

## ESTIMACIÓN DE LA EFICIENCIA DE ALETAS PLANAS CONTINUAS EN EQUIPOS DE INTERCAMBIO TÉRMICO

Felipe Suárez<sup>1</sup>, Sergio D. Keegan<sup>2</sup>, Osvaldo M. Martínez<sup>3</sup>,  
Néstor J. Mariani<sup>4</sup>, Guillermo F. Barreto<sup>5</sup>

1-Departamento de Mecánica, Facultad de Ingeniería, UNLP, La Plata, Argentina.  
srzfelipe@gmail.com

2-PROIRQ, Facultad de Ingeniería, UNLP – CINDECA, CCT La Plata, CONICET, La Plata, Argentina.  
ommartin@ing.unlp.edu.ar

3-PROIRQ, Facultad de Ingeniería, UNLP – CINDECA, CCT La Plata, CONICET, La Plata, Argentina.  
keegan@quimica.unlp.edu.ar

4- PROIRQ, Facultad de Ingeniería, UNLP – CINDECA, CCT La Plata, CONICET, La Plata, Argentina.  
nmariani@quimica.unlp.edu.ar

5-PROIRQ, Facultad de Ingeniería, UNLP – CINDECA, CCT La Plata, CONICET, La Plata, Argentina.  
barreto@quimica.unlp.edu.ar

**Palabras clave:** aletas continuas, eficiencia de aleta, intercambiadores de calor, aproximación unidimensional, superficies extendidas, transferencia de calor.

### Resumen

En este trabajo se presenta un modelo unidimensional (1D) denominado de dos aletas radiales equivalentes para predecir la velocidad de transferencia de calor desde o hacia aletas planas continuas solidarias a tubos de intercambiadores de calor. En este modelo se propone asimilar la aleta plana continua a dos aletas de tipo radial, manteniendo el perímetro exterior del tubo y el área disponible para la transferencia de calor. El parámetro libre restante del modelo se obtiene estableciendo que el mismo replique exactamente el comportamiento térmico (eficiencia de aleta) de la aleta continua real (2D) cuando la velocidad de transferencia de calor por conducción a través de la aleta es relativamente alta frente a la velocidad de transferencia de calor por convección entre la aleta y el medio fluido, situación que, por otra parte, es la que normalmente se presenta en sistemas aletados. Se demuestra en el trabajo que este criterio de ajuste para el parámetro libre permite estimar la eficiencia de una aleta continua con un nivel de precisión apreciablemente superior a las alternativas comúnmente empleadas (*i.e.*, modelo 1D de una aleta radial y método de los sectores) en todo el rango condiciones analizadas (*i.e.*, valores de la relación entre velocidad de transferencia por conducción frente a la de convección entre 0 e infinito) para tubos de sección circular y aplastados con arreglos en línea y escalonado.

### 1. Introducción

Los intercambiadores de calor de tubos aletados son extensamente utilizados en el procesamiento de gas criogénico, en la industria aeroespacial, en sistemas de climatización, en la industria automotriz, entre algunas de las múltiples aplicaciones que presentan. Se destacan entre los equipos de transferencia de calor debido a su alta eficiencia y multifuncionalidad. Existe en la bibliografía abierta una considerable cantidad de información referida a diversos aspectos del diseño de intercambiadores de tubos y

placas aletadas [1, 2, 3, 4]. En particular, la estimación de la eficiencia, que resulta un aspecto crucial porque hace a la esencia de este tipo de equipos, ha sido un tópico tratado en numerosos estudios cuando se trata de superficies dotadas de aletas individuales. Así pueden identificarse una cantidad importante de trabajos relativamente recientes [5, 6, 7]. No obstante, al momento de abordar el caso de equipos con aletas de tipo continuas, la bibliografía dista de ser abundante y, si bien pueden encontrarse contribuciones referidas al tema, cabe la posibilidad de plantear alternativas que permitan alcanzar resultados superadores al momento de predecir la velocidad de transferencia de calor.

En términos generales, para analizar la conducción térmica en aletas en equipos de transferencia de calor debe considerarse que la misma tiene lugar en más de una dimensión espacial. Los problemas 3D (tridimensionales) no se presentan dado que normalmente no resulta necesario tener en cuenta las variaciones de temperatura en una de las direcciones, ya que por las características constructivas de las aletas (*i.e.*, espesores muy pequeños) dichas variaciones son despreciables. No obstante, las geometrías 2D (bidimensionales) son frecuentes en el caso de aletas continuas, como las utilizadas en el caso de intercambiadores de calor tubulares que procesan gases [8] y aletas individuales de forma poligonal simétrica [9] sustituyendo a las típicas aletas radiales. En estas circunstancias debe recurrirse a alguna herramienta numérica que permita resolver la ecuación diferencial representativa del balance de energía y obtener la velocidad de transferencia de calor (eficiencia de aleta) entre la aleta y el medio [10, 11, 12, 13]. Con las plataformas de cálculo actuales esta operación no debería representar una dificultad simulación de los mencionados intercambiadores puede ser necesario evaluar la velocidad de transferencia de calor desde las aletas una cantidad importante de veces (del orden del millar); más aún, en aplicaciones que requieren simulación recurrente, como las de optimización o diseño de una planta, los órdenes de magnitud pueden elevarse aún más, con lo cual los procedimientos de tipo numérico aplicados a más de una dirección espacial resultan una opción poco viable a los fines prácticos.

Una alternativa válida para abordar el problema es el empleo de modelos de tipo unidimensional, entre los cuales se destaca el denominado de la aleta radial equivalente [14, 15], que denominaremos modelo 1D-SERF. En este modelo se propone asimilar la aleta plana continua a una aleta de tipo radial, con el mismo perímetro del tubo y cuya área de transferencia resulte idéntica al área de transferencia de la aleta real. Este modelo permite predecir la eficiencia de aletas continuas solidarias a tubos de sección circular con una precisión del orden del 5% para arreglos en línea (ver Fig. 1a y región punteada en la Tabla 1) cuando  $4 > P_1 = X_t/D$  (paso horizontal/diámetro)  $> 2$  con  $1.5 > P_t/P_1$  ( $P_t = X_t/D$ ). Para el caso de arreglos escalonados (ver Fig. 1b) en los mismos rangos puede alcanzarse una precisión del 1%. No obstante, fuera de los rangos mencionados los errores pueden crecer significativamente. Por ejemplo, en el caso de un arreglo en línea para  $P_1 = 3$  y  $P_t/P_1 = 2.5$  los errores pueden alcanzar aproximadamente el 11%, pudiendo incrementarse hasta valores mayores al 20% si  $P_t/P_1 = 4$ .

