PROPUESTA DE ARTICULACIÓN ENTRE CONTENIDOS DE MATEMÁTICA C Y PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

María Valeria Calandra, Alejandro Mesón

UIDET Gamefi, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP.
mava@mate.unlp.edu.ar

INTRODUCCION

Descripción del problema estocástico

La idea es responder la pregunta ¿cuál es la media y la varianza de la posición de la partícula respecto del punto de partida? Consideremos el recorrido aleatorio de una partícula que parte de un punto inicial que denotaremos con X_0 y que se desplaza por etapas o pasos unitarios hacia la derecha o hacia la izquierda. Sus posibles localizaciones son el conjunto de los números enteros a los que llamaremos estados o espacio de estados. Si representamos con la variable aleatoria X_n su posición en el instante n-ésimo. Matemáticamente y desde el punto de vista estocástico, el recorrido aleatorio está representado por una sucesión de variables aleatorias X_n con $n \in N^+$ y se denomina proceso estocástico de tiempo discreto. La sucesión $\{X_n, n \varepsilon N\}$ forma infinitas secuencias $X_0, X_1, ...$ con $X_i \in Z$ .Es decir si la partícula inicia su recorrido en el estado 0, al siguiente tiempo la partícula puede pasar a la posición +1 con probabilidad p o a la posición -1 con probabilidad q, con $p+q=1$. Su trayectoria es un camino zigzagueante del tipo de la representación de la figura 1.

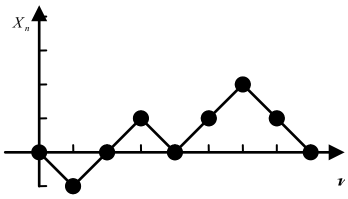


Figura 1

Una formulación disciplinar habitual es la siguiente. Si ξ_n es el n-ésimo paso o desplazamiento de la partícula

$$\xi_n = \begin{cases} +1 \text{ si la partícula se mueve un paso hacia la derecha} \\ -1 \text{ si la partícula se mueve un paso hacía la izquierda} \end{cases}$$

$$P(\xi_n = +1) = p \qquad \wedge \qquad P(\xi_n = -1) = q$$

Siendo las ξ_n variables aleatorias independientes y *p+q=1*. Como denotamos X_0 su posición inicial, la posición en el instante n (es decir, tras n pasos) es:

$$X_n = X_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_n \qquad (1)$$

De hecho $X_n - X_0$ es una suma de variables aleatorias independientes de Bernoulli.
Si la partícula da sólo k pasos y queremos responder la pregunta: ¿Cuál es la media y la varianza de la posición de la partícula respecto del punto de partida?
Supondremos primeramente que $X_0 = 0$, es decir que la partícula parte del origen de coordenadas. Es claro que si la partícula puede dar sólo k pasos en total la posición final de la partícula puede llegar a una distancia máxima de k unidades a la izquierda o a la derecha. Ya que $X_0 = 0$ por lo tanto sustituyendo en (1) *n* por *k,* la posición de la partícula después de *K* pasos se puede expresar con la variable aleatoria X_k:

$$X_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$$

Luego la posición esperada respecto del punto de partida se podría calcular usando la propiedad lineal de la esperanza: $E(X_k) = E(\xi_1) + \ldots + E(\xi_k)$ donde:

$$E(\xi_i) = P(X_i = 1) - P(X_i = -1) = p - q \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,k\} \tag{2}$$

Por lo tanto: $E(X_k) = k(p - q)$

Del mismo modo se puede calcular varianza de la posición respecto del punto de partida:

$V(X_k) = V(\xi_1 + \ldots + \xi_k) = V(\xi_1) + \ldots + V(\xi_k)$ (por ser las variables aleatorias ξ_i independientes) y como:

$$V(\xi_i) = (p + q) + (p - q)^2 = 1 + (p - q)^2 = 4pq \quad \text{para todo } \xi_i \tag{3}$$

Por lo tanto $V(X_k) = k4pq$

Para el caso particular que p=q=1/2 (caminata aleatoria simétrica) obtenemos $E(X_k) = 0$ y $V(X_k) = k$.

Si consideramos $X_0 = y \neq 0$, es decir que la partícula no parte del origen de coordenadas, la posición de la partícula después de *K* pasos se puede expresar con la variable aleatoria X_k:

$$X_k = y + \xi_1 + \ldots + \xi_k$$

Luego la posición esperada respecto del punto de partida se podría calcular usando la propiedad lineal de la esperanza,

$$E(X_k) = y + E(\xi_1) + \ldots + E(\xi_k)$$

Por (2) $E(X_k) = y + k(p - q)$

$V(X_k) = V(X_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_k) = V(\xi_1) + \ldots + V(\xi_k)$ Esto es por ser las variables aleatorias ξ_i independientes, además como la varianza es invariante por traslación y usando el resultado (3). Luego $V(X_k) = k4pq$.

