CONVERGENCIA GLOBAL DE UN MÉTODO DE RESTAURACIÓN INEXACTA SIN DERIVADAS UTILIZANDO FILTRO INCLINADO

María Mercedes Olea[†‡], María Laura Schuverdt[†‡] y Raúl Pedro Vignau[†]

[†] *Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina.*
[‡] *CONICET, Argentina.*
molea@mate.unlp.edu.ar , schuverd@mate.unlp.edu.ar, vignau@mate.unlp.edu.ar

Resumen: En este trabajo se presenta el estudio de convergencia de un método de restauración inexacta sin derivadas para resolver problemas de optimización no lineal con restricciones de igualdad que utiliza la técnica de filtro inclinado. Este método trata a la función objetivo y a la restricción como dos objetivos independientes. Cada iteración del algoritmo está compuesta de dos fases: la de restauración, en la cual se reduce la infactibilidad de las restricciones, y una fase de minimización, en la cual se reduce la función objetivo. En la fase de restauración se emplea un algoritmo Quasi-Newton que utiliza una búsqueda lineal no monótona sin derivadas y en la de minimización se emplea un algoritmo de región de confianza sin derivadas. Los algoritmos de filtros definen una región prohibida memorizando pares obtenidos por iteraciones previas y luego evitando pares que estén dominados por los pares memorizados.

Palabras clave: *Método de filtros, Método de Restauración Inexacta, Filtro inclinado, Optimización sin derivadas*
2000 AMS Subject Classification: 90C30 - 90C56

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo consideraremos el problema de programación no lineal

$$\begin{cases} min \quad f(x) \\ \text{s.a} \quad c(x) = 0 \end{cases}$$

donde las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son continuamente diferenciables pero sus derivadas no se encuentran disponibles. Denotaremos por $J_c(.)$ a la matriz jacobiana de c y consideraremos la función h que mide la infactibilidad de las restricciones en cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ siendo $h(x) = \|c(x)\|$ y donde $\|.\|$ denota una norma arbitraria.

En [4] los autores definen un método de filtros globalmente convergente para problemas de programación no lineal considerando que las derivadas de la función objetivo y de las restricciones están disponibles. Tal algoritmo de filtros pertenece a la clase de métodos que tratan a f y h como dos objetivos independientes.

Cada iteración del método consta de dos fases: la fase de restauración o de factibilidad en la cual debe mejorarse la infactibilidad sin hacer uso de la función objetivo, y la fase de optimización o minimización en la cual se mejoran los valores de la función objetivo sobre una aproximación tangente de las restricciones. Como es conocido, los métodos de filtro definen una región prohibida memorizando pares $(f(x^k), h(x^k))$ de las iteraciones anteriores. En [4] para definir esa región prohibida se utiliza la siguiente regla de dominación:

$$x \text{ es dominado por } y \text{ si y sólo si } f(x) \geq f(y) - \alpha h(y) \text{ y } h(x) \geq (1-\alpha)h(y)$$

donde $\alpha \in (0, 1)$ es una constante fija. Evitando los puntos dominados por la regla anterior se generan regiones prohibidas que llamaremos filtro recto.

En este trabajo, usamos otra regla de dominación, que inicialmente fue propuesta en [1]:

$$x \text{ es dominado por } y \text{ si y sólo si } f(x) + \alpha h(x) \geq f(y) \text{ y } h(x) \geq (1-\alpha)h(y)$$

donde $\alpha \in (0, 1)$ es una constante fija. Evitando los puntos dominados por esta última regla se generan regiones prohibidas que llamaremos filtro inclinado.

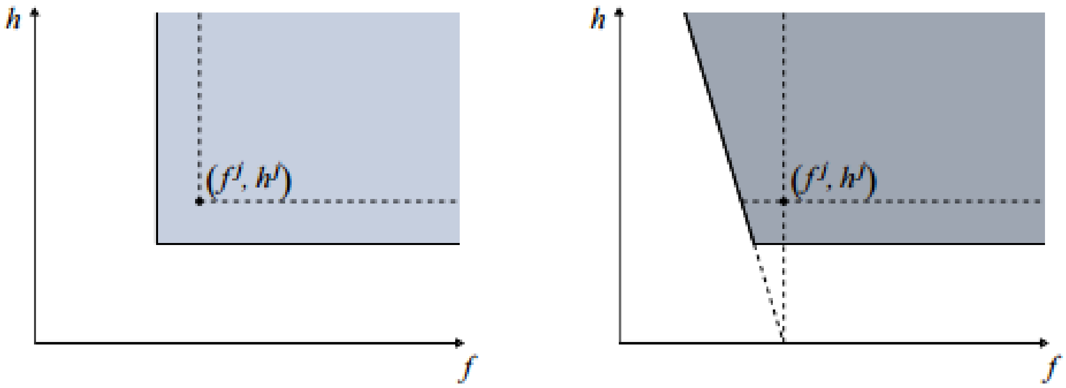

Figura 1: Regiones prohibidas. A la izquierda con el filtro recto, a la derecha con el filtro inclinado.

