

## MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DE UN POZO INTERCAMBIADOR DE CALOR VERTICAL EN EL SUBSUELO

Cabral G., Torazza A., Busso A

Dpto. de Física – Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNNE.  
Campus Libertad – Av. Libertad 5600 – 3400 Corrientes – Argentina.  
Tel. 03783 473931 ext 129 – Fax. 03783 473930 – e-mail: [ajbusso@exa.unne.edu.ar](mailto:ajbusso@exa.unne.edu.ar).

### RESUMEN

El presente trabajo expone los resultados obtenidos al resolver numéricamente la ecuación diferencial de transferencia de calor que describe a un intercambiador de calor de pozo. El pozo intercambiador de doble circuito se reduce a un problema tipo fuente lineal y la ecuación diferencial resultante se resuelve numéricamente aplicando volúmenes de control. Las temperaturas del fluido caloportador predichas por este modelo numérico y por el método de solución analítica (LSM) se comparan con valores experimentales definiéndose un coeficiente de mejora,  $K_m$  en términos de los errores cuadráticos acumulados. El análisis de datos de ensayos de respuesta térmica del subsuelo realizados en Chile y Alemania arrojó mejoras en las predicciones de la temperatura del fluido superior al 70% respecto a las obtenidas con el modelo de solución analítica (LSM). El algoritmo resultante para la expresión de la temperatura del fluido caloportador se incorporó a un módulo de Visual Basic, como primera etapa en la implementación de una aplicación para evaluación de datos de ensayos de respuesta térmica del subsuelo mediante ajuste por estimación de parámetros y por método convencional de determinación de la pendiente.

*Palabras clave:* UTES, BHE, almacenamiento subterráneo de energía térmica, transmisión de calor, volúmenes de control

### INTRODUCCION

El interés por el almacenamiento de energía directamente en forma de calor sensible o latente es relativamente nuevo. Su comienzo se remonta a la primera crisis del petróleo de 1973-1974. Como resultado de los eventos y situaciones que esta crisis planteó surgió el interés por nuevas fuentes de energía además de novedosas y más eficientes formas de utilización de la misma. En este contexto, el almacenamiento subterráneo de energía térmica (UTES – Underground Thermal Energy Storage) a tenido en los últimos años un empuje particular (IEA, 1995; ASHRAE, 1998).

En su forma más simple, un sistema UTES (Underground Thermal Energy Storage) consiste en una serie de pozos intercambiadores de calor (BHE – Borehole Heat Exchanger) interconectados por los que circula un fluido caloportador. La Fig.1 muestra uno de tales pozos intercambiadores.

Debido a la inversión requerida para poner en práctica este tipo de sistemas, es de suma importancia desarrollar métodos que permitan su diseño y optimización antes de encarar su construcción. Una de las maneras de lograr este objetivo es mediante cálculo y simulación. En ese contexto, la conductividad térmica,  $\lambda$ , del subsuelo y la resistencia térmica,  $R_b$ , entre el fluido caloportador y la pared del pozo, son dos parámetros que afectan la eficiencia del depósito de calor y es por ende deseable su determinación.

El ERT (Ensayo de Respuesta Térmica) es un procedimiento experimental que permite determinar *in situ* tanto  $\lambda$  como  $R_b$ . Este ensayo, consiste en hacer circular durante varios días un fluido caloportador a través del pozo/s intercambiador/res de calor manteniendo constante la inyección de potencia, monitoreando la temperatura de entrada y salida del sistema. Estos datos son luego analizados mediante modelos matemáticos que describen la física del problema.

En este contexto, el método más popular empleado a tal fin es el método gráfico convencional de determinación de la pendiente. El mismo se basa en una aproximación de la solución analítica del problema de fuente de calor lineal, cuya principal suposición es que durante el experimento la potencia de inyección o extracción de calor se mantiene constante y conocida (Helltröm G., 1991). Esta condición es difícil de lograr en la práctica debido a diversos factores (Busso, et al, 2003). Debido a esta complicación, el método requiere de la aplicación de criterios de selección y discriminación de datos que implica contar con cierta experiencia por parte del evaluador (Busso *et al*, 2000, 2001).

