

CÁLCULO DE COEFICIENTES DINÁMICOS PARA COJINETES HIDRODINÁMICOS DE LONGITUD FINITA

**Claudio E. Merelli^{1,2,3}, Daniel O. Barilá²,
Gustavo G. Vignolo^{1,2,3}, Lidia M. Quinzani³**

1-Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur,
Av Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina.
cemerelli@plapiqui.edu.ar

2-Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco –
Laboratorio de Mecánica de los Fluidos, Ruta Prov. N°1 Km 4, Comodoro Rivadavia, Argentina.
dbarila@unpata.edu.ar

3-Planta Piloto de Ingeniería Química (PLAPIQUI), Universidad Nacional del Sur – CONICET
Camino La Carrindanga km. 7, Bahía Blanca, Argentina.
gvignolo@plapiqui.edu.ar; lquinzani@plapiqui.edu.ar

Palabras clave: Cojinetes hidrodinámicos, Coeficientes dinámicos, Ecuación de Reynolds, Perturbación regular.

Resumen

El funcionamiento de la maquinaria industrial depende en gran medida del desempeño de los apoyos de las partes móviles, siendo los cojinetes hidrodinámicos una de las tecnologías más empleadas por su fácil fabricación, gran versatilidad ante cargas elevadas e impactos, extensa vida útil y relativo bajo costo y tamaño.

Para modelar el comportamiento dinámico de un sistema mecánico se requiere del conocimiento de la respuesta de cada uno de sus componentes ante cargas variables, incluyendo los apoyos. De esta manera, los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de los cojinetes son muy importantes a la hora de estudiar las frecuencias críticas de los rotores y la determinación de zonas de posible inestabilidad que se acopla a la de los demás mecanismos.

El propósito de este trabajo es la determinación analítica de los coeficientes dinámicos en cojinetes de longitud finita. Para ello se hace uso de una aproximación que resuelve la Ecuación de Reynolds para flujo isotérmico por medio del método de perturbación regular. Previamente, esta técnica fue implementada para estimar parámetros estáticos como presión, caudal y factor de fricción, con buenas predicciones para relaciones de aspecto (L/D) y excentricidad relativa (η) para las cuales las soluciones de cojinetes cortos (ISJB) y cojinetes largos (ILJB) no son válidas [1].

Esta solución aproximada se emplea para determinar los coeficientes dinámicos del sistema tribológico rotor-fluido-cojinete de manera analítica. Los resultados son comparados con los homónimos para ISJB y los propios de resolver numéricamente la Ecuación de Reynolds. Se obtiene que la solución de orden cero, que considera $L/D \rightarrow 0$ (ISJB), puede ser utilizada únicamente para describir el comportamiento de cojinetes hasta valores de $L/D \approx 1/4$ y excentricidades $\eta \rightarrow 0$. Asimismo, la implementación del método descripto produce buenas predicciones de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento hasta valores de excentricidades relativas $\eta \rightarrow 1$ y relaciones de aspecto $L/D \approx 1$.

1. Introducción

La lubricación hidrodinámica queda descrita por un sistema de ecuaciones diferenciales formado por los balances de cantidad de movimiento, masa y energía, aplicados a la capa muy delgada de fluido que se encuentra confinado entre dos superficies en movimiento relativo. En el caso particular de fluido newtoniano en flujo isotérmico, la integración en el espesor de película del balance de masa combinado con los balances de cantidad de movimiento, da lugar a una ecuación diferencial a derivadas parciales para la presión que se conoce con el nombre de Ecuación de Reynolds. Esta es una ecuación de aparente sencillez que, sin embargo, aún sigue siendo motivo de estudio ya que no se ha podido ser resuelta en forma exacta, aún para los casos más sencillos. En el caso de cojinetes hidrodinámicos el análisis de orden de magnitud de las ecuaciones que describen el flujo muestra que existen dos parámetros adimensionales que gobiernan el comportamiento del sistema: la relación de aspecto (L/D) y la excentricidad relativa ($0 < \eta < 1$). Llevando el primero de estos parámetros a sus valores límite, se obtienen dos soluciones analíticas exactas de la Ecuación de Reynolds, ampliamente conocidas en el campo de la lubricación, la del cojinete infinitamente corto ($L/D \rightarrow 0$) y la del cojinete infinitamente largo ($L/D \rightarrow \infty$), que se identifican por sus siglas en inglés como ISJB y ILJB, respectivamente [2][3]. En la práctica, tales soluciones arrojan resultados válidos únicamente en su orden de magnitud quedando la descripción exacta del flujo en cojinetes de longitud finita para el campo de los métodos numéricos. Paralelamente, son varios los intentos que se pueden encontrar en la literatura de soluciones analíticas aproximadas [4] [5] [6] [7] [8] [9]. En particular, estos autores usaron con gran éxito en el pasado el método de perturbación regular para extender la solución de ISJB hasta valores de L/D cercanos a 1, para toda η [1]. Lo novedoso del planteo realizado en ese trabajo es que no sólo se realizó la expansión de la presión usando el parámetro de perturbación $(L/D)^2$, sino también el número de Ocvirk (equivalente al número de Sommerfeld) que es una medida de la capacidad de carga obtenida por integración del campo de presión sobre el eje, relativa a la fuerza actuante por unidad de área proyectada. La metodología propuesta permitió describir con mayor precisión que otros métodos existentes, tanto el número de Ocvirk y la capacidad portante como el caudal y la fuerza de fricción.

Por otro lado, las características dinámicas de un cojinete, además de las estáticas, son fundamentales para el comportamiento de las máquinas que los utilizan. La rigidez de los cojinetes hidrodinámicos afecta las velocidades críticas y la estabilidad del rotor, lo que resulta de gran importancia sobre todo en aplicaciones en las que su uso pretende amortiguar impactos y disipar efectos desestabilizadores. En este sentido, es importante contar con métodos eficientes para calcular las características dinámicas de un cojinete [10].

Un gran número de trabajos se abocaron a la determinación de estos parámetros a través de la implementación de métodos numéricos [11] [12], inclusive en un grado creciente de dificultad asumiendo otras circunstancias como desalineaciones del eje y flexibilidad en el rotor [13] [14].

