Linealización local de sistemas no lineales de tiempo continuo.

María Etchechoury — Bec. CONICET
Carlos H.Muravchik — Inv. CICPBA

Laboratorio de Electrónica Industrial, Control e Instrumentación (LEICI), Dto de Electrotecnia, Fac. de Ingeniería, U.N.L.P.; C.C.91 -1.900- La Plata, República Argentina

Resumen

La linealización local de sistemas no lineales de tiempo continuo con control puede lograrse si el sistema en estudio cumple con determinadas condiciones. En este artículo se establecen condiciones necesarias y suficientes para ese fin. Este objetivo se logra mediante la construcción de un cambio de coordenadas y la aplicación de una realimentación, que transforman al sistema original en otro equivalente, pero lineal y controlable [1]. Los resultados alcanzados se aplican tanto a sistemas de una entrada y una salida, así como a sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas.

Por otra parte, y considerando al control como un nuevo estado, se extiende al sistema no lineal de tal manera de convertirlo en otro sistema no lineal, pero más particular, del tipo lineal analítico. A este nuevo sistema se le puede aplicar la teoría ya conocida [2], que permite, bajo ciertas hipótesis, linealizarlo localmente. Por último, se comparan ambos procedimientos de linealización, y se ponen de manifiesto cuáles son las dificultades encontradas para hallar la realimentación que linealiza al sistema, ya sea utilizando el primer método o el segundo.

Abstract

Continuous time, controlled nonlinear systems local linearization can be achieved for systems satisfying certain conditions. In this paper necessary and sufficient conditions are established for this purpose. Linearization is obtained through coordinates change and feedback transforming the original system into a controllable linear equivalent one [1]. These results apply to single input single output as well as to multiple input multiple output systems.

On the other hand, considering the input as another state the nonlinear system is extended in order to transform it into a linear analytic one [2]. Then, local linearization theory can be applied to these systems since it is already known, [2].

Finally, both procedures are compared in terms of the difficulties involved in obtaining the feedback law to achieve linearization.

1. Introducción

Dado el sistema no lineal de tiempo continuo con control

$$\Sigma : x'(t) = f(x(t),u(t)) \qquad (1.a)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el estado del sistema en el instante t, $u(t) \in R$ es el control y $f: R^{n+1} \longrightarrow R^n$ es C^∞ ; el propósito de este artículo es establecer, bajo que condiciones, el sistema (1.a) puede linealizarse localmente.

Dentro del conjunto de sistemas no lineales con control existe un subconjunto formado por sistemas del tipo lineal analítico, y que tienen la forma:

$$\Sigma_1 : x'(t) = f_1(x(t)) + g_1(x(t)).u_1(t) \quad (1.b)$$

donde $f_1: R^n \longrightarrow R^n$, $g_1: R^n \longrightarrow R^n$ son funciones analíticas y $u_1 \in R$ es el control.

A continuación se enunciarán algunas definiciones y resultados ya conocidos que permiten decidir cuando un sistema lineal analítico resulta linealizable [1].

Def.1.1 Dado el sistema (1.b) con salida $y = h_1(x(t))$, $h_1: R^n \longrightarrow R$, se dice que este sistema tiene grado relativo "r" en $x_o \in R^n$ si:

i) $L_{g1} L_{f1}^{k} h_1 = 0$, para $k < r-1$ y para todo x en algún entorno U_o de x_o.

ii) $L_{g1} L_{f1}^{r-1} h_1 \neq 0$ en x_o

Lema 1.2 El sistema (1.b) es linealizable localmente alrededor de x_o si y sólo si existe un entorno U_o de x_o y una función $h_1(x)$ definida sobre U_o y a valores reales tal que el sistema (1.b) con salida h_1 tiene grado relativo "n" en x_o.

Observación 1.3. La linealización del sistema lineal analítico se obtiene mediante la aplicación de un cambio de coordenadas y de una realimentación, siend indistinto el orden con que se apliquen.

