

## METROLOGÍA DE VÓRTICES USANDO FILTROS DE LAGUERRE GAUSS ELÍPTICOS

Myrian Tebaldi<sup>1,2,3</sup>, Nelly Cap<sup>1</sup>, Hector Rabal<sup>1</sup>, Silvana Gallo<sup>1</sup>, Astrid L Villamizar Amado<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup>Centro de Investigaciones Ópticas (CONICET La Plata-CIC-UNLP)

<sup>2</sup>Departamento de Ciencias Basicas, Facultad de Ingenieria, Universidad Nacional de La Plata, Argentina

<sup>3</sup>UID OPTIMO, Departamento de Ciencias Basicas, Facultad de Ingenieria, Universidad Nacional de La Plata, Argentina

<sup>4</sup>Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina

<sup>5</sup>Facultad de Informática, Universidad Nacional de La Plata, Argentina

### INTRODUCCIÓN

Los fenómenos ondulatorios, tales como la luz y los ultrasonidos exhiben lugares donde el campo es cero y que, por lo tanto, su fase no está definida. Dichos puntos se denominan singularidades o vórtices. Dichos vórtices son, idealmente, de medida nula (indefinidamente pequeños) y permiten una medida muy precisa de desplazamientos y deformaciones.

En los últimos años se ha observado un gran interés en el estudio del comportamiento de los campos ópticos en la vecindad de las regiones donde la amplitud es cero y, en consecuencia, la fase del campo en este punto es singular [1]. Para la generación de singularidades de fase se han empleado técnicas analógicas y digitales tales como hologramas por computadora [2], interferencia de ondas planas [3], interferómetros de Michelson y Mach Zehnder y sistemas de fibras ópticas[4]. Es de gran relevancia, en particular para las aplicaciones el hecho que los puntos aislados donde la amplitud del campo es cero en teoría pueden ser ubicados con precisión arbitraria. En el campo de las aplicaciones metrológicas se ha reportado la detección de desplazamientos con precisiones nanométricas y rotaciones del orden de miliradianes (5). Las técnicas metrológicas se basan en el hecho que las redes de singularidades asociadas con patrones de speckle imprimen marcas relacionadas con la superficie. El desplazamiento de cada singularidad esta relacionado directamente con un desplazamiento local de la superficie del objeto bajo estudio [5-8].

Las singularidades de fase que se encuentran en los patrones de speckle no es posible detectarlas cuando se almacena un patrón de intensidad. Sin embargo, las singularidades de fase no solo se encuentran en los mapas de fase modulo  $2\pi$  del campo, también pueden ser encontrados en los campos de valores complejos sintetizados a partir de las distribuciones en intensidad. la determinación de las singularidades en este caso es conveniente utilizar una transformación compleja, como por ejemplo la transformada de Laguerre Gauss (LG). La transformada de Laguerre Gauss consiste en un filtro pasabanda gaussiano con simetría circular en el plano de Fourier multiplicado por una fase helicoidal. En este caso función de valores reales de un campo óptico (registro de intensidad), da como resultado un campo complejo, que se comportara de manera análogo al campo óptico con amplitud y fase de modulo  $2\pi$ . De esa manera es posible obtener numéricamente una pseudo-fase. Esta técnica tiene la ventaja de evitar la complejidad de las técnicas interferométrías, dado que la pseudo-fase puede obtenerse a partir de un registro en intensidad convencional.

En todas las aplicaciones la localización exacta de los vórtices es crucial dado que estos son utilizados como puntos de referencia. El resultado de la transformación de LG, al ser complejo, permite determinar la posición de sus ceros en la intersección de los lugares donde su parte real es cero con los correspondientes a su parte imaginaria. En las proximidades de un vórtice

de LG el campo transformado se puede aproximar por medio de planos usando el método de los cuadrados mínimos.

Una vez ubicados los vórtices, ellos poseen un conjunto de propiedades en el campo que los rodea que permiten caracterizarlos, estas son: su carga topológica, la vorticidad, la elipticidad y el ángulo que forman los ceros de la parte real con los de la parte imaginaria, denominadas propiedades del “core” o del núcleo. Debido a estas propiedades los vórtices sirven como marcadores del campo. Si se registran imágenes de un objeto iluminado con láser antes y después de una modificación mecánica, el seguimiento de los vórtices, permiten obtener el desplazamiento local y, utilizándolos de a pares, su deformación local o “strain”.

