

BASES DE WAVELETS B-SPLINES EN EL INTERVALO CON CONDICIONES DE DIRICHLET HOMOGÉNEAS

Lucila D. Calderón^{a,b}, María T. Martín^b y Victoria Vampa^a

^a*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Plata, La Plata, Argentina, cienciasbasicas@ing.edu.ar, <http://www.cienciasbasicas.ing.edu.ar>*

^b*CONICET, La Plata, Argentina, <http://www.laplata-conicet.gov.ar/>*

Palabras clave: B-splines, wavelets, ortogonalidad, número de condición.

Resumen.

La teoría de wavelets se ha estudiado y desarrollado intensamente en los últimos años. Las buenas propiedades de aproximación, localización y soporte compacto que tienen las funciones wavelets, las convierten en una herramienta favorable para el uso en diversos campos de las matemáticas aplicadas, el análisis numérico y la ingeniería. En particular en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales con ciertas condiciones de contorno. Este tipo de problemas requieren bases wavelet en un intervalo acotado en lugar de en toda la recta real. La construcción de bases wavelet en el intervalo ha sido ampliamente discutida en la literatura y se han desarrollado varios enfoques para adaptar wavelets en la recta real al intervalo. En este trabajo proponemos una base de wavelets B-splines que generan un Análisis Multirresolución sobre el intervalo, formadas por wavelets interiores que se obtienen de las traslaciones y dilataciones de una wavelet madre; y wavelets de borde que se obtienen de combinaciones lineales adecuadas de las wavelets interiores. Para diferentes niveles de resolución, las derivadas de estas funciones son ortogonales. Cuando estas bases se aplican en la discretización de ecuaciones diferenciales de segundo orden, utilizando esquemas del tipo Wavelet - Galerkin, conducen a la resolución de sistemas lineales, cuyas matrices son esparcidas y diagonales por bloques. El condicionamiento de estas matrices se obtiene a partir de determinar las constantes de Riesz de las bases. Mostraremos que el número de condición se mantiene acotado independientemente del nivel de aproximación.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, las propiedades multirresolución de las wavelets han sido utilizadas con éxito para aproximar numéricamente la solución de diversos tipos de ecuaciones diferenciales. En estos casos se aplica con frecuencia el método wavelet-Galerkin que conduce a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. A fin de garantizar eficiencia en los cálculos y elevada precisión en las aproximaciones, es importante que la matriz asociada al sistema, conocida como matriz de rigidez, sea rala o esparcida con número de condición pequeño. Así, la elección de la base wavelet a utilizar y los requerimientos sobre la misma, son determinantes de las bondades del método.

Diversas construcciones de bases spline-wavelets cúbicas o multiwavelets sobre intervalo fueron propuestas. En el trabajo de (Jia y Liu, 2006), se diseñaron bases multiwavelets de Hermite adaptadas al intervalo $[0, 1]$. Recientemente, Černá y Finěk (2011, 2015) han propuesto varias construcciones de bases spline-wavelets cúbicas. Para la solución de ecuaciones diferenciales Vampa et al. (2013) aplicaron con buenos resultados bases spline-wavelets cúbicas adaptadas al intervalo, aunque el número de condición de la matriz de rigidez no resulta uniformemente acotado. En este trabajo se propone la construcción de una base spline-wavelets cúbica con soporte compacto y cuyas derivadas primeras son ortogonales entre las distintas escalas. Esto proporciona la ventaja de una matriz de rigidez esparcida cuyo condicionamiento resulta uniformemente acotado.

2. FUNCIONES DE ESCALA B-SPLINES CÚBICAS EN EL INTERVALO

A partir del concepto de Análisis Multirresolución se propone una función de escala.

Definición 1 Un Análisis Multirresolución (AMR) sobre $L^2[0, 1]$ (Chui, 1992) consiste en una colección $V = \{V_j\}_{j \in \mathbb{N}_{j_0}}$ de subespacios cerrados $V_j \subset L^2[0, 1]$ que satisfacen

$$V_{j_0} \subset V_{j_0+1} \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \dots \subset L^2[0, 1] \quad \text{y} \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}_{j_0}} V_j} = L^2[0, 1]. \quad (1)$$

Sea φ_{m+1} , con $m = 3$, la función de escala B-spline cúbica, que puede escribirse de la siguiente forma:

$$\varphi_{3+1}(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6}, & x \in [0, 1] \\ -\frac{x^3}{2} + 2x^2 - 2x + \frac{2}{3}, & x \in [1, 2] \\ \frac{x^3}{2} - 4x^2 - 10x - \frac{22}{3}, & x \in [2, 3] \\ \frac{(4-x)^3}{6}, & x \in [3, 4] \end{cases}. \quad (2)$$

De aquí en adelante y para simplificar la notación $\varphi(x) = \varphi_4(x)$.

