

Funciones trigonométricas y el movimiento armónico simple

Patricia Torroba, María de las M. Trípoli, Eugenio Devece y Luisina Aquilano
 UIDET IMApEC, Dpto. de Ciencias Básicas, FI, UNLP, 1 y 47, La Plata, Argentina
 patricia.torroba@gmail.com

Resumen—En este trabajo se presenta una propuesta didáctica para el estudio de las funciones trigonométricas y su vinculación con el movimiento armónico simple, a desarrollarse en una clase de matemática. Esta actividad articula temas tratados en el curso de nivelación, los profundiza en el contexto de Matemática A, y los vincula con temas que se analizarán en Física I. Tiene como objetivo: motivar al alumno para estudiar matemática, transmitirle que es una herramienta imprescindible en su formación profesional y mostrarle alguna aplicación que tienen las funciones trigonométricas en situaciones reales concretas. Es una propuesta que cuenta con la participación de docentes de física y de matemática y está estructurada en tres etapas. Una primera parte aborda el tema desde el punto de vista teórico incorporando el software GeoGebra. La siguiente consiste en una actividad experimental con uso de elementos tradicionales combinados con TIC; se busca relacionar las constantes asociadas a las funciones trigonométricas con las características de un sistema físico masa-resorte o un péndulo simple que realizan un movimiento armónico simple. En la última etapa se evaluará la tarea realizada, incluyendo la comprensión del tema estudiado y si resultó o no una experiencia motivadora para el estudio de la matemática.

Palabras clave—ingeniería, funciones trigonométricas, movimiento armónico simple, articulación, aplicaciones de la matemática

I. INTRODUCCIÓN

En el marco de la realización de un conjunto de actividades que se están llevando a cabo entre asignaturas de matemática y física del Departamento de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería (FI) de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP), con el objeto de articular conceptos, generar en el alumno interés por el aprendizaje de la matemática, mostrarles su vinculación con otras asignaturas y su aplicación a situaciones de la vida diaria [1]-[5], es que se decidió elaborar una propuesta de intervención en la primera asignatura de matemática que cursan los estudiantes que ingresan a la Facultad. Se proyecta realizar una actividad en la cual se vinculen algunos aspectos de las funciones seno y coseno con el Movimiento Armónico Simple (MAS), como aplicación de las función trigonométricas mencionadas. En este trabajo se exponen algunos aspectos de la propuesta, la cual se proyecta llevar a cabo en la asignatura Matemática A de la FI de la UNLP, con docentes de Física I.

La propuesta didáctica que se presenta en este trabajo tiene como objetivo que el alumno, por un lado comprenda la definición de las funciones seno y coseno (funciones trigonométricas o circulares) a partir de la circunferencia unidad y del ángulo en su posición normal; por el otro, que vincule las constantes que aparecen en este tipo de funciones, por ejemplo en $f(t) = A \sin(Bt + C) + D$, con alguna interpretación física relacionándolas con cierta

aplicación a la ingeniería y visualice su utilidad en una situación física experimental con uso de TIC.

II. ALGUNOS POSICIONAMIENTOS CONCEPTUALES

Siguiendo con las ideas que sostienen las actividades de articulación que se vienen realizando entre las asignaturas de matemática y física, se considera que los alumnos de primer año no poseen aún la competencia necesaria para articular por sí solos los conocimientos previos y los nuevos que van incorporando, siendo necesaria la colaboración del docente para que pueda llevar a cabo dicho proceso [5].

La investigación que se viene realizando se enmarca en la teoría cognitiva del aprendizaje significativo. “Las teorías cognitivas del aprendizaje sostienen la idea de combinar la información previa con la nueva para arribar a una comprensión más profunda. La teoría de la asimilación de Ausubel incorpora la noción del conocimiento a priori como fundamento del aprendizaje y propone que el aprendizaje significativo requiere la activación del conocimiento de estructuras existentes durante o después del estudio. Además, Ausubel destaca que para que se produzca aprendizaje significativo, el aprendiz debe querer aprender. Una forma de propiciar el aprendizaje y en forma significativa, es atender a lo expresado por Moreira que sugiere crear situaciones de enseñanza en el aula que motiven el aprendizaje” [3],[6],[7].