El presente escrito expone los resultados obtenidos al aplicar la solución numérica del problema de transferencia de calor unidimensional. La principal ventaja del mismo es que contempla potencia de inyección/extracción variable siendo, por tanto, capaz de reproducir con mayor detalle la realidad física del experimento y obtener una temperatura media de inyección con mucho menos error que el modelo analítico aproximado (LSM). Este algoritmo se utilizará, en conexión con otro de ajuste

mediante parámetros variables, para evaluar datos de ensayos de respuesta térmica dentro de un programa de análisis y evaluación de datos actualmente bajo desarrollo.

## MODELO MATEMÁTICO

Para modelizar el pozo intercambiador debemos hacer primero ciertas suposiciones básicas:

- El calor se propaga en el subsuelo sólo por conducción.
- La propagación es unidimensional en la dirección radial.
- El circuito de tubo en U se reemplaza por un solo tubo de radio equivalente determinado por:

$$r_0 = r_p \cdot \sqrt{2 \cdot n}$$

con  $r_p$  = radio interior de los tubos (m) y  $n$  = número de circuitos U en nuestro borehole (Ver Fig.2)

- La temperatura del campo lejano se mantiene constante. La distancia de este campo lejano viene dada por:

$$d = \frac{r_p}{2 \cdot \sqrt{\alpha_s \cdot t}}$$

con  $\alpha_s$  = difusividad del subsuelo ( $m^2/s$ ).

La segunda suposición hace que la ecuación de calor en coordenadas cilíndricas se reduzca a:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{d}{dt} T(r, t) = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \cdot k \cdot \frac{d}{dr} T(r, t) \right) \quad [1]$$

con  $\rho$  = densidad del medio ( $kg/m^3$ );  $k$  = conductividad ( $W/m \cdot K$ );  $T(r, t)$  = temperatura en función de la distancia radial y el tiempo.

Para la discretización del problema se utiliza el método de los volúmenes de control con nodos centrales (Patankar, 1980). Para simplificar el cálculo computacional se trabaja con red uniforme. Debido a la simetría angular existente, modelizar uno de los retículos en dirección radial es suficiente pues todos ellos son equivalentes. Para completar, suponemos que la inyección por unidad de longitud de tubo intercambiador es constante, por lo tanto todos los volúmenes de control son iguales al movernos en profundidad.

Integrando la ec.[1]

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \rho \cdot c \cdot \frac{d}{dt} T(r, t) dr dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \cdot k \cdot \frac{d}{dr} T(r, t) \right) dr dt \quad [2]$$

El miembro izquierdo puede expresarse como:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \rho \cdot c \cdot r \cdot \frac{d}{dt} T(r, t) dr dt = \rho \cdot c \cdot (T_p - T_{p0}) \cdot \left[ \frac{(r_n)^2}{2} - \frac{(r_s)^2}{2} \right] \quad [3]$$

$$\rho \cdot c \cdot (T_p - T_{p0}) \cdot \left[ \frac{(r_n)^2}{2} - \frac{(r_s)^2}{2} \right] = \rho \cdot c \cdot (T_p - T_{p0}) \cdot \frac{(r_n + r_s)}{2} \cdot (r_n - r_s) \quad [4]$$

El primer subíndice se refiere a la variable espacial y el segundo a la temporal. Por ejemplo  $T_{p0}$  se refiere a la temperatura en el nodo p en el tiempo presente,  $T_{p1}$  es la temperatura del nodo p en el instante siguiente.

Integrando ahora el miembro derecho de [2] y usando el método implícito de integración obtenemos:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \frac{d}{dr} r \cdot k \cdot \frac{d}{dr} T(r, t) dr dt = \int_t^{t+\Delta t} r \cdot k \cdot \left( \frac{d}{dr} T(r, t) \right)_n - r \cdot k \cdot \left( \frac{d}{dr} T(r, t) \right)_s dt \quad [5]$$

Discretizando los elementos diferenciales del segundo miembro obtenemos:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \left[ k \cdot r_n \cdot \frac{(T_n - T_s)}{\delta x} - k \cdot r_s \cdot \frac{(T_p - T_s)}{\delta x} \right] \right] dt \quad [6]$$