Se consideran dos *funciones de borde* presentadas en (Černá y Finěk, 2015): φ_{b1} y φ_{b2} , que son polinomios cúbicos a trozos, cuyas formas explícitas están dadas por:

$$\varphi_{b1}(x) = \begin{cases} \frac{7x^3}{4} - \frac{9x^2}{2} + 3x, & x \in [0, 1] \\ \frac{(2-x)^3}{4}, & x \in [1, 2] \end{cases}, \quad \varphi_{b2}(x) = \begin{cases} -\frac{11x^3}{12} + \frac{3x^2}{2}, & x \in [0, 1] \\ \frac{7x^3}{12} - 3x^2 + \frac{9x}{2} - \frac{3}{2}, & x \in [1, 2] \\ \frac{(3-x)^3}{4}, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

Si $\varphi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$, para cada $j \in \mathbb{Z}$, se definen las familias:

$$\Phi_j^{int} = \{ \varphi_{j,k}(x) : k = 0, 1, \dots, 2^j - 4 \}, \quad \Phi_j^{bord} = \{ \varphi_{b1}(2^j x), \varphi_{b2}(2^j x), \varphi_{b2}(2^j(1-x)), \varphi_{b1}(2^j(1-x)) \} \quad (3)$$

que corresponden a funciones de escala *interiores* y de *borde*, respectivamente.

Ahora, considerando las familias de Ecs. (3), los espacios de escala V_j están determinados por:

$$V_j = \text{span } \Phi_j, \quad \text{donde} \quad \Phi_j = \Phi_j^{int} \cup \Phi_j^{bord}. \quad (4)$$

Es conveniente normalizar $\varphi_{j,k}$ de manera tal que $\|\varphi'_{j,k}\|_{L^2[0,1]} = 1$.

Los espacios V_j , cuya dimensión es $2^j + 1$, constituyen un AMR de $L^2[0, 1]$ (Černá y Finěk, 2011). La estructura de subespacios anidados, generado por el AMR, implica la existencia de complementos, ie. espacios wavelets W_j , tales que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (5)$$

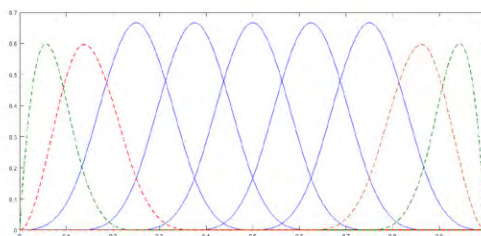


Figura 1: Funciones base del espacio V_3

3. BASES DE WAVELETS EN EL INTERVALO

3.1. Construcción de wavelets interiores

En la sección anterior se definieron la función de escala y los espacios V_j del AMR en $L^2[0, 1]$. En esta sección se van a construir los espacios wavelets W_j , con un requerimiento extra de ortogonalidad. Para ello se define una *wavelet madre* ψ (o generadora), cuyas traslaciones enteras y dilataciones diádicas formen una base para los espacios W_j .

Sean V_0 y V_1 , los espacios generados por las traslaciones de $\varphi(x)$ y $\varphi(2x)$, respectivamente. Si se considera $\psi \in W_0$, y teniendo en cuenta que $V_1 = V_0 \oplus W_0$, se obtiene que $\psi \in V_1$, con lo cual vale la siguiente representación,

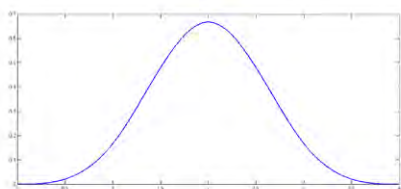
$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \varphi(2x - k). \quad (6)$$

Se deben hallar los coeficientes $\{d(k)\}$ tales que ψ cumpla con el siguiente requerimiento de ortogonalidad, utilizando el producto interno usual de $L_2[0, 1]$:

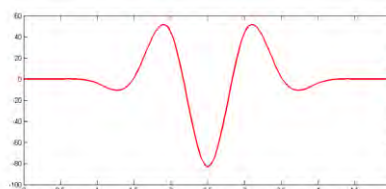
$$\langle \psi'(x), \varphi'(x - l) \rangle = 0, \quad \forall l \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

La wavelet que cumple esta condición está dada por

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^6 d(k) \varphi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{con } d = [1, -28, 119, -184, 119, -28, 1] \quad (8)$$



(a) B-spline cúbica.