En [6] se presenta un algoritmo de filtros sin derivadas, que utiliza la regla de dominación del filtro recto, el cual genera una sucesión $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que posee un punto limite factible $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = \lim\limits_{x\in K} x^k$ para algún conjunto infinito K de $\mathbb{N}$, que satisface:

$$\lim_{x\in K} \|d_c(x^k)\| = 0$$

donde $d_c(z) = P_{L(z)}(z - \nabla_s f(z)) - z,\ L(z) = \{x \in \mathbb{R}^n : A(z)(x - z) = 0\}$, $A(z)$ es una aproximación de la matriz Jacobiana $J_c(z)$ y $\nabla_s f$ indica el gradiente simplex de f ([2, Ch. 2]). Esos puntos factibles $\bar{x}$ fueron llamados puntos *cuasi-estacionarios*.

2. ALGORITMO DE FILTROS SIN DERIVADAS UTILIZANDO FILTRO INCLINADO (DFF-I)

Algoritmo DFF-I:

Dados $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $F_0 = \emptyset$, $\mathcal{F}_0 = \emptyset$, $\alpha \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\delta_0 > 0$, $\{\delta_k\}$, $\delta_k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$,

$k \leftarrow 0$.

Repetir:

$(\widetilde{f}, \widetilde{h}) = (f(x^k) - \alpha h(x^k), (1-\alpha)h(x^k))$

Construir el conjunto $\overline{F}_k = F_k \cup \{(\widetilde{f}, \widetilde{h})\}$.

Definir el conjunto $\overline{\mathcal{F}}_k = \mathcal{F}_k \cup \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) + \alpha h(x) \geq f(x^k), h(x) \geq \widetilde{h}\}$.

Fase de Restauración:

Si $h(x^k) = 0$ entonces considerar $z^k = x^k$

si no, calcular $z^k \notin \overline{\mathcal{F}}_k$ tal que $h(z^k) < (1-\alpha)h(x^k)$ y $\|z^k - x^k\| \leq \beta h(x^k)$.

Si esto no es posible, finalizar el proceso sin éxito.

Fase de Minimización:

Calcular $\nabla_s f(z^k)$ y A_k tal que verifiquen $\|\nabla_s f(z^k) - \nabla f(z^k)\| \leq \delta_k$, $\|A_k - J_c(z^k)\| \leq \delta_k$ y calcular $L(z^k) = \{x \in \mathbb{R}^n : A_k(x - z^k) = 0\}$.

Si z^k es un punto cuasi-estacionario, finalizar el proceso (éxito).

Si no, calcular $x^{k+1} \notin \overline{\mathcal{F}}_k$ tal que $x^{k+1} \in L(z^k)$ y $f(x^{k+1}) \leq f(z^k)$.

Actualización del Filtro:

Si $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ entonces

$F_{k+1} = F_k$, $\mathcal{F}_{k+1} = \mathcal{F}_k$ (f-iteración)

si no

$F_{k+1} = \overline{F}_k$, $\mathcal{F}_{k+1} = \overline{\mathcal{F}}_k$ (h-iteración)

$k \leftarrow k + 1$.

3. Algoritmos internos

En la fase de restauración empleamos el algoritmo BCDF-QNB [3]. Dicho método encuentra la solución al problema $c(x) = 0$ con $x \in \Gamma$ siendo $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : l \leq x \leq u\}$. BCDF-QNB es un método del tipo Quasi-Newton para resolver sistemas indeterminados de ecuaciones no lineales con restricciones en las variables que utiliza una búsqueda lineal no monótona libre de derivadas.

En la fase de minimización debemos encontrar $x^{k+1} \notin \overline{\mathcal{F}}_k$ tal que $x^{k+1} \in L(z^k)$ y $f(x^{k+1}) \leq f(z^k)$ utilizando algún método libre de derivadas. Empleamos un método de región de confianza descripto en [6].

Dado z^k generado por la fase de factibilidad, el algoritmo de región de confianza utiliza el modelo lineal $m_k(x) = f(z^k) + \nabla_s^t f(z^k)(x - z^k)$. Consideramos un radio $\Delta > 0$ y resolvemos el problema

$$\begin{array}{ll} min & m_k(x) \\ \text{s.a} & x \in L(z^k), \\ & \|x - z^k\| \leq \Delta. \end{array}$$

Como el modelo es lineal se sabe que la solución del problema es $d(z^k, \Delta) = \Delta \frac{d_c(z^k,\Delta)}{\|d_c(z^k,\Delta)\|}$ cuando $d_c(z^k, \Delta) \neq 0$ donde $d_c(z^k, \Delta) = P_{L(z^k)}(z^k - \nabla_s f(z^k)) - z^k$ es la dirección del gradiente proyectado.

