

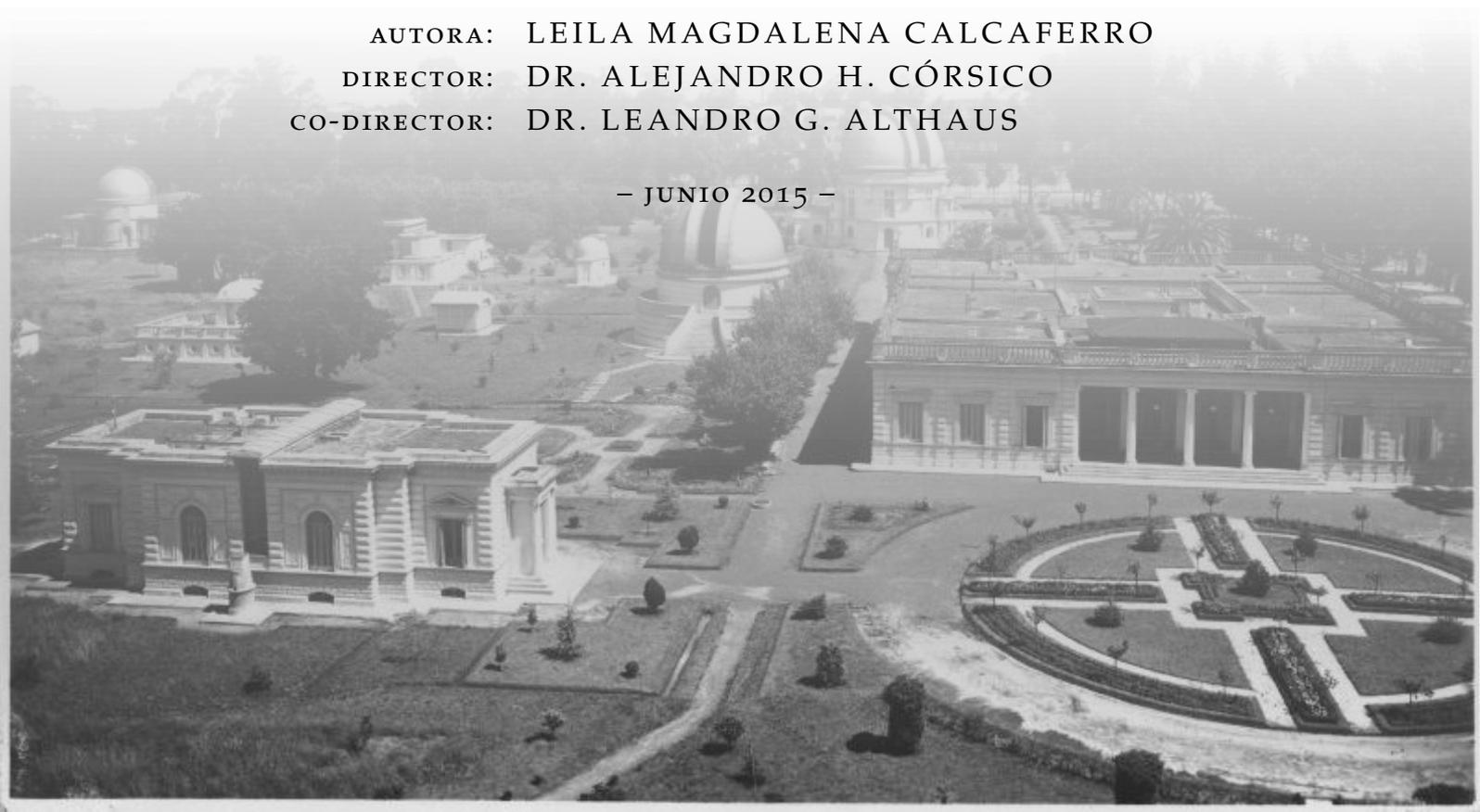
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE Cs. ASTRONÓMICAS Y GEOFÍSICAS



DETERMINACIÓN ASTROSISMOLÓGICA
DE LA ESTRUCTURA INTERNA DE LA
ESTRELLA PG 1159 VARIABLE SDSS
J0349-0059

AUTORA: LEILA MAGDALENA CALCAFERRO
DIRECTOR: DR. ALEJANDRO H. CÓRSICO
CO-DIRECTOR: DR. LEANDRO G. ALTHAUS

– JUNIO 2015 –



Leila Magdalena Calcaferro:

Determinación astrosismológica de la estructura interna de la estrella PG 1159 variable SDSS

J0349-0059 ,

© junio 2015

Imagen de tapa: Vista aérea del predio del Observatorio Astronómico de la Universidad Nacional de La Plata, hoy parte de la Facultad de Ciencias Astrómicas y Geofísicas.