Asimismo, como sostiene Santaló [8], cuando se imparte matemática para aquellas profesiones en que ésta no es un fin sino un medio para su mejor ejercicio, “hay que simplificar los detalles técnicos, que deben dejarse para los matemáticos profesionales, y procurar que los resultados, asegurada su validez por estos últimos, lleguen a hacerse intuitivos y comprensibles para quienes lo necesiten”. Quienes necesiten la matemática por sus aplicaciones “basta que tengan de ellas una comprensión intuitiva que les permita ver claro en qué casos y de qué manera puede aplicarse”. Es necesario que se contemplen ejercicios, problemas, actividades, etc. que acerquen al estudiante, en la medida de que los conocimientos de matemática lo permitan, a aplicaciones de la vida diaria. Como sostienen Mendible y Ortíz [9], no debe caerse en un docente que tienda “a transmitir una matemática, con cálculos ilustrados por lo general en los ejemplos descritos en los libros de texto, con la satisfacción ofrecida al estudiante, de conocer el método, aun cuando no haya elaborado un camino que pueda ensayar por su cuenta”, alejando al alumno de la realidad profesional que enfrentará en el futuro, “...apartándolo de posibles herramientas cognitivas, mentales, operativas y creativas de solución”.

III. ASIGNATURAS INVOLUCRADAS

Matemática A es la primera asignatura de matemática que cursan los alumnos que ingresan a la FI y el eje conceptual de la misma es la diferenciación (tanto en una como en varias variables). Sus clases se conciben como espacios de actividad en las cuales todos participan. Se propone trabajar en forma grupal y de manera colaborativa entre los alumnos y entre éstos y sus docentes. Los alumnos (más de 1000) se dividen en varias comisiones (16) en las cuales la metodología de trabajo es teórico-práctica. Cada equipo docente tiene la libertad de proponer en su comisión las actividades adicionales que completen la formación del alumno, teniendo en cuenta que estos son futuros ingenieros. Es por ello que, bajo la concepción que la matemática es una herramienta que los estudiantes utilizarán en asignaturas más avanzadas y en su vida profesional, se considera necesario incorporar actividades que involucren situaciones reales donde el alumno pueda apreciar el uso de los conceptos matemáticos estudiados en esta asignatura [10].

Las clases de Física I tienen una modalidad similar a las de matemática. Se trabaja en forma grupal realizando actividades teórico-prácticas-experimentales en el aula. Las actividades de laboratorio se desarrollan, de acuerdo al aspecto temático a tratar, en el espacio áulico o en un laboratorio acondicionado para tal fin. Se emplean elementos tradicionales y TIC. En las clases se incluyen mostraciones motivadoras que permiten predecir y posteriormente visualizar, de ser posible, el fenómeno a tratar [2],[11],[12]. Esta asignatura tiene como correlativa a Matemática A.

IV. TEMA A ABORDAR: LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SENO Y COSENO

La importancia del estudio de las funciones periódicas proviene del hecho de que muchos fenómenos que la ciencia estudia son periódicos.

Como es conocido, las funciones trigonométricas son muy utilizadas en las ciencias naturales para analizar fenómenos periódicos tales como: movimiento ondulatorio, corriente eléctrica alterna, cuerdas vibrantes, oscilación de péndulos, ondas cerebrales, el campo electromagnético que calienta la comida en un horno de microondas, ciclos comerciales, movimiento periódico de los planetas, ciclos biológicos, etc. Se relacionan con fenómenos que se repiten periódicamente. Debido a la gran cantidad de situaciones que son periódicas, puede surgir la inquietud: ¿dónde está la importancia de estudiar las funciones trigonométricas en estos casos? La respuesta está en el teorema de Fourier que expresa que cualquier función periódica que se use en un modelo matemático puede escribirse como una combinación algebraica de senos y cosenos [13].