Definimos la reducción que predice el modelo para el paso $d(z^k, \Delta)$ como

$$pred(z^k, \Delta) = m_k(z^k) - m_k(z^k + d(z^k, \Delta))$$

y la reducción actual como

$$ared(z^k, \Delta) = f(z^k) - f(z^k + d(z^k, \Delta)).$$

Un paso $d(z^k, \Delta)$ es aceptado sólo si se satisface la siguiente condición de suficiente decrecimiento:

$$ared(z^k, \Delta) > \eta \, pred(z^k, \Delta)$$

siendo $\eta \in (0, 1)$.

4. Convergencia global

Es conocido en la literatura, ver por ejemplo [5], que los métodos de filtros deben cumplir, además de las hipótesis usuales, una condición específica para que resulten globalmente convergentes. Una condición análoga para el contexto de optimización sin derivadas es la siguiente: dado un punto factible no cuasi-estacionario $\bar{x} \in X$, existe un entorno V de $\bar{x}$ tal que para cualquier iterado $x^k \in V$ se verifica que

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) = \Omega(\sqrt{H_k}),$$

es decir, existe una constante positiva M tal que $f(x^k) - f(x^{k+1}) \geq M \sqrt{H_k}$ y donde H_k es la holgura del filtro y está definida como $H_k = \text{mín}\{h_j : (f_j, h_j) \in F_k, f_j \leq f(x^k)\}$.

Para garantizar el cumplimiento de esta condición alcanza con que los puntos obtenidos en la fase de restauración satisfagan:

(C1) Condición del paso de restauración: En todas las iteraciones $k \in \mathbb{N}$, el paso de restauración satisface:

$$\|z^k - x^k\| = O(h(x^k)),$$

y que los puntos obtenidos en la fase de minimización satisfagan:

(C2) Condición del paso de minimización: Dado un punto factible no cuasi-estacionario $\bar{x} \in X$, existe un entorno V de $\bar{x}$ tal que para cualquier iterado $x^k \in V$ se verifica que

$$f(z^k) - f(x^{k+1}) = \Omega(\sqrt{H_k}).$$

Verificamos que al sustituir el filtro recto por el inclinado se sigue garantizando el cumplimiento de la condición (C1), de la misma manera que en [6].

Para lograr el cumplimiento de la condición (C2) demostramos el siguiente resultado:

Lema 1 *Sea $\bar{x} \in X$ un punto de acumulación factible no cuasi-estacionario de una sucesión $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ generada por el Algoritmo DFF-I. Asumiendo que la condición (C1) se verifica entonces existe un entorno V de $\bar{x}$ tal que si $x^k \in V$ entonces se tiene que*

$$f(z^k) - f(x^{k+1}) = \Omega(\sqrt{H_k}),$$

donde z^k es el punto restaurado y x^{k+1} es el iterado obtenido en la fase minimización.

Utilizando el filtro recto en [6] se demostró que la sucesión $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ generada por el Algoritmo posee al menos un punto límite cuasi-estacionario.

Definiendo el siguiente conjunto:

$$K_a = \{k \in \mathbb{N} \; tal \; que \; (f(x^k), h(x^k)) \; se \; adicionan \; al \; filtro\}$$

y empleando el filtro inclinado se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 1 *Sea K_a finito. Entonces, todo punto de acumulación de la sucesión $\{x^k\}$ generada por el Algoritmo DFF-I es cuasi-estacionario.*

AGRADECIMIENTOS

A nuestra querida profesora Nelly Echebest: sus enseñanzas y cariño nos acompañan siempre.

REFERENCIAS

[1] C.M. CHIN, R. FLETCHER, *On the global convergence of an SLP-filter algorithm that takes EQP steps*, Mathematical Programming, 96 (1) (2003) pp. 161-177.

[2] A. CONN, K. SCHEINBERG, L.N. VICENTE, *Introduction to derivative-free optimization*. SIAM Book Series on Optimization, Philadelphia, 2009.

[3] N. ECHEBEST, M.L. SCHUVERDT, R.P. VIGNAU, *A derivative-free method for solving box-constrained underdetermined nonlinear systems of equations*, Applied Mathematics and Computation, 219 (6) (2012) pp. 3198-3208.

[4] C.C. GONZAGA, E.W. KARAS, AND M. VANTI, *A globally convergent filter method for nonlinear programming*, SIAM Journal on Optimization 14 (3) (2004) pp.646-669.

[5] A.A. RIBEIRO, E.W. KARAS, *Otimização Contínua: Aspectos teóricos e computacionais*. Cengage Learning, São Paulo, 2013.

[6] R.P. VIGNAU, *Un método de filtros sin derivadas para programación no lineal*. Tesis Doctoral, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP, Noviembre 2014.