Rao y Biswas [15] encontraron expresiones analíticas de los coeficientes rotodinámicos en cojinetes de longitud finita en forma empírica, ponderando las soluciones ISJB e ILJB. A pesar de la falta de fundamento analítico de esta metodología, las predicciones de los coeficientes resultan muy satisfactorias para un rango amplio de excentricidades y relaciones de aspecto.

Chasalevris y Sfyris [16] determinaron una solución analítica al asumir la existencia de una solución particular y una homogénea de la Ecuación de Reynolds. Si bien, al igual que Rao y Biswas dicha solución se adapta muy bien en un gran rango de valores de excentricidad y relaciones de aspecto, es demasiado laboriosa a la hora de reproducir sus resultados y no existen expresiones simples de los coeficientes dinámicos.

En el presente trabajo se extiende el método de perturbación regular usado previamente [1], empleándolo para el cálculo de la fuerza estática, el ángulo de desfasaje entre la línea de centros y la carga y los coeficientes dinámicos de cojinetes de longitud finita. Estos parámetros rotodinámicos se calculan resolviendo la ecuación de Reynolds, con la diferencia respecto del caso estático que se le impone al eje pequeñas fluctuaciones alrededor de los puntos de equilibrio en la dirección radial y tangencial. Estas, modifican la ecuación del espesor de película agregando términos temporales.

2. Desarrollo

La Figura 1 esquematiza el sistema en estudio, el cual contempla un eje de radio R y largo L que gira a una velocidad angular Ω dentro de un cojinete estático de radio R_B , ambos separados por una película continua de fluido lubricante. Al aplicar una carga W sobre el rotor, este se desplaza del centro del cojinete una distancia e (excentricidad) generando una cavidad curva de altura $H(X)$ por la que el eje arrastra al lubricante, generándose un efecto hidrodinámico el cual le permite al sistema resistir grandes impactos con baja fricción sin producir contacto entre las partes. Al analizar el movimiento del eje bajo carga estática se denota un desfasaje entre su desplazamiento y la carga aplicada simbolizados por el ángulo ϕ .

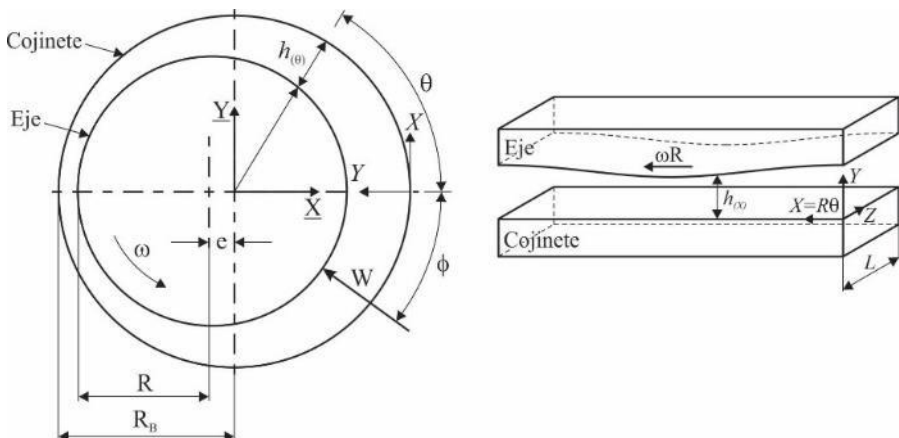


Figura 1. Geometría y sistema de coordenadas.

En el planteo de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del fluido en la lubricación hidrodinámica se realizan simplificaciones para facilitar su resolución. Debido a que el huelgo C es mucho menor que el radio R ($C \ll R$), se desprecian los efectos de curvatura pudiéndose trabajar las ecuaciones que describen el comportamiento del fluido

lubricante en coordenadas cartesianas, como se ve en la Figura 1-a. Además, se considera flujo isotérmico, fluido Newtoniano incompresible, flujo laminar con $Re \frac{c}{R} \ll 1$ y Re de orden uno o menor, y efectos convectivos y gravitacionales despreciables.

Las ecuaciones diferenciales que describen el flujo resultan:

$$\text{Balance de masa: } 0 = \frac{U}{\pi R} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{V}{C} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{W}{L} \frac{\partial w}{\partial Z} \quad (1)$$

$$\Theta\text{-Balance de cantidad de movimiento: } 0 = -\frac{P_{REF}}{\pi R} \frac{\partial p'}{\partial \Theta} + \mu \frac{U}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (2)$$

$$y\text{-Balance de cantidad de movimiento: } 0 = -\frac{P_{REF}}{C} \frac{\partial p'}{\partial Y} + \mu \frac{V}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \quad (3)$$

$$z\text{-Balance de cantidad de movimiento: } 0 = -\frac{P_{REF}}{L} \frac{\partial p'}{\partial Z} + \mu \frac{W}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} \quad (4)$$

donde las variable adimensionales son:

$$\eta = \frac{e}{c}, \quad \Theta = \frac{X}{\pi R}, \quad y = \frac{Y}{c}, \quad z = \frac{Z}{L}, \quad u = \frac{V_{\Theta}}{U}, \quad v = \frac{V_y}{V}, \quad w = \frac{V_z}{W}, \quad p' = \frac{P - P_{EXT}}{P_{REF}} \quad (5)$$

Analizando el BM, se deduce que, si los tres términos son de orden de magnitud similar, entonces $V = \frac{U c}{R}$ y $W = \frac{U L}{R}$. Por otro lado, de acuerdo a la aproximación de cojinetes infinitamente cortos, conocida como solución de Ocvirk [2], el gradiente de presión en la dirección Θ sería despreciable frente al axial. Esto permite concluir que para cojinetes cortos el perfil de velocidad axial debería ser lineal, como en flujo Couette, y que P_{REF} se puede estimar a partir de Ec. (4, BCMz), quedando definida como:

$$P_{REF} = \frac{\mu U}{R} \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2 \quad (6)$$

Consecuentemente, los balances adimensionales de masa y cantidad de movimiento quedan:

$$0 = \frac{1}{\pi} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7)$$

$$0 = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{L}{R}\right)^2 \frac{\partial p'}{\partial \Theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8)$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \left(\frac{c}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (9)$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (10)$$

Donde, se observa que el gradiente de presión en dirección radial (y) puede despreciarse, ya que el balance de cantidad de movimiento en esa dirección es $(c/L)^2$ veces más pequeño que los otros.

