

## MODELACIÓN DEL COMPORTAMIENTO CÍCLICO DE HORMIGÓN REFORZADO CON FIBRAS

Paula Luciana Argañaraz<sup>a,b</sup>, Bibiana Luccioni<sup>a,b</sup>, Facundo Isla<sup>a,b</sup>, Augusto Benito<sup>a</sup>,  
Maria Celeste Torrijos<sup>b,c</sup>, Graciela Giaccio<sup>d,c</sup>, Raúl Zerbino<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup>Instituto de Estructuras “Arturo M. Guzmán”, FACET, Universidad Nacional de Tucumán, Av. Independencia 1800, 4000 S.M. de Tucumán, Argentina, [plarganarazsaenz@herrera.unt.edu.ar](mailto:plarganarazsaenz@herrera.unt.edu.ar), [augusto\\_benito@hotmail.com](mailto:augusto_benito@hotmail.com), [fisla@herrera.unt.edu.ar](mailto:fisla@herrera.unt.edu.ar), [bluccioni@herrera.unt.edu.ar](mailto:bluccioni@herrera.unt.edu.ar),  
<http://www.facet.unt.edu.ar/iest/>

<sup>b</sup>CONICET, Godoy Cruz 2290, C1425FQB CABA, Argentina, <http://www.conicet.gov.ar/>

<sup>c</sup>LEMIT, Calle: 52 e/ 121 y 122, B1900AYB La Plata, Argentina, <http://www.lemmit.gov.ar/>

<sup>d</sup>CIC, Comisión de Investigaciones Científicas, Calle 526 e/10 y 11, La Plata, Argentina,  
<http://www.cic.gba.gov.ar/>

**Palabras Clave:** Hormigón reforzado con fibras, comportamiento cíclico, modelo constitutivo, Arrancamiento de fibras.

**Resumen.** En los últimos años se ha estudiado el uso de hormigones reforzados con fibras (HRF) para construcción, reparación y refuerzo de elementos estructurales de hormigón armado sometidos a cargas cíclicas. En todos los casos se logra un aumento de la capacidad de disipación de energía, de la resistencia y disminución del daño que permite diseñar estructuras más esbeltas con menor cuantía de armadura. A pesar de los resultados experimentales alentadores disponibles, hace falta continuar con la investigación y el desarrollo de modelos numéricos que permitan diseñar y predecir el comportamiento del HRF en este tipo de aplicaciones. Para ello, es indispensable desarrollar modelos constitutivos que sean capaces de reproducir el comportamiento de compuestos cementicios reforzados con fibras bajo cargas cíclicas y calibrarlos con resultados experimentales. En este trabajo se presenta una extensión al caso de cargas cíclicas de un modelo previamente desarrollado para HRF bajo cargas cuasi estática monótona creciente. El modelo de compuesto considera las propiedades constitutivas de la matriz de hormigón y de las fibras e introduce de manera simplificada el desplazamiento fibra-matriz mediante una modificación del modelo constitutivo de las fibras. El arrancamiento de las fibras se simula mediante un modelo de arrancamiento que en este trabajo se extiende para considerar el efecto de las fibras en el cerrado de las fisuras. Luego de describir el comportamiento cíclico del HRF observado experimentalmente, se presenta el modelo constitutivo propuesto. Se estudian numéricamente problemas simples que ilustran el comportamiento del modelo y finalmente, se desarrolla un ejemplo de aplicación y comparación con resultados experimentales que muestra la capacidad del modelo para reproducir el comportamiento cíclico del HRF.

## 1 INTRODUCCION

Muchas estructuras existentes fueron diseñadas y construidas de acuerdo a reglamentaciones antiguas y no cumplen con los requerimientos de resistencia lateral y ductilidad requeridos para soportar sismos severos. Por otro lado, las estructuras dañadas por sismos destructivos requieren ser rehabilitadas con técnicas de intervención adecuadas para mejorar o recobrar la performance estructural original (Ilki *et al.* (2004)).

En los últimos años se ha estudiado el uso de hormigones y compuestos cementicios reforzados con fibras para reparación y refuerzo sísmico de estructuras de hormigón armado (Li (2002); Fischer and Li (2003); Martinola *et al.* (2010); Cho *et al.* (2012); Shannag and Alhassan (2005); Wang and Lee (2007)).

Estos materiales son adecuados debido a la compatibilidad de sus propiedades mecánicas y físicas (Wang and Lee (2007)) con el hormigón, además de otros aspectos constructivos y económicos. Por otro lado, con una adecuada dosificación se pueden lograr matrices muy resistentes y el agregado de fibras mejora el comportamiento en tracción incrementando la ductilidad y la capacidad de disipación de energía. Estas propiedades los hacen adecuados también para ser utilizados en elementos estructurales sismorresistentes sometidos a corte como las uniones viga-columna que requieren un buen detallado de armadura o columnas que requieren alta resistencia y ductilidad (Parra Montesinos (2005)).

A pesar de los resultados experimentales alentadores disponibles, hace falta continuar con la investigación y el desarrollo de modelos numéricos que permitan diseñar y predecir el comportamiento de estructuras de hormigón reforzadas con distintos tipos de compuestos cementicios reforzados con fibras. Para ello, es indispensable desarrollar modelos constitutivos que sean capaces de reproducir el comportamiento bajo cargas cíclicas (Han *et al.* (2003); Kesner *et al.* (2003)) y previamente se requiere conocer ese comportamiento. Son escasos los resultados experimentales disponibles referidos al comportamiento cíclico de estos compuestos cementicios y, en general, se refieren a fibras sintéticas (Kesner *et al.* (2003); Douglas and Billington (2006)).

Los modelos para simular el comportamiento de hormigones reforzados con fibras existentes en la literatura se pueden clasificar en macro-modelos y meso-modelos. En los macro-modelos el comportamiento del compuesto se representa como un único material con propiedades promedio (Hung and Li (2014); Liu *et al.* (2009); Tysmans *et al.* (2015)). Este tipo de modelo se usa normalmente en enfoques fenomenológicos en los que las leyes constitutivas se obtienen de ensayos de laboratorio. La principal ventaja de estos modelos es la utilización de información del material relevante a escala estructural, pero la mayor desventaja es la necesidad de realizar numerosos ensayos de laboratorio ya que la contribución de las fibras no se tiene en cuenta explícitamente. Algunos de estos inconvenientes se pueden solucionar usando modelos derivados a escala meso-mecánica en los que se tienen en cuenta las distintas componentes: matriz de hormigón, fibras e interfaz (Luccioni *et al.* (2012); Caggiano and Martinelli (2012); Oliver *et al.* (2012)).

Los escasos modelos numéricos existentes en la bibliografía para simular el comportamiento cíclico del HRF utilizan modelos homogéneos equivalentes de plasticidad acoplada con daño originalmente desarrollados para hormigón. Han *et al.* (2003) desarrollaron un modelo para simular el comportamiento cíclico de compuestos cementicios dúctiles reforzados con fibras. Se trata de un modelo elástico no lineal de tipo Cauchy en el que la respuesta depende de la deformación total. Chi *et al.* (2017) desarrollaron una modificación al modelo de daño y plasticidad CDPM para hormigón con los parámetros calibrados mediante resultados experimentales obtenidos con distintos contenidos de fibras. Lo validaron con aplicaciones de tracción y compresión uniaxial con carga monótona creciente y compresión cíclica. Para los

casos de tracción y compresión uniaxial, las predicciones numéricas se ajustan bien con los resultados experimentales, pero existen pequeñas inconsistencias en la curva esquelética y la curva de descarga para el caso de compresión cíclica.

