CALCULO DE LAS PERTURBACIONES DE LA ANOMALIA MEDIA Y DEL RADIO VECTOR POR EL METODO DE BOHLIN

Pedro Carlos Rið

Este trabajo tiene por objeto:

1) Calcular las perturbaciones de la anomalía media y del radio vector por el método de Bohlin suponiendo (caso especial del problema de los tres cuerpos) que el planeta perturbador Júpiter y el asteroide no perturbado tengan excentricidades nulas y que ambos planetas se muevan en un plano, tomando como variable independiente a la función:

$$\zeta = A\int_0^t \Delta_0^{-3}\,dt$$

2) Comparar los resultados numéricos obtenidos en el caso particular del asteroide Thule, con los de las tablas de Bohlin.

1) El desarrollo de la función perturbadora es en general una serie rápidamente convergente de la forma:

$$R = \sum B.\cos(K_1\lambda_1 + K_2\lambda_2) + \sum C.\sin(K_1\lambda_1 + K_2\lambda_2)$$

donde k_1 y k_2 son números enteros, λ_1, λ_2 las longitudes medias. Los coeficientes B y C son funciones de los elementos elípticos osculadores a, e, i, ω, θ de ambos planetas.

Para los grandes planetas y algunos asteroides, la utilización del desarrollo anterior no presenta dificultades. Sin embargo, en aquellos casos que la relación $-k_1/k_2$ de ambos números enteros tengan un valor muy próximo a la relación de los movimientos medios diurnos n'/n de ambos planetas, al integrar se introducen pequeños divisores $(k_1 n + k_2 n')$ que originan desigualdades de largos periores, las cuales pueden alcanzar valores considerables.

El cálculo exacto del coeficiente afectado por el pequeño divisor es una tarea complicada que exige el cálculo previo de los términos anteriores que no son directamente útiles.

2) El método de Hansen para el cálculo de perturbaciones de pequeños planetas, cuyas ecuaciones diferenciales empleamos, depende fundamentalmente de la hipótesis de la existencia de una órbita elíptica fija como base cuyos elementos osculadores son conocidos y entonces define los componentes n, δ, z, ν y u, del desplazamiento de su posición en la órbita a su posición perturbada en el espacio. La posición perturbada en el espacio se determina por la solución de la ecuación de Kepler, con la anomalía media perturbada:

$$M_o + n_o(t - t_o) + n\delta z = \bar{E} - e_o \operatorname{sen} \bar{E}$$

que es equivalente a resolver la ecuación de Kepler para el tiempo $t + \delta z$ en lugar de t. La anomalía excéntrica $\bar{E}$ corresponde a la proyección de la posición perturbada sobre la órbita fija plana. En cuanto al radio vector r, su proyección sobre la órbita fija es $a_o(1 - e_o \cos \bar{E})(1 + \nu\ ) = \bar{r}(1 + \nu\ )$. Las perturbaciones de la anomalía media y del rádio vector $n\delta z$ y ν , respectivamente, se expresan en series periódicas cuyos argumentos dependen de las posiciones de ambos planetas, perturbado y perturbador, e implícitamente del tiempo.

3) Si la distancia mútua entre dos de los n cuerpos de un sistema tiende a cero cuando $t \to t_o$, mientras que las distancias mútuas de los restantes (n-2) cuerpos se conservan acotadas inferiormente y se supone nula la acción de los (n-2) cuerpos respecto de los dos primeros, la solución del problema de n cuerpos para $t=t_o$, $(t_o \neq \infty\ )$ presenta la singularidad de una colisión binaria.

En caso de colisiones binarias (reales o imaginarias) y aún de colisiones triples (reales, el caso del movimiento lagrangiano y para valores particulares de las masas m_n y de las constantes de integración), puede intentarse la regularización de la singularidad introduciendo en lugar de t la variable independiente u cuya forma más general, según Sundman y Levi-Civita, es del tipo:

$$A.dt = S(r).du$$

donde A = Constante y $S(r) = S(r_1, r_2, r_3)$ es una función homogenea de primer grado de las tres distancias mutuas. La solución del problema es uniformizada por medio del parámetro u:

$$r_i = r_i(u) \qquad t = T(u) \qquad i = 1,2,3 \qquad -\infty < u < \infty$$

de manera que a cada valor de u corresponde un conjunto de valores de las distancias mutuas.

