

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, PERIÓDICAS Y OSCILATORIAS: UNA PROPUESTA DE TRABAJO INTERDISCIPLINARIO

Trípoli, María de las Mercedes¹, Torroba, Patricia¹, Devece, Eugenio¹ y Aquilano, Luisina¹

¹IMApEC, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata
1 y 47, La Plata, Buenos Aires, Argentina
mercedes.tripoli@gmail.com

Resumen. En este trabajo se relata la primera implementación de una propuesta interdisciplinaria que consistió en una actividad de articulación en la cual se relacionaron las funciones trigonométricas seno y coseno con el movimiento armónico simple. La actividad mencionada estuvo dirigida a estudiantes de primer año de ingeniería y se llevó a cabo en un aula de matemática con docentes de distintas disciplinas. En la propuesta se relacionaron las constantes asociadas a las funciones seno y coseno con las características de un sistema físico masa-resorte y un péndulo simple, mediante una actividad experimental con uso de elementos tradicionales combinados con TIC. De la evaluación de la experiencia se puede concluir que a los estudiantes les resultó motivadora para el estudio de la matemática.

Palabras Clave: Funciones trigonométricas, Movimiento Armónico Simple, Articulación, Trabajo interdisciplinario, Estrategias de enseñanza.

1 Introducción

Como parte de un conjunto de estrategias didácticas de enseñanza en las cuales se trabaja diseñando actividades de articulación entre matemática y física que favorezcan la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes, es que se presenta la implementación de una propuesta de articulación entre las disciplinas mencionadas. Dicha propuesta se enmarca en el Proyecto de Investigación y Desarrollo Acreditado de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP): “Articulación en la enseñanza de las Ciencias Básicas en carreras de Ingeniería”. La investigación que se viene llevando a cabo, que ha derivado en actividades de articulación, ha sido evaluada y se han obtenido resultados favorables, motivando de esta manera dar continuidad a las mismas y a su vez, profundizar en su impacto a largo plazo [1], [2], [3], [4] y [5].

La formación en las ciencias básicas, en particular en matemática y física, constituye los cimientos sobre los cuales se espera que los estudiantes de ingeniería construyan los saberes específicos; es por ello que una sólida formación conceptual es necesaria como parte del sustento de estas disciplinas. Como aporte a esta formación, se proponen e implementan actividades de articulación dirigidas a alumnos que estén cursando una asignatura de matemática, con el objetivo de mostrarles su relación con otras áreas, presentarles alguna aplicación a situaciones de la vida diaria, ayudarlos en la vinculación de los conceptos involucrados, así como de las notaciones y lenguajes de las distintas disciplinas y generar en el estudiante interés por el estudio de la matemática. Los profesores que son autores de este trabajo que se han formado en distintas áreas como matemática, física e ingeniería, así como la alumna avanzada de ingeniería química que también es autora, además proponen un trabajo interdisciplinario, desde el diseño de las actividades hasta la realización de la misma en el aula junto con los estudiantes.

En este trabajo se relata la primera implementación de una propuesta de articulación en la cual se vinculan algunos aspectos de las funciones trigonométricas seno y coseno con el movimiento armónico simple (MAS). Dicha propuesta consistió en una actividad que se llevó

a cabo en una clase de Matemática A, asignatura que cursan todos los estudiantes que ingresan a la FI. Se presentan algunos resultados de la implementación y se reflexiona sobre los mismos.

2 Algunos fundamentos teóricos

Al realizar el diseño de la propuesta se tuvo en cuenta que los alumnos aún no poseen la competencia necesaria para articular por sí solos los conocimientos previos y los nuevos que van incorporando por ser de primer año, siendo necesaria la colaboración del docente para que puedan llevar a cabo dicho proceso [3].

Los aspectos teóricos que fundamentan este trabajo se enmarcan en la teoría cognitiva del aprendizaje significativo. Estas teorías sostienen la idea de combinar la información previa con la nueva para arribar a una comprensión más profunda [6], destacando que para que se produzca este tipo de aprendizaje, el aprendiz debe querer aprender. Una forma de propiciar el aprendizaje y en forma significativa, es atender a lo expresado por Moreira [7] que sugiere crear situaciones de enseñanza en el aula que motiven el aprendizaje.