Fuente: Archivo del Observatorio.

Año: 1914.

PREFACIO

Esta Tesis de Licenciatura es presentada como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Licenciado en Astronomía de la Universidad Nacional de La Plata. La misma contiene los resultados de los estudios de investigación desarrollados bajo la dirección del Dr. Alejandro H. Córscico y la co-dirección del Dr. Leandro G. Althaus.

RESUMEN

En esta Tesis presentamos los resultados de un análisis astrosismológico detallado de la estrella PG 1159 variable SDSS J0349-0059, con el objetivo de estimar su masa y las propiedades de su estructura interna, empleando el espectro de pulsaciones observado.

Las estrellas PG 1159 son objetos compactos muy calientes que exhiben una fuerte deficiencia superficial de hidrógeno, y que se encuentran en una etapa evolutiva previa a la fase de enfriamiento de las estrellas enanas blancas. Estas estrellas son de fundamental importancia para la teoría de evolución estelar, puesto que constituyen el nexo evolutivo entre las estrellas AGB y las enanas blancas deficientes en hidrógeno, siendo estas últimas alrededor del 20% por ciento de la población total de enanas blancas. Dado que las enanas blancas son el estado evolutivo final para la mayoría de las estrellas, es claro que las estrellas PG 1159 son una herramienta potencial para el entendimiento de los procesos físicos que eventualmente llevan a la formación de estrellas carentes de hidrógeno. En parte, esta potencialidad es debido a que muchas de ellas exhiben variaciones multiperiodicas de su luminosidad, que hacen viable sus estudios astrosismológicos.

Comenzamos este trabajo situándonos en el contexto teórico apropiado de evolución estelar y pulsaciones, y explorando luego algunas de las herramientas astrosismológicas más importantes. Damos una breve reseña sobre los códigos numéricos de evolución y pulsaciones que fueron completamente generados en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas. Los modelos evolutivos y sus períodos de oscilación empleados en esta Tesis han sido calculados mediante el uso de dichos códigos numéricos. Posteriormente, empleando los datos extraídos del trabajo de Woudt et al. (2012) donde se presentan las frecuencias identificadas a partir de observaciones fotométricas de la variable SDSS J0349-0059, determinamos mediante tres métodos distintos el espaciamiento de períodos de pulsación que exhibe. A continuación, haciendo uso de las técnicas astrosismológicas y empleando los modelos estelares y el espectro de pulsaciones generados por los códigos de evolución y pulsación, obtenemos cotas para el valor de la masa estelar, consistentes con la espectroscópica, que también es calculada. Por último, empleando los períodos calculados teóricamente, determinamos un modelo astrosismológico que proporciona información valiosa sobre la estructura interna de la estrella y que nos permite estimar el período de rotación.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a Alejandro y Leandro, que hicieron posible el desarrollo de esta Tesis, que me enseñaron lo necesario para ello y que me han dado consejos muy valiosos.

Siempre han tenido mucha confianza en mí y muy buena predisposición, por lo cual, les estoy muy agradecida.

A los miembros del Jurado, Felipe y Jorge, que me han hecho sugerencias y comentarios que incorporé a este trabajo a fin de mejorarlo.

A Alejandra Romero, que me proporcionó la versión original del paper que yo no podía conseguir, y que adjunto al final.

A la Facultad, en la que me formé en muchos aspectos, donde aprendí tanto sobre los temas que me deslumbran desde que tengo memoria, y en donde conocí tanta gente valiosa.

