

# CORRELACIONES E INFORMACIÓN CUÁNTICA CON FOTONES

L. Rebón<sup>1,2,3,\*</sup>, A. Boette<sup>1,2,3</sup>, N. Gigena<sup>1,2,3</sup>, R. Rossignoli<sup>1,2,3,4</sup>, A. Roig<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP

<sup>2</sup>Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP

<sup>3</sup>Instituto de Física de La Plata-CONICET, Diagonal 113 y calle 63 C.P.1900

<sup>4</sup>Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC)

\*lorena.rebon@ing.unlp.edu.ar

## 1 Introducción

En un principio, la Teoría de la Información [1] fue concebida en forma abstracta, en base a una formulación matemática. Sin embargo, la habilidad y eficiencia para procesar o transmitir información dependerá en última instancia del sistema físico elegido para codificar esa información. Es así que, al codificar la información en las propiedades físicas de sistemas cuyo comportamiento se describe por las leyes de la mecánica cuántica, se abren nuevas posibilidades que son irrealizables clásicamente. Entre ellas, la posibilidad de generar algoritmos cuánticos para ciertos cálculos que requieren un número de pasos significativamente menor que cualquier algoritmo clásico, reduciendo su complejidad [2], o mantener comunicaciones seguras sin importar las capacidades tecnológicas de un potencial espía [2, 3]. Entre las características fundamentales de la mecánica cuántica que posibilitan estos desarrollos, sobresalen el principio de superposición y el entrelazamiento cuántico, el cual denota un tipo de correlaciones, sin análogo clásico, que pueden exhibir los sistemas cuánticos compuestos [4, 5]. Una de las implementaciones más accesibles para la comunicación cuántica y el procesamiento cuántico de la información emplea fotones individuales como portadores de la información. Estos pueden viajar entre dos estaciones distantes siendo poco afectados por el ruido que introduce el entorno. Además, poseen varios grados de libertad en los cuales es posible codificar la información y pueden manipularse con un alto grado de control utilizando tecnología estándar.

En este trabajo se describen algunas aplicaciones de la implementación fotónica, realizadas en colaboración con el Laboratorio de Procesado de Imágenes (LPI) del Depto. de Física de la UBA. En primer lugar, se describe la determinación experimental de medidas de correlaciones cuánticas en estados no puros de un par de fotones correlacionados en polarización [6], mediante técnicas de tomografía de estados cuánticos [7, 8]. Luego se describe la utilización de moduladores espaciales de luz programables para entrelazar la polarización con grados de libertad espaciales, y así poder simular los denominados estados historia de evoluciones temporales cuánticas [9, 10, 11]. Se muestra que este último es un esquema eficientemente para el cálculo de promedios temporales de los observables del sistema [12].

## 2 Determinación de Medidas de Correlaciones Cuánticas

El objetivo es determinar experimentalmente ciertas medidas de cuanticidad de las correlaciones en estados de dos fotones correlacionados en polarización [6]. Los estados son mezclas

de estados alineados, los cuales pueden ser simulados fielmente mediante sistemas fotónicos y óptica lineal [13]. Estos estados emergen naturalmente en diferentes sistemas físicos, en particular como estados reducidos de dos espines en el estado fundamental de cadenas de espines con acoplamientos de Heisenberg [14, 15]. El estado es de la forma

$$\rho_{AB} = p|\theta\theta\rangle\langle\theta\theta| + q|-\theta-\theta\rangle\langle-\theta-\theta|, \quad (1)$$

donde  $|\theta\theta\rangle\langle\theta\theta| \equiv |\theta\rangle\langle\theta| \otimes |\theta\rangle\langle\theta|$ , con  $|\pm\theta\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle \pm \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$  estados puros de un qubit formando ángulos  $\pm\theta$  con el eje  $z$  en la esfera de Bloch, y  $p \in [0, 1]$ ,  $q = 1 - p$  las probabilidades de preparar a ambos qubits en los estados  $|\theta\rangle$  y  $|-\theta\rangle$  respectivamente. El estado (1) no es entrelazado pero sí *cuánticamente correlacionado*, y la cuantificación de sus correlaciones puede medirse por medio de cuantificadores tales como la *discordia cuántica* [16, 17, 18], definida como la mínima diferencia entre dos versiones cuánticas de la entropía condicional o información mutua, y la discordia geométrica [17, 19], relacionada con la mínima diferencia entre purezas globales, antes y después de una medida local. Estas cantidades serán nulas en el caso de estados ortogonales ( $\langle-\theta|\theta\rangle = 0$ ,  $\theta = \pi/2$ ), en el que  $\rho_{AB}$  es clásicamente correlacionado [19].