Bajo esta consideración, las Ecs. (7, BCMx) y (8, BCMz) se pueden combinar con el BM para dar la ecuación conocida como Ecuación de Reynolds [17]:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{1}{2\pi} \frac{dh}{d\Theta} = \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{L}{R}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\frac{\partial p'}{\partial\Theta} h^3\right) + \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p'}{\partial z} h^3\right) \quad (11)$$

Las condiciones de borde empleadas son:

$$u|_{y=1} = 1 ; u|_{y=0} = 0 ; v|_{y=1} = \frac{dh}{dt} ; v|_{y=0} = 0 ; w|_{y=1} = 0 ; w|_{y=0} = 0 \quad (12)$$

donde $h = \frac{H}{c} = 1 + \eta \cos(\pi\Theta)$ es el espesor adimensional de lubricante ($h=H/c$).

Para determinar el orden de magnitud de t se toma la condición de borde $v|_{y=1} = \frac{dh}{dt}$, donde al reemplazar por variables con dimensiones se tiene que:

$$\frac{VR}{UC}|_{y=1} = \frac{T_c}{C} \frac{dH}{dT} \rightarrow V = \frac{dH}{dT} T_c \frac{U}{R} \quad (13)$$

Siendo T_c el valor característico del tiempo, que, de acuerdo con la Ec. (13), debe ser $T_c = \frac{R}{U}$ para mantener la igualdad.

El huelgo $H(\theta)$ sale de relaciones trigonométricas, resultando:

$$H = c + R + e \cos(\theta) - R \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R}\right)^2 \sin^2(\theta)} \approx c + e \cos(\theta) \quad (14)$$

que define

$$h = \frac{H}{c} = 1 + \frac{e}{c} \cos(\theta) = 1 + \eta \cos(\pi\Theta) \quad (15)$$

siendo η la excentricidad relativa, $\eta = \frac{e}{c}$.

Para resolver la Ec. de Reynolds, además de las condiciones de no-deslizamiento listadas en la Ec. (12), se usan las condiciones de borde de presión:

$$p'|_{\theta=0} = p'|_{\theta=\pi} = 0 ; p'|_{z=1/2} = 0 ; \left.\frac{\partial p'}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \quad (16)$$

considerando sólo el flujo en la sección convergente del cojinete.

Tradicionalmente el comportamiento de los cojinetes hidrodinámicos se relacionan con el número de Sommerfeld (S) [18], [19], o su equivalente, el número de Ocvirk (O) [2], [20]. Estos números miden la importancia de la presión (dada por su orden de magnitud) relativa a la presión media, P_p , calculada como la fuerza actuante sobre el eje dividida por su área proyectada, $P_p = \frac{F}{2RL}$. En este trabajo se usa:

$$O = S \left(\frac{L}{R}\right)^2 = \frac{\mu U}{R P_p} \left(\frac{R}{C}\right)^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2 \quad (17)$$

Un valor pequeño de este número señala, por lo tanto, no sólo mayor carga, F , para una dada P_{REF} , sino también mayor excentricidad. Si se introduce este número adimensional en la ecuación de Reynolds, y se adimensionaliza la presión con P_p , se obtiene otra expresión de la Ec. de Reynolds:

$$O\left(\frac{dh}{dt} + \frac{1}{2\pi} \frac{dh}{d\Theta}\right) = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial p}{\partial \Theta} h^3\right) + \frac{1}{12} h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (18)$$

con O definida en la Ec. (17) y $p = \frac{P - P_{EXT}}{P_p}$.

2.1 Coeficientes dinámicos

Para la determinación de los coeficientes dinámicos en cojinetes, se considera al centro del eje moviéndose con pequeñas amplitudes ($\Delta\eta(t)$, $\Delta\psi(t)$) alrededor de una posición de equilibrio (η_0 , ϕ_0), como se esquematiza en la Figura 2.

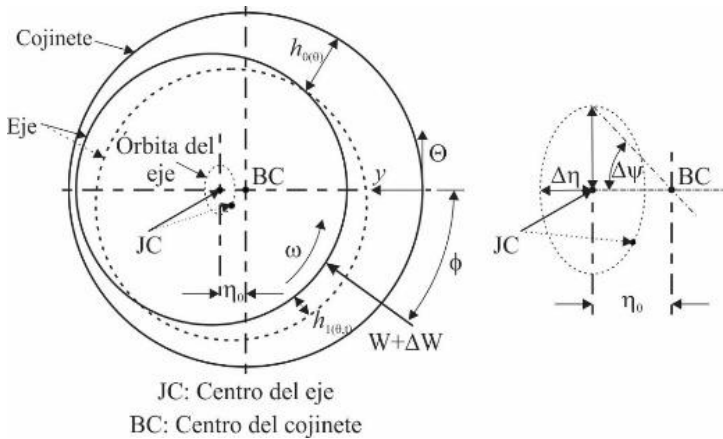


Figura 2. Representación del eje moviéndose con pequeñas amplitudes

Estas vibraciones son de un orden de magnitud mucho menor que η_0 y modifican el espesor de película $h(\Theta)$ que pasa a estar compuesto por una parte estática $h_0(\Theta)$ y otra dinámica $h_1(\Theta, t)$, donde:

$$h(\Theta, t) = h_0(\Theta) + h_1(\Theta, t) \quad \text{con} \quad \begin{cases} h_0(\Theta) = 1 + \eta_0 \cos(\pi\Theta) \\ h_1(\Theta, t) = \Delta\eta(t) \cos(\pi\Theta) + \eta_0 \Delta\psi(t) \sin(\pi\Theta) \end{cases} \quad (19)$$

que permiten expresar la velocidad y la aceleración como:

$$\frac{dy}{dt} = \Delta\dot{\eta}(t) ; \quad \eta_0 \frac{d\Theta}{dt} = \eta_0 \Delta\dot{\psi}(t) \quad (20)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \Delta\ddot{\eta}(t) ; \quad \eta_0 \frac{d^2\Theta}{dt^2} = \eta_0 \Delta\ddot{\psi}(t) \quad (21)$$

donde cada punto sobre una variable indica su derivada respecto del tiempo.