A mis amigos, a los de muchos años de amistad, y a los más recientes: Paula M., Lour, Fati, Mari, Juan Pablo (¡muchas gracias por ayudarme a que esta Tesis quedara tan bonita!), Paula K., Mili, Juli, Vir, Tiara, Romi, Paula R., Cintia, Juli, Cami, Caro C., Nehuén, Meli, Gastón, entre otros.

A Nora, que siempre se preocupa por mí y que tiene gestos tan lindos, y a Hugo, que siempre me brindó su ayuda y su cariño!

A mi hermana, que siempre estuvo ahí cuando necesitaba una palabra de aliento, ¡gracias por el apoyo de siempre y por los mensajes dándome ánimo!

A mi mamá y mi papá, que me incentivaron desde que me empezó a interesar la astronomía, y que a lo largo de estos años, me han contenido y apoyado incondicionalmente.

A Diego, el amor de mi vida, cuya presencia día a día me anima a seguir. Sin duda habría sido mucho más duro este camino sin vos al lado... ¡Gracias por tanto amor!

¡¡Muchas gracias a todos!!

ÍNDICE GENERAL

Índice de figuras	x
Índice de Tablas	xi
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Evolución estelar	1
1.2 Estrellas PG 1159	6
1.3 Estrellas enanas blancas deficientes en H	8
1.4 Estrellas pulsantes y pulsaciones	10
1.4.1 Análisis local y diagramas de propagación	15
1.4.2 Mecanismos de excitación: $\kappa - \gamma$ y ε	18
1.5 Astrosismología	20
1.5.1 Espaciamento de períodos: determinación de la masa estelar	21
1.5.2 Ajuste de períodos: modelos astrosismológicos	22
1.5.3 Efectos producidos por la rotación	22
1.6 Motivación de esta Tesis	23
2 HERRAMIENTAS NUMÉRICAS	27
2.1 Código evolutivo: LP-CODE	27
2.2 Código de pulsaciones: LP-PUL	29
3 ANÁLISIS DE LA ESTRELLA VARIABLE SDSS J0349-0059	31
3.1 Determinación del espaciamento de períodos observado	31
3.1.1 Kolmogorov-Smirnov	33
3.1.2 Varianza Inversa	33
3.1.3 Transformada de Fourier	34
3.1.4 Resultados	34
3.2 Determinación de la masa	40
3.2.1 Masa espectroscópica	40
3.2.2 Comparación del espaciamento de períodos observado ($\Delta\Pi_\ell^o$) con el espaciamento asintótico de períodos ($\Delta\Pi_\ell^a$)	42
3.2.3 Comparación del espaciamento de períodos observado ($\Delta\Pi_\ell^o$) con el promedio de los espaciamentos computados ($\overline{\Delta\Pi_\ell}$)	43
3.2.4 Ajuste período a período	46
3.2.5 Splitting rotacional	49
4 CONCLUSIONES	53
A APÉNDICE	57
BIBLIOGRAFÍA	63