Asimismo, se consideró lo que sostiene Santaló [8] con respecto a la enseñanza de la matemática para aquellas profesiones en que ésta no es un fin sino un medio para su mejor ejercicio, “hay que simplificar los detalles técnicos, que deben dejarse para los matemáticos profesionales, y procurar que los resultados, asegurada su validez por estos últimos, lleguen a hacerse intuitivos y comprensibles para quienes lo necesiten”. Es necesario que se contemplen ejercicios, problemas, actividades, etc. que acerquen al estudiante, en la medida que los conocimientos de matemática lo permitan, a aplicaciones de la vida diaria.

Conjuntamente con los aspectos considerados, cabe destacar la importancia de trabajar en forma interdisciplinaria como una propuesta de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. En el actual contexto mundial, el abordaje interdisciplinario de los contenidos académicos se ha convertido en una necesidad, de lo contrario los estudiantes no estarán preparados para desenvolverse en un mundo que es cada vez más complejo e interconectado. La interdisciplinariedad puede verse como una estrategia pedagógica que implica la interacción de varias disciplinas, entendida como el diálogo y la colaboración de éstas para lograr la meta de un nuevo conocimiento [9]. En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática y la física, la interdisciplinariedad es un elemento esencial, por cuanto está implícita en las propias disciplinas, razón por la cual requiere de un conocimiento profundo de ambas y sus nexos.

Al enseñar la matemática vinculándola con la física, es esperable que haya incremento de la efectividad de su enseñanza tanto en términos cuantitativos como cualitativos, ya que, si hay algo que ha quedado sobradamente demostrado es que un contenido sólo puede ser aprendido eficazmente cuando quien se enfrenta a él tiene claro el por qué y para qué de dicho contenido, es decir, cuando sea significativo y funcional.

3 Relato de la experiencia

Como ya se mencionó, el objetivo general de la propuesta es motivar al alumno para estudiar matemática, transmitirle que es una herramienta imprescindible en su formación profesional y mostrarle alguna aplicación que tienen las funciones trigonométricas en situaciones reales concretas.

Como objetivo específico, se pretende que el alumno, por un lado comprenda la definición de las funciones seno y coseno a partir de la circunferencia unidad y del ángulo en su posición normal y por el otro, que vincule las constantes que aparecen en estas funciones,

$$f(t) = A \operatorname{sen}(Bt + C) + D \quad (1)$$

con alguna interpretación física, relacionándolas con cierta aplicación a la ingeniería y visualice su utilidad en una situación física experimental con uso de TIC.

Se eligió articular sobre estos temas porque ambos tienen en común a las funciones trigonométricas. El MAS es uno de los movimientos idealizados más importantes, pues constituye una buena aproximación a muchas de las oscilaciones que se dan en la naturaleza y es muy sencillo de describir matemáticamente [10]. Los conceptos involucrados en este tratamiento, resultan ser el primer nivel de entendimiento para otros sistemas más complejos que se expresan como combinación lineal del caso sencillo.

La propuesta se llevó a cabo en el aula de Matemática A, en una de las comisiones conformada por alumnos de las especialidades de Civil, Hidráulica, Industrial y Materiales.

3.1 Implementación de la propuesta

La propuesta fue diseñada para ser desarrollada en tres etapas, en el aula de matemática. La primera etapa de la actividad se realizó sólo con los docentes de Matemática A, mientras que en las otras dos participaron docentes de Física I.

Primera etapa: se trabajó sobre la definición de seno y coseno a partir de la circunferencia unidad, y sobre la manera en la cual las constantes involucradas en dichas funciones (de acuerdo a la Fórmula 1) influyen sobre sus gráficas. Lo que se propuso en esta parte, fue trabajar con el software GeoGebra, para visualizar de qué manera, teniendo la circunferencia unidad, se construyen las gráficas de las funciones seno y coseno, y cómo influyen las constantes en las gráficas de las mismas. Luego, se definió amplitud, período, frecuencia y desfase.

Segunda etapa: en esta etapa los docentes de física concurren al aula de matemática para trabajar en forma conjunta con los docentes de matemática y con los estudiantes.