Como en todo sistema mecánico, las fuerzas generadas en el rotor son función de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones, por lo que:

$$F_{\Theta} = F_{\Theta}(\eta_0, \eta_0 \Delta \psi, \Delta \eta, \eta_0 \Delta \dot{\psi}, \Delta \dot{\eta}, \Delta \ddot{\eta}, \eta_0 \Delta \ddot{\psi}) \quad (22)$$

$$F_y = F_y(\eta_0, \eta_0 \Delta \psi, \Delta \eta, \eta_0 \Delta \dot{\psi}, \Delta \dot{\eta}, \Delta \ddot{\eta}, \eta_0 \Delta \ddot{\psi}) \quad (23)$$

Teniendo en cuenta que este análisis se realiza para pequeñas amplitudes en el movimiento alrededor de un punto de equilibrio, las fuerzas de reacción se pueden aproximar por los primeros términos de una expansión en serie de Taylor:

$$F_{\Theta} = F_{\Theta_0} + \frac{dF_{\Theta}}{d\theta} \Delta\theta + \frac{dF_{\Theta}}{dy} \Delta y + \frac{dF_{\Theta}}{d\dot{\Theta}} \Delta\dot{\Theta} + \frac{dF_{\Theta}}{d\dot{y}} \Delta\dot{y} + \frac{dF_{\Theta}}{d\ddot{\Theta}} \Delta\ddot{\Theta} + \frac{dF_{\Theta}}{d\ddot{y}} \Delta\ddot{y} \quad (24)$$

$$F_y = F_{y_0} + \frac{dF_y}{d\Theta} \Delta\Theta + \frac{dF_y}{dy} \Delta y + \frac{dF_y}{d\dot{\Theta}} \Delta\dot{\Theta} + \frac{dF_y}{d\dot{y}} \Delta\dot{y} + \frac{dF_y}{d\ddot{\Theta}} \Delta\ddot{\Theta} + \frac{dF_y}{d\ddot{y}} \Delta\ddot{y} \quad (25)$$

es factible definir los coeficientes de elasticidad, amortiguación e inercia en cojinetes como:

$$K_{ij} = - \left(\frac{dF_i}{dj} \right)_0 \begin{cases} i = \Theta, y \\ j = \Theta, y \end{cases} \quad C_{ij} = - \left(\frac{dF_i}{d \left(\frac{dj}{dt} \right)} \right)_0 \begin{cases} i = \Theta, y \\ j = \Theta, y \end{cases} \quad M_{ij} = - \left(\frac{dF_i}{d \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dj}{dt} \right) \right)} \right)_0 \begin{cases} i = \Theta, y \\ j = \Theta, y \end{cases} \quad (26)$$

donde $\frac{dj}{dt}$ representa las velocidades del centro del eje ($\dot{y}, \dot{\Theta}$), y $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial j}{\partial t} \right)$ representa sus

aceleraciones ($\ddot{y}, \ddot{\Theta}$). Así, por ejemplo, $K_{\Theta y}$ es el coeficiente de rigidez que se produce en la dirección Θ debido a un desplazamiento estático en la dirección y , y $C_{\Theta y}$ es el coeficiente de amortiguación que se produce en la dirección Θ debido a velocidad de desplazamiento en y . Este comportamiento cruzado en cojinetes queda fácilmente demostrado en el cálculo estático, donde la línea centros tiene un ángulo de desfase (ϕ) con respecto a la carga aplicada que varía con la excentricidad (η). El signo negativo en los coeficientes es debido a que un valor positivo de ellos le corresponde una fuerza de reacción. Los M_{ij} se definen como los coeficientes de inercia, los que son importantes únicamente para excitaciones a grandes frecuencias [21], las que no serán tratadas en este trabajo.

Las características dinámicas del sistema tribológico eje-lubricante-cojinete se puede asemejar a resortes y amortiguadores de comportamiento no lineal de sistemas mecánicos, como se puede ver en la Figura 3. En este caso el sistema queda completamente definido con el uso de 8 coeficientes, cuatro de rigidez (K_{ij}) y cuatro de amortiguamiento (C_{ij}). $K_{\Theta\Theta}$, K_{yy} , $C_{\Theta\Theta}$ y C_{yy} son comúnmente referidos como coeficientes directos de amortiguación y elasticidad y se corresponden a fuerzas que se oponen directamente al desplazamiento o a la velocidad de movimiento del centro del eje en el cojinete. En cambio $K_{\Theta y}$, $K_{y\Theta}$, $C_{\Theta y}$ y $C_{y\Theta}$ se denominan de acoplamiento cruzado ya que representan la reacción al desplazamiento o velocidad perpendicular al de aplicación de la carga. Cuando los coeficientes de rigidez cruzados $K_{\Theta y}$ y $K_{y\Theta}$ son de signos opuestos, el acoplamiento se vuelve desestabilizante produciendo fuerzas que agregan energía a la órbita del eje, resultando en amplitudes muy grandes de desplazamiento que pueden no llegar a ser contrarrestadas por la disipación directa del cojinete [22].

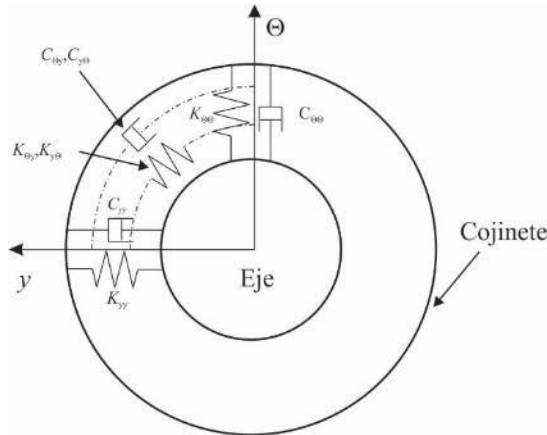


Figura 3. Resortes y amortiguadores no lineales que representan al lubricante.