4) Es la variable independiente ζ regularizadora en el sentido de Sundman y Levi-Civita? No.(*) Pero la variable independiente ζ tiene la propiedad de "absorber" la "singularidad" de carácter práctico que se presenta como consecuencia de la distancia $\Delta_o > 0$ alcanza valores muy pequeños y en cierto modo a causa que $\mu \sim 3/4$ es aproximadamente conmensurable. Cabe destacar que el caso $\mu \sim 3/4$ es más difícil que aquel de $n'/n \sim 1/3$ porque el asteroide está más próximo a Júpiter en el primer caso que en el segundo.

II

1) Para simplificar el problema, suponemos que las órbitas del asteroide y de Júpiter están sobre un mismo plano (inclinación mutua nula) y que ambas órbitas son circulares (excentricidad nula). Δ_o es la distancia mutua entre el asteroide y Júpiter.

$$(1)\ \Delta_o^3 = a'^3 \, (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos H)^{3/2} \qquad a/a' = \alpha < 1$$

*) Por razones de brevedad omitimos la demostración que está ampliamente desarrollada en nuestra tesis,donde seguimos la exposición de

Además: (2) $H = e - e'$ (3) $e = nt + c$ (4) $e' = n't + c'$

donde e y e' son las anomalías excéntricas y c, c' constantes.

Por otra parte: (5) $e' = \mu e - \mu c + c'$

de donde:

(6) $H = (1 - \mu)e + \mu c - c'$ (7) $H = (1-\mu)nt+c-c'$ (8) $\beta dH = de$

(9) $de = n.dt$ (10) $\frac{\beta}{n} dH = dt$

Sea la variable independiente:

$$(11) \quad \zeta = A\int_0^t \Delta_0^{-3}(t)dt$$

y elegida la constante $A = n/\beta$ y efectuado el cambio de variable, resulta:

$$(12) \quad \zeta = \int_{H=H(t_0)}^{H=H(t)} \Delta_0^{-3} . dH$$

Con los valores numéricos de c, c' y μ las expresiones (6) y (7) resultan:

(13) $H = (1 - \mu)e - 3,0466$ (14) $H = (1 - \mu)nt - 2,5261$

y la integral (12), tomado el valor numérico del límite inferior para $t = 0$:

$$(15) \quad \zeta = \int_{-2,5261}^{H} \Delta_0^{-3}(H).dH$$

2) Para calcular la integral (15), desarrollamos Δ_0^{-3} en una serie trigonométrica cuyos coeficientes de Laplace han sido tabulados por Brown-Brouwer en "Tables for the development of the disturbing functions":

$$\zeta = \text{Const} + C_0 H + \sum_{n=1} C_n . \operatorname{sen} nH$$

A. Wintner "The Analytical Foundations of Celestial Mechanics" de los resultados y métodos de la teoría de K.F.Sundman.

y haciendo:

$$\zeta^* = \frac{\zeta - Const}{C_o}$$

resulta:

$$(16) \qquad \zeta^* = H + \sum_{n=1} C_n' \cdot sen\, nH$$

3) Del método Hansen-Bohlin, tenemos:

$$(17) \quad e - e . sen\, e = nt + n\delta z + c \qquad r = r_o(1 + \nu) \qquad (18)\ T = \frac{dW}{de}$$

donde n, δ, z y ν son las perturbaciones de la anomalía media y del radio vector, respectivamente, y T es la funcion:

$$(19) \quad T = M'a \frac{\partial \Omega}{\partial \upsilon} + N'a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

donde:

$$\Omega = m' \left(\frac{1}{\Delta_o^3} - \frac{r}{r'^2} \cos H\right)$$

Ahora expresamos la anomalía excéntrica como suma de un término secular más dos términos, una que llamaremos parte irracional y otra que es una constante:

$$(20) \quad e = mH + m\beta(\mu - \mu_o)H + Const.$$

y sea la relación entre μ y μ_o:

$$\mu - \mu_o = -w\mu_o \qquad \mu = \frac{n'}{n}$$

donde w es un parámetro. Como veremos más adelante, H y a serán expresadas como funciones de w. μ_o es el valor numérico de la fracción de dos números enteros más próximos a n' y n.

