METODOS NUMERICOS PARA LA RESOLUCION DEL PROBLEMA DE STEFAN CON CONDICION DE FLUJO DE CALOR EN EL BORDE FIJO

R. Lozano[1], A. Boucíguez[1], E. Hoyos[1], J. González[1], A. Ovejero[1] y L. Villa[2]

[1]Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Salta.
[2]Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Salta.
Av. Bolivia 5150 - 4400 Salta.
Tel: 0387 - 4255424 Fax: 0387 - 4255888
e-mail: lozanor@unsa.edu.ar

RESUMEN: Se presentan diferentes modelos de cálculo para la evaluación de la posición de la frontera libre en función del tiempo para el problema de Stefan a una fase, en comparación con los resultados arrojados por la solución exacta, para el caso de flujo de calor en el borde fijo. Los resultados muestran la confiabilidad de los modelos presentados.
PALABRAS CLAVES: material de cambio de fase, solución exacta, flujo de calor, simulación numérica.

INTRODUCCION

El estudio del comportamiento de una sustancia de cambio de fase, cuando se encuentra inicialmente a la temperatura de fusión se conoce en bibliografía como el problema de Stefan a una fase (Tarzia, 1991/92) y puede tratarse como material semi-infinito sometido a la condición de borde elegida, que en este caso es un flujo de calor.

Este problema tiene solución exacta solo cuando dicho flujo es de la forma $q(t) = q_0/t^{1/2}$. Evidentemente los problemas concretos que se presentan a diario distan mucho de cumplir esta condición, por lo que a fin de analizar dichas situaciones deben realizarse modelos de simulación numérica que puedan representar satisfactoriamente cada situación particular. Surge entonces la necesidad de validar estos modelos, comparándolos con los de la solución exacta.

MODELO DE CALCULO Y SIMULACION NUMÉRICA

Las ecuaciones que describen el proceso son la ecuación de difusión y la condición de Stefan en la frontera libre, sujetas a las correspondientes condiciones iniciales y de borde. Si $T(x,t)$ es la temperatura función de las variables espacial x y temporal t, el problema queda descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad 0 < t < \tau, \qquad 0 < x < s(t) \leq \infty \tag{1}$$

$$\rho L \frac{ds(t)}{dt} = -k \frac{\partial T(x = s(t))}{\partial x}, \qquad \forall t > 0 \tag{2}$$

$$T(s(t),t) = Tf, \quad \forall t > 0 \tag{3}$$

$$s(0) = 0 \tag{4}$$

$$k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(0,t)} = -\frac{q_0}{\sqrt{t}}, \quad \forall t > 0 \tag{5}$$

Donde $\alpha = k/(\rho\, c)$ es la difusividad térmica de la sustancia, igual al cociente entre la conductividad térmica k y el producto de la densidad ρ y la capacidad calorífica c; τ es el tiempo total de cálculo y L es el calor latente de fusión del material de cambio de fase. La función $s(t)$, desconocida a priori, es la posición de la frontera en función del tiempo t; T_f es la temperatura de fusión. La solución exacta para la posición de la frontera está dada por $s(t)=2\lambda(\alpha t)^{1/2}$ donde λ se determina resolviendo la ecuación trascendente: $\lambda\, exp(\lambda^2) = q_0 / (\rho L \alpha^{1/2})$.

Utilizando las ecuaciones de difusión y la ecuación de Stefan, el problema se resuelve rápidamente discretizando estas ecuaciones lo que puede hacerse mediante un esquema de diferencias finitas (explícitas o implícitas), que se ha resuelto utilizando el lenguaje *Qbasic*. Se ha planteado también la resolución utilizando un método planteado por Nochetto (1984), quien mediante un esquema en diferencias finitas implícitas calcula simultáneamente el perfil de temperaturas en la muestra y la posición de la frontera mediante un proceso iterativo, para ello se ha utilizado el lenguaje *Mathematica* ya que posee implementada la función *FixedPoint[f,x]* que permite resolver rápidamente tales procesos.