Se introdujo el concepto de movimiento armónico simple, de manera cualitativa, con el objetivo que los estudiantes lo relacionaran con lo visto previamente en la clase de matemática, mencionando que se iba a trabajar con los sistemas masa-resorte y con el péndulo simple (como los que se muestran en la Fig. 1). En distintos momentos, intervinieron los docentes, con el objetivo de hacer el nexo entre la mirada que se le dio en la clase de matemática, con la terminología y notación usada en física.

Primero se trabajó con el sistema masa-resorte, analizando las características del movimiento (periódico y oscilatorio) y concluyendo que la ecuación que describe la posición del cuerpo en función del tiempo, de acuerdo a la notación que verán en física, es:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

Se caracterizaron las constantes involucradas en este contexto: la amplitud A que es el mayor apartamiento de la posición de equilibrio, la frecuencia angular $\omega = 2\pi/T$ siendo T el período (tiempo que tarda en volver a pasar por la misma posición), la fase inicial φ_0 cuando $t = 0$ (da información de dónde está el cuerpo cuando se empieza a medir el tiempo) y la frecuencia $f = 1/T$ (número de oscilaciones por unidad de tiempo). En un sistema masa-resorte, $\omega = \sqrt{k/m}$, donde k es la constante del resorte y tiene información de las características de éste y m la masa del cuerpo que cuelga (estos conceptos los van a justificar en Física I pero era necesario mencionarlos para realizar la experiencia).

Luego se trabajó con un péndulo simple. Si bien parecen ser sistemas diferentes, su comportamiento es similar. Lo que se modifica en este caso es que la variable adecuada para describir la posición del cuerpo para todo tiempo es el ángulo que forma el hilo o la varilla con la vertical. En este caso,

$$\theta(t) = \theta_{max} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (3)$$

y $\omega = \sqrt{g/L}$, donde g es la aceleración de la gravedad y L la longitud del hilo o la varilla.

¿Cómo sabemos que ambas expresiones (Fórmulas 2 y 3) que contienen la función seno describen correctamente el comportamiento de ambos sistemas físicos?

Se realizó una actividad experimental con uso de TIC, las cuales consistieron en un sensor de posición, una interface y un software que permite la toma de datos a tiempo real y su respectiva representación, y uso de elementos tradicionales (Fig. 1). Por medio de estos instrumentos se pudo dar validez a las expresiones propuestas (Fig. 1).

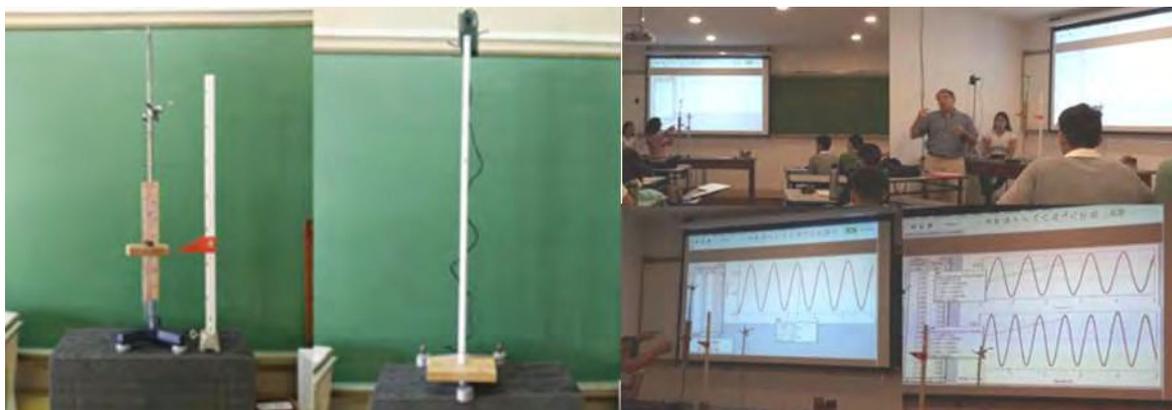


Figura 1. Imágenes de los sistemas masa-resorte, el péndulo simple y la clase experimental.