De lo anterior, resulta: para el caso particular de =3/4

$$(21) \quad e = 4H + \theta + B$$

donde: $\quad -\beta\, w(m - 1)H = \theta \qquad B = Const.$

Del desarrollo $\zeta^* = f(H)$ definido por la (16) hemos obtenido por interpolación gráfica los valores de ζ^* necesarios para hallar el desarrollo de Fourier de la función inversa de la (16), o sea

$H = F(\overline{\zeta^*})$ donde $\overline{\zeta}^* = b_o \zeta^*$ siendo b_o una constante.

4) El desarrollo de la funcion T (18) es el siguiente (1):

$$(22) \quad T = m' \Big\{ 3(\frac{a^2 a'}{\Delta_o^3} - \alpha^2)\,\text{sen}\, H +$$
$$+ \text{sen}(\psi - \theta - B)\Big[3(\alpha^2 - \frac{a^2 a'}{\Delta_o^3})(\cos 3H - \cos 5H) + \frac{2a^3}{\Delta_o^3}\cos 4H\Big] +$$
$$+ \cos(\psi - \theta - B)\Big[3(\alpha^2 - \frac{a^2 a'}{\Delta_o^3})(\frac{1}{3}\,\text{sen}\, 5H - \text{sen}\, 3H) - \frac{2a^3}{\Delta_o^3}\,\text{sen}\, 4H\Big]\Big\}$$

para el caso particular $\mu_o = 3/4$.

Efectuamos el cambio de variable en la ecuación diferencial de Hansen (18) y resulta:

$$\frac{dW}{d\overline{\zeta^*}} = T\beta\Delta_o^3 \quad (23) \qquad W = \beta \int_{\overline{\zeta_o^*}}^{\overline{\zeta^*}} T\,\Delta_o^3\, d\overline{\zeta^*} \,(24)$$

En lugar de Δ_o^3 escribimos $a'^3\theta_o^3 = \Delta_o^3$ siendo $\theta_o^2 = (1 + \alpha^2 - 2\cos H)^{3/2}$ y multiplicados ambos miembros de (22) por Δ_o^3 y divididos por a'^3, obtuvimos:

$$(25) \quad \beta T\theta_o^3 = \frac{dW}{d\overline{\zeta^*}} = m'\beta\Big\{3\alpha^2(1 - \theta_o^3)\,\text{sen}\, H +$$
$$+ \text{sen}(\psi - \theta - B)\Big[3\alpha^2(\theta_o^3 - 1)(\cos 3H - \frac{1}{3}\cos 5H) + 2\alpha^3\cos 4H\Big] +$$
$$+ \cos(\psi - \theta - B)\Big[3\alpha^2(\theta_o^3 - 1)(\frac{1}{3}\,\text{sen}\, 5H - \text{sen}\, 3H) - 2\alpha^3\,\text{sen}\, 4H\Big]\Big\}$$

5) Siendo $\alpha^3 = \mu^2$ de donde $\alpha = \mu^{2/3}$ por la relacion $w = 1 - \mu/\mu_o$ es $\mu = \mu_o(1 - w)$ de manera que $\alpha = \alpha(w)$. Tambien $H = H(w)$ como resulta de reemplazar en (6) a μ por $\mu_o(1 - w)$. De esto:

$$H = d_o w + d_1 e + d_2$$

donde: $\quad d_o = (e - c)\mu_o \qquad d_1 = (1 - \mu_o) \qquad d_2 = (\mu_o c - c')$