La principal limitación de los modelos homogéneos equivalentes es que son incapaces de captar los estados tensionales residuales que se generan en la descarga, cuando las deformaciones permanentes de una componente son restringidas por la otra, y la diferente degradación que sufren las componentes del material por efecto de la carga. La combinación de estos efectos es lo que define la forma de los lazos de histéresis que se obtienen experimentalmente bajo cargas cíclicas.

En este trabajo se extiende un modelo de compuesto ya desarrollado para HRF con el efecto de poder simular adecuadamente el comportamiento cíclico del HRF. La principal modificación consiste en la inclusión del daño de la matriz y la degradación de la resistencia al arrancamiento observados en los ensayos con carga cíclica.

## 2 RESULTADOS EXPERIMENTALES

Son bastante escasos los resultados experimentales disponibles en la literatura que muestran el comportamiento cíclico del HRF y sus componentes. La mayoría de los trabajos presentan resultados experimentales referidos al comportamiento cíclico de estructuras de hormigón armado reforzadas con HRF. Resulta difícil inferir el comportamiento cíclico del HRF a partir de estos resultados.

[Kesner et al. \(2003\)](#) estudiaron la respuesta de compuestos cementicios con fibras poliméricas de alto módulo bajo tracción y compresión monotónica y cíclica. La incapacidad de las fibras para introducirse nuevamente en el hormigón una vez que fueron arrancadas, produce una zona de baja rigidez en la respuesta tensión-deformación cíclica. La carga cíclica invirtiendo el signo no limita la capacidad de deformación en tracción de estos materiales siempre que no se exceda la resistencia a compresión. [Douglas and Billington \(2006\)](#) realizaron ensayos para estudiar el comportamiento cíclico y la dependencia de la velocidad de deformación de hormigones de alta performance reforzados con fibras de alcohol polivinílico y concluyeron que la velocidad de deformación produce un aumento de resistencia y una disminución de ductilidad. Por otro lado, la respuesta a tracción y compresión monotónica representa una envolvente para la respuesta cíclica, pero para las velocidades correspondientes a la carga sísmica, los especímenes sometidos a tracción cíclica exhiben una disminución de la resistencia a tracción después de la primera fisuración.

Los resultados experimentales sobre el comportamiento cíclico de compuestos cementicios reforzados con fibras de acero son aún más escasos en la bibliografía. [Germano and Plizzari \(2012\)](#) llevaron a cabo ensayos cíclicos para estudiar el comportamiento del hormigón fisurado bajo cargas de fatiga, comparando hormigón simple y hormigón reforzado con fibras de acero (HRFA) con 0,5 y 1% de contenido de fibras, en especímenes de vigas pequeñas con entalla. El HRFA-0,5% presentó un mejor comportamiento a la fatiga que el hormigón convencional.

Recientemente [Chi et al. \(2017\)](#) presentaron resultados de ensayos de compresión uniaxial cíclica de un HRF híbridas (de polipropileno y de acero). En [Figura 1](#) se muestra la curva tensión deformación obtenida que exhibe lazos de histéresis producto de la interacción entre la matriz y las fibras, que no pueden ser presentados por el modelo numérico homogéneo desarrollado por [Chi et al. \(2017\)](#).

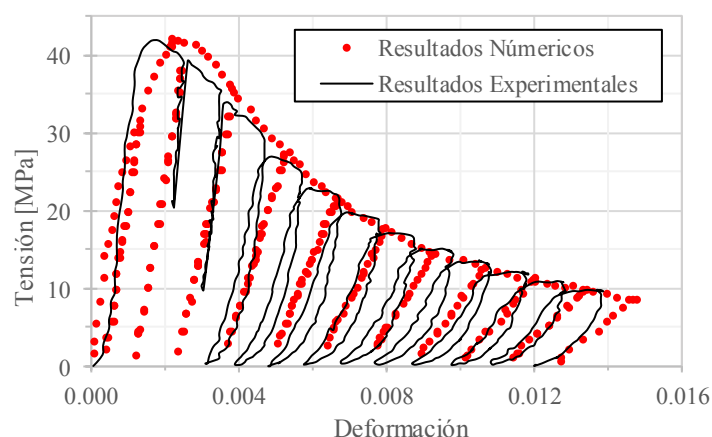


Figura 1: Resultados experimentales de ensayos de compresión uniaxial cíclica ( Chi et al. (2017))

Dentro del grupo de investigación del presente trabajo se han desarrollado algunos ensayos preliminares sobre hormigones con fibras de acero con gancho sometidos a flexión cíclica. En los mismos se utilizó un hormigón de 35.8 MPa de resistencia a compresión y  $50 \text{ kg/m}^3$  de fibras de acero con ganchos en sus extremos (Longitud: 50 mm, diámetro: 1.00 mm). Los ensayos consistieron en cargar vigas con entalla con control de desplazamientos hasta una determinada apertura de fisura y luego aplicar ciclos de carga controlada. En la [Figura 2](#) se muestran dos respuestas cíclicas obtenidas para aperturas de fisura previas de 0.20 y 0.50 mm respectivamente. Se observa la forma típica de los lazos de histéresis y el aumento de deformación bajo carga constante. Como contraste, se realizó también un ensayo de carga creciente hasta una apertura de fisura de 3.50 mm, cuyos resultados se han superpuesto con la respuesta cíclica en la [Figura 2](#) como comparación.

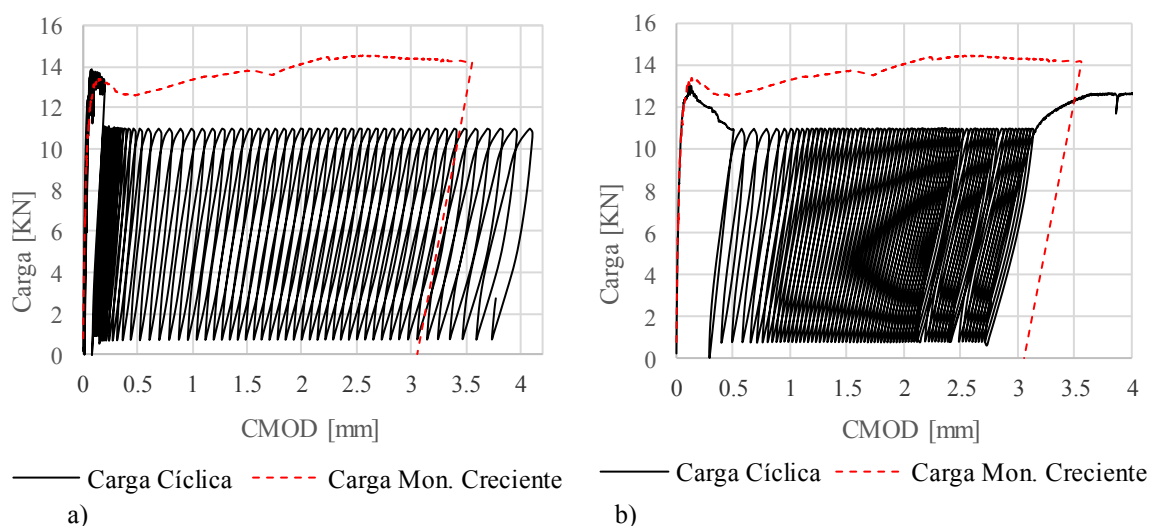


Figura 2: Respuestas cíclicas para aperturas de fisura previas de a) 0.20 mm b) 0.50 mm.

