

## **DISEÑO SOLAR PASIVO OPTIMO DE CONSTRUCCIONES: UN MODELO PRELIMINAR**

R.A.Achilles<sup>1</sup>, E.A.Sierra<sup>2</sup>

Universidad Tecnológica Nacional - Unidad Académica Confluencia  
J.M.de Rosas y J.Soufal-P.Huincul Neuquén, Argentina Q8318EFG  
tel/fax +54 (299) 496-3292 e-mail [achilles@ieee.org](mailto:achilles@ieee.org)

### **RESUMEN**

El diseño solar de construcciones es un campo de la arquitectura gobernado por la aplicación de una serie de premisas clásicas atinentes a conceptos y materiales utilizados, raramente revisadas como consecuencia de evaluaciones cuantitativas o funcionales desarrolladas luego de concluida la construcción.

Lo mencionado ha centrado el enfoque de esta temática en la evolución tecnológica de sistemas activos y materiales aislantes aplicables a aquellas más que en la generación de medios analíticos tendientes a la optimización de su diseño térmico sobre bases pasivas y con aplicación de materiales convencionales.

El presente trabajo introduce una metodología orientada a este último propósito fundada en la maximización del error de la Función de Transferencia Temperatura Interior/Temperatura de Cielo, la que es definida a partir de la red eléctrica análoga representativa del proceso. En la presente fase de desarrollo del modelo –fundado en la linealización de la transferencia por radiación solar para valores medios de temperaturas de cielo y exterior- no fueron consideradas transferencias desde el suelo ni por convección.

Es incluida una evaluación de la metodología propuesta a través de un estudio paramétrico para una construcción básica de materiales convencionales en la que, para altura y espesor de losa constantes, es optimizado el espesor de muros en función de las dimensiones de la construcción.

Palabras Claves: Diseño Térmico de Construcciones – Sistemas Pasivos – Sistemas Alineales – Optimización

### **INTRODUCCIÓN**

Las características de la edificación tienen severas implicancias sobre el consumo global de energía: éste arriba a hasta un 40% del total, e implica un impacto ambiental equivalente al 22% del total de emisiones de CO<sub>2</sub>.

Esto obedece en gran medida a las premisas aplicadas al diseño térmico de construcciones, que frecuentemente subestiman la capacidad de almacenamiento de calor e inercia térmica provista por los elementos pasivos participantes del proceso –en particular los materiales tradicionales de construcción- incrementando la necesidad de sistemas activos para compensación de los cambios climáticos exteriores (Hastings 1995).

Una revisión crítica a este enfoque, que involucra la optimización del aislamiento y consecuente reducción de niveles de demanda energética de edificios, es propuesta en el presente artículo. Fundada en la analogía eléctrica del fenómeno (Incropera y DeWitt 1996) es derivada la Función de Transferencia Temperatura Interior/Temperatura de Cielo, linealizada para magnitudes medias de temperatura de cielo y exterior. La maximización del error de esta función habilita un algoritmo que permite dicha optimización.

Para evaluar el modelo propuesto, esta primera fase de desarrollo incluye un estudio paramétrico para una casa solar elemental carente de aberturas, sin transferencias de calor por convección ni desde el suelo y en la que, para una altura y espesor de losa constantes, el espesor de paredes es optimizado en función de las dimensiones de la construcción.

### **METODO DE ANALISIS**

Las Resistencias Térmicas de Paredes  $R_w$ , Losa  $R_r$  y Capacidades Térmicas de Paredes, Losa e Interior  $C_w$ ,  $C_r$  y  $C_i$  pueden ser expresadas en términos de los parámetros dimensionales  $x$  y  $A$ , densidad  $\delta$ , conductividad térmica  $k$  y calor específico  $c$

1. Consultor S.P., Docente-Investigador UTN 2. Director UTN Confluencia, Docente-Investigador UTN-U.N.Comahue

de cada componente como:

$$R_w = x_w / (k_w \cdot A_w) \quad R_r = x_r / (k_r \cdot A_r) \quad (1)$$

$$C_w = \delta_w \cdot c_w \cdot x_w \cdot A_w \quad C_r = \delta_r \cdot c_r \cdot x_r \cdot A_r \quad C_i = \delta_i \cdot c_i \cdot x_i \cdot A_i \quad (2)$$