V. DISEÑO DE LA PROPUESTA DE ACTIVIDAD

Los alumnos que cursan Matemática A estudiaron en Matemática para Ingeniería (asignatura del curso de ingreso) las definiciones de seno y coseno de un ángulo en su posición normal, esto es teniendo en cuenta las coordenadas de un punto del lado terminal del ángulo. En Matemática A se trabaja con el seno y coseno como funciones numéricas de una variable real donde la variable independiente es la medida del ángulo (en radianes). Las

funciones trigonométricas (o circulares, así son llamadas en Matemática A) se presentan a los estudiantes luego de haber visto el concepto de derivada, extremos de una función, crecimiento, concavidad y comportamiento en el infinito, etc., por lo que están en condiciones de realizar un análisis de las mismas para reconocer su comportamiento. Además se definen la amplitud y el período de las funciones seno y coseno.

La actividad que se propone realizar se divide en tres etapas: en la primera, se proyecta trabajar sobre los aspectos teóricos necesarios para el desarrollo del tema. Se propone presentar una visualización, mediante un software matemático, de la construcción de las funciones seno y coseno a partir de la circunferencia unidad y el ángulo en su posición normal, y mostrar que dichas funciones son periódicas y oscilatorias. La siguiente etapa consiste en trabajar con las características propias de las funciones periódicas (período, frecuencia, amplitud, fase o desfase) y vincular las constantes allí involucradas con su significado físico como modelo matemático de alguna situación real. Se propone realizar esta articulación mediante una actividad experimental con uso de TIC en la que van a participar docentes de física junto con los de matemática para guiar a los alumnos en la resolución de una práctica. La tercera etapa se realizará para contar con resultados de la propuesta realizada. Se proyecta hacer un seguimiento de los alumnos que van a formar parte de la propuesta, mediante cuestionarios y encuestas que permitan realizar una evaluación tanto de la actividad como de los conocimientos de los alumnos.

A. Primera etapa de la actividad propuesta

La primera parte estará destinada a construir o entender cómo se construyen las funciones seno y coseno a partir de la circunferencia unidad, teniendo en cuenta la definición de las mismas a partir del ángulo en su posición normal, como se ve en la Fig. 1.

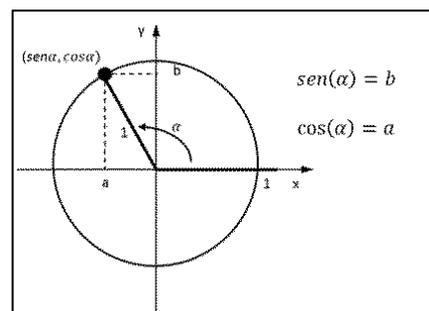


Fig. 1: Definición de las funciones seno y coseno a partir de la circunferencia unidad y el ángulo en su posición normal

Se proyecta la utilización del software GeoGebra (un software matemático de libre acceso que los alumnos pueden trabajar desde sus celulares) como una herramienta de visualización. Varias de estas construcciones se pueden encontrar en la web¹. Por ejemplo, en la Fig. 2 se muestra una de ellas en donde se diferencian distintos colores para

¹ Por ejemplo, se pueden encontrar construcciones de las mencionadas con el software GeoGebra en los siguientes link:
<https://www.geogebra.org/m/VynZaCx8>
<https://www.geogebra.org/m/tdZAvtqk>
<https://www.geogebra.org/m/xxhnSXDp>

mostrar el seno y el coseno; donde el deslizador permite observar cómo se van construyendo estas funciones.