Además:

$$\alpha = \mu_o^{2/3}(1 - 0{,}66w - 0{,}11w^2 \ldots)$$

$$\theta_o^3(w) = \Big[(1{,}6816 - 0{,}9088w + 0{,}1515w^2) -$$
$$- (1{,}6512 - 1{,}1008w - 0{,}1813w^2).\cos(d_o w + d_1 e + d_2)\Big]^{3/2}$$

$$\beta = (1-\mu)^{-1} = 3{,}9867 - 11{,}7353w \ldots$$

$$3m'\beta\alpha^2 = 0{,}00813 - 0{,}03476w \ldots$$

$$2m'\beta\alpha^3 = 0{,}00448 - 0{,}02195w \ldots$$

$$d_0 = (2{,}9900H + 7{,}5482) - (8{,}8015H + 26{,}8146)w \ldots$$

Desarrollamos $\theta_0^3(w)$, cos nH y sen nH, según la fórmula de Taylor, en una serie de potencias del parámetro w:

$$(26) \qquad \theta_0^3(w) = \theta_0^3(0) + \left(\frac{\partial \theta_0^3(w)}{\partial w}\right)_{w=0} \cdot w$$

$$\text{sen } nH = \text{sen } n(d_1 e + d_2) + nd_0 \cos n(d_1 e + d_2)w + \ldots$$

$$\cos nH = \cos n(d_1 e + d_2) - nd_0 \text{sen } n(d_1 e + d_2)w + \ldots$$

Introduciendo en (26) los distintos desarrollos obtenidos en este párrafo, resulta:

$$(27) \quad \frac{dW}{d\bar{\zeta}^*} = L_1 + L_1' + \cos(\psi - \theta - B)(L_2 + L_2') + \text{sen}(\psi - \theta - B)(L_3 + L_3')$$

donde L_n y L_n' son funciones de $H = H(\bar{\zeta}^*)$, siendo L_n los términos independientes de w y L_n' los términos que contienen a w.

6) Ahora consideremos otra ecuación diferencial de Hansen:

$$d(n\delta z) = \bar{W}.de$$

en la que efectuaremos el cambio de variable. En efecto:

$$de = \beta . \Delta_0^3 . d\bar{\zeta}^*$$

de donde:

$$\frac{d(n\delta z)}{d\bar{\zeta}^*} = \beta \bar{W} . \Delta_0^3$$

o integrando:

$$n\delta z = \beta \int_{\bar{\zeta}_0^*}^{\bar{\zeta}^*} \bar{W} . \Delta_0^3 . d\bar{\zeta}^*$$

Como hemos restringido el cálculo de las perturbaciones al intervalo $0 \leq H \leq 20°$ que corresponde a $0 \leq \overline{\zeta^*} \leq 3,1416$, para obtener el límite inferior de integración determinamos la función $\tau = F(t)$ tal que $\overline{\zeta^*_0}(\tau) = 0$ cuando $H = H(t) = 0$, es decir, iniciamos la cuenta del tiempo cuando el asteroide y Júpiter están en oposición ($H = 0$, $\overline{\zeta^*} = 0$). A tal efecto, con una transformación lineal obtuvimos:

$$\tau = t - 5014,3 \qquad\qquad t = \tau + 5014,3$$

De esto, el límite inferior de las integrales que determinan W y n, δ, z, es $\overline{\zeta^*_0} = 0$ para $\tau = 0$:

$$W = \beta \int_0^{\overline{\zeta^*}} T.\ \theta_0^3.\ d\overline{\zeta^*} \qquad n\ \delta\ z = \beta \int_0^{\overline{\zeta^*}} \overline{W}.\ \Delta_0^3.\ d\overline{\zeta^*}$$

donde $\overline{W}$ es la función W después de reemplazar el parametro ψ por $\varepsilon = 4H + \theta + B$

Los desarrollos en series trigonometricas de las funciones L_n y L'_r se han obtenido por análisis harmónico con un esquema de 12 ordenadas siendo las abscisas $\overline{\zeta^*} = 0°, 15°, 30°, \ldots 180°$.

7) Para integrar la ecuación diferencial:

$$\frac{dW}{d\varepsilon} = T$$

(donde $W = W_n(\overline{\zeta^*}, \theta, w)$) suponemos que la solución es desarrollable en la serie

$$(28) \qquad W = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots + W_n + \ldots$$

y satisface a la ecuación a derivadas parciales:

$$(29) \qquad \frac{dW}{d\overline{\zeta^*}} = \frac{\partial W}{\partial \overline{\zeta^*}} + \frac{\partial W}{\partial \theta}\frac{d\theta}{d\overline{\zeta^*}} = T = T_0 m' + T_1 m' w + T_2 m' w^2 + \ldots$$