Adicionalmente, como el objetivo es desarrollar un modelo de compuestos, se realizaron ensayos de extracción de fibras (*pull-out*) con descarga incluyendo ramas de descarga.

Los resultados correspondientes a dos ensayos se muestran en la [Figura 3](#) donde se representa la fuerza en función del deslizamiento del extremo libre. Se observa que en este ensayo la descarga no evidencia degradación de rigidez en el arrancamiento. No obstante, hay

que tener en cuenta que, a diferencia de lo que ocurre en el HRF bajo cargas cíclicas, en estos ensayos la matriz de hormigón no se fisura. Es de esperar que en el compuesto el mecanismo de *pull-out* experimente degradación de rigidez debido a la degradación de la matriz.

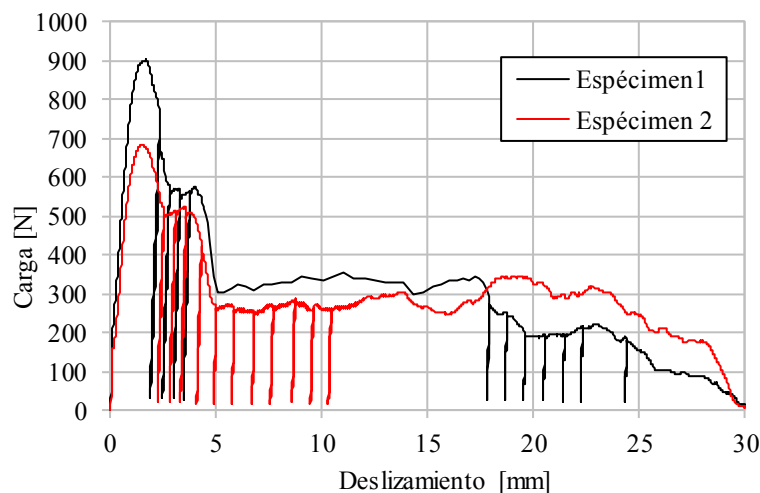


Figura 3: Curva de arrancamiento (*pull-out*) con ramas de descarga.

### 3 MODELO

El HRF puede ser interpretado como un compuesto consistente en una matriz de hormigón con fibras dispersas en la misma. Como aproximación, se supone que las fibras están orientadas en un número discreto de direcciones respecto a los ejes de referencia. Para modelar este compuesto se utiliza una modificación de la teoría de mezclas.

La teoría de mezclas clásica supone que todas las componentes del compuesto experimentan la misma deformación. Para el HRF y pequeñas deformaciones esta condición de compatibilidad se escribe como:

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij})_h = (\varepsilon_{ij})_{F_k} \quad (1)$$

donde  $\varepsilon_{ij}$  y  $(\varepsilon_{ij})_m$  son las deformaciones en el compuesto y cada una de las componentes.

El subíndice  $h$  identifica al hormigón mientras que  $F_k$  identifica a las fibras en la dirección  $k$  con  $k = 1, \dots, n$  direcciones. La tensión se obtiene como:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{kl}, \alpha_k)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{m=1}^{n+1} k_m \frac{\partial \Psi_m(\varepsilon_{kl}, (\alpha_i)_m)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{m=1}^{n+1} k_m (\sigma_{ij})_m \quad (2)$$

Donde  $\partial \Psi(\varepsilon_{ij}, \alpha_i)$  y  $\Psi_m(\varepsilon_{ij}, (\alpha_i)_m)$  son las densidades de energía libre por unidad de volumen del compuesto y de cada una de las  $m$  componentes respectivamente,  $k_m = dV_m/dV$  es la correspondiente proporción volumétrica,  $(\alpha_i)_m$  es un conjunto de variables internas y  $(\sigma_{ij})_m$  es la tensión en la componente  $m$  que se obtiene a partir de la ecuación constitutiva correspondiente.

Debe notarse que la Ec. (1) es una restricción muy fuerte que no se cumple en el caso del HRF ya que las fibras se deslizan respecto de la matriz. A los efectos de poder usar esta teoría para el HRF, se modifica el modelo constitutivo de las fibras incluyendo en el mismo el deslizamiento fibra-matriz sin necesidad de considerar explícitamente la interfaz fibra-matriz.

Se supone que la deformación total de las fibras está compuesta por una deformación elástica  $\varepsilon_{ij}^e$ , una deformación plástica  $\varepsilon_{ij}^p$  y una deformación debida al deslizamiento  $\varepsilon_{ij}^s$

$$(\varepsilon_{ij})_{F_k} = (\varepsilon_{ij}^e)_{F_k} + \underbrace{(\varepsilon_{ij}^p)_{F_k} + (\varepsilon_{ij}^s)_{F_k}}_{(\varepsilon_{ij}^{ps})_{F_k}} \quad k = 1, \dots, n \quad (3)$$

Estrictamente, sólo los dos primeros términos corresponden a la matriz mientras que el tercero se desarrolla en la interfaz fibra-matriz. Como resultado de ese término, la deformación en la fibra misma es distinta de la matriz.

### 3.1 Modelo utilizado para el Hormigón

Teniendo en cuenta que los resultados experimentales de hormigón bajo cargas cíclicas (Long and He (2017)) evidencian en algunos casos degradación de rigidez, se utiliza un modelo de daño escalar acoplado con plasticidad (Luccioni et al. (1996)) para simular el comportamiento de la matriz. Este modelo resuelve simultáneamente el problema plástico con el de degradación de rigidez. Las condiciones de consistencia plástica y de daño se satisfacen simultáneamente en cada etapa de carga. De esta forma, utilizando variables de daño relacionadas con la disipación de energía en cada uno de los procesos, se logra una correcta disipación de energía del proceso global.

#### 3.1.1 Proceso Plástico

El proceso plástico se describe a través de una generalización de la teoría de la plasticidad clásica que permite tener en cuenta algunos aspectos del comportamiento de geomateriales.

El límite del comportamiento elástico se describe a través de una función de fluencia:

$$F^p(\sigma_{ij}; \kappa^p) = f(\sigma_{ij}) - K^p(\sigma_{ij}; \kappa^p) \leq 0 \quad (4)$$

donde  $f(\sigma_{ij})$  es la tensión equivalente definida en el espacio de tensiones,  $K^p(\sigma_{ij}; \kappa^p)$  es el umbral de fluencia y  $\kappa^p$  es la variable de daño plástico.