Descripción matricial del problema
Llamaremos *matriz de transición* a una matriz estocástica $P \in M_{nxn}$ (conjunto de matrices de n filas y n columnas) que cumple con las siguientes condiciones,

1) $\forall i, j \in \{1,2,...n\}, \quad p_{ij} \geq 0$

2) $\forall i \in \{1,2,...n\}, \quad \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{p}} p_{ij} = 1$

Sea X_n la posición de una partícula en el instante *n* y definamos $I = \{\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_\mathrm{n}\}$, donde *I* puede ser un conjunto finito o infinito de enteros. En el esquema de una partícula móvil *I* representa el conjunto de estados o posiciones de la partícula en cada instante. Definiremos los elementos de la matriz *P* como: $p_{ij} = P\left(X_n = \mathrm{E}_\mathrm{j} \middle| X_{n-1} = \mathrm{E}_\mathrm{i}\right) = P\left(X_1 = \mathrm{E}_\mathrm{j} \middle| X_0 = \mathrm{E}_\mathrm{i}\right)$ es decir en términos de probabilidad el elemento p_{ij} lo interpretaremos como la probabilidad de que la partícula pase del estado *i*, en el paso *n-1*, al estado *j*, en el paso *n.* Como vemos estas probabilidades son independientes de *n,* lo que llamaremos homogeneidad temporal de las probabilidades de transición (Kai Lai Chung, 1983, p.295).

Se podría demostrar que el proceso estocástico del movimiento de la partícula se puede modelar mediante un sistema de ecuaciones en diferencias, $u^n = u^{n-1}P \quad \forall n \geq 1$, donde *P,* es una matriz estocástica de transición (Feller, 1991). Cada $u^n = (\, u_1^n \; u_2^n \ldots.. u_n^n)$ es un vector fila que llamaremos vector de probabilidades absolutas y cada una de sus componentes u_i^n con $i \in \{1,2,...n\}$, representa la probabilidad (incondicional) de que el proceso se encuentre en cada estado luego del tiempo *n, es decir* $u_i^n = P(X_n = \mathrm{E}_\mathrm{i})$. En particular, si la partícula parte del estado fijo E_h, el vector fila u^0 tiene componentes: $u_h^0 = 1$.
y $u_j^0 = 0 \forall j \neq h$ con $j \in \{1,2,...n\}$.

Luego: $u^1 = u^0 P$

$u^2 = u^1 P = u^0 PP = u^2 P^2$

En general, por inducción, considerando $P^0 = I$, se obtiene:

$u^n = u^0 P^n$

Los elementos de u^n por lo tanto son: $u_i^n = \sum_{j=1}^{n} u_j^0 p^n{}_{ji} \;\forall i \in \{1,2,...n\}$ (Feller, 1991,p.384).

La matriz P^n es también una matriz estocástica y sus elementos se definen como:
$p^n{}_{ij} = P\left(X_n = \mathrm{E}_\mathrm{j} \middle| X_0 = \mathrm{E}_\mathrm{i}\right) \;\forall i, j \in \{1,2,...n\}$ (Kai Lai Chung, 1983, p.297).

Además si la partícula parte del estado E_h Los elementos de u^n coinciden con los elementos de la fila *h* de P^n *además* $u^n = (p(X_n = \mathrm{E}_1), \ldots.. p(X_n = \mathrm{E}_\mathrm{n}))$ (Feller, 1991,p.384).
Luego para calcular la esperanza y la varianza de la posición de la partícula después de n pasos, se deben efectuar los siguientes cálculos:

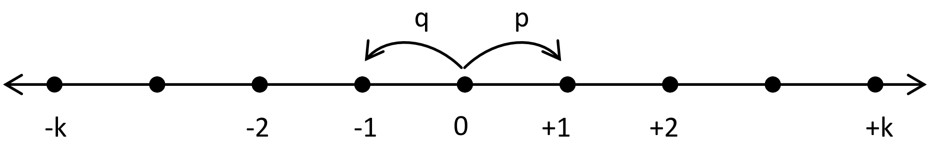
$$E(X_n) = \sum_{i \in I} \mathrm{E_i} \times p(X_n = \mathrm{E_i}) = \sum_{i \in I} \mathrm{E_i} \times u_i^n$$

$$E(X_n^2) = \sum_{i \in I} \mathrm{E_i^2} \times p(X_n = \mathrm{E_i}) = \sum_{i \in I} \mathrm{E_i^2} \times u_i^n$$

$$V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2$$

EJEMPLO 1

Supongamos que la partícula parte inicialmente del origen de coordenadas, es decir $X_0 = 0$ y se mueve aleatoriamente, de a un paso por vez, hacia la izquierda con probabilidad *q* o hacia la derecha con probabilidad *p*. Supongamos además que *p+q=1*. Es claro que si la partícula puede dar sólo k pasos en total la posición final de la misma puede llegar a una distancia máxima de *k* unidades a la izquierda o a la derecha. En este proceso la partícula cambia de un estado a otro en dos tiempos consecutivos de acuerdo con las probabilidades de transición que se muestran en la Figura 2 válidas para cualquier *n* y para cualesquiera enteros *i* y *j*.