Aquí es posible seguir tres posibles caminos para la integración en el tiempo. Usar el método explícito, el implícito o el de Crank-Nicholson. Por la simplicidad y fiabilidad elegimos el método implícito en el cual:

$$\int_t^{t+\Delta t} T dt = T \cdot \Delta t$$

Así, la discretización de la ec.[5] queda:

$$\frac{k \cdot r_n}{\delta x} \cdot T_N + \frac{k \cdot r_s}{\delta x} \cdot T_S - T_p \cdot \left( \frac{k \cdot r_n}{\delta x} + \frac{k \cdot r_s}{\delta x} \right) \cdot \Delta t \quad [7]$$

Agrupando las ec.[4] y [7] y reordenamos términos:

$$\rho \cdot c \cdot (T_p - T_{p0}) \cdot \frac{(r_n + r_s)}{2} \cdot (r_n - r_s) = \frac{k \cdot r_n}{\delta x} \cdot T_N + \frac{k \cdot r_s}{\delta x} \cdot T_S - T_p \cdot \left( \frac{k \cdot r_n}{\delta x} + \frac{k \cdot r_s}{\delta x} \right) \cdot \Delta t \quad [8]$$

Como el espacio entre volúmenes de control es constante y los nodos están en el centro entonces:

$$\frac{r_n + r_s}{2} = r_p \quad r_n - r_s = \delta x$$

Definiendo:

$$a_n = \frac{k \cdot r_n}{\delta x} \quad a_s = \frac{k \cdot r_s}{\delta x}$$

la ec.[8] queda expresada como:

$$\rho \cdot c \cdot (T_p - T_{p0}) \cdot r_p \cdot \frac{\delta x}{\Delta t} = a_n \cdot T_n + a_s \cdot T_s - T_p \cdot (a_n + a_s) \quad [9]$$

Definiendo ahora:

$$\Delta V = \delta x \cdot r_p \quad a_{p0} = \rho \cdot c \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad a_p = a_n + a_s + a_{p0}$$

Entonces la discretización queda finalmente como:

$$T_p \cdot a_p = a_n \cdot T_n + a_s \cdot T_s + a_{p0} \cdot T_{p0} \quad [10]$$

Este sistema de ecuaciones lineales se resuelve mediante el algoritmo de la matriz tridiagonal hasta  $T_2$ .

Dado que las temperaturas de entrada y salida del fluido se conocen experimentalmente, la temperatura en los nodos de borde se toma entonces como la temperatura media longitudinal del fluido caloportador, siendo esta también la temperatura de los volúmenes correspondientes. Dado que se considera que se está inyectando el calor a través de un nodo borde, la condición de borde resulta:

$$q = \frac{d}{dt} T(r_0, t) \quad [11]$$

Para  $T_1$  se integra la ecuación [5] junto con la condición anterior obteniendo la ecuación:

$$T_1 \cdot a_p = a_n \cdot T_2 + r_b \cdot q + a_{p0} \cdot T_{10} \quad [12]$$

donde  $r_b$  es la distancia del nodo borde, la que para nuestro modelo es  $r_b = r_0$  y  $a_p$  es

$$a_p = a_{p0} + a_n$$

En un cálculo a posteriori calculamos la temperatura del fluido. Discretizando la ecuación [11] se obtiene:

$$q = -k \cdot \frac{(T_1 - T_B)}{\frac{\Delta x}{2}} \quad [13]$$

Reordenando miembros resulta que la temperatura en el nodo borde y por tanto la temperatura del fluido es:

$$T_B = T_1 + q \cdot \frac{\Delta x}{2 \cdot k} \quad [14]$$

## ANÁLISIS DE DATOS

El algoritmo se implementó en Visual Basic de manera simple como primera fase en el desarrollo del programa para análisis y evaluación de datos de ensayos de respuesta térmica. El programa tiene por objetivo permitir al usuario ingresar parámetros característicos al ensayo en cuestión, determinar las temperaturas predichas por el algoritmo numérico y por el modelo analítico aproximado (LSM) calculando los errores y el índice de mejora. Los datos son presentados en pantalla en tiempo real de cálculo y guardados en un archivo para posterior análisis. La Fig.3.- muestra la ventana de cálculo desarrollada. Las curvas mostradas en la misma representan las temperaturas experimental y predicha, curvas azul y roja respectivamente, junto con la curva de error (línea negra) correspondientes al ensayo realizado en Markdorf, Alemania.