Otro método propuesto en la bibliografía, de naturaleza esencialmente numérica, es el denominado método de los sectores (SECT) [9]. Para la aplicación del mismo se propone dividir la geometría de la aleta en un determinado número de sectores y asimilar cada sector a una aleta radial que posea el mismo ángulo, área y perímetro que el sector. De esta forma, el método logra una mejora en la predicción de la eficiencia respecto del método de la aleta equivalente para pasos longitudinales pequeños ( $P_1 < 2$ ), pero no para

pasos mayores cuando la relación de pasos es baja. Por ejemplo, para arreglos en línea, en el rango de  $4 > P_1 > 2$  con  $1.5 > P_t/P_l$ , ambos métodos presentan errores similares.

Por ende, para aletas solidarias a tubos de sección circular, tanto si se requiere una precisión superior al 5% en los rangos antes especificados para  $P_1$  y  $P_t/P_l$ , como en el caso de valores fuera de estos rangos, resulta necesario disponer de un modelo alternativo. Asimismo, resulta de interés analizar el caso de aletas solidarias a tubos de intercambiadores de calor que presenten otro tipo de sección transversal, por ejemplo, los denominados tubos aplastados, los cuales conducen a menores pérdidas de carga y mayores coeficientes peliculares para el gas que circula por el exterior (entre las aletas), que los tubos de sección circular para la misma área de transferencia de calor.

Con esta finalidad en este trabajo se propone un modelo, también unidimensional, denominado de dos aletas radiales equivalentes (1D-TERF). El parámetro principal de este modelo se obtiene estableciendo que el mismo replique exactamente el comportamiento térmico (eficiencia de aleta) de una aleta continua real (2D) cuando la velocidad de transferencia de calor por conducción a través de la aleta es relativamente alta frente a la velocidad de transferencia de calor por convección entre la aleta y el fluido (situación deseada en este tipo de sistemas). Se demuestra que el criterio de ajuste propuesto permite estimar la eficiencia de una aleta continua con un nivel de precisión superior al modelo 1D-SERF y al método de los sectores en todo el rango condiciones analizadas (*i.e.*, valores de la relación entre velocidad de transferencia por conducción frente a convección entre 0 e infinito) para tubos de sección circular y aplastados con arreglos en línea y escalonado.

## 2. Planteo de la problemática

Las Figuras 1 (a-c) muestran esquemáticamente las distintas configuraciones de arreglos y tubos analizados para intercambiadores tubulares con aletas continuas solidarias a los tubos. Con  $X_t$  y  $X_l$  en la Fig. 1 se indican los pasos transversal y longitudinal respectivamente. Para el caso de tubos con sección circular (Figs. 1a y b) los correspondientes pasos adimensionales son  $P_t = X_t/D$  y  $P_l = X_l/D$  con  $D$  el diámetro de los mismos. En la Figura 1.c, que corresponde a tubos aplastados,  $D_l$  se refiere al largo del tubo en la dirección de  $X_l$  mientras que  $D_t$  es el ancho del tubo aplastado en la dirección de  $X_t$ . En este caso los pasos adimensionales se calculan como  $P_t = X_t/D_t$  y  $P_l = X_l/D_l$ . Se asume que todas las aletas y los tubos que componen el haz se comportan, desde el punto de vista térmico, de manera idéntica; de forma tal que teniendo en cuenta la simetría resulta suficiente analizar las regiones rayadas en las Figs. 1a-c.

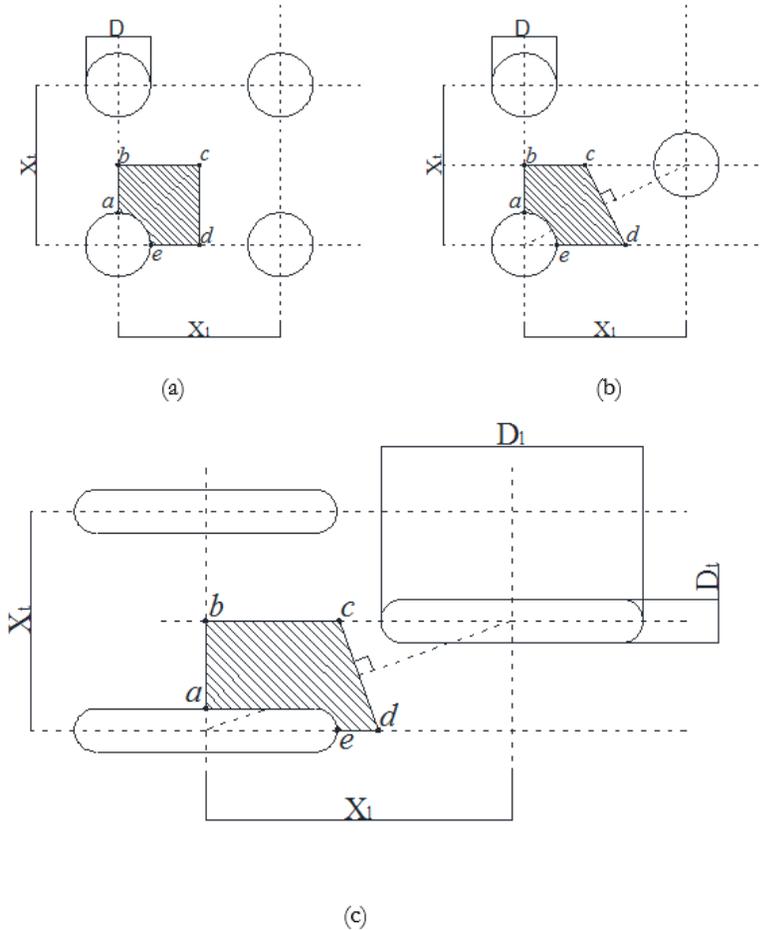


Figura 1. Configuración de tubos y arreglos analizados.

