que detrás de cada estudiante, docente, no-docente e investigador hay un esfuerzo enorme de todos los que construyen día a día la universidad. Esta universidad que es pública, libre y gratuita; que es usina de ideas, generadora de conocimiento. Esta universidad que es de todos y que nunca hay que permitir que deje de ser así, porque la educación pública es un derecho, no un lujo.

Finalmente, quiero agradecerle al CONICET, principal organismo destinado a promover el desarrollo de la ciencia y la tecnología de este país. Como becaria no puedo ignorar que el financiamiento que he recibido para realizar el doctorado, proviene del sacrificio de cada ciudadano; una razón más por la cual la ciencia debería estar al alcance de todos, para mejorar la calidad de vida de la población. Por eso, en estos tiempos en que los vientos no son favorables para el sistema científico del país en general, quiero permitirme recordar una frase de Bernardo Houssay, quien fue el (re)fundador de este prestigioso organismo en el año 1958:

"Los países ricos lo son porque dedican dinero al desarrollo científico-tecnológico,
y los países pobres lo siguen siendo porque no lo hacen.
La ciencia no es cara, cara es la ignorancia".

La Plata, Marzo de 2019.

Índice general

Introducción

La teoría de marcos fue desarrollada inicialmente por Duffin y Schaeffer en [25] alrededor de los años 1950. Sin embargo, su relevancia surge más de treinta años después, con un trabajo de Daubechies, Grossman y Meyer a partir del cual se empezó a reconocer la importancia de esta teoría para las aplicaciones. Desde ese entonces, la teoría de marcos y la ingeniería han estado íntimamente relacionadas y se han retroalimentado mutuamente generando grandes avances en el área.

En el contexto de dimensión finita, dado un conjunto de índices $\mathbb{I}_k = \{1, \cdots, k\}$, se dice que una familia $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{C}^d)^k$ es un *marco* para $\mathbb{C}^d$ si genera (linealmente) a $\mathbb{C}^d$. De manera equivalente, $\mathcal{F}$ es un marco para $\mathbb{C}^d$ si existen constantes positivas $0 < A \leq B$, denominadas cotas de marco, tales que

$$A\,\|f\|^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{I}_k} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B\,\|f\|^2 \quad \text{para} \quad f \in \mathbb{C}^d\,.$$

Como conjunto de generadores (posiblemente redundante), un marco $\mathcal{F}$ nos permite representar de manera lineal a todos los vectores de $\mathbb{C}^d$. En efecto, es bien sabido que en este caso

$$f = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} \langle f, g_i\rangle\, f_i = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} \langle f, f_i\rangle\, g_i \quad \text{para todo} \quad f \in \mathbb{C}^d\,,$$

para ciertos marcos $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k}$ que se denominan *marcos duales* de $\mathcal{F}$. Luego, un vector (señal) $f \in \mathbb{C}^d$ puede codificarse en términos de los coeficientes $(\langle f, g_i\rangle)_{i\in\mathbb{I}_k}$, los cuales pueden ser enviados (uno a uno) por un canal de transmisión y ser decodificados por el receptor utilizando la fórmula de reconstrucción mencionada arriba.

Un ejemplo clásico de marco es una base ortonormal para $\mathbb{C}^d$, sin embargo este caso no es de los más interesantes, dado que las bases permiten reconstruir a cada elemento de $\mathbb{C}^d$ de manera única y eso nos da una noción de rigidez, que en general no es útil para las aplicaciones. En el caso de los marcos que no son base, esta representación no es única y es justamente esa noción de *redundancia* la que hace que los marcos puedan ser utilizados para lidiar con problemas de la vida real, tales como ruido en un canal de transmisión (dando lugar a lo que se conoce en la literatura como diseño de marcos robustos). Los campos de aplicación más comunes de la teoría de marcos son la teoría de muestreo, la reconstrucción de señales, el procesamiento de imágenes y la transmisión de datos, entre otros. La estabilidad en el algoritmo de reconstrucción también juega un rol central en las aplicaciones. Las consideraciones de estas características de los marcos motivaron a introducir los *marcos ajustados de norma unitaria*, que son aquellos en los que las cotas de marco son iguales y cada vector de la familia tiene norma uno. Resulta que este tipo de marcos tiene varias propiedades de optimalidad relacionadas con el *borrado* de los coeficientes del marco y la estabilidad numérica de su fórmula de reconstrucción (ver [17, 41]).

En su trabajo seminal [5] Benedetto y Fickus dieron otra caracterización de los marcos ajustados con norma unitaria, en términos de un funcional convexo conocido como el *potencial de marco*. En efecto, dada una familia finita de vectores $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_k}$ en $\mathbb{C}^d$, el potencial de marco de $\mathcal{F}$, denotado por $\mathrm{FP}(\mathcal{F})$ (también conocido como el potencial de Benedetto-Fickus), está dado por

$$\mathrm{FP}(\mathcal{F}) = \sum_{i\,,\,j\in\mathbb{I}_k} |\langle f_i\,,\,f_j\rangle|^2\,.$$

Benedetto y Fickus mostraron que si dotamos el conjunto de los marcos de k elementos en $\mathbb{C}^d$ de norma uno, con la métrica

$$d(\mathcal{F},\,\mathcal{G}) = \text{máx}\{\|f_i - g_i\| :\ i\in\mathbb{I}_k\} \quad \text{para} \quad \mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_k}\,, \mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{C}^d)^k$$

entonces, los marcos ajustados con norma unitaria están caracterizados como los minimizadores locales del potencial de marco, que en realidad coinciden con los minimizadores globales de este funcional (sobre el conjunto de todas las k-uplas de vectores en $\mathbb{C}^d$ de norma unitaria). Así nació la primera prueba (indirecta) de la existencia de marcos ajustados con norma unitaria (para $k\geq d$).

En las aplicaciones suele ser útil considerar marcos $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_k}$ con normas predeterminadas por una sucesión (de números positivos) $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k}$, es decir, para cada $i\in\mathbb{I}_k$ se tiene que $\|f_i\|^2 = a_i$. En este contexto, nace la pregunta de cuándo se puede asegurar la existencia de marcos ajustados con normas predeterminadas (arbitrarias) y esto da lugar a lo que se conoce como *problema de diseño de marcos*. Una solución completa de este problema de diseño, puede obtenerse en términos de un resultado clásico y central de la teoría de análisis matricial: *el Teorema de Schur-Horn*. Esta caracterización además muestra que, dada una sucesión $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k}$, no siempre existen marcos ajustados con normas predeterminadas por ella (ver [3, 12, 14, 19, 24, 26, 29, 49]).

Este hecho da lugar a pensar en sustitutos, dentro de la clase de marcos con normas predeterminadas, que cumplan alguna propiedad de optimalidad. Una solución completa al problema de diseño óptimo de marcos con normas predeterminadas con respecto al potencial de marco, fue dada en [15], donde los minimizadores globales del potencial de marco fueron calculados; incluso ha sido probado que si dotamos la clase de marcos con normas predeterminadas por $\mathbf{a}$;

$$\mathbb{T}_d(\mathbf{a}) := \left\{\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{C}^d)^k \ : \|g_i\|^2 = a_i\,,\,\text{para todo } i\in\mathbb{I}_k\right\}\,,$$

con la métrica

$$d(\mathcal{G}\,,\,\mathcal{G}')^2 = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} \|g_i - g_i'\|^2 \quad \text{para} \quad \mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k},\, \mathcal{G}' = \{g_i'\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\,,$$

se tiene que los minimizadores locales del potencial de marco en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ son en realidad minimizadores globales. Esta generalización de los resultados que habían sido obtenidos en [5] motivó el estudio de los problemas de perturbaciones relacionadas con métodos de descenso en la dirección del gradiente de la función (suave) potencial de marco, en la variedad (suave) $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$.

El potencial de marco puede ser considerado dentro de la clase general de *potenciales convexos* introducida por Massey y Ruiz en [58]. En ese trabajo fue demostrado que el diseño de marcos óptimos en la clase $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ que fue obtenido en [15], también minimiza de manera global a todo potencial convexo dentro de la clase. Más adelante, fue demostrado en [61] que los minimizadores locales de cualquier potencial convexo inducido por una función estrictamente convexa, son minimizadores globales de todos los potenciales convexos en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, lo cual da una prueba por la positiva de la conjetura planteada en [58].

Dada una familia (inicial) de vectores $\mathcal{F}_0$ en $\mathbb{C}^d$ y una sucesión de números positivos $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k}$; Fickus, Mixon y Poteet plantearon en [31], el problema de calcular las completaciones $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{G})$, que se obtienen agregando a la familia inicial una familia $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k}$ en $\mathbb{C}^d$, con normas predeterminadas por $\mathbf{a}$, de manera tal que $\mathcal{F}$ minimice lo que en la literatura se conoce como *Error Cuadrático Medio* (ECM). Este problema es conocido como el *problema de completaciones óptimas con normas predeterminadas para el ECM*, y contiene el caso particular del problema de diseño óptimo con normas predeterminadas para el ECM, es decir, cuando la familia inicial es vacía. Resulta además, que el ECM es también un potencial convexo. En la serie de trabajos [59, 60, 61] fue obtenida una solución completa al problema de completaciones óptimas con normas predeterminadas, con respecto a todos los potenciales convexos; explícitamente, Massey, Ruiz y Stojanoff probaron que existe una clase de completaciones con normas predeterminadas, que está determinada por ciertas condiciones espectrales tales que los elementos de esa clase minimizan simultáneamente a todos los potenciales convexos. Una herramienta clave para resolver este problema fue un resultado clásico de mayorización, dentro de la teoría de análisis matricial: *el Teorema (aditivo) de Lidskii*. Cabe señalar que el mismo resultado fue obtenido posteriormente por Fickus, Marks y Poteet en [32], de manera independiente, en términos de un *Teorema de Schur-Horn generalizado*. Notemos que dentro del conjunto de las completaciones, hay una métrica natural dada por:

$$d(\mathcal{F}\,,\,\tilde{\mathcal{F}}) = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} \|g_i - g_i'\|^2 \quad \text{para} \quad \mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{G}) \quad \text{y} \quad \tilde{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_0, \tilde{\mathcal{G}})\,.$$

Sin embargo, la estructura de los minimizadores locales de potenciales convexos de completaciones de marcos con normas predeterminadas, no fue obtenida en ese trabajo, ni siquiera para el caso del potencial de Benedetto-Fickus.

Es bien conocido el hecho de que muchos resultados fundamentales de la teoría de marcos en dimensión finita, tienen su contraparte en resultados clásicos de la teoría de análisis matricial; que el problema de diseños de marcos con operador de marco y normas, ambos predeterminados, es equivalente a algunas reformulaciones del Teorema de Schur-Horn, es un buen ejemplo de eso.

Dentro de la teoría de análisis matricial, las desigualdades de Lidskii son clásicas protagonistas, ya que forman parte de una serie de herramientas que lidian con algunos de los problemas más naturales dentro de esta teoría, tales como los de aproximación de matrices (problemas de cercanía de matrices) y desigualdades que involucran tanto a los autovalores de una matriz, como a sus valores singulares (se puede consultar la bibliografía clásica [7]). Estas desigualdades aparecen expresadas en términos de lo que se denomina *mayorización*. La mayorización es una relación de pre-orden entre vectores (reales) que está íntimamente relacionada con las desigualdades traciales que involucran funciones convexas. Este hecho permite utilizar las desigualdades de Lidskii para describir la estructura de las matrices que son óptimas con respecto a familias de funcionales tipo entrópicos (ver [54, 58, 60, 61]). Las desigualdades de Lidskii también nos proveen relaciones simples entre el espectro de la suma de matrices autoadjuntas y sus sumandos, involucradas con la solución de la Conjetura de Horn acerca del espectro de la suma de matrices autoadjuntas (ver [42]).

En el año 2012, en un trabajo que en principio pareciera no estar relacionado con el problema de las completaciones de marcos con normas predeterminadas, Strawn presenta un algoritmo de aproximación de tipo de descenso en la dirección del gradiente para lo que él denomina *distancia al operador de marco* (DOM), en la variedad (suave) $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. Más específicamente, en [63], Strawn considera para S una matriz positiva y $\mathbf{a}$ una sucesión de normas predeterminadas, minimizar la distancia al operador de marco (DOM) que se define como la función $\Theta_2 = \Theta_{(2\,,\,S\,,\,\mathbf{a})} : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$\Theta_2(\mathcal{G}) = \|S - S_{\mathcal{G}}\|_2 \quad \text{para} \quad \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\,,$$

donde $\|A\|_2^2 = \operatorname{tr}(A^*A)$, para $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, denota la norma Frobenius y $S_{\mathcal{G}}$ al operador de marco de la familia $\mathcal{G}$.

En el caso de que $S = \alpha I$ para algún $\alpha > 0$, Strawn observó que encontrar los minimizadores de Θ_2 en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, es equivalente a encontrar los minimizadores del potencial de Benedetto - Fickus en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, pues

$$\|S - S_{\mathcal{G}}\|_2^2 = \operatorname{tr}(S^2) + \operatorname{tr}(S_{\mathcal{G}}^2) - 2\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(S - S_{\mathcal{G}})) = \alpha^2 d + \operatorname{FP}(\mathcal{G}) - 2(\alpha d - \operatorname{tr}(\mathbf{a}))\,.$$

Strawn notó también que, agregando una hipótesis de mayorización entre $\mathbf{a}$ y el vector de autovalores de S (contados con multiplicidad), la versión del Teorema de Schur-Horn para marcos, afirma que existe una familia $\mathcal{G}^{\text{op}} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ tal que su operador de marco coincide con S y en este caso,

$$\text{mín}\,\{\, \Theta_2(\mathcal{G}) : \ \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \,\} = 0\,.$$

Al notar esto fue que Strawn presentó un algoritmo de aproximación basado en el método de descenso en la dirección del gradiente de Θ_2, el cual explota algunos aspectos geométricos de la geometría diferencial de la variedad $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ obtenidos por él mismo en [62] (algunos de los cuales son de naturaleza similar a los que se consideran en [58]). En el caso de que la sucesión de iterados construida por el método de Strawn sea convergente, lo que uno espera en general es (en el mejor de los casos) encontrar un minimizador local de la función objetivo. Los resultados obtenidos en ese trabajo le permitieron a Strawn conjeturar que (bajo ciertas hipótesis adicionales) los minimizadores locales de la DOM, son globales.

En esta tesis, dada una familia inicial de vectores $\mathcal{F}_0$ en $\mathbb{C}^d$ y una sucesión de números positivos $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k}$, vamos a mostrar que cualquier completación $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$ de $\mathcal{F}_0$, que se obtenga agregando una familia de vectores $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ y que sea un minimizador local de algún potencial (estrictamente) convexo, resulta ser un minimizador global de todos los potenciales convexos, sobre tales completaciones. Este resultado generaliza entonces a los que fueron obtenidos previamente en [5, 15, 30, 31] para el potencial de marco y el ECM; así como también generaliza los resultados de [32, 58, 59, 60, 61] relacionados con los diseños óptimos (y/o completaciones óptimas) con normas predeterminadas con respecto a un potencial convexo arbitrario.

También probaremos que, en general, la Conjetura de Strawn es equivalente al problema de determinar si los minimizadores locales del potencial de Benedetto - Fickus (sobre cierto conjunto de completaciones con normas predeterminadas) son minimizadores globales. Este hecho nos ha motivado a estudiar los minimizadores locales de completaciones con normas predeterminadas, para el potencial de Benedetto-Fickus y para el caso más general de los potenciales convexos basados en funciones estrictamente convexas definidos por Massey y Ruiz en [58]. De esta forma, basados en los resultados sobre mínimos locales de completaciones con normas predeterminadas, daremos una prueba de la conjetura de Strawn.

La demostración de la conjetura de Strawn, da lugar a una generalización natural de la DOM en términos de *normas unitariamente invariantes* (ejemplos típicos de este tipo de normas son la norma espectral y las p-normas Schatten para $p \geq 1$, que en particular incluyen a la norma Frobenius). Esto es, para S una matriz positiva de tamaño $d \times d$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k}$ un vector de entradas positivas ordenadas de manera no-creciente y N una norma unitariamente invariante estrictamente convexa, se define la *distancia al operador de marco generalizada* (G-DOM) como la función

$$\Theta_{(N,S,\mathbf{a})} = \Theta_N : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{dada por} \quad \Theta_N(\mathcal{G}) = N(S - S_{\mathcal{G}}).$$

En este contexto surgen de manera natural varias preguntas, como por ejemplo, cuál es el mínimo valor que toma Θ_N en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ y en qué familias $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ se alcanza el mínimo valor. Estos problemas de G-DOM están relacionados con los *problemas de cercanía de matrices* o *problemas de Procusto* (ver por ejemplo el texto reciente [35] y los clásicos libros de Bhatia [7] y Kato [39]). Una formalización de este tipo de problemas es la siguiente (ver [37]); dados S una matriz, una norma matricial N y un conjunto de matrices $\mathcal{X}$, queremos encontrar la distancia mínima

$$d_N(S, \mathcal{X}) = \text{mín}\{N(S - A) : \ A \in \mathcal{X}\} \ ,$$

y el subconjunto de matrices de $\mathcal{X}$ que aproximan mejor a S

$$\mathcal{A}_N^{\text{op}}(S \, , \, \mathcal{X}) = \{A \in \mathcal{X} : \ N(S - A) = d_N(S \, , \, \mathcal{X})\} \ .$$

La resolución de este tipo de problemas provee una caracterización y, de ser posible, un cálculo exacto (o en algunos casos estimaciones ajustadas) de la distancia $d_N(S \, , \, \mathcal{X})$ y del conjunto de mejores aproximaciones $\mathcal{A}_N^{\text{op}}(S \, , \, \mathcal{X})$. Es común que para estos problemas se elija a N como la norma Frobenius de matrices (también conocida como la norma 2), por ser una norma Euclídea (pues está asociada a un producto interno). Sin embargo, también es de interés considerar otras normas para este tipo de problemas, como por ejemplo las normas pesadas o las normas unitariamente invariantes. En cuanto a los conjuntos $\mathcal{X}$, algunas de las elecciones más importantes son el conjunto de matrices autoadjuntas, el de matrices semi definidas positivas, el de las matrices de correlación, el de los proyectores ortogonales, el de los proyectores oblicuos y el de las matrices cuya dimensión del rango está acotada por un número fijo (ver [22, 28, 37, 40, 64]).

Una vez resuelto el problema de cercanía para la matriz S, el conjunto $\mathcal{X}$ y N una norma matricial (fijos), aparece -de manera natural- un nuevo problema de proximidad: para una matriz $A_0 \in \mathcal{X}$ fija, se pretende calcular la distancia (o alguna cota ajustada)

$$d_{\mathcal{X}}(A_0 \, , \, \mathcal{A}_N^{\text{op}}(S \, , \, \mathcal{X})) = \text{mín}\{d_{\mathcal{X}}(A_0 \, , \, A) : \ A \in \mathcal{A}_N^{\text{op}}(S \, , \, \mathcal{X})\} \ ,$$

donde $d_{\mathcal{X}}$ denota una métrica en $\mathcal{X}$. En el caso de que $\mathcal{X}$ esté dotado de una estructura suave que es compatible con la distancia $d_{\mathcal{X}}$ y es tal que la función $\Psi(A) := N(A_0 - A)$ es también suave sobre $\mathcal{X}$, entonces se pueden obtener estimaciones de $d_{\mathcal{X}}(A_0 \, , \, \mathcal{A}_N^{\text{op}}(S \, , \, \mathcal{X}))$, aplicando métodos de descenso en la dirección del gradiente para Ψ. El estudio de la convergencia de estos métodos, lleva a estudiar el comportamiento local de la G-DOM. En este contexto, probaremos que los minimizadores locales de la G-DOM son globales y además no dependen de la norma unitariamente invariante N elegida. En particular, si tomamos N como la norma Frobenius, esto nos dará una prueba independiente de la Conjetura de Strawn.

Organización general de la tesis

Esta tesis está principalmente basada en los trabajos [54, 55, 56] y está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 vamos a introducir la notación y los resultados básicos de la teoría de análisis matricial, poniendo particular énfasis en la mayorización, las desigualdades de Lidskii clásicas y la relación que guardan la mayorización con las normas unitariamente invariantes y con las funciones estrictamente convexas. También vamos a recordar algunos resultados típicos de la teoría de marcos. En particular hemos incluido en la Sección 1.2.2 varios resultados extraídos de [59, 61] acerca del problema de completaciones de marcos con normas predeterminadas óptimas, para el caso de los potenciales convexos, que serán fundamentales para el estudio de los minimizadores locales de dichos potenciales en el Capítulo 3. Finalmente en la Sección 1.3 mencionaremos algunos hechos básicos de la geometría diferencial que serán necesarios particularmente para el desarrollo del Capítulo 2.

El Capítulo 2 está íntegramente dedicado a estudiar versiones locales de los Teoremas de Lidskii, los cuales serán una herramienta fundamental para probar los resultados principales de este trabajo. El

Teorema de Lidskii para autovalores es una herramienta clásica del análisis matricial, que ha sido clave para determinar la estructura de los minimizadores globales de los potenciales convexos en [60, 61]. No es de extrañar entonces, que este teorema también sea importante para determinar la naturaleza de los minimizadores locales para los potenciales convexos. Es por eso que en la Sección 2.1 vamos a probar una versión local del teorema de Lidskii para matrices positivas, con el fin de obtener la estructura de los minimizadores locales para el problema de potenciales convexos, y así poder probar que los minimizadores locales son globales. Este resultado será fundamental para poder dar más adelante una respuesta positiva a la Conjetura de Strawn para la DOM.

Por otro lado, las desigualdades (aditivas) de Lidskii, tanto la versión para autovalores como la de valores singulares, pueden ser interpretadas como una descripción explícita de ciertos minimizadores globales de funciones que son construidas en base a normas unitariamente invariantes y cuyos dominios consisten de ciertas órbitas de matrices (bajo la acción del grupo de matrices unitarias). Es por eso que en la Sección 2.1 mostraremos que las desigualdades de Lidskii describen a todos los minimizadores globales de tales funciones y que los minimizadores locales (considerando la topología usual en las órbitas unitarias que forman el dominio de las funciones en consideración) son en realidad globales. Como es de esperar, este resultado será clave para el estudio de los minimizadores locales de la G-DOM.

Este resultado además nos permitirá probar en la Sección 2.2 una caracterización del caso de igualdad en la desigualdad de Lidskii para valores singulares, el cual también es un resultado original de esta tesis.

En el Capítulo 3 vamos a presentar el problema de las completaciones de marcos con normas predeterminadas. Lo que haremos principalmente será estudiar la estructura de los minimizadores locales de la función

$$\mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \ni \mathcal{G} \mapsto \mathrm{P}_\varphi(\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G}) := \operatorname{tr}(\varphi(S_{(\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G})})) = \operatorname{tr}(\varphi(S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}}))\,,$$

donde $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función estrictamente convexa y $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}\,(\mathcal{F}_0)$ es una completación de $\mathcal{F}_0$ con una sucesión de vectores en $\mathbb{C}^d$ cuyas normas están predeterminadas por $\mathbf{a}$. El resultado principal de este capítulo es el hecho de que los minimizadores locales de potenciales estrictamente convexos dentro del conjunto de las completaciones de marcos con normas predeterminadas, son también minimizadores globales. La demostración está basada en la caracterización de los minimizadores globales dada por Massey, Ruiz y Stojanoff en [61]; y así como para ellos fue fundamental el Teorema de Lidskii (clásico) y la caracterización del caso de igualdad, para nosotros será una herramienta clave la versión local del Teorema de Lidskii (para matrices positivas) desarrollado en la Sección 2.1. Este resultado generaliza entonces a los que fueron obtenidos previamente en [5, 15, 30, 31] para el potencial de marco y el ECM; así como también generaliza los resultados de [32, 58, 59, 60, 61] relacionados con los diseños óptimos (y/o completaciones óptimas) con normas predeterminadas con respecto a un potencial convexo arbitrario. En cuanto al Problema de Strawn, los resultados obtenidos en este capítulo nos permitirán probar al inicio del Capítulo 4 que la conjetura planteada en [63] es cierta, incluso de manera más general.

En el Capítulo 4 vamos a dedicar la Sección 4.1 a dar respuesta positiva a la Conjetura de Strawn [63]. La prueba que daremos está planteada en términos de una traducción entre los problemas de completaciones de marcos y los problemas de DOM. La resolución de este problema induce a definir de manera natural lo que denominamos generalización de la DOM (G-DOM) e incluso nos permite obtener información sobre los minimizadores globales. En la Sección 4.2 vamos a ver algunas propiedades de los minimizadores locales de la G-DOM de manera análoga a como lo hicimos en el Capítulo 3 para el caso de los potenciales convexos. Cabe destacar que el caso de la G-DOM, no pueden utilizarse mecanismos de reducción como los que empleamos en el Capítulo 3. En base a las propiedades halladas para los minimizadores locales de la G-DOM vamos a presentar en la Sección 4.2.2 casos particulares para los cuales los minimizadores locales son globales. En la Sección 4.2.4 vamos a obtener propiedades de la estructura geométrica y espectral de los minimizadores locales de la G-DOM. Estas propiedades junto con el estudio de los casos particulares, inducen a definir en la Sección 4.2.5 lo que denominamos condición de co-feasibilidad. Esta noción será esencial para probar finalmente, en la Sección 4.3, que los minimizadores locales también son globales en este caso. En particular veremos que las familias que minimizan la G-DOM no dependen de la norma unitariamente invariante elegida.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo vamos a introducir la notación, terminología y resultados provenientes de la teoría de análisis matricial y de la teoría de Marcos, que utilizaremos a lo largo de esta tesis. Como referencias generales de estos tópicos se pueden considerar los textos [4, 7, 42, 43, 44, 53] y [13, 18, 21]. También vamos a incluir algunos hechos de la Geometría Diferencial que serán fundamentales para probar los Teoremas de Lidskii del Capítulo 2.

1.1. Análisis matricial

Empecemos estableciendo la notación y los resultados básicos de la teoría de análisis matricial, que vamos a utilizar a lo largo de esta tesis.

Para $d \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto de índices $\mathbb{I}_d := \{1, \ldots, d\}$. Dado un conjunto (finito) de vectores $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in \mathbb{I}_d} \in \mathbb{C}^d$ denotaremos al *espacio generado* por $\mathcal{B}$ como $\text{gen}\{v_i : i \in \mathbb{I}_d\}$. En caso de que $\text{gen}\{v_i : i \in \mathbb{I}_d\} = \mathbb{C}^d$, $\langle v_i , v_i \rangle = \|v_i\| = 1$ para todo $i \in \mathbb{I}_d$ y $\langle v_i , v_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j \in \mathbb{I}_d$ (donde $\langle \cdot , \cdot \rangle$ denota el producto interno usual de $\mathbb{C}^d$), diremos que $\mathcal{B}$ es una *base ortonormal* (bon) para $\mathbb{C}^d$. Si $\langle v_i , v_j \rangle = 0$ para $i \neq j \in \mathbb{I}_d$, en algunas ocasiones lo denotaremos por $v_i \perp v_j$.

Dado $x = (x_i)_{i \in \mathbb{I}_d} \in \mathbb{R}^d$ denotaremos por $x^\downarrow = (x_i^\downarrow)_{i \in \mathbb{I}_d}$ (respectivamente $x^\uparrow = (x_i^\uparrow)_{i \in \mathbb{I}_d}$) al vector que se obtiene de reordenar las entradas del vector x en orden no-creciente (respectivamente, no-decreciente). También denotaremos por $(\mathbb{R}^d)^\downarrow = \{x^\downarrow : \ x \in \mathbb{R}^d\}$, $(\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow = \{x^\downarrow : \ x \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}\}$ y análogamente $(\mathbb{R}^d)^\uparrow$ y $(\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\uparrow$.

Vamos a denotar por $\mathcal{M}_{d,k}(\mathbb{C})$ al álgebra de matrices $d \times k$ con entradas complejas. En el caso de que $d = k$, la denotaremos simplemente por $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Si $x, y \in \mathbb{C}^d$ denotaremos por $x \otimes y \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ a la matriz de rango uno determinada por $(x \otimes y)\, z = \langle z , y \rangle\, x$, para $z \in \mathbb{C}^d$.

Para una matriz $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{I}_d} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ vamos a denotar por $\text{diag}(A) := (a_{11}, \cdots, a_{dd}) \in \mathbb{C}^d$ al vector formado por los elementos de la diagonal principal de A. Dado un vector $\mu \in \mathbb{C}^d$ denotaremos por D_μ a la matriz diagonal con diagonal principal dada por μ.

Vamos a considerar también los siguientes subconjuntos de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$:

- El subespacio real de *matrices autoadjuntas* $\mathcal{H}(d) := \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) : \ A = A^*\} \subset \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.
- El cono de *matrices semidefinidas positivas* $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+ : \left\{A \in \mathcal{H}(d) : \ \langle Ax , x \rangle \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{C}^d\right\} \subset \mathcal{H}(d)$.
- El grupo de *matrices unitarias* $\mathcal{U}(d) := \{U \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) : \ U^*U = UU^* = I\} \subset \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

Dada una matriz $A \in \mathcal{H}(d)$ denotaremos por $\lambda(A) = \lambda(A)^{\downarrow} = (\lambda_i(A))_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d)^{\downarrow}$ al vector de *autovalores* de A contando multiplicidades y ordenado de manera no-creciente, análogamente denotaremos por $\lambda(A)^{\uparrow}$ al mismo vector pero ordenado de manera no-decreciente.

Si $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, entonces $\lambda(A) \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$. Dada $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ denotaremos por $s(B) = \lambda(|B|) \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$ al vector de *valores singulares* de B, es decir, los autovalores de la matriz $|B| = (B^*B)^{1/2} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ ordenados de manera no-creciente y contando multiplicidades.

Un hecho conocido es que, dada una matriz $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ existen $U, V \in \mathcal{U}(d)$ tales que

$$A = U^* D_{s(A)} V \,,$$

donde $D_{s(A)}$ denota la matriz diagonal con diagonal principal dada por el vector de valores singulares de A, $s(A)$. Llamamos a esta expresión *descomposición en valores singulares* de A.

1.1.1. Mayorización en $\mathbb{R}^d$

La mayorización entre vectores (ver [4, 7, 53]) juega un papel importante en la teoría de marcos. Por una parte, permite caracterizar la existencia de marcos con ciertas propiedades predeterminadas. Por otra parte, la mayorización es una relación de pre-orden que implica una familia de desigualdades de trazas. Este último hecho se usa para explicar la estructura de los mínimos del potencial de marco de Benedetto-Fickus ([5, 15]), así como también, para describir potenciales convexos más generales para marcos finitos.

En lo que sigue daremos una breve descripción de la sub-mayorización y la mayorización entre vectores, la cual jugará un rol central a lo largo de esta tesis. Para un estudio más detallado de estas relaciones ver por ejemplo [4].

Definición 1.1.1. Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$. Diremos que x está *submayorizado* por y, y lo denotaremos por $x \prec_w y$, si

$$\sum_{i=1}^{j} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{j} y_i^{\downarrow} \quad \text{para todo} \quad 1 \leq j \leq d\,.$$

Si $x \prec_w y$ y $\operatorname{tr} x = \sum_{i=1}^d x_i = \sum_{i=1}^d y_i = \operatorname{tr} y$, diremos que x está *mayorizado* por y, y lo denotaremos por $x \prec y$. △

Observación 1.1.2. En el caso de que los vectores tengan entradas no negativas, podemos extender la noción de (sub)mayorización al caso de vectores de distintas dimensiones. Concretamente, dados $x \in \mathbb{R}^k_{\geq 0}$ e $y \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$, se dice que x está *submayorizado* por y, y lo denotaremos por $x \prec_w y$, si

$$\sum_{i=1}^{j} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{j} y_i^{\downarrow} \quad \text{para todo} \quad 1 \leq j \leq \min\{k\,,\,d\}\ .$$

Si $x \prec_w y$ y $\operatorname{tr} x = \sum_{i=1}^d x_i = \sum_{i=1}^k y_i = \operatorname{tr} y$, diremos que x está *mayorizado* por y, y lo denotaremos por $x \prec y$. △

Es un ejercicio estándar probar que:

Proposición 1.1.3. Dados $x,\, y \in \mathbb{R}^d$ diremos que $x \leqslant y$, si $x_i \leq y_i$ para todo $i \in \mathbb{I}_d$.

1. $x \leqslant y \implies x^{\downarrow} \leqslant y^{\downarrow} \implies x \prec_w y$.

2. $x \prec y \implies |x| \prec_w |y|$, donde $|x| = (|x_i|)_{i\in\mathbb{I}_d} \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$.

3. Si $x \prec y$ y $|x|^\downarrow = |y|^\downarrow$ entonces $x^\downarrow = y^\downarrow$.

4. Supongamos que $x = x^\downarrow$, $y = y^\downarrow$ y que $z = z^\downarrow$, $w = w^\downarrow \in \mathbb{R}^s$. Si $x \prec y$ y $z \prec w$ entonces $(x, z) \prec (y, w)$ en $\mathbb{R}^{d+s}$.

□

Observación 1.1.4. Si $A, B \in \mathcal{H}(d)$ entonces por el ítem 2 de la Proposición 1.1.3 se tiene que

$$\lambda(A) \prec \lambda(B) \implies s(A) \prec_w s(B)\,. \tag{1.1}$$

△

A pesar de que la mayorización no es un orden total en $\mathbb{R}^d$, hay desigualdades fundamentales en la teoría de análisis matricial que pueden describirse en términos de esta relación. Un ejemplo clave para esta tesis de este fenómeno es la desigualdad (aditiva) de Lidskii (ver por ejemplo [7]) la cual compara el espectro de la suma de dos matrices autoadjuntas con la suma de los espectros. Muchas de las desigualdades entre los autovalores de dos matrices autoadjuntas A, B y los de $A + B$ fueron probadas por primera vez por H. Weyl y han sido sin duda claves para la demostración de muchos resultados clásicos de mayorización, incluyendo el Teorema de Lidskii.

Teorema 1.1.5 (Desigualdades de Weyl)**.** Sean $A, B \in \mathcal{H}(d)$ y $\lambda(A), \lambda(B) \in (\mathbb{R}^n)^\downarrow$. Luego,

$$\lambda_j(A + B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_{j-i+1}(B) \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq j \leq n\,, \tag{1.2}$$

$$\lambda_j(A + B) \geq \lambda_i(A) + \lambda_{j-i+n}(B) \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq i \leq n\,. \tag{1.3}$$

En particular, tomando $i = j$, se tiene que:

$$\lambda_j(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_j(A + B) \leq \lambda_j(A) + \lambda_1(B) \quad \text{para cada} \quad j \in \mathbb{I}_n\,. \tag{1.4}$$

También fue probado por Weyl que, bajo las mismas hipótesis,

$$\lambda(A + B) \prec \lambda(A) + \lambda(B)\,. \tag{1.5}$$

□

A continuación vamos a enunciar el clásico Teorema de Lidskii y vamos a incluir (en el ítem 2) la caracterización del caso de igualdad obtenida por Massey, Ruiz y Stojanoff en [60].

Teorema 1.1.6 (Desigualdad de Lidskii clásica)**.** Sean A, $B \in \mathcal{H}(d)$ con autovalores $\lambda(A)$, $\lambda(B) \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$, respectivamente. Luego,

1. $\lambda(A)^\uparrow + \lambda(B) \prec \lambda(A + B)$.

2. Si $\lambda(A + B) = \big(\lambda^\uparrow(A) + \lambda(B)\big)^\downarrow$ entonces existe una base ortonormal (en adelante bon) $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que
$$A = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i^\uparrow(A)\ v_i \otimes v_i \quad \text{y} \quad B = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i(B)\ v_i \otimes v_i\ .$$ □

Observación 1.1.7 (Desigualdad de Lidskii 2)**.** Notemos que si A, $B \in \mathcal{H}(d)$ con autovalores $\lambda(A)$, $\lambda(B) \in (\mathbb{R}^d)^{\downarrow}$ respectivamente, entonces $-B \in \mathcal{H}(d)$ y $-(\lambda(B)^{\uparrow}) = \lambda(-B)$. Luego, por el ítem 1 del Teorema 1.1.6 se tiene que

$$\lambda(A)^{\uparrow} + \lambda(-B) = \lambda(A)^{\uparrow} - \lambda(B)^{\uparrow} \prec \lambda(A-B)\,.$$

Como $(\lambda(A)^{\uparrow} - \lambda(B)^{\uparrow})^{\downarrow} = (\lambda(A) - \lambda(B))^{\downarrow}$, ya que las coordenadas que se emparejan en las diferencias son las mismas en ambos vectores, antes de reordenar el vector de manera decreciente, se tiene que

$$(\lambda(A) - \lambda(B)) \prec \lambda(A-B)\,.$$

Además (por el ítem 2)

$$(\lambda(A) - \lambda(B))^{\downarrow} = \lambda(A-B)$$

si, y sólo si, existe una bon $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$A = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i(A)\; v_i \otimes v_i \quad \text{ y } \quad B = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i(B)\; v_i \otimes v_i\ .$$

$\triangle$

El Teorema de Lidskii tiene dos versiones más, relacionadas con la que dimos en el ítem 1 del Teorema 1.1.6. Una de ellas es la versión para valores singulares que enunciaremos a continuación.

Teorema 1.1.8 (Desigualdad de Lidskii versión valores singulares)**.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Luego,

$$|s(A) - s(B)| \prec_w s(A-B)\,.$$

$\square$

Observación 1.1.9. La versión de valores singulares del Teorema de Lidskii puede obtenerse como corolario de la primera, considerando para una matriz $C \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ la matriz $\widehat{C} \in \mathcal{H}(2\,d)$ dada por

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Si $U, V \in \mathcal{U}(d)$ son tales que $C = V^* D_{s(C)} U$ y tomamos la matriz $W \in \mathcal{U}(2\,d)$ dada por

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} V & U \\ -V & U \end{pmatrix},$$

se puede ver que, $\widehat{C} = W^*\,(D_{s(C)} \oplus -D_{s(C)})\,W$, lo cual implica que

$$\lambda_i(\widehat{C}) = \begin{cases} s_i(C) & \text{si} \quad 1 \le i \le d\,, \\ -s_{d-i+1}(C) & \text{si} \quad d+1 \le i \le 2d\ . \end{cases} \tag{1.7}$$

Por lo tanto, para $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, las matrices $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathcal{H}(2\,d)$ y entonces, por la Observación 1.1.7, se tiene que

$$\lambda(\widehat{A}) - \lambda(\widehat{B}) \prec \lambda(\widehat{A} - \widehat{B})\,.$$

Notando que $\widehat{A} - \widehat{B} = \widehat{A-B}$, por la Eq. (1.7) resulta que

$$(s(A) - s(B), -(s(A) - s(B))) \prec (s(A-B), -s(A-B))\,.$$

Utilizando la definición de mayorización y el hecho de que para $1 \leq j \leq d$

$$\lambda_j(\widehat{A}) - \lambda_j(\widehat{B}) = s_j(A) - s_j(B) \quad \text{y} \quad \lambda_{2n-j+1}(\widehat{A}) - \lambda_{2n-j+1}(\widehat{B}) = -(s_j(A) - s_j(B)) \,,$$

se tiene el resultado buscado.

Estas matrices "sombrero" también son una herramienta útil para demostrar la versión para valores singulares de desigualdad de Weyl de la Eq. (1.5),

$$s(A+B) \prec_w s(A) + s(B) \,.$$

$\triangle$

Para la versión de valores singulares del Teorema de Lidskii, no habían sido caracterizadas hasta el momento las matrices que verifican la igualdad. En la Sección 2.2 caracterizaremos tales matrices utilizando estas matrices "sombrero" y los Teoremas de Lidskii locales que probaremos en la Sección 2.1.

1.1.2. Desigualdades de normas unitariamente invariantes y funciones convexas

Recordemos que una norma N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ es *unitariamente invariante* (nui) si

$$N\,(U\,A\,V\,) = N\,(A) \quad \text{para todo} \quad A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \quad \text{y} \quad U, V \in \mathcal{U}(d) \,.$$

Son ejemplos de nui: la *norma espectral* $\|\cdot\|_{\text{sp}}$, dada por:

$$\|A\|_{\text{sp}} = s_1(A)$$

y las *p-normas Schatten* $\|\cdot\|_p$, para $p \geq 1$, dadas por:

$$\|A\|_p = \operatorname{tr}(|A|^p)^{1/p} = \left(\sum_{i \in \mathbb{I}_d} s_i(A)^p\right)^{1/p} \,.$$

Notar que cuando $p = 2$ se tiene la *norma Frobenius*:

$$\|A\|_2 = \operatorname{tr}(A^*A)^{1/2} = \left(\sum_{i \in \mathbb{I}_d} s_i(A)^2\right)^{1/2} \,.$$

Esta norma proviene del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ como

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^*B) \quad \text{para} \quad A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \,.$$

Es bien sabido que la mayorización está íntimamente relacionada con desigualdades traciales de funciones convexas y con desigualdades que involucran normas unitariamente invariantes. Antes de mencionar algunas de esas relaciones vamos a considerar, para $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ un subconjunto convexo, los conjuntos:

$$\operatorname{Conv}(\mathbb{I}) = \{\varphi : \mathbb{I} \to \mathbb{R} \;,\; \varphi \text{ es convexa}\} \qquad \text{y}$$

$$\operatorname{Conv}_{\text{s}}(\mathbb{I}) = \{\varphi \in \operatorname{Conv}(\mathbb{I}) \;,\; \varphi \text{ es estrictamente convexa}\}.$$

Los próximos dos teoremas muestran algunas de las relaciones entre la mayorización con las funciones convexas y con las nuis, respectivamente.

Teorema 1.1.10. Sean $x,\, y \in \mathbb{R}^d$. Si $\varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R})$ entonces:

1. Si $x \prec y$, luego $\operatorname{tr} \varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \varphi(x_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \varphi(y_i) = \operatorname{tr} \varphi(y)$.

2. Si $x \prec_w y$ y φ es una función creciente, entonces también resulta que $\operatorname{tr} \varphi(x) \leq \operatorname{tr} \varphi(y)$.

3. Si $x \prec y$ y φ es una función estrictamente convexa tal que $\operatorname{tr}\, \varphi(x) = \operatorname{tr}\, \varphi(y)$ entonces existe una permutación σ de $\mathbb{I}_d$ tal que $y_i = x_{\sigma(i)}$ para $i \in \mathbb{I}_d$, i.e. $x^\downarrow = y^\downarrow$.

4. Si $x \prec_w y$, $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ es no-decreciente y $\operatorname{tr} \varphi(x) = \operatorname{tr} \varphi(y)$, entonces existe una permutación σ de $\mathbb{I}_d$ tal que $y_i = x_{\sigma(i)}$ para $i \in \mathbb{I}_d$.

$\square$

Proposición 1.1.11. Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$. Luego, si $\operatorname{tr}(x) = \operatorname{tr}(y)$ entonces o bien $x \prec y$, o bien $y \prec x$. Si además φ es una función estrictamente convexa en $\mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(x) < \varphi(y)$ entonces $x \prec y$.

$\square$

Recordemos que una norma N en un $\mathbb{C}$-espacio vectorial V, es *estrictamente convexa* si para todos $x, y \in V$ tales que $N(x) = N(y)$, $x \neq y$ y $\lambda \in (0, 1)$ se tiene que

$$N(\lambda\, x + (1 - \lambda)y) < N(x) = N(y)\,.$$

Teorema 1.1.12. Sean $A,\, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Si $s(A) \prec_w s(B)$ entonces:

1. $N\,(A) \leq N\,(B)$ para toda nui N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

2. Si $N\,(A) = N\,(B)$ para alguna nui estrictamente convexa N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ entonces $s(A) = s(B)$.

$\square$

Con las ideas y notaciones previas podemos enunciar otro teorema clásico del análisis matricial, que será utilizado en repetidas oportunidades a lo largo de esta tesis.

Teorema 1.1.13. (Teorema de Schur-Horn clásico). Sean $b, c \in \mathbb{R}^d$. Luego, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $c \prec b$.

2. Existe una matriz B tal que $\operatorname{diag}(B) = c$ y $\lambda(B) = b$.

Si además b y c tienen entradas no negativas, lo anterior es equivalente a decir que:

3. Existen vectores unitarios $x_1, \cdots, x_d \in \mathbb{C}^d$ tales que

$$\operatorname{diag}(B) = \sum_{j \in \mathbb{I}_d} c_j\, x_j \otimes x_j\,.$$

$\square$

1.2. Teoría de Marcos

En esta sección presentaremos las definiciones básicas y los resultados clásicos de la teoría de marcos finitos.

Definición 1.2.1. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_k}$ una sucesión de vectores en $\mathbb{C}^d$.

1. Decimos que $\mathcal{F}$ es una *sucesión de Bessel* en $\mathbb{C}^d$, si existe $b > 0$ tal que:

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_k} |\langle f, f_i\rangle|^2 \le b\,\|f\|^2, \quad \text{para todo} \quad f \in \mathbb{C}^d. \tag{1.8}$$

2. Decimos que $\mathcal{F}$ es un *marco* para $\mathbb{C}^d$ si existen constantes $0 < a \le b$ tales que:

$$a\,\|f\|^2 \le \sum_{i\in\mathbb{I}_k} |\langle f, f_i\rangle|^2 \le b\,\|f\|^2, \quad \text{para todo} \quad f \in \mathbb{C}^d. \tag{1.9}$$

3. Las constantes óptimas $a_{\mathcal{F}}$ y $b_{\mathcal{F}}$ para la Eq. (1.9) se llaman *cotas de marco* de $\mathcal{F}$.

4. El marco $\mathcal{F}$ se denomina *ajustado* si $a_{\mathcal{F}} = b_{\mathcal{F}}$ y *ajustado normalizado* (o también de *Parseval*) si $a_{\mathcal{F}} = b_{\mathcal{F}} = 1$.

△

Definición 1.2.2. En general, dada una sucesión de Bessel $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{C}^d$, vamos a considerar los siguientes operadores:

- $T_{\mathcal{F}} \in \mathcal{M}_{d,k}(\mathbb{C})$ - *el operador de síntesis* de $\mathcal{F}$ dado por

$$T_{\mathcal{F}}[(c_i)_{i\in\mathbb{I}_k}] = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} c_i\ f_i \quad \text{para} \quad (c_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{C}^k. \tag{1.10}$$

- $T^*_{\mathcal{F}} \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{C})$ - *el operador de análisis* de $\mathcal{F}$ dado por

$$T^*_{\mathcal{F}}(f) = (\langle f,\, f_i\rangle)_{i\in\mathbb{I}_k} \quad \text{para} \quad f \in \mathbb{C}^d. \tag{1.11}$$

- $S_{\mathcal{F}} = T^*_{\mathcal{F}}\,T_{\mathcal{F}} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ - *el operador de marco* de $\mathcal{F}$:

$$S_{\mathcal{F}}(f) = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} \langle f,\, f_i\rangle\ f_i\ = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} f_i \otimes f_i\ (f) \quad \text{para} \quad f \in \mathbb{C}^d. \tag{1.12}$$

△

Observación 1.2.3. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_k}$ una sucesión en $\mathbb{C}^d$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathcal{F}$ es un marco en $\mathbb{C}^d$.
2. $\mathcal{F}$ genera linealmente a $\mathbb{C}^d$; es decir, $\text{gen}\,\{f_i : i \in \mathbb{I}_k\} = \mathbb{C}^d$.
3. $T_{\mathcal{F}}$ es suryectivo en $\mathbb{C}^d$.
4. $T^*_{\mathcal{F}}$ es acotado inferiormente.

De la Eq. (1.12) es fácil verificar que

$$\langle S_{\mathcal{F}} f,\, f\rangle = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} |\langle f,\, f_i\rangle|^2 \quad \text{para} \quad f\in\mathbb{C}^d\,,$$

por lo tanto, $S_{\mathcal{F}}\in\mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$. Más aun, una sucesión de Bessel $\mathcal{F}$ en $\mathbb{C}^d$ es un marco para $\mathbb{C}^d$ si, y sólo si, $S_{\mathcal{F}}$ es inversible. △

En diferentes aplicaciones de la teoría de marcos, surge la necesidad de construir una sucesión $\mathcal{G}$ en $\mathbb{C}^d$, de manera tal que su operador de marco esté dado por un operador positivo $B\in\mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y el cuadrado de las normas de los elementos del marco este predeterminado por una sucesión de números positivos $\mathbf{a}=(a_i)_{i\in\mathbb{I}_k}$. Esta construcción es conocida como el problema clásico de diseño de marcos con normas predeterminadas el cual ha sido estudiado por varios grupos de investigación (ver por ejemplo [3, 12, 14, 19, 24, 26, 29, 49]). El siguiente resultado caracteriza la existencia de tales diseños en términos de las relaciones de mayorización.

Teorema 1.2.4 (Schur-Horn para marcos [3, 57])**.** Sea $B\in\mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ con autovalores $\lambda(B)=(\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d}\in(\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$ y consideremos $\mathbf{a}=(a_i)_{i\in\mathbb{I}_k}\in(\mathbb{R}^k_{>0})^{\downarrow}$. Luego, existe una sucesión $\mathcal{G}=\{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k}$ en $\mathbb{C}^d$ con operador de marco $S_{\mathcal{G}}=B$ tal que $\|g_i\|^2=a_i$ para $i\in\mathbb{I}_k$ si, y sólo si, $\mathbf{a}\prec\lambda(B)$; i.e.