El cambio de coordenadas $z = \phi(x)$ se define así:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= h_1(x) \\
z_2 &= L_{f1} h_1(x) \\
&\vdots \\
z_n &= L_{f1}^{n-1} h_1(x)
\end{aligned}
$$

La realimentación que se debe aplicar es:

$$u_1 = \frac{1}{L_{g1} L_{f1}^{n-1} h_1(x)} \cdot \left(- L_{f1}^{n} h_1(x) + \hat{u}_1 \right)$$

Luego de aplicar este cambio de coordenadas y esta realimentación se obtiene el siguiente sistema lineal y controlable:

$$z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & .0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & .0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & . & . & .1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & .0 \end{bmatrix} . z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} . \hat{u}_1$$

con salida:

$$y = [1 \ 0 \ . \ . \ . \ . 0] . z$$

2. Un resultado sobre linealización

2.1 Sistemas de una entrada y una salida

Considerando el sistema (1.a) y el sistema lineal:

$$
\begin{aligned}
\Sigma_o:\ q'(t) &= A.q(t) + b.v(t) = \\
&= g(y(t), v(t)) \qquad (2.1.a)
\end{aligned}
$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{bmatrix} \in R^{n \times n} \ , \ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in R^n$$

se establece la siguiente definición:

Def. 2.1.1 El sistema (1.a) se dice localmente linealizable en (x_o, u_o) si existe un abierto $U \subseteq R^{n+1}$ y un difeomorfismo T definido sobre U que verifique:

i) $\hat{T} = [T_1 \ldots T_n]^T$ está formado por funciones $T_i: R^{n+1} \longrightarrow R$, para $i=1,\ldots,n$ que dependen sólo de x.

ii) $\frac{\partial \hat{T}}{\partial x} . f = g \circ T$

Puede probarse que $[q_1 \ldots q_n \ v]^T = T(x,u)$ satisface Σo pues:

$$\hat{T}'(x,u) = [T_1'(x) \ldots T_2'(x)]^T = \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} . f = (g \circ T)(x,u) = g(q,v)$$

Lema 2.1.2 El sistema (1.a) es localmente linealizable en (x_o, u_o) si y sólo si existe $h \in C^\infty$, $h: W \longrightarrow R$, con W abierto de R^n y $x_o \in W$ tal que:

a) $D_u(L_f^i \ h) = 0$, para $i=0,\ldots,n-1$; en algún entorno de (x_o, u_o)

b) $\det \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial L_f^{n-1}}{\partial x} \end{bmatrix}_{(x,u)=(x_o,u_o)} \neq 0$

c) $D_u(L_f^n \ h) \neq 0$ en (x_o, u_o)

Demostración

Supongamos que existe T difeomorfismo que verifica las condiciones i) y ii) de la def.2.1.1. Sea $h(x) = T_1(x) \in C^\infty$.

Luego $\left[\frac{\partial T_1}{\partial x} \quad \cdots\cdots \quad \frac{\partial T_n}{\partial x}\right]^T .f =$

$g(T_1, T_2, \ldots, T_n, T_{n+1}) =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} . T_{n+1}$$

y entonces:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} .f = L_f h = T_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} .f = L_f^{n-1} h = T_n$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial x} .f = L_f^n h = T_{n+1}$$

Por hipótesis $T_1, T_2, \ldots, T_n$ dependen sólo de x, luego se cumple a).

Además T es un difeomorfismo de $U \subseteq R^{n+1}$ en $T(U) \subseteq R^{n+1}$, luego el rango de T es n+1 en todo punto de U, en particular en (xo,uo) y entonces:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial L_f^{n-1} h}{\partial x} & \frac{\partial L_f^{n-1} h}{\partial u} \\ \frac{\partial L_f^n h}{\partial x} & \frac{\partial L_f^n h}{\partial u} \end{bmatrix}_{(x,u)=(xo,uo)} =$$

$$= \left.\frac{\partial L_f^n h}{\partial u}\right|_{(x,u)=(xo,uo)} .$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial L_f^{n-1} h}{\partial x} \end{bmatrix}_{(x,u)=(xo,uo)} \neq 0$$

y valen también b) y c).

Para probar la recíproca se supone que existe $h \in C^\infty$ que verifica las condiciones a),b) y c).