Adicionalmente, la transferencia por radiación desde la fuente primaria de calor del sistema analizado -el sol- puede caracterizarse por las expresiones de Radiación Solar  $R$  y Energía Radiada  $W$ , que en términos de la Constante de Stephan-Boltzmann  $\sigma$ , Emisividad de Cielo  $\epsilon_s$  y Emisividad de la Casa  $\epsilon_h$ , resultan:

$$R = \sigma \cdot \epsilon_s \cdot T_s^4 = \sigma \cdot T_e^4 \quad W = \sigma \cdot \epsilon_h \cdot A_h \cdot (T_s^4 - T_e^4) \quad (3)$$

donde  $A_h$  es el área expuesta a radiación de la construcción y  $T_s$  y  $T_e$  las Temperaturas de Cielo y Exterior. Con el sistema linealizado para las magnitudes medias de éstas, la Resistencia de Transferencia de Radiación Solar puede escribirse:

$$R_s = [(T_s - T_e)/W]_{T_s=T_{sm}, T_e=T_{em}} = 1/[\sigma \cdot \epsilon_h \cdot A_h \cdot (T_{sm}^2 + T_{em}^2) \cdot (T_{sm} + T_{em})] \quad (4)$$

Mientras que para representar componentes no optimizados de la construcción como la losa se optó por una Conexión en T compuesta de  $0.5R_r/C_r/0.5R_r$ , los muros -cuyo espesor es el objeto de la presente optimización- fueron modelados en base a una Conexión  $\pi$ -T con  $C_w$  distribuida en los nodos  $T_w$  (Temperatura de Muros) y  $T_i$  (Temperatura Interior) de la manera indicada en la Figura 1, donde  $T_r$  ejemplifica la Temperatura de Losa. La radiación solar sería asimilable a una fuente de tensión sinusoidal -o más precisamente a la salida de un rectificador de media onda- conectada al nodo  $T_s$ , lo que permitiría algunos análisis en el dominio de la frecuencia. No obstante eso, el modelo de optimización aquí introducido es independiente del tipo de entrada.

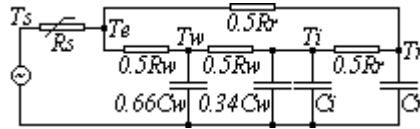


Fig.1 – Análogo Eléctrico de la Casa Solar

En este contexto, la Función de Transferencia Temperatura Interior/de Cielo es obtenida a partir de las impedancias entre nodos  $T_e$  y  $T_i$  a través de, respectivamente, muros y losa pudiendo aquellas expresarse en términos de la Transformada de Laplace como:

$$z_w(s) = \frac{R_w}{2} + \frac{[R_w/2 + 3/s(C_w+3C_i)]/s2C_w}{R_w/2 + 9(C_w+C_i)/s2C_w(C_w+3C_i)} = \frac{s^2 R_w^2 C_w(C_w+3C_i) + s6R_w(2C_w+3C_i) + 18}{s2[sR_w C_w(C_w+3C_i) + 9(C_w+C_i)]} \quad (5)$$

$$z_r(s) = \frac{R_r}{2} + \frac{(R_r/2 + 1/sC_i)/sC_r}{R_r/2 + (C_r+C_i)/sC_r C_i} = \frac{s^2 R_r^2 C_r C_i + s2R_r(C_r+2C_i) + 4}{s[sR_r C_r C_i + 2(C_r+C_i)]} \quad (6)$$

y la impedancia vista desde la fuente resulta:

$$z_s(s) = R_s + \frac{z_w(s) \cdot z_r(s)}{z_w(s) + z_r(s)} \quad (7)$$

Expresando la Resistencia y Capacidad Térmica de Muros en ecuación (5) en función de los parámetros unitarios  $r_w$  y  $c_w$  y del espesor de muros  $w$ , como  $R_w = r_w \cdot w$  y  $C_w = c_w \cdot w$  y sustituyendo (5) y (6) en (7), la Función de Transferencia Temperatura Interior/Temperatura de Cielo puede ser calculada como la relación de impedancias:

$$T(s) = \frac{T_i(s)}{T_s(s)} = \frac{1}{sC_i \cdot z_s(s)} = \frac{1}{(R_s+R_r)C_i} \cdot \frac{s^3 A_3 + s^2 A_2 + s \cdot A_1 + A_0}{s^4 B_4 + s^3 B_3 + s^2 B_2 + s \cdot B_1 + B_0} = K \frac{p(s)}{q(s)}; \quad (8)$$

donde:  $A_3 = w^2(w^2 + p_{31}w + p_{30})$ ,  $A_2 = p_2(w^4 + p_{23}w^3 + p_{22}w^2 + p_{21}w + p_{20})$ ,  $A_1 = p_1(w^3 + p_{12}w^2 + p_{11}w + p_{10})$ ,  $A_0 = p_0(w + p_{00})$ ,  $B_4 = w^2(w^2 + q_{41}w + q_{40})$ ,  $B_3 = q_3(w^4 + q_{33}w^3 + q_{32}w^2 + q_{31}w + q_{30})$ ,  $B_2 = q_2(w^4 + q_{23}w^3 + q_{22}w^2 + q_{21}w + q_{20})$ ,  $B_1 = q_1(w^2 + q_{11}w + q_{10})$  y  $B_0 = q_0$ . Los coeficientes  $p_i$ ,  $q_j$  son, en cada caso, funciones de  $r_w$ ,  $c_w$ ,  $R_s$ ,  $R_r$ ,  $C_r$  y  $C_i$ .

El error en la salida  $Ti(s)$  de la F.T. para una entrada genérica  $Ts(s)$  puede ser determinado a partir de la asimilación de  $T(s)$  a un caso de realimentación unitaria,  $T(s) = G(s)/[1+G(s)]$  con  $G(s) = K \cdot p(s)/[q(s)-K \cdot p(s)]$  donde:

$$E(s) = \frac{Ts(s)}{1+G(s)} = Ts(s) \cdot \frac{q(s) - K \cdot p(s)}{q(s)} \quad (9)$$

El máximo aislamiento del interior puede definirse para  $q(s) \gg K \cdot p(s)$ , con lo que  $E(s)$  tiende a la magnitud de la entrada  $Ts(s)$  y  $Ti(s)$  no es alterado. A partir de las respectivas condiciones de extremo de  $p(s)$  y  $q(s)$  de cancelación de sus primeras derivadas con respecto al espesor de muros  $w$ , las magnitudes de este último que –en combinación con las demás magnitudes de la construcción– satisfacen la condición de máximo aislamiento térmico pueden ser deducidas para las distintas frecuencias participantes del proceso. Dichas condiciones son:

$$dp(s)/dw = P^0(s) = s^3 w(4w^2 + 3p_{31}w + 2p_{30}) + s^2 p_2(4w^3 + 3p_{23}w^2 + 2p_{22}w + p_{21}) + s \cdot p_1(3w^2 + 2p_{12}w + p_{11}) + p_0 = 0 \quad (10)$$

$$dq(s)/dw = Q^0(s) = s^4 w(4w^2 + 3q_{41}w + 2q_{40}) + s^3 q_3(4w^3 + 3q_{33}w^2 + 2q_{32}w + q_{31}) + s^2 q_2(4w^3 + 3q_{23}w^2 + 2q_{22}w + q_{21}) + s \cdot q_1(2w + p_{11}) = 0 \quad (11)$$

Las sucesivas derivadas de  $P^0(0)$  y  $Q^0(0)$  con respecto a  $s$ :  $P^1(s)$ ,  $P^2(s)$ ,... y  $Q^1(s)$ ,  $Q^2(s)$ ,... identifican a las mencionadas componentes en frecuencia. Las magnitudes de las mismas para  $s = 0$  serían en este caso:

$$P^0(0) = p_0; \quad P^1(0) = p_1(3w^2 + 2p_{12}w + p_{11}); \quad P^2(0) = 2p_2(4w^3 + 3p_{23}w^2 + 2p_{22}w + p_{21}); \quad P^3(0) = 6w(4w^2 + 3p_{31}w + 2p_{30}) \quad (12)$$

$$Q^0(0) = 0; \quad Q^1(0) = q_1(2w + p_{11}); \quad Q^2(0) = 2q_2(4w^3 + 3q_{23}w^2 + 2q_{22}w + q_{21}); \quad Q^3(0) = 6q_3(4w^3 + 3q_{33}w^2 + 2q_{32}w + q_{31}) \quad (13)$$