- (a) Tubos de sección circular con arreglo en línea
- (b) Tubos de sección circular con arreglo escalonado
- (c) Tubos aplastados con arreglo en línea

Se incluye el caso de aletas solidarias a tubos aplastados (valen los comentarios para aquellos cuya sección sea una elipse) si bien su uso no resulta extendido, en virtud de que esta geometría de tubo presenta algunas ventajas respecto a los tubos de sección circular, a la vez que ha sido menos estudiada en la literatura [16, 17]. En primer término para la misma sección transversal de tubo el perímetro resulta considerablemente mayor. Esta resulta una ventaja siempre y cuando la pérdida de carga del fluido que circula por el interior de los tubos, normalmente líquido, no resulte una limitante. Por otro lado, y ahora respecto al gas que circula por el exterior de los tubos, la forma de los tubos aplastados conduce a un menor coeficiente de fricción y a un mayor coeficiente de transferencia de

calor que para tubos de sección circular del mismo perímetro (*i.e.*, implica la misma área de transferencia de calor). Naturalmente, para el mismo peso de material los tubos aplastados resultan más costosos que los de sección circular. Asimismo, los tubos de sección circular permiten distribuir mejor la presión interna, al contrario de los tubos aplastados que tienden a concentrar las tensiones sobre los extremos del tubo. No obstante, este último aspecto no debiera representar una limitación seria en tanto este tipo de intercambiadores, en general, no se emplea en servicios a elevadas presiones.

La ecuación diferencial que representa el balance de energía para una aleta plana continua, como las mostradas en las Figuras 1 (a-c), de conductividad térmica uniforme ( $k$ ) que intercambia calor con un medio a una temperatura  $T_\infty$  cuyo coeficiente convectivo ( $h$ ) se considera uniforme, es:

$$k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] = h \frac{2}{\delta} (T - T_\infty) \quad (1)$$

En la Ec. (1) se ha asumido que no se produce ningún cambio de fase en el intercambio térmico entre la aleta y el medio fluido y que el espesor de la aleta es lo suficientemente pequeño como para poder despreciar cualquier variación de temperatura a lo largo del mismo (*i.e.*, en la dirección perpendicular al plano de las Figs. 1 a-c).

La Ec. (1) puede ser escrita en forma adimensional del siguiente modo:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} - m^2 \ell^2 \theta = 0 \quad (2a)$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty} \quad (2b) \quad ; \quad m^2 = \frac{h \ 2}{k \ \delta} \quad (2c)$$

$$y^* = \frac{y}{\ell} \quad (2d) \quad ; \quad x^* = \frac{x}{\ell} \quad (2e)$$

donde  $\ell = A_T/P$  se denomina longitud característica y se define como el cociente entre el área exterior de la aleta disponible para el intercambio térmico con el medio por convección,  $A_T$  (*i.e.*, regiones sombreadas en las Figs. 1 a-c) y el perímetro del tubo,  $P$  (arco  $\overline{ea}$  en las Figs. 1 a-c).  $T_b$  en la Ec. (2b) es la temperatura en la base de la aleta (sobre el perímetro del tubo) que se supone constante.

Las condiciones de contorno que acompañan a la Ec (2a) son:

$$\theta = 1 \quad \text{sobre } \overline{ea} \quad \text{para las Fig. 1 a-c,} \quad (2f)$$

$$\nabla_n \theta = 0 \quad \text{sobre } \overline{abcde} \quad \text{para las Fig. 1 a-c} \quad (2g)$$

La eficiencia de la aleta se define como la velocidad de transferencia real respecto a la velocidad de transferencia de calor máxima (*i.e.*, la que tendría lugar desde la aleta si la temperatura en todos los puntos de la misma fuese igual a la temperatura sobre el perímetro del tubo al que se encuentra unida solidariamente la aleta):

$$\eta = \frac{\iint_{A_T} \theta \, dx \, dy}{A_T} \quad (3)$$

### 2.1. Aproximación del comportamiento de la aleta para altas velocidades de transferencia de calor por conducción

La solución de la Ec. (2a) a bajos valores de  $(m\ell)$  (*i.e.*, altas velocidades de transferencia por conducción térmica en la aleta) puede encontrarse en la literatura para el problema, completamente análogo, de difusión-reacción química en catalizadores sólidos [18]. En estas condiciones, por medio de un análisis de perturbación  $\eta$  puede expandirse en serie de potencias de  $(m\ell)^2$ :

$$\eta_{\text{Bajos}} = 1 - \gamma (m\ell)^2 \quad (4a)$$

donde  $\gamma$  se expresa como sigue:

$$\gamma = \frac{\iint_{A_T} G \, dx \, dy}{\ell^2 A_T} \quad (4b)$$

$G$ , denominado campo auxiliar, es la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -1 \quad \text{sobre } A_T \quad (5a)$$

$$G=0 \quad \text{sobre } \overline{ea} \quad \text{para las Fig. 1 a-c,} \quad (5b)$$

$$\nabla G=0 \quad \text{sobre } \overline{abcde} \quad \text{para la Fig. 1 a-c} \quad (5c)$$

La Ec. (4a) corresponde a una serie truncada de dos términos con  $O[(m\ell)^4]$ . El parámetro sólo depende de la geometría de la aleta (*i.e.*, tipo de tubo, arreglo y relaciones de pasos). Por otra parte, la solución a las Ecs. (5) para el campo auxiliar  $G$  y por ende , debe llevarse a cabo una única vez; con esta finalidad se ha probado que la plataforma Comsol Multiphysics®, que emplea el método de los elementos finitos para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales, resulta completamente apropiada.

En el apéndice se incluyen valores numéricos del parámetro para las distintas configuraciones consideradas en este trabajo (tubos de sección circular con arreglos en línea y escalonado y tubos aplastados escalonados para distintos valores de las relaciones de pasos). Las mismas cubren prácticamente la totalidad de los casos que pueden presentarse en la práctica.