Se define:

$$T_i = L_f^{i-1} h, \text{ para } i=1,\ldots,n+1$$

Por hipótesis a) existe U_1 entorno de (xo,uo) tal que $D_u(L_f^{i-1} h) = 0$ en U_1, para $i=1,\ldots,n$, por lo tanto $T_1, \ldots, T_n$ son funciones que no deprnden de u, y vale entonces i).

Además

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} & \frac{\partial T_1}{\partial u} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} & \frac{\partial T_n}{\partial u} \\ \frac{\partial T_{n+1}}{\partial x} & \frac{\partial T_{n+1}}{\partial u} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\partial L_f^n h}{\partial u} . \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial L_f^{n-1} h}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Cada uno de los factores de la expresión anterior resultan no nulos evaluados en (xo,uo). Existe entonces un entorno U_2 de (xo,uo) donde $T:U_2 \longrightarrow T(U_2)$ es difeomorfismo (Teorema de la función inversa). Luego, tomando $U=U_1 \cap U_2$, obtenemos un entorno de (xo,uo) de tal manera que $T:U \longrightarrow T(U)$ es un difeomorfismo que verifica la condición i) de la definición.

Se tiene también:

$$T_1(x) = h(x)$$

$$T_2(x) = L_f h(x) = L_f T_1(x)$$

$$\vdots$$

$$T_n(x) = L_f^{n-1} h(x) = L_f T_{n-1}(x)$$

de donde

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} \end{bmatrix} .f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} . T_{n+1}$$

y también se verifica ii).

Ejemplo.

Se considera el sistema no lineal

$$\begin{cases} x_1' = x_2^2 \\ x_2' = \text{sen}(x_1 . u) \end{cases}$$

con salida

$$h(x) = x_1$$

Se puede probar, a partir de las

condiciones establecidas en el lema 2.1.2, que este sistema es localmente linealizable alrededor de (x_1^o, x_2^o, u^o) si $x_1^o \neq 0$; $x_2^o \neq 0$ y $x_1^o.u^o \neq (2k+1)\pi/2$, con $k \in Z$.

Mediante cálculos directos se define el difeomorfismo T a partir del cual se obtienen el cambio de coordenadas y la realimentación que se le aplicarán al sistema original para linealizarlo.

El difeomorfismo z=T(x) es:

$$z_1 = T_1(x) = x_1$$

$$z_2 = T_2(x) = x_2^2$$

$$z_3 = T_3(x) = 2.x_2.\mathrm{sen}(x_1.u)$$

Luego, el cambio de coordenadas que se aplica al sistema no lineal es $\hat{T}=(T_1 \quad T_2)^T$ y la realimentación $u = 1/x_1.\mathrm{arcsen}(v/2x_2)$, obteniéndose así el siguiente sistema lineal y controlable:

$$z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .v$$

con salida

$$y = [1 \quad 0].z$$

En las siguientes figuras se grafica la salida del sistema no lineal, con condición inicial $(x_1^o, x_2^o)^T = (.1 \ .1)^T$, y la salida del sistema linealizado, ambas en el intervalo [0 , 3]. En la figura A se considera v(t)=cost, mientras que en la figura B, se toma v(t)=2-t. El error en ambos casos es prácticamente nulo, puesto que se trata de una linealización exacta. Luego en los dos casos las gráficas de las salidas del sistema no lineal y del sistema linealizado son coincidentes.