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_j} a_i \leq \sum_{i\in\mathbb{I}_j}\lambda_i \quad \text{para} \quad 1\leq j\leq \min\{k\,,\,d\} \quad \text{y} \quad \operatorname{tr}(\mathbf{a})=\sum_{i\in\mathbb{I}_k} a_i=\sum_{i\in\mathbb{I}_d}\lambda_i=\operatorname{tr}(\lambda(B))\,. \tag{1.13}$$

□

1.2.1. Completaciones de marcos con normas predeterminadas

Recientemente, ha habido un gran interés acerca de la estructura de las *completaciones óptimas de marcos con normas predeterminadas*. Explícitamente, si $\mathcal{F}_0=\{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_{n_0}}$ es una sucesión (finita) de vectores en $\mathbb{C}^d$, consideremos una sucesión $\mathbf{a}=(a_i)_{i\in\mathbb{I}_k}\in(\mathbb{R}^k_{>0})^{\downarrow}$ y $n=n_0+k$. Con estos datos fijos, el problema es construir una sucesión

$$\mathcal{G}=\{g_i\}_{i=1}^k \quad \text{con} \quad \|g_i\|^2=a_i \quad \text{para} \quad i\in\mathbb{I}_k\ ,$$

tal que la sucesión *completada* que resulta de yuxtaponer los vectores de $\mathcal{F}_0$ y $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G})$, es tal que los autovalores del operador de marco de $\mathcal{F}$ están lo más concentrado posible; de manera ideal lo que se busca son completaciones $\mathcal{G}$ tales que $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G})$ sea un marco ajustado. Desafortunadamente es bien conocido que tales completaciones no siempre existen (ver por ejemplo [29, 30, 31, 57, 59, 60, 61]). Sin embargo es posible medir la optimalidad en términos del potencial de marco, esto es, buscamos un marco

$$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G}) \quad \text{con} \quad \|g_i\|^2=a_i \quad \text{para todo vector} \quad g_i \quad \text{de} \quad \mathcal{G},$$

cuyo potencial de marco $\operatorname{FP}(\mathcal{F})=\operatorname{tr}(S_{\mathcal{F}}^2)$ sea minimal sobre todas las posibles completaciones. Otra alternativa para medir la optimalidad es en términos de lo que se denomina error cuadrático medio (ECM) de la sucesión $\mathcal{F}$, i.e. $\operatorname{ECM}(\mathcal{F})=\operatorname{tr}(S_{\mathcal{F}}^{-1})$ (ver [31]).

Más generalmente, se puede medir la estabilidad del marco completado $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_0,\mathcal{G})$, en términos de potenciales convexos más generales. Para introducir este tipo de potenciales comencemos considerando los conjuntos:

$$\operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})=\{\varphi:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}\ :\ \varphi \text{ es una función convexa }\} \tag{1.14}$$

$$\operatorname{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})=\{\varphi\in\operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0}):\varphi \text{ es una función estrictamente convexa}\}. \tag{1.15}$$

Definición 1.2.5. Siguiendo [58] vamos a considerar el *potencial convexo* (generalizado) P_φ asociado a la función $\varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, dado por

$$\mathrm{P}_\varphi(\mathcal{F}) = \mathrm{tr}\ \varphi(S_\mathcal{F}) = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \varphi(\lambda_i(S_\mathcal{F})) \quad \text{para} \quad \mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in (\mathbb{C}^d)^n ,$$

donde la matriz $\varphi(S_\mathcal{F})$ está definida vía el cálculo funcional usual. △

Los potenciales convexos nos permiten modelar diferentes medidas de estabilidad conocidas en la teoría de marcos. Por ejemplo, si $\varphi(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, entonces P_φ es el potencial de marco de Benedetto-Fickus; si $\varphi(x) = x^{-1}$ para $x \in \mathbb{R}_{>0}$, entonces P_φ es el error cuadrático medio (ECM). Lo que haremos ahora es dar una descripción detallada de las completaciones de marcos con normas predeterminadas óptimas, con respecto a los potenciales convexos en general.

Notación 1.2.6. Sean $\mathcal{F}_0 = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_{n_0}} \in (\mathbb{C}^d)^{n_0}$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$.

1. Recordemos que denotamos el producto (cartesiano) de esferas en $\mathbb{C}^d$ por:

$$\mathbb{T}_d(\mathbf{a}) = \left\{ \mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{C}^d)^k \ : \|g_i\|^2 = a_i \text{ para todo } i \in \mathbb{I}_k \right\} ,$$

dotado con la métrica producto de la métrica euclídea en cada una de esas esferas, es decir

$$d(\mathcal{G}\,,\,\mathcal{G}')^2 = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} \|g_i - g_i'\|^2 \quad \text{para} \quad \mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k},\ \mathcal{G}' = \{g_i'\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) .$$

Notemos que $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ es un espacio métrico compacto con la métrica producto.

2. Vamos a considerar el conjunto $\mathcal{C}_\mathbf{a}(\mathcal{F}_0)$, de las completaciones de la familia $\mathcal{F}_0$ con normas predeterminadas por la sucesión $\mathbf{a}$, dado por

$$\mathcal{C}_\mathbf{a}(\mathcal{F}_0) = \left\{ \mathcal{F} = (\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G}) \in (\mathbb{C}^d)^n \ : \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \right\} . \tag{1.16}$$

3. Para una función $\varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ denotaremos por $\mathcal{F}^{\mathrm{op}} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{G}^{\mathrm{op}}) \in \mathcal{C}_\mathbf{a}(\mathcal{F}_0)$ a una completación de marco óptima con respecto al potencial convexo P_φ; i.e. una completación tal que

$$\mathrm{P}_\varphi(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}) = \min\{\ \mathrm{P}_\varphi(\mathcal{F}) :\ \mathcal{F} \in \mathcal{C}_\mathbf{a}(\mathcal{F}_0)\ \} .$$ △

Consideremos la Notación 1.2.6. En la serie de artículos [59, 60, 61] ha sido completamente descrita la estructura espectral y geométrica de las completaciones óptimas $\mathcal{F}^{\mathrm{op}} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{G}^{\mathrm{op}}) \in \mathcal{C}_\mathbf{a}(\mathcal{F}_0)$, cuando $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ (ver Teorema 3.2.9). Incluso se ha probado en este caso que, si la familia $\mathcal{F}^{\mathrm{op}} \in \mathcal{C}_\mathbf{a}(\mathcal{F}_0)$ es óptima con respecto al potencial P_φ en $\mathcal{C}_\mathbf{a}(\mathcal{F}_0)$, entonces $\mathcal{F}^{\mathrm{op}}$ también es óptima en $\mathcal{C}_\mathbf{a}(\mathcal{F}_0)$ con respecto a cualquier potencial convexo.

1.2.2. Completaciones óptimas de marcos con normas predeterminadas: caso feasible

En esta sección vamos a considerar varios aspectos relacionados con la noción de feasibilidad introducida por Massey, Ruiz y Stojanoff en [59]. Los índices feasibles jugarán un rol clave en nuestro estudio de las completaciones de marcos que son minimizadores locales de los potenciales estrictamente convexos.

Definición 1.2.7. Sea $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\uparrow$ y fijemos $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. Consideremos la función $h_\lambda : [\lambda_1\,,\,\infty) \to [0\,,\,\infty)$ dada por
$$h_\lambda(x) = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} (x-\lambda_i)^+ \ , \qquad \text{para todo} \qquad x \in [\lambda_1\,,\,\infty) \ ,$$
donde $y^+ = \text{máx}\{y,\,0\}$ denota la parte positiva de $y \in \mathbb{R}$. Es fácil ver que h_λ es una función continua, estrictamente creciente, tal que $h_\lambda(\lambda_1) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} h_\lambda(x) = +\infty$.

2. Por lo tanto $h_\lambda^{-1} : [0\,,\,\infty) \to [\lambda_1\,,\,\infty)$ está bien definida y es biyectiva; lo cual implica que existe un único
$$c = c(t) > \lambda_1 \geq 0 \qquad \text{tal que} \qquad h_\lambda(c(t)) = t > 0 \ . \tag{1.17}$$

3. Sea $c = c(t) > \lambda_1 \geq 0$ como en Eq. (1.17). Definimos
$$\nu(\lambda\,,\,t) \overset{\text{def}}{=} \big(\,(c-\lambda_1)^+ + \lambda_1\,,\,\dots\,,\,(c-\lambda_d)^+ + \lambda_d\,\big) \in (\mathbb{R}^d_{>0})^\uparrow \ . \tag{1.18}$$

4. Ahora podemos considerar el vector
$$\mu(\lambda\,,\,t) \overset{\text{def}}{=} \big(\,(c-\lambda_1)^+\,,\,\dots\,,\,(c-\lambda_d)^+\,\big) = \nu(\lambda\,,\,t) - \lambda \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow \ . \tag{1.19}$$
Notemos que, como $\lambda \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\uparrow$, entonces $\mu(\lambda\,,\,t) \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$. $\triangle$

Observación 1.2.8. Sea $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\uparrow$. Supongamos que $t > 0$ y $c = c(t) > \lambda_1 \geq 0$ es como en Eq. (1.17). Por como ha sido construido el vector $\nu(\lambda\,,\,t)$, se tiene que
$$\operatorname{tr}\nu(\lambda\,,\,t) = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} (c-\lambda_i)^+ + \lambda_i = \operatorname{tr}\lambda + h_\lambda(c) = \operatorname{tr}\lambda + t \ .$$
Por otro lado, como $(c-a)^+ + a = \text{máx}\{c,\,a\}$ se puede ver que:

1. Para $c < \lambda_d$ existe un único $r \in \mathbb{I}_{d-1}$ tal que, si $\mathbb{1}_r = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^r$ entonces
$$\nu(\lambda\,,\,t) = (c\,\mathbb{1}_r\,,\,\lambda_{r+1}\,,\,\dots\,,\,\lambda_d) \in (\mathbb{R}^d_{>0})^\uparrow \qquad \text{con} \qquad \lambda_r \leq c < \lambda_{r+1} \ . \tag{1.20}$$
En este caso, $\operatorname{tr}\lambda + t = \operatorname{tr}\nu(\lambda\,,\,t) < d\,\lambda_d$ y por lo tanto $\lambda_d > \frac{\operatorname{tr}\lambda + t}{d}$.

2. De otro modo se tiene que $c \geq \lambda_d$ lo cual implica que $\nu(\lambda\,,\,t) = c\,\mathbb{1}_d \in (\mathbb{R}^d_{>0})^\uparrow$. En este caso
$$\operatorname{tr}\lambda + t = \operatorname{tr}\nu(\lambda\,,\,t) = d\,c \geq d\,\lambda_d \qquad \text{entonces} \qquad \lambda_d \leq \frac{\operatorname{tr}\lambda + t}{d} \ .$$

Con las observaciones previas es sencillo ver que, dado $\varepsilon > 0$, el vector $\rho = (e\,\mathbb{1}_s\,,\,\lambda_{s+1}\,,\,\dots\,,\,\lambda_d)$ ó $\rho = e\,\mathbb{1}_d$, es tal que
$$\rho \in (\mathbb{R}^d_{>0})^\uparrow \quad , \quad \rho \geq \lambda \qquad \text{y} \qquad \operatorname{tr}\rho = \operatorname{tr}\lambda + t \implies \rho = \nu(\lambda\,,\,t) \ . \qquad \triangle$$

Ahora sí estamos en condiciones de introducir la noción de par feasible. Más adelante vamos a expresar claramente cual es la relación entre esta noción y el problema de las completaciones.

En una primera lectura, el lector podrá evitar el caso en que la cantidad de vectores k es menor que la dimensión d del espacio. En general, el caso más útil es cuando la cantidad de vectores supera la dimensión. De todos modos, para complementar los resultados que se obtienen en ese caso, también hemos incluido en esta tesis el caso $k < d$.

Definición 1.2.9. Sean $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\uparrow$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$.

1. Para $r = \min\{k, d\}$, $\tilde{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_r}$ y $t = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} a_i > 0$, vamos a considerar el vector $\nu(\lambda\,,\,\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^d_{>0}$ dado por:
$$\nu(\lambda\,,\,\mathbf{a}) = \begin{cases} \nu(\lambda\,,\,t) & \text{si} \quad r = d \leq k \\ \big(\,\nu(\tilde{\lambda}\,,\,t)\,,\,\lambda_{r+1}\,,\,\ldots\,,\,\lambda_d\,\big) & \text{si} \quad r = k < d\,. \end{cases} \tag{1.21}$$
Observemos que en el segundo caso, el vector $\nu(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ podría no estar ordenado (si $c(t) > \lambda_{r+1}$).

2. Consideremos el vector $\mu(\lambda\,,\,\mathbf{a}) \overset{\text{def}}{=} \nu(\lambda\,,\,\mathbf{a}) - \lambda \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$. Inspeccionando en la Definición 1.2.7 y el ítem 1 de arriba, podemos ver que $\mu(\lambda\,,\,\mathbf{a}) = \mu(\lambda\,,\,\mathbf{a})^\downarrow$ y $\operatorname{tr}\,\mu(\lambda\,,\,\mathbf{a}) = \operatorname{tr}\,\mathbf{a} = t$.

3. Diremos que el par $(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ es *feasible* si $\mathbf{a} \prec \mu(\lambda\,,\,\mathbf{a})$; es decir, si
$$\sum_{i\in\mathbb{I}_j} a_i \leq \sum_{i\in\mathbb{I}_j} \mu_i(\lambda\,,\,\mathbf{a}) \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_{r-1}\,, \tag{1.22}$$
donde la equivalencia se sigue de las propiedades de $\mu(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ dadas en el ítem 2. Notar que en el caso de que $k < d$ se tiene que $\mu_{k+1}(\lambda\,,\,\mathbf{a}) = 0$. △

Cabe destacar que tanto el cálculo de los vectores $\nu(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ y $\mu(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ de la Definición 1.2.9, como la verificación de las desigualdades en la Eq. (1.22), pueden ser implementadas por un algoritmo en una finita cantidad de pasos.

El siguiente resultado ha sido tomado de [61] (ver también [59]) y describe, para el caso feasible, la estructura espectral de los minimizadores globales en $\mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0)$ de los potenciales convexos P_φ, para una función $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$. Como ya hemos mencionado anteriormente, esta estructura no depende de la función φ considerada.

Teorema 1.2.10. Sean $\mathcal{F}_0 = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_{n_0}} \in (\mathbb{C}^d)^{n_0}$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$. Consideremos $\lambda = \lambda(S_{\mathcal{F}_0})^\uparrow$ y supongamos que el par $(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ es feasible. Sea $\nu(\lambda\,,\,\mathbf{a}) = (\nu_i(\lambda\,,\,\mathbf{a}))_{i\in\mathbb{I}_d} \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$ como en la Definición 1.2.9. Luego, para toda función $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ se tiene que
$$\min\{\mathrm{P}_\varphi(\mathcal{F}):\ \mathcal{F} = (\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0)\} = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \varphi(\nu_i(\lambda\,,\,\mathbf{a}))\,.$$
Más aun, dado $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0)$ se tiene que
$$\mathrm{P}_\varphi(\mathcal{F}) = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \varphi(\nu_i(\lambda\,,\,\mathbf{a})) \iff \lambda(S_{\mathcal{F}}) = \nu(\lambda\,,\,\mathbf{a})^\downarrow\,.$$
□

1.3. Algunos hechos de la geometría diferencial

En esta sección vamos a mencionar algunos hechos de la geometría diferencial que serán necesarios para el Capítulo 2. Para un desarrollo más detallado de los resultados expuestos en esta sección se puede consultar, por ejemplo, el libro de Lee [50].

Dada una variedad diferenciable $\mathcal{N}$, denotaremos por $\mathcal{T}_p\mathcal{N}$ al tangente de $\mathcal{N}$ en el punto $p \in \mathcal{N}$. Si $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ son variedades diferenciables y $F : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ es una aplicación diferenciable; decimos que F es una *submersión en el punto* $p \in \mathcal{N}$ si su diferencial
$$D_pF : \mathcal{T}_p\mathcal{N} \to \mathcal{T}_{F(p)}\,\mathcal{M}\,,$$

es suryectivo. En este caso se dice que p es un *punto regular* de F. Un punto $q \in \mathcal{M}$ es un *valor regular* de F si todos los puntos de la pre-imagen $F^{-1}(q)$ son puntos regulares de F.

Diremos que la función diferenciable F es una *submersión*, si es una submersión para cada punto $p \in \mathcal{N}$. De manera equivalente, F es una submersión si $\text{rk}(D_pF) = \dim(\mathcal{M})$ para todo $p \in \mathcal{N}$, donde $\text{rk}(D_pF)$ denota la dimensión del rango del diferencial de F en el punto p; es decir, F tiene rk constante. Esta caracterización permite obtener el siguiente teorema, el cual es un resultado clásico de la teoría de variedades diferenciables que será muy útil para esta tesis.

Teorema 1.3.1. Sean $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ variedades diferenciables y $F : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ una submersión en el punto $p_0 \in \mathcal{N}$. Luego, F es locamente abierta alrededor de p_0; i.e, dado $\varepsilon > 0$, para todo entorno abierto de $p_0 \in \mathcal{N}$ dado por

$$\mathcal{N}_\varepsilon := \{p \in \mathcal{M} : \, d(p, p_0) < \varepsilon\} \ ,$$

el conjunto

$$\mathcal{M}_\varepsilon := \{F(p) : \, p \in \mathcal{N}_\varepsilon\} \ ,$$

contiene un entorno abierto de $F(p_0)$ en $\mathcal{M}$.

□

En el Capítulo 2 vamos a considerar el grupo de matrices unitarias $\mathcal{U}(d)$ con su estructura (de Lie) natural de variedad diferencial. Esto nos permite tomar la variedad producto $\mathcal{U}(d) \times \mathcal{U}(d)$ dotada con la métrica

$$d((U_1, V_1), (U_2, V_2)) = \text{máx}\{\|I - U_1^* U_2\|, \, \|I - V_1^* V_2\|\} \quad \text{para} \quad (U_1, V_1), (U_2, V_2) \in \mathcal{U}(d) \times \mathcal{U}(d) \, .$$

Es un hecho conocido que la función exponencial $\mathcal{H}(d) \ni i \cdot X \mapsto \exp(X)$ nos permite identificar al plano tangente de $\mathcal{U}(d)$ en la identidad, $\mathcal{T}_I\mathcal{U}(d)$ con el conjunto de matrices anti-hermitianas $i \cdot \mathcal{H}(d)$. Pues, $\gamma(t) = \exp(tX) \in \mathcal{U}(d)$ es tal que $\gamma'(0) = X \in i \cdot \mathcal{H}(d)$. Más aun, dada $A \in \mathcal{H}(d)$, si consideramos la función suave (diferenciable) $\mathcal{C}_A : \mathcal{U}(d) \to \mathcal{O}_A$, dada por $\mathcal{C}_A(U) = U^*AU$, donde $\mathcal{O}_A = \{V^*AV : V \in \mathcal{U}(d)\}$, entonces su diferencial en la identidad verifica que

$$D_I\mathcal{C}_A(X) = [X, A] \in \mathcal{H}(d) \quad \text{para} \quad X \in i \cdot \mathcal{H}(d) \, ,$$

donde $[X, A] = XA - AX$.

Capítulo 2

Teoremas de Lidskii locales

El Teorema (aditivo) de Lidskii clásico (ver Teorema 1.1.6) debe su nombre a Victor Lidskii, quién lo mencionó por primera vez en [52] sin dar detalles de la prueba. La primera demostración que apareció fue dada por Berezin y Gel'fand en [6], en un trabajo relacionado con la teoría de grupos de Lie. Esta demostración no es para nada sencilla y parece ser que, por sugerencia de estos autores, Lidskii dió (lo que según él era) una prueba elemental con herramientas propias de la teoría de análisis matricial. Esta prueba "elemental" generó polémicas y dió lugar a que algunos matemáticos buscaran demostraciones alternativas; esto llevó a muchos de ellos a desarrollar nuevas técnicas dentro de la teoría de análisis matricial que han sido muy útiles desde entonces; sin ir más lejos, Wielandt probó su famoso principio de min-max, buscando una prueba alternativa de este Teorema de Lidskii.

Diferentes versiones y demostraciones han aparecido desde entonces (en el libro de Bhatia [7] figuran cuatro), pero sin duda una demostración particularmente simple es la que dieron C.K. Li y R. Mathias en [20], donde la herramienta principal es el Teorema de Weyl, el cual había sido considerado por muchos años, un resultado más débil.

Sin dudas que, desde su aparición, las desigualdades de Lidskii han sido clásicas protagonistas dentro de la teoría de análisis matricial, ya que forman parte de una serie de herramientas que lidian con algunos de los problemas más naturales dentro del área, tales como los de aproximación de matrices (problemas de cercanía de matrices) y desigualdades que involucran tanto a los autovalores de una matriz, como a sus valores singulares. Como hemos visto en la Sección 1.1.1, estas desigualdades aparecen expresadas en términos de la mayorización, la cual es una relación de pre-orden entre vectores (reales) que está íntimamente relacionada tanto con las desigualdades traciales que involucran funciones convexas, como con las desigualdades que involucran normas unitariamente invariantes.

En este capítulo, dado un vector $\mu \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$ vamos a considerar la órbita unitaria dada por:

$$\mathcal{O}_\mu = \{G \in \mathcal{H}(d) : \lambda(G) = \mu\} = \{U^* D_\mu U : \ U \in \mathcal{U}(d)\}\,, \tag{2.1}$$

donde $D_\mu \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ denota la matriz diagonal con diagonal principal dada por el vector μ. A esta órbita unitaria la vamos a considerar dotada con la métrica usual inducida por la norma de operadores; de este modo tenemos que $\mathcal{O}_\mu$ es un espacio métrico. Si tomamos $S \in \mathcal{H}(d)$ y $G \in \mathcal{O}_\mu$, el Teorema de Lidskii (ver ítem 1 del Teorema 1.1.6) establece que

$$\lambda(S)^\uparrow + \mu \prec \lambda(S+G)\,.$$

Más aun, por la caracterización del caso de igualdad dada por Massey, Ruiz y Stojanoff en [60] (ver ítem 2 del Teorema 1.1.6), se tiene que; $(\lambda(S)^\uparrow + \mu)^\downarrow = \lambda(S+G)$ si, y sólo si, existe una bon $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i^\uparrow(S)\ v_i \otimes v_i \quad \text{ y } \quad G = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \mu_i\ v_i \otimes v_i\ . \tag{2.2}$$

Notemos que entonces, utilizando una bon de autovectores de S, podemos construir una matriz $G_0 \in \mathcal{O}_\mu$ de manera tal que sea un mínimo para la mayorización, esto es

$$(\lambda(S)^\uparrow + \mu)^\downarrow = (\lambda(S)^\uparrow + \lambda(G_0))^\downarrow = \lambda(S+G_0) \prec \lambda(S+G) \quad \text{para toda matriz} \quad G \in \mathcal{O}_\mu\,. \tag{2.3}$$

En el caso de que $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mu \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$, las matrices $G \in \mathcal{O}_\mu$ son positivas. Luego, dada una función estrictamente convexa $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, podemos definir el potencial convexo (asociado a φ) como la función $\Phi_\varphi = \Phi_{(\varphi\,,\,S\,,\,\mu)} : \mathcal{O}_\mu \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por:

$$\Phi_\varphi(G) = \mathrm{tr}(\varphi(S+G)) = \sum_{j\in\mathbb{I}_d} \varphi(\lambda_j(S+G)) \quad \text{para} \quad G \in \mathcal{O}_\mu\,. \tag{2.4}$$

Notemos que la matriz $G_0 \in \mathcal{O}_\mu(\subset \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+)$ (construida con una bon de autovectores de $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$) que verifica la Eq. (2.3), es un minimizador global de Φ_φ en $\mathcal{O}_\mu$ pues, por el ítem 1 del Teorema 1.1.10, para toda matriz $G \in \mathcal{O}_\mu$ se tiene que

$$\lambda(S+G_0) = (\lambda^\uparrow(S) + \mu)^\downarrow \prec \lambda(S+G) \Rightarrow \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \varphi(\lambda_i^\uparrow(S) + \mu_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \varphi(\lambda_i(S+G))\,,$$

por ser φ una función estrictamente convexa.

Recíprocamente, si $G \in \mathcal{O}_\mu$ es un minimizador global de Φ_φ en $\mathcal{O}_\mu$ entonces

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_d} \varphi(\lambda_i^\uparrow(S) + \mu_i)) = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \varphi(\lambda_i(S+G_0)) = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \varphi(\lambda_i(S+G))\,. \tag{2.5}$$

Recordemos que, por el Teorema de Lidskii 1.1.6, sabemos que $\lambda^\uparrow(S) + \mu \prec \lambda(S+G)$ y como φ es una función estrictamente convexa, la Eq. (2.5) junto con el ítem 3 del Teorema 1.1.10 implican que

$$\lambda(S+G) = (\lambda^\uparrow(S) + \mu)^\downarrow = \lambda^\uparrow(S) + \lambda(G)\,.$$

De este modo, S y G pueden diagonalizarse simultáneamente en una bon de $\mathbb{C}^d$, con los espectros ordenados como en la Eq. (2.2); en particular se tiene que S y G conmutan. Es decir, si G es un minimizador global de Φ_φ en $\mathcal{O}_\mu$ entonces se puede obtener (a partir de S) de la misma forma que G_0. Cabe destacar, que el minimizador G_0 no depende de la función convexa; es decir que, G_0 es un minimizador global para todos los potenciales convexos.

En el caso más general en que $S \in \mathcal{H}(d)$, $\mu \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$ y $G \in \mathcal{O}_\mu$; por la Observación 1.1.7 se tiene que

$$\lambda(S) - \mu \prec \lambda(S-G)\,.$$

Más aun, por la caracterización del caso de igualdad; $(\lambda(S)-\mu)^\downarrow = \lambda(S-G)$ si, y sólo si, existe una bon $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i(S)\ v_i \otimes v_i \quad \text{ y } \quad G = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \mu_i\ v_i \otimes v_i\ . \tag{2.6}$$

De manera análoga al caso anterior, utilizando una bon de autovectores de S, podemos construir una matriz $G_0 \in \mathcal{O}_\mu$ que sea un mínimo para la mayorización, esto es

$$(\lambda(S) - \mu)^\downarrow = (\lambda(S) - \lambda(G_0))^\downarrow = \lambda(S-G_0) \prec \lambda(S-G) \quad \text{para toda matriz} \quad G \in \mathcal{O}_\mu\,. \tag{2.7}$$

Luego, por la Observación 1.1.4, se tiene que

$$s(S - G_0) \prec_w s(S - G) \quad \text{para toda matriz} \quad G \in \mathcal{O}_\mu\,. \tag{2.8}$$

Si ahora tomamos una nui estrictamente convexa N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (fija), por el ítem 1 del Teorema 1.1.12, resulta que

$$N(S - G_0) \le N(S - G)\,.$$

De este modo, dada una nui N estrictamente convexa, tiene sentido definir la función:

$$\Phi_N = \Phi_{(N,\,S,\,\mu)} : \mathcal{O}_\mu \to \mathbb{R}_{\ge 0} \quad \text{dada por} \quad \Phi_N(G) = N(S - G) \tag{2.9}$$

y preguntarse como son sus minimizadores. Notemos que los hechos mencionados previamente afirman que para toda matriz $G \in \mathcal{O}_\mu$,

$$\Phi_N(G_0) = N(S - G_0) \le N(S - G) = \Phi_N(G).$$

Por lo tanto, G_0 es un minimizador global de Φ_N en $\mathcal{O}_\mu$.

Recíprocamente, si $G \in \mathcal{O}_\mu$ es un minimizador global de Φ_N en $\mathcal{O}_\mu$, los comentarios previos junto con los ítems 2 y 3 de la Proposición 1.1.3 muestran que

$$\lambda(S - G_0) \prec \lambda(S - G) \quad \text{y} \quad N(S - G_0) = N(S - G) \implies \lambda(S) - \mu = \lambda(S - G_0) = \lambda(S - G)\,, \tag{2.10}$$

donde estamos utilizando el hecho de que N es una nui estrictamente convexa, la relación de submayorización de la Eq. (2.8) y el Teorema 1.1.12. Por otro lado, la Eq. (2.10) junto con el Teorema 1.1.6 implican que existe una bon $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i\ v_i \otimes v_i \quad \text{y} \quad G = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \mu_i\ v_i \otimes v_i\,,$$

donde $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} = \lambda(S) \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$. Esto significa que si G es un minimizador global de Φ_N, entonces se obtiene (a partir de S) de la misma manera que G_0, tal como ocurre para el caso de los potenciales convexos. Incluso más, en este caso también se tiene que el minimizador global de Φ_N no depende de la nui N elegida, es decir que es el mismo para toda nui estrictamente convexa.

Estos hechos nos permiten concluir entonces, que la desigualdad de Lidskii caracteriza a los minimizadores globales tanto de la función $\Phi_{(\varphi\,,\,S\,,\,\mu)}$, como de la función $\Phi_{(N\,,\,S\,,\,\mu)}$. De este modo resulta natural preguntarse como será la estructura de los minimizadores locales de ambas funciones y si existe alguna versión de los Teoremas de Lidskii que permita caracterizarlos. Responder ese interrogante será nuestro objetivo en este capítulo. Incluso más, en la Sección 2.1 probaremos que en ambos casos, los minimizadores locales son en realidad minimizadores globales. En la Sección 2.2, como aplicación de los Teoremas de Lidskii locales que probaremos en la Sección 2.1, daremos una caracterización de las matrices que verifican la igualdad en la desigualdad de Lidskii para valores singulares. Esta caracterización no será utilizada en el resto de este trabajo, sin embargo, complementa los resultados obtenidos y es un resultado original de esta tesis.

2.1. Minimizadores locales de la desigualdad de Lidskii

Como hemos mencionado en la introducción de este capítulo, las desigualdades de Lidskii pueden ser interpretadas como una descripción explícita de los minimizadores globales de las funciones $\Phi_{(\varphi\,,\,S\,,\,\mu)}$ y $\Phi_{(N\,,\,S\,,\,\mu)}$ definidas en las Eqs. (2.4) y (2.9), respectivamente. En esta sección vamos a probar versiones locales de los Teoremas de Lidskii que nos permitirán caracterizar a los minimizadores locales de tales funciones para luego probar que, en ambos casos, los minimizadores locales son globales.

Comencemos recordando algunas definiciones que hemos dado en la Sección 1.3.

Definición 2.1.1. Sean $S, G_0 \in \mathcal{H}(d)$. De aquí en más vamos a considerar:

1. La variedad producto $\mathcal{U}(d) \times \mathcal{U}(d)$, dotada con la métrica
$$d((U_1, V_1), (U_2, V_2)) = \text{máx}\{\|I - U_1^* U_2\|,\, \|I - V_1^* V_2\|\}\,.$$

2. El conjunto de matrices autoadjuntas de traza $\tau = \operatorname{tr}(S) + \operatorname{tr}(G_0)$
$$\mathcal{H}(d)_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{M \in \mathcal{H}(d) :\ \operatorname{tr}(M) = \tau\}\,.$$

3. La función $\Gamma = \Gamma_{(S,G_0)} : \mathcal{U}(d) \times \mathcal{U}(d) \to \mathcal{H}(d)_\tau$ dada por
$$\Gamma(U, V) = U^* S\, U + V^* G_0\, V \quad \text{para} \quad U,\, V \in \mathcal{U}(d)\,.$$

$\triangle$

Recordemos que dado un conjunto de matrices $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ se define el conmutante de $\mathcal{S}$, como la subálgebra unital de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ dada por
$$\mathcal{S}' = \{\ C \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) :\ [C, D] = 0 \text{ para todo } \ D \in \mathcal{S}\ \} \subset \mathcal{M}_d(\mathbb{C})\,,$$
donde $[C, D] = CD - DC$ denota el conmutador de C y D. En caso de que $\mathcal{S} = \mathcal{S}^* = \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) :\ A^* \in \mathcal{S}\}$, se tiene que $\mathcal{S}$ es una $*$-subálgebra unital de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

El siguiente resultado es estándar; para probarlo vamos a utilizar las definiciones y hechos de la geometría diferencial que hemos mencionado en la Sección 1.3.

Lema 2.1.2. Consideremos la Notación de la Definición 2.1.1. Luego,
$$\Gamma \quad \text{es una submersión en} \quad (I, I) \quad \iff \quad \{S,\, G_0\}' = \mathbb{C} \cdot I\ .$$

Demostración. Recordemos de la Sección 1.3, que la función (exponencial) $i \cdot \mathcal{H}(d) \ni X \mapsto \exp(X)$ nos permite identificar al plano tangente $\mathcal{T}_I\mathcal{U}(d)$ con $i \cdot \mathcal{H}(d)$. Como estamos considerando la estructura producto sobre $\mathcal{U}(d) \times \mathcal{U}(d)$, podemos concluir que el diferencial de Γ satisface que
$$D_{(I,I)}\Gamma(X, 0) = [S, X] \quad \text{y} \quad D_{(I,I)}\Gamma(0, X) = [G_0, X] \quad \text{para} \quad X \in i \cdot \mathcal{H}(d)\,.$$

Notar que Γ es una función suave y su imagen está contenida en $\mathcal{H}(d)_\tau$, entonces el espacio tangente de la imagen está contenido en $\mathcal{T}\mathcal{H}(d)_\tau = \mathcal{H}(d)_0$. Luego, Γ no es una submersión en (I, I) si, y sólo si, $D_{(I,I)}\Gamma$ no es suryectivo; lo que es equivalente a decir que existe $0 \neq Y \in \mathcal{T}\mathcal{H}(d)_\tau = \mathcal{H}(d)_0$ (i.e. $Y \in \mathcal{H}(d)$

con tr $Y = 0$) tal que Y es ortogonal (respecto del producto interno dado por la traza) a la imagen del diferencial de Γ en (I, I); es decir,

$$\operatorname{tr}(Y\,[S, Z]) = \operatorname{tr}(Y\,[G_0, Z]) = 0 \quad \text{para toda matriz} \quad Z \in i \cdot \mathcal{H}(d)\ . \tag{2.11}$$

Utilizando que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ para $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, se tiene que

$$\operatorname{tr}(Y\,[S, Z]) = \operatorname{tr}([Y, S]\,Z) = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{tr}(Y\,[G_0, Z]) = \operatorname{tr}([Y, G_0]\,Z) = 0\,,\ \forall Z \in i \cdot \mathcal{H}(d)\,.$$

Luego,

$$[Y, S] = 0 = [Y, G_0] \in i \cdot \mathcal{H}(d)\ .$$

Más aun, como $Y \neq 0$ y tr $Y = 0$, entonces Y tiene alguna proyección espectral no trivial P tal que

$$[P, S] = [P, G_0] = 0\,.$$

Por lo tanto $\{S,\, G_0\}' \neq \mathbb{C} \cdot I$.

Recíprocamente, si suponemos que $\{S,\, G_0\}' \neq \mathbb{C} \cdot I$, como $\{S,\, G_0\} = \{S,\, G_0\}^*$ entonces el conmutante $\{S,\, G_0\}'$ es una $*$-subálgebra unital de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Luego, existe una proyección no trivial P tal que

$$[P, S] = [P, G_0] = 0\,.$$

Esto nos permite construir

$$Y = \frac{P}{\operatorname{tr}\, P} - \frac{I - P}{\operatorname{tr}\,(I - P)}\,,$$

tal que tr $Y = 0$. Luego, $0 \neq Y \in \mathcal{TH}(d)_\tau$ y satisface la Eq. (2.11), entonces Y es ortogonal al rango de $D_{(I,I)}\Gamma$. □

Proposición 2.1.3. Sean S y $G_0 \in \mathcal{H}(d)$ tales que $[S, G_0] \neq 0$. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $W \in \mathcal{U}(d)$ tal que $\|I - W\| < \varepsilon$ y

$$\lambda(S + W^* G_0 W) \prec \lambda(S + G_0) \quad \text{pero} \quad \lambda(S + W^* G_0 W) \neq \lambda(S + G_0)\,.$$

Demostración. Supongamos que $[S, G_0] \neq 0$. Luego, existe una proyección minimal P de la *-subálgebra unital $\mathcal{C} = \{S,\, G_0\}' \subseteq \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ tal que

$$[P\,S, P\,G_0] \neq 0\,.$$

En efecto, $I \in \mathcal{C}$ es una proyección que verifica que $[I\,S, I\,G_0] \neq 0$. Si I no es una proyección minimal en $\mathcal{C}$ entonces existen proyecciones no nulas $P_1,\, P_2 \in \mathcal{C}$ tales que $I = P_1 + P_2$. Luego,

$$[P_i S, P_i G_0] \neq 0 \quad \text{para} \quad i = 1 \quad \text{ó} \quad i = 2\,.$$

En caso de que la proyección P_i no sea minimal (para algún $i = 1, 2$) en $\mathcal{C}$, podemos aplicar el mismo procedimiento a dicha proyección y como estamos trabajando con álgebras de dimensión finita, el procedimiento anterior encuentra una proyección minimal $P \in \mathcal{C}$ como la que necesitamos. Aplicando un cambio de base (ortonormal) conveniente, podemos asumir que $R(P) = \operatorname{gen}\{e_i : i \in \mathbb{I}_r\}$, donde $r = \operatorname{rk}(P) > 1$. Como P reduce tanto a S como a G_0, podemos considerar

$$S_1 = S|_{R(P)} \in \mathcal{H}(r) \quad \text{y} \quad G_1 = G_0|_{R(P)} \in \mathcal{H}(r)\,.$$

La minimalidad de P nos permite concluir entonces que $\{S_1, G_1\}' = \mathbb{C}I_r \subset \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. De este modo, dado que S_1 y G_1 no conmutan, utilizando el caso de igualdad en la desigualdad de Lidskii (ver Teorema 1.1.6) se tiene que

$$b := (\lambda(S_1)^{\uparrow} + \lambda(G_1))^{\downarrow} \prec a := \lambda(S_1 + G_1) \quad \text{y} \quad a \neq b\,.$$

Si $\sigma = \operatorname{tr}(S_1 + G_1)$ entonces, por el Lema 2.1.2 se tiene que la función

$$\mathcal{U}(r) \times \mathcal{U}(r) \ni (U, V) \mapsto U^* S_1\, U + V^* G_1\, V \in \mathcal{H}(r)_\sigma$$

es una submersión en (I_r, I_r). En particular es localmente abierta en un entorno de (I_r, I_r) (Teorema 1.3.1) y por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, para todo entorno abierto

$$\mathcal{N}_\varepsilon = \{(U, V) \in \mathcal{U}(r) \times \mathcal{U}(r) : \ d((U, V), (I_r, I_r)) < \varepsilon\}\ ,$$

el conjunto

$$\mathcal{M}_\varepsilon := \{U^* S_1\, U + V^* G_1\, V : \ (U, V) \in \mathcal{N}_\varepsilon\}$$

contiene un entorno abierto de $S_1 + G_1$ en $\mathcal{H}(r)_\sigma$.

Tomemos ahora el segmento que une a con b, es decir; la función $\rho : [0, 1] \to (\mathbb{R}^r)^{\downarrow}$ dada por

$$\rho(t) = (1 - t)\, a + t\, b \quad \text{para} \quad t \in [0, 1]\,.$$

Luego, $\rho(t) \prec a$ y $\rho(t) \neq a$ para $t \in (0, 1]$ pues, como $a = a^{\downarrow}$ y $b = b^{\downarrow}$ entonces $\rho(t) = \rho(t)^{\downarrow}$ y la mayorización se verifica de modo trivial. Si D_a denota la matriz diagonal con diagonal principal dada por a y consideramos $Z \in \mathcal{U}(r)$ tal que

$$S_1 + G_1 = Z^* D_a\, Z\,,$$

la curva continua $T : [0, 1] \to \mathcal{H}(r)_\sigma$ dada por $T(t) = Z^* D_{\rho(t)}\, Z$ para $t \in [0, 1]$, satisface que

$$T(0) = S_1 + G_1\ , \quad \lambda(T(t)) \prec a \quad \text{y} \quad \lambda(T(t)) \neq a \quad \text{para} \quad t \in (0, 1]\,.$$

Por lo tanto, existe $t_0 \in (0, 1]$ tal que $T(t) \in \mathcal{M}_\varepsilon$ para $t \in (0, t_0]$ entonces, en particular, existe un par $(U, V) \in \mathcal{N}_\varepsilon$ tal que $T(t_0) = U^* S_1\, U + V^* G_1\, V$ y

$$\lambda(T(t_0)) \prec \lambda(T(0)) \quad \text{pero} \quad \lambda(T(t_0)) \neq \lambda(T(0))\,. \tag{2.12}$$

Si $\tau = \operatorname{tr}(S + G_0)$, consideremos la función continua $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{H}_\tau(d)$, dada por

$$\gamma(t) = T(t) \oplus (S + G_0)|_{R(P)^\perp}\,.$$

Notemos que $\gamma(0) = S + G_0$. Luego, de la Eq. (2.12) y el ítem 4 la Proposición 1.1.3, se tiene que

$$\lambda(\gamma(t_0)) \prec \lambda(\gamma(0)) = \lambda(S + G_0) \quad \text{pero} \quad \lambda(\gamma(t_0)) \neq \lambda(\gamma(0))\,.$$

Por lo tanto, existen $\bar{U} = U \oplus P^\perp$ y $\bar{V} = V \oplus P^\perp \in \mathcal{U}(d)$ tales que,

$$d((I, I), (\bar{U}, \bar{V})) = d((I_r, I_r), (U, V)) = \text{máx}\{\|I_r - U\|, \|I_r - V\|\} < \varepsilon\,, \tag{2.13}$$

y

$$\lambda(\bar{U}^* S \bar{U} + \bar{V}^* G_0 \bar{V}) \prec \lambda(S + G_0) \quad \text{pero} \quad \lambda(\bar{U}^* S \bar{U} + \bar{V}^* G_0 \bar{V}) \neq \lambda(S + G_0)\,. \tag{2.14}$$

Si tomamos $W = \bar{V}\bar{U}^*$ entonces, por la Eq. (2.13),

$$\|I - W\| = \left\|\bar{V}(\bar{V}^* - \bar{U}^*)\right\| \leq \left\|\bar{V}^* - I\right\| + \left\|I - \bar{U}^*\right\| \leq 2\varepsilon$$

y, por la Eq. (2.14),

$$\lambda(S + W^* G_0 W) \prec \lambda(S + G_0) \quad \text{y} \quad \lambda(S + W^* G_0 W) \neq \lambda(S + G_0)\,.$$

Notar que $\|W^* G_0 W - G_0\| \leq 4\varepsilon\, \|G_0\|$. $\square$

Teorema 2.1.4. Consideremos $S \in \mathcal{H}(d)$ y $\mu \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$ fijos. Sea $G_0 \in \mathcal{O}_\mu$ tal que

$$\lambda(S+G_0) \neq (\lambda(S)^\uparrow + \lambda(G_0))^\downarrow . \tag{2.15}$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $G \in \mathcal{O}_\mu$ tal que $\|G - G_0\| < \varepsilon$ y

$$\lambda(S+G) \prec \lambda(S+G_0) \quad \text{pero} \quad \lambda(S+G) \neq \lambda(S+G_0)\,,$$

es decir, la mayorización es estricta.

Demostración. Si suponemos que $\lambda(S+G_0) \neq (\lambda(S)^\uparrow + \lambda(G_0))^\downarrow$ entonces, por el ítem 2 del Teorema 1.1.6, pueden suceder dos cosas: o bien S y G_0 no conmutan, o bien conmutan pero no pueden diagonalizarse simultáneamente con los espectros ordenados como en el ítem 2 del Teorema 1.1.6.

En el caso de que S y G_0 no conmuten, por la Proposición 2.1.3, se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe $W \in \mathcal{U}(d)$ tal que

$$\|I - W\| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \lambda(S + W^* G_0 W) \prec \lambda(S+G_0) \quad \text{pero} \quad \lambda(S + W^* G_0 W) \neq \lambda(S+G_0)\,.$$

Si tomamos $G = W^* G_0 W$ entonces $G \in \mathcal{O}_\mu$ y

$$\|G - G_0\| \leq \|W^* G_0 (W - I)\| + \|(W^* - I) G_0\| \leq 2\,\|G_0\|\,\varepsilon\,.$$

Supongamos ahora que S y G_0 conmutan. Luego, existe una bon $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i \ v_i \otimes v_i \quad \text{y} \quad G_0 = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \nu_i \ v_i \otimes v_i \ \ \text{con} \ \ \lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\uparrow\ ,$$

para algún $\nu = (\nu_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \in \mathbb{R}^d$. Por hipótesis, existe $j \in \mathbb{I}_d$ tal que $\nu_j < \nu_{j+1}$ y $\lambda_j < \lambda_{j+1}$; de no ser así $\lambda_j = \lambda_{j+1}$ y entonces se puede reordenar la bon $\mathcal{B}$ y obtener una bon $\mathcal{B}' = \{v'_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ tal que

$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i \ v'_i \otimes v'_i \quad \text{y} \quad G_0 = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \mu_i \ v'_i \otimes v'_i \ \ \text{con} \ \ \lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\uparrow\,,$$

donde $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{I}_d} = \nu^\downarrow \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$.

Supongamos entonces que $\lambda_j < \lambda_{j+1}$ y consideremos la curva continua $U(\cdot) : [0,\pi/2) \to \mathcal{U}(d)$ dada por:

$$U(t) = \sum_{i\in\mathbb{I}_d\setminus\{j,j+1\}} v_i \otimes v_i + \cos(t)\ (v_j \otimes v_j + v_{j+1} \otimes v_{j+1}) + \sin(t)\ (v_j \otimes v_{j+1} - v_{j+1} \otimes v_j)\ ,\quad t \in [0,\pi/2)\,.$$

Notemos que $U(0) = I_d$. Definamos entonces la curva continua $G(\cdot) : [0,\pi/2) \to \mathcal{O}_\mu$, como la función

$$G(t) = U(t)\, G_0\, U(t)^* \in \mathcal{O}_\mu \quad \text{para} \quad t \in [0,\pi/2)\,.$$

Luego $G(0) = G_0$ y

$$S + G(t) = \sum_{i\in\mathbb{I}_d\setminus\{j,j+1\}} (\lambda_i + \nu_i)\ v_i \otimes v_i + \sum_{r,s=1}^{2} \gamma_{r,s}(t)\ v_{j+r} \otimes v_{j+s}\,, \tag{2.16}$$

donde $M(t) = (\gamma_{r,s})_{r,s=1}^2$ está determinada por:

$$M(t) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \lambda_{j+1} \end{pmatrix} + V(t) \begin{pmatrix} \nu_j & 0 \\ 0 & \nu_{j+1} \end{pmatrix} V(t)^* \quad \text{y} \quad V(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \ , \quad t \in [0, \pi/2)\,.$$

Consideremos

$$R(t) = V^*(t) \begin{pmatrix} \lambda_j - \lambda_{j+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V(t) + \begin{pmatrix} \nu_j & 0 \\ 0 & \nu_{j+1} \end{pmatrix} \implies M(t) = V(t)\, R(t)\, V^*(t) + \lambda_{j+1}\, I_2\,. \tag{2.17}$$

Lo que podemos afirmar es que $\lambda(R(t)) \prec \lambda(R(0))$ y $\lambda(R(t)) \neq \lambda(R(0))$ para $t \in (0, \pi/2)$ (i.e., la relación de mayorización es estricta). Esto se debe a que, como $R(t)$ es una curva en $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})^+$ tal que $\operatorname{tr}(R(t))$ es constante, por la Proposición 1.1.11, es suficiente con probar que la función $[0, \pi/2) \ni t \mapsto \operatorname{tr}(R(t)^2)$ es estrictamente decreciente en $[0, \pi/2)$, ya que $\varphi(x) = x^2$ es una función estrictamente convexa y

$$\operatorname{tr}(R(t)^2) = \operatorname{tr}(\varphi(\lambda(R(t)))) \quad \text{con} \quad \lambda(R(t)) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Por lo tanto o bien $\lambda(R(t)) \prec \lambda(R(0))$, o bien $\lambda(R(0)) \prec \lambda(R(t))$ para $t \in (0, \pi/2)$.