Tenemos:

$- 3\beta Hw = \theta$ (párrafo 3) $\beta = 3,9867 - 11,7353w$ (párrafo 5) de donde:

$$(30) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\zeta}} = -(11,9601w - 35,2059w^2)\,\Delta_0^3(\bar{\zeta}^*)$$

que introducimos en (29). Por otra parte, siendo $w = 0,012$, podemos escribir:

$$(31) \qquad w \sim \frac{\sqrt{m'}}{3} \qquad\qquad m'/9 \sim w^2$$

Entonces, resulta de (28),(29),(30) y (31):

$$(31) \quad \frac{\partial W_1}{\partial \bar{\zeta}^*} + \frac{\partial W_2}{\partial \bar{\zeta}^*} + \frac{\partial W_3}{\partial \bar{\zeta}^*} \;\ldots\; -(11,9601w - 35,2059w^2)\left(\frac{\partial W_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial W_2}{\partial \theta} + \frac{\partial W_3}{\partial \theta}\right)\Delta_0^3(\bar{\zeta}^*)$$

$$= (T'_0 + T'_1 w + T'_2 w^2 + \ldots)m'$$

Igualando los términos a derecha e izquierda en (31) del mismo orden de w, resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para determinar W.

$$(32) \qquad \frac{\partial W_1}{\partial \bar{\zeta}^*} = 0$$

$$(33) \qquad \frac{\partial W_2}{\partial \bar{\zeta}^*} = -11,9601w\,\Delta_0^3\,\frac{\partial W_1}{\partial \theta} = T'_0$$

$$(34) \qquad \frac{\partial W_3}{\partial \bar{\zeta}^*} = -11,9601w\,\Delta_0^3 + 35,2059w^2\,\Delta_0^3\,\frac{\partial W_1}{\partial \theta} = T'_1$$

En la ecuación diferencial (32), la función de W_1 no depende de w, y es función de la variable θ, $W_1 = \phi_1(\theta)$ Suponemos condiciones iniciales que hacen $\phi_1(\theta) = 0$ Integramos la ecuacion diferencial (33):

$$(35) \qquad W_2 = \int^{\bar{\zeta}^*} T'_0\, d\bar{\zeta}^* + \phi_2(\theta)$$

con la condición deducida de $\phi_1(\theta)$ para que W no contenga términos seculares en $\bar{\zeta}^*$ y que $\phi_2(\theta) = 0$ Resulta:

$$(36) \qquad W_2 = \mathrm{Const} + F_3(\bar{\zeta}^*)$$

siendo $F_3(\bar{\zeta}^*)$ una serie trigonométrica. Y así sucesivamente.

De (27) resulta:

$$(38) \qquad T_0' = L_1 + \cos(\psi-\theta-B)L_2 + \operatorname{sen}(\psi-\theta-B)L_3$$

$$(39) \qquad T_1' = L_1' + \cos(\psi-\theta-B)L_2' + \operatorname{sen}(\psi-\theta-B)L_3'$$

e integrando las series (38) y (39) resultan las series trigonométricas (36) y (37), con las cuales queda determinada la función W.

8). Hemos Calculado

$$W = W_2 + W_3 + \dots$$

y reemplazando el parámetro ψ por $\varepsilon = 4H + \theta + B$, los cos $(\psi-\theta-B)$ y sen $(\psi-\theta-B)$ se transforman en cos $4H$ y sen $4H$ que expresamos en funciones de $\bar{\zeta}^*$ mediante el análisis harmónico. Introducidos en las series que resultan de la integración de (38) y (39), resulta la función: $\overline{W}$

$$\overline{W} = \overline{W}_2 + \overline{W}_3 + \dots$$

y con la ecuación diferencial de Hansen escrita en el párrafo 6, que integramos, resulta la serie trigonométrica para calcular la perturbación de la anomalía media, de primero y segundo orden, en primera aproximación.