Las reglas de evolución para las deformaciones plásticas y la variable de daño plástico:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G(\sigma_{mn}; \kappa^p)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5)$$

$$\dot{\kappa}^p = \dot{\lambda} H_k^p(\sigma_{ij}; \kappa^p) = \dot{\lambda} (h_{\kappa^p})_{ij} \frac{\partial G(\sigma_{mn}; \kappa^p)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

donde  $\dot{\lambda}$  es el factor de consistencia plástica,  $G$  la función de potencial y  $(h_{\kappa^p})_{ij}$  es un tensor que define la evolución de la variable de endurecimiento plástico.

La variable de endurecimiento plástico  $\kappa^p$  se obtiene normalizando la energía disipada en el proceso plástico a la unidad y varía entre 0 para el material virgen y 1 cuando se ha disipado plásticamente la totalidad de la energía que el material es capaz de disipar de esta forma. Se utiliza para la misma la siguiente regla de evolución que tiene en cuenta el comportamiento diferenciado en tracción y compresión:

$$\dot{\kappa}^p = \left[ \frac{r}{g_f^{*p}} + \frac{(1-r)}{g_c^{*p}} \right] \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (7)$$

donde:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad \langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{2} [\sigma_i + |\sigma_i|] \quad (8)$$

$\sigma_i$ : tensiones principales

$$g_f^{*p} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i| R^{op}}{f^p(\sigma_{ij})} g_f^p \quad g_c^{*p} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{f^p(\sigma_{ij})} g_c^p \quad (9)$$

$R^{op}$  es la relación entre los umbrales de fluencia en compresión uniaxial y en tracción uniaxial,  $g_f^p$  y  $g_c^p$  son las máximas densidades de energía disipadas por el proceso plástico en tracción uniaxial y compresión uniaxial respectivamente. En el caso de un proceso termodinámico sin daño, estas energías pueden ser evaluadas como:

$$g_f^p = \frac{G_f}{l_c} \quad y \quad g_c^p = \frac{G_c}{l_c} \quad (10)$$

Donde  $G_f$  y  $G_c$  son las energías de fractura y aplastamiento respectivamente y  $l_c$  es un parámetro externo que depende del tamaño característico de la malla de elementos finitos y se introduce para obtener objetividad de la respuesta del sólido respecto del tamaño de la malla (Luccioni et al. (2016)).

Se usa la siguiente regla de evolución para el umbral de fluencia equivalente:

$$K^p(\sigma_{ij}; \kappa^p) = r \sigma_t(\kappa^p) + (1-r) \sigma_c(\kappa^p) \quad (11)$$

donde  $\sigma_t(\kappa^p)$  y  $\sigma_c(\kappa^p)$  representan la evolución de los umbrales de fluencia en ensayos de tracción y compresión uniaxial respectivamente.

### 3.1.2 Proceso de daño

El umbral de daño se describe a través de una función de daño de la siguiente forma:

$$F^d = f^d(\sigma_{ij}) - K^d(\sigma_{ij}; \kappa^d) \leq 0 \quad (12)$$

donde  $f^d(\sigma_{ij})$  es la tensión equivalente definida en el espacio de tensiones la cual puede ser evaluada utilizando funciones conocidas de la teoría de la plasticidad o cualquier otra función especialmente desarrollada para daño,  $K^d(\sigma_{ij}; \kappa^d)$  es el umbral de daño equivalente y  $\kappa^d$  es la variable de endurecimiento de daño.

La variable de endurecimiento en daño varía entre 0, para el material virgen, a 1, para el material completamente dañado. Se obtiene normalizando la energía disipada por daño a la unidad.

$$\dot{\kappa}^d = \left[ \frac{r}{g_f^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_c^{*d}} \right] \psi^0 \dot{d} \quad (13)$$

$$g_f^{*d} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i| R^{od}}{f^d} g_f^d \quad g_c^{*d} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{f^d} g_c^d \quad (14)$$

$\Psi^0$  es la densidad de energía libre de Helmholtz del material no dañado,  $d$  es la variable de daño escalar que varía entre 0 y 1,  $R^{od}$  es la relación entre los umbrales de daño en compresión uniaxial y tracción uniaxial,  $g_f^d$  y  $g_c^d$  son las máximas densidades de energía disipadas por daño en tracción uniaxial y compresión uniaxial respectivamente.

Se usa la siguiente ecuación para el umbral de daño equivalente:

$$K^d(\sigma_{ij}; \kappa^d) = r \sigma_t^d(\kappa^d) + (1 - r) \sigma_c^d(\kappa^d) \quad (15)$$

donde  $\sigma_t^d(\kappa^d)$  y  $\sigma_c^d(\kappa^d)$  representan la evolución de los umbrales de daño en ensayos de compresión y tracción uniaxial respectivamente.

### 3.2 Plasticidad y daño acoplados

La evolución de las deformaciones plásticas y del daño se obtiene de la solución simultánea de las siguientes ecuaciones denominadas condiciones de consistencia de problema:

$$\begin{cases} \dot{F}^p = 0 \\ \dot{F}^d = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Las ecuaciones (16) son dos ecuaciones lineales en  $\dot{\lambda}$  y  $\dot{d}$  que pueden ser fácilmente resueltas.

La ley constitutiva secante se puede escribir como sigue:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = (1 - d) C_{ijkl}^0 (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (17)$$

La ley constitutiva tangente puede obtenerse derivando la Ec. (17) e incorporando los valores de  $\dot{\lambda}$  y  $\dot{d}$  obtenidos de la solución simultánea de las Ec. (16) (Luccioni et al. (1996)).

### 3.3 Modelo utilizado para las Fibras

Se considera que el fenómeno inelástico de deslizamiento puede incluir deformaciones irreversibles y degradación de rigidez. La deformación plástica de las fibras mismas, en conjunto con el deslizamiento fibra-matriz, se modelan a través de un modelo elastoplástico acoplado con daño para materiales ortótropos que se obtiene a partir del mismo modelo descripto para la matriz, pero incluyendo la ortotropía. Normalmente, las fibras se deslizan antes de entrar en fluencia por lo que el límite elástico representa el umbral de deslizamiento que es marcadamente menor en la dirección de las fibras. Tanto la deformación plástica de las fibras como su deslizamiento respecto de la matriz están orientados en la dirección axial de las mismas. Para tener en cuenta esta ortotropía se usa el concepto de mapeo de espacios (Betten (1998); Ruano et al. (2015)). Se supone que existen dos espacios, el espacio ortótropo real y un espacio isótropo ficticio. Los tensores de tensión en ambos espacios están relacionados a través de un tensor de transformación  $A_{klij}$  que contiene la información sobre la ortotropía del material

$$\tau_{kl} = A_{klij} \sigma_{ij} \quad (18)$$



donde  $\tau_{kl}$  y  $\sigma_{ij}$  son las tensiones en el espacio isótropo ficticio y en el espacio ortótropo real respectivamente. Se supone que el tensor  $A_{klij}$  es un tensor diagonal (Toledo et al. (2008)):

$$A_{klij} = \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{km}\delta_{ln} \frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}_{mn}} \quad (19)$$

donde  $\delta_{im}$  es el delta de Kronecker,  $\bar{\tau}$  es el límite elástico en el espacio isótropo ficticio y  $\bar{\sigma}_{mn}$  es el valor del umbral elástico en el espacio ortótropo real en la dirección  $m$  en el plano normal a  $n$ . Como simplificación, se considera en este trabajo que la ortotropía que se manifiesta en los umbrales plásticos es la misma que la que aparece en los umbrales de daño. De esta manera, se usa el mismo tensor de transformación  $A_{klij}$  para ambos fenómenos inelásticos.