El estado (1) puede generarse usando una fuente que emita un par de fotones en el mismo estado de polarización, por ejemplo, por Conversión Paramétrica Espontánea Descendente (SPDC) producida en cristales no lineales tipo I [20, 21], de manera que

$$|\pm\theta\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|V\rangle \pm \sin\frac{\theta}{2}|H\rangle \quad (2)$$

son estados linealmente polarizados en ángulos  $\pm\theta/2$  con la dirección vertical. Aquí  $|V\rangle \equiv |0\rangle$ ,  $|H\rangle \equiv |1\rangle$  denotan los estados linealmente polarizados en dirección vertical y horizontal.

El estado reducido de cada uno de los qubits (o fotones) es  $\rho_{A(B)} = p|\theta\rangle\langle\theta| + q|-\theta\rangle\langle-\theta|$ , y es un estado mezcla con pureza  $P_B = P_A = \text{Tr} \rho_A^2 = 1 - 2pq \sin^2\theta$ . Consideremos ahora una medida de polarización sobre el fotón  $B$ , definida por los proyectores ortogonales  $\Pi_+ = |\phi\rangle\langle\phi|$ ,  $\Pi_- = |\phi + \pi\rangle\langle\phi + \pi|$ . El estado condicional  $\rho_{A/B_{\pm}} \propto \text{Tr}_B [\rho_{AB} \mathbb{1} \otimes \Pi_{\pm}]$  del fotón  $A$  luego de una medida con resultado  $\pm$  en  $B$ , tendrá la misma forma anterior pero con probabilidades *modificadas*  $p'_{\pm}(\phi)$ ,  $q'_{\pm}(\phi)$ , que dependen tanto del ángulo de medida  $\phi$  como del resultado  $\pm$  de la misma [6]. La pureza condicional *promedio* de  $A$  [22] es entonces  $P_{A/B_{\phi}} = r_+ P_{A/B_+} + r_- P_{A/B_-}$ , con  $r_{\pm} = \text{Tr} \rho_B \Pi_{\pm}$  la probabilidad de obtener el resultado  $\pm$ , y depende de  $\theta$  y  $\phi$ . La máxima pureza condicional  $P_{A/B} = \text{Max}_{\phi} P_{A/B_{\phi}}$  determina la entropía condicional cuadrática mínima  $S_2(A/B) = 2(1 - P_{A/B})$ , y así la discordia cuántica  $D(A|B)$ , que en este caso es una función de la pureza condicional máxima [6]. En forma similar puede calcularse la discordia geométrica.

El **arreglo experimental**, diseñado e implementado en colaboración con el LPI [6], se ilustra en la figura 1 y puede dividirse en tres etapas. En la primera, en donde se prepara el estado, un cristal no lineal (LiIO<sub>3</sub>) de tipo I es bombeado por un láser de  $405\text{nm}$  polarizado horizontalmente, el cual, mediante el proceso de SPDC, produce pares de fotones idénticos con longitud de onda  $\lambda = 810\text{nm}$  en el estado de polarización  $|VV\rangle$ . Una lámina de media onda (HWP<sub>1</sub>) es utilizada para rotar la polarización de cada fotón a una dirección arbitraria  $\theta_L$  en el referencial del laboratorio, donde  $\theta_L = 0$  corresponde a fotones verticalmente polarizados. Este ángulo define el estado  $|\theta\rangle$  en la esfera de Bloch por medio de la relación  $\theta = 2\theta_L$ . Para generar el estado mezcla descrito por la ecuación (1), seguimos la idea presentada en [23], alternando aleatoriamente HWP<sub>1</sub> entre los dos ángulos  $\theta_L/2$  y  $-\theta_L/2$  para obtener una mezcla de las dos polarizaciones deseadas con probabilidades  $p$  y  $q$ .