(b) Wavelet $\psi(x)$.

Figura 2: Función de escala y wavelet

Una vez determinada la wavelet, que tiene soporte $[0, 5]$ (ver Figura (2b)), es simétrica y además satisface la condición de ortogonalidad requerida, quedan por determinar los espacios W_j .

3.2. Construcción de wavelets de borde

Para poder proponer una base adecuada para los espacios W_j , se consideran dos *wavelets de borde* $\psi_{b1}, \psi_{b2} \in W_0$ que son definidas, en el trabajo de (Černá y Finěk, 2015), como combinación lineal de elementos de V_1 :

$$\psi_{b1}(x) = c_0^{b1}\varphi_{b1}(2x) + c_1^{b1}\varphi_{b2}(2x) + \sum_{k=2}^4 c_k^{b1}\varphi(2x - k + 2) \quad (9)$$

$$\psi_{b2}(x) = c_0^{b2}\varphi_{b1}(2x) + c_1^{b2}\varphi_{b2}(2x) + \sum_{k=2}^6 c_k^{b2}\varphi(2x - k + 2) \quad (10)$$

donde

$$[c_0^{b1}, c_1^{b1}, \dots, c_4^{b1}] = \left[\frac{939}{70}, \frac{-393}{20}, \frac{6233}{560}, -4, 1 \right], \quad [c_0^{b2}, c_1^{b2}, \dots, c_6^{b2}] = \left[\frac{1444}{953}, \frac{1048}{1871}, \frac{-1340}{209}, \frac{545}{48}, \frac{-6839}{655}, 7, -3 \right]$$

Por su construcción, el soporte de ψ_{b1} es $[0, 3]$ y el soporte de ψ_{b2} es $[0, 4]$. Ambas wavelets tienen dos momentos nulos y cumplen la condición de ortogonalidad Ec. (7).

A partir de estas funciones se define el conjunto de *wavelets de borde*:

$$\Psi_j^{bord} = \{ \psi_{b1}(2^j x), \psi_{b2}(2^j x), \psi_{b2}(2^j(1-x)), \psi_{b1}(2^j(1-x)) \}. \quad (11)$$

Notar que si $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, la dimensión de los espacios W_j debe ser 2^j . Con lo cual, una base para estos espacios es:

$$\Psi_j = \Psi_j^{int} \cup \Psi_j^{bord}, \quad (12)$$

donde se denota el conjunto de *wavelets interiores* como,

$$\Psi_j^{int} = \{ \psi_{j,k} : k = 0, 1, \dots, 2^j - 5 \}, \quad \text{con } \psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \text{ para cada } j \in \mathbb{Z} \quad (13)$$

Las funciones del conjunto Ψ_j están normalizadas ($\| \psi'_{j,k} \|_{L_2(0,1)} = 1$).

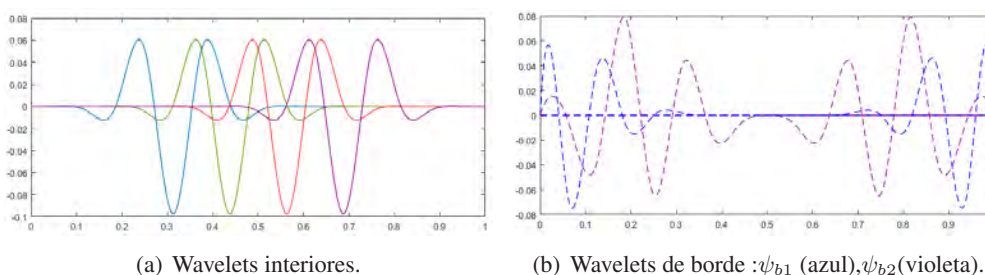


Figura 3: Funciones bases del espacio W_3 .