Por definición, todos los coeficientes son evaluados en una posición de equilibrio con todos los otros desplazamientos y velocidades iguales a cero. Es por ello que se considera que existen distintas presiones dinámicas superpuestas actuando junto a la presión estática [10], de esta manera se tiene que:

$$p = p_{est} + \Delta p \quad (27)$$

$$\Delta p = p_{\theta} + p_y + p_{\dot{\theta}} + p_{\dot{y}} \quad (28)$$

donde p_{est} es la presión correspondiente al caso estático, y p_{θ} , p_y , $p_{\dot{\theta}}$ y $p_{\dot{y}}$ son las presiones dinámicas que resultan de los desplazamientos del centro del eje.

Substituyendo las ecuaciones (27) y (19) en (18), reteniendo únicamente los términos de primer orden, definiendo

$\varepsilon = (L/D)^2$ y separando variables, y tomando como términos independientes los que son debidos a las fluctuaciones del eje, se llega a 5 ecuaciones diferenciales: una para el caso estático y las otras 4 para el cálculo de coeficientes dinámicos:

$$\frac{1}{6} \pi \frac{\partial^2 (h_0^3(\Theta) p_{est})}{\partial z^2} + \frac{2\varepsilon}{3\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial (p_{est})}{\partial \Theta} h_0^3(\Theta) \right) = O \frac{\partial (h_0(\Theta))}{\partial \Theta} h_0^3(\Theta) \quad (29)$$

$$\frac{1}{6} \pi \frac{\partial^2 (h_0^3(\Theta) p_y)}{\partial z^2} + \frac{2\varepsilon}{3\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial (p_y)}{\partial \Theta} h_0^3(\Theta) \right) = \left(\begin{array}{l} O \sin(\pi\Theta) \pi - \frac{3O \cos(\pi\Theta)}{h_0(\Theta)} \frac{\partial (h_0(\Theta))}{\partial \Theta} + \\ h_0(\Theta) \frac{2\varepsilon \cos(\pi\Theta)}{\pi} \frac{\partial (p_{est})}{\partial \Theta} \frac{\partial (h_0(\Theta))}{\partial \Theta} \\ + h_0^2(\Theta) 2\varepsilon \sin(\pi\Theta) \frac{\partial (p_{est})}{\partial \Theta} \end{array} \right) \Delta \eta \quad (30)$$

$$\frac{1}{6}\pi \frac{\partial^2 (h_0^3(\Theta) p_\Theta)}{\partial z^2} + \frac{2\varepsilon}{3\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial(p_\Theta)}{\partial \Theta} h_0^3(\Theta) \right) = \left(\begin{array}{l} 0 \cos(\pi\Theta)\pi - \frac{3O \sin(\pi\Theta)}{h_0(\Theta)} \frac{\partial(h_0(\Theta))}{\partial \Theta} + \\ h_0(\Theta) \frac{2\varepsilon \sin(\pi\Theta)}{\pi} \frac{\partial(p_{est})}{\partial \Theta} \frac{\partial(h_0(\Theta))}{\partial \Theta} \\ + h_0^2(\Theta) 2\varepsilon \cos(\pi\Theta) \frac{\partial(p_{est})}{\partial \Theta} \end{array} \right) \eta_0 \Delta \psi \quad (31)$$

$$\frac{1}{6}\pi \frac{\partial^2 (h_0^3(\Theta) p_\psi)}{\partial z^2} + \frac{2\varepsilon}{3\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial(p_\psi)}{\partial \Theta} h_0^3(\Theta) \right) = (2O\pi \cos(\pi\Theta)) \Delta \dot{\eta} \quad (32)$$

$$\frac{1}{6}\pi \frac{\partial^2 (h_0^3(\Theta) p_\Theta)}{\partial z^2} + \frac{2\varepsilon}{3\pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial(p_\Theta)}{\partial \Theta} h_0^3(\Theta) \right) = (2O\pi \sin(\pi\Theta)) \eta_0 \Delta \dot{\psi} \quad (33)$$

Este sistema de ecuaciones puede ser resuelto de manera numérica, por la técnica de elementos finitos o bien por diferencias finitas, obteniéndose todos los perfiles de presión para un determinado valor de relación de aspecto ε y excentricidad η . Estas resoluciones conllevan un gran tiempo de cálculo para determinar las condiciones en un punto dado, es por ello que el desarrollo de nuevas técnicas analíticas es beneficioso para el entendimiento de problemas complejos. Para el caso particular de coeficientes dinámicos en cojinetes infinitamente cortos, se debe hacer $\varepsilon=0$ y resolver el sistema de ecuaciones integrando las presiones únicamente en z .

La determinación de los parámetros rotodinámicos se realiza al integrar pertinentemente las presiones dinámicas obtenidas de las ecuaciones diferenciales (30-33), como se muestra en las Ecs. (40) y (41):

2.2. Resolución del sistema de ecuaciones empleando el método de la perturbación regular

En este trabajo se propone el método de la perturbación regular para la determinación de los 8 coeficientes rotodinámicos, las cargas estáticas y el ángulo entre la carga y la línea de centros (ϕ). Como ya se comentara, esta técnica fue previamente utilizada para la resolución de la Ec. De Reynolds (11) (caso estático) [1] realizando una expansión en series tanto de la presión como del número de Ocvirk usando como parámetro de perturbación de $\varepsilon=(L/D)^2$. Esta técnica dio muy buenos resultados en la predicción del caudal, fricción y capacidad portante para valores de L/D y η en los cuales la soluciones ISJB e ILJB no resultan adecuadas.

En esta extensión se propone que, además de la presión estática y el número de Ocvirk, todas las presiones dinámicas se puedan expresar como series basadas en $(L/D)^2$ como parámetro de perturbación. De esta manera:

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i0} + \varepsilon p_{i1} + O(\varepsilon^2) \quad \text{con } i = est, \Theta, y, \dot{\Theta}, \dot{y} \\ O &= O_0 + \varepsilon O_1 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (34)$$

En este procedimiento, una vez determinados los perfiles de presión, se deben integrar en el área para poder obtener las fuerzas y así, los coeficientes dinámicos. Para este desarrollo se consideran solamente los términos de orden uno (ε), por lo que el método solo permite el cálculo del valor absoluto de las fuerzas y, en consecuencia, de los coeficientes.