En efecto, como $\lambda_j - \lambda_{j+1} > 0$, se tiene que

$$V^*(t) \begin{pmatrix} \lambda_j - \lambda_{j+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V(t) = g(t) \otimes g(t) \quad \text{donde} \quad g(t) = (\lambda_j - \lambda_{j+1})^{1/2} (\cos(t), \sin(t)) \ , \quad t \in [0, \pi/2)\,.$$

Si $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ es la matriz diagonal con diagonal principal $(\nu_j,\, \nu_{j+1})$ entonces $R(t) = g(t) \otimes g(t) + D$. Luego,

$$\operatorname{tr}(R(t)^2) = \operatorname{tr}((g(t) \otimes g(t))^2) + \operatorname{tr}(D^2) + 2 \operatorname{tr}(g(t) \otimes g(t)\ D) = c + \langle D\, g(t),\, g(t)\rangle$$

donde $c = \|g(t)\|^4 + \nu_j^2 + \nu_{j+1}^2 = (\lambda_j - \lambda_{j+1})^2 + \nu_j^2 + \nu_{j+1}^2 \in \mathbb{R}$ es una constante y

$$\langle D\, g(t),\, g(t)\rangle = (\lambda_j - \lambda_{j+1})\ (\cos^2(t)\, \nu_j + \sin^2(t)\, \nu_{j+1}),$$

es estrictamente decreciente en $[0, \pi/2)$. En efecto, si llamamos $h(t) = (\lambda_j - \lambda_{j+1})\ (\cos^2(t)\, \nu_j + \sin^2(t)\, \nu_{j+1})$ para $t \in [0, \pi/2)$, se tiene que

$$h'(t) = (\lambda_j - \lambda_{j+1})(\nu_{j+1} - \nu_j)\, \sin(2\,t) < 0 \quad \text{para} \quad t \in (0, \pi/2)\,,$$

porque la función $\sin(\cdot)$ es positiva en el primer cuadrante, $\lambda_j - \lambda_{j+1} < 0$ y además estamos suponiendo que $\nu_j < \nu_{j+1}$. Luego, $\lambda(R(t)) \prec \lambda(R(0))$ y $\lambda(R(t)) \neq \lambda(R(0))$ para $t \in (0, \pi/2)$. Por lo tanto, por la Eq. (2.17), podemos ver que

$$\lambda(M(t)) = \lambda(R(t)) + \lambda_{j+1}\, \mathbb{1}_2 \implies \lambda(M(t)) \prec \lambda(M(0)) \ , \ \lambda(M(t)) \neq \lambda(M(0)) \ , \quad t \in (0, \pi/2)\,.$$

Esto implica que $G(\cdot)$ es una función continua en $(0, \pi/2)$, tal que

$$\lambda(S + G(t)) \prec \lambda(S + G_0) \quad \text{y} \quad \lambda(S + G(t)) \neq \lambda(S + G_0) \ , \quad \text{para} \quad t \in (0, \pi/2)\,.$$

Como $G(\cdot)$ es continua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $t \in (0, \delta)$ se tiene que $\|G(t) - G\| < \varepsilon$ y

$$\lambda(S + G(t)) \prec \lambda(S + G_0) \quad \text{pero} \quad \lambda(S + G(t)) \neq \lambda(S + G_0)\,.$$

□

Teorema 2.1.5. Consideremos $S \in \mathcal{H}(d)$ y $\mu \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$ fijos. Sea $G_0 \in \mathcal{O}_\mu$ tal que

$$\lambda(S - G_0) \neq (\lambda(S) - \lambda(G_0))^\downarrow . \tag{2.18}$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $G \in \mathcal{O}_\mu$ tal que $\|G - G_0\| < \varepsilon$ y

$$\lambda(S - G) \prec \lambda(S - G_0) \quad \text{pero} \quad \lambda(S - G) \neq \lambda(S - G_0) ,$$

es decir, la mayorización es estricta.

Demostración. Notemos que si $G_0 \in \mathcal{O}_\mu$ entonces

$$\lambda(-G_0) = -(\lambda(G_0)^\uparrow) = -(\mu^\uparrow) \implies -G_0 \in \mathcal{O}_{-\mu^\downarrow}(\subset \mathcal{H}(d)) .$$

Además, $(\lambda(S)^\uparrow + \lambda(-G_0))^\downarrow = (\lambda(S)^\uparrow - \lambda(G_0)^\uparrow)^\downarrow = (\lambda(S) - \lambda(G_0))^\downarrow$ y por lo tanto

$$\lambda(S - G_0) \neq (\lambda(S) - \lambda(G_0))^\downarrow \iff \lambda(S + (-G_0)) \neq (\lambda(S)^\uparrow + \lambda(-G_0))^\downarrow .$$

Luego, aplicando el Teorema 2.1.4 a $-G_0 \in \mathcal{O}_{-\mu^\downarrow}$ tenemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $-G \in \mathcal{O}_{-\mu^\downarrow}$ (entonces $G \in \mathcal{O}_\mu$) tal que $\|G - G_0\| < \varepsilon$ y

$$\lambda(S + (-G)) \prec \lambda(S + (-G_0)) \quad \text{pero} \quad \lambda(S + (-G)) \neq \lambda(S + (-G_0)) .$$

□

Los siguientes dos teoremas se obtienen como consecuencia directa de los resultados anteriores y serán claves para probar los resultados más importantes de esta tesis, en el Capítulo 3 y en el Capítulo 4.

Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\mu \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$ y la órbita unitaria de μ definida en la Eq. (2.1), con la métrica usual inducida por la norma de operadores, la cual hace de ella un espacio métrico. Recordemos el conjunto de funciones definido en la Eq. (1.15)

$$\mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \{\varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \ , \ \varphi \text{ es estrictamente convexa}\} .$$

Dada $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ consideremos la función $\Phi_\varphi = \Phi_{(\varphi\,,\,S\,,\,\mu)} : \mathcal{O}_\mu \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida en la Eq. (2.9) como

$$\Phi_\varphi(G) = \mathrm{tr}(\varphi(S + G)) \quad \text{para} \quad G \in \mathcal{O}_\mu .$$

Teorema 2.1.6 (Lidskii local para potenciales convexos)**.** Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$ y $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$. Supongamos que $G_0 \in \mathcal{O}_\mu$ es un minimizador local de Φ_φ en $\mathcal{O}_\mu$. Luego, existe una bon $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que, si tomamos $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{I}_d} = \lambda(S)^\uparrow \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\uparrow$ entonces

$$S = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \lambda_i \ v_i \otimes v_i \quad \text{y} \quad G_0 = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \mu_i \ v_i \otimes v_i \ . \tag{2.19}$$

En particular, $\lambda(S + G_0) = (\lambda(S)^\uparrow + \lambda(G_0))^\downarrow$ por lo tanto G_0 es también un minimizador global de Φ_φ en $\mathcal{O}_\mu$.

Demostración. Supongamos que no existe una bon de $\mathbb{C}^d$ que diagonalice simultáneamente a S y G_0 con los espectros ordenados como en la Eq. (2.19); en ese caso, por el ítem 2 del Teorema 1.1.6 se tiene que S y G_0 no verifican la igualdad en la desigualdad de Lidskii. Luego, por el Teorema 2.1.4, dado $\varepsilon > 0$, existe $G \in \mathcal{O}_\mu$ tal que $\|G - G_0\| < \varepsilon$ y

$$\lambda(S + G) \prec \lambda(S + G_0) \quad \text{pero} \quad \lambda(S + G) \neq \lambda(S + G_0) .$$

De este modo, como φ es una función estrictamente convexa, por el ítem 3 del Teorema 1.1.10, se tiene que

$$\Phi_\varphi(G) = \operatorname{tr}(\varphi(S+G)) < \operatorname{tr}(\varphi(S+G_0)) = \Phi_\varphi(G_0)\,,$$

lo cual contradice la minimalidad local de G_0.

$\square$

Supongamos ahora que $S \in \mathcal{H}(d)$ y $\mu \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$. Dada una nui N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ consideremos la función $\Phi_N = \Phi_{(N\,,\,S\,,\,\mu)} : \mathcal{O}_\mu \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida en la Eq. (2.4) como

$$\Phi_N(G) = N(S-G) \quad \text{para} \quad G \in \mathcal{O}_\mu\,.$$

Teorema 2.1.7 (Lidskii local para nuis)**.** Sean $S \in \mathcal{H}(d)$, $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$ y N una nui estrictamente convexa en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Supongamos que $G_0 \in \mathcal{O}_\mu$ es un minimizador local de Φ_N en $\mathcal{O}_\mu$. Luego, existe una bon $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que, si tomamos $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} = \lambda(S) \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$ entonces

$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i \; v_i \otimes v_i \quad \text{y} \quad G_0 = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \mu_i \; v_i \otimes v_i \;. \tag{2.20}$$

En particular, $\lambda(S-G_0) = (\lambda(S) - \lambda(G_0))^\downarrow$ por lo tanto G_0 es un minimizador global de Φ_N en $\mathcal{O}_\mu$.

Demostración. Supongamos que no existe una bon de $\mathbb{C}^d$ que diagonalice simultáneamente a S y G_0 con los espectros ordenados como en la Eq. (2.20); en ese caso, S y G_0 no verifican la igualdad en la desigualdad de Lidskii 1.1.7. Luego, por el Teorema 2.1.5, dado $\varepsilon > 0$ existe $G \in \mathcal{O}_\mu$ tal que $\|G - G_0\| < \varepsilon$ y

$$\lambda(S-G) \prec \lambda(S-G_0) \quad \text{pero} \quad \lambda(S-G) \neq \lambda(S-G_0)\,,$$

lo cual implica que (ver Observación 1.1.4)

$$s(S-G) \prec_w s(S-G_0) \quad \text{pero} \quad s(S-G) \neq s(S-G_0)\,.$$

De este modo, como N es una nui estrictamente convexa, por el ítem 2 del Teorema 1.1.12, se tiene que

$$\Phi_N(G) = N(S-G) < N(S-G_0) = \Phi_N(G_0)\,,$$

lo cual contradice la minimalidad local de G_0.

$\square$

2.2. Desigualdades de Lidskii para valores singulares

En esta sección vamos a mostrar algunos resultados relacionados con el Teorema local de Lidskii para matrices arbitrarias 2.1.7 con respecto a los valores singulares y como consecuencia obtendremos una caracterización del caso de igualdad en la desigualdad de Lidskii clásica para valores singulares 1.1.8. Esta caracterización no se utilizará en el resto de esta tesis, sin embargo es de interés en sí mismo y complementa los resultados obtenidos sobre los Teoremas de Lidskii. Cabe señalar que dicha caracterización no había sido obtenida hasta este momento.

Para comenzar, recordemos que para dos matrices arbitrarias $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ la desigualdad de Lidskii (ver Teorema 1.1.8) establece que

$$|s(A) - s(B)| \prec_w s(A-B). \tag{2.21}$$

En lo que sigue vamos a fijar una matriz $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $s \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$, $s \neq 0$ y N una nui estrictamente convexa. También vamos a considerar el conjunto de matrices cuyo vector de valores singulares coincide con s, i.e.

$$\mathcal{V}_s := \{C \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) : \, s(C) = s\} = \{U\, D_s\, V : \, U, V \in \mathcal{U}(d)\} \ ,$$

dotado con la métrica usual, inducida por la norma espectral. Luego, vamos a definir la función

$$\Psi_{(N,\,A,\,s)} = \Psi_N : \mathcal{V}_s \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{ dada por } \quad \Psi_N(C) = N(A - C).$$

Con un argumento similar al del comienzo de la Sección 2.1, pero ahora basados en la descomposición en valores singulares y la desigualdad de Lidskii 1.1.8, podemos construir explícitamente los minimizadores globales de Ψ_N en $\mathcal{V}_s$. Del mismo modo que antes estaremos interesados en la estructura de los minimizadores locales de Ψ_N en $\mathcal{V}_s$. Más específicamente, vamos a describir la estructura de los minimizadores locales y vamos a probar que los minimizadores locales son globales.

Para empezar vamos a recordar la siguiente construcción matricial (ver Observación 1.1.9); para $C \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, vamos a denotar por $\widehat{C} \in \mathcal{H}(2\,d)$ a la matriz por bloques dada por

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Sean $U, V \in \mathcal{U}(d)$ tales que $C = V^* D_{s(C)} U$, y definamos $W \in \mathcal{U}(2\,d)$ dada por

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} V & U \\ -V & U \end{pmatrix}.$$

Luego, se puede ver que $\widehat{C} = W^* \, (D_{s(C)} \oplus -D_{s(C)})\, W$, lo cual implica que

$$\lambda(\widehat{C})_i = \begin{cases} s_i(C) & \text{si} \quad 1 \leq i \leq d \\ -s_{d-i+1}(C) & \text{si} \quad d+1 \leq i \leq 2d \ . \end{cases} \tag{2.22}$$

Definición 2.2.1. Sean $A\,,\, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, N una nui en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ y $s \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$ $(s \neq 0)$. Vamos a considerar:

1. El espacio $\mathcal{S} = \{\widehat{C} : \; C \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})\} \subset \mathcal{H}(2\,d)$.
2. La aplicación $\Pi_{(A\,,\,B)} = \Pi : \mathcal{U}(d)^4 \to \mathcal{S}$ dada por
$$\begin{aligned} \Pi(U_1\,,\, U_2\,,\, V_1\,,\, V_2) &= (U_1 \oplus V_1)^* \, \widehat{A} \, (U_1 \oplus V_1) - (U_2 \oplus V_2)^* \, \widehat{B} \, (U_2 \oplus V_2) \\ &= \widehat{U_1^* \, A\, V_1} - \widehat{U_2^* \, B\, V_2}\,. \end{aligned} \tag{2.23}$$
3. La aplicación $\Xi_{(A\,,\,B)} : \mathcal{U}(d)^4 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por
$$\Xi(U_1\,,\, U_2\,,\, V_1\,,\, V_2) = N(U_1^* \, A\, V_1 - U_2^* \, B\, V_2)\,. \tag{2.24}$$

$\triangle$

Lema 2.2.2. Sean $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $s \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$, $s \neq 0$, y $B \in \mathcal{V}_s$. Dada una nui N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. B es un minimizador local de $\Psi_N = \Psi_{(N\,,\,A\,,\,s)}$ en $\mathcal{V}_s$;

2. (I,I,I,I) es un minimizador local de $\Xi_{(A\,,\,B)}$ en $\mathcal{U}(d)^4$.

Demostración. 1. $\Longrightarrow$ 2. Consideremos $(U_1,U_2,V_1,V_2)\in\mathcal{U}(d)^4$ tal que

$$d((U_1,U_2,V_1,V_2),(I,I,I,I)) = \text{máx}\{\,\|I-U_1^*\|\,,\,\|I-U_2^*\|\,\|I-V_1^*\|\,,\,\|I-V_2^*\|\,\} := \varepsilon\,.$$

Luego, si $W_1 = U_2U_1^*\in\mathcal{U}(d)$ y $W_2=V_2V_1^*\in\mathcal{U}(d)$ entonces $U_1^*A\,V_1 - U_2^*B\,V_2 = U_1^*(A-W_1^*G_0\,W_2)\,V_1$. Notar que

$$\|W_1-I\| = \|U_2\,(U_1^*-U_2^*)\| \le \|U_1^*-I\| + \|I-U_2^*\| \le 2\,\varepsilon\,,$$

$$\|W_2-I\| = \|V_2\,(V_1^*-V_2^*)\| \le \|V_1^*-I\| + \|I-V_2^*\| \le 2\,\varepsilon\,.$$

De este modo, como N es unitariamente invariante,

$$\Xi_{(A\,,\,B)}(U_1,U_2,V_1,V_2) = N(A-W_1^*B\,W_2) = \Psi_N(W_1^*B\,W_2) \quad \text{con} \quad \|W_1^*B\,W_2 - B\| \le 8\,\varepsilon\|G_0\|\,.$$

2. $\Longrightarrow$ 1. Esto es una consecuencia del hecho de que $\mathcal{U}(d)\times\mathcal{U}(d)\ni(W_1,W_2)\mapsto W_1^*B\,W_2\in\mathcal{V}_s$ es una aplicación abierta (ver, por ejemplo, [1, Teo. 4.1] o [23]). $\square$

Lo que haremos ahora es desarrollar algunas propiedades geométricas de la función Π. Tal como lo hicimos anteriormente, vamos a considerar a $\mathcal{U}(d)^4$ como una variedad suave, dotada con la estructura producto.

Lema 2.2.3. Sean $A,\,B\in\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ y Π como en la Eq. (2.23). Luego, son equivalentes:

1. $\Pi_{(A\,,\,B)}$ es una submersión en (I,I,I,I);
2. Siempre que $Z\in\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ sea tal que $A^*Z\,,\ AZ^*\,,\ B^*Z\,,\ BZ^*\in\mathcal{H}(d)$, se tiene que $Z=0$.

Demostración. Notemos primero que Π es una función suave luego, el ítem 1 vale si, y sólo si, el diferencial

$$D = D\Pi_{(I\,,\,I\,,\,I\,,\,I)} : (i\cdot\mathcal{H}(d))^4 \to \mathcal{S}\subset\mathcal{H}(2\,d) \qquad \text{es suryectivo}\,.$$

Veamos ahora que D es *no* suryectiva si, y sólo si, existe una matriz $Z\in\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $Z\neq 0$, tal que $A^*Z\,,\ AZ^*\,,\ B^*Z\,,\ BZ^*\in\mathcal{H}(d)$. En efecto, se puede verificar directamente que

$$D(X_1\,,\,X_2\,,\,Y_1\,,\,Y_2) = -\widehat{X_1\,A} + \widehat{A\,Y_1} + \widehat{X_2\,B} - \widehat{B\,Y_2} \quad \text{para} \quad X_1\,,\,X_2\,,\,Y_1\,,\,Y_2\in i\cdot\mathcal{H}(d)\,.$$

Luego, D no es suryectivo si, y sólo si, existe una matriz no nula $Z\in\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, tal que

$$\widehat{Z} \;\perp\; -\widehat{X_1\,A} + \widehat{A\,Y_1} + \widehat{X_2\,B} - \widehat{B\,Y_2} \quad \text{para} \quad X_1\,,\,X_2\,,\,Y_1\,,\,Y_2\in i\cdot\mathcal{H}(d)\,, \tag{2.25}$$

donde $\perp$ significa ser ortogonal con respecto al producto interno (real) del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{H}(2\,d)$ dado por la traza. En este caso (tomando $X_2=Y_2=0$) se tiene que

$$0 = \operatorname{tr}(\widehat{Z}\;(-\widehat{X_1\,A}+\widehat{A\,Y_1})) = 2\ \operatorname{Re}[\operatorname{tr}(Z^*(-X_1\,A + A\,Y_1))] \quad \text{para} \quad X_1\,,\,Y_1\in i\cdot\mathcal{H}(d)\,. \tag{2.26}$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{Re}[\operatorname{tr}(C)] = \operatorname{tr}(\operatorname{Re}[C])$ y las propiedades traciales, podemos ver que la Eq. (2.26) es equivalente a

$$0 = \operatorname{tr}(X_1\,(AZ^*-ZA^*)) + \operatorname{tr}(Y_1\,(A^*Z-Z^*A)) \quad \text{para} \quad X_1\,,\,Y_1\in i\cdot\mathcal{H}(d)\,. \tag{2.27}$$

Como $(AZ^* - ZA^*)\,,\,(A^*Z - Z^*A) \in i\cdot\mathcal{H}(d)$, Eq. (2.27) vale si, y sólo si

$$AZ^* - ZA^* = 0 \quad \text{y} \quad A^*Z - Z^*A = 0 \implies AZ^*\,,\,A^*Z \in \mathcal{H}(d)\,.$$

De manera similar, suponiendo que $X_1 = Y_1 = 0$ en Eq. (2.25) y argumentando como antes, podemos concluir que $BZ^*\,,\,B^*Z \in \mathcal{H}(d)$.

Recíprocamente, supongamos que existe una matriz no nula $Z \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, tal que $A^*Z\,,\,AZ^*\,,\,B^*Z\,,\,BZ^* \in \mathcal{H}(d)$. Argumentando como antes, podemos afirmar que Z verifica la condición de perpendicularidad en la Eq. (2.25); luego, D no es suryectiva en este caso. □

Proposición 2.2.4. Sean $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, N una nui estrictamente convexa en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ y $s \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$, $(s \neq 0)$. Si $B \in \mathcal{V}_s$ es un minimizador local de $\Psi_N = \Psi_{(N\,,\,A\,,\,s)}$ entonces, $\Pi_{(A\,,\,B)}$ no es una submersión en $(I\,,\,I\,,\,I\,,\,I)$.

Demostración. Supongamos que $\Pi_{(A\,,\,B)}$ es una submersión en $(I\,,\,I\,,\,I\,,\,I)$. Supongamos también que algunas de las condiciones $A^*B\,,\,A\,B^* \in \mathcal{H}(d)$ no se verifica. En este caso, es fácil ver que las matrices por bloques $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ no conmutan. En particular, por el Teorema 1.1.6, se tiene que

$$b := (\lambda(\widehat{A}) - \lambda(\widehat{B}))^{\downarrow} \prec a := \lambda(\widehat{A} - \widehat{B}) \quad \text{y} \quad a \neq b\,.$$

Ahora, por la Eq. (2.22), podemos ver que si tomamos los vectores

$$\tilde{b} := (s(A) - s(B)\,,\,-[s(A) - s(B)]) \in \mathbb{R}^{2\,d}\,,\ \tilde{a} := (s(A-B)\,,\,-s(A-B)) \in \mathbb{R}^{2d} \implies b = (\tilde{b})^{\downarrow}\,,\ a = (\tilde{a})^{\downarrow}\,.$$

Luego, para $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}^{2d}$ dada por $\rho(t) = (1-t)\,\tilde{a} + t\,\tilde{b}$, para $t \in [0,1]$ se tiene que:

1. $\rho(t) \prec a$ y $\rho(t)^{\downarrow} \neq a$, para todo $t \in (0,1]$;
2. $\rho(0) = \tilde{a}$;
3. Para todo $t \in [0,1]$ existe $c_t \in \mathbb{R}^d$ tal que $\rho(t) = (c_t\,,\,-c_t)$.

Para probar el ítem 1. recordemos que

$$\rho(t) = (1-t)\,\tilde{a} + t\,\tilde{b} \prec (1-t)\,(\tilde{a})^{\downarrow} + t\,(\tilde{b})^{\downarrow} = (1-t)\,a + t\,b \prec a$$

y, $((1-t)\,a + t\,b)^{\downarrow} = (1-t)\,a + t\,b \neq a$ (porque $a \neq b$), para $t \in (0,1]$. Consideremos ahora una descomposición en valores singulares para $A - B = V^*\,D_{s(A-B)}\,U$, para matrices $U\,,\,V \in \mathcal{U}(d)$, y definamos

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} V & U \\ -V & U \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(2\,d)\,.$$

Luego $\widehat{A} - \widehat{B} = W^*\,(D_{s(A-B)} \oplus -D_{s(A-B)})\,W = W^*\,D_{\tilde{a}}\,W$; Consideremos $T(t) = W^*\,D_{\rho(t)}\,W$ para $t \in [0,1]$. Luego, por el ítem 3., podemos ver que $T(t) \in \mathcal{S}$ para $t \in [0,1]$. Por la hipótesis sobre $\Pi_{(A\,,\,B)} = \Pi$, para todo entorno abierto de $I \in \mathcal{N} \subset \mathcal{U}(d)$, el conjunto

$$\mathcal{M} = \{\Pi(U_1\,,\,U_2\,,\,V_1\,,\,V_2) :\ U_i\,,\,V_i \in \mathcal{N}\,,\ i = 1,2\}$$

contiene un entorno abierto de $\widehat{A} - \widehat{B}$ en $\mathcal{S}$. Como $T : [0,1] \to \mathcal{S}$ es una curva continua tal que $T(0) = \widehat{A} - \widehat{B}$, entonces existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $T(t) \in \mathcal{M}$, para $t \in [0, t_0]$. En particular, existen $U_i\,,\,V_i \in \mathcal{N}$, para $i = 1,2$, tales que

$$T(t_0) = \widehat{U_1^*\,A\,V_1} - \widehat{U_2^*\,B\,V_2} \quad , \quad \lambda(T(t_0)) = \rho(t)^{\downarrow} \prec a \quad , \quad \lambda(T(t_0)) \neq a\,.$$

Luego, $s(U_1^* A V_1 - U_2^* B V_2) \prec_w s(A - B)$ y $s(U_1^* A V_1 - U_2^* B V_2) \neq s(A - B)$. Como la nui N es estrictamente convexa, podemos concluir que

$$\Xi_{(A\,,B)}(U_1\,, U_2\,, V_1\,, V_2) = N(U_1^* A V_1 - U_2^* B V_2) < N(A - B) = \Xi_{(A\,,B)}(I\,, I\,, I\,, I)\,.$$

El hecho de que $\mathcal{N}$ sea un entorno arbitrario de I en $\mathcal{U}(d)$ nos permite asegurar que $(I\,, I\,, I\,, I)$ no es un minimizador local de $\Xi_{(A\,,B)}$, lo cual contradice el Lema 2.2.2.

Los argumentos previos prueban que $A^*B\,, AB^* \in \mathcal{H}(d)$. Si ahora tomamos $Z = B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, podemos notar que

$$Z \neq 0 \quad \text{y} \quad A^*Z\,, AZ^*\,, B^*Z\,, BZ^* \in \mathcal{H}(d)\,.$$

De este modo, el Lema 2.2.3 implica que Π no es una submersión en $(I\,, I\,, I\,, I)$, lo cual contradice nuestra suposición sobre Π; esto último es lo que prueba el resultado. □

Observación 2.2.5. Sean $A\,, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ tales que A^*B, $AB^* \in \mathcal{H}(d)$. En [27], Eckart y Young observaron que existen matrices U, $V \in \mathcal{U}(d)$ tales que

$$U^*A\,V = A \quad \text{y} \quad U^*B\,V = D_\beta \quad \text{con} \quad \beta \in \mathbb{R}^d\,.$$

En efecto, notemos que la hipótesis también vale para X^*AY y X^*BY, cualesquiera sean $X\,, Y \in \mathcal{U}(d)$. Luego, considerando una descomposición a valores singulares de A y los comentarios previos, podemos asumir que $A = \oplus_{i=1}^k \alpha_i\, I_i$ con $I_i \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{C})$ la matriz identidad, $d_1 + \ldots + d_k = d$ y $\alpha_1 > \ldots > \alpha_k \geq 0$. Sea $\mathbb{C}^d = \oplus_{i=1}^k \mathbb{C}^{d_i}$, y consideremos la representación por bloques de B con respecto a esta descomposición, $B = (B_{ij})_{i,j=1}^k$. Bajo las suposiciones previas sobre A, se tiene que $A\,B, AB^* \in \mathcal{H}(d)$ y por lo tanto

$$A\,B = (A\,B)^* = B^*\,A \quad \text{y} \quad AB^* = (AB^*)^* = BA\,.$$

Estas ecuaciones implican que

$$B_{ji}^*\,\alpha_j = \alpha_i\,B_{ij} \quad \text{y} \quad \alpha_i\,B_{ji}^* = B_{ij}\,\alpha_j \quad \text{para} \quad 1 \leq i, j \leq k\,.$$

En particular, si $i \neq j$ y $\alpha_i \neq 0$ entonces

$$\alpha_i\,B_{ij} = \alpha_j\,B_{ji}^* = \frac{\alpha_j^2}{\alpha_i} B_{ij} \implies B_{ij} = 0\,.$$

En el caso de que $i \neq j$ y $\alpha_i = 0$ se tiene que $\alpha_j\,B_{ij} = 0 \implies B_{ij} = 0$ porque $\alpha_j \neq \alpha_i = 0$. Y si $\alpha_i \neq 0$ entonces

$$\alpha_i\,B_{ii}^* = \alpha_i\,B_{ii} \implies B_{ii} = B_{ii}^*\,.$$

Luego $B = \oplus_{i=1}^k B_{ii}$. Notemos que si $\alpha_k = 0$, el bloque $B_{kk} \in \mathcal{M}_{d_k}(\mathbb{C})$ es arbitrario. Consideremos ahora las matrices unitarias $U_i \in \mathcal{U}(d_i)$ tales que $U^*B_{ii}U = D_{\gamma_i}$, con $\gamma_i \in \mathbb{R}^{d_i}$ para $\alpha_i \neq 0$ (que incluye $1 \leq i \leq k-1$) y, eventualmente (cuando $\alpha_k = 0$), una descomposición en valores singulares $U_k^* B_{kk} V_k = D_{\gamma_k}$ para U_k, $V_k \in \mathcal{U}(d_k)$, con $\gamma_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{d_k}$. Luego, tomando

$$U = \oplus_{i=1}^k U_i \quad \text{y} \quad V = \oplus_{i=1}^{k-1} U_i \oplus V_k,$$

y $\beta = (\gamma_1\,, \ldots\,, \gamma_k) \in \mathbb{R}^d$, se tiene que

$$U^*AV = A \quad \text{y} \quad U^*BV = \oplus_{i=1}^k D_{\gamma_i} = D_\beta\,.$$

Vale la pena señalar que el vector β no tiene por qué tener todas sus entradas positivas, por lo tanto la descomposición que se obtiene de la matriz B, no es una descomposición en valores singulares. △

Proposición 2.2.6. Fijemos una matriz $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, una nui estrictamente convexa N sobre $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ y $s \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$, $s \neq 0$. Sea $B \in \mathcal{V}_s$ un minimizador local de $\Psi_N = \Psi_{(N\,,\,A\,,\,s)}$. Luego, $A^*B\,,\,A\,B^* \in \mathcal{H}(d)$.

Demostración. Vamos a probarlo por inducción sobre la dimensión $d \geq 1$. En efecto, si $d = 1$ entonces el resultado se sigue del hecho de que, dado $a \in \mathbb{C}$, cualquier minimizador local b de la función $f(c) = |a - c|$ para $c \in \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = s > 0\}$ satisface que $\bar{a} \cdot b \in \mathbb{R}$, y por lo tanto también se tiene que $a \cdot \bar{b} \in \mathbb{R}$.

Supongamos ahora que el resultado vale para toda dimensión $\tilde{d}$ tal que $1 \leq \tilde{d} \leq d-1$. Sean $A\,,\,B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ tales que B es un minimizador local de Ψ_N en $\mathcal{V}_s$. Notemos que por la Proposición 2.2.4, $\Pi_{(A\,,\,B)}$ no es una submersión en $(I\,,\,I\,,\,I\,,\,I)$. Por el Lema 2.2.3, podemos concluir entonces que existe una matriz $Z \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $Z \neq 0$, tal que $A^*\,Z\,,\,A\,Z^*\,,\,B^*\,Z\,,\,B\,Z^* \in \mathcal{H}(d)$. Consideremos una descomposición en valores singulares de Z, $D_{s(Z)} = U^*\,Z\,V$, para $U,\,V \in \mathcal{U}(d)$. Reemplazando A y B por $U^*\,A\,V$ y $U^*\,B\,V$ podemos entonces asumir que $Z = D_{s(Z)}$, donde $s(Z) = (s_i(Z))_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$. En lo que sigue vamos a suponer:

1. $\sigma(Z) = \{\sigma_1 > \ldots > \sigma_k\}$ son los diferentes autovalores de $Z = D_{s(Z)} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$.
2. $I_j = \{i \in \mathbb{I}_d :\ s_i(Z) = \sigma_j\}$ y $m_j = \#(I_j)$, para $j \in \mathbb{I}_k$.

Notemos que, como $Z \neq 0$ entonces $\sigma_1 > 0$. Utilizando el hecho de que $A^*Z\,,\,AZ^*\,,\,B^*Z\,,\,BZ^* \in \mathcal{H}(d)$ con $Z = \oplus_{j\in\mathbb{I}_k}\sigma_j\,I_j$ y la Observación 2.2.5, podemos concluir que:

$$A = \oplus_{j\in\mathbb{I}_k} A_j \quad \text{ y } \quad B = \oplus_{j\in\mathbb{I}_k} B_j \quad \Longrightarrow \quad A - B = \oplus_{j\in\mathbb{I}_k} A_j - B_j\,, \tag{2.28}$$

donde $I_j\,,\,A_j\,,\,B_j \in \mathcal{M}_{m_j}(\mathbb{C})$, para $j \in \mathbb{I}_k$; más aun, $A_j\,,\,B_j \in \mathcal{H}(m_j)$, siempre que $\sigma_k \neq 0$, para $j \in \mathbb{I}_k$. Como B es un minimizador local de Ψ_N en $\mathcal{V}_s$ se puede ver que

$$B_j \text{ es un minimizador local de } \Psi_{(N_j\,,\,A_j\,,\,s(B_j))}\ ,\ \text{ para } j \in \mathbb{I}_k\,,$$

donde N_j es la nui estrictamente convexa en $M_{m_j}(\mathbb{C})$ dada por $N_j(C) = N(C \oplus 0_{d-m_j})$. En efecto, esto último muestra que para cada $j \in \mathbb{I}_k$ tal que $\sigma_j \neq 0$ - lo cual incluye a todos los $1 \leq j \leq \text{máx}\{k-1\,,\,1\}$ - B_j es un minimizador local de $\Phi_{(N_j\,,\,A_j\,,\,\lambda(B_j))}$; el Teorema 2.1.7 muestra que A_j y B_j conmutan, entonces $A_j^*B_j\,,\,A_j\,B_j^* \in \mathcal{H}(m_j)$, para $j \in \mathbb{I}_k$ tal que $\sigma_j \neq 0$. Por lo tanto, vamos a considerar dos casos posibles: por un lado, si $\sigma_k \neq 0$ entonces las observaciones previas muestran que

$$A^*\,B = \oplus_{j\in\mathbb{I}_k} A_j^*\,B_j \in \mathcal{H}(d)\,,$$

y de manera similar, $A\,B^* \in \mathcal{H}(d)$.

Por otro lado, si $\sigma_k = 0$, notemos que $m_k = \dim\ \ker Z < d$ (pues $Z \neq 0$), y $B_k \in M_{m_k}(\mathbb{C})$ es un minimizador local de $\Psi_{(N_k\,,\,A_k\,,\,s(B_k))}$. En este caso podemos usar la hipótesis inductiva para concluir que $A_k^*\,B_k\,,\,A_k\,B_k^* \in \mathcal{H}(m_k)$. Como ya hemos probado que $A_j^*\,B_j\,,\,A_j\,B_j^* \in \mathcal{H}(m_j)$, para $1 \leq j \leq k-1$, ahora podemos ver que $A^*\,B\,,\,A\,B^* \in \mathcal{H}(d)$. □

Teorema 2.2.7. Sean $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $s \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$ y N una nui estrictamente convexa. Si B es un minimizador local de Ψ_N en $\mathcal{V}_s$ entonces A y B tienen una descomposición en valores singulares simultánea; i.e., existen matrices $U, V \in \mathcal{U}(d)$ tales que

$$A = U^* D_{s(A)} V \quad \text{ y } \quad B = U^* D_{s(B)} V.$$

En particular, $s(A - B) = |s(A) - s(B)|^{\downarrow}$ y B es un minimizador global de Ψ_N en $\mathcal{V}_s$.

Demostración. Notemos que si B es un minimizador local de Ψ_N in $\mathcal{V}_s$ y $X^*AY = D_{s(A)}$ es una descomposición en valores singulares de A para dos matrices $X,\, Y \in \mathcal{U}(d)$, podemos reemplazar A por $D_{s(A)}$ y B por X^*BY para obtener:

$$N(A - B) = N(D_{s(A)} - X^*BY).$$

Como $\mathcal{V}_s \ni C \mapsto X^*CY \in \mathcal{V}_s$ es un homeomorfismo de $\mathcal{V}_s$ podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $A = D_{s(A)}$. Por la Proposición 2.2.6 se tiene que $A\,B,\ A\,B^* \in \mathcal{H}(d)$; luego, por [27] (ver la Observación 2.2.5) existen matrices $U,\, V \in \mathcal{U}(d)$ tales que

$$U^*A\,V = D_{s(A)}\,(= A) \quad \text{y} \quad U^*B\,V = D_\beta \quad \text{con} \quad \beta \in \mathbb{R}^d\,.$$

Supongamos ahora que $\beta \notin \mathbb{R}^d_{\geq 0}$, entonces existe $1 \leq \ell \leq d$ tal que $\beta_\ell < 0$. Observemos además que la función $f(t) : [0, \pi] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$f(t) = |s_\ell(A) - e^{it}\beta_\ell| \quad \text{para} \quad t \in [0, \pi]$$

es estrictamente decreciente. Si consideramos $W(t) = (w_{jk})_{j,\,k \in \mathbb{I}_d} \in \mathcal{U}(d)$ la matriz diagonal cuya diagonal principal está dada por $w_{jj} = 1$ para todo $j \neq \ell$, y $w_{\ell\ell} = e^{it}$ para $t \in [0, \pi]$; luego $W(0) = I$. Definamos

$$B(t) = U\,W(t)D_\beta V^* \quad \text{para} \quad t \in [0, \pi]\,.$$

Luego $B(t)$ es una curva continua tal que $B(0) = B$, $B(t) \in \mathcal{V}_s$ para $t \in [0, \pi]$ y

$$\Psi_N(B(t)) = N(U\,(D_{s(A)} - D_{\beta(t)})\,V^*) = N(D_{|\alpha - \beta(t)|})\ ,$$

donde $\beta(t) = s(B(t))$ para $t \in [0, \pi]$. Luego, $\beta_j(t) = \beta_j$ para $j \neq \ell$ y $\beta_\ell(t) = e^{it}\,\beta_\ell$. Por lo tanto, $|\alpha_j - \beta_j(t)| = \alpha_j - \beta_j$ es constante para $j \neq \ell$ y $|\alpha_\ell - \beta_\ell(t)| = f(t)$ para $t \in [0, \pi]$. Como la función f es estrictamente decreciente, podemos concluir que

$$|\alpha - \beta(t)| \prec_w |\alpha - \beta| \implies \Psi_N(B(t)) \text{ es estrictamente decreciente para } t \in [0, \pi]\,.$$

Esto último contradice las suposiciones hechas sobre B. Por lo tanto, $\beta \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$.

Supongamos ahora que $\beta \neq s = s(B)$ i.e. $\beta \neq \beta^\downarrow$; como $A = D_{s(A)}$ con $s(A) = s(A)^\downarrow$ entonces, por el Teorema 2.1.7, D_β no es un minimizador local de $\Phi_N = \Phi_{(N,\, D_{s(A)},\, s)}$ en $\mathcal{O}_s$. Luego, existe una curva continua $\delta(t) : [0, 1] \to \mathcal{U}(d)$ tal que $\delta(0) = I$ y $h(t) = N(D_{s(A)} - \delta(t)^*\, D_\beta\, \delta(t)\,)$, es estrictamente decreciente en$[0, 1]$. De este modo se tiene que, si $\tilde{B}(t) = U\,\delta(t)^*\, D_\beta\, \delta(t)\, V^*$ para $t \in [0, 1]$ entonces $\tilde{B}(0) = B$, $\tilde{B}(t) \in \mathcal{V}_s$ para $t \in [0, 1]$, y la función $\Psi_N(\tilde{B}(t)) = h(t)$ es estrictamente decreciente en $[0, 1]$. Estos hechos contradicen que B sea un minimizador local de Ψ_N in $\mathcal{V}_s$. Por lo tanto, $U^*BV = D_s$ y entonces, $s(A - B) = |s(A) - s|^\downarrow$ lo cual implica que B es un minimizador global de Ψ_N in $\mathcal{V}_s$. □

Corolario 2.2.8 (Igualdad en la desigualdad de Lidskii para valores singulares)**.** Sean $A,\, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Luego $|s(A) - s(B)|^\downarrow = s(A - B)$ si, y sólo si, A y B tienen una descomposición en valores singulares simultánea.

Demostración. Si $A\,,\, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ tienen una descomposición en valores singulares simultánea, entonces se puede ver fácilmente que $|s(A) - s(B)|^\downarrow = s(A - B)$. Recíprocamente, supongamos que

$$|s(A) - s(B)|^\downarrow = s(A - B)$$

y elijamos una nui estrictamente convexa N sobre $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, cualquiera, por ejemplo la norma 2. Por los comentarios hechos al principio de la sección, se puede ver que B es un minimizador global de $\Psi_{(N\,,\,A\,,\,s(B))} = \Psi_N$ en $\mathcal{V}_{s(B)}$. En particular, B es un minimizador local de Ψ_N en $\mathcal{V}_{s(B)}$; el resultado ahora se sigue del Teorema 2.2.7. □

Capítulo 3

El problema de las completaciones de marcos

Comencemos dando una breve descripción del principal problema tratado en este capítulo, el cual será presentado con más detalle en la Sección 3.1.1. Fijemos una familia (inicial) de vectores $\mathcal{F}_0 = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_{n_0}}$ en $(\mathbb{C}^d)^{n_0}$ y un vector $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^{\downarrow}$; consideremos también el toro definido en la Notación 1.2.6 como

$$\mathbb{T}_d(\mathbf{a}) = \Big\{\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{C}^d)^k : \|g_i\|^2 = a_i \quad \text{para todo} \quad i\in\mathbb{I}_k\Big\} ,$$

dotado con la métrica:

$$d(\mathcal{G}\,,\,\tilde{\mathcal{G}})^2 = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} \|g_i - \tilde{g}_i\|^2 \quad \text{para} \quad \mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k},\, \tilde{\mathcal{G}} = \{\tilde{g}_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\,.$$

Nuestro problema principal es estudiar la estructura de los minimizadores locales de la función

$$\mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \ni \mathcal{G} \mapsto \mathrm{P}_\varphi(\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G}) = \mathrm{tr}(\varphi(S_{(\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G})})) = \mathrm{tr}(\varphi(S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}}))\,, \tag{3.1}$$

donde $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ es una función estrictamente convexa y $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G})$ es una completación de $\mathcal{F}_0$ con una sucesión finita de vectores en $\mathbb{C}^d$ cuyas normas están predeterminadas por $\mathbf{a}$. La pregunta que estamos interesados en responder es si los minimizadores locales son globales.

Este problema tiene como antecedentes algunos casos particulares. Por ejemplo, dada una familia (finita) de vectores unitarios $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k}$, Benedetto y Fickus introdujeron en [5] la definición de *potencial de marco* dado por

$$\mathrm{FP}\,(\mathcal{G}) := \sum_{i,\,j\,\in\mathbb{I}_k} |\langle g_i\,,\,g_j\rangle|^{\,2} \;= \mathrm{tr}\left(S_{\mathcal{G}}^2\right)\,.$$

Entre otras cosas, ellos probaron que los marcos ajustados de norma uno se caracterizan como los minimizadores (locales) de este potencial, entre todos los marcos de norma uno. Es decir, ellos dieron respuesta positiva al problema que planteamos al principio, para la familia inicial $\mathcal{F}_0 = \varnothing$, $\mathbf{a} = (1)_{i=1}^k$ y $\varphi(x) = x^2$.

Más adelante Casazza, Fickus, Kovacevic, Leon y Tremain consideraron en [15] el caso en que la familia inicial es $\mathcal{F}_0 = \varnothing$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^k \in \mathbb{R}^k_{>0}$ es una sucesión de normas predeterminadas arbitraria. En este caso, al igual que en el caso anterior, se prueba que los mínimos locales del potencial de marco son globales y se calcula la estructura espectral de los óptimos.

Más recientemente ha habido interés por minimizar otro tipo de potenciales. Por ejemplo; Fickus, Mixon y Poteet estudiaron en [30, 31] el caso en que la familia inicial $\mathcal{F}_0$ y la sucesión de normas predeterminadas $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^k \in \mathbb{R}_{>0}^k$ son cualesquiera fijos y consideraron el potencial denominado *error cuadrático medio* (ECM) de $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$ dado por

$$\mathrm{ECM}(\mathcal{F}) = \mathrm{tr}\left(\mathcal{S}_{\mathcal{F}}^{-1}\right).$$

En la serie de trabajos [58, 59, 60, 61]; Massey, Ruiz y Stojanoff consideraron familias de potenciales convexos (que incluyen tanto al potencial de Benedeto-Fickus como al ECM) y probaron que existen completaciones óptimas $\mathcal{F}^{\rm op} = (\mathcal{F}_0,\, \mathcal{G}^{\rm op})$ - con $\mathcal{G}^{\rm op} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$- que minimizan simultáneamente de manera global a todos los potenciales convexos en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. Cabe destacar que los minimizadores globales han sido caracterizados por estos autores. De manera independiente, este resultado también fue obtenido posteriormente por Fickus, Marks y Poteet en [32] en términos de un *Teorema de Schur-Horn generalizado*.

Por otro lado, este problema de completaciones óptimas también está relacionado con el problema de optimizar la *distancia al operador de marco* en la variedad (suave) $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, presentado por Strawn en [63]; es decir, para $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$ fijos, minimizar la distancia al operador de marco (DOM) que se define como la función $\Theta_2 = \Theta_{(2\,,\,S\,,\,\mathbf{a})} : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$\Theta_2(\mathcal{G}) = \|S - S_{\mathcal{G}}\|_2 \quad \text{para} \quad \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a}),$$

donde $\|A\|_2^2 = \mathrm{tr}(A^*A)$, para $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, denota la norma Frobenius en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. En el caso de que $S = \alpha\, I$ para algún $\alpha > 0$, Strawn observó que encontrar los minimizadores de Θ_2 en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, es equivalente a encontrar los minimizadores del potencial de Benedetto - Fickus en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, pues

$$\|S - S_{\mathcal{G}}\|_2^2 = \mathrm{tr}(S^2) + \mathrm{tr}(S_{\mathcal{G}}^2) - 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(S - S_{\mathcal{G}})) = \alpha^2\, d + \mathrm{FP}(\mathcal{G}) - 2\,(\alpha\, d - \mathrm{tr}(\mathbf{a})).$$

Además, Strawn notó que agregando la hipótesis de que $\mathbf{a} \prec \lambda(S)$, la versión del Teorema de Schur-Horn para marcos (ver Teorema 1.2.4), afirma que existe una familia $\mathcal{G}^{\rm op} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ tal que $S_{\mathcal{G}^{\rm op}} = S$; en este caso,

$$\min\{\,\Theta_2(\mathcal{G}) :\ \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\,\} = 0.$$

Al notar que la condición de que $\mathbf{a} \prec \lambda(S)$, asegura que el valor mínimo que toma la función es cero, Strawn presenta un algoritmo de aproximación basado en el método de descenso en la dirección del gradiente de Θ_2, el cual explota algunos aspectos geométricos de la geometría diferencial de la variedad $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ obtenidos por él mismo en [62] (algunos de los cuales son de naturaleza similar a los que se consideran en [58]). En el caso de que la sucesión de iterados construida por el método de Strawn sea convergente, lo que uno espera es (en el mejor de los casos) encontrar un minimizador local de la función objetivo. Los resultados obtenidos en ese trabajo le permitieron a Strawn conjeturar que (bajo ciertas hipótesis adicionales) los minimizadores locales de la DOM, son globales. En el próximo capítulo veremos que, en general, la Conjetura de Strawn es equivalente al problema de determinar si los minimizadores locales del potencial de Benedetto - Fickus (sobre cierto conjunto de completaciones con normas predeterminadas) son minimizadores globales. Este hecho motiva a estudiar los minimizadores locales de completaciones con normas predeterminadas, para el potencial de Benedetto-Fickus y para el caso más general de los potenciales convexos basados en funciones estrictamente convexas como los de la Eq. (3.1).

En este capítulo, dada una familia inicial $\mathcal{F}_0$ de vectores en $\mathbb{C}^d$ y una sucesión $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k}$ de números positivos (fijos), vamos a mostrar que cualquier completación $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$ de $\mathcal{F}_0$, que se obtenga agregando una familia de vectores $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ y que sea un minimizador local de algún potencial (estrictamente) convexo, resulta ser un minimizador global de todos los potenciales convexos, sobre tales completaciones.

La demostración está basada en la caracterización de los minimizadores globales dada por Massey, Ruiz y Stojanoff en [61]; y así como para ellos fue fundamental el Teorema de Lidskii (clásico) y la caracterización del caso de igualdad (ver Teorema 1.1.6), para nosotros será una herramienta clave la versión local del Teorema de Lidskii (para matrices positivas) desarrollado en la Sección 2.1. Este resultado generaliza entonces a los que fueron obtenidos previamente en [5, 15, 30, 31] para el potencial de marco y el ECM; así como también generaliza los resultados de [32, 58, 59, 60, 61] relacionados con los diseños óptimos (y/o completaciones óptimas) con normas predeterminadas con respecto a un potencial convexo arbitrario. En cuanto al Problema de Strawn, los resultados obtenidos en este capítulo nos permitirán probar al inicio del Capítulo 4 que la conjetura planteada en [63] es cierta, incluso de manera más general.

3.1. Minimizadores locales de completaciones de marcos con normas predeterminadas

En esta sección dada una familia inicial $\mathcal{F}_0 = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_{n_0}} \in (\mathbb{C}^d)^{n_0}$, una sucesión de normas predeterminadas $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$ y una función $\varphi \in \operatorname{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, vamos a describir las primeras características estructurales de los minimizadores locales de la función de la Eq. (3.1), para potenciales convexos generales de la forma

$$\Psi_\varphi(\mathcal{G}) := P_\varphi(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}) = \operatorname{tr}(\varphi(S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}})) \quad \text{para} \quad \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a}).$$

En la Sección 3.1.1, basándonos en el Teorema de Lidskii local para potenciales convexos 2.1.6, vamos a probar que los vectores de una familia $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ que es minimizador local de Ψ_φ son autovectores del operador de marco de $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$ y que además $S_{\mathcal{F}_0}$ y $S_{\mathcal{G}_0}$ verifican la igualdad en la desigualdad de Lidskii. También daremos dos argumentos de reducción que nos permitirán calcular en la Sección 3.1.2 la estructura interna de los minimizadores locales.

3.1.1. Propiedades geométricas de los minimizadores locales

En esta sección comenzaremos a estudiar la geometría relativa (tanto de los vectores del marco, como de los autovectores del operador de marco asociado) de las completaciones de marcos con normas predeterminadas que son minimizadores locales de potenciales estrictamente convexos. En adelante utilizaremos la siguiente notación y nociones básicas.

Notación 3.1.1.

1. $\mathcal{F}_0 = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_{n_0}}$ será una familia fija en $(\mathbb{C}^d)^{n_0}$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$ un vector de normas predeterminadas, también fijo.