En la segunda parte del *setup* una medida proyectiva de polarización se realiza sobre uno de los subsistemas. Con este fin, se posiciona un polarizador lineal (P<sub>1</sub>) en el camino  $B$ , con su eje de transmisión orientado a un ángulo  $\phi_L$  o  $\phi_L + \pi/2$  en el sistema del laboratorio. Este implementa la acción de los proyectores  $\Pi_{\pm}$  sobre el estado de un qubit. Luego la luz se colecta en el detector  $D_B$ , constituido por un iris que actúa como filtro espacial y un filtro de interferencia centrado en  $810\text{nm}$  (ancho de banda  $10\text{nm}$ ), seguido por una lente que colecta la luz y la enfoca en una fibra óptica multi modos acoplada a un módulo contador de fotones

PerkinElmer SPCM-AQRH-13-FC. Durante el tiempo total  $T$  en el que  $P_1$  se se orienta según el ángulo  $\phi_L(\phi_L + \pi/2)$ ,  $D_B$  mide el número de eventos  $n_+(n_-)$ . Entonces, las probabilidades  $r_{\pm}$  de medir  $+ o -$  en la dirección  $\phi$ , se obtienen del cociente  $n_{\pm}/(n_+ + n_-)$ .

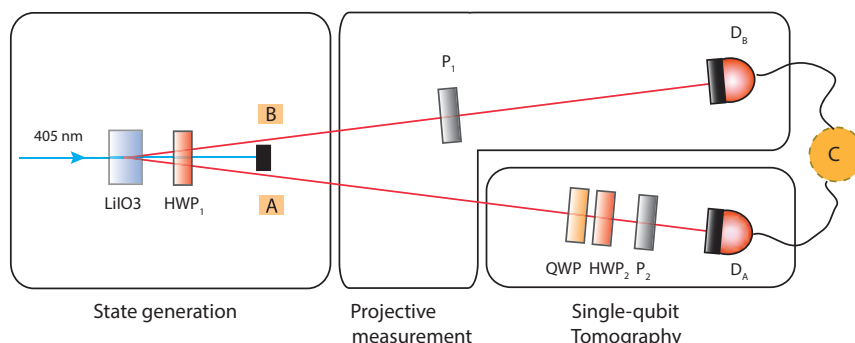


Figura 1: Arreglo experimental usado para la preparación de una estado mezcla de polarización de dos qubits, y la caracterización del estado del qubit  $A$  condicional a la medida proyectiva en  $B$ . QWP: lámina de cuarto de onda; HWP: lámina de media onda; P: polarizador lineal; D: detector de fotones individuales.

