ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS FORMULAS DE HARTMANN Y DE COLACEVICH

Roberto Devoto
(Instituto de Física,La Plata)

La conocida fórmula de Hartmann para reducir espectrogramas de prismas tiene el inconveniente de que sólo puede ser aplicada a pequeños intervalos si se quiere cometer un error aceptable. Por ejemplo, en los 3.800 A, con un instrumento de dispersión lineal igual a 0,19 mm/A, si se desea que el error máximo cometido al calcular las longitudes de onda desconocidas no pase de 0,1 A, la zona interpolada no debe tener un ancho mayor de 100 A.

Resulta por lo tanto interesante tratar de dar con otra fórmula, que sin ser demasiado complicado su manejo, ensanche suficientemente el entorno de aplicabilidad dentro de un error razonable.

Indudablemente el camino más sencillo para mejorar la fórmula de Hartmann consiste en agregarle un término lineal, con lo cual se llega a una forma ya largamente empleada por Atilio Colacevich para medir índices de refracción en función de longitudes de onda (Una modificazione alla formula di Hartmann. Atti della Fondazioni "Giorgio Ronchi", Año II Feb-Ab. 1947, N: 1,2. Pag. 43).En nuestro caso será:

$$\lambda = \lambda_o + \frac{C}{(d - d_o)} + B\,(d - d_o)$$

Por supuesto que con esta fórmula se cometerá un error sistemático menor que con la de Hartmann,ya que al contener una constante más,necesita también un punto más de contacto con la curva real de dispersión. Pero, por otro lado, los errores casuales cometidos al medir las distancias d y los errores con que vienen dadas en las tablas las longitudes de onda, tienen una mayor propagación en la nueva fórmula.

El estudio de esta propagación por los métodos generales se vuelve inoperante, por lo que resulta más útil ensayar experimentalmente ambas fórmulas y comparar sus resultados.

Para ello se establecieron las curvas de error de una misma placa, cometidos con una y otra fórmula y también se calculó el error medio. El trabajo se repitió con tres diferentes amplitudes de zona y dispersión, encontrándose como es natural que al aumentar el ancho de la región interpolada, la nueva fórmula resulta más conveniente. Esto se debe a que en ese caso el error fundamental es el sistemático, que sabemos debe ser menor con la fórmula que se está ensayando. El resultado de los trabajos se encuentra resumido en el siguiente cuadro:

Rango	Dispersión lineal	Ancho de zona	Error Máximo		Error medio	
			H	C	H	C
A°	mm/A°	A°	A°	A°	A°	A°
3.800	0,19	100	0,070	0,074	0,024	0,029
3.900	0,26	300	0,08	0,03	0,04	0,01
2.800	0,09	1.000	0,87	0,12	0,45	0,05

Si bien es un ensayo parcial, pues no se trabajó en las grandes longitudes de onda, se pueden hacer algunas deducciones generales, suficientemente útiles para que el espectroscopista pueda seleccionar la fórmula más conveniente.

Por de pronto, la forma óptima de trabajo es cuando los errores sistemáticos son del mismo orden que los casuales. En las condiciones del primer ensayo, empleando un comparador Zeiss capaz de estimar hasta el 0,0001 mm y patrones secundarios de las tablas del MIT dadas con 4 decimales, midiéndose 5 veces cada línea, para la fórmula de Hartmann esa forma óptima se presenta cuando la amplitud de la zona interpolada es de 100 A. Podemos decir que en ese momento se logra el mayor beneficio de la fórmula. La de Colacevich en cambio tiene errores máximos y medios menores en esa misma región trabajando en anchos tres veces mayores.

No habiendo razones para que esto cambie fundamentalmente en otras regiones se puede deducir que en general la nueva fórmula tiene una amplitud tres veces mayor que la de Hartmann, con resultados ligeramente mejores.

Además en las condiciones del último ensayo, vemos que un error máximo de 0,1 A, que para ciertos objetivos es aún razonable, es cometido al trabajar en contornos de 1000 A, cosa que con la fórmula de Hartmannexigiría la construcción de una tediosa curva de errores, o, sinó hacer tres interpolaciones.

Sin embargo, como es natural, no todas son ventajas, porque es necesario hacer notar que el cálculo de las constantes resulta un poco más engorroso que en el caso anterior. Para dar una idea de esa dificultad, mostramos a continuación las expresiones de las mismas en ambos casos.

Fórmula de Hartmann

Los datos son: λ_1, λ_2, λ_3, d_1, d_2, d.

Las constantes son: λ_0, C, d_0

$$\lambda_0 = \lambda_1 - \frac{d_3 - d_2}{a - b}$$

$$C = \frac{d_3 - d_2}{a - b}\, a\,(\lambda_2 - \lambda_0)$$

$$d_0 = a\,(\lambda_2 - \lambda_1)$$

siendo:

$$a = \frac{d_2 - d_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$b = \frac{d_3 - d_1}{\lambda_3 - \lambda_1}$$

Fórmula de Colacevich

Los datos son: λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, d_1, d_2, d_3, d_4

Las constantes son: λ_0, C, d_0, B

$$d_0 = \frac{S(d_2 d_4 - d_1 d_3) - (d_4 d_3 - d_1 d_3)}{S(d_2 + d_4 - d_1 - d_3) - (d_3 + d_4 - d_1 - d_2)}$$

$$C = \frac{A}{\dfrac{1}{(d_1 - d_0)(d_2 - d_0)} - \dfrac{1}{(d_3 - d_0)(d_4 - d_0)}}$$

$$B = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d_2 - d_1} + \frac{C}{(d_2 - d_0)(d_1 - d_0)}$$

$$\lambda_0 = \lambda_1 - \frac{C}{d_1 d_0} - B(d_1 - d_0$$

siendo

$$S = \frac{d_4 d_3 - d_1 d_2 + d_0 (d_1 + d_2 - d_3 - d_4}{d_2 d_4 - d_1 d_3 + d_0 (d_1 + d_3 - d_2 - d_4)}$$

Summary.

COMPARATIVE STUDY OF THE HARTMANN AND COLACEVICH FORMULAE FOR THE REDUCTION OF SPECTROGRAMS.

An experimental study is made of the advantages of both formulae; it is concluded that the Colacevich formula is better suited.