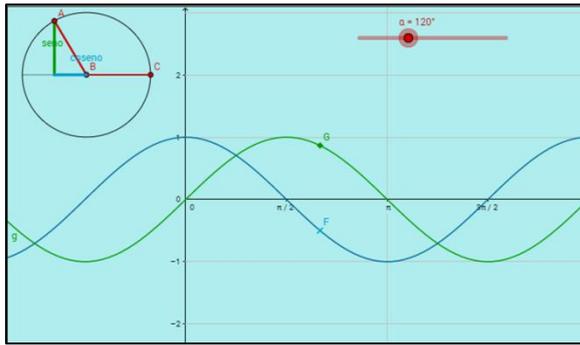


Fig. 2: Visualización en GeoGebra de las funciones seno y coseno

Esta primera parte de la actividad, incluye la presentación de las definiciones de amplitud, frecuencia, período y fase o desfase de las funciones seno y coseno. Para visualizar cómo estas características influyen en la gráfica de dichas funciones, se puede continuar utilizando el software GeoGebra, aprovechando las distintas producciones ya realizadas, como por ejemplo la que se presenta en <https://www.geogebra.org/m/Nry8b4JC>, entre otras.

B. Segunda etapa de la actividad propuesta

La segunda parte de la actividad propuesta, tiene que ver con la aplicación de estas funciones periódicas, en donde docentes de Física I concurren al aula de matemática para mostrar a los estudiantes un ejemplo práctico de su empleo.

Se propone trabajar con un sistema masa-resorte y con un péndulo simple como ejemplos del MAS. Estos dispositivos se muestran en la Fig. 3.



Fig.3: Sistema masa-resorte y péndulo simple

Se decidió trabajar con el MAS ya que, entre otros motivos, “este movimiento idealizado es muy importante, pues constituye una buena aproximación a muchas de las oscilaciones que se dan en la naturaleza y es muy sencillo de describir matemáticamente. Los conceptos involucrados en este tratamiento, resultan ser el primer nivel de entendimiento para otros sistemas más complejos que se expresan como combinación lineal del caso sencillo”[1].

Se apartarán los cuerpos de sus posiciones de equilibrio y se los dejará oscilar. Se guiará a los estudiantes para obtener las características del movimiento a través de la observación. Se espera que concluyan que es: un movimiento oscilatorio y periódico que podría ser descrito por una función seno o coseno. A continuación, se generará nuevamente el MAS, y se colocará un sensor de posición que permite tomar los datos de la posición del cuerpo unido al resorte en los distintos tiempos. Mediante un software se graficarán los valores medidos y se representarán en pantalla. El resultado que se obtendrá se puede ver en la Fig. 4. Presentando que el movimiento se puede modelizar matemáticamente mediante una función dada por $f(t) = A \text{sen}(Bt + C)$, el alumno propondrá las posibles situaciones que deberían darse de acuerdo a ciertas consignas dadas por los docentes y sus conocimientos vistos previamente para luego, constatar los resultados mediante el dispositivo experimental.

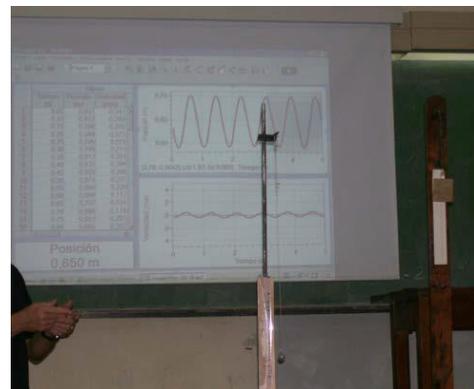


Fig. 4: Gráficas de los datos obtenidos por el sensor

Se propondrán a los alumnos una serie de ejercicios en los cuales la consigna será modificar algún parámetro asociado con la función seno, asignarle su interpretación física en el sistema masa-resorte y/o en el péndulo simple y predecir cualitativamente cuál sería el resultado. Finalmente, para corroborar lo realizado, implementar experimentalmente el cambio y mediante el uso del sensor con el software, contrastar el gráfico experimental con el obtenido por el estudiante mediante el uso del modelo teórico.