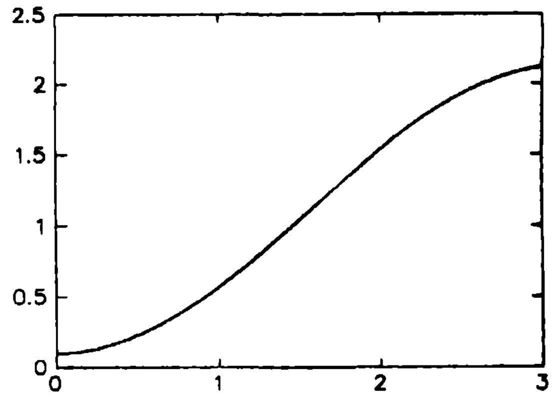

Fig.A

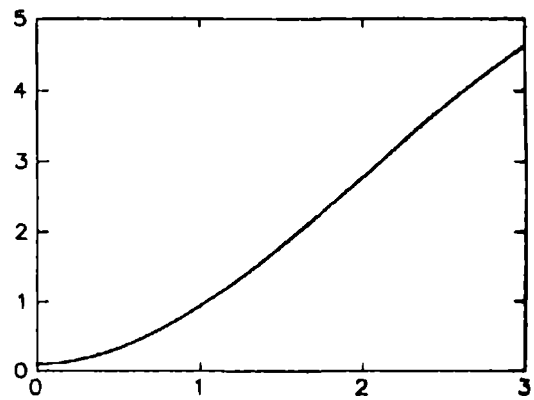

Fig.B

2.2 Sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas

El resultado del lema 2.1.1 puede extenderse a sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas. En este artículo sólo se enunciará bajo que condiciones estos sistemas pueden linealizarse localmente; la demostración es análoga a la del caso de una entrada-una salida.

Dados los sistemas :

$$\Gamma : x'(t) = f(x(t),u(t)), \quad (2.2.a)$$

con $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ y $f:R^{n+m} \longrightarrow R^n \in C^\infty$; y

$$\Gamma_o: q'(t) = A.q(t) + B.v(t) = = g(q(t),v(t)), \qquad (2.2.b)$$

con:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \\ 0 & 0 & \cdots & b_r & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \; b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $A \in R^{n\times n}$, $A_{ii} \in R^{ki\times ki}$, $B \in R^{n\times m}$, $b_i \in R^{ki}$, se establece la siguiente definición:

Def. 2.2.1 El sistema (2.2.a) es localmente linealizable en $(x_o,u_o) \in R^{n\times m}$ si existen números naturales $k_1, \ldots, k_r$ con $k_1+\ldots+k_r=n$ y T difeomorfismo definido sobre un entorno U de (x_o,u_o) tal que $T = (T_1,T_2,\ldots\ldots,T_{n+m})^T$ verifica:

i) $T_1,\ldots,T_n$ son funciones que dependen sólo de x.

ii) $$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} \end{bmatrix} . f = g o T$$

Lema 2.2.2 El sistema (2.2.a) es localmente linealizable en (x_o,u_o) sii existen funciones $h_1,\ldots,h_r \in C^\infty$, con $h_i: W \longrightarrow R$, W abierto y $x_o \in W$ tales que:

a) $D_u(L_f^i\, h_j) = 0$, para $j=1,\ldots,r$; $i\le k_j-1$, en algún entorno de x_o

b) $$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial L^{k1-1} h_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_r}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial L^{kr-1} h_r}{\partial x} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ en } (x_o',u_o)$$

c) $$rg \begin{bmatrix} \frac{\partial L_f^{k1} h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial L_f^{k1} h_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial L_f^{kr} h_r}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial L_f^{kr} h_r}{\partial u_m} \end{bmatrix} = r \text{ en}$$

(x_o,u_o).

3. Extensión de un sistema no lineal general a otro del tipo lineal analítico.

El sistema no lineal (1.a) puede extenderse a otro sistema lineal analítico del tipo (1.b) estableciendo:

$z = [x\ u]^T \in R^{n+1}$, como nuevo estado; y

$u_e = u$, como nuevo control

Luego el sistema extendido puede representarse como:

$$\Sigma_e: z' = f_e(z) + g_e(z).u_e \qquad (3.a)$$

donde $f_e = [f(z)\ 0]^T \in R^{n+1}$, $g_e = [\hat{0}\ \ 1]^T \in R^{n+1}$, $u_e \in R$.

Mediante la aplicación directa del lema 1.2 al sistema (3.a) se puede establecer el siguiente resultado:

Lema 3.1 El sistema (3.a) es localmente linealizable alrededor de $z_o=(x_o,u_o)$ sii existe un entorno U_o de z_o y una función h_e definida sobre U_o y a valores reales, tal que el sistema (3.1) con salida h_e tiene grado relativo "n+1" en z_o.