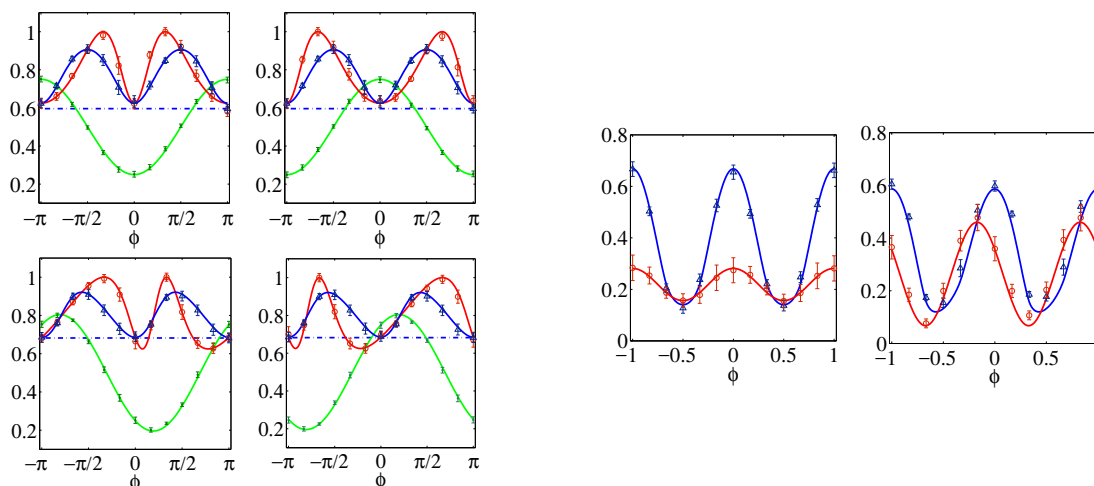


Figura 2: Resultados experimentales para el estado (1) con  $\theta = \pi/3$ . En los 4 paneles de la izquierda, se muestran resultados para la pureza  $P_{A/B_{\pm}}$  (círculos rojos) del estado del fotón  $A$  tras obtener el resultado  $-$  (izquierda) o  $+$  (derecha) en el fotón  $B$ , la probabilidad  $r_{\pm}$  de obtener tal resultado (puntos verdes), y la pureza condicional promedio  $P_{A/B_{\phi}}$  (triángulos azules), para  $p = 0.5$  (arriba) y  $p = 0.7$  (abajo), en función del ángulo de medida  $\phi$ . Las curvas sólidas indican los valores teóricos de estas cantidades y la línea de trazos la pureza local  $P_A$  en el estado inicial. Derecha: Resultados para la discordia cuántica  $D(A|B_{\phi})$  (triángulos azules) y geométrica  $I_2(A|B_{\phi})$  (círculos rojos) en función del ángulo de medida  $\phi$  para  $p = 0.5$  (izquierda) y  $p = 0.7$  (derecha). Las curvas sólidas indican los valores teóricos.

Finalmente, la tercera etapa del *setup* se usa para realizar una tomografía completa del estado del qubit  $A$ . Un arreglo de una lámina de cuarto de onda (QWP), una de media onda (HWP<sub>2</sub>), y un polarizador lineal (P<sub>2</sub>) en el camino del subsistema se utilizan para proyectar el estado de polarización sobre el conjunto informacionalmente completo de bases mutuamente no segadas [24], antes de ser detectado por  $D_A$ . Este detector consiste de los mismos componentes que  $D_B$ . Las medidas se realizan en coincidencia, usando el subsistema  $B$  como disparador. De esta forma es posible reconstruir el estado reducido condicional  $\rho_{A/B_{\pm}}$  de  $A$  tras obtener el resultado  $\pm$  en la dirección  $\phi$  en  $B$ . Obtenido el estado  $\rho_{A/B_{\pm}}$ , la pureza  $P_{A/B_{\pm}}$  a partir de la cual se computan los cuantificadores de correlaciones cuánticas de interés, se calcula como  $\text{Tr} \rho_{A/B_{\pm}}^2$ . Aunque  $P_{A/B_{\pm}}$  puede obtenerse realizando una medida de interferencia,

el *setup* usado permite determinar completamente el estado condicional tras la medida local.

La calidad del proceso de preparación se cuantificó mediante la fidelidad [2] entre la matriz densidad del estado que se busca preparar y aquella del estado efectivamente preparado y reconstruido por tomografía. En todos los casos, se obtuvieron fidelidades  $F > 0.98$ . Los gráficos de la figura 2 [6] muestran, para dos estados iniciales diferentes, resultados experimentales para distintas cantidades en función del ángulo de medida  $\phi$ , que exhiben en todos los casos un excelente acuerdo con las predicciones teóricas, también mostradas en la figura. En los paneles de la izquierda se muestran las perezas condicionales y otras cantidades afines mientras que en los de la derecha las discordias cuántica  $D(A|B_\phi)$  y geométrica  $I_2(A|B_\phi)$ , cuyos valores mínimos como función del ángulo de medida  $\phi$  determinan las verdaderas discordias  $D(A|B)$  e  $I_2(A|B)$  independientes de la medida. Como mencionamos anteriormente, estas dos cantidades pueden obtenerse a partir de las perezas globales y condicionales, y son estrictamente nulas en todo estado producto o clásicamente correlacionado. Nuestros resultados corroboran entonces la existencia de efectos cuánticos en las correlaciones del estado (1).