9). Para calcular la perturbación total ν del radio vector, empleamos la ecuación diferencial de Hansen[1]:

$$(40) \qquad \frac{d\nu}{d\varepsilon} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial W}{\partial \psi}$$

donde, efectuado el cambio de variable, resulta:

$$(41) \qquad \frac{d\nu}{d\bar{\zeta}^*} = -\frac{1}{2}\,\beta\,\frac{\partial \overline{W}}{\partial \psi}\,\varrho^3$$

(1) Tisserand - Mec. Céléste, Tomo IV, (Méthode de Hansen).

La derivada parcial $\frac{\partial \overline{W}}{\partial \psi}$ significa que primero se deriva W respecto al parámetro ψ y despues se hace $\psi = \varepsilon = 4H + \theta_1 + B$ En el resultado de la integración no aparecen discriminadas las perturbaciones por su orden primero, segundo, etc. a consecuencia de haber desarrollado la función $W = W_2 + W_3 + \ldots$ introduciendo en el miembro W_3 el valor numérico de w porque en primera aproximación no es posible limitar el desarrollo de $W \sim W_2$ porque W_3 alcanza valores numéricos del mismo orden de W_2.

10). Para cotejar los resultados de nuestro cálculo de las perturbaciones del radio vector y de la anomalía media con aquellos obtenidos por K.Bohlin en su memoria,[2] hemos calculado las mencionadas tablas para $\mu_0 = 3/4$ ya que ellas contienen solamente los coeficientes para $\mu_0 = 1/3$.

Además, los argumentos de las funciones trigonométricas del método de Bohlin tienen la forma $((1-\mu)\varepsilon + \theta_1)$, de manera que para comparar ambos resultados hemos introducido en este argumento una variable que dependa inplicitamente de $\overline{\zeta^*}$ A tal efecto, hemos obtenido:

$$(1-\mu)\varepsilon + \theta_1 = 0{,}00052\,\tau + 3{,}1419$$

11). Los resultados que hemos obtenido, han sido calculados con las siguientes series:

$$(n\delta z)_1 = -224''54 \quad 238''96 \cos \overline{\zeta^*} - 12''36 \cos 2\overline{\zeta^*} - 2''06 \cos 3\overline{\zeta^*} +$$
$$+ 4''12 \cos 4\overline{\zeta^*} - 8''24 \cos 5\overline{\zeta^*} + 2''06 \cos 7\overline{\zeta^*} + \ldots$$
$$= 202''16 - 313''52 \cos \overline{\zeta^*} + 156''72 \cos \overline{2\zeta^*} - 57''76 \cos \overline{3\zeta^*} +$$
$$+ 33''00 \cos \overline{4\zeta^*} - 16''52 \cos \overline{5\zeta^*} - 4''12 \cos \overline{6\zeta^*} + \ldots$$

(2) K.Bohlin - Formeln und Tafeln zur Gruppenweisse Berechnung der Allgemeinen Störungen ...(Upsala,1896).

$\frac{1}{w}(n\delta z)_2 = 0{,}0000268 + 0{,}0000316 \cos \overline{\zeta^*} - 0{,}0000063 \cos \overline{2\zeta^*} +$

$+0{,}0000019 \cos \overline{3\zeta^*} - 0{,}0000007 \cos \overline{4\zeta^*} + 0{,}0000004 \cos \overline{5\zeta^*} -$

$-0{,}0000001 \cos \overline{6\zeta^*}$

Serios de Bohlin para $(n\delta z)_1$, $(n\delta z)_2$, ν_1, ν_2 para $u_o = 3/4$

$$s = (1-\mu)\varepsilon + \theta_1 = 0{,}00052\,\tau + 3{,}1419$$

$$\frac{n}{2K} = 0{,}424 \qquad \frac{\omega}{2}\left(\frac{n}{2K}\right)^2 = 0{,}00108 \qquad \omega\left(\frac{n}{2K}\right)^2 = 0{,}00216$$

$(n\delta z)_1 = \frac{n}{2K}(-2459''16 \text{ sen } s - 4595''76 \text{ sen } 2s - 4168''48 \text{ sen } 3s -$

$- 437''12 \text{ sen } 4s + 1325''31 \text{ sen } 5s + 407''41 \text{ sen } 6s +$