El filtro de LG utilizado usualmente contiene un núcleo Gaussiano con simetría circular [5]. En este trabajo se propone su generalización al uso de filtros elípticos o hiperbólicos para mejorar la identificación de los vórtices homólogos en imágenes sucesivas (además de las propiedades “core”) y para generar pares o familias de vórtices vecinos a distancias muy pequeñas que permiten que la medida del “strain” sea muy localizada. Esto se logra variando independientemente los anchos de la gaussiana elíptica.

Estudiamos la aplicación de esta generalización para determinar trayectorias y deformaciones en ensayos en movimientos del ventrículo izquierdo del corazón en ecografías médicas.

### Transformada de Laguerre Gauss con núcleo elíptico

Como ya mencionamos en la introducción es posible generar a partir de registros de intensidad campos complejos mediante el uso de una transformación integral lineal que convierten una función dada  $f(z)$  a otra función  $g(w)$ :

$$g(w) = \int_{C_n} K_n(w, z) f(z) dz$$

donde el “kernel” o núcleo de transformación es  $K_n$  con  $n=1, 2$ .

En nuestra propuesta,  $I(x, y)$  representa un dado registro de intensidad de la información de entrada y  $\mathfrak{F}(f_x, f_y)$  es su transformada de Fourier, entonces la señal analítica bidimensional  $\tilde{I}(x, y)$  para la distribución  $I(x, y)$  esta definida como:

$$\tilde{I}(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} LG_E(f_x, f_y) \mathfrak{F}(f_x, f_y) e^{2\pi i(f_x x + f_y y)} df_x df_y \quad (1)$$

donde  $LG_E$  es el filtro de Laguerre Gauss de núcleo elíptico dado por:

$$LG_E(f_x, f_y) = (f_x + i f_y) e^{-\left(\frac{f_x^2}{\omega_1^2} + \frac{f_y^2}{\omega_2^2}\right)} \quad (2)$$

donde los parámetros  $\omega_1$  y  $\omega_2$  permiten controlar adecuadamente el ancho de banda de la función de Laguerre Gauss en cada eje. El filtro  $LG_E$  elíptico, de la misma manera que el convencional, permite eliminar las componentes de alta frecuencia espacial que dan lugar a singularidades de fase inestables. Debe tenerse en cuenta que la densidad de singularidades de fase puede ser controlado al escoger un ancho de banda adecuado en el filtro de  $LG_E$ . La representación en amplitud del filtro en la transformada de Laguerre Gauss de núcleo elíptico dado por la ecuación (2) se muestra en la Figura 1.

En nuestra propuesta, el patrón de speckle en intensidad (ver Figura 2 a)) es procesado empleando la transformada de  $LG_E$  con filtro elíptico, resultando el mapa de pseudo-fase 2D mostrado en la Figura 2 b) que contiene singularidades distribuidas aleatoriamente. La posición de dichas singularidades depende de los parámetros  $\omega_1$  y  $\omega_2$  de la transformada  $LG_E$ . Como ya mencionamos en la introducción, en el lugar exacto de intensidad cero la fase no esta definida, donde no hay luz no puede haber una fase asociada. Sin embargo, en las vecindades de dicho

cero de intensidad, la fase tiene propiedades interesantes. Para que se produzca un cero de intensidad, tanto la parte real como imaginaria del campo deben ser cero en el mismo punto del espacio. Las singularidades de fase están localizadas en la intersección de los cruces por cero de las partes real e imaginaria de la señal compleja.



Figura 1: Amplitud del filtro de Laguerre Gauss elíptico

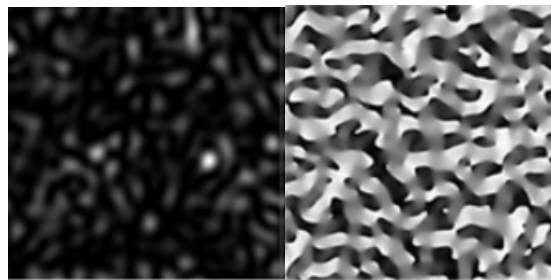


Figura 2: a) Distribución de intensidad de un patrón de speckle b) Mapa de pseudo fase

Se ha empleado una versión modificada del método de residuos de Goldstein es empleada para localizar los vórtices. La señal obtenida fue procesada digitalmente para obtener las propiedades estructurales de los núcleos de las singularidades de pseudo-fase. Las propiedades sirven como identificadores propios de cada singularidad de pseudo-fase, lo que permite emplearlas como marcadores. Las aplicaciones metrológicas están basadas en la posibilidad de realizar un seguimiento de las singularidades de pseudo-fase mediante la evaluación de las propiedades del núcleo cuando el campo óptico sufre una ligera modificación, a condición de que no afecte notablemente al correlación entre los diferentes estados del campo [10].