$$\text{y } Q^4(0) = 24w(4w^2 + 3q_{41}w + 2q_{40}).$$

donde  $P^4(0)$  y sucesivas, y  $Q^5(0)$  y sucesivas, son nulas. El impacto combinado de dichas componentes sobre las condiciones de extremo establecidas por ecuaciones (10) y (11) puede determinarse basado en un desarrollo por serie (Hurwitz 1895; Davidson 1966; Dorf 1967) para cada uno de los casos según:

$$P_{2i} = \sum_{k=0}^{2i} (-1)^{k+i} \frac{P^k(0) \cdot P^{2i-k}(0)}{k!(2i-k)!}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad Q_{2j} = \sum_{k=0}^{2j} (-1)^{k+i} \frac{Q^k(0) \cdot Q^{2j-k}(0)}{k!(2j-k)!}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

y la igualación a cero de los sucesivos  $P_{2i}$  y  $Q_{2j}$  aplicaría la condición de extremo establecida para  $p(s)$  y  $q(s)$  a las componentes de frecuencia creciente de  $E(s)$ . De este procedimiento se derivan ecuaciones en la variable flotante –el espesor de muros  $w$ – con coeficientes función de las dimensiones remanentes y materiales utilizados en la construcción:

$$P_2=0 : w^4 + (4/9)(3p_{12} - 2p_0 p_2 / p_1^2)w^3 + (2/9)(2p_{12}^2 - 3p_0 p_2 p_{23} / p_1^2)w^2 + (4/9)(p_{12} p_{11} - p_0 p_2 p_{22} / p_1^2)w + (1/9)(p_{11}^2 - 2p_0 p_2 p_{21} / p_1^2)w = 0$$

$$P_4=0 : w^6 + (3/2)(p_{23} - p_1 / p_2^2)w^5 + (1/16)[9p_{23}^2 - 2p_1(8p_{12} + 9p_{31}) / p_2^2]w^4 + (1/4)\{3p_{23}p_{22} - p_1[3p_{11} + 4(p_{12}p_{31} + p_{30})] / p_2^2\}w^3 + (1/8)[2p_{22}^2 - p_1(4p_2 p_{30} + 3p_{11}p_{31}) / p_2^2]w^2 + (1/4)(p_{22}p_{21} - p_1 p_{12} p_{30} / p_2^2)w + (1/16)p_{21}^2 = 0 \quad (15)$$

$$P_6=0 : w^2 + (3/4)p_{31}w + (1/2)p_{30} = 0$$

$$Q_2=0 : w + (1/2)q_{11} = 0$$

$$Q_4=0 : w^6 + (3/2)q_{23}w^5 + (1/16)(9q_{23}^2 - 16q_1 q_3 / q_2^2)w^4 + (1/4)[3q_{23}q_{22} - q_1(2q_{11}q_{13} + 3q_3 q_{33}) / q_2^2]w^3 + (1/8)[2q_{22}^2 - q_1 q_3(3q_{11}q_{33} + 4q_{32}) / q_2^2]w^2 + (1/4)[q_{22}q_{21} - q_1 q_3(q_{11}q_{32} + q_{31}) / q_2^2]w + (1/16)q_{21}^2 = 0 \quad (16)$$

$$Q_6=0 : w^6 + (3/2)\{[q_3^2 q_{33} - q_2(q_{23} + q_{41})] / (q_3^2 - 2q_2)\}w^5 + (1/16)\{[9q_3^2 q_{33}^2 - 2q_2(8(q_{22} + q_{40}) + 9q_{23}q_{41})] / (q_3^2 - 2q_2)\}w^4 + (1/4)\{[3q_3^2 q_{33}q_{32} - q_2(2q_{21} + 3(q_{23}q_{40} + q_{22}q_{41}))] / (q_3^2 - 2q_2)\}w^3 + (1/8)\{[2q_3^2 q_{32}^2 - q_2(3q_{21}q_{41} + 4q_{22}q_{40})] / (q_3^2 - 2q_2)\}w^2 + (1/4)[(q_3^2 q_{32}q_{31} - q_2 q_{21}q_{40}) / (q_3^2 - 2q_2)]w + q_3^2 q_{31}^2 / (q_3^2 - 2q_2) = 0$$