Dado que algunos de los parámetros característicos (conductividades del subsuelo y del relleno) no son conocidos de antemano, queda como segunda etapa en el desarrollo, implementar el algoritmo de ajuste con dos parámetros variables. El método de ajuste a emplear es tema de estudio en la actualidad.

Con el algoritmo se analizaron series de datos de ensayos de respuesta térmica realizados en Chile y diferentes localidades de Alemania. Debido a que estos datos fueron previamente evaluados siguiendo el método convencional de determinación de la pendiente (LSM), los valores de  $\lambda$  y  $R_b$  eran conocidos y fueron utilizados en las simulaciones. Por otro lado, la mezcla de bentonita utilizada como material de relleno en el pozo intercambiador posee una conductividad en un rango de ( $k$  del relleno) 0.7 - 1.5 W/mK y una capacidad calorífica volumétrica ( $C$  del relleno) entre 2.0 – 3.5 MJ/m<sup>3</sup>-K, pudiendo estos parámetros ser utilizados como variables de ajuste a la hora de aplicar el algoritmo de cálculo.

A efectos de comparar los resultados de ambos modelos, se define el índice de mejora  $K_m$ , como el error porcentual entre los errores cuadráticos acumulados tomando como base de cálculo el modelo LSM, esto es:

$$K_m = \frac{E^2_{LSM} - E^2_{mod\ elo}}{E^2_{LSM}} * 100 \quad [15]$$

con el error cuadrático acumulado expresado por:  $E^2 = \sum_t (T_{exp} - T)^2$

Las Fig.4 y 5 presentan la evolución temporal de la temperatura media experimental del fluido y las predichas por el modelo numérico y por el LSM. Superpuestas se presentan además las curvas de error porcentual de cada modelo. Se aprecia que en ambos casos el modelo numérico lleva a una reducción del error reproduciendo con mayor detalle las características de la curva experimental.

No obstante la mejora introducida por el algoritmo en la predicción de la temperatura, se puede apreciar de las curvas de error, que el mismo aún es insuficiente para reproducir en forma eficaz efectos iniciales durante las primeras horas del ensayo. Esta desviación puede explicarse en gran parte, por el hecho que ambos modelos (LSM y numérico) suponen al pozo intercambiador como si actuase como una fuente lineal de calor, suposición inicial que se aparta de la realidad física del problema. El LSM parte de la solución analítica al problema y la aproxima para tiempos grandes (> 7 h.), por lo que intrínsecamente no contempla efectos iniciales en el proceso de transferencia térmica. Por otro lado, el algoritmo presentado, resuelve en forma numérica la ecuación diferencial de transferencia de calor del problema reducido de tubo equivalente, con lo que es de esperarse una mayor precisión. No obstante, cave mencionar que desde el punto de vista físico al sistema le toma un tiempo comportarse como una fuente tipo lineal, tiempo este durante el cual el modelo se aparta de los resultados experimentales.

La Tabla 1.- presenta el índice de mejora  $K_m$  obtenido para las distintas series de datos analizadas. Se observa que en todos los casos el modelo numérico reproduce con menor error el proceso térmico ya que, por la naturaleza del mismo, tiene en cuenta las variaciones que puedan existir en la potencia de inyección. Para el caso particular de Attenkirchen A, el valor tan bajo obtenido para el coeficiente de mejora ( $K_m = 10$ ) se debe a que la potencia de inyección de calor mostró una gran estabilidad (principal suposición del modelo LSM), haciendo que, a excepción de los efectos iniciales, haya mayor convergencia entre ambos modelos para el resto del tiempo.

Tabla 1.- Series analizadas y resultados obtenidos.