2. Dado un subespacio $V \subseteq \mathbb{C}^d$ denotaremos por

$$\mathbb{T}_V(\mathbf{a}) = \Big\{\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in V^k : \ \|g_i\|^2 = a_i\,, \ i \in \mathbb{I}_k \ \Big\}\,,$$

dotado con la topología producto - de la topología usual en $\mathbb{T}_V(a_i)$ para $i \in \mathbb{I}_k$ - i.e. la que es inducida por la métrica

$$d(\mathcal{G}\,,\,\tilde{\mathcal{G}})^2 = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} \|g_i - \tilde{g}_i\|^2\ .$$

3. Recordemos el conjunto $\mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0)$ definido en la Eq. (1.16), dado por

$$\mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0) = \Big\{\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G}) \in (\mathbb{C}^d)^{n_0+k} \ : \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\Big\}\ .$$

Para $\varphi \in \text{Conv}_s(\mathbb{R}_{\geq 0})$, vamos a considerar el potencial convexo inducido por φ, de la sucesión completada $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0 \, , \, \mathcal{G}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0)$; i.e. la función $\Psi_\varphi = \Psi_{(\varphi \, , \, \mathcal{F}_0)} : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to [0, \infty)$ dada por

$$\Psi_\varphi(\mathcal{G}) = P_\varphi(\mathcal{F}_0 \, , \, \mathcal{G}) = \text{tr}\, \big(\varphi(S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}}) \big) \quad \text{para toda familia} \quad \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \, . \tag{3.2}$$

4. La familia $\mathcal{G}_0 = \{g_i\}_{i \in \mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ denotará un *minimizador local* de Ψ_φ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. △

En la Sección 3.2 veremos que $\mathcal{G}_0$ es en realidad un minimizador global de Ψ_φ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, en otras palabras, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0 \, , \, \mathcal{G}_0)$ es un minimizador global en $\mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0)$ para el potencial convexo P_φ y es independiente de la función φ.

El siguiente resultado, el cual está basado en el Teorema de Lidskii local para autovalores 2.1.6, representa las primeras propiedades estructurales de los minimizadores locales de los potenciales estrictamente convexos.

Teorema 3.1.2. Consideremos la Notación 3.1.1 y fijemos un minimizador local $\mathcal{G}_0 = \{g_i\}_{i \in \mathbb{I}_k}$ de Ψ_φ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. Luego,

1. Para todo $j \in \mathbb{I}_k$, $S_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}_0}$ conmuta con $g_j \otimes g_j$ o equivalentemente, g_j es un autovector de $S_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}_0}$.

2. Existe una bon $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$S_{\mathcal{F}_0} = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \lambda_i(S_{\mathcal{F}_0})^\uparrow \, v_i \otimes v_i \quad \text{y} \quad S_{\mathcal{G}_0} = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \lambda_i(S_{\mathcal{G}_0})^\downarrow \, v_i \otimes v_i \quad .$$

   En particular, podemos afirmar que $\lambda(S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}_0}) = \big[\lambda^\uparrow(S_{\mathcal{F}_0}) + \lambda(S_{\mathcal{G}_0}) \big]^\downarrow$.

Demostración. Para cada $j \in \mathbb{I}_k$, vamos a considerar

$$S_j = S_{\mathcal{F}_0} + \sum_{i \in \mathbb{I}_n \setminus \{j\}} g_i \otimes g_i \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+ \quad \text{y} \quad \mu_{[j]} = a_j \, e_1 \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow \, .$$

Notemos que, como en la Eq.(2.1), la órbita unitaria de $\mu_{[j]}$ es

$$\mathcal{O}_{\mu_{[j]}} = \{ g \otimes g : \|g\|^2 = a_j \} \, .$$

Por hipótesis, es claro que (comparando las funciones Ψ_φ y $\Phi_{(\varphi \, , \, S_j \, , \, \mu_{[j]})}$ definida en la Eq. (2.4)) la matriz $G_j = g_j \otimes g_j$ es un minimizador local de $\Phi_{(\varphi \, , \, S_j \, , \, \mu_{[j]})}$ en $\mathcal{O}_{\mu_{[j]}}$. Haciendo uso del Teorema 2.1.6, podemos concluir que S_j y G_j conmutan, lo cual implica el ítem 1.

Para probar el ítem 2 notemos que, por hipótesis, existe $\varepsilon > 0$ tal que toda matriz

$$U \in B_{(I \, , \, \varepsilon)} \stackrel{\text{def}}{=} \{ U \in \mathcal{U}(d) : \|I - U\| < \epsilon \}$$

satisface que $U \cdot \mathcal{G}_0 = \{U \, g_i\}_{i \in \mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, $S_{U \cdot \mathcal{G}_0} = U \, S_{\mathcal{G}_0} \, U^*$ y $U \cdot \mathcal{G}_0$ está lo suficientemente cerca de $\mathcal{G}_0$, por lo cual

$$\Phi_{(\varphi \, , \, S_{\mathcal{F}_0} \, , \, \mu)}(U \, S_{\mathcal{G}_0} \, U^*) = \text{tr}\, \big(\varphi(S_{\mathcal{F}_0} + U \, S_{\mathcal{G}_0} \, U^*) \big) = \Psi_\varphi(U \cdot \mathcal{G}_0) \geq \Psi_\varphi(\mathcal{G}_0) = \Phi_{(\varphi \, , \, S_{\mathcal{F}_0} \, , \, \mu)}(S_{\mathcal{G}_0}) \, .$$

Tomemos ahora el vector $\mu = \lambda(S_{\mathcal{G}_0}) \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$. Notemos que la función $\pi : \mathcal{U}(d) \to \mathcal{O}_\mu$ dada por $\pi(U) = U \, S_{\mathcal{G}_0} \, U^*$, es abierta y tiene un sección local continua en $I \in \mathcal{U}(d)$ (ver [1, Teo. 4.1]), por lo tanto $\pi(B_{(I \, , \, \varepsilon)})$ es un entorno abierto de $S_{\mathcal{G}_0}$ en $\mathcal{O}_\mu$ y $S_{\mathcal{G}_0}$ es un minimizador local para $\Phi_{(\varphi \, , \, S_{\mathcal{F}_0} \, , \, \mu)}$ en $\mathcal{O}_\mu$. El ítem 2 ahora se sigue del Teorema 2.1.6. □

Notación 3.1.3. Consideremos la Notación 3.1.1. Luego, el Teorema 3.1.2 nos permite introducir las siguientes nociones y notaciones:

1. Denotemos por $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} = \lambda(S_{\mathcal{F}_0})^\uparrow \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\uparrow$ y $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{I}_d} = \lambda(S_{\mathcal{G}_0})^\downarrow \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$.

2. Fijemos una bon $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ como la del Teorema 3.1.2. Luego,
$$S_{\mathcal{F}_0} = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i \; v_i \otimes v_i \quad \text{ y } \quad S_{\mathcal{G}_0} = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \mu_i \; v_i \otimes v_i \ , \tag{3.3}$$

3. Denotaremos por $\nu(\mathcal{G}_0) = \lambda + \mu \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$, de este modo:
$$S_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}_0} = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \nu_i(\mathcal{G}_0) \; v_i \otimes v_i \, .$$
Notemos que $\nu(\mathcal{G}_0)$ se construye emparejando las entradas de los vectores ordenados (pues $\lambda = \lambda^\uparrow$ y $\mu = \mu^\downarrow$) pero $\nu(\mathcal{G}_0)$ no necesariamente es un vector ordenado. Sin embargo, ordenando las entradas de forma no-creciente, se tiene que $\nu(\mathcal{G}_0)^\downarrow = \lambda(S_{\mathcal{F}})$. En lo que sigue vamos a obtener algunas propiedades del vector (no ordenado) $\nu(\mathcal{G}_0)$.

4. Sea $s_{\mathcal{F}} = \text{máx}\,\{i \in \mathbb{I}_d : \mu_i \neq 0\} = \text{rk}\, S_{\mathcal{G}_0}$. Denotaremos por $W = \text{gen}\, g_1, \cdots, g_k = R(S_{\mathcal{G}_0})$, el cual reduce a $S_{\mathcal{F}}$.

5. Sean $S = S_{\mathcal{F}}\big|_W = S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}_0}|_W \in L(W)$ y $\sigma(S) = \{c_1\,, \,\dots\,, \,c_p\}$ (donde $c_1 > c_2 > \ldots > c_p > 0$).

6. Para cada $j \in \mathbb{I}_p$, vamos a considerar los siguientes conjuntos de índices:
$$K_j = \{i \in \mathbb{I}_{s_{\mathcal{F}}} : \nu_i(\mathcal{G}_0) = \lambda_i + \mu_i = c_j\} \quad \text{ y } \quad J_j = \{i \in \mathbb{I}_k : S\, g_i = c_j\, g_i\} \ .$$
El Teorema 3.1.2 nos asegura que $\mathbb{I}_{s_{\mathcal{F}}} = \bigsqcup_{j\in\mathbb{I}_p} K_j \quad$ y $\quad \mathbb{I}_k = \bigsqcup_{j\in\mathbb{I}_p} J_j$.

7. Como $R(S_{\mathcal{G}_0}) = \text{gen}\{g_i : i \in \mathbb{I}_k\} = W = \bigoplus_{i\in\mathbb{I}_p} \ker\,(S - c_i\, I_W\,)$ entonces, para todo $j \in \mathbb{I}_p$,
$$W_j \stackrel{\text{def}}{=} \text{gen}\{g_i : i \in J_j\} = \ker\,(S - c_j\, I_W\,) = \text{gen}\{v_i : i \in K_j\} \ , \tag{3.4}$$
pues $g_i \in \ker\,(S - c_j\, I_W\,)$ para todo $i \in J_j$. Notemos que, por el Teorema 3.1.2, cada W_j reduce tanto a $S_{\mathcal{F}_0}$ como a $S_{\mathcal{G}_0}$. △

La siguiente observación nos permitirá considerar argumentos de reducción cuando calculemos diferentes aspectos de la estructura de los minimizadores locales del problema de completaciones con normas predeterminadas.

Observación 3.1.4 (Dos argumentos de reducción para minimizadores locales)**.** Consideremos los datos y la terminología fijada en las Notaciones 3.1.1 y 3.1.3.

a) Para $j \leq p - 1$ denotamos por
$$I_j = \mathbb{I}_d \setminus \bigcup_{i\leq j} K_i \ ; \ L_j = \mathbb{I}_k \setminus \bigcup_{i\leq j} J_i \ ; \ \lambda^{I_j} = (\lambda_i)_{i\in I_j} \ ; \ \mathcal{G}_0^{(j)} = \{g_i\}_{i\in L_j}\, ; \, \mathbf{a}^{L_j} = (a_i)_{i\in L_j}$$

y tomemos una sucesión $\mathcal{F}_0^{(j)}$ en $\mathcal{H}_j = \big[\bigoplus_{i\le j} W_i\big]^\perp$ tal que $S_{\mathcal{F}_0^{(j)}} = S_{\mathcal{F}_0}|_{\mathcal{H}_j}$ (notar que, por construcción, $\mathcal{H}_j$ reduce a $S_{\mathcal{F}_0}$). Luego, se puede ver de manera directa que $\mathcal{G}_0^{(j)}$ es un minimizador local de $\Psi^j_{(\varphi\,,\,\mathcal{F}_0^{(j)})} : \mathbb{T}_{\mathcal{H}_j}(\mathbf{a}^{L_j}) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$. En efecto, si $\mathcal{M}_j$ es cualquier sucesión de $|L_j|$ vectores en $\mathcal{H}_j$ con normas predeterminadas por $\mathbf{a}^{L_j}$, entonces $\mathcal{M} = (\{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k\setminus L_j}\,,\,\mathcal{M}_j) \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ (en algún orden) y

$$\Psi_\varphi(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^{j} \varphi(c_i)\ \dim W_i + \Psi^j_\varphi(\mathcal{M}_j)\ ,$$

donde la última ecuación es una consecuencia de las relaciones de ortogonalidad entre las familias. Notemos también que la distancia entre las (sub)familias $\mathcal{M}_j$ y $\mathcal{G}_0^{(j)}$ es la misma como distancia entre las familias $\mathcal{M}$ y $\mathcal{G}_0$.

La importancia de las observaciones previas yace en el hecho de que nos proveen un método de reducción, tanto para calcular la estructura de los conjuntos $\mathcal{G}_0^{(i)}$, K_i y J_i para $1 \le i \le p$, como para el conjunto de constantes $c_1 > \ldots > c_p \ge 0$. En efecto, supongamos que podemos describir los conjuntos $\mathcal{G}_0^{(1)}$, K_1 , J_1 y la constante c_1 en algún sentido estructural, utilizando el hecho de que esos conjuntos son extremales (e.g. esos conjuntos son construidos en base a $c_1 > c_j$ para $2 \le j \le p$). Luego, podemos aplicar el mismo argumento para calcular, por ejemplo, los conjuntos $\mathcal{G}_0^{(2)}$, K_2 , J_2 pensando que son extremales para el problema reducido que describimos anteriormente para $j = 1$.

b) Supongamos que $k \in \mathbb{I}_{d-1}$ y sea $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0)$. Fijemos una sucesión $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \{\tilde{f}_i\}_{i\in\mathbb{I}_{n_0}}$ en $W = R(S_{\mathcal{G}_0})$ tal que $S_{\tilde{\mathcal{F}}_0} = S_{\mathcal{F}_0}|_W$. Luego, para todo $\mathcal{M} \in \mathbb{T}_W(\mathbf{a})$,

$$\Psi_{(\varphi\,,\,\mathcal{F}_0)}(\mathcal{M}) = \mathrm{P}_\varphi(\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{M}) = \mathrm{P}_\varphi(\tilde{\mathcal{F}}_0\,,\,\mathcal{M}) + \sum_{i=k+1}^{d} \varphi(\lambda_i) = \Psi_{(\varphi\,,\,\tilde{\mathcal{F}}_0)}(\mathcal{M}) + \sum_{i=k+1}^{d} \varphi(\lambda_i)\ ,$$

incluso para $\mathcal{M} = \mathcal{G}_0$. La identidad anterior nos muestra que $\mathcal{G}_0$ es un minimizador local de $\Psi_{(\varphi\,,\,\tilde{\mathcal{F}}_0)}$ en $\mathbb{T}_W(\mathbf{a})$. En este caso se tiene que $d' = \dim W = \mathrm{rk}(S_{\mathcal{G}_0}) \le k$. Luego, a fin de calcular la estructura de $\mathcal{G}_0$, podemos asumir -como lo haremos siempre en este capítulo- que $k \ge d$.

$\triangle$

3.1.2. Estructura interna de los minimizadores locales

A lo largo de esta sección vamos a considerar las Notaciones 3.1.1 y 3.1.3. Recordemos que hemos fijado una función $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\ge 0})$ y una sucesión de vectores $\mathcal{G}_0 = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ que es un minimizador local del potencial $\Psi_{(\varphi\,,\,\mathcal{F}_0)}$ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$.

El objetivo de esta sección es estudiar las particiones del espectro de $S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}_0}$, cuando $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ es un minimizador local de $\Psi_{(\varphi\,,\,\mathcal{F}_0)}$, explotando la noción de feasibilidad establecida por Massey, Ruiz y Stojanoff en [59] (ver Sección 1.2.2).

El siguiente resultado está inspirado en [15].

Proposición 3.1.5. Sea $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G}_0) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0)$ como en la Notación 3.1.3 y supongamos que existen $j \in \mathbb{I}_p$ y $c \in \sigma(S_\mathcal{F})$ tales que $c < c_j$. Luego, la familia $\{g_i\}_{i\in J_j}$ es linealmente independiente.

Demostración. Supongamos que para algún $j \in \mathbb{I}_p$ la familia $\{g_i\}_{i\in J_j}$ es linealmente dependiente. Luego, existen coeficientes $z_l \in \mathbb{C}$ para $l \in J_j$ (no todos nulos) tales que $|z_l| \le 1/2$ y

$$\sum_{l\in J_j} \overline{z_l}\ a_l^{1/2}\ g_l = 0\ . \tag{3.5}$$

Sea $I_j \subseteq J_j$ dado por $I_j = \{l \in J_j : \ z_l \neq 0\}$. Supongamos que existe $c \in \sigma(S_{\mathcal{F}})$ tal que $c < c_j$ y sea $h \in \mathbb{C}^d$ tal que $\|h\| = 1$ y $S_{\mathcal{F}} h = c\, h$. Para $t \in (-1/2, 1/2)$ vamos a considerar $\mathcal{F}(t) = (\mathcal{F}_0\, , \mathcal{G}(t))$, donde la familia $\mathcal{G}(t) = \{g_i(t)\}_{i \in \mathbb{I}_k}$ está dada por

$$g_l(t) = \begin{cases} (1 - t^2\, |z_l|^2)^{1/2} g_l + t\, z_l\, a_l^{1/2}\, h & \text{si} \quad l \in I_j\, ; \\ \qquad g_l & \text{si} \quad l \in \mathbb{I}_k \setminus I_j\ . \end{cases}$$

Notar que $\mathcal{G}(t) \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ para $t \in (-1/2, 1/2)$. Si denotamos la parte real de $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ por $\mathrm{Re}(A) = \frac{A + A^*}{2}$, para $l \in I_j$ se tiene que

$$g_l(t) \otimes g_l(t) = (1 - t^2\, |z_l|^2)\ g_l \otimes g_l + t^2\, |z_l|^2\, a_l\ h \otimes h + 2\, (1 - t^2\, |z_l|^2)^{1/2}\, t\ \ \mathrm{Re}(h \otimes \overline{z_l}\, a_l^{1/2}\, g_l)\, .$$

Luego, si llamamos $S(t)$ al operador de marco de la familia $\mathcal{F}(t) = (\mathcal{F}_0\, , \mathcal{G}(t)) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}\,(\mathcal{F}_0)$, entonces $S(0) = S_{\mathcal{F}}$. Notemos además que

$$S(t) = S_{\mathcal{F}} + t^2 \sum_{l \in I_j} |z_l|^2\, (-g_l \otimes g_l + a_l\ h \otimes h) + R(t)\, ,$$

donde $R(t) = 2 \sum\limits_{l \in I_j} (1 - t^2\, |z_l|^2)^{1/2}\, t\ \ \mathrm{Re}(h \otimes a_l^{1/2}\, \overline{z_l}\, g_l)$. Luego $R(t)$ es una función suave y tal que

$$R(0) = 0 \quad , \quad R'(0) = \sum_{l \in I_j} \mathrm{Re}(h \otimes \overline{z_l}\, a_l^{1/2}\, g_l) = \mathrm{Re}(h \otimes \sum_{l \in I_j} \overline{z_l}\, a_l^{1/2}\, g_l) \overset{(3.5)}{=} 0\ ,$$

y $R''(0) = 0$. Por lo tanto, $\lim\limits_{t \to 0}\ t^{-2}\ R(t) = 0$. Consideremos ahora el subespacio

$$V = \mathrm{gen}\, \big(\{g_l :\ l \in I_j\} \cup \{h\} \big) = \mathrm{gen}\, \big\{\, g_l :\ l \in I_j\, \big\} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{C} \cdot h\ .$$

Luego, $\dim V = s + 1$ para $s = \dim \mathrm{gen}\{g_l :\ l \in I_j\} \geq 1$. Por construcción, V reduce a $S_{\mathcal{F}}$ y a $S(t)$ para $t \in \mathbb{R}$, de manera tal que $S(t)|_{V^\perp} = S_{\mathcal{F}}|_{V^\perp}$ para $t \in \mathbb{R}$. Por otro lado

$$S(t)|_V = S_{\mathcal{F}}|_V + t^2 \sum_{l \in I_j} |z_l|^2\, (-g_l \otimes g_l + a_l\ h \otimes h) + R(t) = A(t) + R(t) \in L(V)\ , \tag{3.6}$$

donde hemos utilizado el hecho de que los rangos de los operadores autoadjuntos del segundo y tercer término de la fórmula anterior, claramente están contenidos en V. Luego, $\lambda\big(\, S_{\mathcal{F}}|_V\, \big) = \big(\, c_j\, \mathbb{1}_s\, , \, c\, \big) \in (\mathbb{R}_{>0}^{s+1})^\downarrow$ y

$$\lambda \Big(\textstyle\sum_{l \in I_j} |z_l|^2 g_l \otimes g_l \Big) \ = (\gamma_1\, , \, \dots\, , \, \gamma_s\, , \, 0) \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^{s+1})^\downarrow \quad \text{con} \quad \gamma_s > 0\ ,$$

por como hemos definido s y porque $|z_l| > 0$ para $l \in I_j$ (y el hecho conocido de que si $S\, , T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ entonces $R(S + T) = R(S) + R(T)$). Luego, para t lo suficientemente chico, el espectro del operador $A(t) \in L(V)$ definido en (3.6) es

$$\lambda\big(\, A(t)\, \big) \ = \big(\, c_j - t^2\, \gamma_s\, , \, \dots\, , \, c_j - t^2\, \gamma_1\, , \, c + t^2\, \textstyle\sum_{l \in I_j} a_l\, |z_l|^2\, \big) \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^{s+1})^\downarrow\ ,$$

pues $\langle g_l\, , \, h \rangle = 0$ para todo $l \in I_j$. Consideremos ahora,

$$\lambda\big(\, R(t)\, \big) = \big(\, \delta_1(t)\, , \, \dots\, , \, \delta_{s+1}(t)\, \big) \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^{s+1})^\downarrow \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

Recordemos que en este caso $\lim\limits_{t\to 0} t^{-2}\delta_j(t) = 0$ para $1 \le j \le s+1$. Aplicando la desigualdad de Weyl de la Eq. (1.5) a la Eq. (3.6), podemos ver que

$$\lambda\big(\, S(t)|_V \,\big) \prec \lambda\big(\, A(t)\,\big) + \lambda\big(\, R(t)\,\big) \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \rho(t) \in (\mathbb{R}_{\ge 0}^{s+1})^{\downarrow} .$$

Lo que sabemos es que

$$\begin{aligned}\rho(t) \ &= \big(\, c_j - t^2\,\gamma_s + \delta_1(t)\,,\ \ldots\,,\ c_j - t^2\,\gamma_1 + \delta_s(t)\,,\ c + t^2\,\textstyle\sum_{l\in I_j} a_l\,|z_l|^2 + \delta_{s+1}(t)\,\big)\\ &= \Big(\, c_j - t^2\,(\gamma_s - \tfrac{\delta_1(t)}{t^2})\,,\ \ldots\,,\ c_j - t^2\,(\gamma_1 - \tfrac{\delta_s(t)}{t^2})\,,\ c + t^2\,(\textstyle\sum_{l\in I_j} a_l\,|z_l|^2 + \tfrac{\delta_{s+1}(t)}{t^2})\,\Big)\ .\end{aligned}$$

Como por hipótesis $c_j > c$, las observaciones previas muestran que existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $t \in (0,\varepsilon)$ entonces para todo $i \in \mathbb{I}_s$ resulta

$$c_j > c_j - t^2(\gamma_{s-i+1} - \frac{\delta_i(t)}{t^2}) > c + t^2\,(\sum_{l\in I_j} a_l\,|z_l|^2 + \frac{\delta_{s+1}(t)}{t^2})\,.$$

Los hechos previos muestran que para $t \in (0,\varepsilon)$ vale, de manera estricta, la relación de mayorización

$$\rho(t) \prec \lambda(S_{\mathcal{F}}|_V) = \big(\, c_j\,\mathbb{1}_s\,,\ c\,\big)\,.$$

Como la función φ es estrictamente convexa, para todo $t \in (0,\varepsilon)$ se tiene que

$$\Psi_\varphi\big(\,\mathcal{G}(t)\,\big) \le \operatorname{tr}\,\varphi\big(\,\lambda(S_{\mathcal{F}}|_{V^\perp})\,\big) + \operatorname{tr}\,\varphi\big(\,\rho(t)\,\big) < \operatorname{tr}\,\varphi\big(\,\lambda(S_{\mathcal{F}}|_{V^\perp})\,\big) + \operatorname{tr}\,\varphi\big(\,\lambda(\,S_{\mathcal{F}}|_V\,)\,\big) = \Psi_\varphi(\mathcal{G}_0)\ ,$$

lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{G}_0$ sea un minimizador local de Ψ_φ in $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. □

Recordemos que de acuerdo a la Notación 3.1.3, $c_1 > \ldots > c_p$. Luego, el siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la Proposición 3.1.5.

Corolario 3.1.6. Sea $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G}_0) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}\,(\mathcal{F}_0)$ como en la Notación 3.1.3 y supongamos que $p > 1$. Luego, la familia $\{g_i\}_{i\in J_j}$ es linealmente independiente para todo $j \in \mathbb{I}_{p-1}$. En particular, por la Eq. (3.4), se tiene que

$$\dim(W_j) = |K_j| = |J_j| \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_{p-1}\ .$$ □

Corolario 3.1.7. Consideremos la Notación 3.1.3 y $k \ge d$. Sea $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G}_0) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}\,(\mathcal{F}_0)$ y supongamos que, para $W = R(S_{\mathcal{G}_0})$, el operador $S_{\mathcal{F}}|_W \in L(W)$ tiene un sólo autovalor. Luego:

1. $(\lambda,\,\mathbf{a})$ es feasible;
2. $\lambda(S_{\mathcal{F}})^{\uparrow} = \nu(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ y $\lambda(S_{\mathcal{G}_0}) = \mu(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ (ver Definición 1.2.9);
3. $\mathcal{F}$ es un minimizador global de Ψ_φ in $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$.

Demostración. Comencemos suponiendo que $s_{\mathcal{F}} = d$, i.e. $W = \mathbb{C}^d$. En este caso $S_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}_0} = c_1\,I$ y $\mathcal{F}$ es un marco ajustado. Por los comentarios hechos al final de la Observación 1.2.8 y la Definición 1.2.9 (notar que en este caso $\min\{d,k\} = d$) podemos ver que $\nu(\lambda\,,\,\mathbf{a}) = c_1\,\mathbb{1}_d$. Luego,

$$\mu(\lambda\,,\,\mathbf{a}) = c_1\,\mathbb{1}_d - \lambda = \lambda(S_{\mathcal{G}_0})^{\downarrow}\ .$$

Como $S_{\mathcal{G}_0}$ es el operador de marco de la familia $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, la Proposición 1.2.4 muestra que la relación de mayorización $\mathbf{a} \prec \mu(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ vale, entonces el par $(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ es feasible. El hecho de que $\mathcal{G}_0$ sea un minimizador global de Ψ_φ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ ahora se sigue del Teorema 1.2.10.

Consideremos el caso $s_\mathcal{F} < d$. Luego, $\mu_i > 0$ para $1 \le i \le s_\mathcal{F}$ y

$$S_\mathcal{F} = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} (\lambda_i + \mu_i)\ v_i \otimes v_i = \sum_{i\in\mathbb{I}_{s_\mathcal{F}}} c_1\ v_i \otimes v_i + \sum_{i=s_\mathcal{F}+1}^{d} \lambda_i\ v_i \otimes v_i\,.$$

En particular, $c_1 = \lambda_{s_\mathcal{F}} + \mu_{s_\mathcal{F}} > \lambda_{s_\mathcal{F}}$. Por otro lado, $k \ge d > \dim W$, entonces $\{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} = \{g_i\}_{i\in J_1}$ es una familia linealmente dependiente. Luego, la Proposición 3.1.5 implica que $c_1 \le \lambda_i$ para $s_\mathcal{F}+1 \le i \le d$; en particular, $c_1 \le \lambda_{s_\mathcal{F}+1}$.

Los hechos previos junto con la Observación 1.2.8, muestran que

$$\lambda(S_\mathcal{F})^\uparrow = (c_1\,\mathbb{1}_{s_\mathcal{F}}, \lambda_{s_\mathcal{F}+1}, \ldots, \lambda_d) = \nu(\lambda\,,\,\mathbf{a}),$$

de acuerdo con la Definición 1.2.9. Más aun, también se tiene que $\lambda(S_{\mathcal{G}_0}) = \nu(\lambda\,,\,\mathbf{a}) - \lambda = \mu(\lambda\,,\,\mathbf{a})$. Nuevamente, como $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, por el Teorema de Schur-Horn para marcos 1.2.4 podemos concluir que la relación de mayorización $\mathbf{a} \prec \mu(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ vale y por lo tanto, el par $(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ es feasible. Como antes, el Teorema 1.2.10 muestra que $\mathcal{G}_0$ es un minimizador global de Ψ_φ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. $\square$

El siguiente resultado es [61, Proposición 4.5]. Aunque este resultado haya sido establecido para los minimizadores globales en [61], inspeccionando en la demostración (para $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\ge 0})$, entonces valen los resultados previos) se puede ver que también es cierto para el caso de los minimizadores locales. Recordemos de la Notación 3.1.3 que, si $p > 1$ entonces

$$K_j = \{i \in \mathbb{I}_{s_\mathcal{F}} : \lambda_i + \mu_i = c_j\} \quad \text{y} \quad J_j = \{i \in \mathbb{I}_k : S_\mathcal{F}\, g_i = c_j\, g_i\}$$

para cada $j \in \mathbb{I}_p$, donde $\lambda = \lambda(S_{\mathcal{F}_0})^\uparrow$ y $\mu = \mu^\downarrow = \lambda(S_{\mathcal{G}_0})$.

Proposición 3.1.8. Consideremos la Notación 3.1.3 con $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G}_0) \in \mathcal{C}_\mathbf{a}^{\mathrm{op}}(\mathcal{F}_0)$ y supongamos que $k \ge d$ y $p > 1$. Dados $i\,,\,r \in \mathbb{I}_p$, $h \in J_i$ y $l \in J_r$ se tiene que

$$i < r \implies a_h - a_l \ge c_i - c_r > 0 \implies h < l\,.$$

En particular, existe $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_{p-1} < s_\mathcal{F} \le d$ tal que

$$J_j = \{s_{j-1}+1\,,\,\ldots\,,\,s_j\} \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_{p-1} \quad \text{y} \quad J_p = \{s_{p-1}+1\,,\,\ldots\,,\,k\}\,. \qquad \square$$

Proposición 3.1.9. Consideremos la Notación 3.1.3 con $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G}_0) \in \mathcal{C}_\mathbf{a}^{\mathrm{op}}(\mathcal{F}_0)$ y supongamos que $k \ge d$ y $p > 1$. Luego,

$$i \in K_1 \implies i < j\ (\implies \lambda_i \le \lambda_j) \quad \text{para todo} \quad j \in \bigcup_{r>1} K_r = \mathbb{I}_{s_\mathcal{F}} \setminus K_1\,.$$

Inductivamente, por la Observación 3.1.4, podemos deducir que los conjuntos K_j consisten de índices consecutivos. Por lo tanto, si $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_{p-1} < s_p \overset{\text{def}}{=} s_\mathcal{F}$ son como en la Proposición 3.1.8 entonces

$$K_j = \{s_{j-1}+1\,,\,\ldots\,,\,s_j\} = J_j \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_{p-1} \quad \text{y} \quad K_p = \{s_{p-1}+1, \ldots, s_p\}\,.$$

Demostración. Supongamos que existen $i \in K_1$ y $j \in K_r$ para $1 < r$ tales que $j < i$. En este caso,

$$\mu_i \le \mu_j \quad , \quad \lambda_j \le \lambda_i \quad \text{y} \quad c_1 = \lambda_i + \mu_i > c_r = \lambda_j + \mu_j \ .$$

Consideremos $\mathcal{B} = \{v_l\}_{l \in \mathbb{I}_d}$ como en la Notación 3.1.3. Para $t \in [0,1)$ definimos

$$g_l(t) = g_l + \big((1-t^2)^{1/2} - 1 \big) \ \langle g_l, v_i \rangle \ v_i + t \ \langle g_l, v_i \rangle \ v_j \quad \text{para} \quad l \in \mathbb{I}_k \, . \tag{3.7}$$

Notemos que, si $l \in J_1$, entonces $S_{\mathcal{F}} \, g_l = c_1 \, g_l \implies \langle g_l \, , \, v_j \rangle = 0$. De manera similar, si $l \in \mathbb{I}_k \setminus J_1$ entonces $\langle g_l \, , \, v_i \rangle = 0$ (y por lo tanto $g_l(t) = g_l$). Luego, la sucesión $\mathcal{G}(t) = \{g_l(t)\}_{l \in \mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ para $t \in [0,1)$. Sean $P_i = v_i \otimes v_i$ y $P_{ji} = v_j \otimes v_i$ (entonces $P_{ji} \, x = \langle x \, , \, v_i \rangle \ v_j$). Luego, para todo $t \in [0 \, , \, 1)$,

$$g_l(t) = \big(I + ((1-t^2)^{1/2} - 1) \ P_i + t \ P_{ji} \big) \ g_l \quad \text{para todo} \quad l \in \mathbb{I}_k \ .$$

Esto es, si $V(t) = I + ((1-t^2)^{1/2} - 1) \ P_i + t \ P_{ji} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ entonces $g_l(t) = V(t) \ g_l$ para todo $l \in \mathbb{I}_k$ y $t \in [0,1)$. Por lo tanto se tiene que

$$\mathcal{G}(t) = V(t) \, G = \{V(t) \, g_l\}_{l \in \mathbb{I}_n} \implies S_{G(t)} = V(t) \, S_{\mathcal{G}} \, V(t)^* \quad \text{para} \quad t \in [0,1) \ .$$

Por consiguiente, obtenemos la representación:

$$S_{\mathcal{G}(t)} = \sum_{\ell \in \mathbb{I}_d \setminus \{i,\, j\}} \mu_\ell \ v_\ell \otimes v_\ell + \gamma_{11}(t) \ v_j \otimes v_j + \gamma_{12}(t) \ v_j \otimes v_i + \gamma_{21}(t) \ v_i \otimes v_j + \gamma_{22}(t) \ v_i \otimes v_i \ ,$$

donde las funciones $\gamma_{rs}(t)$ son las entradas de la matriz $A(t) = \big(\gamma_{rs}(t) \big)_{r\,,\,s=1}^2 \in \mathcal{H}(2)$ definidas por

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & (1-t^2)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_j & 0 \\ 0 & \mu_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & (1-t^2)^{1/2} \end{pmatrix} \quad \text{para todo} \quad t \in [0 \, , \, 1) \ .$$

Es fácil verificar que $\operatorname{tr}(A(t)) = \mu_i + \mu_j$ y $\det(A(t)) = (1-t^2) \, \mu_j \, \mu_i$. Estos hechos implican que si consideramos la función continua $L(t) = \lambda_{\text{máx}}(A(t))$ entonces $L(0) = \mu_j$ y $L(t)$ es estrictamente creciente en $[0,1)$. Cálculos directos prueban también que podemos considerar curvas continuas $x_i(t) : [0,1) \to \mathbb{C}^2$ que satisfagan que $\{x_1(t), \, x_2(t)\}$ sea una bon de $\mathbb{C}^2$ tal que

$$A(t) \, x_1(t) = L(t) \, x_1(t) \quad \text{para} \quad t \in [0,1) \quad \text{y} \quad x_1(0) = e_1 \ , \quad x_2(0) = e_2 \, .$$

Para $t \in [0,1)$ consideramos $X(t) = (u_{r,s}(t))_{r,s=1}^2 \in \mathcal{U}(2)$ con columnas $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Por construcción, $X(t) = [0,1) \to \mathcal{U}(2)$ es una curva continua tal que $X(0) = I_2$ y

$$X(t)^* \, A(t) \, X(t) = \begin{pmatrix} L(t) & 0 \\ 0 & \mu_i + \mu_j - L(t) \end{pmatrix} \, .$$

Finalmente, consideremos la curva continua $U(t) : [0,1) \to \mathcal{U}(d)$ dada por

$$U(t) = u_{11}(t) \, v_j \otimes v_j + u_{12}(t) \, v_j \otimes v_i + u_{21}(t) \, v_i \otimes v_j + u_{22}(t) \, v_i \otimes v_i + \sum_{\ell \in \mathbb{I}_d \setminus \{i,\, j\}} v_l \otimes v_l \ .$$

Notemos que $U(0) = I$; además, sea $\tilde{\mathcal{G}}(t) = U(t)^* \, \mathcal{G}(t) \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ para $t \in [0,1)$, la cual es una curva continua tal que $\tilde{\mathcal{G}}(0) = \mathcal{G}_0$. En este caso, para $t \in [0,1)$ se tiene que

$$S_{\tilde{\mathcal{G}}(t)} = U(t)^* \, S_{\mathcal{G}(t)} \, U(t) = L(t) \, v_j \otimes v_j + (\mu_i + \mu_j - L(t)) \, v_i \otimes v_i + \sum_{\ell \in \mathbb{I}_d \setminus \{i,\, j\}} \mu_\ell \ v_\ell \otimes v_\ell \ .$$

En otras palabras, $U(t)$ se construye de manera tal que $\mathcal{B} = \{v_l\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ consiste de autovectores de $S_{\tilde{\mathcal{G}}(t)}$ para todo $t \in [0,1)$. Luego, si $\tilde{\mathcal{F}}(t) = (\mathcal{F}_0\,,\,\tilde{\mathcal{G}}(t))$ y $E(t) = L(t) - \mu_j \geq 0$ para $t \in [0\,,\,1)$, se tiene que

$$S_{\tilde{\mathcal{F}}(t)} = (c_r + E(t)\,)\,v_j \otimes v_j + (c_1 - E(t)\,)\,v_i \otimes v_i + \sum_{\ell\in\mathbb{I}_d\setminus\{i,j\}} (\lambda_\ell + \mu_\ell)\,v_\ell \otimes v_\ell\ .$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $E(t) = L(t) - \mu_j \leq \frac{c_1 - c_r}{2}$ para $t \in [0,\varepsilon]$. (recordemos que $L(0) = \mu_j$ y $c_1 > c_r$). Como $L(t)$ (y por ende $E(t)$) es estrictamente creciente en $[0,1)$, se puede ver que

$$(c_1 - E(t)\,,\,c_r + E(t)) \prec (c_1\,,\,c_r) \implies \lambda(S_{\tilde{\mathcal{F}}(t)}) \prec \lambda(S_{\mathcal{F}}) \quad \text{para} \quad t \in (0\,,\,\varepsilon]\ ,$$

donde las relaciones de mayorización son estrictas. Luego, como $\varphi \in \operatorname{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ entonces

$$\Psi_\varphi(\tilde{\mathcal{G}}(t)) = \operatorname{tr}(\varphi(\lambda(S_{\tilde{\mathcal{F}}(t)}))) < \operatorname{tr}(\varphi(\lambda(S_{\mathcal{F}}))) = \Psi_\varphi(\mathcal{G}_0) \quad \text{para} \quad t \in (0\,,\,\varepsilon]\ .$$

Este último hecho contradice la minimalidad local de $\mathcal{G}_0$ y el resultado queda probado. La descripción de los conjuntos K_i ahora se sigue del Corolario 3.1.6. □

3.2. Los minimizadores locales son globales

A lo largo de esta sección vamos a considerar las Notaciones 3.1.1 y 3.1.3. Recordemos que la función $\varphi \in \operatorname{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ está fija, al igual que la familia $\mathcal{G}_0 = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ la cual es un minimizador local del potencial Ψ_φ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$.

En lo que sigue, vamos a probar que los minimizadores locales (como el $\mathcal{G}_0$) de Ψ_φ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ son minimizadores globales (ver Teorema 3.2.11). Con el fin de conseguirlo, desarrollaremos un estudio detallado la estructura interna de los minimizadores locales, basándonos en los resultados obtenidos en la Sección 3.1 y en el caso feasible dado por Massey, Ruiz y Stojanoff en [61] (ver la Sección 1.2.2).

Observación 3.2.1 (Caso $k \geq d$)**.** Consideremos las Notaciones 3.1.1 y 3.1.3 y supongamos que $k \geq d$. Luego, de acuerdo con las Proposiciones 3.1.8 y 3.1.9, existen $p \in \mathbb{I}_d$ y $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_{p-1} < s_p = s_{\mathcal{F}} \leq d$, donde $s_{\mathcal{F}} = \operatorname{rk}(S_{\mathcal{G}_0})$, tales que

$$\begin{aligned} K_j &= J_j = \{s_{j-1}+1\,,\,\ldots\,,\,s_j\} \qquad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_{p-1}\ , \\ K_p &= \{s_{p-1}+1\,,\,\ldots\,,\,s_p\}\ ,\ J_p = \{s_{p-1}+1\,,\,\ldots\,,\,k\}\ . \end{aligned} \tag{3.8}$$

En términos de estos índices, también se tiene que:

$$\lambda(S_{\mathcal{F}}) = \big(\,c_1\,\mathbb{1}_{s_1}\,,\,\ldots\,,\,c_p\,\mathbb{1}_{s_p - s_{p-1}}\,,\,\lambda_{s_p+1}\,,\,\ldots\,,\,\lambda_d\,\big)^{\downarrow} \in (\mathbb{R}^d_{>0})^{\downarrow} \quad \text{si} \quad s_p < d\,. \tag{3.9}$$

o

$$\lambda(S_{\mathcal{F}}) = \big(\,c_1\,\mathbb{1}_{s_1}\,,\,\ldots\,,\,c_p\,\mathbb{1}_{s_p - s_{p-1}}\,\big)^{\downarrow} \in (\mathbb{R}^d_{>0})^{\downarrow} \quad \text{si} \quad s_p = d\,. \tag{3.10}$$

Lo que haremos ahora será describir un algoritmo que calcule las constantes $c_1 > \ldots > c_p$ al mismo tiempo que los índices $s_1 < \ldots < s_p$ en términos del índice s_{p-1}. △

En adelante vamos a utilizar las definiciones y nociones dadas en la Sección 1.2.2. En particular recordemos que el par $(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ es *feasible* si $\mathbf{a} \prec \mu(\lambda\,,\,\mathbf{a}) = \nu(\lambda, \mathbf{a}) - \lambda$ (donde $\nu(\lambda, \mathbf{a})$ es el vector construido en la Eq. (1.18)); es decir, si

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_j} a_i \leq \sum_{i\in\mathbb{I}_j} \mu_i(\lambda\,,\,\mathbf{a}) \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_{r-1}\ , \tag{3.11}$$

A fin de mostrar el rol que cumple el índice s_{p-1} descrito en la Observación 3.2.1, vamos a considerar la siguiente

Definición 3.2.2. Sean $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\uparrow}$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^{\downarrow}$, con $k \geq d$.

1. Dado $0 \leq s \leq d-1$ denotaremos por
$$\lambda^s = (\lambda_{s+1}\,,\,\ldots\,,\,\lambda_d) \in \mathbb{R}^{d-s} \quad \text{ y } \quad \mathbf{a}^s = (a_{s+1}\,,\,\ldots\,,\,a_k) \in \mathbb{R}^{k-s}\ ,$$
a los truncamientos de los vectores λ y $\mathbf{a}$.

2. Diremos que el índice s es *feasible* (para el par $(\lambda\,,\,\mathbf{a})$) si $(\lambda^s\,,\,\mathbf{a}^s)$ es un par feasible (ver Definición 1.2.9); i.e. si $\mathbf{a}^s \prec \nu(\lambda^s\,,\,\mathbf{a}^s) - \lambda^s$. △

Notar que, con la notación y la terminología de la Definición 3.2.2, el par $(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ es feasible si, y sólo si, el índice $s = 0$ es feasible.

Proposición 3.2.3. Consideremos las Notaciones 3.1.1 y 3.1.3. Sean $k \geq d$ y $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_{p-1} < s_p \leq d$ como en la Observación 3.2.1. Luego:

1. El índice $s_{p-1} \geq 0$ es feasible;

2. La constante c_p y el índice s_p están determinados por:
$$c_p = (d - s_{p-1})^{-1}\,(\operatorname{tr}\lambda^{s_{p-1}} + \operatorname{tr}\mathbf{a}^{s_{p-1}}) \quad \text{ y } \quad s_p = d \quad \text{ si } \quad (d-s_{p-1})^{-1}\,(\operatorname{tr}\lambda^{s_{p-1}} + \operatorname{tr}\mathbf{a}^{s_{p-1}}) \geq \lambda_d,$$
o de otro modo, si $(d - s_{p-1})^{-1}\,(\operatorname{tr}\lambda^{s_{p-1}} + \operatorname{tr}\mathbf{a}^{s_{p-1}}) < \lambda_d$, por la identidad
$$\nu(\lambda^{s_{p-1}}\,,\,\mathbf{a}^{s_{p-1}}) = \big(\,c_p\,\mathbb{1}_{s_p - s_{p-1}}\,,\,\lambda_{s_p+1}\,,\,\ldots\,,\,\lambda_d\,\big) \quad \text{ y } \quad s_p < d\ . \tag{3.12}$$

3. Si consideramos $\mathcal{G}_0^{(p-1)} = \{g_i\}_{i=s_{p-1}+1}^k$ entonces $\lambda(S_{\mathcal{G}_0^{(p-1)}}) = ((\mu_i)_{i=s_{p-1}+1}^{s_p}, 0_{d-(s_p-s_{p-1})}) \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$; luego
$$(a_i)_{i=s_{p-1}+1}^k \prec (\mu_i)_{i=s_{p-1}+1}^{s_p}\,.$$

Demostración. Por la Observación 3.1.4 (ítem a con $j = p-1$) la familia $\mathcal{G}_0^{(p-1)} = \{g_i\}_{i=s_{p-1}+1}^k$ es un minimizador local de la función (para $k' = k - s_{p-1} \geq 1$)
$$\{\mathcal{K} = \{k_i\}_{i\in\mathbb{I}_{k'}} \in (\mathcal{H}_{p-1})^{k'}\ ,\ \|k_i\|^2 = a_{s_{p-1}+i}\,, i \in \mathbb{I}_{k'}\} \ni \mathcal{K} \mapsto \mathrm{P}_\varphi(\mathcal{F}_0^{(p-1)}, \mathcal{K}),$$
donde, según la notación de la Observación 3.1.4, $\mathcal{H}_{p-1} = \big[\,\bigoplus_{i\leq p-1} W_i\big]^{\perp}$ y $\mathcal{F}_0^{(p-1)}$ es una sucesión en $\mathcal{H}_{p-1}$ tal que $S_{\mathcal{F}_0^{p-1}} = S_{\mathcal{F}_0}|_{\mathcal{H}_{p-1}}$. Más aun, por construcción del subespacio $\mathcal{H}_{p-1}$ se puede ver que, si $\mathcal{F}^{(p-1)} = (\mathcal{F}_0^{(p-1)}, \mathcal{G}_0^{(p-1)}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}^{s_{p-1}}}(\mathcal{F}_0^{(p-1)})$ entonces
$$W_p = R(S_{\mathcal{G}_0^{(p-1)}}) \quad \text{ y } \quad S_{\mathcal{F}^{(p-1)}}\ P_{W_p} = c_p\ P_{W_p}\,.$$
Por lo tanto, por el Corolario 3.1.7, se tiene que el par $(\lambda^s\,,\,\mathbf{a}^s)$ es feasible. El resto de las afirmaciones se siguen de la Observación 1.2.8, el Corolario 3.1.7 y la Proposición 1.2.4. □

Observación 3.2.4. Observemos que, bajo las hipótesis de la Proposición 3.2.3 se tiene que el ítem 2 implica que
$$s_p = \text{máx}\{j \in \mathbb{I}_d :\ \lambda_j < c_p\} \in \mathbb{I}_d\,.$$ △

Notación 3.2.5. Consideremos las Notaciones 3.1.1 y 3.1.3, y supongamos que $k \geq d$.

1. Definimos $h_i := \lambda_i + a_i$ para todo $i \in \mathbb{I}_d$.
2. Dado $j \leq r \leq d$, consideramos
$$P_{j\,,\,r} = \frac{1}{r-j+1} \sum_{i=j}^{r} h_i = \frac{1}{r-j+1} \sum_{i=j}^{r} \lambda_i + a_i \,. \tag{3.13}$$
En adelante, vamos a abreviar $P_{1\,,\,r} = P_r$ para los promedios iniciales. △

El siguiente resultado nos permitirá obtener varias relaciones entre los índices y las constantes que describen a $\lambda(S_{\mathcal{F}})$ como en la Observación 3.2.1. Queremos señalar que las ideas detrás de esta demostración derivan de [61].

Lema 3.2.6. Consideremos las Notaciones 3.1.1 y 3.1.3 y supongamos que $k \geq d$ y $p > 1$. Luego, con la notación de la Observación 3.2.1 se tiene que

1. Si $1 \leq r \leq d$ entonces
$$(a_j)_{j\in\mathbb{I}_r} \prec (P_r - \lambda_j)_{j\in\mathbb{I}_r} \iff P_r \geq P_i \ , \quad i \in \mathbb{I}_r \iff P_r = \max\{P_i : \ i \in \mathbb{I}_r\} \,.$$
2. $c_1 = P_{s_1} = \max\{P_j : \ j \leq s_{p-1}\}$. Más aun, si $s_1 < t \leq s_{p-1} \implies P_t < c_1$.