Por ejemplo, para el caso estático es:

$$F^2 = F_\Theta^2 + F_y^2 = \left[\int_A P_{est} \sin(\pi\Theta) dA \right]^2 + \left[\int_A P_{est} \cos(\pi\Theta) dA \right]^2 \quad (35)$$

donde, al reemplazar $dA = \pi RL da$, $p_{est} = p_{0est} + \varepsilon p_{1est}$ y $P_{est} = P_p p_{est}$,

y expandiendo los cuadrados y dejando sólo los términos de orden cero y uno, se llega a:

$$F_\Theta^2 = (\pi RLP_p)^2 \left(\left[\int_A p_{est0} \sin(\pi\Theta) da \right]^2 + \varepsilon \int_A p_{est1} \sin(\pi\Theta) da \int_A p_{est0} \sin(\pi\Theta) da + O(\varepsilon^2) \right) \quad (36)$$

que permite calcular:

$$f_\Theta = \frac{F_\Theta}{\pi RLP_p} = \left(\left[\int_A p_{est0} \sin(\pi\Theta) da \right]^2 + \varepsilon \int_A p_{est1} \sin(\pi\Theta) da \int_A p_{est0} \sin(\pi\Theta) da \right)^{1/2} \quad (37)$$

donde f_Θ es la componente en dirección circunferencial de la fuerza adimensional. Lo mismo se puede hacer para F_y , y así calcular:

$$\phi = \arctan\left(\frac{F_\Theta}{F_y}\right) \quad (38)$$

Quedando el término de orden cero (correspondiente a la solución ISJB) elevado al cuadrado. Si bien esto es una desventaja no genera grandes dificultades debido a que con el sistema de coordenadas empleado los 8 coeficientes determinados numéricamente mantienen su signo para cualquier valor de excentricidad (η) y ($0 < L/D < 2$), por lo que su signo se puede fácilmente adaptar para el método propuesto siendo, de todos modos, solución de la raíz.

De esta manera, a través del método de perturbación regular se calculan los coeficientes y la fuerza adimensionales como:

$$\left. \begin{aligned} f_i &= \sqrt{(f_{i0})^2 + \varepsilon f_{i0} f_{i1}} \\ k_{ij} &= \sqrt{(k_{ij0})^2 + \varepsilon k_{ij0} k_{ij1}} \\ c_{ij} &= \sqrt{(c_{ij0})^2 + \varepsilon c_{ij0} c_{ij1}} \end{aligned} \right\} i, j = y, \Theta \quad (39)$$

dónde:

$$K_{\psi^r} = \frac{\pi RLP_p}{C} k_{\psi^r} = \frac{\pi RLP_p}{C} \int_A p_w (\sin(\pi\Theta))^m (\cos(\pi\Theta))^n da \quad \left\{ \begin{array}{l} r = 0; 1 \\ i = \Theta, y \\ j = \Theta, y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i = \Theta; j = \Theta \Rightarrow a = \Theta \\ i = \Theta; j = y \Rightarrow a = y \\ i = y; j = \Theta \Rightarrow a = \Theta \\ i = y; j = y \Rightarrow a = y \end{array} \right\} \begin{array}{l} m = 1, n = 0 \\ n = 1, m = 0 \end{array} \quad (40)$$

$$C_{\psi_r} = \frac{\pi LR^2 P_p}{UC} c_{\psi_r} = \frac{\pi LR^2 P_p}{UC} \int_A P_{ar} (\sin(\pi\Theta))^m (\cos(\pi\Theta))^n da \begin{cases} r=0;1 \\ \left. \begin{matrix} i = \dot{\Theta}; j = \dot{\Theta} \\ j = \dot{\Theta}; \dot{y} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} i = \dot{\Theta}; j = \dot{\Theta} \Rightarrow a = \dot{\Theta} \\ i = \dot{\Theta}; j = \dot{y} \Rightarrow a = \dot{y} \\ i = \dot{y}; j = \dot{\Theta} \Rightarrow a = \dot{\Theta} \\ i = \dot{y}; j = \dot{y} \Rightarrow a = \dot{y} \end{cases} \begin{matrix} m=1, n=0 \\ n=1, m=0 \end{matrix} \end{cases} \quad (41)$$

En el caso de los coeficientes de rigidez K_{yy} y $K_{\Theta y}$, estos pueden obtenerse directamente derivando respecto a η las fuerzas F_{Θ} y F_y , no siendo necesaria la resolución de la ecuación diferencial de p_y .

El valor de P_p se obtiene de la Ec. (17), una vez calculado el número de Ocvirk, $P_p = \frac{4\mu U}{RO} \left(\frac{R}{C}\right)^2 \left(\frac{L}{D}\right)^2$. Al reemplazar esta expresión en las Ecs. (37), (40) y (41) es factible de determinar que los órdenes de magnitud de la fuerza, coeficientes de rigidez y amortiguamientos son:

$$O(F) = \pi\mu UL \frac{4}{O} \left(\frac{R}{C}\right)^2 \left(\frac{L}{D}\right)^2, \quad O(K) = \frac{\pi\mu UL}{C} \frac{4}{O} \left(\frac{R}{C}\right)^2 \left(\frac{L}{D}\right)^2, \quad O(C) = \pi\mu L \frac{4}{O} \left(\frac{R}{C}\right)^3 \left(\frac{L}{D}\right)^2 \quad (42)$$

Haciendo $r=0$ en las Ecs. (40) y (41) (soluciones ISJB) se obtienen:

$$\begin{aligned} f_{y0} &= \frac{O_0 \eta^2}{\pi(1-\eta^2)^2}; \quad f_{\Theta 0} = -\frac{1}{4} \frac{O_0 \eta}{(1-\eta^2)^{3/2}}; \quad O_0 = \frac{8(1-\eta^2)^2}{\pi\sqrt{16\eta^2 + \pi^2(1-\eta^2)}} \\ k_{\Theta y 0} &= \frac{1}{4} \frac{O_0 \eta}{(1-\eta^2)^{3/2}}; \quad k_{\Theta \Theta 0} = \frac{O_0 \eta}{\pi(1-\eta^2)^2}; \quad k_{y\Theta 0} = -\frac{1}{4} \frac{O_0(2\eta^2+1)}{(1-\eta^2)^{5/2}}; \quad k_{yy 0} = \frac{2O_0\eta(\eta^2+1)}{(1-\eta^2)^3 \pi} \\ c_{\Theta y 0} &= c_{y\Theta 0} = \frac{2O_0 \eta}{\pi(1-\eta^2)^2}; \quad c_{\Theta \Theta 0} = -\frac{1}{2} \frac{O_0}{(1-\eta^2)^{3/2}}; \quad c_{yy 0} = \frac{1}{2} \frac{O_0(2\eta^2+1)}{(1-\eta^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (43)$$