<i>Datos</i>	<i>Año de realización</i>	<i>Índice de mejora <math>K_m</math> (%)</i>
Nekarsulm (Alemania)	2001	60
Markdorf (Alemania)	2002	55
Mannheim (Alemania)	2002	67
Heilbronn (Alemania)	2003	77
Gelnhausenn (Alemania)	2003	52
Quilpue (Chile)	2003	42
Attenkirchen A (Alemania)	2004	10
Attenkirchen B (Alemania)	2004	62

## CONCLUSIONES

Del análisis realizado y los resultados obtenidos hasta el momento se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La solución numérica del problema de transferencia de calor unidimensional del modelo reducido del circuito intercambiador en U proporciona una herramienta simple que permite predicciones del comportamiento del intercambiador de calor con menor error que las obtenidas con el modelo LSM.
- El coeficiente de mejora  $K_m$  es de orden variable y depende de las condiciones con que fueron realizadas las experiencias, especialmente, con la constancia en la potencia de inyección.
- Este algoritmo puede ser usado para la evaluación de datos de ensayos de respuesta térmica del subsuelo mediante la incorporación de un algoritmo de ajuste con parámetros variables.
- Ya que el algoritmo presentado es básicamente la solución de un modelo reducido equivalente, el mismo no resulta aún adecuado para reproducir los fenómenos iniciales del ensayo, ya que toma un cierto tiempo al sistema físico comportarse como una fuente lineal de calor, tiempo durante el cual se evidencian las desviaciones encontradas.

## REFERENCIAS

- ASHRAE (1998), Operating Experiences with Commercial Vertical Borehole Groundloop Heat Pump Installation, Vol. 1, N°8.
- Busso A., Reuss M., Müller J., Sograri N. (2000). Almacenamiento Subterráneo de Energía Térmica: Resultados de un Ensayo de Respuesta Térmica del Subsuelo. Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente, Vol. 4, N° 1.
- Busso A., Reuss M. (2001), Ensayo De Respuesta Termica Del Subsuelo: Método Grafico De La Pendiente Vs. Ajuste Con Dos Parámetros Variables. Reunión de Comunicaciones Científicas y Tecnológicas. SeCyT – UNNE. T.54.
- Busso, M. Reuss. (2003). Almacenamiento Térmico Subterráneo: Acoplamiento Térmico Ambiental en Ensayos de Respuesta Térmica. A. Memoria de la XXVII Semana Nacional de Energía Solar. AQC16-01: México.
- Hellröom G. (1991) Ground Heat Storage – Thermal Analyses of Duct Storage Systems, Dep. of Mathematics, University of Lund, Sweden.
- IEA (1995), Implementing Agreement on Energy Conservation Through Energy Storage, Annex 8,4<sup>th</sup>.
- Patankar Suhas V. (1980). Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere Publishing Corporation.

## ABSTRACT

This work presents the results obtained by numerically solving the differential equation describing the heat transfer process for a borehole heat exchanger (BHE). The double U BHE is reduced to a line source problem and the corresponding differential equation is solved numerically applying the volumes of control method. The temperatures of the heat carrying fluid predicted by this model and by the commonly used analytical solution (LSM) are compared with the experimental data. An index of improvement is defined in terms of the accumulated quadratic errors to assess the benefits of the solution. The analysis of Thermal Response Tests (TRT) data from experiments performed in Chile and Germany show improvements in prediction of the mean fluid temperature above 70% with respect to what is predicted by the LSM model. The resulting algorithm has already been incorporated into a Visual Basic module as first stage in the development of a small software application for TRT data evaluation by parameter estimation.

*Key words:* UTES, BHE, heat transfer, volume of control.

## AGRADECIMIENTO

Queremos agradecer muy especialmente al Dr. Luis Cardon, del INENCO – UNSa, por su asistencia, apoyo y predisposición durante el desarrollo del modelo matemático presentado en este trabajo.

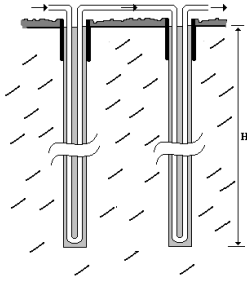


Figura 1.- Detalle de sistema de pozos intercambiadores de calor (BHE- Borehole Heat Exchanger)