El problema se resuelve en el espacio isótropo ficticio y luego los resultados son mapeados al espacio ortótropo real. Los umbrales de daño y plasticidad en el espacio ortótropo real se definen a través de las funciones  $F^{ps}$  y  $F^{ds}$  que pueden expresarse como sigue:

$$\begin{aligned} F^{ps}(\sigma_{ij}, \kappa^{ps}) &= \bar{F}^{ps}(\tau_{ij}, \bar{\kappa}^{ps}) = \bar{f}^{ps}(\tau_{ij}) - \bar{K}^{ps}(\bar{\kappa}^{ps}) = 0 \\ F^{ds}(\sigma_{ij}, \kappa^{ds}) &= \bar{F}^{ds}(\tau_{ij}, \bar{\kappa}^{ds}) = \bar{f}^{ds}(\tau_{ij}) - \bar{K}^{ds}(\bar{\kappa}^{ds}) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$\bar{F}^{ps}$  es la función que define el umbral de deformaciones permanentes en el espacio isótropo ficticio,  $\bar{f}^{ps}$  es la tensión equivalente definida en este trabajo mediante la función de Von Mises para materiales isótropos y  $\bar{K}^{ps}(\bar{\kappa}^{ps})$  representa la tensión de arrancamiento en función de una variable de endurecimiento plástico  $\bar{\kappa}^{ps}$ , que se obtiene a partir de curvas de arrancamiento de fibras. De manera análoga,  $\bar{F}^{ds}$  es la función que define el umbral de daño en el espacio isótropo ficticio,  $\bar{f}^{ds}$  es la tensión equivalente definida en este trabajo mediante la función de Von Mises para materiales isótropos y  $\bar{K}^{ds}(\bar{\kappa}^{ds})$  representa la tensión de arrancamiento en función de una variable de endurecimiento por degradación  $\bar{\kappa}^{ds}$ , que se obtiene a partir de curvas de arrancamiento de fibras.

La evolución de las deformaciones permanentes en las fibras y en la interfaz fibra/matriz se obtiene mediante la regla de flujo plástico utilizando también el concepto de mapeo de espacios.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{ps} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \tau_{kl}} \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \tau_{kl}} A_{klij} \quad (21)$$

donde  $G$  representa la función de potencial en el espacio ortótropo real,  $\bar{G}$  es la función de potencial definida en el espacio isótropo ficticio y  $\dot{\lambda}$  es el parámetro de consistencia plástica.

La solución del problema se encuentra planteando las condiciones de consistencia (16) en el espacio isótropo ficticio para obtener de allí la evolución del parámetro de consistencia plástica y de la variable de daño.

### 3.4 Modelo deslizamiento fibra matriz

En fibras de eje curvo la resistencia al deslizamiento es aportada por la fricción generada en la interfaz durante el deslizamiento y además el gancho genera un efecto local en el extremo que aporta mayor resistencia al arrancamiento, respecto de las fibras lisas. Si las fibras están inclinadas respecto de la fisura se genera un aporte a la resistencia al arrancamiento que depende de la deformación por flexión de las mismas. La ecuación de equilibrio se obtiene del principio de potencias virtuales y resulta (Isla (2014)):

$$P = \int_L \left( \frac{d\tilde{\epsilon}_s}{d\delta} N + \left( \frac{d\tilde{\epsilon}_s}{d\delta} C + \frac{dC}{d\delta} \right) M + T_{fm} \left( 1 - \int_s^L \frac{d\tilde{\epsilon}_s}{d\delta} ds \right) \right) ds \quad (22)$$

donde  $M$  es el momento flector en la fibra,  $C$  es la curvatura de la fibra,  $N$  es el esfuerzo normal en la fibra,  $\tilde{\epsilon}_s$  es la deformación axial de la fibra,  $\delta$  es el deslizamiento del extremo libre de la fibra,  $L$  es la longitud embebida y  $T_{fm}$  es la resultante de las fuerzas tangenciales en la interfaz (Isla (2014)).

Con este modelo se puede generar la curva de arrancamiento que se utiliza como función de endurecimiento en las Ecs. (16). Como simplificación y debido a que no se cuenta con resultados experimentales, se usa la misma curva en tracción que en compresión.

## 4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

### 4.1 Tracción y compresión uniaxial cíclica

A modo de ejemplo, se presenta en primer lugar la respuesta del modelo propuesto para HRF en tracción y compresión uniaxial.

En la Figura 4 se muestran las curvas tensión-desplazamiento de la matriz, de las fibras (multiplicada por 0.01) y del compuesto obtenidas para un hormigón de 35.8 MPa de resistencia a compresión con 50 kg/m<sup>3</sup> de fibras de acero con gancho de 50 mm de longitud y 1 mm de diámetro sometido a tracción uniaxial con ciclos de carga y descarga.

Se puede ver la colaboración de las fibras que dan lugar a un aumento de la resistencia a tracción del HRF después del primer pico de tensión. En la Figura 4 se evidencian también las deformaciones permanentes y degradación de rigidez de cada una de las componentes del HRF. Se observa cómo se combinan las tensiones de ambas componentes. Al descargar, la matriz queda traccionada y las fibras comprimidas. Para este ensayo en el que los ciclos no implican reversión de la carga, no se observan lazos de histéresis. Sin embargo, si se carga en compresión después de la descarga sí aparecen.

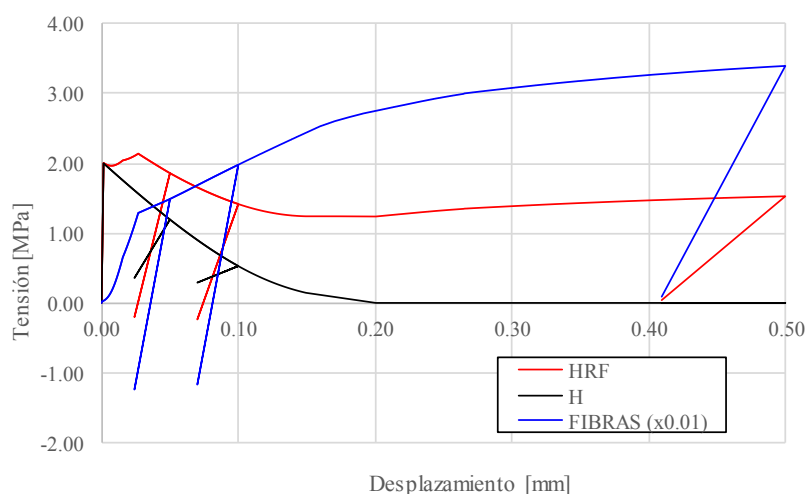


Figura 4: Respuesta a tracción uniaxial en el hormigón, fibras y HRF.