Demostración. 1. Como $\lambda = \lambda^\uparrow$ y $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\downarrow$ entonces $(P_r - \lambda_j)_{j\in\mathbb{I}_r} = (P_r - \lambda_j)^\downarrow_{j\in\mathbb{I}_r}$ y $(a_j)_{j\in\mathbb{I}_r} = (a_j)^\downarrow_{j\in\mathbb{I}_r}$. Por otro lado,
$$\sum_{j\in\mathbb{I}_r} a_j = \sum_{r\in\mathbb{I}_r} P_r - \lambda_j \quad \text{ por definición de } \quad P_r \,.$$
Luego, $(a_j)_{j\in\mathbb{I}_r} \prec (P_r - \lambda_j)_{j\in\mathbb{I}_r}$ si, y sólo si, para $k \in \mathbb{I}_r$
$$\sum_{j\in\mathbb{I}_k} a_j \leq \sum_{j\in\mathbb{I}_k} (P_r - \lambda_j) \iff P_k = \frac{1}{k} \sum_{j\in\mathbb{I}_k} a_j + \lambda_j \leq P_r \,.$$

2. Por las Proposiciones 3.1.8 y 3.1.9 podemos ver que la sucesión $\{g_j\}_{j\in\mathbb{I}_{s_1}}$ es tal que los autovalores de su operador de marco están dados por $(\mu_1, \dots, \mu_{s_1}, 0, \dots, 0) \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$ y las normas de sus elementos están dadas por $\|g_j\|^2 = a_j$, para $j \in \mathbb{I}_{s_1}$. Por la Proposición 1.2.4 se tiene que $(a_j)_{j\in\mathbb{I}_{s_1}} \prec (\mu_j)_{j\in\mathbb{I}_{s_1}}$. Por otro lado, la Proposición 3.1.9 implica que $\lambda_j + \mu_j = c_1$ para $j \in \mathbb{I}_{s_1}$. Luego,
$$s_1\, c_1 = \sum_{j\in\mathbb{I}_{s_1}} \lambda_j + \mu_j = \sum_{j\in\mathbb{I}_{s_1}} \lambda_j + a_j \implies c_1 = \frac{1}{s_1} \sum_{j\in\mathbb{I}_{s_1}} \lambda_j + a_j = P_{s_1} \,. \tag{3.14}$$
De este modo,
$$(a_j)_{j\in\mathbb{I}_{s_1}} \prec (c_1 - \lambda_j)_{j\in\mathbb{I}_{s_1}} = (P_{s_1} - \lambda_j)_{j\in\mathbb{I}_{s_1}} \implies P_{s_1} = \max\{P_j : \ j \in \mathbb{I}_{s_1}\} \,.$$
Consideremos ahora $s_1 < t \leq s_{p-1}$ y sea $2 \leq r \leq p-1$ tal que $s_{r-1} < t \leq s_r$. Luego,
$$\begin{aligned} P_t &= \frac{s_1}{t} \left(\frac{1}{s_1} \sum_{j\in\mathbb{I}_{s_1}} h_j \right) + \frac{t-s_1}{t} \left(\frac{1}{t-s_1} \sum_{j=s_1+1}^{t} h_j \right) \\ &= \frac{s_1}{t}\, c_1 + \frac{t-s_1}{t} \left(\frac{1}{t-s_1} \,(\sum_{\ell=2}^{r-1} c_\ell \ (s_\ell - s_{\ell-1}) + \sum_{\ell=s_{r-1}+1}^{t} \lambda_\ell + a_\ell \ ) \right) , \end{aligned}$$

lo cual representa a P_t como una combinación convexa, donde hemos utilizado las identidades

$$\sum_{i=s_{\ell-1}+1}^{s_\ell} h_i = \sum_{i=s_{\ell-1}+1}^{s_\ell} \lambda_i + \mu_i = (s_\ell - s_{\ell-1})\ c_\ell$$

que se siguen de la relación de mayorización $(a_i)_{i=s_{\ell-1}+1}^{s_\ell} \prec (\mu_i)_{i=s_{\ell-1}+1}^{s_\ell}$ para $2 \le \ell \le p-1$, las cuales son una consecuencia de las Proposiciones 3.1.8, 3.1.9 y 1.2.4. Si ahora consideramos la relación

$$(a_i)_{i=s_{r-1}+1}^{s_r} \prec (\mu_i)_{i=s_{r-1}+1}^{s_r}\,,$$

junto con el hecho de que las entradas de esos dos vectores están ordenadas de manera no-creciente, podemos concluir que

$$\frac{1}{t-s_1}\ (\sum_{\ell=2}^{r-1} c_\ell\ (s_\ell - s_{\ell-1}) + \sum_{\ell=s_{r-1}+1}^{t} \lambda_\ell + a_\ell\ ) \le \frac{1}{t-s_1}\ (\sum_{\ell=2}^{r-1} c_\ell\ (s_\ell - s_{\ell-1}) + c_r\ (t - s_{r-1})\,) < c_1\,,$$

ya que la expresión de la izquierda es una combinación convexa de $c_2, \ldots, c_r < c_1$. Finalmente, podemos deducir que

$$P_t < \frac{s_1}{t}\ c_1 + \frac{t-s_1}{t}\ c_1 = c_1\,.$$

□

Proposición 3.2.7. Consideremos las Notaciones 3.1.1 y 3.1.3 para $k \ge d$. Sean $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_{p-1} < s_p \le d$ y $c_1 > \ldots > c_p$ como en la Observación 3.2.1 con $p > 1$. Luego, si $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$ se tienen las siguientes relaciones entre esos índices y las constantes:

1. El índice $s_1 = \max \left\{ j \le s_{p-1} \,:\, P_{1\,,\,j} = \max\limits_{i \le s_{p-1}} P_{1\,,\,i} \right\}$, y $c_1 = P_{1\,,\,s_1}$.
2. Si $s_j < s_{p-1}$, luego $s_{j+1} = \max \left\{ s_j < r \le s_{p-1} \,:\, P_{s_j+1\,,\,j} = \max\limits_{s_j < i \le s_{p-1}} P_{s_j+1\,,\,i} \right\}$ y $c_{j+1} = P_{s_j+1\,,\,s_{j+1}}$.
3. s_{p-1} es un índice feasible y tanto c_p como s_p están determinados por (Definición 3.2.2)

$$c_p = (d - s_{p-1})^{-1}\,(\operatorname{tr}\lambda^{s_{p-1}} + \operatorname{tr}\mathbf{a}^{s_{p-1}}) \quad \text{y} \quad s_p = d \quad \text{si} \quad (d - s_{p-1})^{-1}\,(\operatorname{tr}\lambda^{s_{p-1}} + \operatorname{tr}\mathbf{a}^{s_{p-1}}) \ge \lambda_d$$

o de otro modo, si $(d - s_{p-1})^{-1}\,(\operatorname{tr}\lambda^{s_{p-1}} + \operatorname{tr}\mathbf{a}^{s_{p-1}}) < \lambda_d$ por la identidad

$$\nu(\lambda^{s_{p-1}}, \mathbf{a}^{s_{p-1}}) = \left(c_p\, \mathbb{1}_{s_p - s_{p-1}}\,,\, \lambda_{s_p+1}\,,\, \ldots\,,\, \lambda_d \right) \quad \text{y} \quad s_p < d\,. \tag{3.15}$$

Más aun, valen las siguientes desigualdades:

$$c_p \ge \frac{1}{\ell - s_{p-1}} \sum_{i=s_{p-1}+1}^{\ell} h_i \quad \text{para} \quad s_{p-1} + 1 \le \ell \le s_p\,. \tag{3.16}$$

Demostración. El ítem 1 está contenido en la demostración del Lema 3.2.6. Pues, por la Eq. (3.14) y la Eq. (3.13) se tiene que

$$c_1 = \frac{1}{s_1} \sum_{j \in \mathbb{I}_{s_1}} \lambda_j + a_j = P_{1,s_1} = \max\{P_j : j \le s_{p-1}\}\,.$$

Luego, $s_{j+1} = \max\left\{s_j < r \le s_{p-1} \,:\, P_{s_j+1\,,\,j} = \max\limits_{s_j<i\le s_{p-1}} P_{s_j+1\,,\,i}\right\}$.

El ítem 2 también se sigue del Lema 3.2.6 aplicado a las familias reducidas $\mathcal{G}_0^{(j)}$ como definimos en la Observación 3.1.4. Notar que, como consecuencia de las Proposiciones 3.1.8 y 3.1.9 - considerando la notación de la Observación 3.1.4 - se tiene que, para $1 \le j \le s_{p-1}$,

$$I_j = \{i:\ s_j + 1 \le i \le d\} \quad \text{y} \quad L_j = \{i:\ s_j + 1 \le i \le k\}\,,$$

lo cual implica que $\lambda^{I_j} = (\lambda_i)_{i=s_j+1}^d \in (\mathbb{R}_{\ge 0}^{d-s_j})^\uparrow$, $\mathcal{G}_0^{(j)} = \{g_i\}_{i=s_j+1}^k$ y $\mathbf{a}^{L_j} = (a_i)_{i=s_j+1}^k \in (\mathbb{R}_{\ge 0}^{k-s_j})^\downarrow$.

La Proposición 3.2.3 muestra que s_{p-1} es un índice feasible y que la constante c_p y el índice s_p están determinados de la manera que describimos arriba. Finalmente, notemos que la Proposición 3.2.3 prueba las relaciones de mayorización $(a_i)_{i=s_{p-1}+1}^k \prec (\mu_i)_{i=s_{p-1}+1}^{s_p}$, donde $1 \le s_p \le d \le k$. Luego,

$$\sum_{i=s_{p-1}+1}^{\ell} a_i \le \sum_{i=s_{p-1}+1}^{\ell} \mu_i \quad \text{para todo } \ell \text{ tal que} \quad s_{p-1}+1 \le \ell \le s_p\ .$$

Utilizando esta desigualdad y el hecho de que $\lambda_i + \mu_i = c_p$ para $s_{p-1}+1 \le i \le s_p$ se tiene la Eq. (3.16). $\square$

En Teorema 3.2.9 es el resultado principal de [61]. Éste será necesario para tener una estructura detallada de los minimizadores *globales*, con el fin de probar en el Teorema 3.2.11 que los minimizadores locales son globales.

Definición 3.2.8 ([61])**.** Sean $\mathcal{F}_0 = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_{n_0}} \in (\mathbb{C}^d)^{n_0}$, $\lambda = \lambda(S_{\mathcal{F}_0})^\uparrow \in (\mathbb{R}_{\ge 0}^d)^\uparrow$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$. Con la intención de construir un espectro óptimo de las completaciones de marco, vamos a considerar los siguientes casos:

C.1. En caso de que $k \ge d$, definimos

$$s^* = \min\ \{\ 0 \le s \le d-1 :\ s \text{ es un índice feasible para el par}(\lambda\,,\,\mathbf{a})\ \}$$

y sean $q \in \mathbb{I}_d$, $s_0^* = 0 < s_1^* < \ldots < s_{q-1}^* = s^* < s_q \le d$ y $c_1^* > \ldots > c_{q-1}^* > c_q^*$ calculados según el siguiente algoritmo recursivo:

Si $s^* = 0$

1. El índice $s_0^* = 0$ y $q = 1$. Entonces continuamos con el ítem 4.

Si $s^* \ge 1$.

2. El índice $s_1^* = \max\left\{j \le s^* \,:\, P_{1\,,\,j} = \max\limits_{i\le s^*} P_{1\,,\,i}\right\}$, $c_1^* = P_{1\,,\,s_1^*}$ y $q = 1$.
3. Si el índice s_j^* ya está calculado, $s_j^* < s^*$ y redefinimos $q = q+1$, entonces

$$s_{j+1}^* = \max\left\{s_j^* < r \le s^* \,:\, P_{s_j^*+1\,,\,j} = \max_{s_j^*<i\le s^*} P_{s_j^*+1\,,\,i}\right\} \quad \text{y} \quad c_{j+1}^* = P_{s_j^*+1\,,\,s_{j+1}^*}\ .$$

4. Fijemos $s_{q-1}^* = s^*$, y sean c_q^* y $s_{q-1}^* < s_q^* \le d$ tales que (ver Definición 3.2.2)

$$(c_q^*\,\mathbb{1}_{s_q^*-s_{q-1}^*}\,,\,\lambda_{s_q^*+1}\,,\,\ldots\,,\,\lambda_d) = \nu(\lambda^{s^*}\,,\,\mathbf{a}^{s^*}) \in (\mathbb{R}_{>0}^{d-s^*})^\uparrow\ .$$

Finalmente, definimos

$$\nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a}) := (c_1^*\,\mathbb{1}_{s_1^*}\,,\,c_2^*\,\mathbb{1}_{s_2^*-s_1^*}\,,\,\ldots\,,\,c_{q-1}^*\,\mathbb{1}_{s_{q-1}^*-s_{q-2}^*}\,,\,\nu(\lambda^{s^*}\,,\,\mathbf{a}^{s^*})) \in \mathbb{R}_{>0}^d\ ,$$

C.2. En caso de que $k < d$, definimos

$$\tilde{\lambda} = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^k)^{\uparrow} \quad \text{y} \quad \tilde{\nu} = \nu^{\rm op}(\tilde{\lambda}\,,\,\mathbf{a}) \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^{\downarrow}\,,$$

donde el segundo vector se construye de acuerdo al caso C.1 y

$$\nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a}) := (\tilde{\nu}\,,\,\lambda_{k+1}\,,\,\ldots\,,\,\lambda_d) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d\ .$$

$\triangle$

Teorema 3.2.9 ([61])**.** Sean $\mathcal{F}_0 = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_{n_0}} \in (\mathbb{C}^d)^{n_0}$, $\lambda = \lambda(S_{\mathcal{F}_0})^{\uparrow} \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^d)^{\uparrow}$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^{\downarrow}$. Sea $\nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ como en la Definición 3.2.8. Luego,

1. Existe $\mathcal{F}^{\rm op} = (\mathcal{F}_0,\,\mathcal{G}^{\rm op}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0)$ con $\lambda(S_{\mathcal{F}^{\rm op}}) = \nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a})^{\downarrow}$.
2. Para toda función $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$,
$$P_\varphi(\mathcal{F}_0,\mathcal{G}) \geq P_\varphi(\mathcal{F}_0,\mathcal{G}^{\rm op}) \quad \text{para toda completación} \quad (\mathcal{F}_0,\mathcal{G}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0)\ . \tag{3.17}$$
3. Dada $(\mathcal{F}_0,\,\mathcal{G}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0)$, vale la Eq. (3.17) $\iff \lambda(S_{(\mathcal{F}_0,\,\mathcal{G})}) = \nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a})^{\downarrow}$.

$\square$

Consideremos la notación y la terminología de la Definición 3.2.8 y sea $\mathcal{F}^{\rm op} = (\mathcal{F}_0,\,\mathcal{G}^{\rm op}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0)$ tal que $\lambda(S_{\mathcal{F}^{\rm op}}) = \nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a})^{\downarrow}$. Si $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ entonces se tiene que $\mathcal{G}^{\rm op}$ es un minimizador global de Ψ_φ, en particular, $\mathcal{G}^{\rm op}$ es un minimizador local. Luego, podemos aplicar la Proposición 3.2.7 a la familia $\mathcal{G}^{\rm op}$ y deducir algo de información contenida en el caso C.1. de la Definición 3.2.8 con una notable excepción, que $s_{q-1} = s^*$ es el mínimo índice feasible del par $(\lambda\,,\,\mathbf{a})$.

Observación 3.2.10. Sean $\mathcal{F}_0 = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_{n_0}} \in (\mathbb{C}^d)^{n_0}$, $\lambda = \lambda(S_{\mathcal{F}_0})^{\uparrow} \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^d)^{\uparrow}$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^{\downarrow}$. Sea $\nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ construido como en el Teorema 3.2.9. (dependiendo de si $k \geq d$ o $k < d$). El hecho de que $\nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ es el espectro óptimo para todo potencial convexo $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ es equivalente a decir que

$$\nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a}) \prec \lambda(S_{(\mathcal{F}_0,\,\mathcal{G})}) \quad \text{para toda completación} \quad (\mathcal{F}_0,\,\mathcal{G}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0)\ . \tag{3.18}$$

Ver [61] o [32] para una prueba independiente de este hecho. $\triangle$

El siguiente teorema es el resultado principal de este capítulo.

Teorema 3.2.11. Consideremos las Notaciones 3.1.1 y 3.1.3. Luego, el minimizador local $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ es un minimizador global de Ψ_φ in $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$.

Demostración. Adoptemos la terminología de las Notaciones 3.1.1 y 3.1.3. Empezaremos suponiendo que $k \geq d$ y vamos a argumentar por inducción sobre $p \geq 1$; i.e. la cantidad de constantes $c_1 > \ldots > c_p > 0$.

En efecto, si $p = 1$ entonces el Corolario 3.1.7 muestra que $\mathcal{G}_0$ es un minimizador global de Ψ_φ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ y entonces ya está. Luego, supongamos que $p > 1$ y que la hipótesis inductiva vale para $p-1$. Por la Proposición 3.2.3 el índice s_{p-1} es feasible y entonces,

$$s_{p-1} \geq s^* = \min\{\ 0 \leq s \leq d-1:\ s \text{ es un índice feasible para el par } (\lambda\,,\,\mathbf{a})\ \}\ .$$

Consideremos ahora la notación y la terminología del caso C.1. de la Definición 3.2.8, que describe al espectro óptimo $\nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ (notar que $q \geq 1$).

Supongamos que $q = 1$. En este caso $\nu = \nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a}) = (c_1^*\,\mathbb{1}_{s_1^*}\,,\,\lambda_{s_1^*+1}\,,\,\dots\,,\,\lambda_d) \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\uparrow$. En particular la relación de mayorización $\lambda(S_{\mathcal{F}}) \prec \nu$ en Eq. (3.18) muestra que

$$c_1^* = \min\{\nu_j :\ j \in \mathbb{I}_d\} \geq \min\{\lambda_j(S_{\mathcal{F}}) :\ j \in \mathbb{I}_d\} = c_p\ .$$

Luego, por la Observación 3.2.4 y el hecho de que $\lambda \leqslant \nu \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\uparrow$, podemos deducir que

$$s_1^* = \max\{j \in \mathbb{I}_d :\ \lambda_j < c_1^*\} \geq \max\{j \in \mathbb{I}_d :\ \lambda_j < c_p\} = s_p > s_1\ .$$

Luego, por el Teorema 3.2.9, $c_1^* \geq P_{1\,,\,j}$ para $1 \leq j \leq s_1^* \implies c_1^* \geq P_{1\,,\,s_1} = c_1$, donde la última igualdad se debe a la Proposición 3.2.7. Utilizando los hechos anteriores, es fácil verificar que $\operatorname{tr}(\nu) > \operatorname{tr}(\lambda(S_{\mathcal{F}}))$, lo cual contradice la relación de mayorización en la Eq. (3.18).

Asumamos ahora que $q > 1$. En este caso,

$$s_1 = \max\{1 \leq j \leq s_{p-1} :\ P_{1,j} = \max_{1\leq i\leq s_{p-1}} P_{1,i}\} \quad \text{y} \quad c_1 = P_{1,s_1} \tag{3.19}$$

$$s_1^* = \max\{1 \leq j \leq s_{q-1}^* = s^* :\ P_{1,j} = \max_{1\leq i\leq s_{q-1}^*} P_{1,i}\} \quad \text{y} \quad c_1^* = P_{1,s_1^*} \tag{3.20}$$

Supongamos que $s_1^* \neq s_1$. Utilizando el hecho de que $s^* \leq s_{p-1}$ se puede ver que $s^* = s_{q-1}^* < s_1$. Como $\nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ corresponde al espectro del minimizador global, el cual en particular es un minimizador local, podemos aplicar el ítem 3 de la Proposición 3.2.7 (ver Eq. (3.16)) y así tenemos que:

$$c_q^* \geq \frac{1}{\ell - s_{q-1}^*} \sum_{i=s_{q-1}^*+1}^{\ell} h_i \quad \text{para} \quad s_{q-1}^* + 1 \leq \ell \leq s_q^*\,. \tag{3.21}$$

Consideremos los siguientes dos sub-casos:

Sub-caso a: $s_q^* \geq s_1$. Como $s^* = s_{q-1}^* < s_1$ se tiene que

$$c_1 = \frac{1}{s_1}\sum_{i=1}^{s_1} h_i = \frac{s^*}{s_1}\left(\frac{1}{s^*}\sum_{i=1}^{s^*} h_i\right) + \frac{(s_1 - s^*)}{s_1}\left(\frac{1}{(s_1 - s^*)}\sum_{i=s^*+1}^{s_1} h_i\right) \tag{3.22}$$

lo cual representa a c_1 como combinación convexa de los promedios. El primer promedio satisface (por como fueron construidos c_1 y $s^* \leq s_{p-1}$)

$$\frac{1}{s^*}\sum_{i=1}^{s^*} h_i \leq c_1 \quad \implies \quad \frac{1}{(s_1 - s^*)}\sum_{i=s^*+1}^{s_1} h_i \geq c_1\,.$$

Ya que de otro modo, la Eq. (3.22) no vale. Utilizando la hipótesis $s_q^* \geq s_1 > s^* = s_{q-1}^*$, la Eq. (3.21) y la desigualdad previa resulta que

$$c_q^* \geq \frac{1}{s_1 - s_{q-1}^*} \sum_{i=s_{q-1}^*+1}^{s_1} h_i \geq c_1 \geq c_1^*\,,$$

donde además hemos aplicado las Eqs. (3.19) y (3.20), y el hecho de que $s^*_{q-1} \leq s_{p-1}$. Luego $q = 1$ contradice nuestra suposición sobre $q > 1$. Por lo tanto, el Sub-caso a no es posible.

Sub-caso b: $s^*_q < s_1$. Recordemos que $s_{p-1} \geq s^* = s^*_{q-1}$ lo cual, por las Eqs. (3.19) y (3.20), implica que $c_1 \geq c^*_1$. Luego, $c^*_1\, s^*_q \leq c_1\, s^*_q < c_1\, s_1$ y entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a})\,) &= \sum_{i\in\mathbb{I}_q} c^*_i\ (s^*_i - s^*_{i-1}) + \sum_{i=s^*_q+1}^{d} \lambda_i \leq c_1\, s^*_q + \sum_{i=s^*_q+1}^{d} \lambda_i \\ &< \sum_{i\in\mathbb{I}_p} c_i\ (s_i - s_{i-1}) + \sum_{i=s_p+1}^{d} \lambda_i = \operatorname{tr}(S_{\mathcal{F}})\,. \end{aligned}$$

Esto último contradice la relación de mayorización de la Eq. (3.18). De este modo podemos concluir que el Sub-caso b tampoco es posible.

Por lo tanto, debemos tener que $s^*_1 = s_1$ y entonces $c_1 = c^*_1$. Vamos a probar que $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$ es un minimizador global mostrando que $\lambda(S_{\mathcal{F}}) = \nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a})$. En efecto, aplicando el argumento de reducción descrito en la Observación 3.1.4 deducimos que, tomando $k' = k - s_1$, $\mathcal{G}_0^{(1)} = \{g_{i+s_1}\}_{i\in I_{k'}}$ es un minimizador local de la función

$$\{\mathcal{K} = (k_i)_{i\in\mathbb{I}_{k'}} \in (\mathcal{H}_1)^{k'}\ ,\ \|g_i\|^2 = a_{s_1+i}\,, i \in \mathbb{I}_{k'}\} \ni \mathcal{K} \mapsto \mathrm{P}_\varphi(\mathcal{F}_0^{(1)}, \mathcal{K}) \tag{3.23}$$

donde $\mathcal{H}_1 = W_1^\perp$ para $W_1 = \operatorname{gen}\{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_{s_1}}$ y $\mathcal{F}_0^{(1)}$ es una sucesión en $\mathcal{H}_1$ tal que $S_{\mathcal{F}_0^{(1)}} = S_{\mathcal{F}_0}|_{\mathcal{H}_1}$. En este caso, por el Corolario 3.1.6 y el hecho de que $p > 1$, $d' = \dim \mathcal{H}_1 = d - s_1 \leq k - s_1 = k'$. Más aun, por construcción del $\mathcal{H}_1$, si tomamos $\tilde{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_0^{(1)}, \mathcal{G}_0^{(1)})$ entonces

$$\lambda(S_{\mathcal{F}_0^{(1)}}) = (\lambda_{s_1+i})^\downarrow_{i\in\mathbb{I}_{d'}} \quad \text{y} \quad \lambda(S_{\tilde{\mathcal{F}}}) = (c_2\, \mathbb{1}_{s_2-s_1}, \ldots, c_p\, \mathbb{1}_{s_p-s_{p-1}}, \lambda_{s_p+1}, \ldots, \lambda_d)^\downarrow\,.$$

Luego, podemos aplicar la hipótesis inductiva a $\mathcal{G}_0^{(1)}$ y así tenemos que $\mathcal{G}_0^{(1)}$ es un minimizador global de la función en la Eq. (3.23). Por lo tanto, con la notación de la Definición 3.2.2 y el Caso C.1. de la Definición 3.2.8,

$$\lambda(S_{\tilde{\mathcal{F}}}) = \nu^{\rm op}(\lambda^{s_1}\,,\,\mathbf{a}^{s_1})\,.$$

Ahora, una inspección de la construcción en el Caso C.1. de la Definición 3.2.8 revela que

$$\nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a}) = (c^*_1\, \mathbb{1}_{s^*_1}\,,\, \nu^{\rm op}(\lambda^{s_1}\,,\,\mathbf{a}^{s_1})) \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}\,. \tag{3.24}$$

En efecto, como la noción de índice feasible depende de la cola de la sucesión de autovalores y normas podemos ver que

$$s^* = s^*_1 + \min\{0 \leq s \leq d' - 1 :\ s \ \text{ es un índice feasible para } \ (\lambda^{s_1}\,,\,\mathbf{a}^{s_1})\}\,.$$

La Eq. (3.24) ahora se deduce utilizando $s_1 = s^*_1$, la identidad anterior y las fórmulas para los índices s^*_i tanto para $\nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ como para $\nu^{\rm op}(\lambda^{s_1}\,,\,\mathbf{a}^{s_1})$ del caso C.1. de la Definición 3.2.8. Entonces ahora podemos ver que

$$\lambda(S_{\mathcal{F}}) = (c_1\, \mathbb{1}_{s_1}\,,\, \lambda(S_{\tilde{\mathcal{F}}})) = (c^*_1\, \mathbb{1}_{s^*_1}\,,\, \nu^{\rm op}(\lambda^{s_1}\,,\,\mathbf{a}^{s_1})) = \nu^{\rm op}(\lambda\,,\,\mathbf{a})\,. \tag{3.25}$$

La Eq. (3.25) junto con el Teorema 3.2.9 muestran que $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G}_0)$ es un minimizador global en este caso.

Finalmente, en caso de que $k < d$, podemos argumentar como en la segunda parte de la Observación 3.1.4. Utilizando la Notación 3.1.3 y el hecho de que $\text{rk}(S_{\mathcal{G}_0}) \leq k$, podemos ver que $\mu_i = 0$ para $k+1 \leq i \leq d$ y por lo tanto

$$S_{\mathcal{G}_0} = \sum_{i \in \mathbb{I}_k} \mu_i \ v_i \otimes v_i \quad \Longrightarrow \quad \lambda(S_{\mathcal{F}}) = (\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_k + \mu_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_d)^{\downarrow} \tag{3.26}$$

y $W := R(S_{\mathcal{G}_0}) \subset \mathcal{H} = \text{gen}\{v_i : \ i \in \mathbb{I}_k\}$. Notar que $\mathcal{H}$ reduce $S_{\mathcal{F}_0}$; luego, podemos considerar una sucesión $\tilde{\mathcal{F}}_0$ en $\mathcal{H}$ tal que $S_{\tilde{\mathcal{F}}_0} = S_{\mathcal{F}_0}|_{\mathcal{H}}$. En este caso $\mathcal{G}_0$ es un minimizador local de la función

$$\mathbb{T}_{\mathcal{H}}(\mathbf{a}) = \{\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in \mathbb{I}_k} \in \mathcal{H}^k : \ \|g_i\|^2 = a_i \ , \ i \in \mathbb{I}_k \ \} \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \ni \mathcal{G} \mapsto \text{P}_{\varphi}(\tilde{\mathcal{F}}_0, \mathcal{G}) \, . \tag{3.27}$$

Como $\dim \mathcal{H} = k$ entonces, por la primera parte de esta prueba, podemos concluir que $\mathcal{G}_0$ es un minimizador global de la función en la Eq. (3.27) y que, por el Teorema 3.2.9,

$$(\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_k + \mu_k)^{\downarrow} = \lambda(S_{(\tilde{\mathcal{F}}_0 \, , \, \mathcal{G}_0)}) = \nu^{\text{op}}(\tilde{\lambda} \, , \, \mathbf{a}) \, , \tag{3.28}$$

donde $\tilde{\lambda} = \lambda(S_{\tilde{\mathcal{F}}_0})^{\uparrow} = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{I}_k}$. Finalmente, notemos que por el Teorema 3.2.9 aplicado al caso C.2. y las Eqs. (3.26) y (3.28) podemos concluir que

$$\nu^{\text{op}}(\lambda \, , \, \mathbf{a}) = (\nu^{\text{op}}(\tilde{\lambda} \, , \, \mathbf{a}), \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_d)^{\downarrow} = \lambda(S_{\mathcal{F}}) \, . \tag{3.29}$$

La Eq. (3.29) junto con el Teorema 3.2.9 muestran que $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0 \, , \, \mathcal{G}_0)$ es un minimizador global en este caso.

□

Es importante observar que, además de que los minimizadores locales de Φ_{φ} en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ son globales, éstos no dependen de la función (estrictamente) convexa φ. Es decir, que son los mismos para todos los potenciales convexos.

Capítulo 4

Distancias al operador de marco en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$

"Esta es la cama para los invitados" dijo Procusto,
"espero que encajes justo."

R. E. Francillon[1]

Los problemas de aproximación de matrices aparecen constantemente como aplicaciones de la teoría de análisis matricial. Estos problemas también pueden encontrarse en la literatura como *problemas de cercanía de matrices* o *problemas de Procusto* (ver por ejemplo el texto reciente [35] y los clásicos libros de Bhatia [7] y Kato [39]).

En la mitología griega, Procusto (hijo de Poseidón) era un posadero que tenía su casa en las colinas de Ática. Allí ofrecía posada al viajero solitario y lo invitaba a tumbarse en una cama de hierro donde, mientras el viajero dormía, lo amordazaba y lo ataba a las cuatro esquinas del lecho. Si la víctima era alta y su cuerpo era más largo que la cama, procedía a cortar las partes del cuerpo que sobresalían: los pies, las manos o hasta incluso la cabeza. Si, por el contrario, era de menor longitud que la cama, lo descoyuntaba a martillazos hasta estirarlo. Se dice que nunca nadie coincidía con el tamaño de la cama porque Procusto tenía dos, una exageradamente larga y otra exageradamente corta. El oscuro reinado de Procusto continuó hasta que recibió la visita de Teseo, quien invirtió el juego y lo retó a comprobar si su propio cuerpo encajaba con el tamaño de la cama. Cuando el posadero se hubo tumbado, Teseo hizo con él, lo mismo que este le había hecho a sus víctimas para ajustarlas a la cama.

La historia de Procusto cuenta con tres elementos fundamentales: el desafortunado viajero X, la cama Y y el tratamiento T que Procusto le daba al viajero para ajustarlo a la cama. Formalmente, si X e Y son matrices y T es la matriz que representa el tratamiento que se le aplica a X, se le llama problemas de Procusto a los del tipo

$$\min N(TX - Y) \qquad \text{sobre el conjunto de matrices } T \text{ con determinada propiedad}$$

donde N es una norma matricial, en general, la norma Frobenius.

Para relacionarlo con nuestro trabajo, vamos a presentar otra formalización de los problemas de Procusto, siguiendo el texto de Higham (ver [37]); dados $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, una norma matricial N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ y un conjunto de matrices $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, queremos encontrar la distancia mínima

$$d_N(S, \mathcal{X}) = \min\{N(S - A) : \ A \in \mathcal{X}\} \ ,$$

[1] *Gods and Heroes (The Kingdom of Jupiter).* The Athenæum Press Ginn & Company, Boston, 1894.

y el subconjunto de matrices de $\mathcal{X}$ que aproximan mejor a S:

$$\mathcal{A}_N^{\text{op}}(S\,,\,\mathcal{X}) = \{A \in \mathcal{X} :\; N(S - A) = d_N(S\,,\,\mathcal{X})\}\ .$$

La resolución de este tipo de problemas provee una caracterización y, de ser posible, un cálculo exacto (o en algunos casos estimaciones ajustadas) de la distancia $d_N(S\,,\,\mathcal{X})$ y del conjunto de mejores aproximaciones $\mathcal{A}_N^{\text{op}}(S\,,\,\mathcal{X})$. Como ya ha sido mencionado, en general, suele elegirse a N como la norma Frobenius de matrices (también conocida como la norma 2), por ser una norma Euclídea (pues está asociada a un producto interno). Sin embargo, hay otras normas que también son de interés para este tipo de problemas, como por ejemplo las normas pesadas, las normas p para $p \geq 1$ (que en particular incluyen a la norma 2 y también son conocidas como normas Schatten) o una clase más general, la de las normas unitariamente invariantes. En cuanto a los conjuntos $\mathcal{X}$, algunas de las elecciones más importantes son el conjunto de matrices autoadjuntas, el de matrices semi definidas positivas, el de las matrices de correlación, el de los proyectores ortogonales, el de los proyectores oblicuos y el de las matrices cuya dimensión del rango está acotada por un número fijo (ver [22, 28, 37, 40, 64]).

Una vez resuelto el problema de cercanía para $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ y N una norma matricial (fijos), aparece -de manera natural- un nuevo problema de proximidad: para una matriz $A_0 \in \mathcal{X}$ fija, se pretende calcular la distancia (o alguna cota ajustada)

$$d_{\mathcal{X}}(A_0\,,\,\mathcal{A}_N^{\text{op}}(S\,,\,\mathcal{X})) = \text{mín}\{d_{\mathcal{X}}(A_0\,,\,A) :\; A \in \mathcal{A}_N^{\text{op}}(S\,,\,\mathcal{X})\}\ ,$$

donde $d_{\mathcal{X}}$ denota una métrica en $\mathcal{X}$. En el caso de que $\mathcal{X}$ esté dotado de una estructura suave que es compatible con la distancia $d_{\mathcal{X}}$ y es tal que la función $\Psi(A) := N(A_0 - A)$ es también suave sobre $\mathcal{X}$, entonces se pueden obtener estimaciones de $d_{\mathcal{X}}(A_0\,,\,\mathcal{A}_N^{\text{op}}(S\,,\,\mathcal{X}))$, aplicando métodos de descenso en la dirección del gradiente para Ψ.

El problema de cercanía de matrices que analizaremos en este capítulo es el siguiente: para $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$ fijos, consideremos los conjuntos:

$$\mathbb{T}_d(\mathbf{a}) = \Big\{\{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{C}^d)^k :\; \|g_i\|^2 = a_i\,,\; i \in \mathbb{I}_k\Big\} \quad \text{y} \quad \mathcal{X}_{\mathbf{a}} = \left\{\sum_{i\in\mathbb{I}_k} g_i \otimes g_i : \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\right\}\ .$$

Con esta notación, resolveremos el problema de cercanía de matrices correspondiente a $\mathcal{X}_{\mathbf{a}} \subset \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, para N una nui estrictamente convexa en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Es decir, vamos a obtener una descripción explícita de $d_N(S\,,\,\mathcal{X}_{\mathbf{a}}) = d_N(S\,,\,\mathbf{a})$ y $\mathcal{A}_N^{\text{op}}(S\,,\,\mathcal{X}_{\mathbf{a}}) = \mathcal{A}_N^{\text{op}}(S\,,\,\mathbf{a})$. Vale la pena señalar que el conjunto $\mathcal{X}_{\mathbf{a}}$ considerado, puede describirse como el conjunto de los operadores de marco $S_{\mathcal{G}}$ de sucesiones finitas de vectores con normas predeterminadas, $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$.

De este modo, es natural considerar los problemas de proximidad asociados al problema de cercanía de matrices que hemos descripto anteriormente. En este contexto se puede proponer una versión un poco más fuerte: dado $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, buscar una cota superior (ajustada) de

$$d(\mathcal{G}_0\,,\,\mathcal{B}_N^{\text{op}}(S\,,\,\mathbf{a})) = \text{mín}\left\{d_{\mathbb{T}_d(\mathbf{a})}(\mathcal{G}_0\,,\,\mathcal{G}) :\; \mathcal{G} \in \mathcal{B}_N^{\text{op}}(S\,,\,\mathbf{a})\right\}\ ,$$

donde

$$\mathcal{B}_N^{\text{op}}(S\,,\,\mathbf{a}) = \left\{\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) :\; S_{\mathcal{G}} \in \mathcal{A}_N^{\text{op}}(S\,,\,\mathbf{a})\right\} \quad \text{y} \quad d^2_{\mathbb{T}_d(\mathbf{a})}(\mathcal{G}_0\,,\,\mathcal{G}) = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} \|g_i^0 - g_i\|^2\ ,$$

para $\mathcal{G}_0 = \{g_i^0\}_{i\in\mathbb{I}_k}$, $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. Es decir, vamos a centrar nuestra atención en las sucesiones $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, en lugar de los operadores de marco $S_{\mathcal{G}}$. Notar que en el caso particular de que $S = \frac{k}{d}\,I$,

$a_i = 1$ para $i \in \mathbb{I}_k$ y N es la norma Frobenius, este problema está relacionado con el problema de aproximación de Paulsen [8, 10, 11], el cual es central en la teoría de marcos y ha estado abierto por varios años. Recientemente se han obtenido soluciones parciales por Kwok, Lau, Lee y Ramachadram en [38] y posteriormente (y de manera más simple) por Hamilton y Moitra en [36].

Cuando la norma N es suficientemente suave, para estimar $d(\mathcal{G}_0, \mathcal{B}_N^{\rm op}(S, \mathbf{a}))$ se pueden aplicar métodos de tipo de descenso en la dirección del gradiente de la función $\Theta = \Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$ definida en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ - que es una variedad suave de $(\mathbb{C}^d)^k$ - dada por $\Theta(\mathcal{G}) = N(S - S_\mathcal{G})$, comenzando en una familia $\mathcal{G}' \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. Notemos que cuando N es la norma Frobenius, esta función es la distancia al operador de marco definida por Strawn en [63] (ver la introducción del Capítulo 3).

En el caso general, analizar el comportamiento de los algoritmos de descenso en la dirección del gradiente, nos lleva a estudiar el comportamiento local de la función

$$\mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \ni \mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \mapsto \Theta(\mathcal{G}) = N(S - S_\mathcal{G}) \quad \text{alrededor de} \quad \mathcal{G}' \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\,.$$

Una cuestión importante es determinar cuando los minimizadores locales de Θ (que son atractores naturales de este tipo de algoritmos) son en realidad minimizadores globales. En la Sección 4.1 de este capítulo vamos a probar que esto es válido para la norma Frobenius vía la relación que existe entre el problema de la distancia al operador de marco y los problemas de completaciones de marcos con normas predeterminadas para el potencial de Benedetto - Fickus introducido en [5]. Esto nos permitirá dar respuesta positiva a la conjetura de Strawn planteada en [63], incluso de manera más general que la que el autor propone.

Desafortunadamente, las técnicas utilizadas para resolver este problema cuando la norma es la Frobenius, no pueden utilizarse para una norma N arbitraria, ni siquiera cuando es una p-norma (para $p > 1$, $p \neq 2$). Sin embargo, en la Sección 4.2, probaremos que en el caso de que N sea una nui estrictamente convexa, los minimizadores locales de Θ están caracterizados por una condición espectral que no depende de N. En particular, vamos a poder concluir que los minimizadores locales son globales y esto no depende la nui elegida. Las técnicas que utilizaremos en este caso, yacen en el contexto de la teoría de mayorización y los Teoremas de Lidskii locales que obtuvimos en el Capítulo 2. Lo que haremos primero será probar que para algunos casos particulares, los minimizadores locales son globales. Luego, basándonos en esos resultados, vamos a introducir la noción de problemas de G-DOM co-feasibles. Aunque en general los problemas de G-DOM no son co-feasibles, esta noción jugará un rol clave en el estudio de la estructura espectral de los minimizadores locales. Utilizando el hecho de que la función $\mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \ni \mathcal{G} \mapsto S_\mathcal{G} \in \mathcal{X}_\mathbf{a}$ es continua, obtendremos que los minimizadores locales $S_{\mathcal{G}_0} \in \mathcal{X}_\mathbf{a}$ de

$$\Psi : \mathcal{X}_\mathbf{a} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{dada por} \quad \Psi(S_\mathcal{G}) = N(S - S_\mathcal{G})\,,$$

son minimizadores globales y no dependen de la nui estrictamente convexa elegida. Esto es más débil que el resultado para las funciones Θ, ya que la función continua $\mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \ni \mathcal{G} \mapsto S_\mathcal{G} \in \mathcal{X}_\mathbf{a}$ no tiene secciones locales alrededor de una sucesión $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ arbitraria.

4.1. Solución del problema de Strawn de la distancia al operador de marco

Vamos a comenzar dando una breve descripción del trabajo de N. Strawn [63] sobre la función distancia al operador de marco (DOM). Para ello vamos a tomar una matriz semi definida positiva $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y un vector ordenado de manera no-creciente $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$ (fijos) tales que $\mathbf{a} \prec \lambda(S)$. En este caso vamos a considerar el producto (cartesiano) de esferas en $\mathbb{C}^d$;

$$\mathbb{T}_d(\mathbf{a}) := \Big\{ \mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{C}^d)^k \ : \|g_i\|^2 = a_i\,, \text{ para todo } i \in \mathbb{I}_k \Big\}\,.$$

dotado con la métrica producto de la métrica euclídea en cada una de esas esferas, es decir

$$d(\mathcal{G}\,,\,\mathcal{G}')^2 = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} \|g_i - g_i'\|^2 \quad \text{para} \quad \mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k}\,,\ \mathcal{G}' = \{g_i'\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\,.$$

Notemos que $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ es un espacio métrico compacto con la métrica producto.

Como ya hemos mencionado anteriormente en las motivaciones del Capítulo 3, la distancia al operador de marco (DOM) se define como la función $\Theta_2 = \Theta_{(2\,,\,S\,,\,\mathbf{a})} : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$\Theta_2(\mathcal{G}) = \|S - S_{\mathcal{G}}\|_2 \quad \text{para} \quad \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\,,$$

donde $\|A\|_2^2 = \operatorname{tr}(A^*A)$, para $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, denota la norma Frobenius en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Por la Proposición 1.2.4, la relación $\mathbf{a} \prec \lambda(S)$ implica que existe una familia $\mathcal{G}^{\rm op} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ tal que $S_{\mathcal{G}^{\rm op}} = S$. En este caso,

$$\text{mín}\,\{\,\Theta_2(\mathcal{G}) :\ \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\,\} = 0\,.$$

Cuando Strawn nota eso, presenta un algoritmo basado en el método de descenso en la dirección del gradiente de la función Θ_2. Basado en su propio trabajo y en evidencia numérica, el autor postula la siguiente:

Conjetura (Strawn [63]): Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$ con $k \geq d$ y supongamos que $\mathbf{a} \prec \lambda(S)$. Luego, los minimizadores locales de Θ_2 en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ son minimizadores globales. △

Tal como es remarcado en [63], probar esta conjetura proporcionaría una beneficiosa garantía teórica para el rendimiento del algoritmo de la DOM, basado en la aproximación con el método de descenso en la dirección del gradiente, presentado en ese trabajo, desde una perspectiva numérica.

En lo que sigue vamos a considerar una versión generalizada del la DOM, en términos de las normas unitariamente invariantes (nuis) en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (ver Sección 1.1). Más aun, consideraremos el caso general en que $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^k)^\downarrow$, sin necesidad de asumir ni que $k \geq d$, ni que $\mathbf{a} \prec \lambda(S)$.

Definición 4.1.1. Sean $S_0 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$. Dada una nui N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ vamos a considerar la *distancia al operador de marco generalizada* (G-DOM), como la función

$$\Theta_{(\,N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})} = \Theta_N : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{dada por} \quad \Theta_N(\mathcal{G}) = N\left(S - S_{\mathcal{G}}\right)\,,$$

donde $S_{\mathcal{G}} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ denota al operador de marco de $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. △

En caso de que $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$ sean arbitrarios, el mínimo valor de la función Θ_N en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ no había sido calculado aún en la literatura, ni siquiera para el caso de la norma Frobenius. El siguiente resultado establece que hay soluciones estructurales al problema de optimización de la G-DOM, en el sentido de que existen familias $\mathcal{G}^{\rm op} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ tales que, para toda nui N, el mínimo valor de Θ_N en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ es $\Theta_N(\mathcal{G}^{\rm op})$. En particular, esto nos permite calcular el mínimo valor de Θ_N en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ para una nui N arbitraria, en el caso general.

En adelante, dados $\tilde{\lambda} \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^d)^\uparrow$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$, vamos a considerar el vector $\nu^{\rm op}(\tilde{\lambda}\,,\,\mathbf{a})$ construido como en la Definición 3.2.8, de acuerdo al caso $k \geq d$ ó $k < d$.

Teorema 4.1.2. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$. Sea $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^d)^\uparrow$ dado por $\tilde{\lambda} = \|S\|\,\mathbb{1}_d - \lambda(S)$ y tomemos $\delta = \delta(\lambda(S)\,,\,\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^d$ dado por $\delta = (\delta_i)_{i\in\mathbb{I}_d} = \|S\|\,\mathbb{1}_d - \nu^{\rm op}(\tilde{\lambda}\,,\,\mathbf{a})$. Luego,

1. Para toda nui N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ se tiene que

$$\min\{\ \Theta_N(\mathcal{G}) = N\,(S - S_{\mathcal{G}}):\ \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\ \} = N\,(D_\delta)\ ,$$

donde D_δ es la matriz diagonal con diagonal principal dada por el vector δ.

2. Si N es estrictamente convexa y $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ entonces

$$N\,(S - S_{\mathcal{G}}) = N\,(D_\delta) \quad \text{si, y sólo si,} \quad \lambda(S - S_{\mathcal{G}}) = \delta^{\downarrow}\,.$$

En este caso existe una bon $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i(S)\ v_i \otimes v_i \quad \text{y} \quad S_{\mathcal{G}} = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} (\lambda_i(S) - \delta_i)\ v_i \otimes v_i\,. \tag{4.1}$$

□

Como ya lo hemos adelantado, vamos a probar el Teorema 4.1.2 haciendo una traducción entre el problema de optimización de la distancia al operador de marco y el problema de optimización para potenciales convexos de completaciones de marco con normas predeterminadas.

Antes de probar el Teorema 4.1.2, vamos a demostrar el siguiente lema que será necesario para probar la unicidad en el ítem 2.

Lema 4.1.3. Sean $a,\, b \in \mathbb{R}^d$ tales que $a \succ b$ y $|a|^{\downarrow} = |b|^{\downarrow}$. Luego, $a^{\downarrow} = b^{\downarrow}$.

Demostración. Podemos asumir que $a = a^{\downarrow}$ y $b = b^{\downarrow}$. También podemos suponer que $a \neq \lambda\mathbb{1}$ (el caso $a = \lambda\mathbb{1}$ es trivial). Lo que haremos será argumentar por inducción sobre la dimensión d. Si $d = 1$ el resultado es claro.