### 3 Estados Historia de Evoluciones Temporales

En Mecánica Cuántica, el estado (puro) de un sistema físico en un cierto tiempo  $t$  queda determinado por un vector en un espacio vectorial complejo, que denotaremos como  $|S_t\rangle$ . Este vector evoluciona en forma unitaria según la ecuación de Schrödinger,  $-i\hbar\partial_t|S_t\rangle = H|S_t\rangle$ , donde  $H$  es el Hamiltoniano del sistema. Así, el tiempo en la mecánica cuántica estándar es un parámetro “clásico”. En [9, 10] hemos introducido, a partir del modelo continuo de Page y Wootters [11, 25], un modelo puramente cuántico y discreto de tiempo en el que el mismo emerge de un estado entrelazado sistema-reloj, es decir de las correlaciones cuánticas entre el sistema físico y un segundo sistema cuántico que actúa como reloj de referencia. Este estado se denomina estado historia del sistema y superpone los estados del sistema a distintos tiempos en un estado global entrelazado:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_t |S_t\rangle|t\rangle \quad (3)$$

donde  $\{|t\rangle, t = 0, \dots, N-1\}$  es una base ortonormal de estados del sistema reloj  $T$ . El estado del sistema al tiempo  $t$  se recupera entonces como  $\langle t|\Psi\rangle$ , es decir, por medio de una medida en el reloj en la base anterior. Luego, si el estado historia satisface la ecuación de Wheeler-DeWitt [11, 26]  $\mathcal{J}|\Psi\rangle = 0$ , con  $\mathcal{J} = H \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_T$ ,  $|S_t\rangle$  satisface automáticamente la ecuación de Schrödinger en el límite continuo [10, 11]. Por otro lado, si  $e^{-i\mathcal{J}} = \sum_t U_{t,t-1}|t\rangle\langle t-1|$  con  $U_{t,t-1}$  unitaria,  $|S_t\rangle$  evoluciona unitariamente en forma discreta:  $|S_t\rangle = U_{t,t-1}|S_{t-1}\rangle = U_t|S_0\rangle \forall t$  [10].

El entrelazamiento del estado historia (3) es una medida de la evolución *distinguishible*: Si todos los estados  $|S_t\rangle$  son ortogonales,  $|\Psi\rangle$  es *máximamente entrelazado*, mientras que si todos los estados  $|S_t\rangle$  son proporcionales (estado estacionario), el entrelazamiento es *nulo*. La entropía de entrelazamiento sistema-tiempo [9, 10],

$$E(S, T) = S(\rho_S) = S(\rho_T), \quad (4)$$

donde  $\rho_{S(T)} = \text{Tr}_{T(S)}|\Psi\rangle\langle\Psi|$  son los estados reducidos (del sistema y reloj) y  $S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log_2 \rho$ , es nula para estados estacionarios y máxima ( $= \log_2 N$ ) para los estados de evolución “máxima”. Así,  $2^{E(S, T)}$  es una medida del número de estados distinguishibles visitados por el sistema.

Una ventaja del modelo discreto es que es *simulable* en el laboratorio: el estado historia puede generarse por medio del circuito cuántico mostrado en la figura 3. En particular, el formalismo permite una evaluación eficiente de promedios temporales de observables  $O$ , por medio de una *única* medida en el sistema, sin necesidad de realizar medidas en todos los tiempos:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{N} \sum_t \langle S_t|O|S_t\rangle = \langle \Psi|O \otimes \mathbb{1}|\Psi\rangle. \quad (5)$$

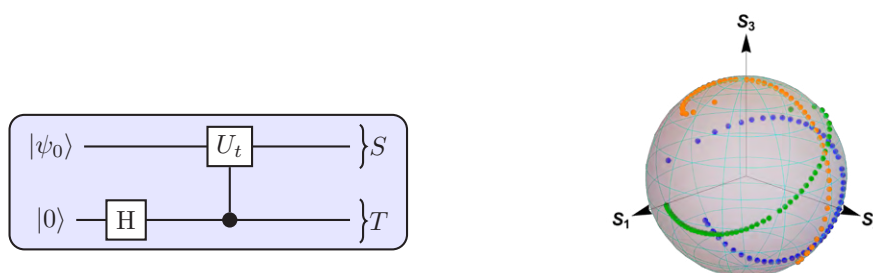


Figura 3: Izquierda: Circuito esquemático que representa la generación del estado puro sistema-tiempo (3). La compuerta control lleva a cabo la operación  $U_t$  en  $S$  si  $T$  está en el estado  $|t\rangle$ , mientras que la compuerta Hadamard  $H$  crea la superposición  $\propto \sum_{t=0}^{N-1} |t\rangle$ . Derecha: Evolución de la polarización del fotón como trayectorias en la esfera de Bloch, para tres estados “semilla”  $|S_0\rangle$  distintos.