La asimilación de  $T(s)$  a una Función de Filtro de Butterworth (Sydenham 1982; Van Valkenburg 1996) daría lugar, por medio del requisito de máxima planitud en banda de paso de éste, a resultados similares a los de ecuaciones (15) y (16). La resolución de éstas –que en algunos casos como el de  $Q_2=0$  con  $w$  negativo no tiene sentido físico indicando la inexistencia de óptimos en ese caso– arrojaría los espesores de muros que maximizan la aislación térmica del interior para cada condición.



## APLICACIÓN PARAMÉTRICA

El ejemplo de aplicación seleccionado es una casa solar de concreto sin aberturas –como la exhibida en la salida del programa- de 3 m de altura, 0.4 m de espesor de losa, un 5 % de hierro en paredes y un 10 % en losa. La radiación solar adoptada fue en correspondencia con las emisividades  $\epsilon_s = 0.8$  (cielo) y  $\epsilon_h = 0.9$  (casa) y una temperatura exterior media  $T_{em} = 30^\circ\text{C}$ . La planta de la construcción fue supuesta cuadrada y el lado de la misma,  $x_l$ , variado en el rango entre 1.0 y 8.0 m. La Tabla I lista los espesores de muros correspondientes a cada una de las condiciones de optimización postuladas a lo largo del rango indicado de variación de la dimensión principal de la construcción.

Tabla I – Espesor de Paredes para Óptima Aislación Térmica en Función de Condición y Dimensión Longitudinal de la Construcción

Condición	$x_l$ (m):	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	
$p(s)$ min baja frec:		2.2	2.2	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.8	1.8
frec.intrm:		2.0	2.0	2.0	.20	2.0	.26	2.0	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	.11	.12	.13	.11	.12	.13	.13	.14	.15	.15	.16	.16	.17	.17	.18	.16	.16	.17	.17	.17	.18
$q(s)$ max frec.intrm:		2.0	2.0	2.0	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8
alta frec:		1.9	2.0	1.9	.11	.12	.13	.11	.12	.13	.14	.15	.15	.16	.16	.17	.17	.16	.16	.17	.17	.18	.18	.18	.19	.19	.19	.20	.20	.20	.20	.21	.21	.21	.21	.21	.22

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La Figura 3 exhibe las prácticamente coincidentes características de espesores de pared óptimos correspondientes a  $p(s)$  mínimo baja frecuencia y a  $q(s)$  máximo frecuencia intermedia y, por separado, las correspondientes a  $p(s)$  mínimo frecuencia intermedia y a  $q(s)$  máximo alta frecuencia en función de la dimensión longitudinal de la construcción.

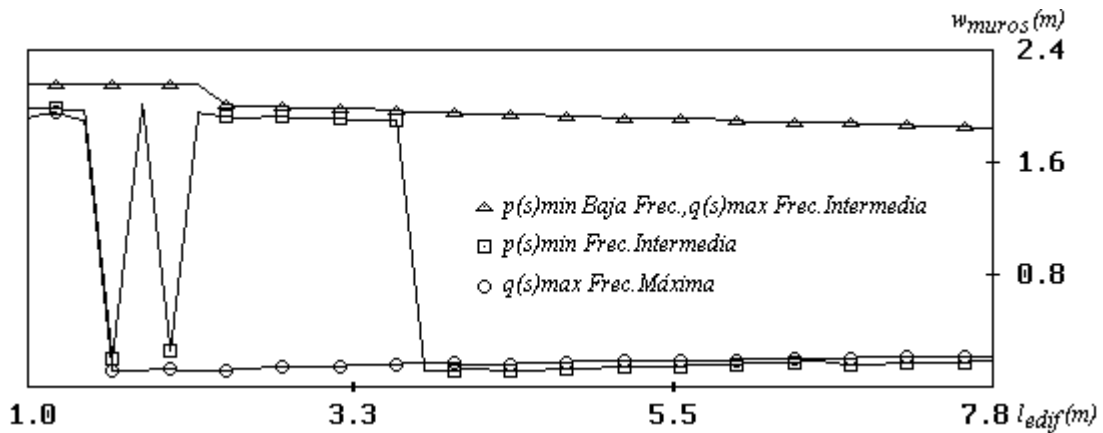


Fig.3 – Espesor Óptimo de Muros en Función de las Dimensiones de la Construcción

Es interesante la observación que las condiciones de extremo establecidas son verificadas para espesores *no infinitos* de muros.