Observación 3.2 La realimentación que linealiza al sistema (3.a) es:

$$u_e = \frac{1}{L_{g_e} L_{f_e}^n h_e} .(- L_{f_e}^{n+1} h_e + \hat{u}_e) \qquad (3.b)$$

Observación 3.3 Mediante cálculos sencillos puede probarse que:

$$L_{g_e} L_{f_e}^k h_e = D_u^k L_{f_e} h_e \text{ , para todo k}$$

Además, dados los sistemas (1.a) con salida h(x) y (3.a) con salida $h_e(z) = h(x)$ se verifica:

$$D_u L_{f_*}^k h_* = D_u L_f^k h, \text{ para todo } k$$

Considerando entonces los resultados de los lemas 2.1.2 y 3.1 se establece la siguiente proposición:

Proposición 3.4 El sistema (1.a) con salida h(x) se puede linealizar localmente alrededor de $(x_o,u_o)'$ sii el sistema (3.a) con salida $h_*(z) = h(x)$ se puede linealizar localmente alrededor de $z_o=(x_o,u_o)$.

4. Conclusiones

Teniendo en cuenta la demostración del lema 2.1.2 se deduce que a partir de la igualdad:

$$\hat{u} = T_{n+1}(x,u) = L_f^n h \qquad (4.a)$$

se obtiene el control que linealiza el sistema (1.a). Luego, derivando $\hat{u}$ respecto de $z = [x\ u]^T$ se tiene:

$$\hat{u}' = \left(\frac{\partial L_f^n h}{\partial x} \quad \frac{\partial L_f^n h}{\partial u}\right)_i \begin{bmatrix} x' \\ u' \end{bmatrix} = L_f^{n+1} h + D_u L_f^n h . u'$$

y entonces

$$u' = u_* = (\hat{u}' - L_f^{n+1} h) . \frac{1}{D_u L_f^n h} \qquad (4.b)$$

que coincide con la realimentación (3.b) hallada en el parágrafo 3 para el caso de $h_*(z) = h(x)$.

Se concluye entonces que para lograr la linealización del sistema (1.a), y en el caso de querer utilizar el resultado 2.1.2, es necesario hallar una realimentación u que satisfaga (4.a).

Si en cambio extendemos el sistema no lineal para convertirlo en otro del tipo lineal analítico, según lo establecido en el parágrafo 3, se podrá obtener la realimentación u que linealiza al sistema original (1.a) resolviendo la ecuación diferencial en u (4.b).

Es claro que mediante cualquiera de los dos procedimientos se halla la misma realimentación u; en un caso resolviendo una ecuación diferencial y en el otro calculando la función inversa.

Referencias

[1] Thomas Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall, Inc., 1980.

[2] Alberto Isidori, *Nonlinear Control Systems: An Introduction*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1.989.

María Etchechoury nació en La Plata, Argentina, el 20/12/59. Se graduó de Lic. en Matemática en 1.983 en la Fac. de Cs. Exactas, U.N.L.P. Fue becaria de Iniciación del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (1988-1991). Actualmente es becaria de Perfeccionamiento de la misma institución y Jefe de Trabajos Prácticos de la Fac. de Cs.Exactas. Su tema de interés es la teoría de control, aplicada esencialmente a sistemas no lineales.

Carlos H. Muravchik nació en Morón, Argentina, el 11/6/51. Se graduó de Ing. en Telecomunicaciones en la U.N.L.P. en 1973, M.Sc. in El.Engr. (1980), M.Sc. in Statistics (1983) y Ph.D. in El.Engr. (1983), todos en Stanford University. Fue Visiting Assistant Professor en Yale University (1983), miembro de la Comisión Nac. de Energía Atómica (1984/86), y actualmente es profesor en la U.N.L.P. e investigador de la C.I.C.P.B.A.. Sus temas de interés son el procesamiento estadístico de señales, identificación y modelización de sistemas, estimación espectral y teoría de sistemas no lineales.