A pesar de que los alumnos todavía no han estudiado los fundamentos físicos ni ecuaciones diferenciales, la propuesta se considera factible de realizar ya que el estudiante ha trabajado con las funciones trigonométricas y sus características particulares, siendo uno de los objetivos de la propuesta vincular las constantes involucradas en las funciones con alguna interpretación física.

C. Tercera etapa de la actividad propuesta

En esta instancia se propone evaluar la actividad realizada desde el punto de vista del conocimiento adquirido y analizar si el alumno se sintió motivado, en alguna medida, en estudiar matemática como una herramienta necesaria en su formación como ingeniero.

La manera de evaluar la incorporación del tema estudiado es mediante el análisis de la actividad práctica descrita anteriormente, la cual el estudiante deberá

entregar. Por otro lado, se propone que esta guía sea resuelta en otros cursos en los cuales no se realizará la experiencia, analizar y comparar las respuestas.

Asimismo, mediante encuestas anónimas, indagaríamos cómo impactó la actividad experimental en relación a la aplicación de aspectos matemáticos en situaciones concretas.

Como ya se ha mencionado en párrafos anteriores, se vienen implementando actividades de articulación entre asignaturas de matemática y física, lográndose resultados positivos en cuanto a la apreciación de los estudiantes en realizar este tipo de experiencias áulicas donde ellos pueden valorizar la matemática como una herramienta útil y necesaria para su carrera y en recuperar contenidos en otros contextos. Es por ello que se espera lograr resultados similares al llevar a cabo esta propuesta de intervención, diseñada particularmente para vincular las funciones seno y coseno con alguna interpretación física, como el MAS.

VI. Conclusiones

Presentar problemas de aplicación de la matemática en otras áreas, como lo es la física, permite que el estudiante la valore como una herramienta útil y necesaria para estudiar los contenidos de las asignaturas que va a tener durante el desarrollo de su carrera y también para su vida profesional como futuro ingeniero. Los problemas de aplicación pueden ser propuestos por los docentes de matemática y desarrollarlos en sus clases. Sin embargo, se considera que el hecho que docentes de física concurren a las clases de matemática para realizar este tipo de actividades permite, por un lado, que la aplicación pueda ser desarrollada desde más de una perspectiva, y por el otro, muestra al alumno la necesidad de trabajar en forma interdisciplinaria y la eficiencia de trabajar en equipo.

Se espera, por lo tanto, fomentar el trabajo grupal, que se manifieste la necesidad de trabajar colaborativamente, que el estudiante sea capaz de argumentar, debatir y luego aplicar los conocimientos previos para la resolución de los problemas.

Se eligió estudiar el MAS porque es un hilo conductor que permite articular las asignaturas Matemática A, Física I, Física II y Matemática C. Además las funciones trigonométricas las revisaron, también, en el curso de ingreso.

En Física I se estudia formalmente con las leyes de Newton. Como consecuencia se obtiene una ecuación diferencial que los alumnos aún no saben resolver. La solución se obtiene a partir de las características de las funciones seno y coseno. En Física II se estudian los circuitos inductor-capacitor (LC) y se construye una ecuación diferencial que tiene la misma forma que la del MAS. Esto permite hacer analogías entre las variables relevantes de ambos sistemas físicos que resultan visualmente muy diferentes pero que obedecen la misma ecuación diferencial. En Matemática C se retoma nuevamente el MAS desde el punto de vista de estudiar formalmente las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

El recorrido de articulación entre Física I y Matemática C se realiza con actividades experimentales a partir del año 2010 [1], posteriormente se incorporó Física II [3] y con esta propuesta se completaría el trayecto.