### 3. Modelos unidimensionales de una y dos aletas radiales equivalentes y método de sectores

El balance de conservación de la energía (1D) para una aleta radial de espesor despreciable puede escribirse:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - m^2 \theta = 0 \quad (6a)$$

donde  $\theta$  y  $m$  se definen conforme a (2b) y (2c)

Las condiciones de contorno que acompañan a (6a) son:

$$\theta=1 \quad \text{en} \quad r=R_i \quad (6b) \quad ; \quad \frac{d\theta}{dr}=0 \quad \text{en} \quad r=R_E \quad (6c)$$

La solución de las Ecs. (6) puede encontrarse en los libros de texto [19] y conduce a la siguiente expresión para la eficiencia de aleta:

$$\eta_{1D} = \frac{2}{m_1(R_r^2 - 1)} \left[ \frac{I_1(m_1 R_r) K_1(m_1) - K_1(m_1 R_r) I_1(m_1)}{K_1(m_1 R_r) I_0(m_1) + I_1(m_1 R_r) K_0(m_1)} \right] \quad (7)$$

donde  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $K_0$  y  $K_1$  son las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda clase y orden entero 0 y 1, respectivamente.  $R_r=R_E/R_i$  y  $m_1=m R_i$  con  $R_i$  y  $R_E$  radios interno y externo de la aleta radial.

#### 3.1. Modelo de una aleta radial equivalente (1D-SERF)

En este modelo se asume que la eficiencia térmica de la aleta plana continua real puede estimarse asimilándola a una aleta de tipo radial, con el mismo perímetro de tubo ( $P$ ) que la aleta real y cuya área de transferencia resulte idéntica al área de transferencia de la aleta real ( $A_T$ )(ver Figs. 1a-c). Por lo tanto,

$$P_{1D-SERF} = P \quad (8a) \quad ; \quad A_{1D-SERF} = A_T \quad (8b)$$

De las Ecs. (8a y b) se obtienen el radio interno y externo de la aleta radial del modelo 1D-SERF. Para tubos de sección circular, el radio interno coincide con el radio real del tubo, mientras que para tubos aplastados es necesario calcular un radio interno equivalente que cumpla con la ecuación (8a).

A este modelo se lo denominará de una aleta radial equivalente (1D-SERF). Cabe destacar que Zabronski [14] desarrolló una solución para evaluar la eficiencia de una aleta plana con arreglo en línea y  $P_i=P_t$  y mostró que dicha solución resulta similar a la de una aleta radial siempre que se cumplan (8a y b). Años más tarde, Kuan y col. (1984) [15] extendieron esta idea a otras geometrías de tubo.

Para estimar la eficiencia de aleta a través del modelo 1D-SERF debe emplearse la expresión (7).

### 3.2. Modelo de dos aletas radiales equivalentes (1D-TERF)

La Figura 2 muestra esquemáticamente el modelo de dos aletas radiales equivalentes (1D-TERF), el cual representa una extensión del modelo 1D-SERF. Para formular el modelo se supone que ambas aletas radiales (F1 y F2) presentan el mismo radio interno ( $R_i$ ).

Se define:

$$\ell_j = \frac{A_j}{P_j} = \frac{\frac{\phi_j}{2} (R_{Ej}^2 - R_i^2)}{\phi_j R_i} = \frac{R_i}{2} \left( \frac{1 - y_j^2}{y_j^2} \right) \quad \text{con } j=F1, F2 \quad (9)$$

Donde  $y_j=R_i/ R_{Ej}$ , siendo  $A_j$  el área de cada aleta del modelo 2D-TERF y  $P_j$  su perímetro interno.

Para emplear el modelo 1D-TERF resulta necesario especificar cinco parámetros (*i.e.*,  $R_i$ ,  $R_{E,F1}$ ,  $R_{E,F2}$ ,  $\phi_{F1}$  y  $\phi_{F2}$ ). Con esta finalidad se plantean las siguientes relaciones:

$$P_{F1} + P_{F2} = P \quad (10a) \quad A_{F1} + A_{F2} = A_T \quad (10b)$$

$$\phi_{F1} + \phi_{F2} = \phi \quad (10c) \quad \phi_{F1} = \phi_{F2} \quad (10d)$$

$$\ell_{F1}^2 A_{F1} \gamma_{F1} + \ell_{F2}^2 A_{F2} \gamma_{F2} = \ell^2 A_T \gamma \quad (10e)$$

Cabe aclarar que las relaciones (10c y d) pueden perfectamente ser removidas, aunque aquí se las ha adoptado por simplicidad. Por otra parte, las Ecs. (10a-b) garantizan que la velocidad global de transferencia de calor sea la misma para el modelo que para la aleta real a muy altos y muy bajos valores del parámetro  $m$ .

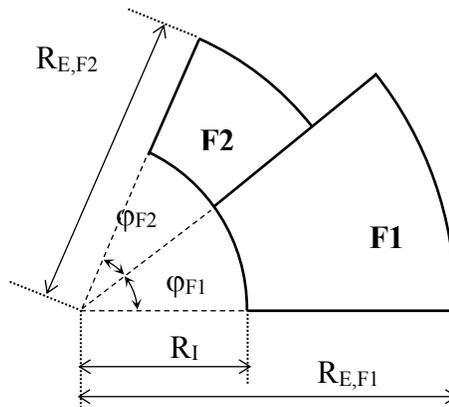


Figura 2. Esquema del modelo de dos aletas radiales equivalentes (1D-TERF).

Al igual que en el modelo 1D-SERF, para el cálculo de tubos aplastados, es necesario calcular un radio interno que satisfaga las ecuaciones (10a y c). Este radio será el mismo en ambas aletas.

Las expresiones de los parámetros  $\gamma_{F1}$  y  $\gamma_{F2}$  para las aletas radiales se encuentran en la bibliografía [18] y pueden calcularse empleando las siguientes expresiones:

$$\gamma_j = \frac{y_j}{2} \left[ \frac{y_j^2 - 3}{q_j^2} - \frac{4 \ln y_j}{q_j^3} \right] \quad (11)$$

donde:  $q_j = 1 - y_j^2$  ;  $y_j = R_i / R_{Ej}$  con  $j=F1, F2$ .

La eficiencia de aleta para el modelo 1D-TERF resulta:

$$\eta_{1D-TERF} = \frac{A_{F1} \eta_{F1} + A_{F2} \eta_{F2}}{A_T} \quad (12)$$

Donde  $\eta_{F1}$  y  $\eta_{F2}$  se calculan empleando la expresión (7).

### 3.3 Método de sectores (SECT)

El método de los sectores consiste en subdividir la porción de aleta rayada en las Figuras 1 a-c, en una cantidad determinada sectores (n) como se muestra en la Figura 3, donde por simplicidad todos los ángulos  $\varphi_i$  se han tomado iguales.