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En metrología óptica de vórtice [5], los cambios en las redes de vórtices en un análisis dinámico de eventos incluyen la creación y aniquilación de pares de vórtices con carga topológica opuesta. Analizamos la aniquilación de pares de vórtices cuando los parámetros  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en el núcleo elíptico de LG se modifican ligeramente. La disposición experimental se esquematiza en la Figura 3. Un haz láser colimado de He Ne ilumina un difusor aleatorio con una apertura de pupila de 5 mm. La distancia entre el difusor y el plano de la cámara es de 50 cm. En nuestra propuesta, registramos dos imágenes correspondientes a los estados antes (Figura 4 a)) y después (Figura 4b)) que el difusor se ha desplazado en el eje x (horizontal),  $\Delta x = 60$  mm. El área iluminada en el difusor cambia ligeramente y, en consecuencia, un conjunto de radiadores bastante diferente se asocia con ondas que interfieren en el plano de la cámara. Luego, los puntos cambian produciendo una ligera decorrelación entre las imágenes. Calculamos la pseudo-fase a partir de la compleja señal analítica del patrón de speckle 2-D aplicando el filtro  $LG_E$ . Los pares de vórtices homólogos se indican en los gráficos de la parte superior de las Figuras 4 a) y 4 b). Los vórtices con carga topológica positiva y negativa se indican con azul y rojo, respectivamente. A medida que el parámetro  $\omega_1$  en la transformada elíptica  $LG_E$  cambia

ligeramente, los vórtices en los mapas 2D de pseudo-fase se desplazan a posiciones cercanas. Las ubicaciones de los vórtices en relación con el cambio de filtro  $LG_E$  se observan en los gráficos de la parte inferior de la Figura 4 a) y 4 b), tanto para los vórtices de carga topológica positiva y negativa hasta la aniquilación.