La Figura 5 muestra la respuesta obtenida para el mismo HRF cuando se lo somete a compresión uniaxial cíclica. Se presenta también la respuesta de la matriz de hormigón y la de

las fibras (multiplicada por 0.1). Se puede ver el comportamiento inelástico de la matriz y las fibras con deformaciones permanentes y degradación de rigidez, fenómenos que también se evidencian en el compuesto. Debido al modelo utilizado para el hormigón, su respuesta cíclica no presenta lazos de histéresis. Sin embargo, la respuesta del compuesto sí evidencia lazos de histéresis similares a los mostrados en los resultados experimentales presentados por [Chi et al. \(2017\)](#). Se puede ver que esos lazos resultan de la combinación del comportamiento de ambas componentes. Al descargar, debido a la diferencia de deformaciones inelásticas, la matriz queda comprimida y las fibras traccionadas, llegando a deslizar y esto es lo que da lugar a la formación de los lazos de histéresis en el compuesto. Debido a la forma de la curva de endurecimiento de las fibras (curva de *pull-out*) esos lazos resultan menores cuanto más se degrada la adherencia de las fibras.

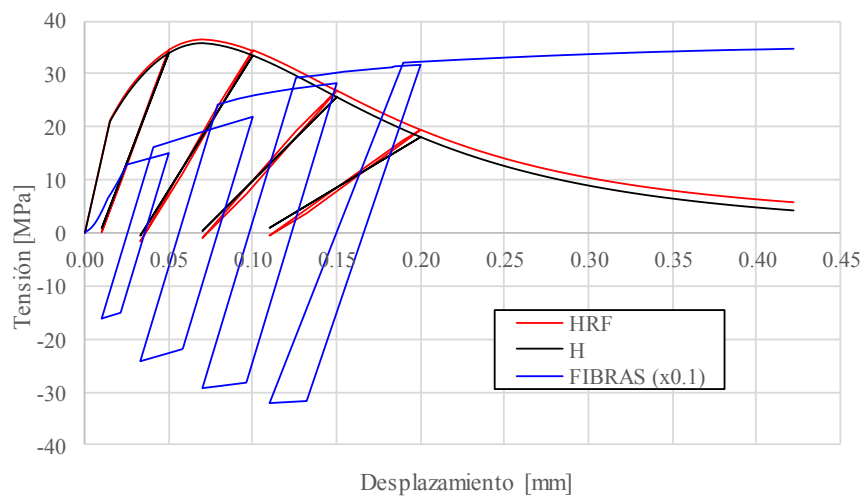


Figura 5: Respuesta a compresión uniaxial en el hormigón y en el HRF.

## 4.2 Respuesta en flexión

En este apartado se simulan numéricamente los ensayos de flexión cíclica cuyos resultados se presentaron en la [Figura 2](#). En la [Figura 6](#) se muestra la malla de elementos finitos y las dimensiones de las vigas, así como las condiciones de apoyo y carga. El problema se resuelve en estado plano de tensiones utilizando elementos cuadriláteros de 4 nodos y 2x2 puntos de integración. El HRF se simula con el modelo descrito en la [Sección 3](#) y con los parámetros presentados en la [Tabla 1](#).

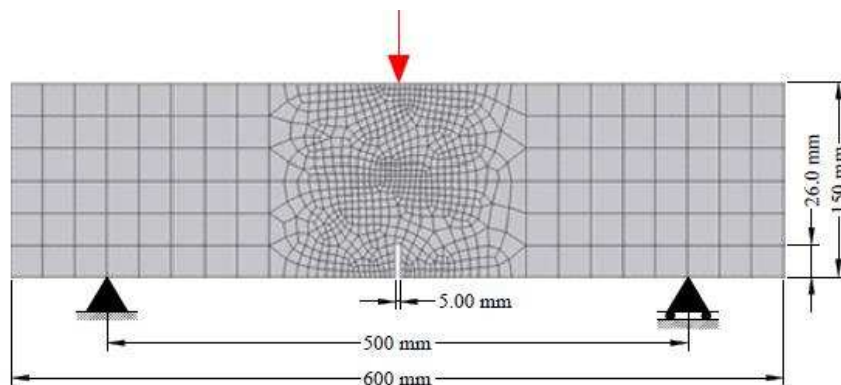


Figura 6: Malla de elementos finitos correspondiente a la viga entallada.

	Propiedad	
Hormigón	Módulo de elasticidad E [MPa]	28100.0
	Coefficiente de Poisson $\nu$	0.2
	Resistencia a compresión uniaxial $\sigma_c^p$ [MPa]	35.8
	Límite elástico en compresión uniaxial $\sigma^0$ [MPa]	21.0
	Relación entre límites elásticos en compresión y en tracción $R^0$	11.0
	Energía de fractura $G_f$ [MPa.mm]	0.0
	Energía de aplastamiento $G_c$ [MPa.mm]	8.0
	Energía de fractura del modelo de daño $G_f^D$ [MPa.mm]	0.1
	Energía de aplastamiento del modelo de daño $G_c^D$ [MPa.mm]	6.0
	Umbral de inicio del daño en compresión $\sigma_D^0$ [MPa]	21
Fibras	Módulo de Elasticidad E [GPa]	210
	Coefficiente de Poisson $\nu$	0.2
	Tensión de rotura [MPa]	351
	Energía de fractura [MPa.mm]	1
	Energía de aplastamiento [MPa.mm]	1
	Relación entre límites elásticos en compresión y en tracción	1
	Energía de fractura del modelo de daño [MPa.mm]	100
	Energía de aplastamiento del modelo de daño [MPa.mm]	100
	Umbral de inicio del daño en compresión [MPa]	200

Tabla 1: Propiedades mecánicas del hormigón y de las fibras.

En primer lugar, se reproduce el ensayo standard bajo deformaciones crecientes. En la [Figura 7](#) se muestra la variación de la carga en función de la apertura de fisura CMOD obtenida numéricamente y su comparación con los resultados experimentales. Se observa que estos últimos presentan diferencias notables entre sí lo cual es normal en este tipo de materiales en los que no se logra una distribución uniforme de las fibras. No obstante, los resultados numéricos siguen aproximadamente la media de los resultados experimentales, mostrando un primer pico que es casi coincidente con el correspondiente a la resistencia a tracción del hormigón, luego una caída seguida de endurecimiento hasta alcanzar casi el pico inicial.

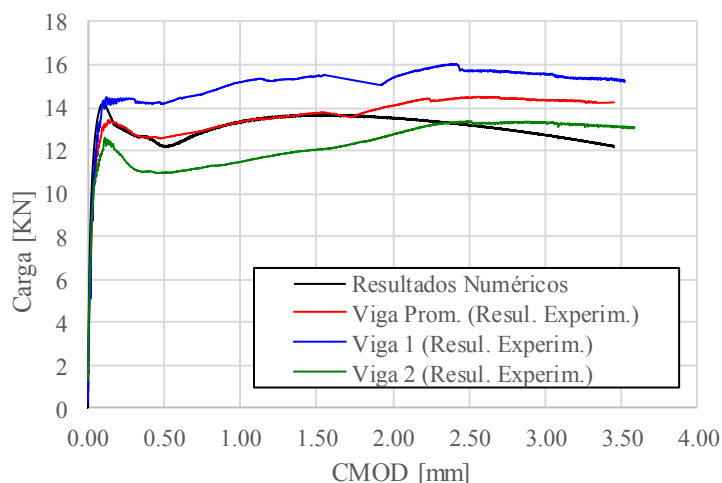


Figura 7: Ensayo de flexión standard de HRF. Comparación resultados numéricos y experimentales.