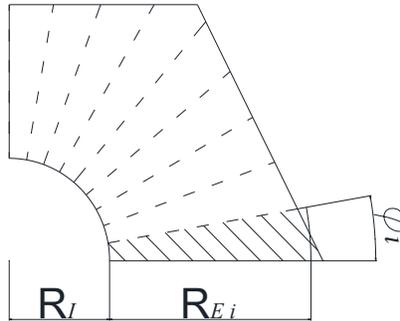


Figura 3. Esquema del método de los sectores (SECT).

Este método propone asimilar cada uno de estos sectores a uno de una aleta radial equivalente de igual perímetro y área (de manera similar al método 1D-SERF), y que ocupe el mismo ángulo, por lo que para cada sector será necesario definir los parámetros ( $\varphi_i, R_{Ii}, R_{Ei}$ ) de manera tal que se cumplan las siguientes relaciones:

$$P_i = P_{SECT} \quad (13a) \quad A_i = A_{SECT} \quad (13b)$$

$$\varphi_i = \varphi_{SECT} \quad (13c) \quad \varphi_i = \frac{\varphi_T}{n} \quad (13d)$$

Así, la eficiencia de acuerdo al método SECT puede obtenerse como:

$$\eta_{SECT} = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i A_i}{A_T} \quad (14)$$

Donde  $\eta_i$  se calculan empleando la expresión (7)

Mientras que para el caso de tubos circulares el radio interno de cada sector será igual al del tubo, para el caso de tubos planos será necesario calcular un radio interno para que se cumplan las ecuaciones (13a 13c y 13d) simultáneamente.

En la bibliografía se ha demostrado [9] que para tubos de sección circular, en general, con 20 sectores resulta suficiente para alcanzar la precisión máxima del método cuando se trata de un arreglo en línea con una relación de pasos  $P_t/P_l=1$ .

#### 4. Resultados y Discusión

En la Fig. 4 se presenta el comportamiento de  $\eta$  frente al parámetro  $m$  para una aleta plana continua solidaria a un tubo de sección circular con un arreglo en línea ( $P_t=2$ ,  $P_t/P_l=2$ ). Se muestran cuatro curvas correspondientes a los valores numéricos obtenidos empleando la plataforma Comsol Multiphysics y las predicciones de los modelos 1D-SERF y 1D-TERF y el método SECT. Puede visualizarse que todos los modelos permiten capturar adecuadamente entre las asíntotas a altos y bajos valores del parámetro  $m$ , dado que se ha establecido que las áreas de transferencia coincidan (Ecs. 8b, 10b y 13b) lo cual garantiza que para ambos modelos  $\eta \rightarrow 1$  cuando  $m \rightarrow 0$  (muy altas velocidades de transferencia por conducción); mientras que la igualdad de perímetros (Ecs. 8a, 10a y 13a) hace que  $\eta \rightarrow 1/m$  cuando  $m \rightarrow \infty$  (muy bajas velocidades de transferencia por conducción). Por ende, las mayores desviaciones en la estimación para cualquiera de los modelos 1D aparecerán a valores intermedios de  $m$ . Se define entonces el error relativo porcentual como:

$$\varepsilon_i = \frac{(\eta_i - \eta_{num})}{\eta_{num}} \cdot 100 \quad (15)$$

donde  $\eta_{num}$  son los valores obtenidos numéricamente mientras que  $\eta_i$  corresponde a las estimaciones alcanzadas con los modelos 1D-SERF y 1D-TERF y el método SECT.

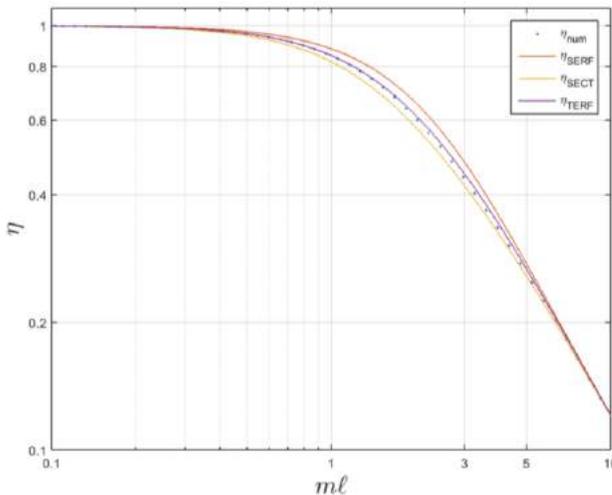


Figura 4.  $\eta$  vs  $m$  (Tubos de sección circular con arreglo en línea  $P_t=2$  y  $P_t/P_l=2$ ).

Se analizará la precisión de los modelos 1D valorando el máximo error, que se presenta cuando se varía  $m$  para cada configuración geométrica (tipo de tubo, arreglo y relaciones de paso), definido como:

$$\varepsilon_i^{\max} = \max_{m \ell} \{ \varepsilon_i \} \tag{16}$$

En la Tabla 1 se presentan los valores  $\varepsilon_i^{\max}$  que surgen de la aplicación de los modelos 1D-SERF y 1D-TERF y el método SECT para distintos valores de  $P_1$  y de la relación  $P_1/P_1$  correspondientes a arreglos en línea (ver Fig. 1a). Puede observarse que para la mayoría de los casos analizados, el modelo 1D-TERF conduce a resultados más precisos que las otras dos alternativas analizadas. No obstante, para una relación  $P_1/P_1$  alta, y un valor de  $P_1$  bajo ( $P_1 < 1.5$ , y  $2 < P_1/P_1 < 4$ ) el modelo 1D-TERF arroja valores erróneos, debido a que el valor del radio obtenido para cumplir con las Ecs. (10 a-e) es menor al radio interno del tubo. Se han incluido también algunas relaciones de pasos ( $P_1=1.5$  y  $2 < P_1/P_1 < 4$ ) que resulta poco probable que se presenten en la práctica, no obstante, se analizan con la finalidad de otorgarle una mayor generalidad a la evaluación de la capacidad predictiva del modelo 1D-TERF. Se comprueba que el error máximo se encuentran en todos los casos con  $P_1 > 1.5$  por debajo del 6.5% mientras que empleando el método SECT se alcanza 15% y con el modelo 1D-SERF se presentan valores que superan el 20%.