Supongamos ahora que el resultado vale para $d - 1 \geq 1$ y sean $a,\, b \in \mathbb{R}^d$ tales que $a \succ b$ y $|a|^{\downarrow} = |b|^{\downarrow}$. Reemplazando a por $-a^{\downarrow}$ y b por $-b^{\downarrow}$ si es necesario, podemos suponer que

$$|a_1| \geq |a_d| \implies \max_{i\in\mathbb{I}_d} |a_i| = |a_1| = a_1 > 0\ ,$$

donde el hecho de que $a_1 > 0$ (en este caso) se sigue fácil usando que $a^{\downarrow} = a \neq \lambda\,\mathbb{1}$. Notemos que $b \prec a \implies a_1 \geq b_1$. Supongamos que $a_1 > b_1$. Luego, $a_d = b_d = -a_1$. En efecto, b_d debe alcanzar el módulo máximo (porque b_1 no lo alcanza) y $a_d \leq b_d$ por mayorización. Consideremos ahora $\tilde{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_{d-1}}$ y $\tilde{b} = (b_i)_{i\in\mathbb{I}_{d-1}}$. Es fácil ver que $\tilde{a}^{\downarrow} = \tilde{a} \prec \tilde{b} = \tilde{b}^{\downarrow}$ y $|\tilde{a}|^{\downarrow} = |\tilde{b}|^{\downarrow}$. Luego, por hipótesis inductiva

$$\tilde{a} = \tilde{b} \implies a_1 = b_1\,,$$

lo cual es una contradicción. Entonces podemos suponer que $a_1 = b_1$. Como antes, podemos aplicar la hipótesis inductiva y concluir que $(a_{i+1})_{i\in\mathbb{I}_{d-1}} = (b_{i+1})_{i\in\mathbb{I}_{d-1}}$. Luego, $a = b$. □

Demostración del Teorema 4.1.2. Consideremos $\tilde{S} = \|S\|\,I - S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y sea $\mathcal{F}_0 = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ una familia en $\mathbb{C}^d$ tal que $S_{\mathcal{F}_0} = \tilde{S}$. Notemos que, si $\lambda(S) = (\lambda_i(S))_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$ entonces

$$\lambda(S_{\mathcal{F}_0})^{\uparrow} = (\|S\| - \lambda_i(S))_{i\in\mathbb{I}_d} = \tilde{\lambda}.$$

Si $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ luego,

$$S - S_{\mathcal{G}} = \|S\|\,I + (S - \|S\|\,I) - S_{\mathcal{G}} = \|S\|\,I - (\tilde{S} + S_{\mathcal{G}})\,. \tag{4.2}$$

En particular, se tiene que

$$\lambda(S - S_{\mathcal{G}})^{\uparrow} = \|S\|\,\mathbb{1}_d - \lambda(\tilde{S} + S_{\mathcal{G}}) \in (\mathbb{R}^d)^{\uparrow}\,. \tag{4.3}$$

Sin embargo, notemos que, como $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ entonces

$$\tilde{S} + S_{\mathcal{G}} = S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}} = S_{\mathcal{F}} \quad \text{para} \quad \mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{G}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{a}}(\mathcal{F}_0)\ .$$

Luego, por el Teorema 3.2.9 (según sea el caso $k \geq d$ o $k < d$)

$$\nu^{\rm op}(\tilde{\lambda}\,,\,\mathbf{a}) \prec \lambda(\tilde{S} + S_{\mathcal{G}}) \implies \delta \overset{\rm def}{=} \|S\|\,\mathbb{1}_d - \nu^{\rm op}(\tilde{\lambda}\,,\,\mathbf{a}) \prec \|S\|\,\mathbb{1}_d - \lambda(\tilde{S} + S_{\mathcal{G}})\,, \tag{4.4}$$

donde estamos utilizando el hecho de que si $a, b \in \mathbb{R}^d$ son tales que $a \prec b$, entonces $-a \prec -b$. Utilizando la Eq. (4.3) y el hecho de que la función $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es convexa, podemos concluir que

$$|\delta| = (|\delta_i|)_{i\in\mathbb{I}_d} \prec_w |\,\|S\|\,\mathbb{1}_d - \lambda(\tilde{S} + S_{\mathcal{G}})\,| = s(S - S_{\mathcal{G}})^{\uparrow}, \tag{4.5}$$

donde $s(S - S_{\mathcal{G}}) = |\lambda(S - S_{\mathcal{G}})|^{\downarrow} \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$ denota al vector de valores singulares de $S - S_{\mathcal{G}}$. Por el Teorema 1.1.10, la relación de submayorización previa implica que para toda nui N

$$N\,(S - S_{\mathcal{G}}) \geq N\,(D_\delta) \quad \text{para toda familia} \quad \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\,.$$

Con el fin de probar que esta cota inferior es alcanzada, consideremos $\mathcal{G}^{\rm op} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ y una completación óptima en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ de $\mathcal{F}_0$; i.e. una completación tal que

$$\lambda(\tilde{S} + S_{\mathcal{G}^{\rm op}}) = \lambda(S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}^{\rm op}}) = \nu^{\rm op}(\tilde{\lambda}\,,\,\mathbf{a})^{\downarrow}.$$

Luego, por la Eq. (4.5) podemos ver que

$$s(S - S_{\mathcal{G}^{\rm op}})^{\uparrow} = |\|S\|\,\mathbb{1}_d - \nu^{\rm op}(\tilde{\lambda}\,,\,\mathbf{a})^{\downarrow}| \implies |\delta|^{\uparrow} = s(S - S_{\mathcal{G}^{\rm op}})^{\uparrow} \quad \text{y} \quad N\,(S - S_{\mathcal{G}^{\rm op}}) = N\,(D_\delta)\ .$$

Este último hecho muestra que la cota inferior se alcanza en $\mathcal{G}^{\rm op}$ lo cual prueba el ítem 1. Asumamos ahora que N es una nui estrictamente convexa y sea $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ tal que

$$N\,(S - S_{\mathcal{G}}) = N\,(D_\delta)\ .$$

La relación de submayorización en la Eq. (4.5) junto con las hipótesis previas, implican que

$$|\delta|^{\uparrow} = |\,\|S\|\,\mathbb{1}_d - \lambda(\tilde{S} + S_{\mathcal{G}})\,| = s(S - S_{\mathcal{G}})^{\uparrow}\,.$$

La identidad anterior junto con la relación de mayorización en la Eq. (4.4) y el Lema 4.1.3 implican que

$$\delta^{\downarrow} = (\|S\|\,\mathbb{1}_d - \nu^{\rm op}(\tilde{\lambda}\,,\,\mathbf{a}))^{\downarrow} = (\|S\|\,\mathbb{1}_d - \lambda(\tilde{S} + S_{\mathcal{G}}))^{\downarrow}$$

de lo cual se sigue que

$$\lambda(S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}}) = \lambda(\tilde{S} + S_{\mathcal{G}}) = \nu^{\rm op}(\tilde{\lambda}\,,\,\mathbf{a})^{\downarrow}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ es un minimizador global de $\Psi_\varphi(\mathcal{G}) = \operatorname{tr}(\varphi(S_{\mathcal{F}_0} + S_{\mathcal{G}}))$ para toda función $\varphi \in \operatorname{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$. Luego, por el Teorema 3.1.2 existe una bon $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$\tilde{S} = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \tilde{\lambda}_i\ v_i \otimes v_i \quad \text{y} \quad S_{\mathcal{G}} = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} (\nu^{\rm op}(\tilde{\lambda}\,,\,\mathbf{a}) - \tilde{\lambda})_i\ v_i \otimes v_i\,. \tag{4.6}$$

Utilizando el hecho de que $S = \tilde{S} + \|S\|\,I$ y por ende $\tilde{\lambda} = \|S\|\,\mathbb{1}_d - \lambda(S)$, podemos ver que la Eq. (4.1) vale para $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$. □

El siguiente resultado prueba una versión generalizada de la Conjetura de Strawn sobre minimizadores locales de la DOM para la norma Frobenius en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, ya que las hipótesis de que $k \geq d$ y la relación de mayorización $\mathbf{a} \prec \lambda(S)$ no son requeridas (ver los comentarios en la introducción del Capítulo 3).

Teorema 4.1.4. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$ y consideremos la DOM

$$\Theta_2 : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{dada por} \quad \Theta_2(\mathcal{G}) = \|S_0 - S_\mathcal{G}\|_2 \,.$$

Luego, los minimizadores locales de Θ_2 en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, son minimizadores globales.

Demostración. Consideremos $\tilde{S} = \|S\|\, I - S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y sea $\mathcal{F}_0 = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ una familia en $\mathbb{C}^d$ tal que $S_{\mathcal{F}_0} = \tilde{S}$. Luego, $\lambda(S_{\mathcal{F}_0})^\uparrow = (\|S\| - \lambda_i(S))_{i\in\mathbb{I}_d} = \tilde{\lambda}$. Sea $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ la función dada por $\varphi(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y consideremos la función $\Psi_\varphi : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$\Psi_\varphi(\mathcal{G}) = \mathrm{tr}(\varphi(S_{(\mathcal{F}_0\,,\,\mathcal{G})})) = \mathrm{tr}((S_{\mathcal{F}_0} + S_\mathcal{G})^2).$$

Si $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ entonces, por la Eq. (4.2) se tiene que,

$$\begin{aligned}\Theta_2(\mathcal{G})^2 &= \|S - S_\mathcal{G}\|_2^2 = \mathrm{tr}((\|S\|\, I - [S_{\mathcal{F}_0} + S_\mathcal{G}])^2)\\ &= \|S\|^2\, d - 2\,\|S\|\;\mathrm{tr}(S_{\mathcal{F}_0} + S_\mathcal{G}) + \mathrm{tr}((S_{\mathcal{F}_0} + S_\mathcal{G})^2) = c + \Psi_\varphi(\mathcal{G})\end{aligned}$$

donde

$$c = \|S\|^2\, d - 2\,\|S\|\;\mathrm{tr}(S_{\mathcal{F}_0} + S_\mathcal{G}) = \|S\|^2\, d - 2\,\|S\|\,(\mathrm{tr}\,\tilde{S} + \mathrm{tr}\,\mathbf{a})$$

es una constante (pues $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$). Luego, $\Theta_2(\mathcal{G})^2 = \Psi_\varphi(\mathcal{G}) + c$ para toda familia $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. En particular, los minimizadores locales de Θ_2 y Ψ_φ coinciden. El resultado ahora se sigue del Teorema 3.2.11. □

4.2. Problemas de G-DOM

En lo que sigue, vamos a recordar la Definición 1.2.2 y consideraremos la siguiente:

Notación y terminología. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_k}$ una sucesión finita en $\mathbb{C}^d$. Luego,

1. $T_\mathcal{F} \in \mathcal{M}_{d,k}(\mathbb{C})$ denota el operador de síntesis de $\mathcal{F}$ dado por $T_\mathcal{F} \cdot (\alpha_i)_{i\in\mathbb{I}_k} = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} \alpha_i\, f_i$.
2. $T_\mathcal{F}^* \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{C})$ denota el operador de análisis $\mathcal{F}$ dado por $T_\mathcal{F}^* \cdot f = (\langle f, f_i\rangle)_{i\in\mathbb{I}_k}$.
3. $S_\mathcal{F} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ denota el operador de marco $\mathcal{F}$ dado por $S_\mathcal{F} = T_\mathcal{F}\, T_\mathcal{F}^*$. Luego,

$$S_\mathcal{F} = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} f_i \otimes f_i \quad \text{y} \quad R(S_\mathcal{F}) = \mathrm{gen}\,\{f_i : \, i \in \mathbb{I}_k\}\,. \tag{4.7}$$

Recordemos también que $\mathcal{F}$ es un marco para $\mathbb{C}^d$ si lo genera (linealmente); equivalentemente, $\mathcal{F}$ es un marco para $\mathbb{C}^d$ si $S_\mathcal{F}$ es un operador positivo e invertible en $\mathbb{C}^d$. △

Es adelante, vamos a considerar $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$ y el producto (cartesiano) de esferas en $\mathbb{C}^d$, $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ dotado con la métrica producto de la métrica euclídea en cada una de esas esferas como en la Sección 4.1. Además, dada una nui N estrictamente convexa en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, vamos a considerar la G-DOM en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ definida en la Eq. (4.1.1) como la función $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})} : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por:

$$\Theta_N(\mathcal{G}) = N(S - S_\mathcal{G}) \quad \text{para toda familia} \quad \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a}).$$

En la sección anterior hemos probado que cuando N es la norma 2, los minimizadores locales de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$ son globales (ver Teorema 4.1.4); pero además hemos obtenido algunos resultados relacionados con la G-DOM inducida por una nui estrictamente convexa N, arbitraria (ver Teorema 4.1.2). Si bien estos resultados nos han dado información sobre los minimizadores globales de la G-DOM, los métodos de reducción utilizados para estudiar los minimizadores locales en el caso en que N es la norma Frobenius, no pueden aplicarse para caso general.

El problema que estudiaremos de aquí en adelante es el siguiente:

Problema. (G-DOM). Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$ y N una nui estrictamente convexa en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Consideremos la función $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})} : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}(\mathcal{G}) = N(S - S_\mathcal{G})$. Queremos ver que si $\mathcal{G}_0$ es un minimizador local de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ entonces, $\mathcal{G}_0$ es un minimizador global de $\Theta_{(\tilde{N}\,,\,S,\,,\,\mathbf{a})}$ para toda nui $\tilde{N}$ en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

$\triangle$

En esta sección vamos a describir las primeras características estructurales de los minimizadores locales de $\Theta_{(N,\,S,\,\mathbf{a})} : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, para una nui estrictamente convexa N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, una matriz $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y una sucesión de normas predeterminadas $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$ arbitrarias. De manera análoga al caso de los potenciales convexos en el Capítulo 3; i.e. basándonos en el Teorema de Lidskii local para nuis 2.1.7, vamos a probar que los vectores de una familia $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ que es minimizador local de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$, son autovectores del operador diferencia $S - S_{\mathcal{G}_0}$ y que además S y $S_{\mathcal{G}_0}$ verifican la igualdad en la desigualdad de Lidskii. Es importante señalar que, en este caso, no podrán aplicarse argumentos de reducción como los que presentamos en la Observación 3.1.4 para el caso de los potenciales convexos.

Luego, en la Sección 4.2.2, vamos a estudiar algunos casos particulares de los problemas de G-DOM y probaremos que, bajo ciertas hipótesis adicionales, los minimizadores locales son globales. Estos casos particulares nos llevarán a definir la noción de problema co-feasible en la Sección 4.2.5, que será la clave para determinar la estructura de los minimizadores locales para el caso general. Estos resultados nos llevarán a probar, en la Sección 4.3, que los minimizadores locales de la función $\Theta_{(N,\,S,\,\mathbf{a})}$ son globales y no dependen de la nui elegida.

Antes de seguir adelante con nuestro problema vamos a hacer la siguiente observación, la cual nos permitirá mostrar claramente la conexión entre los problemas de G-DOM y los problemas de cercanía de matrices.

Observación 4.2.1. Sea $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y consideremos una nui estrictamente convexa N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Sea $\mu_j \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$ $(j \in \mathbb{I}_k)$ y consideremos las órbitas unitarias

$$\mathcal{O}_{\mu_j} = \{G \in \mathcal{H}(d) : \ \lambda(G) = \mu_k\} \qquad \text{para} \qquad j \in \mathbb{I}_k\,.$$

Ahora podemos considerar el siguiente problema de cercanía de matrices (como se describe en [37], ver también [51])

$$\text{argmin}\,\{N(S - H)) : \ H \in \mathcal{O}_{\mu_1} + \ldots + \mathcal{O}_{\mu_k}\}\,. \tag{4.8}$$

Sea $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$ y consideremos el caso particular: $\mu_j = a_j\, e_1$, para $j \in \mathbb{I}_k$, donde $\{e_i\}_{i=1}^d$ denota la base canónica de $\mathbb{C}^d$. Luego, $G \in \mathcal{O}_{\mu_j}$ si, y sólo si, $G = g \otimes g$ para algún $g \in \mathbb{C}^d$ con $\|g\|^2 = a_j$, $j \in \mathbb{I}_k$. De este modo, el problema de cercanía de la Eq. (4.8) coincide con el problema de calcular los minimizadores globales de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. De manera similar, el estudio de los minimizadores locales del problema de cercanía de matrices se corresponde con el estudio de los minimizadores locales de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$. Vale la pena señalar que para el caso de la norma Frobenius, los minimizadores locales del problema de cercanía de matrices surgen de manera natural como puntos estables en algoritmos de descenso en la dirección del gradiente, como los que se consideran en [51]. Por lo tanto, resolver el Problema de la G-DOM resulta relevante desde un punto de vista aplicado.

$\triangle$

4.2.1. Propiedades de los minimizadores locales de la G-DOM en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$

Recordemos algunas notaciones que ya hemos utilizado y establezcamos los hechos que vamos a usar en adelante.

Notación 4.2.2. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$ y N una nui estrictamente convexa en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Vamos a considerar:

1. La función $\Theta_{(N,\,S,\,\mathbf{a})} = \Theta_N : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\Theta_N(\mathcal{G}) = N(S - S_\mathcal{G})$.
2. Un minimizador local $\mathcal{G}_0 = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ de $\Theta_{(N,\,S,\,\mathbf{a})}$, con operador de marco $S_0 = S_{\mathcal{G}_0}$.
3. Para $\mu \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$, la órbita unitaria $\mathcal{O}_\mu$ dada por
$$\mathcal{O}_\mu = \{G \in \mathcal{H}(d) : \lambda(G) = \mu\} = \{U^* D_\mu U :\ U \in \mathcal{U}(d)\}\,,$$
con la métrica usual inducida por la norma de operadores, la cual hace de $\mathcal{O}_\mu$ un espacio métrico.
4. La función $\Phi_N = \Phi_{(N,\,S,\,\mu)} : \mathcal{O}_\mu \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\Phi_N(G) = N(S - G)$.

$\triangle$

Teorema 4.2.3. Consideremos la Notación 4.2.2. Luego,

1. $S - S_0$ y $g_j \otimes g_j$ conmutan, para $j \in \mathbb{I}_k$. De este modo se tiene que g_j es un autovector de $S - S_0$, para $j \in \mathbb{I}_k$.
2. Existe una bon $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que
$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i(S)\ v_i \otimes v_i \quad \text{ y } \quad S_0 = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i(S_0)\ v_i \otimes v_i\,.$$
En particular, se tiene que $\lambda(S - S_0) = \big[\lambda(S) - \lambda(S_0)\,\big]^\downarrow$.

Demostración. Para $j \in \mathbb{I}_k$ definimos
$$S_{[j]} = S - \sum_{i\neq j} g_i \otimes g_i \ \in \mathcal{H}(d) \quad \text{ y } \quad \mu_{[j]} = a_j e_1 \ \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}\,.$$

Luego, $\mathcal{O}_{\mu_{[j]}} = \Big\{g \otimes g : \|g\|^2 = a_j\Big\}$ y de manera directa se puede verificar que $g_j \otimes g_j$ es un minimizador local de $\Theta_{(N,\,S_{[j]},\,\mu_{[j]})}$ en $\mathcal{O}_{\mu_{[j]}}$. Luego, por el Teorema 2.1.7, $g_j \otimes g_j$ conmuta con $S_{[j]}$, para $j \in \mathbb{I}_k$. Este último hecho implica que $S - S_0$ y $g_j \otimes g_j$ conmutan, para $j \in \mathbb{I}_k$, lo cual prueba el ítem 1.

Como $\mathcal{G}_0$ es un minimizador local de Θ_N en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, existe $\varepsilon > 0$ tal que
$$U \in B_{(I\,,\,\varepsilon)} \overset{\text{def}}{=} \{U \in \mathcal{U}(d) : \|I - U\| < \epsilon\} \implies \Phi_{(N,\,S,\,\mu)}(U\,S_0\,U^*) \geq \Phi_{(N,\,S,\,\mu)}(S_0)\,, \tag{4.9}$$

donde estamos usando la Notación 4.2.2, con $\mu = \lambda(S_0)$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ tal que para $\mathcal{G}' \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ con $d(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}') < \varepsilon$ se tiene que $\Theta_N(\mathcal{G}') \geq \Theta_N(\mathcal{G}_0)$. Notemos que, si $U \in B_{(I\,,\,\varepsilon)}$ entonces $U \cdot \mathcal{G}_0 = \{U\, g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ es tal que $d(\mathcal{G}_0\,,\,U\cdot\mathcal{G}_0) < \epsilon$. Por lo tanto,

$$\Phi_{(N,\,S,\,\mu)}(U\,S_0\,U^*) = \Theta_N(U\cdot\mathcal{G}_0) \geq \Theta_N(\mathcal{G}_0) = \Phi_{(N,\,S,\,\mu)}(S_0)\,.$$

Ahora, la función $\pi : \mathcal{U}(d) \to \mathcal{O}_\mu$ dada por $\pi(U) = U\,(S_0)\,U^*$ es abierta (ver [1, Teo. 4.1]), por lo tanto $\pi(B_{(I\,,\,\varepsilon)})$ es un entorno abierto de S_0 en $\mathcal{O}_\mu$ y S_0 es un minimizador local de $\Phi_{(N,\,S,\,\mu)}$ en $\mathcal{O}_\mu$. El ítem 2. ahora se sigue del Teorema 2.1.7 y del hecho de que $\mu = \lambda(S_0) \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$. $\square$

Corolario 4.2.4. Consideremos la Notación 4.2.2 y sea $W = R(S_0) \subset \mathbb{C}^d$. Luego,

1. W reduce $S - S_0 \in \mathcal{H}(d)$; de este modo, $D := (S - S_0)|_W \in L(W)$ es un operador autoadjunto;
2. Sea $\sigma(D) = \{b_1\,,\,\ldots\,,\,b_p\}$ tal que $b_1 < b_2 < \ldots < b_p$ y sea
$$J_j = \{\ell \in \mathbb{I}_k :\ D\,g_\ell = b_j\,g_\ell\} \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_p\,.$$
Luego, $\mathbb{I}_k$ es la unión disjunta de $\{J_j\}_{j\in\mathbb{I}_p}$;
3. Si $W_j = \text{gen}\{g_\ell :\ \ell \in J_j\}$ entonces W_j reduce tanto a S como a S_0, para $j \in \mathbb{I}_p$. Más aun, $W = \oplus_{j\in\mathbb{I}_p} W_j$.

Demostración. Notemos que $W = \text{gen}\{g_i :\ i \in \mathbb{I}_k\}$; por otro lado, por el Teorema 4.2.3, g_i es un autovector de $S - S_0$, para cada $i \in \mathbb{I}_k$. Estos dos hechos prueban que W es un subespacio invariante de $S - S_0$; como $S - S_0$ es autoadjunto, W reduce a $S - S_0$. Luego, la restricción $D = (S - S_0)|_W \in L(W)$ es un operador autoadjunto bien definido, actuando en W. Las observaciones previas también muestran que $\mathbb{I}_k$ es la unión disjunta de $\{J_i\}_{i\in\mathbb{I}_p}$.

Sean $j, \ell \in \mathbb{I}_p$ con $j \neq \ell$ y sean $r \in J_j$ y $s \in J_\ell$. Luego, g_r y g_s son ortogonales, puesto que esos vectores son autovectores de un operador autoadjunto correspondientes a autovalores diferentes. Por lo tanto, $W_j \perp W_\ell$ y

$$S_0\,g_r = \sum_{u\in J_j} \langle g_r\,,\,g_u\rangle\ g_u \in W_j\,.$$

Luego, en particular, W_j reduce a S_0; utilizando que W_j también reduce a $S - S_0$ podemos concluir que W_j reduce a $S = (S - S_0) + S_0$, para $j \in \mathbb{I}_p$. Por otro lado, como $W = \sum_{j\in\mathbb{I}_p} W_j$ se tiene que $W = \oplus_{j\in\mathbb{I}_p} W_j$. $\square$

Teorema 4.2.5. Consideremos la Notación 4.2.2. Sean $W = R(S_0)$ y $\sigma((S-S_0)|_W) = \{b_1\,,\,\ldots\,,\,b_p\}$ como en el Corolario 4.2.4. Sea $j \in \mathbb{I}_p$ y supongamos que existe $c \in \sigma(S - S_0)$ tal que $b_j < c$. Luego, la familia $\{g_j\}_{j\in J_j}$ es linealmente independiente.

Demostración. Supongamos que para algún $j \in \mathbb{I}_p$ la familia $\{g_i\}_{i\in J_j}$ es linealmente dependiente. Luego, existen coeficientes $z_l \in \mathbb{C}$, $l \in J_j$ (no todos nulos) tales que $|z_l| \leq 1/2$ para todo $l \in J_j$ y

$$\sum_{l\in J_j} \overline{z_l}\ a_l^{1/2}\ g_l = 0\,. \tag{4.10}$$

Sea $I_j \subseteq J_j$ dado por $I_j = \{l \in J_j :\ z_l \neq 0\}$. Supongamos que existe $c \in \sigma(S - S_0)$ tal que $b_j < c$ y sea $h \in \mathbb{C}^d$ tal que $\|h\| = 1$ y $(S - S_0)\,h = c\,h$. Para $t \in (-1/2, 1/2)$ consideremos la familia $\mathcal{G}(t) = \{g_i(t)\}_{i\in\mathbb{I}_k}$ dada por:

$$g_l(t) = \begin{cases} (1 - t^2\,|z_l|^2)^{1/2} g_l + t\,z_l\,a_l^{1/2}\,h & \text{si} \quad l \in I_j\,; \\ g_l & \text{si} \quad l \in \mathbb{I}_k \setminus I_j\,. \end{cases}$$

Notemos que $\mathcal{G}(t) \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ para $t \in (-1/2, 1/2)$. Denotemos por $\mathrm{Re}(A) = \frac{A+A^*}{2}$ a la parte real de $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Para $l \in I_j$ se tiene que

$$g_l(t) \otimes g_l(t) = (1 - t^2\,|z_l|^2)\; g_l \otimes g_l + t^2\,|z_l|^2\,a_l\; h \otimes h + 2\,(1 - t^2\,|z_l|^2)^{1/2}\,t\;\; \mathrm{Re}(h \otimes \overline{z_l}\,a_l^{1/2}\,g_l)$$

Observemos que $\mathcal{G}(t)$ es una curva continua en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ tal que $\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}_0$. Si denotamos por $S(t)$ al operador de marco de $\mathcal{G}(t) \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, entonces $S(0) = S_0$. Consideremos, $T(t) = S - S(t)$ para $t \in (-1/2\,,\,1/2)$. Notar que

$$T(t) = S - S_0 + t^2 \sum_{l \in I_j} |z_l|^2\,(g_l \otimes g_l - a_l\; h \otimes h) + R(t) \tag{4.11}$$

donde $R(t) = -2 \sum\limits_{l \in I_j} (1 - t^2\,|z_l|^2)^{1/2}\,t\;\; \mathrm{Re}(h \otimes a_l^{1/2}\,\overline{z_l}\,g_l)$. Luego, $R(t)$ es una función suave tal que

$$R(0) = 0\ ,\quad R'(0) = -\sum_{l \in I_j} \mathrm{Re}(h \otimes \overline{z_l}\,a_l^{1/2}\,g_l) = -\,\mathrm{Re}(h \otimes \sum_{l \in I_j} \overline{z_l}\,a_l^{1/2}\,g_l) \overset{(4.10)}{=} 0 \quad \text{y} \quad R''(0) = 0.$$

De este modo se tiene que $\lim\limits_{t \to 0}\; t^{-2}\; R(t) = 0$. Consideremos ahora el subespacio

$$V = \mathrm{gen}\;\big(\{g_l :\;\, l \in I_j\} \cup \{h\}\big) = \mathrm{gen}\;\big\{\,g_l :\;\, l \in I_j\,\big\} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{C} \cdot h\ .$$

Luego, $\dim V = s + 1$ para $s = \dim \mathrm{gen}\{g_l :\;\, l \in I_j\} \geq 1$. Por construcción, el subespacio V reduce a $S - S_0$ y $T(t)$ de manera tal que $(S - S_0)|_{V^\perp} = T(t)|_{V^\perp}$, para $t \in (-1/2\,,\,1/2)$. Por otro lado, por la Eq. (4.11),

$$T(t)|_V = (S - S_0)|_V + t^2 \sum_{l \in I_j} |z_l|^2\,(g_l \otimes g_l - a_l\; h \otimes h) + R(t) = A(t) + R(t) \in L(V)\ , \tag{4.12}$$

donde hemos utilizado el hecho de que los rangos de los operadores autoadjuntos en el segundo y en el tercer término de la fórmula anterior, claramente están contenidos en V. Luego,

$$\lambda\big((\,S - S_0)|_V\,\big) = \big(\,c\,,\; b_j\,\mathbb{1}_s\,\big) \in (\mathbb{R}^{s+1}_{>0})^{\downarrow}$$

y

$$\lambda\Big(\;\textstyle\sum_{l \in I_j} |z_l|^2 g_l \otimes g_l\Big) \;\; = (\gamma_1\,,\, \dots\,,\, \gamma_s\,,\, 0) \in (\mathbb{R}^{s+1}_{\geq 0})^{\downarrow} \quad \text{con} \quad \gamma_s > 0\ ,$$

por la definición de s y el hecho de que $|z_l| > 0$ para $l \in I_j$ (y el hecho conocido de que si $S\,,\, T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+ \implies R(S+T) = R(S) + R(T)$). Luego, para t lo suficientemente chico, el espectro del operador $A(t) \in L(V)$ definido en la Eq. (4.12) es

$$\lambda\big(\,A(t)\,\big) \;\; = \big(\,c - t^2\, \textstyle\sum_{l \in I_j} a_l\,|z_l|^2\,,\; b_j + t^2\,\gamma_1\,,\, \dots\,,\, b_j + t^2\,\gamma_s\,\big) \in (\mathbb{R}^{s+1}_{\geq 0})^{\downarrow}\ ,$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\langle g_l\,,\, h\rangle = 0$ para todo $l \in I_j$. Consideremos ahora

$$\lambda\big(\,R(t)\,\big) = \big(\,\delta_1(t)\,,\, \dots\,,\, \delta_{s+1}(t)\,\big) \in (\mathbb{R}^{s+1}_{\geq 0})^{\downarrow} \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

Recordemos que en este caso $\lim\limits_{t \to 0} t^{-2}\delta_j(t) = 0$ para $1 \leq j \leq s+1$. Utilizando la desigualdad de Weyl de la Eq. (1.5) en la Eq. (4.12), podemos ver que

$$\lambda\big(\,T(t)|_V\,\big) \prec \lambda\big(\,A(t)\,\big) + \lambda\big(\,R(t)\,\big) \overset{\text{def}}{=} \rho(t) \in (\mathbb{R}^{s+1}_{\geq 0})^{\downarrow}\,. \tag{4.13}$$

Ahora sabemos que

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \big(\, c - t^2 \textstyle\sum_{l\in I_j} a_l\,|z_l|^2 + \delta_1(t)\,,\, b_j + t^2\,\gamma_1 + \delta_2(t)\,,\,\ldots\,,\, b_j + t^2\,\gamma_s + \delta_{s+1}(t)\,\big)\\ &= \Big(\, c - t^2\,(\textstyle\sum_{l\in I_j} a_l\,|z_l|^2 + \frac{\delta_1(t)}{t^2})\,,\, b_j + t^2\,(\gamma_1 + \frac{\delta_2(t)}{t^2})\,,\,\ldots\,,\, b_j + t^2\,(\gamma_s + \frac{\delta_{s+1}(t)}{t^2})\,\Big)\,.\end{aligned}$$

Como por hipótesis $b_j < c$, las observaciones previas muestran que existe $\varepsilon > 0$ tal que si $t \in (0,\varepsilon)$ entonces, para todo $i \in \mathbb{I}_s$

$$c > c - t^2 \left(\sum_{l\in I_j} a_l\,|z_l|^2 + \frac{\delta_1(t)}{t^2}\right) > b_j + t^2\left(\gamma_i + \frac{\delta_{i+1}(t)}{t^2}\right) > b_j\,.$$

Los hechos previos muestran que para $t \in (0,\varepsilon)$ se tiene que $\rho(t) \prec \lambda((S-S_0)|_V) = \big(\, c\,,\, b_j\,\mathbb{1}_s\,\big)$ estrictamente. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lambda(T(t)) &= \big(\lambda((S-S_0)|_{V^\perp})\,,\, T(t)|_V\,\big)^{\downarrow} \overset{(4.13)}{\prec} \big(\lambda((S-S_0)|_{V^\perp})\,,\, \rho(t)\,\big)\\ &\prec \big(\lambda((S-S_0)|_{V^\perp})\,,\, \lambda(S-S_0)|_V\,\big)^{\downarrow} = \lambda(S-S_0)\,,\end{aligned}$$

donde la segunda relación de mayorización es estricta, es decir

$$(\lambda((S-S_0)|_{V^\perp})\,,\, \rho(t))^{\downarrow} \neq (\lambda((S-S_0)|_{V^\perp})\,,\, \lambda(S-S_0)|_V)^{\downarrow}).$$

Como N es una nui estrictamente convexa, para $t \in (0,\varepsilon)$ se tiene que

$$\Theta_N(\mathcal{G}(t)) = N(T(t)) < N(S-S_0) = \Theta_N(\mathcal{G})\,.$$

Esto último contradice el hecho de que $\mathcal{G}_0$ es un minimizador local de Θ_N en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. □

Observación 4.2.6. Considerando la Notación 4.2.2 y las notaciones del Corolario 4.2.4; asumiendo que $k \geq d$ se tiene que

$$b_p = \text{máx}\,\sigma(S-S_0)\,. \tag{4.14}$$

En efecto, si $R(S_0) = W = \mathbb{C}^d$ entonces $\sigma(S-S_0) = R(D) = \{b_1\,,\,\ldots\,,\,b_p\}$ con $b_1 < \cdots < b_p$. De otro modo, $\dim W < d \leq k$ entonces, por el Corolario 4.2.4 y el Teorema 4.2.5, se tiene que la familia $\{g_i\}_{i\in J_p}$ no puede ser linealmente independiente (pues, las familias $\{g_i\}_{i\in J_j}$ son linealmente independientes para $1 \leq j < p$ y mutuamente ortogonales). Por lo tanto, podemos deducir que $b_p = \text{máx}\,\sigma(S-S_0)$. △

4.2.2. Casos especiales de problemas de G-DOM

Consideremos la Notación 4.2.2 y supongamos que $k \geq d$; si $W = R(S_0) \subset \mathbb{C}^d$ entonces, tal como vimos en el Corolario 4.2.4, W reduce al operador autoadjunto $S - S_0 \in \mathcal{H}(d)$. En esta sección probaremos que en caso de que W sea un autoespacio de $S - S_0$ y $\mathcal{G}_0$ sea un minimizador local de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, se tiene que $\mathcal{G}_0$ es un minimizador global, lo cual es un caso particular del Problema para la G-DOM (ver Teorema 4.2.9). Con el fin de abordar este caso particular, vamos a introducir la siguiente

Observación 4.2.7 (Un modelo "naif")**.** Fijemos $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^{\downarrow}$ y una nui estrictamente convexa N. Sea $t = \operatorname{tr}(\mathbf{a}) = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} a_i > 0$. Si $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ entonces es claro que

$$S_{\mathcal{G}} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+ \quad \text{y} \quad \operatorname{tr}(S_{\mathcal{G}}) = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} \|g_i\|^2 = \operatorname{tr}(\mathbf{a}) = t\,.$$

Luego, vamos a considerar

$$\mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+_t = \{A : \ A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+ \, , \, \operatorname{tr}(A) = t\} \supset \{S_{\mathcal{G}} : \ \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\} \, , \tag{4.15}$$

dotado con la métrica inducida por la norma de operadores. Más aun, vamos a considerar la función

$$\mathcal{D}_{(N,\,S,\,t)} = \mathcal{D} : \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+_t \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{dada por} \quad \mathcal{D}(A) = N(S - A) \, . \tag{4.16}$$

Por la Eq. (4.15) podemos ver que

$$\text{mín}\{\mathcal{D}(A) : \ A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+_t\} \leq \text{mín}\{\Theta_N(\mathcal{G}) : \ \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\} \, . \tag{4.17}$$

La desigualdad en la Eq. (4.17) puede ser estricta. Sin embargo, probaremos que bajo algunas hipótesis adicionales, vale la igualdad en la Eq. (4.17). Más aun, como $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+_t$ es un conjunto (más grande pero) más simple, podemos calcular aquellos $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+_t$ que alcanzan el mínimo en el lado izquierdo de la Eq. (4.17) (ver Teorema 4.2.8). $\triangle$

Teorema 4.2.8. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\lambda(S) = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$, $t > 0$ y N una nui en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (fijos). Consideremos una bon $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que $S\, v_i = \lambda_i\, v_i$, para $i \in \mathbb{I}_d$. Sea $c \leq \lambda_1$ únicamente determinado por $\sum_{i\in\mathbb{I}_d}(\lambda_i - c)^+ = t$ y sea

$$A^{\text{op}} = \sum_{i\in\mathbb{I}_d}(\lambda_i - c)^+ \, v_i \otimes v_i \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+_t \, , \quad \text{entonces} \quad \lambda(S - A_0) = (\text{mín}\{c\, , \, \lambda_i\})_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow \, .$$

Luego, A^{op} es un minimizador global de $\mathcal{D}$ definido como en la Eq. (4.16).

Demostración. Por construcción podemos ver que $\lambda(S - A^{\text{op}}) = (\text{mín}\{c\, , \, \lambda_i\})_{i\in\mathbb{I}_d}$. Sea $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+_t$ arbitrario; consideremos los siguiente casos:

En caso de que $c \leq \lambda_d$, se tiene $\lambda(S - A^{\text{op}}) = c\, \mathbb{1}_d$. Como $\operatorname{tr}(A) = t$, entonces

$$\operatorname{tr}(\lambda(S - A)) = \operatorname{tr}(S - A) = \operatorname{tr}(S) - t = \operatorname{tr}(\lambda(S - A^{\text{op}})).$$

Por lo tanto, en este caso se tiene que (ver ítem 4. en la Observación 1.1.3)

$$\lambda(S - A^{\text{op}}) = c\, \mathbb{1}_d \prec \lambda(S - A) \, .$$

De este modo, podemos concluir que $\mathcal{D}(A^{\text{op}}) = N(S - A^{\text{op}}) \leq N(S - A) = \mathcal{D}(A)$.

En caso de que $c > \lambda_d$, existe $r \in \mathbb{I}_{d-1}$ tal que $\lambda_r \geq c > \lambda_r + 1$. Luego,

$$(\gamma_i)_{i\in\mathbb{I}_d} := \lambda(S - A^{\text{op}}) = (c\, \mathbb{1}_r \, , \, \lambda_{r+1} \, , \, \ldots \, , \, \lambda_d) \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow \, .$$

Si $\lambda(A) = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$ entonces, por la desigualdad de Lidskii (aditiva), se tiene que

$$(\delta_i)_{i\in\mathbb{I}_d} := ((\lambda_i - \alpha_i)_{i\in\mathbb{I}_d})^\downarrow = (\lambda(S) - \lambda(A))^\downarrow \prec \lambda(S - A) \, . \tag{4.18}$$

Ahora probremos que $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \prec (\delta_i)_{i\in\mathbb{I}_d}$; por construcción $\operatorname{tr}((\gamma_i)_{i\in\mathbb{I}_d}) = \operatorname{tr}((\delta_i)_{i\in\mathbb{I}_d})$ esto es

$$\operatorname{tr}(\gamma) = \sum_{j=1}^{d} \gamma_j = r\, c + \sum_{j=r+1}^{d} \lambda_j = \operatorname{tr}(\delta) = \sum_{j=1}^{d} \delta_j = \sum_{j=1}^{d}(\lambda_j - \alpha_j) \, . \tag{4.19}$$

Luego, con el fin de probar que $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \prec (\delta_i)_{i\in\mathbb{I}_d}$ necesitamos ver que $\sum_{j=k}^d \gamma_j \geq \sum_{j=k}^d \delta_j$, para todo $k \in \mathbb{I}_d$, ya que los vectores están ordenados de manera no-creciente. Notemos que $\lambda_i \geq \lambda_i - \alpha_i$, para todo $i \in \mathbb{I}_d$; luego, por la Observación 1.1.3, podemos concluir que $\lambda_i \geq \delta_i$, para $i \in \mathbb{I}_d$. Esto garantiza que, para $r+1 \leq k \leq d$,

$$\sum_{j=k}^{d} \gamma_j = \sum_{j=k}^{d} \lambda_j \geq \sum_{j=1}^{k} \delta_j. \tag{4.20}$$

Definamos ahora $\beta = \sum_{j=r+1}^d (\gamma_j - \delta_j)$ y notemos que la Eq. (4.20) muestra que $\beta \geq 0$. Por la Eq. (4.19),

$$\sum_{j=1}^{r} \delta_j = r\,(c + \beta/r),$$

lo cual implica que $(c+\beta/r)\mathbb{1}_r \prec (\delta_1, \cdots, \delta_r)$. Luego, si $1 \leq k \leq r$ entonces

$$\sum_{j=k}^{r} \delta_j \leq (r-k+1)\,(c+\beta/r) \leq (r-k+1)\,c + \beta\,. \tag{4.21}$$

Por lo tanto, para $1 \leq k \leq r$ resulta que

$$\sum_{j=k}^{d} \gamma_j - \sum_{j=k}^{d} \delta_j = (r-k+1)\,c + \beta - \sum_{j=k}^{r} \delta_j \overset{(4.21)}{\geq} 0\,. \tag{4.22}$$

Luego, las Eqs. (4.19), (4.21) y (4.22) muestran que $\gamma \prec \delta$. Finalmente, si N es una nui (estrictamente convexa) entonces

$$N(S - A^{\mathrm{op}}) = N(D_\gamma) \leq N(D_\delta) \overset{(4.18)}{\leq} N(S - A)$$

y por lo tanto A^{op} es un minimizador global de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})_t^+$. □

El siguiente teorema resuelve el Problema de la G-DOM que planteamos al comienzo de esta Sección, bajo algunas hipótesis adicionales sobre la estructura espectral de los minimizadores locales.

Teorema 4.2.9. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$, $k \geq d$ y N una nui estrictamente convexa en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Sea $\mathcal{G}_0 = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k}$ un minimizador local de Θ_N en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ tal que existe $b_1 \in \mathbb{R}$ que satisface $(S - S_{\mathcal{G}_0})g_i = b_1\, g_i$, para $i \in \mathbb{I}_k$. Luego, existe una bon $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i\ v_i \otimes v_i \quad \text{ y } \quad S_{\mathcal{G}_0} = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} (\lambda_i - b_1)^+\ v_i \otimes v_i\,, \tag{4.23}$$

donde $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} = \lambda(S) \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^d)^\downarrow$. Más aun, $\lambda(S - S_{\mathcal{G}_0}) \prec \lambda(S - S_{\mathcal{G}})$ para $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. En particular, $\mathcal{G}_0$ es un minimizador global de Θ_N en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$.

Demostración. Sea $S_0 = S_{\mathcal{G}_0}$. Por el Teorema 4.2.3 existe una bon $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i\ v_i \otimes v_i \quad \text{ y } \quad S_0 = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i(S_0)\ v_i \otimes v_i\,. \tag{4.24}$$

En particular, $\lambda(S - S_0) = (\lambda(S) - \lambda(S_0))^\downarrow$. Sea $W = R(S_0) = \mathrm{gen}\{g_i :\ i \in \mathbb{I}_k\}$, el cual reduce a $S - S_0$ por el Corolario 4.2.4. Luego, por hipótesis se tiene que $\sigma((S - S_0)|_W) = \{b_1\}$. Entonces vamos a considerar los siguientes dos casos:

Supongamos que $W = \mathbb{C}^d$. En este caso $\sigma(S - S_0) = \{b_1\}$ y por ende $\lambda(S - S_0) = b_1 \mathbb{1}_d$. Luego, $\lambda_i - \lambda_i(S_0) = b_1$ lo cual implica que

$$\lambda_i(S_0) = (\lambda_i - b_1)^+ \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_d.$$

Notemos que para todo $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ se tiene que $\operatorname{tr}(S - S_{\mathcal{G}}) = \operatorname{tr}(S) - \operatorname{tr}(\mathbf{a})$; luego, podemos ver que

$$b_1 \mathbb{1}_d = \operatorname{tr}(\lambda(S - S_0)) = \operatorname{tr}(S - S_{\mathcal{G}}),$$

lo cual muestra que (ver ítem 4. en la Observación 1.1.3) $\lambda(S - S_0) \prec \lambda(S - S_{\mathcal{G}})$ para toda familia $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. Este último hecho implica que

$$\Theta_N(\mathcal{G}_0) = N(S - S_0) \leq N(S - S_{\mathcal{G}}) = \Theta_N(\mathcal{G}) \quad \text{para toda familia} \quad \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a}).$$

Luego, $\mathcal{G}_0$ es un minimizador global de Θ_N in $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$.

Ahora supongamos que $W \neq \mathbb{C}^d$. Luego, $d > \dim W = \operatorname{gen}\{g_i : i \in \mathbb{I}_k\}$ lo cual prueba que $\mathcal{G}_0$ es una familia linealmente dependiente, pues $k \geq d$. Luego, el Teorema 4.2.5 implica que $c \leq b_1$ para todo $c \in \sigma(S - S_0)$. Sea $1 \leq r \leq d - 1$ tal que $\dim W = r$. Luego, $\lambda(S_0) = (\lambda_1(S_0), \dots, \lambda_r(S_0), 0_{d-r})$ y $W = \operatorname{gen}\{v_i : 1 \leq i \leq r\}$. Por lo tanto, usando la Eq. (4.24) y los hechos previos, podemos concluir que

$$S - S_0 = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda_i(S_0))\, v_i \otimes v_i + \sum_{i=r+1}^{d} \lambda_i\, v_i \otimes v_i = b_1 \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes v_i + \sum_{i=r+1}^{d} \lambda_i\, v_i \otimes v_i$$

Luego, $\sigma(S - S_0) \ni \lambda_i \leq b_1$ y $\lambda_i(S_0) = 0$, para $r + 1 \leq i \leq d$; entonces $\lambda_i(S_0) = (\lambda_i(S) - b_1)^+$, para $r + 1 \leq i \leq d$. De este modo, $\lambda_i(S_0) = (\lambda_i - b_1)^+$ para $i \in \mathbb{I}_d$ y por lo tanto se obtiene la representación de S_0 como en la Eq. (4.23).

Notemos que $b_1 = \lambda_1 - (\lambda_1 - b_1)^+$, pues $W \neq \{0\}$. Esto prueba que $b_1 \leq \lambda_1$. Más aun, si $\operatorname{tr}(\mathbf{a}) = t > 0$ entonces

$$\sum_{i \in \mathbb{I}_d} (\lambda_i - b_1)^+ = \operatorname{tr}(S_0) = \operatorname{tr}(\mathbf{a}) = t\,.$$

Utilizando la Observación 4.2.7 y el Teorema 4.2.8 podemos ver que para toda familia $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ se tiene que $\lambda(S - S_0) \prec \lambda(S - S_{\mathcal{G}})$; en particular,

$$\Theta_N(\mathcal{G}) = N(S - S_{\mathcal{G}}) = \mathcal{D}(S_{\mathcal{G}}) \geq \mathcal{D}(S_0) = N(S - S_0) \quad \text{pues} \quad S_{\mathcal{G}} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+_t\,.$$

Finalmente, $\mathcal{G}_0$ es un minimizador global de Θ_N en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. □

4.2.3. Particiones del espectro y del conjunto de normas

En esta sección vamos considerar nuevamente una matriz $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, una sucesión (de normas) $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$ y una nui estrictamente convexa N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. También vamos a considerar una familia $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ (la cual no necesariamente será un minimizador local de la función Θ_N en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, como lo hemos supuesto en secciones anteriores) con operador de marco $S_{\mathcal{G}_0} = S_0$, el subespacio $W = R(S_0) \subset \mathbb{C}^d$, el operador $D = (S - S_0)|_W$ y $\sigma(D) = \{b_1, \dots, b_p\}$, donde $b_1 < b_2 < \dots < b_p$.

En el Corolario 4.2.4 hemos probado que W reduce a $S - S_0 \in \mathcal{H}(d)$; de este modo, $D := (S - S_0)|_W \in L(W)$ es un operador autoadjunto. También hemos presentado el conjunto de índices

$$J_j = \{\ell \in \mathbb{I}_k : D\, g_\ell = b_j\, g_\ell\} \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_p\,. \tag{4.25}$$

De este modo, $\mathbb{I}_k$ es la unión disjunta de $\{J_j\}_{j\in\mathbb{I}_p}$. También hemos visto en el Teorema 4.2.3 que cada vector g_i es un autovector de $S - S_0$; esto nos permite considerar los conjuntos

$$K_j = \{i \in \mathbb{I}_{s_D} : \delta_i = \lambda_i - \mu_i = b_j\}\,, \tag{4.26}$$

para $s_D = \text{rk}(S_0)$. Luego, $\mathbb{I}_{s_D}$ es la unión disjunta de $\{K_j\}_{j\in\mathbb{I}_{s_D}}$.

En la Proposición 4.2.13 vamos a describir la estructura de los conjuntos J_j y K_j, para $j \in \mathbb{I}_p$; para tal fin vamos a presentar los siguientes dos resultados técnicos, que son de alguna manera un poco más generales de lo necesario para este caso, pero serán fundamentales más adelante para la demostración del Teorema 4.3.12. Cabe señalar que la Proposición 4.2.13 jugará un rol central en la prueba del Teorema 4.2.17, en el cual obtendremos la estructura detallada de los minimizadores locales de la G-DOM. Para empezar, vamos a establecer la notación que necesitaremos.

Notaciones 4.2.10. Fijemos $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$ y una nui estrictamente convexa N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Consideremos

$$\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})} = \Theta : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{dada por} \quad \Theta(\mathcal{G}) = N(S - S_{\mathcal{G}})\,.$$

También vamos a considerar una familia $\mathcal{G}_0 = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ tal que:

a) Existe $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ una bon de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i\ v_i \otimes v_i \quad \text{y} \quad S_0 = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \mu_i\ v_i \otimes v_i\ ,$$

donde $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} = \lambda(S) \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$, $S_0 = S_{\mathcal{G}_0}$ y $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{I}_d} = \lambda(S_0) \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$.

b) Vamos a tomar $W = R(S_0)$, $D = (S - S_0)|_W$ y $\sigma(D) = \{b_1\,,\,\ldots\,,\,b_p\}$ donde $b_1 < b_2 < \ldots < b_p$.

c) Denotaremos por $\delta = \lambda - \mu \in \mathbb{R}^d$ de este modo, $S - S_0 = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \delta_i\ v_i \otimes v_i$ y $D = \sum_{i=1}^{s_D} \delta_i\ v_i \otimes v_i$, donde $s_D = \text{máx}\,\{i \in \mathbb{I}_d : \mu_i \neq 0\} = \text{rk}\,S_0$.

e) Como $R(S_0) = \text{gen}\{g_i : i \in \mathbb{I}_k\} = W = \bigoplus_{i\in\mathbb{I}_p} \ker\,(D - b_i\,I_W\,)$ entonces, para todo $j \in \mathbb{I}_p$,

$$W_j = \text{gen}\{g_i : i \in J_j\} = \ker\,(D - b_j\,I_W\,) = \text{gen}\{v_i : i \in K_j\}\ , \tag{4.27}$$

pues $g_i \in \ker\,(D - b_j\,I_W\,)$ para todo $i \in J_j$. Notemos que, por el Teorema 4.2.3, cada W_j reduce tanto a S como a S_0 .

Es preciso notar que una familia $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ que es un minimizador local de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, verifica todas estas condiciones.

Proposición 4.2.11. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ como en la Notación 4.2.10 y supongamos que $p > 1$. Supongamos también que existen

$$i < r \leq p \quad , \quad h \in J_i \quad , \quad l \in J_r \quad \text{con} \quad l < h \quad (\implies a_l \geq a_h)\,. \tag{4.28}$$

Luego, existe una curva continua $\mathcal{G}(t) : [0, 1) \to \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ tal que $\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}_0$ y tal que $\lambda(S - S_{\mathcal{G}(t)}) \prec \lambda(S - S_0)$ con mayorización estricta para $t \in (0, \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$.