Una de las consecuencias de este tipo de actividades es que se pone de manifiesto la existencia de distintas

notaciones y lenguajes y la necesidad por parte del estudiante de aprenderlas e incorporarlas.

Se considera que estas actividades favorecen la ejercitación de habilidades que se requieren en la formación de un ingeniero tal como la interpretación de gráficos, el uso de nuevas tecnologías, el trabajo en equipo, el desarrollo de expresión escrita y la competencia de retomar temas aprendidos y aplicarlos a nuevos contextos. También favorecen la condición dinámica de la educación, para redescubrir y reconstruir la matemática en el aula y no simplemente para retransmitirla, repetirla o recordarla.

Referencias

- [1] V. Costa, P. Torroba, P y E. Devece. "Articulación en la enseñanza en carreras de ingeniería: el movimiento armónico simple y las ecuaciones diferenciales de segundo orden lineal". *Latin American Journal of Physics Education*, vol. 7 (Nº3), pp. 350-356, 2013.
- [2] E. Devece, R. Di Domenicantonio, P. Torroba y M. Tripoli. "Experiencia de articulación entre Matemática A y Física I", en *Actas de las IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación*. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de La Plata. 2015.
- [3] P. Torroba, V. Costa y E. Devece. "Conceptualización de temas enmarcados en la Mecánica Clásica, en Electromagnetismo y en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias a partir de una experiencia de articulación en una clase de matemática en carreras de ingeniería". *XI Conferencia Interamericana sobre Enseñanza de la Física*. Guayaquil, Ecuador. 2013.
- [4] P. Torroba, V. Costa y E. Devece. "Evolución de los conceptos vinculados en la enseñanza: sistema masa-resorte y ecuaciones diferenciales ordinarias. Una investigación en el contexto de una facultad de ingeniería". *XII Simposio de Investigación en Educación en Física*. Tandil, Argentina. 2014.
- [5] P. Torroba, E. Devece, M. Tripoli y L. Aquilano. "Una propuesta didáctica que articula contenidos de matemática y física". *Revista de Enseñanza de la Física*. vol. 28, pp. 91-99: Número Extra: Selección de Trabajos presentados a SIEF. 2016.
- [6] D. P. Ausubel, J. D. Novak y H. Hanesian. *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*, vol. 3. Trillas, México, 1976.
- [7] M. A. Moreira. "Aprendizaje significativo. Un concepto subyacente", en *Actas del II Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo*, Burgos, España, 1997.
- [8] L. Santaló. "Matemática para no matemáticos". En : *Parra, C. y Saiz, I. Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Paidós. 1994
- [9] A. Mendible y J. Ortiz. "Modelización Matemática en la Formación de Ingenieros. La Importancia del Contexto". *Enseñanza de la Matemática*, vol. 12, pp. 133-150, 2007
- [10] N. Altamirano, M. Bertero, R. Di Domenicantonio, M. García, L. Langoni y M. Tripoli. "Experiencia Colaborativa entre Docentes del Primer Curso de Matemática de la Facultad de Ingeniería de la UNLP". *XVIII EMCI Nacional y X EMCI Internacional*. Mar del Plata, Argentina. 2014
- [11] E. Devece, P. Torroba y F. Videla. "El empleo de las TIC para validar los modelos teóricos en el estudio del movimiento de rototraslación". *Revista de Enseñanza de la Física*. vol. 27, pp. 411-417, 2015.
- [12] E. Devece, P. Torroba, P. Mendoza Zélis, J. Czerwien y L. Aquilano. "Diseño de un dispositivo para la enseñanza de modelos que describen fluidos en movimiento", en *Actas de IV Jornadas de Investigación, Transferencia y Extensión. Secretaría de Investigación y Transferencia. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de La Plata*. Facultad de Ingeniería, UNLP, pp 212-217, 2017.
- [13] R. Courant y F. John *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, vol. 2. Limusa Noriega Editores, México, Decimosexta reimpresión, 1999.