A modo de ejemplo consideremos el problema de la partícula móvil para el caso particular en que la misma puede dar sólo dos pasos en total, es decir $k = 2$ y además supongamos $X_0 = 0$. Luego las posiciones o estados intermedios que puede ir ocupando la partícula a medida que se desplaza en cada instante las denotamos con:
$I = \{-2, -1, 0, +1, +2\} = \{\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3, \mathrm{E}_4, \mathrm{E}_5\}$.

Por lo tanto la matriz estocástica de transición toma el aspecto:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En cada uno de los estados E_2, E_3, E_4 las transiciones son posibles a cada uno de los estados de la derecha y de la izquierda (con $p_{i(i+1)} = p$ y $p_{i(i-1)} = q$). Sin embargo, no hay ninguna transición posible desde E_1 o E_5 hasta ningún otro estado, el sistema puede moverse de un estado a otro pero una vez que llega a E_1 o E_5, la partícula no se mueve más (Estados absorbentes).
Además elegimos como distribución inicial de partida de la partícula al vector: $u^0 = (0,0,1,0,0)$ ya que la partícula parte del 0, que corresponde a E_3.
Luego obtenemos: $u^2 = u^0 P^2$

Siendo, $$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & pq & 0 & p^2 & 0 \\ q^2 & 0 & 2pq & 0 & p^2 \\ 0 & q^2 & 0 & pq & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y cómo $u^0 = (0,0,1,0,0) \quad \Rightarrow u^2 = \left(q^2, 0, (2pq), 0, p^2\right)$

Como vemos $u^2 = \left(q^2.0, (2pq), 0, p^2\right)$ **coincide con la fila central de la matriz P^2** y como u^2 es un vector fila en el que cada una de sus componentes representan las probabilidades de que el proceso se encuentre en cada estado $\mathrm{E_i} \in I$ luego de dos pasos,

Tenemos que, $u_i^2 = p(X_2 = \mathrm{E_i})\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$

Para poder responder la pregunta de interés ¿Cuál es la media y la varianza de la posición de la partícula respecto del punto de partida?, debemos realizar los siguientes cálculos:

$$E(X_2) = \sum_{i \in I} i \times p(X_2 = \mathrm{E_i}) = \sum_{i=1}^{5} (i-3) \times u_i^2 = -2 \times q^2 + 2 \times p^2 = 2(q^2 - p^2) = 2(q-p)$$

$$E(X_2^2) = \sum_{i \in I} i^2 \times p(X_2 = \mathrm{E_i}) = \sum_{i=1}^{5} (i-3)^2 \times u_i^2 = 4 \times q^2 + 4 \times p^2 = 4(q^2 + p^2)$$

Y como $V(X_2) = E(X_2^2) - E^2(X_2)$,

Luego $V(X_2) = 4(q^2 + p^2) - 4(q-p)^2 = 8pq$

Si consideramos que $X_0 = y \neq 0$. Luego el conjunto de estados o posiciones que puede ocupar la partícula paso a paso es: $I = \{y-2, y-1, y, y+1, y+2\}$ y la matriz estocástica de transición *P* sería la misma que cuando $X_0 = 0$. Elegimos como distribución inicial de partida de la partícula al vector: $u^0 = (0,0,1,0,0)$ ya que la partícula parte de $X_0 = y \neq 0$, que corresponde también a la tercera fila de la matriz *P* de transición. Si $H = \{-2,-1,0,+1,+2\}$, luego

$$E(X_K) = \sum_{i \in H} (i+y) \times u_{i+3}^2 = (-2+y) \times q^2 + y \times (2qp) + (2+y) \times p^2$$ ya que $u^2 = \left(q^2.0, (2pq), 0, p^2\right)$

$$E(X_K^2) = \sum_{i \in H} (i+y)^2 \times u_{i+3}^2 = (-2+y)^2 \times q^2 + y^2 \times (2qp) + (2+y)^2 \times p^2$$

Y luego: $V(X_K) = E(X_K^2) - E^2(X_K)$

Para el caso, *p=1/2* y *q=1/2* por ejemplo se puede obtener $E(X_K) = y \quad V(X_K) = 2$

CONCLUSIONES

Esta propuesta nos parece oportuna para alumnos que estén cursando probabilidades como una aplicación de las operaciones con matrices que están estudiando paralelamente en Matemática C.

Este trabajo nos parece importante ya que desde la perspectiva de las teorías didácticas de la enseñanza, Duval (1998) sostiene que para la comprensión de un concepto es necesario

coordinar al menos dos registros de representación y que la coordinación no se da espontáneamente en los sujetos, se les debe proponer tareas específicas que las favorezcan.
Para responder la pregunta: ¿cuál es el número medio de retornos de la partícula al punto de partida?, la propuesta didáctica se podría desarrollar de un modo similar.

BIBLIOGRAFÍA

Chung, K.L. (1983). *Teoría elemental de la probabilidad y de los procesos estocásticos.* Barcelona, España: Editorial Reverté.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 101-120). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Feller, W. (1991). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones.* México: Editorial Limusa.