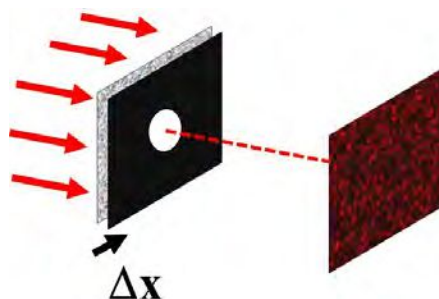


Figura 3: Esquema experimental

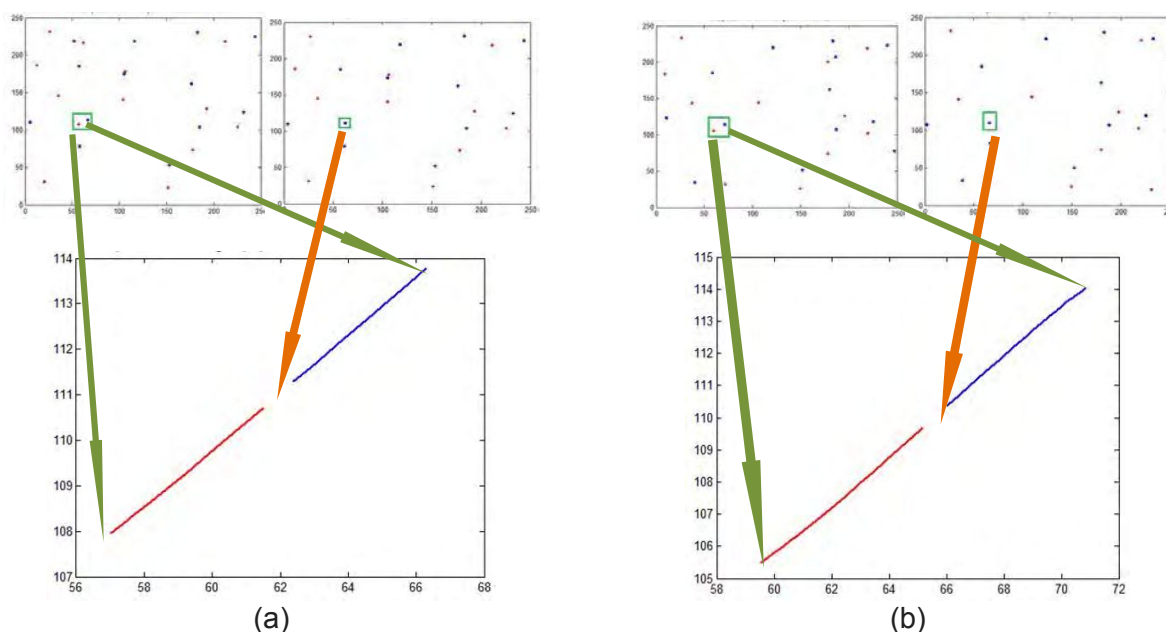


Figure 4: a)  $\Delta x = 0$  mmy b)  $\Delta x = 60$  mm

Analizamos aquí una superficie de un objeto que sufre una traslación local, rotación y deformación. Como se mencionó anteriormente, la localización de la singularidad de fase está determinada por el valor de los parámetros  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Proponemos utilizar los parámetros  $\omega_1$  como alternativa metrológica. Se han realizado experimentos para analizar nuestras ideas. En la Figura 5, determinamos las coordenadas de las singularidades de pseudo-fase de una señal analítica compleja correspondientes a diferentes regiones de objeto y a diferentes valores del parámetro  $\omega_1$ . En la Figura 5 a) se muestra la trayectoria de las singularidades de fase correspondientes a diferentes vórtices. La Figura 5 b) muestra la trayectoria de vórtices con carga topológica opuesta hasta la aniquilación cuando los parámetros  $\omega$  se modifican.

De la misma manera que se pueden determinar empleando la transformada de Laguerre Gauss en un patrón de speckle las singularidades de pseudo-fase, puede determinarse las singularidades en otros registros en intensidad como por ejemplo las imágenes correspondientes a estudios de diagnóstico médico tales como las ecografías. Las ecografías contienen speckle y el empleo de la transformada de  $LG_E$  genera vórtices ópticos que pueden ser usados como marcadores.

En Figura 6 a) se muestra uno de las imágenes correspondientes a ultrasonido cardíaco o ecocardiograma: La zona correspondiente al septum basal es indicada con un recuadro amarillo. En al Figura 6 b) se muestran las trayectorias correspondientes a dos vórtices de la zona del septum basal. Finalmente en la Figura 6 c) se muestra la deformación calculada a partir de las trayectorias de los vórtices de la Figura 6 b)

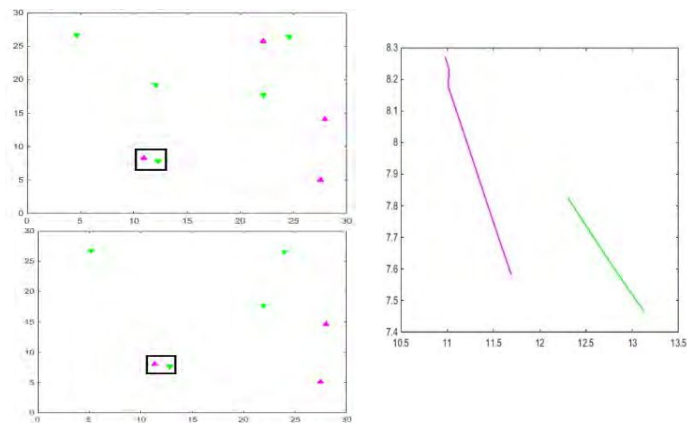


Figura 5 a)

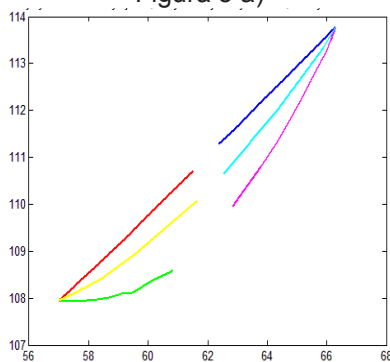


Figura 5 b) Curvas rojo y azul corresponden a vórtices de carga topológica opuesta con  $\omega_2$  fijo y  $\omega_1$  variable; curvas amarillo y cian corresponden a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  variables y curvas verde y fucsia corresponde a  $\omega_1$  fijo y  $\omega_2$  variable