A continuación se discute una implementación fotónica del estado historia, desarrollada en el LPI. Se utilizó el momento lineal transversal de fotones individuales para representar al tiempo  $|t\rangle$  del sistema cuántico reloj  $T$ , y su polarización lineal para codificar al estado  $|S_t\rangle$  del sistema cuántico  $S$ .

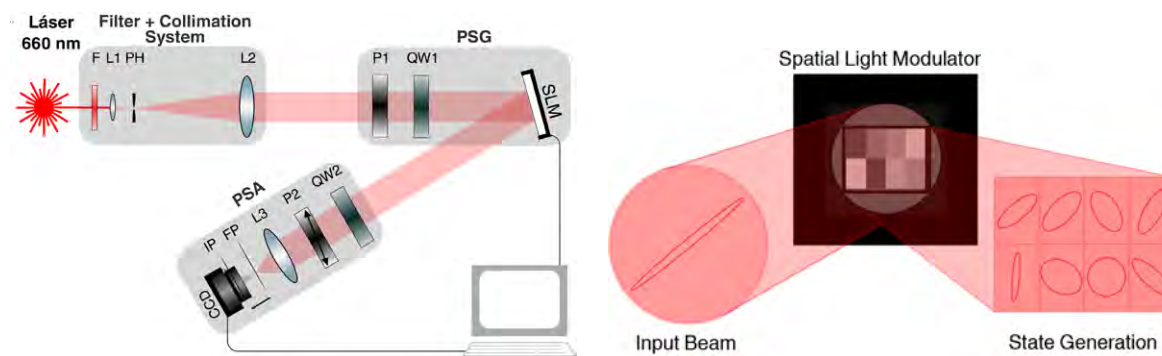


Figura 4: Generación y caracterización de estados historia.

El **arreglo experimental** para simular evolución cuántica paralelizada en el tiempo se muestra en la figura 4. Se utiliza un láser de estado sólido de 660nm, el cual es filtrado y colimado de forma tal de incidir sobre un modulador espacial de luz (SLM) programable con una onda plana cuya fase y amplitud son aproximadamente constantes sobre la región de interés. Este SLM está compuesto por una pantalla de cristal líquido que actúa por reflexión, con una resolución espacial de 1024x768 píxeles. La misma permite modificar dinámicamente el frente de onda del haz incidente píxel a píxel, y junto con un polarizador (P1) y una lámina de cuarto de onda (QW1) que definen el estado de polarización inicial, se emplea para representar al estado historia  $|\Psi\rangle$ . En la segunda parte se utiliza un analizador de polarización para la caracterización del SLM como un generador de estados de polarización. Para más detalles véase [12].

Una vez caracterizado el SLM, el mismo sistema se empleó para simular experimentalmente distintos estados historia sistema-tiempo discretos  $|\Psi\rangle$ , y la subsecuente evolución unitaria del estado del sistema,  $|S_t\rangle = U_t|S_0\rangle$ . Por un lado, si se realiza una medida de intensidad en el plano imagen, los valores medios  $\langle S_t|\sigma_\mu|S_t\rangle$  de los operadores de Pauli que describen el estado de polarización variarán dependiendo del voltaje asignado a las distintas regiones  $t$  generadas por el SLM. Luego el promedio de estos operadores dentro de la región de interés será  $\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \langle S_t|\sigma_\mu|S_t\rangle$ . Por otro lado, si se realiza una medida de intensidad en el centro del plano de Fourier, esta contiene la información de todas las regiones espaciales, y el promedio estará dado por  $\langle \Psi|\sigma_\mu \otimes \mathbb{1}|\Psi\rangle$ . Por supuesto, estas dos formas de promedios temporales coinciden (Ec. (5)). Las medidas experimentales realizadas verificaron esta igualdad con muy buena precisión [12]. El presente esquema proporciona así un método eficiente para obtener promedios temporales de la polarización del sistema mediante una única medida.