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	Track evolutivo de una estrella con $3.5 M_{\odot}$	3
Figura 1.2	Track evolutivo de una estrella con $2.7 M_{\odot}$	9
Figura 1.3	Esquema de contornos de los armónicos esféricos sobre la superficie de una estrella	13
Figura 1.4	Diagramas de propagación de modelos estelares seleccionados de pre enanas blancas y enanas blancas	16
Figura 1.5	Estructura química interna de los modelos descritos de pre-enanas blancas y enanas blancas .	17
Figura 1.6	Localización de las diferentes clases de pre enanas blancas y enanas blancas pulsantes en el plano $\log(T_{\text{eff}}) - \log(g)$	25
Figura 3.1	Test de Kolmogorov-Smirnov	36
Figura 3.2	Test de Varianza Inversa	37
Figura 3.3	Test de Transformada de Fourier	38
Figura 3.4	Análisis de períodos exceptuados de la lista principal	39
Figura 3.5	Gráfica de $\log(g)$ vs $\log(T_{\text{eff}})$ para los modelos y la variable SDSS J0349-0059	41
Figura 3.6	Gráfica ampliada de $\log(g)$ vs $\log(T_{\text{eff}})$ para los modelos y la estrella SDSS J0349-0059 y caja de error	41
Figura 3.7	Gráfica de $\Delta\Pi_{\ell=1}^{\alpha}$ vs $\log(T_{\text{eff}})$ para los modelos, junto con el $\Delta\Pi_{\ell=1}^{\circ}$ para SDSS J0349-0059	42
Figura 3.8	Gráfica ampliada de $\Delta\Pi_{\ell=1}^{\alpha}$ vs $\log(T_{\text{eff}})$ para los modelos, junto con el $\Delta\Pi_{\ell=1}^{\circ}$ para SDSS J0349-0059	43
Figura 3.9	Gráfica de $\overline{\Delta\Pi_{\ell=1}}$ vs $\log(T_{\text{eff}})$ para los modelos, junto con el $\Delta\Pi_{\ell=1}^{\circ}$ para SDSS J0349-0059	44
Figura 3.10	Gráfica ampliada de $\overline{\Delta\Pi_{\ell=1}}$ vs $\log(T_{\text{eff}})$ para los modelos, junto con el $\Delta\Pi_{\ell=1}^{\circ}$ para SDSS J0349-0059, y la caja de error	44
Figura 3.11	Gráfica de $\overline{\Delta\Pi_{\ell=2}}$ vs $\log(T_{\text{eff}})$ para los modelos, junto con los espaciamientos secundarios observados	45
Figura 3.12	Modelos astrosismológicos ($\ell = 1, m = 0$) y parámetros de SDSS J0349-0059.	47

Figura 3.13	Modelo astrosismológico elegido.	47
-------------	--	----

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1	Datos de Woudt et al. (2012), de enero 2007 . . .	32
Tabla 3.2	Datos de Woudt et al. (2012), de diciembre 2009	32
Tabla 3.3	Datos combinados del 2007 y 2009, 15 períodos.	35
Tabla 3.4	Datos excluidos del conjunto principal, 6 pe- ríos.	35
Tabla 3.5	Datos referidos al modelo sismológico con $M_* =$ $0.542 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} = 91\,255\text{ K}$ ($\ell = 1, m = 0$).	48
Tabla 3.6	Datos referidos al modelo con $M_* = 0.542 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} = 72\,706\text{ K}$ ($\ell = 1, m = 0$).	49
Tabla 3.7	Datos referidos al modelo con $M_* = 0.542 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} = 104\,376\text{ K}$ ($\ell = 1, m = 0$).	49
Tabla 3.8	Características principales obtenidas para el mo- delo sismológico adoptado para SDSS J0349- 0059.	50
Tabla 3.9	Datos de Woudt et al. (2012), de enero 2007 . . .	50

INTRODUCCIÓN

1.1 EVOLUCIÓN ESTELAR

Para poder entender las propiedades del tipo de estrella bajo estudio en esta Tesis, es esencial presentar una breve descripción de los procesos evolutivos que atraviesan hasta llegar a formarse. En este trabajo, las estrellas que se consideran están aisladas: su evolución es muy distinta si disponen de una compañera.

Las enanas blancas son resultado de un largo y complejo proceso de evolución estelar, desde una nube de material primigenia.

PROTOESTRELLA Inicialmente, tenemos una nube de gas y polvo, homogénea y autogravitante, que recibe una perturbación de algún tipo que se propaga exponencialmente en el tiempo. La nube entonces puede colapsar gravitatoriamente, y va aumentando la densidad (ρ) y la opacidad (κ). Cuando la densidad aumenta lo suficiente, el material que era ópticamente delgado, se vuelve opaco y empieza a aumentar la temperatura (T). Con el aumento de opacidad, la evolución se torna adiabática, y así, el gradiente de presión frena la caída libre. Se forma un objeto convectivo, con una envoltura radiativa que se empezará a disipar, hasta quedar finalmente una protoestrella. Este objeto es frío y luminoso, emite por contracción gravitatoria (según el Teorema del Virial) y se ubica en el *Diagrama de Hertzsprung-Russell, H-R*, que ¹ sobre la *línea de Hayashi* correspondiente a la masa que tiene. La evolución prosigue y debido a la contracción, la temperatura de la región central aumenta y se vuelve más transparente (disminuye la opacidad). Entonces la parte central se vuelve radiativa. Cuando esto ocurre, el objeto se mueve hacia temperaturas efectivas mayores (T_{eff}), es decir, hacia la izquierda en el Diagrama H-R. El recorrido evolutivo ² (que es rápido en esta parte) prosigue: se sigue contrayendo, calentando y disminuyendo su opacidad, y la parte radiativa va avanzando hacia afuera. En un momento, la temperatura es suficientemente alta para realizar las primeras reacciones del subciclo CN ³.