Demostración. Consideremos

$$w_h = g_h / \|g_h\| = a_h^{-1/2} g_h \quad \text{y} \quad w_l = g_l / \|g_l\| = a_l^{-1/2} g_l,$$

(notar que $\langle w_h, w_l \rangle = 0$ pues $\langle g_h, g_l \rangle = 0$). Ahora definamos, para $t \in \mathbb{R}$ y algún $\gamma > 0$ conveniente (el cuál será explícitamente calculado más adelante),

$$g_h(t) = \cos(t)\, g_h + \sin(t)\ \|g_h\|\ w_l \quad \text{y} \quad g_l(t) = \cos(\gamma t)\, g_l + \sin(\gamma t)\ \|g_l\|\ w_h.$$

Luego, consideremos la familia $\mathcal{G}_\gamma(t)$, la cual se obtiene de $\mathcal{G}_0$, reemplazando los vectores g_h y g_l por $g_h(t)$ y $g_l(t)$ respectivamente, y denotemos por $S_\gamma(t)$ a su operador de marco. Notemos que $\mathcal{G}_\gamma(t) \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sea $W_{h,l} = \text{gen}\{w_h, w_l\}$, este subespacio reduce a $S - S_0$ y $S - S_\gamma(t)$. El hecho de que $g_h(t), g_l(t) \in W_{h,l}$, nos permite representar la siguiente matriz con respecto a la base $W_{h,l}$,

$$g_h \otimes g_h = \begin{pmatrix} a_h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ g_h(t) \otimes g_h(t) = a_h \begin{pmatrix} \cos^2(t) & \cos(t)\sin(t) \\ \cos(t)\sin(t) & \sin^2(t) \end{pmatrix},$$

$$g_l \otimes g_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_l \end{pmatrix}, \ \ g_l(t) \otimes g_l(t) = a_l \begin{pmatrix} \sin^2(\gamma t) & \cos(\gamma t)\sin(\gamma t) \\ \cos(\gamma t)\sin(\gamma t) & \cos^2(\gamma t) \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$S - S_\gamma(t) = S - S_0 - g_h(t) \otimes g_h(t) - g_l(t) \otimes g_l(t) + g_h \otimes g_h + g_l \otimes g_l.$$

Entonces $(S - S_0)|_{W_{h,l}^\perp} = (S - S_\gamma(t))|_{W_{h,l}^\perp}$. Por otro lado, $(S - S_0)|_{W_{h,l}} = \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & b_r \end{pmatrix}$ y

$$(S - S_\gamma(t))|_{W_{h,l}} = \begin{pmatrix} b_i + a_h \sin^2(t) - a_l \sin^2(\gamma t) & -a_h \cos(t)\sin(t) - a_l \cos(\gamma t)\sin(\gamma t) \\ -a_h \cos(t)\sin(t) - a_l \cos(\gamma t)\sin(\gamma t) & b_r + a_l \sin^2(\gamma t) - a_h \sin^2(t) \end{pmatrix} \overset{def}{=} A_\gamma(t).$$

Notemos que $\text{tr}(A_\gamma(t)) = b_i + b_r$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces la mayorización $\lambda(A_\gamma(t)) \prec (b_r, b_i)$ es estricta si, y sólo si, $\|A_\gamma(t)\|_2^2 < b_r^2 + b_i^2$. Entonces consideremos la función $m_\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$m_\gamma(t) = \|A_\gamma(t)\|_2^2 = \text{tr}(A_\gamma(t)^2) \ \ (\forall t \in \mathbb{R}).$$

Notemos que $A_\gamma(0) = (S - S_0)|_{W_{h,l}}$, entonces $m_\gamma(0) = \text{tr}((S - S_0)|_{W_{h,l}}^2) = b_r^2 + b_i^2$. El próximo paso es encontrar un $\gamma > 0$ conveniente, tal que $m'_\gamma(0) = 0$ pero $m''_\gamma(0) < 0$; en este caso la mayorización estricta $\lambda(A_\gamma(t)) \prec (b_r, b_i)$ implica que $\lambda(S - S_\gamma(t)) \prec \lambda(S - S_0)$ estrictamente para todo t cercano a 0, como queríamos.

Comencemos calculando las derivadas de las entradas $a_{ij}(t)$ de $A_\gamma(t)$, para $1 \leq i, j \leq 2$:

$$\begin{aligned}
a'_{11}(t) &= a_h \sin(2\,t) - a_l \gamma \sin(2\,\gamma t) && \Longrightarrow \ a'_{11}(0) = 0, \\
a'_{12}(t) &= -a_h \cos(2\,t) - a_l \gamma \cos(2\,\gamma t) = a'_{21}(0) && \Longrightarrow \ a'_{12}(0) = -a_h - a_l \gamma, \\
a'_{22}(t) &= a_l \gamma \sin(2\,\gamma t) - a_h \sin(2\,t) && \Longrightarrow \ a'_{22}(0) = 0, \\
a''_{11}(t) &= 2\,a_h \cos(2\,t) - 2\,a_l \gamma^2 \cos(2\,\gamma t)) && \Longrightarrow \ a''_{11}(0) = 2\,(a_h - a_l \gamma^2), \\
a''_{12}(t) &= 2\,a_h \sin(2\,t) + 2\,a_l\,\gamma^2 \sin(2\,\gamma t) && \Longrightarrow \ a''_{12}(0) = 0, \\
a''_{22}(t) &= 2\,a_l \gamma^2 \cos(2\,\gamma t) - 2 a_h \cos(2\,t) && \Longrightarrow \ a''_{22}(0) = 2\,(a_l \gamma^2 - a_h).
\end{aligned}$$

Luego,

$$m'_\gamma(0) = 2\,a_{11}(0)\,a'_{11}(0) + 4\,a_{12}(0)\,a'_{12}(0) + 2\,a_{22}(0)\,a'_{22}(0) = 0,$$
$$m''_\gamma(0) = 4\,b_i(a_h - a_l\,\gamma^2) + 4(a_h + a_l\gamma)^2 + 4\,b_r(a_l\,\gamma^2 - a_h).$$

Notemos que $m''_\gamma(0)$ es una función cuadrática que depende de γ y su discriminante es

$$a_h^2\,a_l^2\,[a_h\,a_l - (a_l + b_r - b_i)(a_h + b_i - b_r)] > 0,$$

dado que asumimos que $a_h \le a_l$. Luego,

$$(a_l + (b_r - b_i))(a_h - (b_r - b_i)) = a_l\,a_h + (b_r - b_i)(a_h - a_l) - (b_r - b_i)^2 < a_l\,a_h.$$

Por lo tanto, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $m''_\gamma(0) < 0$. Notemos que , mientras que $(b_r - b_i)(a_h - a_l) - (b_r - b_i)^2 < 0$ (lo cual es equivalente a decir que $a_h - a_l < b_r - b_i$) podemos elegir γ como arriba. □

Como ya hemos mencionado anteriormente, la Proposición 4.2.11 junto con el siguiente resultado, nos permitirán obtener una prueba de la Proposición 4.2.13.

Proposición 4.2.12. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ como en la Notación 4.2.10 y supongamos que $p > 1$. Supongamos también que existen

$$i \in K_e \quad \text{y} \quad j \in K_r \quad \text{con} \quad e < r \quad \text{tales que} \quad j < i\,. \tag{4.29}$$

En este caso, existe una curva continua

$$\mathcal{G}(t) : [0,1) \to \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{G}(0) = \mathcal{G}_0 \quad \text{y} \quad \lambda(S - S_{\mathcal{G}(t)}) \prec \lambda(S - S_0)\,,$$

con mayorización estricta para $t \in (0, \varepsilon)$, para algún $\varepsilon > 0$.

Demostración. Considerando las notaciones ya establecidas y la Notación 4.2.10, observemos que

$$\mu_i \le \mu_j \quad , \quad \lambda_j \le \lambda_i \quad \text{y} \quad b_e = \lambda_i - \mu_i < b_r = \lambda_j - \mu_j\ .$$

Consideremos, como en la Notación 4.2.10, una bon $\mathcal{B} = \{v_l\}_{l\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i\ v_i \otimes v_i \quad \text{y} \quad S_0 = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \mu_i\ v_i \otimes v_i\ . \tag{4.30}$$

Para $t \in [0,1)$ vamos a considerar la curva

$$g_l(t) = g_l + \big(\,(1-t^2)^{1/2} - 1\,\big)\ \langle g_l, v_i\rangle\ v_i + t\ \langle g_l, v_i\rangle\ v_j \quad \text{para} \quad l \in \mathbb{I}_k\,. \tag{4.31}$$

Notemos que, si $l \in J_e$, entonces $(S - S_0)\,g_l = b_e\,g_l \implies \langle g_l\,,\,v_j\rangle = 0$. De manera similar, si $l \in \mathbb{I}_k \setminus J_e$ entonces $\langle g_l\,,\,v_i\rangle = 0$ (lo cual implica que $g_l(t) = g_l$). Por lo tanto, la familia $\mathcal{G}(t) = \{g_l(t)\}_{l\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ para $t \in [0,1)$. Sean $P_i = v_i \otimes v_i$ y $P_{ji} = v_j \otimes v_i$ (luego, $P_{ji}\,x = \langle x\,,\,v_i\rangle\ v_j$). Entonces, para todo $t \in [0\,,\,1)$,

$$g_l(t) = \big(\,I + ((1-t^2)^{1/2} - 1)\ P_i + t\ P_{ji}\,\big)\ g_l \quad \text{para todo} \quad l \in \mathbb{I}_k\ .$$

Esto es, si $V(t) = I + ((1-t^2)^{1/2} - 1)\ P_i + t\ P_{ji} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ entonces $g_l(t) = V(t)\ g_l$ para todo $l \in \mathbb{I}_k$ y $t \in [0,1)$. De este modo se tiene que

$$\mathcal{G}(t) = V(t)\,\mathcal{G} = \{V(t)\,g_l\}_{l\in\mathbb{I}_n} \implies S_{\mathcal{G}(t)} = V(t)\,S_{\mathcal{G}}\,V(t)^* \quad \text{para} \quad t \in [0,1)\ .$$

Luego, obtenemos la siguiente representación

$$S_{\mathcal{G}(t)} = \sum_{\ell\in\mathbb{I}_d\setminus\{i,j\}} \mu_\ell \ v_\ell\otimes v_\ell + \gamma_{11}(t) \ v_j\otimes v_j + \gamma_{12}(t) \ v_j\otimes v_i + \gamma_{21}(t) \ v_i\otimes v_j + \gamma_{22}(t) \ v_i\otimes v_i \ ,$$

donde las funciones $\gamma_{rs}(t)$ son las entradas de la matriz $A(t) = \big(\gamma_{rs}(t)\big)_{r\,,\,s=1}^2 \in \mathcal{H}(2)$ dada por

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & (1-t^2)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_j & 0 \\ 0 & \mu_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & (1-t^2)^{1/2} \end{pmatrix} \quad \text{para todo} \quad t\in[0\,,\,1) \ .$$

De manera sencilla se puede probar que $\operatorname{tr}(A(t)) = \mu_j+\mu_i$ y $\det(A(t)) = (1-t^2)\,\mu_j\,\mu_i$. Estos hechos implican que si consideramos la función continua $L(t) = \lambda_{\text{máx}}(A(t))$ entonces $L(0)=\mu_j$ y $L(t)$ es estrictamente creciente en $[0,1)$. También es fácil ver que podemos considerar las curvas continuas $x_i(t):[0,1)\to\mathbb{C}^2$, que satisfacen que $\{x_1(t),\,x_2(t)\}$ es una bon de $\mathbb{C}^2$ tal que

$$A(t)\,x_1(t) = L(t)\,x_1(t) \quad \text{para} \quad t\in[0,1) \quad \text{y} \quad x_1(0)=e_1 \ , \quad x_2(0)=e_2 \, .$$

Para $t\in[0,1)$ consideramos la matriz $X(t) = (u_{r,s}(t))_{r,s=1}^2 \in \mathcal{U}(2)$ con columnas $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Por construcción, $X(t)=[0,1)\to\mathcal{U}(2)$ es una curva continua tal que $X(0)=I_2$ y tal que

$$X(t)^*\,A(t)\,X(t) = \begin{pmatrix} L(t) & 0 \\ 0 & \mu_i+\mu_j-L(t) \end{pmatrix} .$$

Finalmente, consideremos la curva continua $U(t):[0,1)\to\mathcal{U}(d)$ dada por

$$U(t) = u_{11}(t)\,v_j\otimes v_j + u_{12}(t)\,v_j\otimes v_i + u_{21}(t)\,v_i\otimes v_j + u_{22}(t)\,v_i\otimes v_i + \sum_{\ell\in\mathbb{I}_d\setminus\{i,j\}} v_l\otimes v_l \ .$$

Notemos que $U(0)=I$; además, consideremos $\tilde{\mathcal{G}}(t) = U(t)^*\,\mathcal{G}(t)\in\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ para $t\in[0,1)$, la cual es una curva continua tal que $\tilde{\mathcal{G}}(0)=\mathcal{G}_0$. En este caso, para $t\in[0,1)$ se tiene que

$$S_{\tilde{\mathcal{G}}(t)} = U(t)^*\,S_{\mathcal{G}(t)}\,U(t) = L(t)\,v_j\otimes v_j + (\mu_i+\mu_j-L(t))\,v_i\otimes v_i + \sum_{\ell\in\mathbb{I}_d\setminus\{i,j\}} \mu_\ell \ v_\ell\otimes v_\ell \ .$$

En otras palabras, $U(t)$ se construye de manera tal que $\mathcal{B}=\{v_l\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ consiste de autovectores de $S_{\tilde{\mathcal{G}}(t)}$ para todo $t\in[0,1)$. Luego, si $E(t)=L(t)-\mu_j\geq 0$ para $t\in[0\,,\,1)$, tenemos que

$$S - S_{\tilde{\mathcal{G}}(t)} = (b_r + E(t)\,)\,v_j\otimes v_j + (b_e - E(t)\,)\,v_i\otimes v_i + \sum_{\ell\in\mathbb{I}_d\setminus\{i,j\}} (\lambda_\ell-\mu_\ell) \ v_\ell\otimes v_\ell \ .$$

Sea $\varepsilon>0$ tal que $E(t)=L(t)-\mu_j\leq\frac{b_r-b_e}{2}$ para $t\in[0,\varepsilon]$, (recordemos que $L(0)=\mu_j$ y $b_e<b_r$). Como $L(t)$ (y entonces $E(t)$) es estrictamente creciente en $[0,1)$, podemos ver que

$$(b_r - E(t)\,,\,b_e+E(t)) \prec (b_r\,,\,b_e) \implies \lambda(S-S_{\tilde{\mathcal{G}}(t)}) \prec \lambda(S-S_0) \quad \text{para} \quad t\in(0\,,\,\varepsilon] \ ,$$

donde las relaciones de mayorización son estrictas. $\square$

Ahora sí estamos en condiciones de describir la estructura de los conjuntos J_j y K_j para $j\in\mathbb{I}_p$, definidos en la Notación 4.2.14.

Proposición 4.2.13. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ como en la Notación 4.2.14 y supongamos que $p > 1$. Luego, existen $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_{p-1} < s_p \stackrel{\text{def}}{=} s_D \leq d$ tales que

$$\begin{aligned} K_j &= J_j = \{s_{j-1}+1\,,\,\ldots\,,\,s_j\} \qquad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_{p-1}\,, \\ K_p &= \{s_{p-1}+1\,,\,\ldots\,,\,s_p\} \quad \text{y} \quad J_p = \{s_{p-1}+1\,,\,\ldots\,,\,k\}\,. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Demostración. Fijemos $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^{\downarrow}$ y una nui estrictamente convexa N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Sea $\mathcal{G}_0$ un minimizador local de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. De este modo, $\mathcal{G}_0$ satisface las hipótesis de la Notación 4.2.10; con esas notaciones, supongamos que $p > 1$. Luego, vamos a probar que existen $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_{p-1} < s_p \stackrel{\text{def}}{=} s_D \leq d$ tales que se verifica la Eq. (4.32). En efecto, en caso de que los conjuntos J_j, para $j \in \mathbb{I}_p$, no tengan la estructura descrita anteriormente (i.e. conjuntos crecientes formados por índices consecutivos), se tiene que existen índices $i,\, r \in \mathbb{I}_p$ y $h,\, l \in \mathbb{I}_k$ para los cuales la Eq. (4.28) vale. En este caso, la Proposición 4.2.11 muestra que existe una curva continua $\mathcal{G}(t) : [0,1) \to \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ tal que $\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}_0$ y $\lambda(S - S_{\mathcal{G}(t)}) \prec \lambda(S - S_0)$ con mayorización estricta para $t \in (0,\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. Como N es una nui estrictamente convexa podemos concluir que

$$\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}(\tilde{\mathcal{G}}(t)) = N(S - S_{\tilde{\mathcal{G}}(t)}) < N(S - S_0) = \Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}(\mathcal{G}_0) \quad \text{for} \quad t \in (0\,,\,\varepsilon]\,. \tag{4.33}$$

Este último resultado contradice la minimalidad local de $\mathcal{G}_0$. Luego, existen índices $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_{p-1} < s_p \leq d$ para los cuales la representación de los conjuntos J_j, para $j \in \mathbb{I}_p$, como en la Eq. (4.32) vale.

De manera similar, en el caso de que los conjuntos K_j, para $j \in \mathbb{I}_p$, no sean conjuntos crecientes formados por índices consecutivos, aplicando la Proposición 4.2.12, también tenemos que $\mathcal{G}_0$ no es un minimizador local; lo cual contradice la hipótesis sobre $\mathcal{G}_0$. Finalmente, notemos que por el Teorema 4.2.3 tenemos que la familia $\{g_i\}_{i\in J_j}$ es linealmente independiente para todo $j \in \mathbb{I}_{p-1}$. En particular, por la Eq. (4.27), tenemos que

$$\dim(W_j) = |K_j| = |J_j| \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_{p-1}.$$

Luego, tenemos que $J_j = K_j$, para $j \in \mathbb{I}_{p-1}$, y que $K_p = \{s_{p-1}+1\,,\,\ldots\,,\,s_p\}$ y así tenemos el resultado querido. $\square$

4.2.4. Estructura interna de los minimizadores locales de la G-DOM

En esta sección, basados en los resultados obtenidos en la Sección 4.2 y la estructura de los conjuntos J_j y K_j (para $j \in \mathbb{I}_p$) establecidos en las Eqs. (4.25) y (4.26), vamos a dar una descripción detallada de lo que llamamos estructura interna de los minimizadores locales de la G-DOM. Para ello vamos a introducir la siguiente

Notación 4.2.14. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^{\downarrow}$ y N una nui estrictamente convexa en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Vamos a considerar del mismo modo que antes,

1. La función $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})} = \Theta : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\Theta(\mathcal{G}) = N(S - S_{\mathcal{G}})$.

2. Un minimizador local $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$, con operador de marco $S_{\mathcal{G}_0} = S_0$.

3. El vector de autovalores de S y el de S_0 (contando multiplicidades) ordenados de manera no creciente $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} = \lambda(S) \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$ y $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{I}_d} = \lambda(S_0) \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$, respectivamente.

4. Una bon fija $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ como en el Teorema 4.2.3. Luego,

$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i \ v_i \otimes v_i \quad \text{ y } \quad S_0 = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \mu_i \ v_i \otimes v_i \ , \tag{4.34}$$

5. El subespacio $W = R(S_0)$ de $\mathbb{C}^d$, el operador $D = (S - S_0)|_W$ y sus autovalores $\sigma(D) = \{b_1 , \dots , b_p\}$, donde $b_1 < b_2 < \dots < b_p$.

6. $s_D = \max\{i \in \mathbb{I}_d : \mu_i \neq 0\} = \operatorname{rk} S_0$.

7. El vector $\delta = \lambda - \mu \in \mathbb{R}^d$ tal que, por la Eq. (4.34),

$$S - S_0 = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \delta_i \ v_i \otimes v_i \quad \text{ y } \quad D = \sum_{i=1}^{s_D} \delta_i \ v_i \otimes v_i \, .$$

   Notar que δ se construye emparejando las entradas de dos vectores que están ordenados (pues $\lambda = \lambda(S)$ y $\mu = \lambda(S_0)$), sin embargo δ no necesariamente es un vector ordenado. De todos modos, tenemos que $\lambda(S - S_0) = \delta^\downarrow$. Lo que haremos en adelante es obtener algunas propiedades del vector (no ordenado) δ.

8. Para cada $j \in \mathbb{I}_p$, los conjuntos de índices:

$$K_j = \{i \in \mathbb{I}_{s_D} : \delta_i = \lambda_i - \mu_i = b_j\} \quad \text{ y } \quad J_j = \{i \in \mathbb{I}_k : D\, g_i = b_j\, g_i\} \ .$$

   El Teorema 4.2.3 nos permite asegurar que $\mathbb{I}_{s_D} = \bigsqcup_{j\in\mathbb{I}_p} K_j$ y $\mathbb{I}_k = \bigsqcup_{j\in\mathbb{I}_p} J_j$ (donde la unión es disjunta).

9. Como por la Eq. (4.7), $R(S_0) = \operatorname{gen}\{g_i : i \in \mathbb{I}_k\} = W = \bigoplus_{i\in\mathbb{I}_p} \ker (D - b_i\, I_W)$ entonces, para todo $j \in \mathbb{I}_p$, se tiene que

$$W_j = \operatorname{gen}\{g_i : i \in J_j\} = \ker (D - b_j\, I_W) = \operatorname{gen}\{v_i : i \in K_j\} \ ,$$

   ya que $g_i \in \ker (D - b_j\, I_W)$ para todo $i \in J_j$. Notar que, por el Teorema 4.2.3, cada W_j reduce tanto a S como a S_0 .

$\triangle$

Observación 4.2.15. Consideremos la Notación 4.2.14 para $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y un minimizador local $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ de la función $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$. Sea $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_p = \operatorname{rk}(S_0) \le d$, como en la Proposición 4.2.13. En términos de los índices tenemos también que $\lambda(S - S_0) = \delta(S\,,\,\mathbf{a}\,,\,\mathcal{G}_0)^\downarrow$, para $\delta(S\,,\,\mathbf{a}\,,\,\mathcal{G}_0) = \lambda(S) - \lambda(S_0)$, y

$$\delta(S\,,\,\mathbf{a}\,,\,\mathcal{G}_0) = \big(b_1\,\mathbb{1}_{s_1}\,,\, b_2\,\mathbb{1}_{s_2-s_1}\,,\,\dots\,,\, b_p\,\mathbb{1}_{s_p-s_{p-1}}\,,\,\lambda_{s_p+1}\,,\,\dots\,,\,\lambda_d\big) \quad \text{si} \quad s_p < d \tag{4.35}$$

o

$$\delta(S\,,\,\mathbf{a}\,,\,\mathcal{G}_0) = \big(b_1\,\mathbb{1}_{s_1}\,,\, b_2\,\mathbb{1}_{s_2-s_1}\,,\,\dots\,,\, b_p\,\mathbb{1}_{s_p-s_{p-1}}\big) \quad \text{si} \quad s_p = d\,. \tag{4.36}$$

$\triangle$

En el siguiente resultado vamos a obtener una caracterización de los índices $s_1 < \dots < s_{p-2}$ y las constantes $b_1 < \dots < b_{p-1}$ en términos del índice s_{p-1} (cuando $p > 1$). Más adelante vamos a complementar estos resultados, mostraremos el rol clave que juega el índice s_{p-1} y daremos una caracterización de la constante b_p. Para comenzar vamos a fijar la notación que utilizaremos. Cabe destacar que esta notación no depende ni de la nui N, ni del minimizador local $\mathcal{G}_0$.

Notación 4.2.16. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$, $\lambda(S) = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$ y $m = \text{mín}\{k\,,\,d\}$.

1. Vamos a definir $h_i := \lambda_i - a_i$, para todo $i \in \mathbb{I}_m$.
2. Dado $1 \le j \le r \le m$, vamos a considerar los promedios:

$$P_{j\,,\,r} = \frac{1}{r-j+1}\sum_{i=j}^{r} h_i = \frac{1}{r-j+1}\sum_{i=j}^{r} \lambda_i - a_i\,. \tag{4.37}$$

En adelante, vamos a abreviar los promedios iniciales $P_{1\,,\,r} = P_r$. △

Teorema 4.2.17. Consideremos la Notación 4.2.14 para $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ un minimizador local de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$. Supongamos además que $p > 1$. Sea $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_p \le d$ tal que la Eq. (4.32) vale. Luego, tenemos las siguientes relaciones:

1. El índice $s_1 = \text{máx}\left\{1 \le r \le s_{p-1} \,:\, P_r = \min\limits_{1\le i\le s_{p-1}} P_i\right\}$ y $b_1 = P_{s_1}$.
2. Recursivamente, si $s_j < s_{p-1}$, entonces

$$s_{j+1} = \text{máx}\left\{s_j < r \le s_{p-1} \,:\, P_{s_j+1\,,\,j} = \min_{s_j<i\le s_{p-1}} P_{s_j+1\,,\,i}\right\} \quad \text{y} \quad b_{j+1} = P_{s_j+1\,,\,s_{j+1}}\ .$$

Para probar el Teorema 4.2.17, vamos a considerar un resultado preliminar.

Proposición 4.2.18. Consideremos las Notaciones 4.2.16 y 4.2.10, y supongamos que $p > 1$. Supongamos también que los conjuntos J_j y K_j, para $j \in \mathbb{I}_p$, satisfacen las Eq. (4.32). Luego, se tiene que:

1. $(a_i)_{i\in J_j} \prec (\lambda_i - b_j)_{i\in K_j}$, para $j \in \mathbb{I}_p$.
2. Si $0 \le r < s \le d$ entonces, $(a_j)_{j=r+1}^s \prec (\lambda_j - P_{r+1,\,s})_{j=r+1}^s$ si, y sólo si,

$$P_{r+1,\,s} \le P_{r,\,i}\ ,\quad r+1 \le i \le s \iff P_{r+1,\,s} = \text{mín}\{P_{r+1,\,i} :\ r+1 \le i \le s\}\,.$$

Demostración. Para cada $j \in \mathbb{I}_p$, consideramos los subespacios $W_j = \text{gen}\{g_i :\ i \in J_j\} = R(S_{\mathcal{G}_j})$, por lo tanto $\dim W_j = |K_j|$. Sea Q_j el proyector ortogonal sobre W_j; luego, W_j reduce tanto a S como a S_0 y además

$$(S - S_0)\,Q_j = b_j\,Q_j \quad \text{y} \quad S_0\,Q_j = S_{\mathcal{G}_j}.$$

Luego,

$$S\,Q_j = (S - S_0)Q_j + S_0\,Q_j = b_j\,Q_j + S_{\mathcal{G}_j} \implies \lambda(S_{\mathcal{G}_j}) = ((\lambda_i - b_j)_{i\in K_j}\,,\,0_{d-|K_j|}) \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow\,.$$

Finalmente, por el Teorema de Schur-Horn 1.2.4, tenemos que $(a_i)_{i\in J_j} \prec \lambda(S_{\mathcal{G}_j})$, esto equivale a la relación de mayorización

$$(a_i)_{i\in\mathbb{I}_j} \prec (\lambda_i - b_j)_{i\in K_j},$$

lo cual prueba el ítem 1.

Supongamos ahora que $0 \le r < s \le d$ y notemos que por construcción $(a_j)_{j=r+1}^s$, $(\lambda_j - P_{r+1\,,\,s})_{j=r+1}^s \in (\mathbb{R}^{s-r})^\downarrow$. Por otro lado, si $r+1 \le i \le s$ entonces,

$$\sum_{j=r+1}^{i} a_j \le \sum_{j=r+1}^{i} \lambda_j - P_{r+1\,,\,s} \iff (i-r)P_{r+1\,,\,s} \le \sum_{j=r+1}^{i} h_i \iff P_{r+1\,,\,s} \le P_{r+1\,,\,i}\,.$$

Así tenemos probado el ítem 2. □

Proposición 4.2.19. Consideremos las Notaciones 4.2.16 y 4.2.10, y supongamos que $p > 1$. Supongamos también que los conjuntos J_j y K_j, para $j \in \mathbb{I}_p$, satisfacen la Eq. (4.32). Luego, tenemos las siguientes relaciones:

1. Los índices $s_1 = \max \left\{ j \leq s_{p-1} \,:\, P_{1\,,\,j} = \min\limits_{i \leq s_{p-1}} P_{1\,,\,i} \right\}$ y $b_1 = P_{1\,,\,s_1}$.

2. Recursivamente, si $s_j < s_{p-1}$, entonces

$$s_{j+1} = \max \left\{ s_j < r \leq s_{p-1} \,:\, P_{s_j+1\,,\,r} = \min_{s_j < i \leq s_{p-1}} P_{s_j+1\,,\,i} \right\} \quad \text{y} \quad b_{j+1} = P_{s_j+1\,,\,s_{j+1}}\,.$$

Demostración. Primero, consideremos un índice $0 \leq j \leq p-2$, arbitrario. Por el ítem 1. de la Proposición 4.2.18 y el hecho de que $J_{j+1} = K_{j+1} = \{s_j+1, \ldots, s_{j+1}\}$, podemos ver que

$$(a_i)_{i \in J_{j+1}} \prec (\lambda_i - b_{j+1})_{i \in K_{j+1}} \implies b_{j+1} = P_{s_j+1\,,\,s_{j+1}}\,. \tag{4.38}$$

Ahora, por la relación de mayorización de la Eq. (4.38) y el ítem 2 de la Proposición 4.2.18, también tenemos que:

$$P_{s_j+1\,,\,s_{j+1}} = \min\{P_{s_j+1\,,\,i} : s_j < i \leq s_j\}\,.$$

Por lo tanto, en el caso en que las relaciones establecidas entre los índices $s_0 = 0 < \ldots < s_{p-1}$ y las constantes $b_1 < \ldots < b_{p-1}$, no valgan se tiene que, existe un índice $0 \leq j \leq p-2$ tal que

$$s_{j+1} < \max \left\{ s_j < r \leq s_{p-1} \,:\, P_{s_j+1\,,\,r} = \min_{s_j < i \leq s_{p-1}} P_{s_j+1\,,\,i} \right\} = t \leq s_{p-1}\,.$$

Por la definición de t resulta que

$$b_{j+1} = P_{s_j+1\,,\,s_{j+1}} \geq P_{s_j+1\,,\,t}\,. \tag{4.39}$$

Además, existe $j+1 \leq \ell \leq p-2$ tal que $s_\ell < t \leq s_{\ell+1}$. Utilizando la relación de mayorización en la Eq. (4.38) podemos ver que $j \leq r \leq \ell - 1$:

$$(s_{r+1} - s_r)\, b_{r+1} = \sum_{i=s_r+1}^{s_{r+1}} h_i \quad \text{y} \quad (t - s_\ell)\, b_{\ell+1} \leq \sum_{i=s_\ell+1}^{t} h_i\,.$$

Luego, las desigualdades previas nos permiten obtener la siguiente acotación:

$$P_{s_j+1\,,\,t} = \frac{1}{t - s_j} \sum_{i=s_j+1}^{t} h_i \geq \sum_{r=j}^{\ell-1} \frac{s_{r+1} - s_r}{t}\, b_{r+1} + \frac{t - s_\ell}{t}\, b_{\ell+1} =: \beta,$$

Notemos que la cota inferior β se representa como la combinación lineal convexa de las constantes $b_{j+1} < \ldots < b_{\ell+1}$, lo cual implica que $P_{s_j+1\,,\,t} \geq \beta > b_{j+1}$ y esto contradice la Eq. (4.39). $\square$

Demostración del Teorema 4.2.17. En el caso de que $\mathcal{G}_0$ sea un minimizador local de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ para una nui N estrictamente convexa, los resultados previos implican que los conjuntos J_j y K_j asociados a $\mathcal{G}_0$ satisfacen la Eq. (4.32). Luego, hemos visto que las siguientes relaciones son válidas:

1. El índice $s_1 = \max \left\{ j \leq s_{p-1} \,:\, P_{1\,,\,j} = \min\limits_{i \leq s_{p-1}} P_{1\,,\,i} \right\}$, y $b_1 = P_{1\,,\,s_1}$.

2. Recursivamente, si $s_j < s_{p-1}$, entonces

$$s_{j+1} = \max \left\{ s_j < r \leq s_{p-1} \,:\, P_{s_j+1\,,\,r} = \min_{s_j < i \leq s_{p-1}} P_{s_j+1\,,\,i} \right\} \quad \text{y} \quad b_{j+1} = P_{s_j+1\,,\,s_{j+1}}\,.$$

En efecto, consideremos un índice $0 \leq j \leq p-2$ arbitrario. Por el ítem 1. de la Proposición 4.2.18 y el hecho de que $J_{j+1} = K_{j+1} = \{s_j + 1, \ldots, s_{j+1}\}$, se tiene que

$$(a_i)_{i \in J_{j+1}} \prec (\lambda_i - b_{j+1})_{i \in K_{j+1}} \implies b_{j+1} = P_{s_j+1\,,\,s_{j+1}}\,. \tag{4.40}$$

Ahora, utilizando la relación de mayorización en la Eq. (4.40) y el ítem 2 en la Proposición 4.2.18 también tenemos que

$$P_{s_j+1\,,\,s_{j+1}} = \text{mín}\{P_{s_j+1\,,\,i} : s_j < i \leq s_j\}\,.$$

Por lo tanto, en el caso de que las relaciones entre los índices $s_0 = 0 < \ldots < s_{p-1}$ y las constantes $b_1 < \ldots < b_{p-1}$ del enunciado no sean válidas, existe un índice $0 \leq j \leq p-2$ tal que

$$s_{j+1} < \text{máx}\left\{s_j < r \leq s_{p-1} \,:\, P_{s_j+1\,,\,r} = \min_{s_j < i \leq s_{p-1}} P_{s_j+1\,,\,i}\right\} = t \leq s_{p-1}\,.$$

Por la definición de t se tiene que

$$b_{j+1} = P_{s_j+1\,,\,s_{j+1}} \geq P_{s_j+1\,,\,t}\,. \tag{4.41}$$

También existe $j+1 \leq \ell \leq p-2$ tal que $s_\ell < t \leq s_{\ell+1}$. Usando la relación de mayorización en la Eq. (4.40) podemos ver que, para $j \leq r \leq \ell - 1$:

$$(s_{r+1} - s_r)\, b_{r+1} = \sum_{i=s_r+1}^{s_{r+1}} h_i \quad \text{y} \quad (t - s_\ell)\, b_{\ell+1} \leq \sum_{i=s_\ell+1}^{t} h_i\,.$$

Luego, las desigualdades previas nos permiten hacer la siguiente acotación:

$$P_{s_j+1\,,\,t} = \frac{1}{t - s_j} \sum_{i=s_j+1}^{t} h_i \geq \sum_{r=j}^{\ell-1} \frac{s_{r+1} - s_r}{t}\, b_{r+1} + \frac{t - s_\ell}{t}\, b_{\ell+1} =: \beta$$

notar que la cota inferior β se representa como combinación convexa de las constantes $b_{j+1} < \ldots < b_{\ell+1}$. Este último hecho implica que $P_{s_j+1\,,\,t} \geq \beta > b_{j+1}$, lo cual contradice la Eq. (4.41). □

4.2.5. Condición de co-feasibilidad

A lo largo de esta sección vamos a suponer que $k \geq d$. En la Sección 4.2.2 presentaremos algunos casos particulares, donde los minimizadores locales de la G-DOM, son globales. Estos casos particulares motivan a definir la noción de co-feasibilidad de manera análoga al concepto de feasibilidad utilizado en el Capítulo 3, en el contexto de las completaciones de marcos con normas predeterminadas. Si bien no todos los problemas de G-DOM son co-feasibles, esta noción nos permitirá más adelante estudiar el caso general.

Para comenzar recordemos el siguiente:

Teorema (Ver Teorema 4.2.9)**.** Consideremos la Notación 4.2.14 y supongamos que $k \geq d$. Supongamos también que $p = 1$, i.e. existe una constante $c = b_1$ que satisface $(S - S_0)g_i = c\, g_i$, para $i \in \mathbb{I}_k$. Luego, existe una bon $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$S = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \lambda_i \; v_i \otimes v_i \quad \text{y} \quad S_0 = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} (\lambda_i - c)^+ \; v_i \otimes v_i\,,$$

donde $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{I}_d} = \lambda(S) \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$. Más aun, $\mathcal{G}_0$ es un minimizador global de Θ en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$. □

Corolario 4.2.20. Con la notación del Teorema 4.2.9 se tiene que:

1. La constante $c = \text{máx}\, \sigma(S - S_0)$ es el autovalor más grande de $S - S_0$.

2. El autovalor $\mu_i = \lambda_i(S_0) = (\lambda_i(S) - c)^+$, para $i \in \mathbb{I}_d$.

3. La lista de normas $\mathbf{a} \prec ((\lambda_i(S) - c)^+)_{i \in \mathbb{I}_d}$; en particular

$$\operatorname{tr}(\mathbf{a}) = \sum_{i \in \mathbb{I}_k} a_i = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} (\lambda_i(S) - c)^+ \,.$$

Demostración. 1. Como estamos suponiendo que $k \geq d$, la Observación 4.2.6 afirma que

$$c = b_p = \text{máx}\, \sigma(S - S_0).$$

2. Es una consecuencia directa del Teorema 4.2.9 y el hecho de que $\lambda(S) = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$, por lo tanto $\big((\lambda_i - c)^+ \big)_{i \in \mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$.

3. Como $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ (es una familia con normas predeterminadas por $\mathbf{a}$), por el Teorema 1.2.4, podemos afirmar que

$$\mathbf{a} \prec ((\lambda_i(S) - c)^+)_{i \in \mathbb{I}_d} \,.$$

El resto de las afirmaciones es consecuencia directa de esa relación de mayorización. $\square$

Los resultados previos motivan la siguiente noción, la cual sólo depende de algún $\lambda \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$, con $k \geq d$ (y no requiere de ninguna nui N en particular, ni de ningún minimizador local $\mathcal{G}_0$ de la G-DOM en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$).

Definición 4.2.21. Sean $\lambda \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$, con $k \geq d$. Diremos que el par $(\lambda \,, \mathbf{a})$ es **co-feasible** si existe una constante

$$c < \lambda_1 \quad \text{tal que} \quad \mathbf{a} \prec \big((\lambda_i - c)^+ \big)_{i \in \mathbb{I}_d} \,. \tag{4.42}$$

En este caso, la constante de co-feasibilidad c está únicamente determinada por la ecuación

$$\operatorname{tr}(\mathbf{a}) = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} (\lambda_i - c)^+ \,.$$

$\triangle$

Proposición 4.2.22. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$, con $k \geq d$. Luego, el par $(\lambda(S) \,, \mathbf{a})$ es co-feasible si, y sólo si, se verifican las siguientes condiciones:

1. Existen una familia $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in \mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ y una constante $c \in \mathbb{R}$ tales que $(S - S_{\mathcal{G}})\, g_i = c\, g_i$, para todo $i \in \mathbb{I}_k$.

2. Esta constante verifica la igualdad $c = \text{máx}\, \sigma(S - S_{\mathcal{G}})$.

Demostración. Supongamos que existen $c \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ tales que verifican los ítems 1 y 2. Por la Eq. (4.7), $W = R(S_\mathcal{G}) = \text{gen}\{g_i : i \in \mathbb{I}_k\}$. Como $(S - S_\mathcal{G})\big|_W = c\, I_W$, entonces $S(W) \subseteq W$. Supongamos que $r = \dim W$. Luego, considerando por separado los autovalores de $S\big|_W$ y $S\big|_{W^\perp} = (S - S_\mathcal{G})\big|_{W^\perp}$, el hecho de que $c = \max \sigma(S - S_\mathcal{G})$ implica que

$$c < \lambda_i(S) \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_r \quad \text{y} \quad c \geq \lambda_i(S) \quad \text{para} \quad r < i \leq d \ .$$

Por lo tanto, $\lambda(S_\mathcal{G}) = \lambda(S - (S - S_\mathcal{G})\,) = \big(\,(\lambda_i(S) - c)^+\big)_{i\in\mathbb{I}_d}$. Luego, argumentando como en la demostración del Corolario 4.2.20, concluimos que la constante c satisface la Eq. (4.42). Notemos que $c < \lambda_1(S)$, pues $\operatorname{tr}\mathbf{a} \neq 0$.

Recíprocamente, si existe una constante c que satisface la Eq. (4.42), consideramos una bon $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i(S)\, v_i \otimes v_i \quad , \quad \text{y sea} \quad S_0 \overset{\text{def}}{=} \sum_{i\in\mathbb{I}_d} (\lambda_i(S) - c)^+\, v_i \otimes v_i \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+ \ .$$

Por el Teorema 1.2.4, existe una familia $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ tal que $S_0 = S_\mathcal{G}$. Notemos que

$$\lambda_i(S) - (\lambda_i(S) - c)^+ = \min\{\lambda_i(S)\,,\, c\} \quad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{I}_d \ . \tag{4.43}$$

Luego, $c \geq \max \sigma(S - S_\mathcal{G})$. Si consideramos

$$r = \operatorname{rk} S_\mathcal{G} = \max\{i \in \mathbb{I}_d :\ (\lambda_i(S) - c)^+ > 0\} = \max\{i \in \mathbb{I}_d :\ \lambda_i(S) > c\} \geq 1 \ ,$$

entonces $\{0\} \neq W \overset{\text{def}}{=} R(S_\mathcal{G}) = \text{gen}\{v_i :\ i \in \mathbb{I}_r\}$ y satisface que $(S - S_\mathcal{G})\big|_W = c\, I_W$. La demostración termina notando que, por la Eq. (4.7), $g_j \in W$ y por lo tanto $(S - S_\mathcal{G})g_j = c\, g_j$ para todo $j \in \mathbb{I}_k$. □

Observación 4.2.23. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$ (con $k \geq d$) tales que el par $(\lambda(S)\,,\,\mathbf{a})$ es co-feasible. Consideremos una familia $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ y una constante $c \in \mathbb{R}$ como en la prueba de la segunda parte de la Proposición 4.2.22. Luego, por el Teorema 4.2.9, $\mathcal{G}$ es un minimizador global (y por lo tanto local) de la función $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$, con $p = 1$. Sin embargo, este hecho no implica a priori que todo minimizador local tenga la misma estructura. Lo que vamos a probar más adelante es que la estructura espectral de los minimizadores locales es única (para el caso general, lo cual incluye al caso co-feasible). △

Vale la pena recalcar que hay problemas de G-DOM que no son co-feasibles. Para convencernos veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.24. Consideremos una matriz $S \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})^+$ tal que $\lambda := \lambda(S) = (2, 2, 1, 1) \in (\mathbb{R}^4_{>0})^\downarrow$ y fijemos el vector de normas $\mathbf{a} = (3, 1, 1, 1) \in (\mathbb{R}^4_{>0})^\downarrow$. Luego, el par $(\lambda\,,\,\mathbf{a})$ no es co-feasible. Pues, la única solución $c < 2$ de la ecuación $6 = \operatorname{tr}(\mathbf{a}) = 2\,(2 - c)^+ + 2\,(1 - c)^+$ es $c = 0$. De este modo, $((\lambda_i - c)^+)_{i\in\mathbb{I}_4} = \lambda$, pero sin embargo $\mathbf{a} \not\prec \lambda$. △

En general, como ya hemos mencionado anteriormente, dados $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$, el par $(\lambda(S)\,,\,\mathbf{a})$ correspondiente a estos datos no es co-feasible. De hecho, si consideramos una nui N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ que sea estrictamente convexa, entonces los minimizadores locales de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$ nos permiten localizar tales partes co-feasibles. Con el fin de describir esta situación, vamos a introducir la siguiente definición, que es análoga al concepto de feasibilidad que hemos utilizado en el Capítulo 3.

Definición 4.2.25. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$ con $k \geq d$. Para $r \in \mathbb{I}_{d-1} \cup \{0\}$ vamos a considerar las truncaciones:

$$\lambda^{(r)}(S) = (\lambda_{r+1}(S)\,,\,\dots\,,\,\lambda_d(S)) \in (\mathbb{R}^{d-r}_{\geq 0})^\downarrow \quad \text{y} \quad \mathbf{a}^{(r)} = (a_{r+1}(S)\,,\,\dots\,,\,a_k) \in (\mathbb{R}^{k-r}_{>0})^\downarrow\ .$$

Diremos que r es un **índice co-feasible** para S y $\mathbf{a}$ si el par $(\lambda^{(r)}(S)\,,\,\mathbf{a}^{(r)})$ es co-feasible (de acuerdo con la Definición 4.2.21 con dimensiones $d - r \leq k - r$). △

Observación 4.2.26. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$ con $k \geq d$. Consideremos una bon $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que $S\,v_i = \lambda_i(S)\,v_i$ para $i \in \mathbb{I}_d$. Luego, por la Proposición 4.2.22, un índice $r \in \mathbb{I}_{d-1} \cup \{0\}$ es co-feasible si, y sólo si, las condiciones 1 y 2 de la Proposición 4.2.22 valen para el espacio $V_r = \text{gen}\{v_i :\ r + 1 \leq i \leq d\}$, el operador positivo $S_r = S|_{V_r} \in L(V_r)$ y el vector de normas $\mathbf{a}^{(r)} = (a_{r+1}(S)\,,\,\dots\,,\,a_k) \in (\mathbb{R}^{k-r}_{>0})^\downarrow$. Esto significa que existen: una constante $c \in \mathbb{R}$ y una familia

$$\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_{k-r}} \in \mathbb{T}_{V_r}(\mathbf{a}^{(r)}) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{T}_{k-r}(\mathbf{a}^{(r)}) \cap V_r^{k-r}\,,$$

tales que $(S_r - S_{\mathcal{G}})\,g_i = c\,g_i$, para todo $i \in \mathbb{I}_{k-r}$, y $c = \max \sigma(S_r - S_{\mathcal{G}})$. Notar que esto no depende de la bon elegida, sólo depende de la lista de autovalores $\lambda(S_r) = \lambda^{(r)}(S) \in (\mathbb{R}^{d-r}_{\geq 0})^\downarrow$. △

El siguiente resultado complementa al Teorema 4.2.17.

Proposición 4.2.27. Consideremos la Notación 4.2.14 con $k \geq d$ para $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y un minimizador local $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ de la función $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$. Sea $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{p-1} < s_p \leq d$ como en la Proposición 4.2.13. Luego, $b_p = \max \sigma(S - S_{\mathcal{G}_0})$ y s_{p-1} es un índice co-feasible para S y $\mathbf{a}$. En particular, la constante b_p y el índice $s_p = \text{rk}\,S_{\mathcal{G}_0}$ están únicamente determinados por las ecuaciones

$$\sum_{i=s_{p-1}+1}^{k} a_i = \sum_{i=s_{p-1}+1}^{d} (\lambda_i(S) - b_p)^+ \quad \text{y} \quad s_p = \max\{s_{p-1} + 1 \leq i \leq d\ :\ \lambda_i(S) - b_p > 0\}\,. \tag{4.44}$$

Demostración. Sea $S_0 = S_{\mathcal{G}_0}$. Notar que $b_p = \max \sigma(S - S_0)$ por la Observación 4.2.6, ya que estamos suponiendo que $k \geq d$. Para probar que s_{p-1} es un índice co-feasible vamos a utilizar la Observación 4.2.26. Tomemos $r = s_{p-1}$. Recordemos de la Notación 4.2.14 y la Proposición 4.2.13 que $J_p = \{i \in \mathbb{I}_k : (S - S_0)g_i = b_p\,g_i\} = \{r + 1\,,\,\dots\,,\,k\}$ y $W_p = \text{gen}\{g_i : i \in J_p\} = \text{gen}\{v_j : r + 1 \leq j \leq s_p\}$. Como

$$W = R(S_0) = \text{gen}\{v_i : j \in \mathbb{I}_{s_p}\} \quad \text{entonces} \quad V_r = \text{gen}\{v_i :\ r + 1 \leq i \leq d\} = W_p \oplus W^\perp\ .$$

Luego, $\mathcal{G}_r = \{g_i\}_{i=r+1}^k \in \mathbb{T}_{V_r}(\mathbf{a}^{(r)}) = \mathbb{T}_{k-r}(\mathbf{a}^{(r)}) \cap V_r^{k-r}$ es tal que $S_{\mathcal{G}_r} = S_0|_{V_r}$ (donde hemos usado que, por el ítem 9 de la Notación 4.2.14, $g_j \in W_p^\perp$ para todo $j \notin J_p$). Por lo tanto, si $P_{\mathcal{M}}$ es la proyección ortogonal sobre un subespacio $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}^n$,

$$S|_{V_r} - S_{\mathcal{G}_r} = (S - S_0)|_{V_r} = b_p\,P_{W_p} + S\,P_{W^\perp} \implies (S|_{V_r} - S_{\mathcal{G}_r})\,g_i = b_p\,g_i \quad \text{para} \quad r + 1 \leq i \leq k\ .$$

Luego, $\max \sigma(S|_{V_r} - S_{\mathcal{G}'}) \leq \max \sigma(S - S_0) = b_p$ y, por la Observación 4.2.26, $s_{p-1} = r$ es un índice co-feasible para Sy $\mathbf{a}$. Luego, por la Definición 4.2.25, s_p y b_p están determinados por la Eq. (4.44). □

Observación 4.2.28. Consideremos la Notación 4.2.14 con $k \geq d$ para $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y un minimizador local $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ de la función $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$. Teniendo en cuenta todos los objetos y hechos detallados en la Notación 4.2.14, la Observación 4.2.15, el Teorema 4.2.17, la Eq. (4.43) y la Proposición 4.2.27, podemos concluir que $\lambda(S - S_{\mathcal{G}_0}) = \delta(S\,,\mathbf{a}\,,\mathcal{G}_0)^\downarrow$, con

$$\delta(S\,,\,\mathbf{a}\,,\,\mathcal{G}_0) \overset{\text{def}}{=} \Big(b_1\,\mathbb{1}_{s_1(r)}\,,\,b_2\,\mathbb{1}_{s_2-s_1}\,,\,\dots\,,\,b_{p-1}\,\mathbb{1}_{s_{p-1}-s_{p-2}}\,,\,\big(\min\{\lambda_i(S)\,,\,b_p\}\big)_{i=s_{p-1}+1}^d\Big)\,, \tag{4.45}$$

o $\delta(S\,,\,\mathbf{a}\,,\,\mathcal{G}_0) = \big(\min\{\lambda_i(S)\,,\,b_1\}\big)_{i\in\mathbb{I}_d}$ (si $p=1$, el caso co-feasible), donde todos los elementos de esta fórmula pueden calcularse en términos de S, $\mathbf{a}$ y el índice s_{p-1}. En efecto, esta expresión depende de $\mathcal{G}_0$ y N sólo a través del índice s_{p-1} el cual determina los índices previos y las constantes por el Teorema 4.2.17, y la parte co-feasible la cual comienza en s_{p-1}, lo cual determina a s_p y a b_p, por la Proposición 4.2.27 vía la Eq. (4.44). Por lo tanto vamos a denotar $s_{p-1} = s_{p-1}(\mathcal{G}_0)$. △

Para finalizar esta sección, vamos a presentar un resultado que compara las constantes de co-feasibilidad correspondientes a distintos índices co-feasibles.