## 4 Conclusiones

En este trabajo hemos presentado dos implementaciones fotónicas que permiten simular experimentalmente dos sistemas cuánticos de interés. En primer lugar, hemos simulado el estado mezcla (1), el cual surge naturalmente como estado reducido de un par de espines 1/2 en ciertos sistemas y modelos, mediante fotones correlacionados en polarización. A través de medidas en coincidencia y técnicas de tomografía de estados cuánticos, se logró determinar experimentalmente distintos cuantificadores de correlaciones cuánticas, obteniendo un excelente acuerdo con las predicciones teóricas y corroborando la presencia de cuanticidad en las correlaciones.

En segundo lugar, hemos introducido una implementación óptica de un modelo de evolución cuántica discreta paralelizado en el tiempo. El esquema permitió la simulación del estado historia de un qubit por medio del uso de moduladores espaciales de luz programables, que permiten controlar en forma coherente la polarización de la función de onda transversal de un fotón. Se implementó además un esquema de medida que constituye un método eficiente para la determinación de promedios temporales. Se prevé generalizar y perfeccionar esta técnicas mediante el empleo de configuraciones con haces múltiples.

## Referencias

- [1] C. E. Shannon, *The Bell System Technical Journal* **27**: 379, 623 (1948).
- [2] M.A. Nielsen, I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ., Press (2000).
- [3] A. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991).
- [4] E. Schrödinger, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **31**, 555 (1935).
- [5] C.H. Bennett, D.P. DiVincenzo, J.A. Smolin, W. K. Wootters, *Phys. Rev. A* **54**, 3824 (1996); G. Vidal, *J. Mod. Opt.* **47**, 355 (2000).
- [6] L. Rebón, R. Rossignoli, J. J. Varga, N. Gigena, N. Canosa, C. Lemmi, S. Ledesma, *J. Phys. B* **49**, 215201 (2016).
- [7] D.F.V. James, P.G. Kwiat, W.J. Munro, A.G. White, *Phys. Rev. A* **64**, 052312 (2001).
- [8] Q. Pears Stefano, L. Rebón, S. Ledesma, C. Lemmi, *Phys. Rev. A* **96**, 062328 (2017).
- [9] A. Boette, R. Rossignoli, N. Gigena, M. Cerezo, *Phys. Rev. A* **93**, 062127 (2016).
- [10] A. Boette, R. Rossignoli, *Phys. Rev. A* **98**, 032108 (2018).
- [11] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, *Phys. Rev. D* **92**, 045033 (2015).
- [12] D. Pabón, S. Bordakevich, C. Lemmi, S. Ledesma, L. Rebón, N. Gigena, A. Boette, R. Rossignoli, enviado para su publicación (2018).
- [13] A. Orioux et al, *Sci. Rep.* **4**, 7184 (2014); Ma. Xiao-Song et. al, *Sci. Rep.* **4**, 3583 (2014).
- [14] R. Rossignoli, N. Canosa, J. M. Matera *Phys. Rev. A* **77**, 052322 (2008); *Phys. Rev. A* **80**, 062325 (2009).
- [15] N. Canosa, R. Rossignoli, J. M. Matera, *Phys. Rev. B* **81**, 054415 (2010).
- [16] H. Ollivier, W.H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* **88** 017901 (2001).
- [17] B. Dakić, V. Vedral and Č. Brukner, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 190502 (2010).
- [18] L. Ciliberti, R. Rossignoli, N. Canosa, *Phys. Rev. A* **82**, 042316 (2010); *Phys. Rev. A* **88**, 012119 (2013).
- [19] R. Rossignoli, N. Canosa, L. Ciliberti, *Phys. Rev. A* **82**, 052342 (2010); *Phys. Rev. A* **84**, 052329 (2011).
- [20] D.C. Burnham, D.L. Weinberg *Phys. Rev. Lett.* **25**, 84 (1970).
- [21] L. Mandel, E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics* (Cambridge Univ. Press, 2013).
- [22] N. Gigena, R. Rossignoli, *Phys. Rev. A* **90**, 042318 (2014); *J. Phys. A* **47**, 015302 (2014).
- [23] E. Amselem, M. Bourennane, *Nat. Phys.* **5**, 748 (2009).
- [24] I.D. Ivanovic, *J. Phys. A* **14**, 3241 (1981); W.K. Wootters, B.D. Fields, *Ann. Phys.* **191**, 363 (1989).
- [25] D.N. Page, W.K. Wootters, *Phys. Rev. D* **27**, 2885 (1983).
- [26] B.S. DeWitt, *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).