En este punto es importante aclarar que al objeto se lo considera “estrella” si su masa es superior a $0.08 M_{\odot}$, con lo cual puede ini-

¹ Se trata de un diagrama teórico con ejes $\log(L/L_{\odot})$ vs $\log(T_{\text{eff}})$.

² Será muy distinto dependiendo de la masa del objeto.

³ Éstas generan ^{14}N a partir del ^{12}C primordial.

ciar la quema de protones. Si su masa está entre 0.016 y $0.08 M_{\odot}$, se trata de una enana marrón: tiene reacciones nucleares, como quema de litio y deuterio, pero no de protones. Mientras que por debajo de $0.016 M_{\odot}$ se trata de un planeta gigante (gaseoso), en el cual no ocurren reacciones nucleares.

Finalmente, y luego de reacomodar las abundancias químicas como hemos mencionado, el objeto se ubica sobre la Secuencia Principal de Edad Cero, más conocida como *Zero Age Main Sequence*, o ZAMS, con el radio mínimo (como estrella de secuencia).

SECUENCIA PRINCIPAL Terminada la fase anterior, comienza la etapa nuclearmente activa más larga en la vida de las estrellas. Durante la misma, la estrella tiene una estructura estable, mediante la quema de H en He en el núcleo. Si su masa está por debajo de $1.2 M_{\odot}$ (secuencia principal inferior) la combustión del H en He se produce principalmente a través del ciclo protón-protón⁴ (pp). Presenta una envoltura convectiva y un núcleo radiativo. Mientras que, por el contrario, si su masa está por encima de $1.2 M_{\odot}$, la quema dominante es a través del ciclo CNO⁵, presenta una envoltura radiativa y un núcleo convectivo. Cabe aclarar que en general se hallan presentes ambos ciclos de quema de H, pero uno suele ser más importante que el otro.

La historia estelar queda signada por la masa que tienen. Ésta, va a determinar el tiempo de vida de la estrella en la secuencia (así como también su morfología). Para tener una noción sobre las diferencias de tiempo de vida de cada una, se calcula que, para una masa de $1 M_{\odot}$, la estrella vive de la combustión de H alrededor de $\sim 10^{10}$ años; para una masa de $1.5 M_{\odot}$, alrededor de $\sim 10^9$ años; para $5 M_{\odot}$, $\sim 5 \times 10^7$ años; y, para $15 M_{\odot}$, unos $\sim 10^7$ años (Clayton, 1968). Podemos visualizar las principales etapas en el recorrido evolutivo de una estrella progenitora típica de enana blanca, en la figura 1.1.

Actualmente, la clasificación que se realiza según la masa tiene en cuenta los siguientes rangos:

- $0.08 M_{\odot} \lesssim M_{*} \lesssim 2.3 M_{\odot} \Rightarrow$ masa baja,
- $2.3 M_{\odot} \lesssim M_{*} \lesssim 8 M_{\odot} \Rightarrow$ masa intermedia,
- $8 M_{\odot} \lesssim M_{*} \Rightarrow$ masa alta.

Las estrellas que, luego de una larga evolución, terminan su vida como enanas blancas son tanto las que tienen masa baja como inter-

⁴ Hay tres caminos posibles para el ciclo pp, la ocurrencia depende de la temperatura. Lo importante es que reaccionan átomos de ^1H para dar lugar a uno o dos átomos de ^4He .

⁵ En este ciclo, se transforman cuatro átomos de ^1H para dar lugar a uno de ^4He , empleando como catalizador al ^{12}C . Tiene un canal adicional posible, que es menos probable, y también emplea como catalizador al ^{14}N .