Puede, asimismo, verse que el espesor óptimo de muros se estabiliza –para dimensiones constructivas reducidas y en todas las frecuencias- en una magnitud algo superior a la mitad de la altura de construcción adoptada. Acá podría inferirse que para  $C_i$  (capacidad de almacenamiento de calor del interior) mínimo, la optimización del aislamiento interior se verifica para una  $R_w$  (transferencia a través de muros) prácticamente homóloga a  $R_c$  (transferencia a través de losa). Las diferencias en modelado ( $T$  versus  $\pi$ - $T$ ), resistividad –por la distinta proporción de hierro- y dimensiones de las transferencias a través de muros y losa apartan a esta condición de la situación epidérmica “igloo” de espesor uniforme a este caso (Hastings 1995).

Finalmente, a partir de dimensiones constructivas de 1.5 m para los datos considerados, el espesor óptimo decrece al rango típico de 0.15-0.20 m para frecuencias intermedias y altas.

## CONCLUSIONES

El artículo introduce una metodología de optimización de la aislación térmica de construcciones basado en la maximización del error de la Función de Transferencia Temperatura Interior/Temperatura de Cielo.

El comportamiento del modelo, construido en base a la analogía eléctrica del fenómeno, fue verificado con un estudio paramétrico aplicado a la optimización de espesor de muros de una casa solar elemental de materiales tradicionales en la que no fueron representadas las transferencias por convección ni desde el suelo.

Magnitudes de espesor de muros compatibles con valores usuales fueron obtenidos, para los datos particulares estudiados, en rangos de frecuencias intermedias y altas del análisis.

La continuación del presente trabajo se orientará a las siguientes áreas:

- Incorporación de las transferencias por convección y desde el suelo al interior de la construcción.
- Introducción de un modelo de optimización –y uno de verificación en tiempo discreto- de elementos finitos con una estratificación mínima de tres elementos en las tres direcciones para posibilitar la reproducción de corrientes convectivas interiores.
- Implementación de aberturas y fuentes internas de calor. Consideraciones de ventilación.
- Estudios paramétricos complementarios con utilización materiales aislantes.

## REFERENCIAS

- Hastings S. (1995). Myths in Passive Solar Design, Solar Energy, Elsevier Science Ltd. **55**, 6, 445-451.
- Incropera F. y DeWitt D. (1996). Introduction to Heat Transfer, John Wiley and Sons.
- Hurwitz A. (1895). On the Conditions Under Which an Equation has Only Roots with Negative Real Parts, Mathematische Annalen **46**, 273-284.
- Davidson E. (1966). A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems, IEEE Transactions on Automatic Control **1**, 93-101.
- Sydenham P. (1982). Handbook of Measurement Sciences, John Wiley and Sons.
- Van Valkenburg M. (1996). Modern Network Synthesis, John Wiley and Sons.
- Tinney W. y Hart C. (1967). Power Flow Solutions by Newton Methods, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems **11**, 1449-1455.

## ABSTRACT

Building solar design is a field of architecture ruled by the application of classical premises involving the utilized concepts and materials seldom reviewed as a consequence of quantitative or functional evaluations carried out after the construction is ended.

The aforementioned has centered the scope of this subject on the technological evolution of active systems and insulating materials more than on the generation of analytical means applicable to the buildings' thermal design optimization on passive-system traditional-material basis.

An algorithm oriented to that purpose is introduced in this work founded on the error maximization of the Interior Temperature/Sky Temperature Transfer Function defined based on the phenomenon's electric analog. Heat transfer from the soil and by convection have been excluded in the present development phase of the model. The aforementioned Transfer Function is attained by linearizing the solar radiation transfer for the selected exterior temperature mean value.

An evaluation of the proposed methodology is included in the form of a parametric study for a base case with traditional materials where, for a constant roof height and thickness, wall thickness is optimized in terms of the construction dimensions.