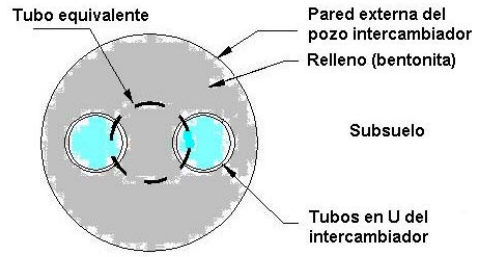


Figura 2.- Modelo reducido del circuito intercambiador en U

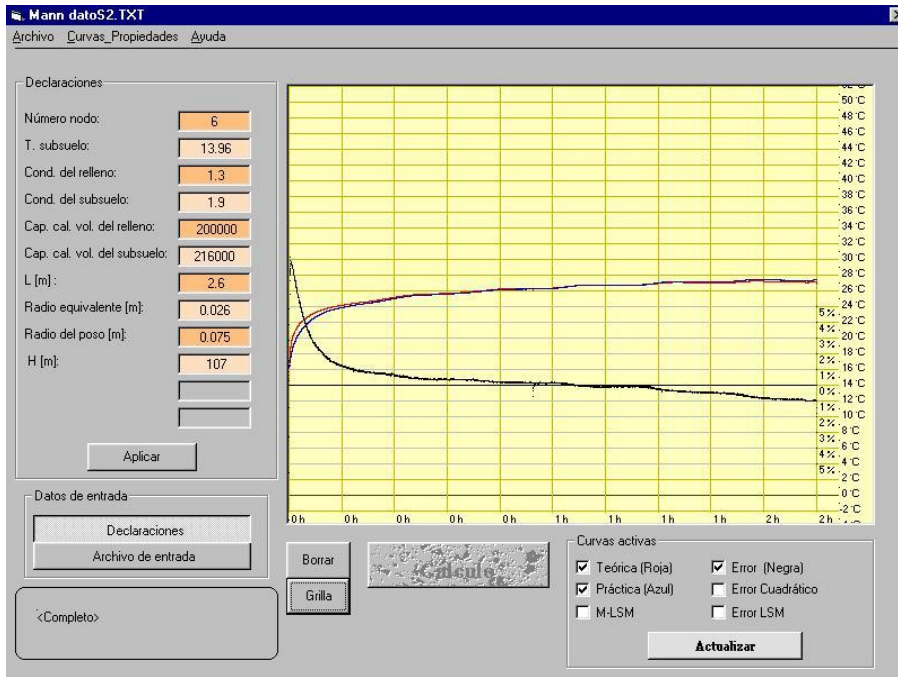


Figura 3.- Ventana de cálculo del programa para evaluación de datos por ajuste con parámetros variables.

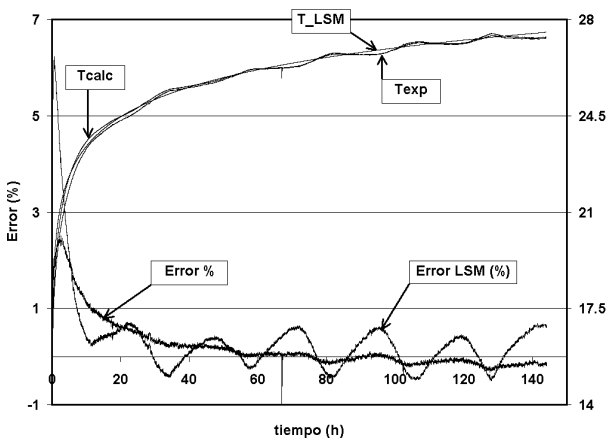


Figura 4.- Evolución temporal de temperaturas y errores para Mannheim (Alemania)

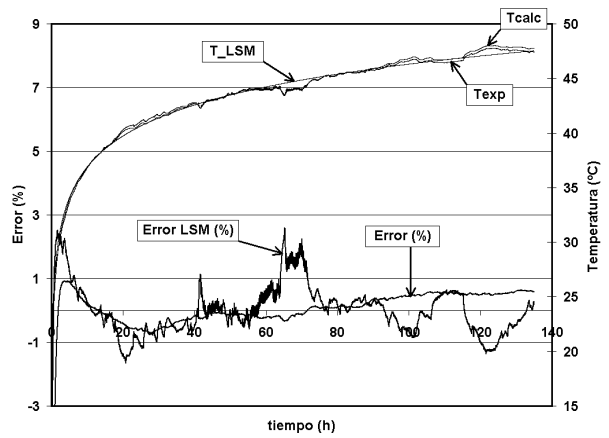


Figura 5.- Evolución temporal de temperaturas y errores para Markdorf (Alemania)