Mientras que para $r=1$

$$\begin{aligned} f_{y1} &= -\frac{1}{40} \frac{((11O_0+10O_1)\eta^3 + (4O_0-10O_1)\eta)}{(1-\eta^2)^{5/2}}; \quad f_{\Theta 1} = \frac{1}{5} \frac{((6O_0+5O_1)\eta^4 + (6O_0-5O_1)\eta^2)}{\pi(1-\eta^2)^3}; \quad O_1 = -\frac{1}{10} \frac{((11\pi^2-192)\eta^4 + (-192-7\pi^2)\eta^2 - 4\pi^2)O_0}{(\pi^2-16)\eta^4 + (16-2\pi^2)\eta^2 + \pi^2} \\ k_{\Theta y 1} &= \frac{1}{40} \frac{((11O_0+10O_1)\eta^3 + 4O_0-10O_1)}{(1-\eta^2)^{5/2}}; \quad k_{\Theta \Theta 1} = \frac{1}{5} \frac{((6O_0+5O_1)\eta^4 + 6O_0-5O_1)}{\pi(1-\eta^2)^3}; \quad k_{y\Theta 1} = \frac{1}{40} \frac{(22O_0+20O_1)\eta^4 + (49O_0-10O_1)\eta^2 + 4O_0-10O_1}{\pi(1-\eta^2)^{5/2}} \\ k_{yy 1} &= \frac{2}{5} \frac{((6O_0+51O_1)\eta^4 + 24O_0\eta^2 + 6O_0-5O_1)\eta}{\pi(1-\eta^2)^4}; \quad c_{\Theta \Theta 1} = \frac{1}{20} \frac{(11O_0+10O_1)\eta^2 + 4O_0-10O_1}{(1-\eta^2)^{3/2}}; \quad c_{\Theta y 1} = -\frac{2}{5} \frac{((6O_0+5O_1)\eta^4 + 6O_0-5O_1)\eta}{\pi(1-\eta^2)^3} \\ c_{y\Theta 1} &= -\frac{2}{5} \frac{((4O_0+5O_1)\eta^2 - 5O_1)\eta}{\pi(1-\eta^2)^3}; \quad c_{yy 1} = \frac{1}{20} \frac{((16O_0+20O_1)\eta^4 + (25O_0-10O_1)\eta^2 + 4O_0-10O_1)}{(1-\eta^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (44)$$

3. Resultados y Conclusión

Para mostrar el alcance del método, los resultados obtenidos por la perturbación regular (**P&O-perturbation**) son comparados con los correspondientes a la solución de Ocvirk (**ISJB**) y la numérica (**Numeric**). El ajuste se muestra con respecto al sistema de referencia estático (\underline{X} , \underline{Y}), utilizando la siguiente matriz de transformación:

$$\begin{pmatrix} L_{XX} & L_{XY} \\ L_{YX} & L_{YY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{rr} & L_{r\theta} \\ L_{\theta r} & L_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \Rightarrow L = k, c \quad (45)$$

Cómo así también, la fuerza, los coeficientes de rigidez y amortiguamiento se representan mediante las siguientes adimensionalizaciones:

$$k_{ij} = \frac{K_{ij}}{4 \frac{\pi\mu UL}{C} \left(\frac{R}{C}\right)^2 \left(\frac{L}{D}\right)^2 f_T} ; c_{ij} = \frac{C_{ij}}{4 \pi\mu L \left(\frac{R}{C}\right)^3 \left(\frac{L}{D}\right)^2 f_T} \left. \vphantom{k_{ij}} \right\} i, j = X, Y ; f_T = \frac{F_T}{4 \pi\mu UL \left(\frac{R}{C}\right)^2 \left(\frac{L}{D}\right)^2} \quad (46)$$

La Figura 4 muestra los resultados obtenidos.

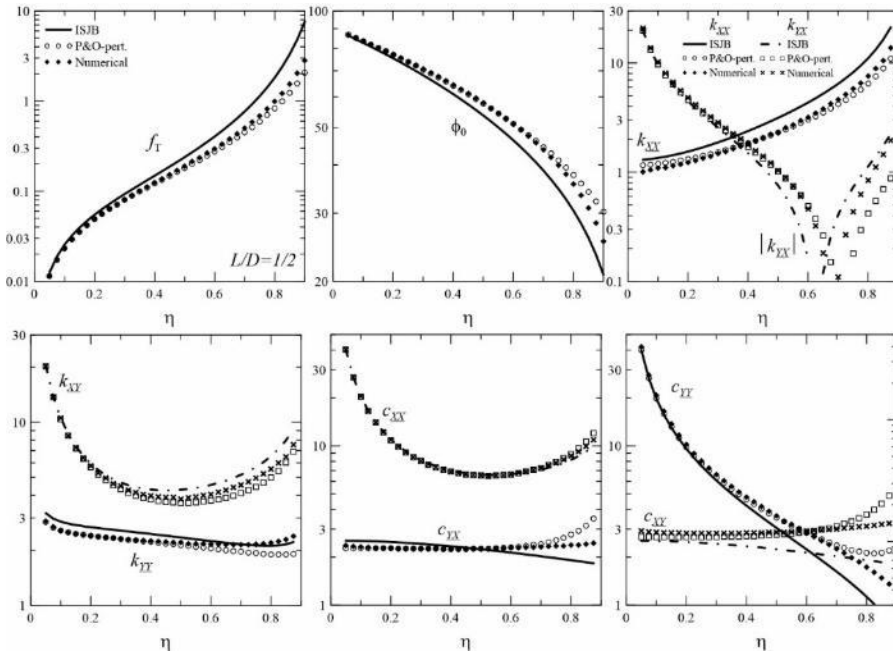


Figura 4. Parámetros calculados en función de la excentricidad relativa para $L/D=0.5$: Ángulo de desfasaje (ϕ), fuerza total adimensional (f_T), coeficientes de rigidez adimensional (k_{ij}) y coeficientes de amortiguación adimensional (c_{ij}).