En la [Figura 8](#) y la [Figura 9](#) se presentan las respuestas correspondientes a ensayos de carga hasta distintas aperturas de fisura y luego descarga. Hay que tener en cuenta que en los ensayos estas descargas no se hicieron con control de desplazamientos. Simplemente se midió en punto donde la fuerza se anula. La descarga no necesariamente es lineal como aparece representada en las [Figura 8](#) y [Figura 9](#) (resultados experimentales). Teniendo en cuenta esta observación, el modelo numérico representa aproximadamente el comportamiento promedio no solo en carga sino también en descarga, evidenciando una degradación progresiva de la rigidez secante de las vigas. Las pruebas realizadas incluyendo solamente la degradación de rigidez de la matriz no representaban bien esta degradación ya que cuando la fisura está muy abierta la contribución del hormigón es prácticamente nula.

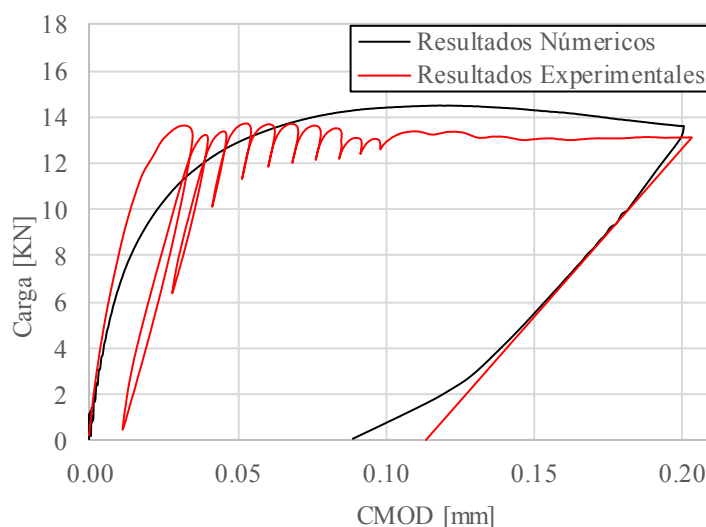


Figura 8: Ensayo de flexión de HRF. Carga hasta CMOD = 0.2 mm y descarga. Comparación resultados numéricos y experimentales.

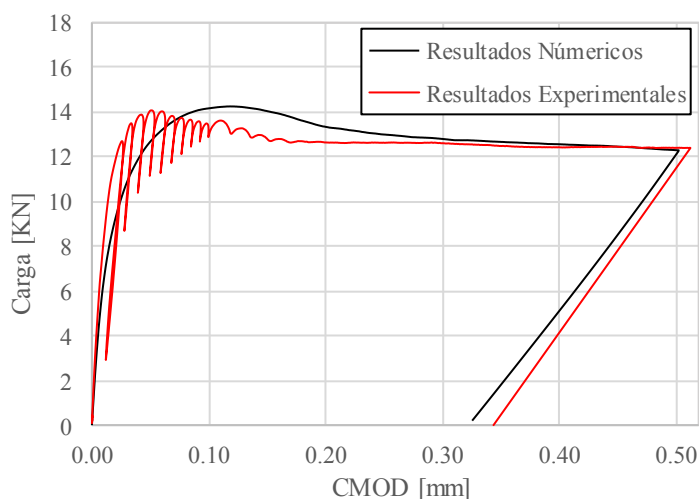


Figura 9: Ensayo de flexión HRF. Carga hasta CMOD = 0.50 mm y descarga. Comparación resultados numéricos y experimentales

En la [Figura 10](#) se presenta la curva de respuesta obtenida con el modelo para ciclos de carga constante a partir de CMOD = 0.2 mm.

Se observa que, si bien se forman lazos de histéresis en los ciclos de carga y descarga, la

forma de los mismos ciclos difiere de la registrada en los ensayos. Los resultados experimentales muestran que en la recarga el desplazamiento final antes de la descarga se alcanza para valores de carga menores, de manera que los lazos de histéresis se cruzan antes de alcanzar la carga máxima y la respuesta cíclica queda por debajo de la correspondiente a carga monótona creciente. En la respuesta numérica obtenida la curva vuelve al mismo punto de la descarga. Para poder lograr que la respuesta numérica presente lazos de histéresis similares a los observados experimentalmente sería necesario incluir endurecimiento cinemático en el modelo constitutivo.

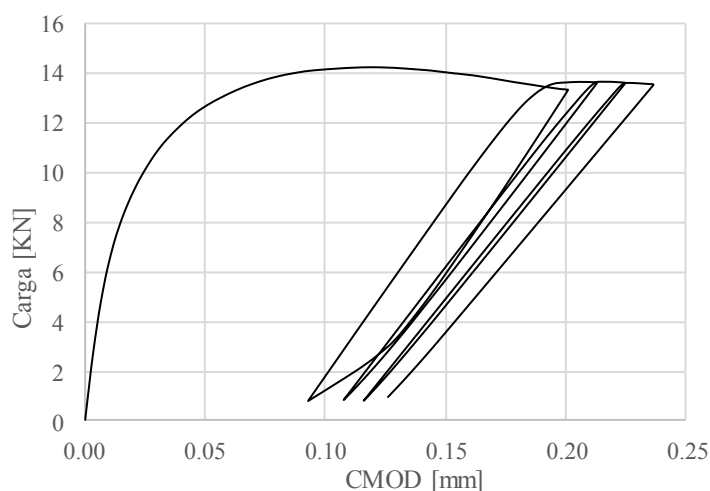


Figura 10: Ensayo de flexión cíclica de HRF a partir de CMOD=0.20 mm.

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un modelo constitutivo para reproducir el comportamiento cíclico del HRF. El enfoque permite individualizar el aporte de la matriz y de las fibras en la respuesta del compuesto. El modelo de compuestos reproduce adecuadamente el aporte de las fibras en el comportamiento del HRF en carga y descarga, con una degradación de rigidez progresiva al aumentar la deformación máxima alcanzada.

Para poder reproducir bien la pendiente de las descargas es necesario incluir la degradación de rigidez no sólo en el hormigón sino también en la respuesta en arrancamiento de las fibras que no puede observarse directamente en ensayos de *pull-out* con descarga. Esta degradación puede atribuirse a la degradación de la adherencia debida a la degradación de la matriz.

En compresión uniaxial cíclica se obtienen lazos de histéresis similares a los obtenidos experimentalmente

En los ensayos de flexión los resultados numéricos para carga monótona creciente siguen aproximadamente la respuesta experimental promedio. Las descargas a diferentes aperturas de fisuras muestran una degradación progresiva de la rigidez secante de las vigas similar a la observada experimentalmente. Bajo ciclos de carga y descarga la respuesta numérica presenta lazos de histéresis algo distintos a los observados en los ensayos. Para poder reproducir con mejor precisión la respuesta cíclica experimental sería necesario incluir endurecimiento cinemático en el modelo.