Tabla 1.  $\varepsilon_i^{\max}$  en la estimación de  $\eta$  con los modelos 1D-SERF y 1D-TERF y el método SECT para tubos de sección circular con arreglos en línea.

$P_1/P_1$	$P_1=X_1/D$											
	4			3			2			1.5		
↓	SERF	SECT	TERF	SERF	SECT	TERF	SERF	SECT	TERF	SERF	SECT	TERF
1	0.5	-1.1	0.2	0.6	-1.2	0.3	1.1	-1.3	0.4	2.4	-1.5	0.5
1.5	2.2	-2.8	1.1	2.7	-2.7	1.2	4.3	-2.5	1.6	7.2	-2.3	2.2
2	5.4	-5.6	2.4	6.5	-5.3	2.6	9.6	-4.8	3.0	14.6	-4.2	3.4
2.5	8.9	-8.4	3.6	10.7	-8.0	3.7	15.0	-7.1	3.5	21.5	-6.1	2.6
3	12.6	-11.0	4.4	14.8	-10.3	4.2	20.2	-9.1	2.9	27.9	-7.9	-1.5
3.5	16.2	-13.2	4.7	18.8	-12.4	3.9	25.1	-10.9	1.1	33.9	-9.6	-8.0
4	19.7	-15.1	4.3	22.7	-14.2	2.8	29.8	-12.5	-4.0	39.3	-11.1	-20.1

En la Figura 5 se muestra la variación de  $\varepsilon$  para distintos valores de  $\eta_{num}$ , para tubos de sección circular con arreglo en línea ( $P_1=2$  y  $P_1/P_1=2$ ). Se puede observar que, en promedio, el error máximo que se alcanza con el modelo 1D-SERF y el método SECT resulta mayor al que se obtiene al emplear el modelo 1D-TERF (aproximadamente 10% y 5% frente a 3%). Asimismo, analizando específicamente la zona que corresponde a las condiciones de diseño de las aletas (es decir, valores de  $\eta_{num}$  relativamente altos, por ejemplo, mayores que 0.75) se observa que mientras que el modelo 1D-SERF puede presentar errores superiores al 6% y el método SECT al 3%, el modelo 1D-TERF garantiza que los mismos serán inferiores al 1%. Para todas las configuraciones de tubos y arreglos analizados se encontraron comportamientos similares a los mostrados en las Figuras 4 y 5.

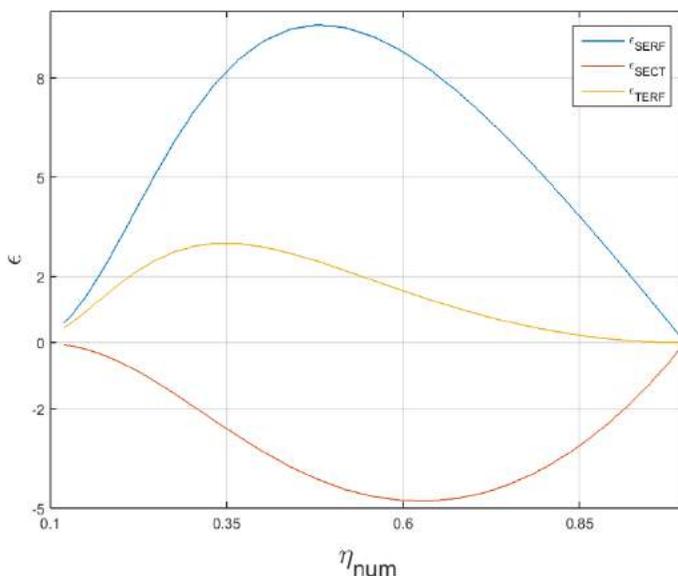


Figura 5.  $\epsilon$  vs  $\eta_{num}$  (Tubos de sección circular con arreglo en línea  $P_1=2$  y  $P_t/P_1=2$ ).

En las tablas 2 y 3 se presentan los valores de  $\epsilon_i^{max}$  para arreglos escalonados de tubos circulares y aplastados con distintas relaciones de pasos, respectivamente.

Respecto al arreglo escalonado de tubos de sección circular (ver Fig. 1b y Tabla 2) los tres modelos presentan un nivel de precisión superior al 3% para todos los casos analizados ( $1 < P_1 < 4$  y, simultáneamente,  $P_t/P_1 < 6$ ), por lo que en ese rango se sugiere el empleo del modelo 1D-SERF en virtud a la mayor simplicidad en su aplicación.

Tabla 2.  $\epsilon_i^{max}$  en la estimación de  $\eta$  con los modelos 1D-SERF y 1D-TERF y el método SECT para tubos de sección circular con arreglos en escalonados.

$P_t/P_1$	$P_1 = X_1/D$											
	4			3			2			1.5		
↓	SERF	SECT	TERF	SERF	SECT	TERF	SERF	SECT	TERF	SERF	SECT	TERF
3	0.1	-0.3	0.1	0.1	-0.3	0.1	0.2	-0.4	0.1	0.2	-0.4	0.1
4	0.1	-0.4	0.1	0.1	-0.4	0.1	0.2	-0.4	0.1	0.2	-0.4	0.1
5	0.6	-1.3	0.4	0.7	-1.3	0.4	0.9	-1.3	0.5	1.2	-1.2	0.5
6	1.5	-2.7	0.9	1.7	-2.7	0.9	2.2	-2.6	1.1	2.7	-2.5	1.2
7	2.7	-4.3	1.4	3.0	-4.2	1.5	3.7	-4.0	1.7	4.6	-3.9	1.9
8	3.9	-6.0	2.1	4.4	-5.8	2.2	5.4	-5.6	2.4	6.5	-5.3	2.6

En relación a los tubos aplastados con arreglos escalonados (ver Fig. 1c y Tabla 3), en general, el modelo 1D-SERF y el método SECT presentan errores similares a los del 1D-TERF e inferiores al 5% si la relación de diámetros  $D_v/D_1 > 0.1$ . No obstante, existen casos ( $D_v/D_1=0.1$  y  $P_1/P_2=3$ ) para los cuales el error en el que se incurre empleando el modelo 1D-SERF y el método SECT se incrementa considerablemente pudiendo superar el 20%. Cabe consignar además que el método SECT presenta errores máximos del orden del 20% para todos los casos con  $P_1=1$ .