Cómo era de esperar, los valores calculados por los tres métodos prácticamente coinciden para valores de excentricidad pequeños, cercanos a cero. Este comportamiento se hace aún más notorio a medida que disminuye la relación de aspecto (L/D). En cuanto al método de la perturbación regular, éste da resultados muy satisfactorios, que se acercan al resultado numérico, hasta excentricidades altas, como se puede ver en los datos para $L/D=0,5$.

Si bien, en algunos de los coeficientes no se observan diferencias sustanciales a medida que aumenta la excentricidad, es debido a que los mismos están adimensionalizados por sus respectivas fuerzas y en el caso de la solución de Ocvirk, ésta actúa como un factor de corrección atenuando la discrepancia que los coeficientes calculados por este método presentan para grandes excentricidades. Para $\eta=0.5$, el error porcentual de la fuerza calculada por la solución de Ocvirk es del 26% mientras que para la solución del método de perturbación es de tan solo 4%, y para $\eta=0.9$ el error para ISJB es de 138% mientras que para el método propuesto es de solo el 24%.

Esto demuestra el gran alcance que tiene esta relativa simple solución. Sería sencillo utilizar un factor de ajuste basándose únicamente en el cálculo de la fuerza total para poder extrapolar esta solución hacia nuevos valores de relación de aspecto. Si se mostraran los valores reales la diferencia total sería mucho más notoria a favor de la propuesta de este trabajo.

4. Referencias

- [1] Vignolo, G.G., Barilá, D.O., Quinzani, L.M., Approximate analytical solution to Reynolds equation for finite length journal bearings, *Tribology International*, Volume 44, Issue 10, September 2011, Pages 1089-1099, ISSN 0301-679X, <http://dx.doi.org/10.1016/j.triboint.2011.03.020>.
- [2] Dubois, G.B., Ocvirk, F.W., Analytical derivation of short bearing approximation for full journal bearings. *NACA Report* 1953;1157.
- [3] Sommerfeld, A., The hydrodynamic theory of lubrication friction. *Zs Math Phys* 1904;50(1,2):97–155.
- [4] Pinkus, O., *Theory of hydrodynamic lubrication*. NewYork: McGrawHill; 1961.
- [5] Barrero Ripoll, A., Perez-Saborid Sanchez-Pastor, M. *Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos*. Madrid: McGraw Hill; 2005.
- [6] Ling, F., Asymptotic analyses in isothermal fluid film lubrication theories. *SIAM Rev* 1986;28(3):343–66.
- [7] Nayfeh, A., *Perturbation methods*. New York: John Wiley & Sons; 1973.
- [8] Capriz, G., Cimatti, G., On some singular perturbation problems in the theory of lubrication. *Appl Math Opt* 1978;4:285–97.
- [9] Tayler, A.B., A uniformly valid asymptotic solution of Reynolds equation: the finite journal bearing with small clearance. *Proc Roy Soc A* 1968;305(1482):345–61.
- [10] Lund, J.W., Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings. *ASME. J. Tribol.* 1987;109(1):37-41. doi:10.1115/1.3261324.
- [11] Qiu, Z.L., Tieu A.K., The Effect of Perturbation Amplitudes on Eight Force Coefficients of Journal Bearings, *Tribology transaction*, Vol 43 (2000),1, 109-115, Vol 39(1996),2, 469-475.
- [12] Hitoshi Hattori. Dynamic Analysis of a rotor-journal Bearing System with large dynamic loads, *JSME*, Series C, Vol. 36, No 2,1993.

- [13] Jang G.H., Kim Y.J., Calculation of Dynamic Coefficients in a Hydrodynamic Bearing Considering Five Degrees of Freedom or a General Rotor-Bearing System, *Journal of Tribology*, ASME, JULY 1999, Vol. 121 / 499.
- [14] Ebrat, O., Mourelatos, Z. P., Vlahopoulos, N., and Vaidyanathan, K. (2004), "Calculation of Journal Bearing Dynamic Characteristics Including Journal Misalignment and Bearing Structural Deformation," *Tribology Transactions*, 47(1), pp 94–102.
- [15] Rao, T.V.V.L.N., Biswas, S., Hirani, H., Athre, K., An Analytical Approach to Evaluate Dynamic Coefficients and Nonlinear Transient Analysis of a Hydrodynamic Journal bearing, *Tribology transaction*, Vol 43 (2000),1, 109-115.
- [16] Chasalevris, A., Sfyris, D., Evaluation of the finite journal bearing characteristics, using the exact analytical solution of the Reynolds equation, *Tribology International*, Volume 57, January 2013, Pages 216-234, ISSN 0301-679X.
- [17] Reynolds, O., On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Towers experiments, including an experimental determination of the olive oil. *Phil Trans Roy Soc* 1886;177:157–234.
- [18] Hamrock, B.J., Schmid, S.R., Jacobson, B.O., *Fundamentals of fluid film lubrication 2nd ed.* New York: Marcel Dekker, Inc.; 2004.
- [19] Sommerfeld, A., The hydrodynamic theory of lubrication friction. *Zs Math Phys* 1904;50(1,2):97–155.
- [20] McHugh, J.D., Learning from unexpected consequences-the roots of tribology. *Lubr Eng* 1999;55(7):33–9.
- [21] San Andrés, L., *Dynamics of a Rigid Rotor-Fluid Film Bearing System*, Class Notes on Modern Lubrication, Texas A&M University, College Station, TX, 2006.
- [22] Wilkes, J.C., Childs D.W., Tilting Pad Journal Bearings—A Discussion on Stability Calculation, Frequency Dependence, and Pad and Pivot, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, DECEMBER 2012, Vol. 134 / 122508-1.