Observación 1 Teniendo en cuenta la expresión que define a ψ , vemos que $V_{j+1} \supset V_j + W_j$ y además $V_j \cap W_j = \{0\}$. Por lo tanto,

$$\dim(V_j + W_j) = \dim V_j + \dim W_j = 2^{j+1} + 1 = \dim(V_{j+1}). \quad (14)$$

Así, V_{j+1} es suma directa de V_j y W_j . Consecuentemente, para $j_0 \geq 3$

$$V_{j+1} = V_{j_0} + W_{j_0} + W_{j_0+1} \dots + W_j.$$

Además si $v \in V_{j_0}$ y $w_{j_1} \in W_{j_1}$ se cumple que

$$\langle v', w'_{j_1} \rangle = 0 \quad (15)$$

$$\langle w'_{j_1}, w'_{j_2} \rangle = 0 \quad (16)$$

4. APLICACIONES Y RESULTADOS NÚMERICOS

Se presenta en esta sección la aplicación de la base construida en la resolución de un problema diferencial de segundo orden dado por:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

La formulación débil del problema es: hallar $u \in V = H_0^1(0, 1)$ tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V$$

donde

$$a(u, v) = \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x) dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x) dx, \quad u, v \in V.$$

A partir de esta formulación, utilizando el método Wavelet-Galerkin, es posible obtener una aproximación de la solución del problema diferencial, considerando la formulación discreta en un subespacio adecuado de V de dimensión finita, y resolviendo luego un sistema algebraico (Vampa et al., 2013).

De acuerdo a lo desarrollado anteriormente, se propone utilizar el subespacio V_{J+1} cuya base ordenada está formada por unión de las bases definidas en Ec. (4) y (12), esto es,

$$G_J = \{g_1, g_2, \dots, g_{2^{J+1}+1}\},$$

donde $g_i \in \Phi_{j_0}$ para $i = 1, 2, \dots, 2^{j_0} + 1$ y $g_i \in \Psi_j$ para $i = 2^{j_0} + 2, \dots, 2^{J+1} + 1$ y $j = j_0, \dots, J$.

Con esta base para V_{J+1} , la solución aproximada se escribe como, $u_{J+1} = \sum_{i=1}^{2^{J+1}+1} \alpha_i g_i$, y el problema se reduce a calcular α_i , solución del sistema algebraico :

$$\sum_{i=1}^{2^{J+1}+1} \alpha_i a(g_i, g_l) = \langle f, g_l \rangle \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, 2^{J+1} + 1\}$$

o matricialmente

$$K_J \vec{\alpha} = b, \quad \text{con } K_J = (a(g_i, g_l))_{1 \leq i, l \leq 2^{J+1}+1}$$

El número de condición de una matriz invertible A está dado por: $cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$, ($\|\cdot\|$ es una norma matricial).

Se sabe que si la matriz K_J es dispersa y tiene número de condición pequeño y acotado, la resolución del sistema puede realizarse en forma eficiente, con mínimo costo computacional. Estas ventajas son las que presenta la utilización de los espacios y bases del AMR desarrollados en este trabajo, como se verá en los ejemplos a continuación.

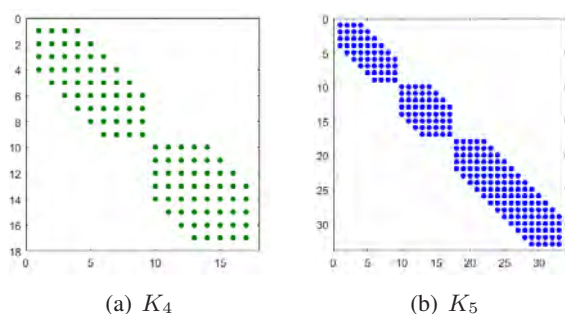


Figura 4: Forma de la matriz K_J del Ejemplo 1 y 2.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

donde $f(x) = 2 + \left(\frac{4}{e^{50} - 1}\right) \left(100^2 e^{50x} \frac{e^{50x}}{e^{50} - 1} - 50^2 \left(1 + \frac{2}{e^{50} - 1}\right) e^{50x}\right)$ y la solución exacta es una función suave con un gradiente alto cerca de $x = 1$.

La matriz de este problema es $K_J = (\langle g'_l, g'_i \rangle)_{1 \leq i, l \leq 2^{J+1}+1}$, ya que $p(x) = 1$ y $q(x) = 0$.