Tabla 3.  $\epsilon_i^{\max}$  en la estimación de  $\eta$  con los modelos 1D-SERF y 1D-TERF y el método SECT para tubos aplastados con arreglos escalonados.

P <sub>1</sub> /P <sub>2</sub>	D <sub>v</sub> /D <sub>1</sub>	P <sub>2</sub> =X <sub>v</sub> /D											
		4			3			2			1		
		SERF	SECT	TERF	SERF	SECT	TERF	SERF	SECT	TERF	SERF	SECT	TERF
3	0.1	18.0	7.0	2.7	16.4	5.7	-1.5	11.2	-1.8	-1.8	2.5	-23.2	1.1
	0.2	5.3	1.7	3.6	4.7	1.2	2.9	3.1	-2.7	1.7	3.6	-18.8	1.2
4	0.1	11.6	0.9	4.9	10.5	-1.6	3.5	6.8	-7.2	1.8	2.9	-27.7	1.2
	0.2	3.9	-2.4	3.4	3.5	-3.5	2.9	2.5	-6.5	2.0	3.6	-21.3	1.2
5	0.1	8.4	-4.0	5.2	7.5	-6.0	4.1	4.9	-11.4	2.4	3.2	-30.2	1.3
	0.2	3.7	-4.4	3.5	3.4	-5.7	3.0	2.7	-8.8	2.2	3.3	-22.3	1.2
6	0.1	6.8	-6.6	5.1	6.1	-8.8	4.3	4.1	-14.1	2.8	3.3	-31.7	1.4
	0.2	3.8	-5.7	3.5	3.5	-7.0	3.2	3.0	-9.8	2.5	2.9	-22.0	1.2
7	0.1	6.0	-8.4	5.1	5.4	-10.7	4.4	3.9	-16.0	3.0	3.4	-32.5	1.4
	0.2	3.9	-6.6	3.5	3.7	-7.7	3.3	3.3	-10.2	2.7	2.7	-20.7	1.3
8	0.1	5.7	-9.7	5.2	5.2	-12.0	4.5	3.9	-17.1	3.2	3.4	-32.9	1.5
	0.2	3.9	-8.1	3.5	3.8	-9.0	3.4	3.4	-11.2	2.8	2.4	-20.0	1.3

### 5. Conclusiones

En este trabajo se presenta un modelo unidimensional denominado de dos aletas radiales equivalentes (1D-TERF) para predecir la velocidad de transferencia de calor desde o hacia aletas planas continuas solidarias a tubos de sección circular y aplastados como los típicamente empleados en radiadores para refrigeración o calefacción y otras aplicaciones que impliquen intercambio gas (aire)-líquido. En este modelo se propone asimilar la aleta plana continua a dos aletas de tipo radial, manteniendo el perímetro del tubo y el área disponible para la transferencia de calor. El parámetro libre restante del modelo se obtiene estableciendo que el mismo replique exactamente el comportamiento térmico (eficiencia de aleta) de la aleta continua real (2D) cuando la velocidad de transferencia de calor por conducción a través de la aleta es relativamente alta frente a la velocidad de transferencia de calor por convección entre la aleta y el fluido, situación que, por otra parte, es la que normalmente se presenta en sistemas aletados.

Se demuestra en el trabajo que este criterio de ajuste para el parámetro libre le permite al modelo 1D-TERF alcanzar una estimación más precisa de la eficiencia de una aleta continua que la que puede conseguirse empleando el modelo 1D-SERF o el método de los sectores (SECT). El nivel de precisión alcanzable resulta superior al 5% en prácticamente la totalidad de los casos analizados, cubriendo todo el rango condiciones de operación (*i.e.*, valores de la relación entre la velocidad de transferencia por conducción frente a la de convección entre 0 e infinito) para tubos de sección circular con arreglos en línea ( $4 > P_1 > 1$  y  $3.5 > P_1/P_2$ ).

>1) y escalonado ( $4 > P_1 > 1$  y  $8 > P_1 / P_1 > 1$ ) y para todos los arreglos de tubos aplastados con arreglo escalonado. Cabe aclarar, que se obtiene una precisión considerablemente mayor (del orden de 1%) en todos los casos si se busca estimar la eficiencia de la aleta para bajos coeficientes de transferencia por convección (bajos valores de  $m$ ), situación que normalmente se presenta en los casos en los que se emplean superficies extendidas.

## 6. Agradecimientos

Los autores agradecen el aporte financiero de las siguientes instituciones: CONICET (PIP 0304) y UNLP (PID 11/1177). N. J. Mariani, O. M. Martínez y G. F. Barreto son investigadores del CONICET.

## 7. Referencias

- [1] Kuppan, T. (2014). Heat exchanger design handbook, 2nd edition, CRC Press, Taylor & Francis Group.
- [2] Hesselgreaves, J.E. (2001). Compact Heat Exchangers. Selection, Design and Operation. Pergamon Press (2001).
- [3] Kays, W. M., London A. L. (1998). Compact Heat Exchangers, 3rd Reprinted ed., Krieger, Malabar.
- [4] Shah, R. K. (1988). Plate-fin and tube-fin heat exchanger design procedures. *In Heat Transfer Equipment Design* (Edited by R. K. Shah, E. C. Subbarao and R. A. Mashelkar), pp. 255-266. Hemisphere, Washington, DC.
- [5] Sabbaghi, S., Rezaii, A., Shahri, Gh.R., Baktash, M.S. (2011). Mathematical analysis for the efficiency of a semi-spherical fin with simultaneous heat and mass transfer, *Int. J. of Ref. 34*, 1877.
- [6] Acosta-Iborra, A., Campo, A. (2009). Approximate analytic temperature distribution and efficiency for annular fins of uniform thickness, *Int. J. of Thermal Sci. 48*, 773.
- [7] Sharqawy, M. H., Zubair, S. M. (2008). Efficiency and optimization of straight fins with combined heat and mass transfer – An analytical solution. *Applied Thermal Eng. 28*, 2279.
- [8] Zukauskas, A. (1981) Air Cooled Heat Exchangers, in Heat Exchangers: Thermal-Hydraulic Fundamentals and Design, S. Kakac, A.E. Bergles and F. Mayinger, Eds., Hemisphere Publication Corporation, New York, NY, pp. 49-83.
- [9] Kundu, B., Das, P. K. (2000). Performance of symmetric polygonal fins with and without tip loss — A comparison of different methods of prediction, *The Can. J. of Chem. Eng. 78*, 395.
- [10] Marin, L., Elliott, L., Heggs, P.J., Ingham, D. B., Lesnic, D., Wen, X. (2005). Two-dimensional thermal analysis of a polygonal fin with two tubes on a square pitch. *Int. J. of Heat and Mass Trans. 48*, 3018.
- [11] Jang, J-Y., Lin C-N. (2002). Two-dimensional fin efficiency of plate fin-tube heat exchangers under partially and fully wet conditions. *J. of Thermal Sci. 11*, 249.