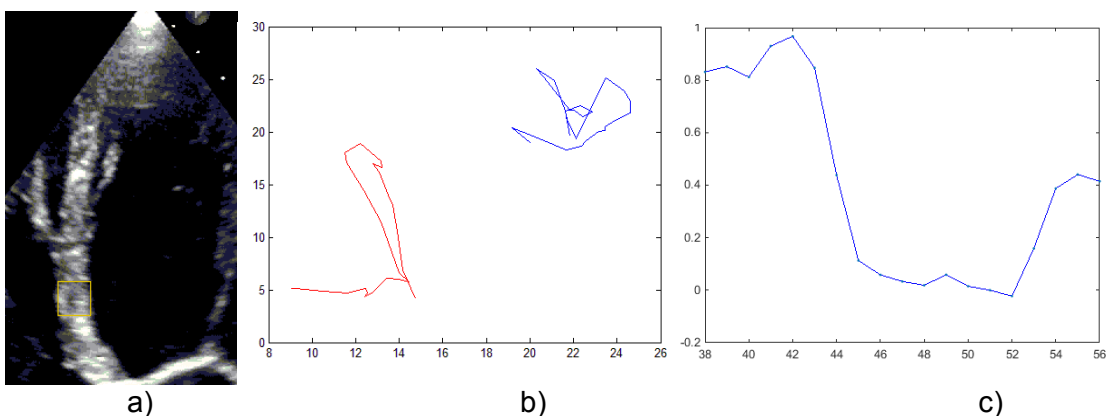


Figura 6

## CONCLUSIONES

En este trabajo se propone la generalización de la transformada de Laguerre Gauss empleando filtros elípticos para mejorar la identificación de los vórtices homólogos en metrología de vórtices. Se analiza la localización de la singularidad de la fase en termino de los parámetros  $\omega_1$  y  $\omega_2$  del el filtro  $LG_E$ . Se analizo la ubicación de los vórtices de carga topológica positiva y negativa hasta la aniquilación en término de los parámetros del filtro  $LG_E$ . La propuesta permite a partir del control de los parámetros del filtro generar vórtices arbitrariamente cercanos, lo cual permitiría mejorar la estimación de los desplazamientos y deformaciones.

Finalmente, mostramos que la técnica puede ser empleada para determinar trayectorias de vórtices y deformaciones en los frames de un ultrasonido cardíaco o ecocardiograma.

## REFERENCIAS

1. M. V. Berry. Much do about nothing: optical distortion lines(phase singularities, zeros and vortices). In International Conference on Singular Optics (pp. 1-5). International Society for Optics and Photonics(1998)
2. N. R. Heckenberg, R. McDuff, C. P. Smith, A.G. White. Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms, *Opt. Lett.* 17(3), 221-223(1992).
3. J. Masajada, B. Dubik. Optical vortex generation by three plane wave interference. *Opt. Commun.* 198(1), 21-27(2001).
4. R. Kumar, D. Singh Mehta, A. Garg, P. Senthilkumaran, C. Shakher. Generation and detection of optical vortices using fiber-optic system. *Opt. Commun.* 281(13) 3414-3420(2008).
5. W. Wang, T.Yokozeki, R.Ishijima, M. Takeda, S.G. Hanson.Optical vortex metrology based on the core structures of phase singularities in Laguerre-Gauss transform of a speckle pattern.*Opt. Exp.* 14(22),10195-10206 (2006).
6. W. Wang,N. Ishii, S. G.Hanson,Y. Miyamoto,M. Takeda. Phase singularities in analytic signal of white-light speckle pattern with application to micro-displacement measurement.*Opt.Commun.*248(1-3), 59-68 (2005).
7. W. Wang, Y. Qiao, R.Ishijima, T.Yokozeki, D. Honda, A. Matsuda, S. G. Hanson, M. Takeda.Constellation of phase singularities in a specklelike pattern for optical vortex metrology applied to biological kinematic analysis. *Opt. Express* 16(18),13908-13917 (2008).
8. W. Wang, N. Ishii, S. G. Hanson, Y. Miyamoto, M. Takeda. Pseudophase information from the complex analytic signal of speckle fields and its applications. Part I: Microdisplacement observation based on phase-only correlation in the signal domain.*Appl. Opt.* 44(23), 4909-4915 (2005).
9. W. Wang, T. Yokozeki, R.Ishijima, A. Wada, Y. Miyamoto, M. Takeda, S. G. Hanson Optical vortex metrology for nanometric speckle displacement measurement *Opt.Express* 14(1), 120-127 (2006).
10. L Angel-Toro, D Sierra-Sosa, M Tebaldi, N Bolognini Speckle decorrelation influence on measurements quality in vortex metrology*Opt.Commun.* 285, 4312-4316 (2012).