Como consecuencia de la condición de ortogonalidad requerida Ec. (7), la matriz de rigidez resulta diagonal por bloques y además cada bloque es una matriz banda, como se muestra en la Figura (4).

En la Tabla (1) se presentan los errores relativos e_J y número de condición para cada escala J :

J	$e_J = \frac{\ u_{J+1} - u\ }{\ u\ }$	Cond (K_J)
4	4.971×10^{-2}	7.828
5	1.216×10^{-2}	7.828
6	2.732×10^{-3}	7.828

Tabla 1: Resultados numéricos del Ejemplo 1.

J	$e_J = \frac{\ u_{J+1} - u\ }{\ u\ }$
5	6.1402×10^{-1}
6	1.1700×10^{-2}
8	9.4883×10^{-3}

Tabla 2: Resultados numéricos del Ejemplo 2.

Ejemplo 2 Se considera el problema Ec. (18) con $f(x) = (70\pi)^2 \sin(70\pi x) - \pi^2 \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ cuya solución exacta $u(x) = \sin(70\pi x) - \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Es importante destacar que en este segundo ejemplo, a pesar que la solución exacta es muy oscilatoria, se obtuvieron resultados similares a los del primer ejemplo. En la Tabla (2) y en la Figura (5) se muestra la convergencia de las aproximaciones para distintas escalas.

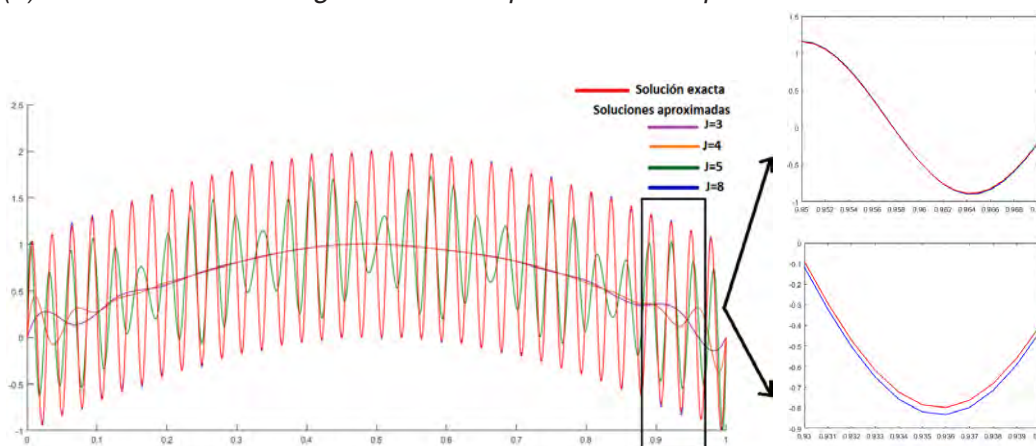


Figura 5: Solución exacta y soluciones aproximadas u_J para $J = 3, 4, 5, 8$ del Ejemplo 2.

5. CONCLUSIONES

La propuesta combina las ventajas numéricas y computacionales de las funciones spline con las capacidades de las wavelets, dentro de la estructura de un Análisis Multirresolución. Esto permite tener espacios sucesivamente refinables para aproximar la solución hasta alcanzar la precisión deseada. Exponemos en este trabajo una novedosa técnica que mejora notablemente la complejidad computacional, ya que la matriz involucrada en el sistema lineal a resolver es diagonal por bloques y se mantiene acotado su número de condición al aumentar la escala.

REFERENCIAS

- Chui C. *An introduction on wavelet Analysis*. Academic Press, 1992.
- Černá D. y Finěk V. Construction of optimally conditioned cubic spline wavelets on the interval. *Advances in Computational Mathematics*, 34:219–252, 2011.
- Černá D. y Finěk V. Wavelet basis of cubic splines on the interval on the hypercube satisfying homogeneous boundary conditions. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 13, 2015.
- Han B. y Michelle M. Derivative-orthogonal Riesz wavelets in Sobolev spaces with applications to differential equations. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2017.
- Jia R. y Liu S. Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval. *Advances in Computational Mathematics*, 25:23–29, 2006.
- Vampa V., Martín M., y Serrano E. A new refinement Wavelet-Galerkin method in a spline local multiresolution analysis scheme for boundary value problems. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 11:1, 2013.