- [12] Liang, S.Y., Wong, T.N., Nathan, G.K. (2000) Comparison of one-dimensional and two-dimensional models for wet-surface on efficiency of a plate-fin-tube heat exchanger. *Applied Thermal Eng.* 20, 941.
- [13] Chen, H. T., Liou, J. T. (1998). Optimum dimensions of the continuous plate fin for various tube arrays. *Num. Heat Transfer-Part A* 34, 151.
- [14] Zabronski, H. (1955). Temperature distribution and efficiency of a heat exchanger using square fins on round tubes. *ASME J. Appl. Mech.* 22, 119.
- [15] Kuan, D.Y., Aris, R., Davis, H. T. (1984). Estimation of fin efficiencies of regular tubes arrayed in circumferential fins. *Int. J. Heat Mass Transfer* 27, 148.
- [16] Kritikos, K., Albanakis, C., Missirlis, D., Vlahostergios, Z., Goulas, A., Storm, P. (2010). Investigation of the thermal efficiency of a staggered elliptic-tube heat exchanger for aeroengine applications. *Applied Thermal Eng.* 30, 134.
- [17] Saboya, S. M., Saboya, F. E. M. (2001). Experiments on elliptic sections in one- and two-row arrangements of plate fin and tube heat exchangers. *Exp. Therm. Fluid Sci.* 24, 67.
- [18] Mariani N. J., Keegan S. D., Martinez O. M., Barreto G. F. (2003). A One-Dimensional Equivalent Model to Evaluate Overall Reaction Rates in Catalytic Pellets. *Chem. Eng. Res. and Des.* 81-A, 1033.
- [19] Kraus, A. D., Aziz, A., Welty, J. (2001). *Extended Surface Heat Transfer*, J. Wiley.

## 8. Apéndice

En las Tablas A1, A2 y A3 se presentan los valores del parámetro  $\gamma$  para las configuraciones analizadas en este trabajo (tubos de sección circular con arreglos en línea y escalonado y tubos aplastados escalonados y distintos valores de las relaciones de pasos).

Los valores de las Tablas A1, A2 y A3 pueden ser interpolados linealmente para valores de  $P_1$  y  $P_1/P_2$  correspondientes a arreglos con relaciones geométricas intermedias a las mostradas, alcanzándose una precisión en el valor de  $\gamma$  superior al 1% respecto a los cálculos numéricos a partir de las ecuaciones (4.b) y (5.a-c). La incidencia de este error en el cálculo de  $\eta$  resulta menor al 1%.

Tabla A1 Valores de  $\gamma$  para tubos de sección circular con arreglo escalonado.

$P_2/P_1$	$P_2=X_1/D$						
	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1
3	0.046	0.055	0.067	0.084	0.109	0.149	0.219
4	0.037	0.045	0.055	0.070	0.092	0.128	0.193
5	0.032	0.039	0.049	0.062	0.083	0.117	0.185
6	0.029	0.035	0.044	0.057	0.077	0.111	0.183
7	0.027	0.033	0.041	0.053	0.072	0.107	0.183
8	0.025	0.030	0.038	0.050	0.069	0.104	0.184

Tabla 2. Valores de  $\gamma$  para tubos de sección circular con arreglo en línea.

$P_t/P_1$	$P_t=X_t/D$					
	4	3.5	3	2.5	2	1.5
↓						
1	0.093	0.109	0.130	0.158	0.199	0.269
1.5	0.077	0.091	0.111	0.139	0.183	0.265
2	0.069	0.084	0.104	0.134	0.184	0.284
2.5	0.065	0.080	0.101	0.132	0.186	0.298
3	0.063	0.077	0.099	0.131	0.188	0.309
3.5	0.061	0.076	0.097	0.131	0.190	0.317
4	0.060	0.075	0.096	0.131	0.192	0.322

Tabla 3. Valores de  $\gamma$  para tubos aplastados con arreglo escalonado.

$P_t/P_1$	$D_t/D_1$	$P_t=X_t/D_1$						
		4	3.5	3	2.5	2	1.5	1
↓	↓							
3	0.1	0.194	0.226	0.264	0.306	0.341	0.332	0.328
	0.15	0.121	0.141	0.166	0.196	0.229	0.253	0.323
	0.2	0.093	0.109	0.129	0.155	0.187	0.223	0.317
4	0.1	0.134	0.156	0.183	0.215	0.246	0.262	0.316
	0.15	0.091	0.106	0.126	0.151	0.182	0.218	0.304
	0.2	0.074	0.087	0.104	0.126	0.157	0.199	0.292
5	0.1	0.105	0.123	0.145	0.172	0.203	0.232	0.304
	0.15	0.076	0.089	0.106	0.129	0.159	0.200	0.286
	0.2	0.063	0.075	0.090	0.111	0.140	0.184	0.268
6	0.1	0.089	0.104	0.123	0.148	0.178	0.214	0.292
	0.15	0.066	0.078	0.094	0.116	0.145	0.188	0.269
	0.2	0.056	0.067	0.081	0.100	0.129	0.171	0.247
7	0.1	0.078	0.092	0.110	0.133	0.163	0.202	0.281
	0.15	0.060	0.071	0.086	0.106	0.135	0.177	0.254
	0.2	0.050	0.060	0.074	0.092	0.119	0.160	0.230
8	0.1	0.070	0.083	0.100	0.122	0.151	0.193	0.270
	0.15	0.054	0.065	0.079	0.098	0.126	0.168	0.240
	0.2	0.046	0.055	0.068	0.085	0.111	0.151	0.216