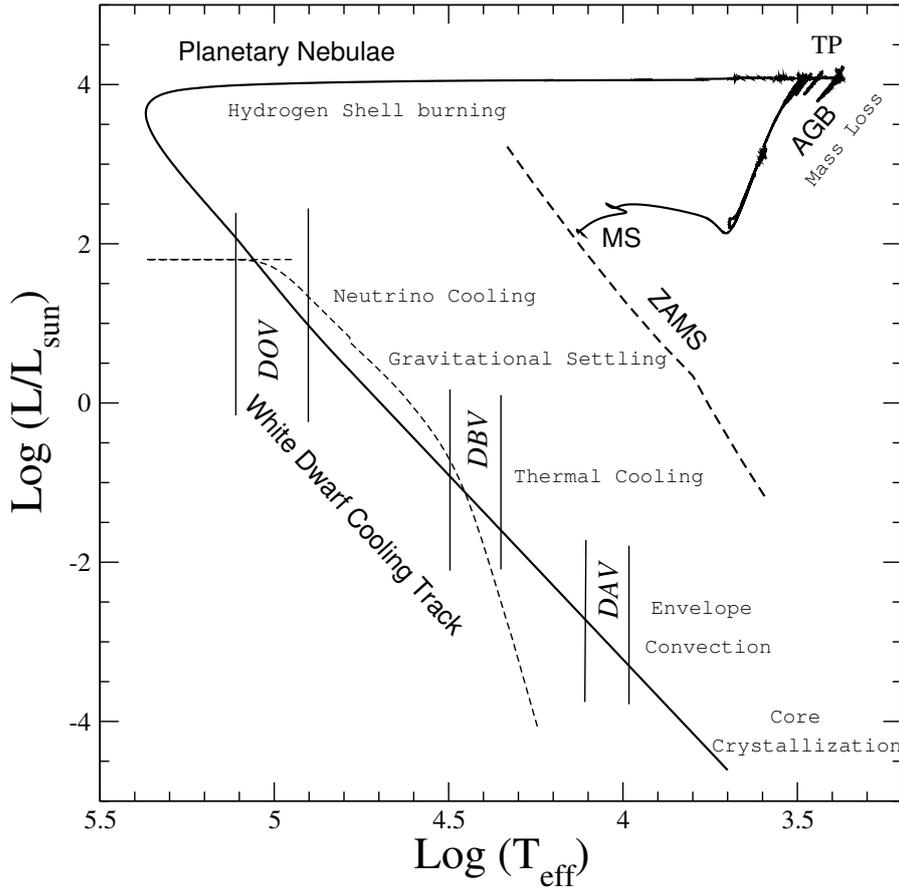


Figura 1.1: Evolución completa de una estrella con $3.5 M_{\odot}$ desde la ZAMS hasta la etapa de enana blanca. Los episodios de pérdida de masa durante la AGB reducen su masa hasta $0.66 M_{\odot}$. La línea delgada discontinua indica la luminosidad por neutrinos. (Adaptado de Althaus et al. (2010)).

media, con lo cual, son esos los casos que analizaremos a continuación.

POST-SECUENCIA PRINCIPAL: MASA INTERMEDIA Una vez agotado el H central para este tipo de estrellas, el núcleo convectivo ya no tiene un gradiente de temperatura que le permita sostener la estructura e intenta colapsar. Sube la temperatura, y si bien el núcleo es inerte, ésta es suficiente para que se encienda una capa rica en H. Debido a esto, el He que se produce aumenta la masa del núcleo, y como no puede sostenerse, se vuelve inestable: se contrae y se calienta. La energía que se libera, expande las capas externas, con lo cual aumenta su radio, y disminuyen considerablemente su T_{eff} y levemente su luminosidad, L . Esto ocurre tan rápido que en el Diagrama H-R hay una brecha: la *Brecha de Hertzsprung*. Así, la estrella se vuelve Gigante Roja, posicionándose nuevamente cerca de la línea de Hayashi, sobre la *Rama de las Gigantes Rojas*, RGB. En todo este proceso la estrella

no se encuentra en equilibrio térmico. Para una masa de $5 M_{\odot}$, esta etapa dura unos $\sim 3 \times 10^6$ años, y es menor para masas mayores.