A los efectos de realizar una modelación más precisa, hacen falta resultados experimentales más completos sobre el comportamiento de las componentes (matriz y fibras) bajo carga cíclica. Hay que tener en cuenta, además, que en este trabajo se ha modelado en forma aproximada el fenómeno inelástico de arrancamiento de fibras, ajustando los fenómenos inelásticos de daño y

deformaciones permanentes para lograr reproducir la respuesta en flexión. Si se quiere modelar con más detalle este fenómeno es necesario disponer de ensayos de extracción con descarga en matriz fisurada. Esto, a su vez, brindaría información para extender el modelo de extracción de fibras de manera que pueda representar descarga y generar las curvas de endurecimiento discriminando los fenómenos inelásticos.

Como simplificación y debido a que no se cuenta con resultados experimentales, se usa la misma curva de endurecimiento en tracción que en compresión. Mientras la matriz no se fisure en HRF bajo tensiones de compresión se puede considerar aproximadamente que las fibras trabajan en régimen elástico, con lo cual no tiene importancia la forma de la curva de arrancamiento. Sin embargo, cuando se trabaja con cargas cíclicas que involucran apertura y cerrado de fisuras, habría que tener en cuenta que las fibras pueden pandear si se ven impedidas de deslizarse durante el proceso de cerrado de fisuras. La modelación de este comportamiento requiere la realización de ensayos para estudiarlo en más profundidad.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al CONICET, a la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica, al CIUNT y a la UNT por el apoyo económico brindado.

## REFERENCIAS

- Betten, J., Application of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity*, 4:29-46, 1998.
- Caggiano, A. and Martinelli, E., A unified formulation for simulating the bond behaviour of fibers in cementitious materials. *Material Design*, 42:204-213, 2012.
- Chi, Y., Yu, M., Huang, L. and Xu, L., . Finite element model of steel-polypropylene hybrid fiber reinforced concrete using modified concrete damage plasticity. *Engineering Structures*, 148:23-35, 2017.
- Cho, C., Kim, Y., Feo, L. and Hui, D., Cyclic responses of reinforced concrete composite columns strengthened in the plastic hinge region by HPFRC mortar. *Composite Structures*, 94:2246-2253, 2012.
- Douglas, K. and Billington, S., Rate dependence in high-performance fiber reinforced cement-based composites for seismic applications. *International RILEM Workshop on High Performance Fiber Reinforced Cementitious Composites in Structural Applications*, 17-25, 2006.
- Fischer, G. and Li, V., Effect of matrix ductility on deformation behavior of steel reinforced ECC flexural members under reversed cyclic loading conditions. *ACI Structural Journal*, 99(6):781-790, 2002.
- Fischer, G. and Li, V. C., Deformation behavior of fiber-reinforced polymer reinforced Engineered Cementitious Composite (ECC) flexural members under reversed cyclic loading conditions. *ACI Structural Journal*, 100(1):25-35, 2003.
- Germano, F. and Plizzari, G., Post-Peak Cyclic Behavior of Steel Fiber Reinforced Concrete under Bending. *High Performance Fiber Reinforced Cement Composites*, 6:313-320, 2012.
- Han, T. S., Feenstra, P. and Billington, S., S. Simulation of Highly Ductile Fiber-Reinforced Cement-Based Composite Components Under Cyclic Loading. *ACI Structural Journal*, 749-757, 2003.
- Hung, C. and Li, S., Three-dimensional model for analysis of high performance fiber reinforced cement-based composites. *Composites: Part B*, 45:1441-1447, 2014.
- Ilki, A., Yilmaz, E., Demir, C. and Kumbasar, N., 2004. *Prefabricated SFRC jackets for seismic*

- retrofit of non-ductile reinforced concrete columns*. s.l., s.n.
- Isla, F., Modelo para hormigón reforzado con fibras de acero. *PhD Tesis UNT*.2014.
- Kesner, K., Billington, S. and Douglas, K., Cyclic Response of Highly Ductile Fiber-Reinforced Cement-Based Composites. *ACI Materials Journal*, 100(5).2003.
- Liu, H., Xiang, T. and Zhao, R., Research on non-linear structural behaviors of prestressed concrete beams made of high strength and steel fiber reinforced concretes. *Construction and Building Materials*, 23:85-95, 2009.
- Li, V. C., 2002. *Reflections on the Research and Development of Engineered Cementitious Composites (ECC)*. s.l., s.n.
- Long, Y. and He, Y., 2017. *An anisotropic damage model for concrete structures under cyclic loading-uniaxial modeling*. s.l., s.n.
- Luccioni, B., Isla, F., Argañaraz, P., Forni, D. and Cadoni, E., Modelado de Hormigones de Ultra Altas Prestaciones Refrozados con Fibras bajo Altas Velocidades de Deformación. *Mecánica Computacional* , XXXIV:199-223, 2016.
- Luccioni, B., Oller, S. and Danesi, R., Coupled Plastic-Damaged Model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129:81-89, 1996.
- Luccioni, B., Ruano, G., Isla, F., Zerbino, R. and Giacco, G., A Simple approach to model SFRC. *Construction and Building Materials*,, 37:111-124, 2012.
- Martinola, G., Meda, A., Plizzari, G. A. and Rinaldi, Z., Strengthening and repair of RC beams with fiber reinforced concrete. *Cement & Concrete Composites*, 32:731-739, 2010.
- Oliver, J., Mora, D., Huespe, A. and Weyler, R., A micromorphic model for steel fiber reinforced concrete.. *International Journal Solids Structures*, 49:2990-3007, 2012.
- Parra Montesinos, G., High-Performance Fiber-Reinforced Cement Composites: An Alternative for Seismic Design of Structures. *ACI Structural Journal*, 102(5):668-675, 2005.
- Pinchin, D. and Tabor, D., Interfacial contact pressure and frictional stress transfer in steel fiber. *RILEM*, 337-344, 1978.
- Ruano, G., Isla, F. and Luccioni, B., Numerical modeling of reinforced concrete beams repaired and strengthened with SFRC. *Engineering Structures*, 86:168-181, 2015.
- Shannag, M. J. and Alhassan, M. A., Seismic Upgrade of Interior Beam-Column Subassemblages with High-Performance Fiber-Reinforced Concrete Jackets. *ACI Structural Journal*, 102(1):131-138, 2005.
- Toledo, M., Nallin, L. and Luccioni, B., A micro-macromechanical approach for composite laminates. *Mechanics of Materials*, 885-906, 2008.
- Tysmans, T., Wozniak, M., Remy, O. and Vantomme, J., Finite element modelling of the biaxial behavior of high-performance fibre-reinforced cement composites (HPFRCC) using Concrete Damaged Plasticity.. *Finite Elements in Analysis and Design*, 100:47-53, 2015.
- Wang, Y. and Lee, M. J., Ultra-high strength steel fiber reinforced concrete for strengthening of RC frames. *Marine Science and Tech*, 15(3):210-218, 2007.