El esquema que sigue los pasos planteados por Nochetto (1984), se resuelve también, a partir de las (1) - (5), de ellas se obtiene la siguiente ecuación implícita para calcular la posición de la frontera $s(t)$, la que debe resolverse en forma iterativa.

$$s(t) = \frac{q_0 t}{\rho L} - \frac{c}{L}\int_0^{s(t)} u(x,t)dx \tag{6}$$

En el esquema de diferencias finitas mediante las ecuaciones de difusión se ha tomado un intervalo espacial de 4 mm y un intervalo temporal 30 seg para el explícito y 15 min para el implícito. En el esquema de Nochetto, el intervalo espacial es de 10^{-5} mm y el temporal de 1000 seg, dado que el soft permite el cálculo relativamente rápido para estos valores.

Con el propósito de llevar a cabo el estudio se ha considerado que la sustancia evaluada es agua en estado sólido sometida a un flujo de calor de $q = 100/t^{1/2}$ W/m^2. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 1.

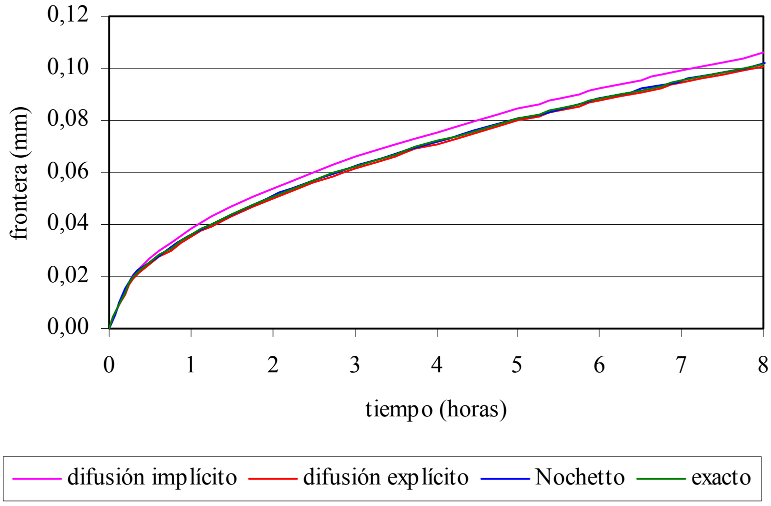

Figura 1: Comparación de los resultados para el caso de que la condición de borde sea de flujo de calor ($q = 100/t^{1/2}$)

DICUSION FINAL

Los modelos de cálculo presentados muestran una buena aproximación en comparación con los arrojados por la solución exacta. Los resultados de los modelos difusión explícito y de Nochetto se aproximan entre sí confundiéndose con los correspondientes a la solución exacta; los resultados del modelo de difusión implícito, difieren de ésta en la centésima de milímetros.

Es evidente que existe una diferencia sustancial entre uno y otro lenguaje de programación, la que está dada fundamentalmente, por la rapidez con que se realizan los cálculos iterativos y la facilidad (o no) para disponerlos. El *Math*, permite la evaluación utilizando las funciones disponibles en él. El *Qb,* permite obtener resultados con buena aproximación y resulta útil cuando éstos no presentan mayores dificultades en el cálculo.

En cuanto a la resolución numérica los modelos de cálculo presentados resultan ser válidos y pueden, por tanto, convenientemente modificados, utilizarse para el cálculo de cualquier otra situación particular que no pueda resolverse en forma exacta.

AGRADECIMIENTOS: Este trabajo se desarrolló en el marco del Proyecto de Investigación Nº 943 del CIUNSa.

REFERENCIAS

Nochetto, R. *Una Introducción General a la Resolución Numérica del Problema de Stefan Unidimensional*. Cuadernos del Instituto de Matemática "Beppo Levi". Univerisdad Nacional de Rosario, 1984 pp.143 -166.

Tarzia, D. *Una Revisión sobre Problemas de Frontera Móvil y Libre para la Ecuación del Calor. El Problema de Stefan.* Mathematicae Notae. Año XXIX, 1991/92, pp. 147 - 241

NUMERICAL METHODS FOR THE RESOLUTION OF STEFAN PROBLEM WITH HEAT FLUX AS EXTERNAL CONDITION

ABSTRACT: Different models for the evaluation of the free boundary for the one phase Stefan problem when the external condition is a known flux of heat are presented here. The comparison with the exact solution is presented too. The results show a reasonable agreement between the exact solution and the different models.
KEYWORDS: phase change material, exact solution, flux of heat, numerical simulation.