Posteriormente, cuando la temperatura del núcleo alcanza los 10^8 K, se enciende el He central en condiciones no-degeneradas (o débilmente degeneradas, porque las densidades no son tan altas)⁶. La nueva fuente de energía frena la contracción, y la estrella vuelve a alcanzar el equilibrio térmico e hidrostático. En esta etapa, tenemos un núcleo que quema He mediante el ciclo “triple alfa”⁷ y la capa de quema de H en He. La mayor contribución a la luminosidad la da esa capa. La estrella asciende en el Diagrama H-R, aumentando su luminosidad, al mismo tiempo que sufre una serie de “bucles” (más conocidos como “loops”) en los que aumenta y disminuye su T_{eff} .

Una vez que agota el He central (que para una estrella como la del ejemplo, dura unos $\sim 10^7$ años), la estrella vuelve a ascender en luminosidad, por la *Rama Asintótica de las Gigantes* (o en inglés, *Asymptotic Giant Branch, AGB*). Comienza a quemar He en capa, dejando atrás un núcleo inerte, principalmente de C y O, y degenerado porque dicha quema agrega material al núcleo, aumentando así la densidad. La estructura interna de la estrella es entonces: un núcleo inerte de C y O, y capas concéntricas: una que quema He en C y O, una con He inerte, una capa que quema H en He y, por último, una envoltura de H y He. En determinado momento durante su aumento de luminosidad (y de radio) las capas externas se vuelven tan poco ligadas que la estrella comienza a perder masa. Este fenómeno se conoce como *viento estelar*.

Es importante destacar que la presencia de dos (o más) capas de quema lleva a los llamados *pulsos térmicos*, que se caracterizan por una luminosidad oscilante en el tiempo⁸. Los pulsos finalizarán cuando la estrella pierda suficiente masa por efecto de los vientos. Esta pérdida de masa, por otro lado, vuelve a la estrella azul, y así, atraviesa el Diagrama H-R, aproximadamente a L constante, hacia T_{eff} superiores. El material que fue perdiendo es excitado por la gran temperatura de la estrella central y se hacen visibles las *Nebulosas Planetarias*, fenómeno que dura unos miles de años, hasta que es dispersada en el medio interestelar. Cuando llega a esta condición, se tiene una pre-*enana blanca*. La estrella va aumentando su degeneración.

6 Cuando hay degeneración, la presión de la materia está desacoplada de la temperatura, mientras que cuando no hay degeneración, la presión depende de la temperatura y en ese caso, se considera que la dependencia viene dada por la ley de los gases ideales

7 Se producen ^{12}C y ^{16}O mediante reacciones que emplean tres átomos de ^4He , existiendo también dos caminos posibles.

8 En este proceso la capa de H va quemando hacia afuera hasta que la T es baja, y se apaga. La de He se vuelve más activa y se acerca a la otra cáscara. Se empieza a calentar la base de la cáscara de H, se reactiva, y se vuelve importante de nuevo la luminosidad (L_{H}). La estrella pulsa, entonces, por la interacción de las capas que se encuentran quemando.

POST-SECUENCIA PRINCIPAL: MASA BAJA Estas estrellas son más densas y más frías que las anteriores. Durante la Secuencia Principal el núcleo, que es radiativo, no está degenerado pero tienen un efecto de degeneración débil. En este caso, no hay un análogo a la brecha de Hertzsprung puesto que cuando la masa del núcleo supera el valor crítico que podía sostener en el caso de masa intermedia, éste ya se encuentra degenerado y el límite pierde sentido. Aquí, el núcleo no se vuelve inestable y no necesita contraerse.