Corolario 4.2.29. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$ con $k \geq d$ y supongamos que los índices $r,\, s \in \mathbb{I}_{d-1}$ son co-feasibles para S y $\mathbf{a}$. Denotemos por $c(s)$ y $c(r)$ sus constantes de co-feasibilidad, respectivamente. Luego,

$$s < r \implies c(s) \geq c(r)\ .$$

Demostración. Por la Proposición 4.2.22, $\mathbf{a}^{(s)} \prec \big(\,(\lambda_i(S) - c(s)\,)^+\big)_{i=s+1}^d$ y $\mathbf{a}^{(r)} \prec \big(\,(\lambda_i(S) - c(r)\,)^+\big)_{i=r+1}^d$. Luego,

$$\sum_{i=r+1}^{k} a_i = \sum_{i=r+1}^{d} (\lambda_i(S) - c(r)\,)^+ \quad \text{y} \quad \sum_{i=s+1}^{r} a_i \leq \sum_{i=s+1}^{r} (\lambda_i(S) - c(s)\,)^+\ . \tag{4.46}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=s+1}^{d} (\lambda_i(S) - c(s)\,)^+ = \sum_{i=s+1}^{k} a_i \leq \sum_{i=s+1}^{r} (\lambda_i(S) - c(s)\,)^+ + \sum_{i=r+1}^{d} (\lambda_i(S) - c(r)\,)^+\ .$$

Pero si $c(s) < c(r)$ entonces $(\lambda_i(S) - c(s)\,)^+ \geq (\lambda_i(S) - c(r)\,)^+$ para todo $i \in \mathbb{I}_d$, y además tenemos que $(\lambda_{r+1}(S) - c(s)\,)^+ > (\lambda_{r+1}(S) - c(r)\,)^+$ porque $\sum\limits_{i=r+1}^{k} a_i > 0 \overset{(4.46)}{\implies} c(r) < \lambda_{r+1}(S)$. □

4.3. Los minimizadores locales de la G-DOM son globales

Finalmente, probaremos es esta sección, el resultado principal del capítulo: «*Los minimizadores locales de la G-DOM, son minimizadores globales*». La prueba de este resultado se obtiene como consecuencia del estudio de la estructura interna de los minimizadores locales de la G-DOM y la noción de co-feasibilidad, presentados anteriormente en este capítulo. Vale la pena señalar que este resultado incluye como caso particular la solución de la Conjetura de Strawn.

Esta Sección está dividida en dos partes, primero vamos a considerar el caso en que $k \geq d$ y luego el caso general.

4.3.1. Caso $k \geq d$

A lo largo de esta sección vamos a considerar $k \geq d$. Notemos que las Eqs. (4.35) y (4.36) junto con el Teorema 4.2.17 y la Proposición 4.2.27 nos proporcionan una descripción detallada de la estructura espectral de los minimizadores locales de la G-DOM. Con la notación de esos resultados, vale la pena señalar el rol clave que juega el índice co-feasible s_{p-1} en la determinación completa de la estructura espectral de $S - S_0$ y S_0 (ver la Definición 4.2.21).

La idea básica para lo que sigue es reemplazar el índice s_{p-1} por un índice co-feasible r arbitrario, para reproducir el algoritmo dado en el Teorema 4.2.17 y conseguir los índices y constantes en términos de ese r (el cual a priori no está asociado a ningún minimizador local $\mathcal{G}_0$ de la G-DOM). Mostraremos luego que existe un único índice r "correcto" (es decir, co-feasible y admisible, ver Definición 4.3.1) que sólo depende de $\lambda(S)$ y $\mathbf{a}$, por lo tanto debe coincidir con $s_{p-1}(\mathcal{G}_0)$.

Definición 4.3.1. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^{\downarrow}$. Para un índice co-feasible $r \in \mathbb{I}_{d-1} \cup \{0\}$ vamos a considerar $q = q(r) \in \mathbb{I}_d$, $0 = s_0(r) < s_1(r) < \ldots < s_{q-1}(r) = r < s_q \leq d \leq k$ y $b_1(r), \ldots, b_q(r)$ calculados acorde al siguiente algoritmo recursivo (que sólo depende de r, $\lambda(S)$ y $\mathbf{a}$):

1. Si $r = 0$, tomamos $q = q(r) = 1$ y $s_0(r) = s_{q-1}(r) = r = 0$ (y vamos al ítem 4.).

2. Si $r > 0$, considerando los promedios $P_{i\,,\,j}$ definidos en la Notación 4.2.16, tomamos

$$s_1(r) = \text{máx}\,\left\{1 \leq j \leq r \,:\, P_{1\,,\,j} = \min_{i\leq r} P_{1\,,\,i}\right\} \qquad \text{y} \qquad b_1(r) = P_{1\,,\,s_1(r)}\ .$$

3. Si el índice $s_j(r)$ ya fue calculado y $s_j(r) < r$, entonces

$$s_{j+1}(r) = \text{máx}\,\left\{s_j(r) < j \leq r \,:\, P_{s_j(r)+1\,,\,j} = \min_{s_j(r)<i\leq r} P_{s_j(r)+1\,,\,i}\right\}\ , \tag{4.47}$$

   y $b_{j+1}(r) = P_{s_j(r)+1\,,\,s_{j+1}(r)}$.

4. Si $s_j(r) = r$, tomamos $q = q(r) = j + 1$ (entonces $s_{q-1}(r) = r$) y definimos $b_q(r)$ y $s_q(r)$ (con $b_q(r) < \lambda_{r+1}$ y $r = s_{q-1}(r) < s_q(r) \leq d$) que está únicamente determinado por

$$\sum_{i=r+1}^{k} a_i = \sum_{i=r+1}^{d} \big(\lambda_i(S) - b_q(r)\big)^+ \quad \text{y} \tag{4.48}$$

$$s_q(r) = \text{máx}\{r + 1 \leq i \leq d : \lambda_i(S) - b_q(r) > 0\}\ . \tag{4.49}$$

   En particular, $s_q(r) = \text{máx}\{i \in \mathbb{I}_d : \lambda_i(S) - b_q(r) > 0\}$ como $\lambda(S) = \lambda(S)^{\downarrow}$.

5. Si $r > 0$ denotamos por $\delta(\lambda(S)\,,\,\mathbf{a}\,,\,r) \in \mathbb{R}^d$ al vector dado por

$$\delta(\lambda(S)\,,\,\mathbf{a}\,,\,r) = \Big(b_1(r)\,\mathbb{1}_{s_1(r)}\,,\,\ldots\,,\,b_{q-1}(r)\,\mathbb{1}_{s_{q-1}(r)-s_{q-2}(r)}\,,\,\big(\,\min\{\lambda_i(S)\,,\,b_q(r)\}\,\big)_{i=r+1}^{d}\Big)\ , \tag{4.50}$$

   y $\delta(\lambda(S)\,,\,\mathbf{a}\,,\,0) = \big(\,\min\{\lambda_i(S)\,,\,b_1(0)\}\,\big)_{i\in\mathbb{I}_d}$. Es fácil ver que (por construcción)

$$\operatorname{tr}\delta(\lambda(S)\,,\,\mathbf{a}\,,\,r) = \operatorname{tr}(S) - \operatorname{tr}(\mathbf{a})\ . \tag{4.51}$$

Finalmente, diremos que el índice r es **admisible** si $r = 0$ o $r > 0$ y $b_{q-1}(r) < b_q(r)$. △

Observación 4.3.2. Consideremos una nui estrictamente convexa N en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, fija. Sea $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ un minimizador local (o global) de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})} = \Theta : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ y supongamos que $k \geq d$. Ahora, podemos aplicarle los resultados previos a la familia $\mathcal{G}_0$; consideremos $p \geq 1$, constantes $b_1 < \ldots < b_p$ e índices $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_p \leq d$ como en el Teorema 4.2.17 y la Proposición 4.2.27. En particular, se tiene que s_{p-1} es un índice co-feasible que también es admisible, ya que por definición, si $s_{p-1} > 0$ entonces $b_{p-1} < b_p$ (ver el Teorema 4.2.3). La idea de lo que sigue es probar que s_{p-1} (denotado por $s_{p-1}(\mathcal{G}_0)$ en la Observación 4.2.28) es el *único* con ambas propiedades (cualquiera se la nui N). Para empezar, vamos a mostrar algunas propiedades del vector $\delta(\lambda(S)\,,\,\mathbf{a}\,,\,r)$ para un índice co-feasible y admisible. △

Proposición 4.3.3. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$ (con $k \geq d$). Supongamos que $r \in \mathbb{I}_{d-1} \cup \{0\}$ es un índice co-feasible. Luego, para $p = q(r)$, $s_j = s_j(r)$, $b_j = b_j(r)$ (con $j \in \mathbb{I}_p$) y $\delta = \delta(\lambda(S)\,,\, \mathbf{a}\,,\, r)$ como en la Definición 4.3.1, se tiene que:

1. Si $p > 1$ luego $b_1 < \ldots < b_{p-1}$.

Si el índice r además es admisible, entonces $b_{p-1} < b_p = \max\limits_{i\in\mathbb{I}_d} \delta_i$ y también:

2. $\lambda_{s_{p-1}+1} \geq \lambda_{s_p} > b_p$ y $\lambda_i(S) > b_j$, para todo $s_{j-1} + 1 \leq i \leq s_j$ y $j \in \mathbb{I}_{p-1}$. Luego,
$$\delta_i \leq \min\{b_p\,,\, \lambda_i\} \quad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{I}_d\ . \tag{4.52}$$

3. Si $p > 1$ entonces $(a_i)_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} \prec \big(\,\lambda_i(S) - b_j\big)_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} \in \mathbb{R}_{>0}^{s_j-s_{j-1}}$, para todo $j \in \mathbb{I}_{p-1}$.

4. $(a_i)_{i=s_{p-1}+1}^{k} \prec \big(\,(\lambda_i(S) - b_p)^+\big)_{i=s_{p-1}+1}^{d} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{d-s_{p-1}}$.

Demostración. 1. El caso $p = 2$ es trivial. Si $p > 2$, supongamos que existe $j \in \mathbb{I}_{p-2}$ tal que $b_j \geq b_{j+1}$. Luego, notemos que
$$P_{s_{j-1}+1\,,\,s_{j+1}} = \frac{s_j - s_{j-1}}{s_{j+1} - s_{j-1}}\ b_j + \frac{s_{j+1} - s_j}{s_{j+1} - s_{j-1}}\ b_{j+1} \leq b_j\ ,$$
lo cual contradice la definición de s_j en la Eq. (4.47), pues $s_{j+1} \leq s_{p-1} = r$. De este modo, $b_1 < \ldots < b_{p-1}$.

Si $r = s_{p-1}$ es un índice admisible, entonces $b_{p-1} < b_p = \max\limits_{i\in\mathbb{I}_d} \delta_i$ por definición y la Eq. (4.50).

2. Por la Eq. (4.49), se tiene que $b_p < \lambda_i(S)$ para $s_{p-1} + 1 \leq i \leq s_p$. Por lo tanto, si
$$j \in \mathbb{I}_{p-1} \quad \text{y} \quad s_{j-1} + 1 \leq i \leq s_j \implies b_j < b_p < \lambda_{s_{p-1}+1}(S) \leq \lambda_i(S)\ ,$$
pues $i \leq s_j \leq s_{p-1} < s_{p-1} + 1$ y $\lambda(S) \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$.

3. Para $j \in \mathbb{I}_{p-1}$ y $s_{j-1} + 1 \leq m \leq s_j$, se tiene que
$$\sum_{i=s_{j-1}+1}^{m} a_i \leq \sum_{i=s_{j-1}+1}^{m} (\lambda_i(S) - b_j) \iff b_j \leq \frac{1}{m - s_{j-1}} \sum_{i=s_{j-1}+1}^{m} \lambda_i(S) - a_i \overset{(4.37)}{=} P_{s_{j-1}+1\,,\,m} \tag{4.53}$$
(la equivalencia también es válida para la igualdad). Utilizando la defínción de los b_j (ítem 2. de la Definición 4.3.1), podemos ver que la desigualdad del lado derecho de la Eq. (4.53) vale para todo índice m, con igualdad cuando $m = s_j$ (por la definición de los b_j y los s_j). Hemos probado entonces que
$$(a_i)_{i=s_{j-1}+1}^{s_j} \prec \big(\,\lambda_i(S) - b_j\big)_{i=s_{j-1}+1}^{s_j}\ .$$

El ítem 4 se sigue de manera inmediata del hecho de que $r = s_{p-1}$ es un índice co-feasible (ver la Definición 4.2.25). □

Corolario 4.3.4. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$ con $k \geq d$. Sea $r \in \mathbb{I}_{d-1} \cup \{0\}$ un índice co-feasible y admisible. Luego, $\mathbf{a} \prec \lambda(S) - \delta(\lambda(S)\,,\, \mathbf{a}\,,\, r)$.

Demostración. La relación $\mathbf{a} \prec \lambda(S) - \delta(\lambda(S)\,,\, \mathbf{a}\,,\, r)$ se sigue de los ítems 3 y 4 de la Proposición 4.3.3, ya que $x \prec y$ y $z \prec w \implies (x\,,\, z) \prec (y\,,\, w)$ (ver la Observación 1.1.3). □

Teorema 4.3.5. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}^k_{>0})^\downarrow$. Luego, existe un único índice co-feasible y admisible $s \in \mathbb{I}_{d-1} \cup \{0\}$. Además este s es el mínimo índice co-feasible.

Demostración. Supongamos que existen dos índices que son co-feasibles $0 \le s < r \le d-1$ y que además r es admisible, así llegaremos a una contradicción. En efecto, sean $s_0 = 0 < s_1 < \ldots < s_{p-1} = r < s_p \le d$ y $b_1 < \ldots < b_p$ los índices y constantes correspondientes a la Definición 4.3.1, para el índice r (i.e., renombramos $p = q(r)$, $s_j = s_j(r)$ y $b_j = b_j(r)$ para $j \in \mathbb{I}_p$). Sea $\lambda \overset{\text{def}}{=} \lambda(S) \in (\mathbb{R}^d_{\ge 0})^\downarrow$ y consideremos el vector

$$\delta = \delta(\lambda\,,\,\mathbf{a}\,,\,r) = \Big(b_1\,\mathbb{1}_{s_1-s_0}\,,\,\ldots\,,\,b_{p-1}\,\mathbb{1}_{s_{p-1}-s_{p-2}}\,,\,\big(\min\{\lambda_i\,,\,b_p\}\big)_{i=s_{p-1}+1}^{d}\Big)\;. \tag{4.54}$$

De manera similar, consideremos $q = q(s)$, $s^*_0 = 0 < s^*_1 < \ldots < s^*_{q-1} = s < s^*_q \le d$, $b^*_1 < \ldots < b^*_{q-1}$ y b^*_q los índices y constantes correspondientes a la Definición 4.3.1, para el índice s. Vamos a considerar también el vector

$$\delta^* = \delta(\lambda\,,\,\mathbf{a}\,,\,s) = \Big(b^*_1\,\mathbb{1}_{s^*_1-s^*_0}\,,\,\ldots\,,\,b^*_{q-1}\,\mathbb{1}_{s^*_{q-1}-s^*_{q-2}}\,,\,\big(\min\{\lambda_i\,,\,b^*_q\}\big)_{i=s^*_{q-1}+1}^{d}\Big)\;. \tag{4.55}$$

Si $\delta^* = \delta$ entonces, por las Eqs. (4.49), (4.54) y (4.55), se tiene que

$$s^*_q = s_p = \max\{i \in \mathbb{I}_d : \delta_i < \lambda_i(S)\} \quad \text{y} \quad b^*_q = b_p = \delta_{s_p}\,.$$

Pero en este caso $r = s_{p-1} = \min\{i \in \mathbb{I}_{d-1} : \delta_{i+1} = b_p\} \le s^*_{q-1} = s$, lo cual es una contradicción. Luego, $\delta^* \ne \delta$.

Caso 1. Supongamos que existe $1 \le j \le \min\{p-1\,,\,q-1\}$ tal que

$$s_i = s^*_i \quad (\text{y entonces también } b_i = b^*_i) \quad \text{para} \quad 0 \le i \le j-1 \quad , \quad \text{pero} \quad s_j \ne s^*_j\,.$$

Vamos a probar ahora, que esto lleva a una contradicción, más precisamente veremos que bajo estas condiciones $\delta^* = \delta$. En efecto, como $s_{j-1} = s^*_{j-1}$, por construcción

$$s_j = \max\{s_{j-1} < i \le r : \; P_{s_{j-1}+1\,,\,i} = \min_{s_{j-1}+1\le \ell\le r} P_{s_{j-1}+1\,,\,\ell}\} \quad \text{con} \quad b_j = P_{s_{j-1}+1\,,\,s_j}$$

y

$$s^*_j = \max\{s_{j-1} < i \le s : \; P_{s_{j-1}+1\,,\,i} = \min_{s_{j-1}+1\le \ell\le s} P_{s_{j-1}+1\,,\,\ell}\} \quad \text{con} \quad b^*_j = P_{s_{j-1}+1\,,\,s^*_j}\,.$$

Utilizando que $s < r$, se tiene que

$$\min_{s_{j-1}+1\le \ell\le s} P_{s_{j-1}+1\,,\,\ell} \ge \min_{s_{j-1}+1\le \ell\le r} P_{s_{j-1}+1\,,\,\ell}\,.$$

Como $s^*_j \ne s_j$, entonces se puede ver que

$$b_j \le b^*_j \quad \text{y} \quad s^*_{q-1} = s < s_j \le r\,. \tag{4.56}$$

Por otro lado, por el Corolario 4.2.29, se tiene que $b^*_q = b_q(s) \ge b_p(r) = b_p$, ya que son las constantes co-feasibles correspondientes a los índices co-feasibles $s^*_{q-1} = s < r = s_{p-1}$.

Ahora, considerando los hechos previos, podemos comparar δ y δ^*:

- Tenemos que $\delta_i = \delta^*_i$ para $1 \le i \le s_{j-1} = s^*_{j-1}$ por hipótesis.
- Por las Eq. (4.54), (4.55), y el ítem 1 de la Proposición 4.3.3 ($b^*_j < \ldots < b^*_{q-1}$),

$$\delta^*_i \ge b^*_j \overset{(4.56)}{\ge} b_j = \delta_i \quad \text{para} \quad s_{j-1} = s^*_{j-1} < i \le s^*_{q-1} \overset{(4.56)}{<} s_j\,.$$

- Como $b_p = \text{máx}\{\delta_j : j \in \mathbb{I}_d\}$, por la Proposición 4.3.3 (r es admisible), se tiene que
$$\delta_i^* = b_q^* \geq b_p \geq \delta_i \quad \text{para} \quad s_{q-1}^* < i \leq s_q^* \ .$$
- Finalmente, $\delta_i^* = \lambda_i \geq \delta_i$, para $s_q^* < i \leq d$ (por el ítem 2 de la Proposición 4.3.3).

Por lo tanto $\delta \leqslant \delta^*$. Como $\text{tr}(\delta) = \text{tr}(S) - \text{tr}(\mathbf{a}) = \text{tr}(\delta^*)$ por la Eq. (4.51), se tiene que $\delta = \delta^*$, lo cual es absurdo.

Caso 2. Si ahora suponemos que $p \leq q$ y $s_j = s_j^*$ (y por lo tanto $b_j = c_j^*$) para $0 \leq j \leq p-1$, entonces
$$s_{p-1} = s_{p-1}^* \leq s_{q-1}^* = s < r = s_{p-1} \ .$$

Caso 3. Por último, si $q < p$ y $s_j = s_j^*$ (y por lo tanto $b_j = c_j^*$) para $0 \leq j \leq q-1$, entonces se tiene que $\delta_i = \delta_i^*$ para $1 \leq i \leq s_{q-1}^* = s_{q-1}$. Luego, por la Proposición 4.3.3, se tiene que
$$b_p \leq b_q^* \implies \delta_i \overset{(4.52)}{\leq} \text{mín}\{b_p \, , \, \lambda_i\} \leq \text{mín}\{b_q^* \, , \, \lambda_i\} \overset{(4.55)}{=} \delta_i^* \quad \text{para} \quad s_{q-1}^* < i \leq d \ .$$
Luego, $\delta \leq \delta^*$. Utilizando que $\text{tr}(\delta) = \text{tr}(\delta^*)$, también podemos concluir en este caso que $\delta = \delta^*$. La demostración está finalizada una vez que notamos que alguno de esos tres casos debe ocurrir. $\square$

Definición 4.3.6. Sea $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ con $\lambda = \lambda(S) \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^d)^\downarrow$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$ (con $k \geq d$). Si $s \in \mathbb{I}_{d-1} \cup \{0\}$ es el único índice co-feasible y admisible para S y $\mathbf{a}$ (el cual existe por la Observación 4.3.2 entonces, definimos $\delta(\lambda \, , \, \mathbf{a}) := \delta(\lambda \, , \, \mathbf{a} \, , \, s)$ como en la Eq. (4.50) de la Definición 4.3.1. $\triangle$

Observación 4.3.7. Con las notaciones de la Definición 4.3.6, podemos notar que el vector $\delta(\lambda \, , \, \mathbf{a})$ se puede calcular utilizando un algoritmo rápido. En efecto, la noción de índice co-feasible y admisible es algorítmica y puede chequearse utilizando una rutina rápida; una vez que el único índice co-feasible y admisible es calculado, el vector $\delta(\lambda \, , \, \mathbf{a})$ puede calcularse también utilizando un algoritmo rápido (ver la Definición 4.3.1). $\triangle$

Teorema 4.3.8. Sea $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ con $\lambda = \lambda(S) \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^d)^\downarrow$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$ con $k \geq d$ y $\delta(\lambda \, , \, \mathbf{a})$ como en la Definición 4.3.6. Si N es una nui estrictamente convexa en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ entonces, son equivalentes:

1. $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ es un minimizador global de $\Theta_{(N \, , \, S \, , \, \mathbf{a})}$;
2. $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ es un minimizador local $\Theta_{(N \, , \, S \, , \, \mathbf{a})}$;
3. $\lambda(S - S_{\mathcal{G}_0}) = \delta(\lambda \, , \, \mathbf{a})^\downarrow$.

Luego, los minimizadores globales (y locales) son los mismos para toda nui estrictamente convexa.

Demostración. Claramente, 1. $\Rightarrow$ 2. Para probar 2. $\Rightarrow$ 3., recordemos las Observaciones 4.2.15, 4.2.28 y 4.3.2, donde hemos visto que $\lambda(S - S_{\mathcal{G}_0}) = \delta(S \, , \, \mathbf{a} \, , \, \mathcal{G}_0)^\downarrow$, para el vector $\delta(\lambda \, , \, \mathbf{a} \, , \, \mathcal{G}_0)$ dado por la Eq. (4.45) y completamente determinado por el índice $s_{p-1}(\mathcal{G}_0)$. Por la Observación 4.3.2 y el Teorema 4.3.5, este índice $s_{p-1}(\mathcal{G}_0)$ es el único co-feasible y admisible del Teorema 4.3.5. Por lo tanto, por las Eqs. (4.45) y (4.50), se tiene que
$$\delta(\lambda(S) \, , \, \mathbf{a}) = \delta(S \, , \, \mathbf{a} \, , \, \mathcal{G}_0) \implies \lambda(S - S_{\mathcal{G}_0}) = \delta(\lambda \, , \, \mathbf{a})^\downarrow \ .$$

3. $\Rightarrow$ 1. Notemos que Θ es una función continua definida sobre un espacio métrico compacto, entonces existe una familia $\mathcal{G}_1 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ que es minimizador global de Θ y, en particular, es un minimizador local. Por la implicación ya demostrada 2. $\Rightarrow$ 3., debemos tener que
$$\lambda(S - S_{\mathcal{G}_1}) = \delta(\lambda \, , \, \mathbf{a})^\downarrow = \lambda(S - S_{\mathcal{G}_0}) \, .$$

En particular, como N es unitariamente invariante,

$$\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}(\mathcal{G}_0) = N(S - S_{\mathcal{G}_0}) = N(D_{\delta(\lambda\,,\,\mathbf{a})}) = N(S - S_{\mathcal{G}_1}) = \Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}(\mathcal{G}_1)\ ,$$

donde $D_{\delta(\lambda\,,\,\mathbf{a})} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ denota la matriz diagonal con diagonal principal $\delta(\lambda\,,\,\mathbf{a})$.

$\square$

Para finalizar esta sección vamos a considerar los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 4.3.9. Consideremos la base canónica $\mathcal{B} = \{e_1\,,\,e_2\}$ de $\mathbb{C}^2$. Sean $S = 3\,e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (1\,,\,1)$ (i.e. $k = d = 2$). Luego, S es una matriz inversible. Tomemos ahora los vectores $g_1 = g_2 = e_1$, y consideremos la familia $\mathcal{G}_0 = \{g_1\,,\,g_2\} \in \mathbb{T}_2(\mathbf{a})$. Luego,

$$\lambda(S - S_{\mathcal{G}_0}) = \lambda(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) = (1\,,\,1).$$

Si $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_2(\mathbf{a})$ es una familia arbitraria, entonces $\operatorname{tr} \lambda(S - S_{\mathcal{G}}) = \operatorname{tr}\, S - \operatorname{tr}\, S_{\mathcal{G}} = 2$. Luego,

$$\lambda(S - S_{\mathcal{G}_0}) = (1\,,\,1) \prec \lambda(S - S_{\mathcal{G}}) \implies s(S - S_{\mathcal{G}_0}) = (1\,,\,1) \prec_w s(S - S_{\mathcal{G}})\ ,$$

por la Observación 1.1.3 y el Teorema 1.1.10. Por lo tanto,

$$\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}(\mathcal{G}_0) \le \Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}(\mathcal{G}) \quad \text{para toda nui} \quad N\,.$$

Así, $\mathcal{G}_0 = \{e_1\,,\,e_1\}$ es un minimizador global de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$ en $\mathbb{T}_2(\mathbf{a})$. Por consiguiente, este problema es co-feasible, entonces $p = 1$, $s_1 = \operatorname{rk} S_{\mathcal{G}_0} = 1$ y $b_1 = \lambda_2(S) = 1$. Lo interesante es notar que en este caso $\mathcal{G}_0$ no es un marco para $\mathbb{C}^2$ (ni siquiera cuando $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^+$ es inversible y $k \ge d$). $\triangle$

Ejemplo 4.3.10. Consideremos $\mathcal{B} = \{e_1\,,\,e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$. Sean $S = e_1 \otimes e_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (2, 1)$ (otra vez con $k = d = 2$). Esta vez la matriz S no es inversible. Sin embargo, veremos que $\mathcal{G}_0 = \{2\,e_1\,,\,e_2\} \in \mathbb{T}_2(\mathbf{a})$ es un minimizador global de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$, para toda nui N. En efecto,

$$\lambda(S - S_{\mathcal{G}_0}) = \lambda(-e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2) = (-1\,,\,-1) \implies s(S - S_{\mathcal{G}_0}) = |\lambda(S - S_{\mathcal{G}_0})| = (1, 1)$$

y si $\mathcal{G} \in \mathbb{T}_2(\mathbf{a})$ es una familia arbitraria, entonces $\operatorname{tr}\ \lambda(S - S_{\mathcal{G}}) = 1 - 3 = -2$, por lo tanto $\operatorname{tr}\ s(S - S_{\mathcal{G}}) \ge 2$. Este último hecho implica que

$$s(S - S_{\mathcal{G}_0}) \prec_w s(S - S_{\mathcal{G}}) \implies \Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}(\mathcal{G}_0) \le \Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}(\mathcal{G})\,.$$

Resulta que este problema también es co-feasible, con $p = 1$, $s_1 = \operatorname{rk} S_{\mathcal{G}_0} = 2$ y $b_1 = -1$. Notemos que en este caso, la familia $\mathcal{G}_0$ sí es un marco para $\mathbb{C}^2$ (a pesar de que $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^+$ no sea inversible). $\triangle$

4.3.2. Caso general

Hasta ahora hemos considerado el caso de los minimizadores locales de la G-DOM cuando el número de vectores k es mayor o igual que la dimensión del espacio d; esto fue esencialmente necesario en la Sección 4.2.5 (ver la demostración del ítem 1 en el Corolario 4.2.20). En esta sección vamos a considerar el caso general, el cual incluye el caso $k < d$. Nuestra propuesta está basada en una reducción al caso considerado en la Sección 4.3.1.

Definición 4.3.11. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$ con $k < d$. Sea $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ una bon de $\mathbb{C}^d$ tal que $S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i(S)\ v_i \otimes v_i$. Vamos a considerar los espacios

$$V_k = \text{gen}\{v_i : i \in \mathbb{I}_k\} \quad \text{y} \quad S_k \stackrel{\text{def}}{=} S|_{V_k} = \sum_{i\in\mathbb{I}_k} \lambda_i(S)\ v_i \otimes v_i \in L(V_k)^+ \ .$$

Como $k = \dim V_k$ (el "nuevo d") podemos tomar el vector $\delta(\lambda(S_k)\,,\,\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^k$ utilizado en la Definición 4.3.6, para los datos $\lambda(S_k) = (\lambda_1(S)\,,\,\dots\,,\,\lambda_k(S)\,) \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^k)^\downarrow$ y $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$. Así, definimos el vector

$$\delta(\lambda(S)\,,\,\mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\,\delta(\lambda(S_k)\,,\,\mathbf{a})\,,\,\lambda_{k+1}(S)\,,\,\dots\,,\,\lambda_d(S)\,\big)\ ,$$

el cual no depende ni de S_k, ni de $\mathcal{B}$; sólo depende de $\lambda(S)$ y $\mathbf{a}$. △

Teorema 4.3.12. Sean $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \in (\mathbb{R}_{>0}^k)^\downarrow$ y N una nui estrictamente convexa en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Dada una familia $\mathcal{G}_0 = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$, son equivalentes:

1. $\mathcal{G}_0$ es un minimizador global de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$.
2. $\mathcal{G}_0$ es un minimizador local de $\Theta_{(N\,,\,S\,,\,\mathbf{a})}$.
3. $\lambda(S - S_{\mathcal{G}_0}) = \delta(\lambda(S)\,,\,\mathbf{a})^\downarrow$ (ver la Definición 4.3.6 para $k \geq d$, y la Definición 4.3.11 para $k < d$).

Demostración. Cuando $k \geq d$, esto es el Teorema 4.3.8; por lo tanto vamos a suponer que $k < d$.

Es claro que 1. ⇒ 2. Si ahora suponemos que vale 2 podemos aplicar el Teorema 4.2.3, la Proposición 4.2.13 y el Teorema 4.2.17 (notar que en tales enunciados no se supone que $k \geq d$). Con la notación de esos resultados (i.e., con la Notación 4.2.14), existe una bon $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$S = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i(S)\ v_i \otimes v_i \quad \text{y} \quad S_0 = S_{\mathcal{G}_0} = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i(S_0)\ v_i \otimes v_i\,.$$

Ahora tenemos que

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \text{rk}\, S_0 \leq k \quad \text{y} \quad W = R(S_{\mathcal{G}_0}) = \text{gen}\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_r} \subseteq \text{gen}\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_k} = V_k\,,$$

como en la Definición 4.3.11. Como $\lambda_i(S_0) = 0$ para $i > k$, el vector

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \big(\,\lambda_i(S) - \lambda_i(S_0)\,\big)_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{R}^k\,,$$

satisface que

$$\lambda(S - S_0) = \big(\,\lambda(S) - \lambda(S_0)\,\big)^\downarrow \quad \text{y} \quad \lambda(S) - \lambda(S_0) = \big(\,\delta\,,\,\lambda_{k+1}(S)\,,\,\dots\,,\,\lambda_d(S)\,\big)\ . \tag{4.57}$$

Con la notación de la Definición 4.3.11, lo que tenemos que probar es que $\delta = \delta(\lambda(S_k)\,,\,\mathbf{a})$. Como en este caso $r = s_p \leq k < d$, podemos aplicar la Observación 4.2.15 (a la diferencia $\lambda(S) - \lambda(S_0) \in \mathbb{R}^d$), entonces

$$\delta = \big(\,b_1\,\mathbb{1}_{s_1}\,,\,b_2\,\mathbb{1}_{s_2-s_1}\,,\,\dots\,,\,b_p\,\mathbb{1}_{s_p-s_{p-1}}\,,\,\lambda_{s_p+1}(S)\,,\,\dots\,,\,\lambda_k(S)\,\big) \quad \text{si} \quad s_p < k \tag{4.58}$$

o

$$\delta = \big(\,b_1\,\mathbb{1}_{s_1}\,,\,b_2\,\mathbb{1}_{s_2-s_1}\,,\,\dots\,,\,b_p\,\mathbb{1}_{s_p-s_{p-1}}\,\big) \quad \text{si} \quad s_p = k\ , \tag{4.59}$$

donde los índices $s_1 < \dots < s_{p-2}$ y las constantes $b_1 < \dots b_{p-1}$ son construidas (para $\lambda(S - S_{\mathcal{G}_0})$ y por lo tanto también para δ) en términos del índice s_{p-1} (cuando $p > 1$) utilizando el algoritmo dado en el

Teorema 4.2.17 (y también en la Definición 4.3.1, con respecto a $\lambda(S_k)$, $\mathbf{a}$ y s_{p-1}). Además, $b_{p-1} < b_p$ por el Teorema 4.2.3.

Por lo tanto, con el fin de mostrar que $\delta = \delta(\lambda(S_k)\,,\,\mathbf{a})$, por el Teorema 4.3.5 lo que necesitamos probar es que el índice $s_{p-1} \in \mathbb{I}_{k-1} \cup \{0\}$ es co-feasible (y admisible) con respecto a S_k y $\mathbf{a}$. Notemos que, por los Teoremas 4.2.3 y 4.2.13, sabemos que $(S - S_0)g_i = b_p\, g_i \iff s_{p-1} + 1 \le i \le k$ y

$$W_p = \text{gen}\{g_i :\ s_{p-1}+1 \le i \le k\ \} = \text{gen}\{v_i :\ s_{p-1}+1 \le i \le s_p\ \}\ .$$

Luego, si tomamos $X = \text{gen}\{v_i :\ s_{p-1}+1 \le i \le k\ \}$ y $\mathcal{G}_p = \{g_i\}_{i=s_{p-1}+1}^{k} \in \mathbb{T}_X(\mathbf{a}^{(s_{p-1})})$ entonces

$$(S_k|_X - S_{\mathcal{G}_p})\, g_i = (S - S_0)\, g_i = b_p\, g_i\ , \qquad \text{para} \qquad s_{p-1}+1 \le i \le k\ .$$

Por la Observación 4.2.26 (para S_k y $\mathbf{a}$), lo único que nos queda probar es que

$$b_p = \max_{s_{p-1}+1 \le i \le k} \delta_i\ \ (= \max_{i \in \mathbb{I}_k} \delta_i\ )\ .$$

Supongamos que $b_p < \max \sigma(S - S_0)$. Luego, por el ítem 5 del Teorema 4.2.3, la familia $\mathcal{G}_0$ es linealmente independiente (pues, cada conjunto $\{g_j\}_{j \in J_j}$ es linealmente independiente, y además son conjuntos de autovectores correspondientes a autovalores b_j diferentes). Luego, $s_p = \text{rk}\, S_0 = k$ y entonces podemos aplicar la Eq. (4.59); automáticamente tenemos que $b_p = \max\limits_{i \in \mathbb{I}_k} \delta_i$.

De otro modo tendríamos que $b_p = \max \sigma(S - S_0) \ge \max\limits_{i \in \mathbb{I}_k} \delta_i$. Luego, en cualquier caso resulta que $b_p = \max\limits_{i \in \mathbb{I}_k} \delta_i$. Hemos probado entonces que el índice s_{p-1} es co-feasible (y también admisible, pues $b_{p-1} < b_p$) con respecto a S_k y $\mathbf{a}$. Luego, $\delta = \delta(\lambda(S_k)\,,\,\mathbf{a})$ por el Teorema 4.3.5 y $\lambda(S - S_{\mathcal{G}_0}) = \delta(\lambda(S)\,,\,\mathbf{a})^{\downarrow}$ por la Eq. (4.57).

3. $\Rightarrow$ 1. Se prueba con un argumento análogo al de la demostración del Teorema 4.3.8 (3. $\Rightarrow$ 1.). $\square$

Observación 4.3.13. La demostración de 2. $\Rightarrow$ 3. del Teorema 4.3.12 se vuelve trivial si suponemos que (la versión vectorial de) la nui N satisface que; para $x\,,\,y \in \mathbb{R}^k$ y $z \in \mathbb{R}^{d-k}$,

$$N(x\,,\,z) \le N(y\,,\,z) \implies N(x\,,\,0) \le N(y\,,\,0)\ , \tag{4.60}$$

porque en este caso la familia $\mathcal{G}_0$ es aún un minimizador local para S_k y $\mathbf{a}$ en V_k . Las normas estrictamente convexas más usuales (por ejemplo las normas p, para $p \in (1, \infty)$) satisfacen la Eq. (4.60), pero esta propiedad falla en general. Si tomamos $N = \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_2$ la cual es una NUI estrictamente convexa, tenemos que: si $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces ($d = 3$, $k = 2$)

$$N\big((0\,,\,1)\,,\,1\big) = 1 + \sqrt{2}\ = N\big((r\,,\,r)\,,\,1\big)\ \ \text{pero}\ \ N\big((0\,,\,1)\,,\,0\big) = 2 > r + 1 = N\big((r\,,\,r)\,,\,0\big)\ . \qquad \triangle$$

Corolario 4.3.14. Con la Notación 4.3.12, se tiene que

$$|\delta(\lambda\,,\,\mathbf{a})| \prec_w |\lambda(S - S_{\mathcal{G}})|\ \ , \qquad \text{para todo} \qquad \mathcal{G} \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\ .$$

Demostración. Para $h \in \mathbb{I}_d$ y $\varepsilon > 0$ consideremos

$$N_{(h\,,\,\varepsilon)}(A) = N_{(h)}(A) + \varepsilon\,\|A\|_2 = \sum_{i \in \mathbb{I}_h} s_i(A) + \varepsilon\,\|A\|_2\ , \qquad \text{para} \qquad A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})\ .$$

Luego, $N_{(h\,,\varepsilon)}$ es una nui estrictamente convexa en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ tal que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} N_{(h\,,\varepsilon)}(A) = N_{(h)}(A)$, para $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Si tomamos una familia $\mathcal{G}_0 \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ tal que $\lambda(S - S_{\mathcal{G}_0}) = \delta(\lambda\,,\,\mathbf{a})^\downarrow$ entonces, por el Teorema 4.3.12,

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i\in\mathbb{I}_h} |\delta(\lambda\,,\,\mathbf{a})|_i^\downarrow &= N_{(h)}(S - S_{\mathcal{G}_0}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} N_{(h\,,\varepsilon)}(S - S_{\mathcal{G}_0}) \\ &\le \lim_{\varepsilon\to 0^+} N_{(h\,,\varepsilon)}(S - S_{\mathcal{G}}) = \sum_{i\in\mathbb{I}_h} |\lambda(S - S_{\mathcal{G}})|_i^\downarrow\ .\end{aligned}$$

Como esto sucede para todo $h \in \mathbb{I}_d$, entonces $|\delta(\lambda\,,\,\mathbf{a})| \prec_w |\lambda(S - S_{\mathcal{G}})|$. $\square$

Bibliografía

[1] E. Andruchow, D. Stojanoff, *Geometry of Unitary Orbits*, J. Operator Theory, 26 (1991), 25-41.

[2] J. Antezana, E. Chiumiento, *Approximation by partial isometries and symmetric approximation of finite frames*, J. Fourier Anal Appl (2017). https://doi.org/10.1007/s00041-017-9547-5.

[3] J. Antezana, P. Massey, M. Ruiz, D. Stojanoff, *The Schur-Horn theorem for operators and frames with prescribed norms and frame operator*, Illinois J. Math., 51 (2007), 537-560.

[4] J. Antezana, D. Stojanoff, *Análisis matricial I*, Cursos y Seminarios de Matemática Serie B, Depto. de Matemática - FCEyN - UBA, 2008.

[5] J.J. Benedetto, M. Fickus, *Finite normalized tight frames*, Adv. Comput. Math. 18, No. 2-4 (2003), 357-385 .

[6] F. A. Berezin, I. M. Gel'fand, *Some remarks on the theory of spherical functions on symmetric Riemannian manifolds*, Tr. Mosk. Mat. Obs., 5, GITTL, Moscow, 1956, 311–351.

[7] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Berlin-Heildelberg-New York, Springer 1997.

[8] B.G. Bodmann, P.G. Casazza, *The road to equal-norm Parseval frames*, J. Funct. Anal. 258 (2010), no. 2, 397-420.

[9] M. Bownik, J. Jasper, *Existence of frames with prescribed norms and frame operator*, Excursions in harmonic analysis. Vol. 4, 103-117, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

[10] J. Cahill, P.G. Casazza, *The Paulsen problem in operator theory*, Oper. Matrices 7 (2013), no. 1, 117-130.

[11] J. Cahill, M. Fickus, D.G. Mixon, *Auto-tuning unit norm frames*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 32 (2012), no. 1, 1-15.

[12] J. Cahill, M. Fickus, D.G. Mixon, M.J. Poteet, N. Strawn, *Constructing finite frames of a given spectrum and set of lengths*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 35 (2013), 52-73.

[13] P.G. Casazza, *The art of frame theory*, Taiwanese J. Math. 4 (2000), no. 2, 129-201.

[14] P.G. Casazza, *Custom building finite frames*, in Wavelets, frames and operator theory, Contemp. Math., Amer. Math. Soc. , Providence, RI, vol. 345 (2004) 61-86.

[15] P.G. Casazza, M. Fickus, J. Kovacevic, M. T. Leon, J. C. Tremain, *A Physical Interpretation of Tight Frames.* In: Heil C. (eds) Harmonic Analysis and Applications. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Boston 2006.

[16] P.G. Casazza, M. Fickus, *Minimizing fusion frame potential*, Acta Appl. Math. 107 (2009), no. 1-3, 7-24.

[17] P.G. Casazza, J. Kovacevic, *Equal-norm tight frames with erasures*, Adv. Comput. Math. 18 (2003), no. 2-4, 387-430.

[18] P. G. Casazza, G. Kutyniok eds., *Finite Frames: Theory and Applications*, Birkhauser, (2012). xii + 483 pp.

[19] P.G. Casazza, M.T. Leon, *Existence and construction of finite frames with a given frame operator*. Int. J. Pure Appl. Math. 63 (2010), no. 2, 149-157.

[20] C. K. Li, M. Roy, *The Lidskii-Mirsky-Wielandt theorem - additive and multiplicative versions*, Numerische Mathematik 81 (1999): 377-413.

[21] O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases.* Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Boston, 2003. xxii+440 pp.

[22] G. Corach, P. Massey, M. Ruiz, *Procrustes problems and Parseval quasi-dual frames*, Acta Applicandae Mathematicae 131 (2014), 179–195

[23] D. Deckard, L. A. Fialkow, *Characterization of Hilbert space operators with unitary cross sections*, J. Operator Theory **2** (1979), 153-158.

[24] I.S. Dhillon, R.W. Heath Jr., M.A. Sustik, J.A. Tropp, *Generalized finite algorithms for constructing Hermitian matrices with prescribed diagonal and spectrum*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 27 (1) (2005) 61-71.

[25] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 341-366.

[26] K. Dykema, D. Freeman, K. Kornelson, D. Larson, M. Ordower, E. Weber, *Ellipsoidal tight frames and projection decomposition of operators*, Illinois J. Math. 48 (2004), 477-489.

[27] G. Eckart, G. Young, *The approximation of one matrix by another of lower rank*, Psychometrika 1 (1936), 211-218.

[28] L. Eldén, H. Park, *A Procrustes problem on the Stiefel manifold*, Numer. Math. 82, no. 4, 599-619 (1999)

[29] D. J. Feng, L. Wang, Y. Wang, *Generation of finite tight frames by Householder transformations*, Adv Comput Math 24 (2006), 297-309.

[30] M. Fickus, M. J. Poteet, *Characterizing completions of finite frames*, 10th Proc. Sampl. Theory Appl. (2013), 89-92.

[31] M. Fickus, D. G. Mixon, M. J. Poteet, *Frame completions for optimally robust reconstruction*, Proceedings of SPIE, 8138: 81380Q/1-8 (2011).

[32] M. Fickus, J. Marks, M. Poteet, *A generalized Schur-Horn theorem and optimal frame completions*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 40 (2016), no. 3, 505-528.

[33] M. Fickus, D. G. Mixon, M. J. Poteet, *Constructing finite frames of a given spectrum*, Finite frames, 55-107, Appl. Numer. Harmon. Anal. Birkhäuser/Springer, New York, 2013.

[34] W. Fulton, *Eigenvalues, invariant factors, highest weights and Schubert calculus*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 37 (2000), no. 3, 209-249.

[35] J. C. Gower, G. B. Dijksterhuis, *Procrustes problems*, Oxford Statistical Science Series, 30. Oxford University Press, Oxford, (2004)

[36] L. Hamilton, A. Moitra, *The Paulsen Problem Made Simple*, arXiv:1809.04726 [math.FA] (2018)

[37] N.J. Higham, *Matrix nearness problems and applications*, Applications of matrix theory (Bradford, 1988), 1-27, Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser., 22, Oxford Univ. Press, New York, (1989).

[38] T. C. Kwok, L. C. Lau, Y. T. Lee, A. Ramachandran, *The Paulsen problem, continuous operator scaling, and smoothed analysis*, STOC, pages 182–189, 2018.

[39] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1980.

[40] U. Kintzel, *Procrustes problems in finite dimensional indefinite scalar product spaces*, Linear Algebra Appl. 402, 1-28 (2005)

[41] R.B. Holmes, V.I. Paulsen, *Optimal frames for erasures*, Linear Algebra Appl. 377 (2004), 31-51.

[42] A. Horn, *Eigenvalues of sums of Hermitian matrices*, Pacific J. Math. 12 (1962), 225-241.

[43] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[44] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Corrected reprint of the 1991 original, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[45] B.D. Johnson, K.A. Okoudjou, *Frame potential and finite abelian groups.* Radon transforms, geometry, and wavelets, 137-148, Contemp. Math., 464, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[46] R.V. Kadison, J.R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I. Elementary theory*, Graduate Studies in Mathematics, 15. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[47] A. A. Klyachko, *Stable bundles, representation theory and Hermitian operators*, Selecta Math. 4 (1998), 419-445.

[48] A. Knutson, T. Tao, *The honeycomb model of GLn(C) tensor products I: proof of the saturation conjecture*, J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), 1055-1090,

[49] K. A. Kornelson, D. R. Larson, *Rank-one decomposition of operators and construction of frames*, Wavelets, frames and operator theory, Contemp. Math., 345, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 203-214.

[50] J.M Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[51] C.K. Li, Y.T. Poon, T. Schulte-Herbrüggen, *Least-squares approximation by elements from matrix orbits achieved by gradient flows on compact Lie groups*, Math. Comp. 80 (2011), no. 275, 1601-1621.

[52] V.B. Lidskii, *On the characteristic numbers of the sum and product of symmetric matrices*, (Russian) Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 75, (1950). 769-772.

[53] A.W. Marshall, I. Olkin, B.C. Arnold, *Inequalities: theory of majorization and its applications.* Second edition. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2011.

[54] P. Massey, N. B. Rios, D. Stojanoff, *Frame completions with prescribed norms: local minimizers and applications*, Adv. Comput. Math. 44 (2018), no. 1, 51–86.

[55] P. Massey, N. B. Rios, D. Stojanoff, *Local Liskii's theorems for unitarily invariant norms.* Linear Algebra Appl. 557 (2018), 34-61.

[56] P. Massey, N. B. Rios, D. Stojanoff, *Generalized frame operator distance problems*, (2018), arXiv:1812.10365 [math.FA].

[57] P. Massey, M.A. Ruiz, *Tight frame completions with prescribed norms*, Sampl. Theory Signal Image Process. 7 (2008), no. 1, 1-13.

[58] P. Massey, M. Ruiz, *Minimization of convex functionals over frame operators*, Adv. Comput. Math. 32 (2010), no. 2, 131-153.

[59] P. Massey, M. Ruiz, D. Stojanoff, *Optimal dual frames and frame completions for majorization*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 34 (2013), 201-223.

[60] P.G. Massey, M.A. Ruiz, D. Stojanoff, *Optimal frame completions*, Advances in Computational Mathematics 40 (2014), 1011-1042.

[61] P. Massey, M. Ruiz, D. Stojanoff, *Optimal frame completions with prescribed norms for majorization*, J. Fourier Anal. Appl. 20 (2014), no. 5, 1111-1140.

[62] N. Strawn, *Finite frame varieties: nonsingular points, tangent spaces, and explicit local parameterizations*, J. Fourier Anal. Appl. 17 (2011), no. 5, 821-853.

[63] N. Strawn, *Optimization over finite frame varieties and structured dictionary design*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 32 (2012) 413-434.

[64] G. A. Watson, *The solution of orthogonal Procrustes problems for a family of orthogonally invariant norms*. Adv. Comput. Math. 2 , no. 4, 393-405 (1994).