$+ 185''57 \text{ sen } 7s + 99''53 \text{ sen } 8s + 49''50 \text{ sen } 9s +$

$+ 34''90 \text{ sen } 10s)$

$(n\delta z)_2 = \omega\left(\frac{n}{2K}\right)^2(8834''74 \text{ sen } s + 33229''01 \text{ sen } 2s + 21788''80 \text{ sen } 3s +$

$+5948''29 \text{ sen } 4s - 37212''52 \text{ sen } 5s - 9571''91 \text{ sen } 6s -$

$-1676''15 \text{ sen } 7s - 657''76 \text{ sen } 8s - 411''16 \text{ sen } 9s -$

$-261''24 \text{ sen } 10s)$

$\nu_1 = \frac{n}{4K}(193''68 + 665''32 \cos s + 2628''72 \cos 2s +$

$+ 3357''18 \cos 3s + 42''88 \cos 4s - 1541''12 \cos 5s -$

$- 528''64 \cos 6s - 272''96 \cos 7s - 149''51 \cos 8s -$

$- 78''66 \cos 9s - 56''87 \cos 10s)$

$\nu_2 = \frac{\omega}{2}\left(\frac{n}{2K}\right)^2(25602''57 - 8031''60 \cos s - 14630''26 \cos 2s -$

$- 11835''03 \cos 3s - 22''59 \cos 4s + 40203''89 \cos 5s +$

$+ 11533''47 \cos 6s + 2706''79 \cos 7s + 1009''73 \cos 8s +$

$+638''62 \cos 9s + 389''48 \cos 10s)$

Comparación de las perturbaciones de la anomalía media y del radio vector calculadas con las tablas de Bohlin y en este trabajo

τ Dias	H	$\overline{\zeta^*}$	s	$(n\delta z)_1$ (I)	$(n\delta z)_1$ (II)	$(n\delta z)_2$ (I)	$(n\delta z)_2$ (II)
0	0	0	3,1419	0	0	0	0
10	0,0052	0,0873	3,1471	- 2"06	- 1"63	1"14	1"81
20	0,0104	0,1565	3,1523	- 4"18	- 4"43	3"30	3"45
30	0,0156	0,2616	3,1575	- 8"03	- 6"83	6"83	5"36
40	0,0208	0,3056	3,1627	- 8"45	- 7"00	8"94	7"08
50	0,0260	0,3784	3,1679	-10"30	- 8"55	9"88	8"83
60	0,0312	0,4238	3,1731	-15"24	-12"59	11"16	10"84

Dias	H	$\overline{\zeta^*}$	s	ν (I)	ν (II)
0	0	0	3,1419	0	0
10	0,0052	0,0873	3,1471	- 0"02	- 0"06
20	0,0104	0,1565	3,1523	- 0"10	- 0"08
30	0,0156	0,2616	3,1575	- 0"16	- 0"12
40	0,0208	0,3056	3,1627	- 0"25	- 0"20
50	0,0260	0,3784	3,1679	- 0"27	- 0"25
60	0,0312	0,4238	3,1731	- 0"35	- 0"40

(I) Resultados segun nuestro trabajo.

(II) Resultados segun Bohlin.

Summary:

CALCULATION OF THE PERTURBATIONS OF THE MEAN ANOMALY AND THE RADIUS VECTOR BY BOHLIN'S METHOD

The classical disturbing function $R = \sum B.\cos\ (k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2) + \sum C.\mathrm{sen}\ (k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2)$ is not suitable to most of the asteroids because in the integration of R, in the case $-k_1/k_2$ approximately equal to n'/n, the very small divisor $(k_1 n + k_2 n')$ gives origin to a very large period inequality. In order to avoid such a difficulty we have solved the differential equations of Hanson-Bohlin's method, by means of trigonometrical series, using as independent variable the function $\zeta = A\int_0^t \Delta_0^{-3}\,dt$ instead of the excentric anomaly.

We used a numerical method, assuming that both of the orbits (disturbing and disturbed planets) are circular and coplanar. The perturbations of the mean anomaly and the radius vector, in the first approximation, are calculated in the particular case of the asteroid Thule. Though the independent variable ζ is not a regularizing variable in the sense of the Levi-Civita-Sundman theories, it has the property to absorb the singularities of practical character when the mutual distance $\Delta_0^3 > 0$ reaches very small values.