La utilización de estas herramientas permitió contrastar las predicciones realizadas por los alumnos en relación a las modificaciones de las constantes con los resultados experimentales.

Los estudiantes en la clase anterior ya habían visto cómo influían los cambios de las constantes de la función en sus gráficas usando el GeoGebra, en esta clase lo que pudieron observar es cómo esos cambios influyen pero en una situación física concreta que la pueden relacionar con aspectos de la vida cotidiana.

Tercera etapa: se les repartió a los estudiantes una actividad formada por cuatro ejercicios en donde se relacionaba lo visto en matemática con lo de la clase experimental. Los alumnos resolvieron la actividad en forma grupal, con la ayuda de los docentes, que luego entregaron.

También se les pidió a los estudiantes que contestaran una encuesta como otra manera de medir la experiencia.

4 Resultados y análisis

Con respecto a los ejercicios propuestos, prácticamente el total de los estudiantes resolvieron los dos primeros mostrando las mayores dificultades en la determinación de la frecuencia y desfase. En el primer ejercicio se les pidió explícitamente que indicaran las unidades con las que estaban trabajando y, sin embargo, un alto porcentaje no lo hicieron. Con respecto al ejercicio 3, en el cual se les daban ciertos datos y debían construir la función que modelaba la situación propuesta, un número importante de estudiantes la determinó en forma correcta. Además, debían realizar una operación que requería el uso de la calculadora. Un alto porcentaje de los alumnos obtuvieron un resultado numérico erróneo debido al incorrecto uso de la calculadora. En cuanto al ejercicio 4, un poco más de la mitad no lo resolvieron.

En cuanto a la encuesta realizada, el 90,5% respondió que pudo vincular las constantes de las funciones trigonométricas con las magnitudes físicas asociadas y ese mismo porcentaje afirmó que esa asociación fue facilitada por la actividad experimental realizada.

El 69% respondió que pudieron resolver los ejercicios de la actividad. De estos alumnos, el 66,7% mencionó que fue porque influyó la actividad experimental mientras que el 28,6%

dejó esta respuesta en blanco. El 88% respondió que les parece importante realizar actividades en las que se puedan vincular la matemática con situaciones experimentales.

De los resultados mencionados de la encuesta y de los ejercicios propuestos se observa que, a pesar que un alto porcentaje de los encuestados mencionan que pudieron relacionar las constantes involucradas en las funciones trigonométricas con las constantes físicas comprendidas en la actividad experimental, la respuesta de los ejercicios muestra que un porcentaje de estos alumnos realizaron dicha vinculación en forma incorrecta, en particular al determinar la frecuencia y el desfase. Asimismo, pareciera que consideran que el hecho de resolver sólo algunos de los ejercicios propuestos, alcanza para decir que pudieron resolver la actividad propuesta, como lo indica el resultado de la segunda pregunta de la encuesta.

La implementación de esta experiencia indicó que sería conveniente dedicar mayor tiempo a la interacción individual de los docentes con los estudiantes en la resolución de los ejercicios para que pueda surgir más claramente en dónde estarían las dificultades en la comprensión del tema.

Se transcriben, a continuación, algunos de los comentarios de los estudiantes que se consideraron más representativos: “la explicación me pareció muy clara y acompañada con el desarrollo experimental fue mucho más simple, ayudó a ver el tema de una manera aplicada y menos abstracta, nos ayuda para englobar todos los conceptos ya aprendidos, la visualización de los experimentos ayudó a recordar y entender las variables de la función seno, me ayudó a realizar los ejercicios y poder comprender de qué estábamos hablando, gracias a la experiencia realizada pude vincular conceptos e implementar nuevos para así llevar a cabo el desarrollo de los ejercicios, descubrimos que lo que estudiamos pasa en la realidad, demuestra que lo que estás estudiando verdaderamente va a ser útil, nos ayuda a entender por qué debemos estudiar matemática para desenvolvernos en el ámbito laboral, verla en forma experimental me sirvió para poder vincular las funciones trigonométricas en un caso de la vida cotidiana, para comprender más la utilidad práctica de la matemática y sus potenciales usos”.

5 Reflexiones finales

A partir del análisis de la experiencia, consideramos que la realización de esta actividad de articulación, ayudó al estudiante a reconocer la importancia del estudio de las funciones trigonométricas debido a su aplicación a una situación real. El empleo de TIC resultó motivador, hizo de nexo entre constantes matemáticas abstractas y situaciones físicas concretas como lo es un sistema masa-resorte o un péndulo. Además, su uso permitió contrastar a tiempo real el resultado de las predicciones hechas por los estudiantes sobre el comportamiento de los sistemas físicos con las respuestas del modelo físico-matemático empleado.

Creemos que lograr una adecuada relación entre las diferentes miradas, física y matemática, influye en el consecuente incremento de la efectividad del proceso de enseñanza y aprendizaje, tanto en términos cuantitativos como cualitativos y al mismo tiempo exige una mayor preparación de los docentes involucrados. La propuesta interdisciplinaria requiere una necesaria coordinación entre los docentes de las diferentes asignaturas, de forma tal que se garantice la integración de los conocimientos y habilidades. Además, la conformación de un grupo docente interdisciplinario aporta las miradas desde cada disciplina, transmitiendo una visión global del tema.

Consideramos que es necesario crear condiciones en nuestras aulas que permitan llevar adelante este tipo de actividades en un número mayor de cursos.

Cabe destacar que en estas actividades, cada disciplina conserva intacto su objeto y se acerca a la otra, en la medida en que encuentra algunos puntos de articulación que le permiten visualizar un mismo objeto, aunque en aspectos y desde enfoques siempre diferentes, ya que cada ciencia conserva su especificidad.

Teniendo en cuenta la importancia que tienen las unidades a lo largo de todos los temas que se estudian en las clases de física, debido a que ellas intervienen en el análisis de los

resultados, un aspecto que debemos analizar es cómo y en qué instancia se deberían incorporar las unidades de medida básicas en las clases de matemática. Este tema es abordado en la escuela secundaria y se podría recuperar en situaciones tratadas en matemática.

6 Referencias

1. Costa, V.; Torroba, P.; Devece, E.: Articulación en la enseñanza en carreras de ingeniería: el movimiento armónico simple y las ecuaciones diferenciales de segundo orden lineal. *Latin American Journal of Physics Education*, Vol. 7, Nº3, pp. 350-356 (2013).
2. Devece, E.; Di Domenicantonio, R.; Torroba, P.; Trípoli, M.: Experiencia de articulación entre Matemática A y Física I, en *Actas de las IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación*. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de La Plata (2015).
3. Torroba, P.; Devece, E.; Trípoli, M.; Aquilano, L.: Cinemática y el análisis de una función: una propuesta didáctica que articula contenidos de matemática y física. *Revista de Enseñanza de la Física*. Vol. 28, pp. 91-99: Número Extra: Selección de Trabajos presentados a SIEF (2016).
4. Torroba, P.; Trípoli, M.; Devece, E.; Aquilano, L.: Magnitudes vectoriales: una propuesta didáctica para articular matemática y física. *Revista de Enseñanza de la Física*. Vol. 29, pp. 305-313: Número Extra: Selección de Trabajos presentados a REF (2017).
5. Torroba, P.; Devece, E.; Trípoli, M.; Aquilano, L.: Funciones trigonométricas y el movimiento armónico simple. 1er Congreso Latinoamericano de Ingeniería (CLADI), Entre Ríos, Argentina (2017).
6. Ausubel, D.; Novak, J.; Hanesian, H.: *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. Vol. 3. Trillas, México (1976).
7. Moreira, M.: Aprendizaje significativo. Un concepto subyacente. *Actas del II Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo*. Burgos, España (1997).
8. Santaló, L.: Matemática para no matemáticos. Parra, C.; Saiz, I.: *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Paidós (1994).
9. Van del Linde, G.: ¿Por qué es importante la interdisciplinariedad en la educación superior? *Cuadernos de Pedagogía Universitaria*. Año 4, No. 8, pp. 11-13, Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, Rep. Dominicana (2007).
10. Alonso, M.; Finn, E.: *Física*. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A., Wilmington, Delaware, EUA. (1995).