Por otro lado, la transición de quema en núcleo a quema en capa es suave. Como el crecimiento en masa del núcleo de He es lento, no hay diferencia importante de temperatura con la que tiene la capa de quema de H, con lo cual, no llega a la T necesaria para encender el He en el núcleo. En el Diagrama H-R, si bien la estrella se mueve hacia la derecha, no se aleja mucho de la posición que tenía en la Secuencia Principal. Está cerca de la línea de Hayashi que le corresponde a su masa, y se encuentra ascendiendo por la RGB, puesto que la envoltura externa se expande considerablemente. A su vez, el núcleo recibe masa de He de la capa de quema (que se mueve hacia afuera). Éste se contrae, y así, el He inerte se vuelve fuertemente degenerado. Cuando la masa de He en el núcleo llega a valer unos $0.45 M_{\odot}$, la estrella tiene suficiente temperatura para encender el He, mediante el proceso triple alfa. Como la quema allí ocurre en condiciones degeneradas, resulta muy inestable. A esto se lo conoce como *Flash de Helio*. Es importante aclarar que no ocurre en la parte central puesto que allí no se alcanza esa elevada temperatura, porque allí tiene lugar una emisión de neutrinos, que producen un efecto de refrigeración importante. Por el contrario, sucede en una zona un poco más externa. Además, este flash no se manifiesta externamente: es un proceso interno y de muy poca duración en la estrella. La energía liberada durante este proceso sirve para calentar el núcleo (llegando a luminosidades con valores muy extremos para el núcleo, con duración de segundos) a densidad aproximadamente constante. Como consecuencia, la degeneración es removida, y la liberación de energía ahora sirve para aumentar la presión del gas, que ahora se puede considerar ideal, causando la expansión del núcleo. Así, comienza la quema estable de He. En el Diagrama, la estrella toma una dada posición en la *Rama Horizontal de Edad Cero*, dependiendo de su masa (y de su metalicidad). La estructura que tiene es: un núcleo (convectivo) que quema He en C y O; una capa de He inerte; una capa que quema H en He y una envoltura de H y He. La quema de He central dura unos $\sim 10^7$ años.

Agotado el He central, la estrella sufrirá una nueva contracción del núcleo, que contiene C y O inertes; subirá en el Diagrama H-R a través de la AGB y lo que le ocurra a continuación, dependerá de la interacción de las cáscaras que queman He en C y O, e H en He: sufre pulsos térmicos, como en el caso de estrellas de masa intermedia,

aunque en este caso, las estrellas no sólo tienen menos masa, sino que han perdido una cantidad considerable durante la etapa de RGB, lo cual además limita la cantidad de pulsos térmicos. Posteriormente, la estrella viajará hacia T_{eff} superiores, a luminosidad aproximadamente constante, y nuevamente, se hará visible la Nebulosa Planetaria, debido a la gran temperatura de la estrella central.

ENANAS BLANCAS Cuando la temperatura efectiva de la estrella alcanza unos $\sim 10^5$ K, la cáscara de H en combustión comienza a extinguirse. Así, la luminosidad desciende, a medida que la estrella se empieza a enfriar. De esta forma, evoluciona hacia la etapa de *Enana Blanca* por una línea de radio constante, en el diagrama H-R. Dependiendo de la historia evolutiva, tendrá un núcleo degenerado de C y O, Ne y O, o bien, de He, y una envoltura cuya composición química también depende fuertemente de la evolución previa. La clasificación espectroscópica tradicional de estas estrellas se divide en dos, de acuerdo con el principal constituyente de su superficie. Según las observaciones espectroscópicas, la mayor parte posee una composición superficial casi enteramente de H con, a lo sumo, trazas de otros elementos. Éstas son llamadas DA, y constituyen el 80% de las enanas blancas (Eisenstein et al., 2006). La otra familia está compuesta por las enanas blancas deficientes en H con atmósferas ricas en He, usualmente conocidas como no-DA, y son alrededor de un 20% de la población total de enanas blancas. Como veremos a continuación, se cree que este tipo de enanas blancas son resultado de flashes térmicos tardíos experimentados por progenitores post-AGB⁹. A su vez, las no-DA se dividen en cinco diferentes subclases: las DO, con las mayores T_{eff} , en el rango entre 45 000 K y 200 000 K, y con líneas relativamente intensas de HeII; las DB, con temperaturas entre 11 000 K y 30 000 K, y líneas intensas de HeI; y los tipos DC, DQ y DZ con temperaturas efectivas menores a 11 000 K y con trazas de C y metales en su espectro.

1.2 ESTRELLAS PG 1159

La familia espectroscópica de las PG 1159 se encuentra en una etapa evolutiva posterior a la AGB y previa a la fase de enfriamiento de las enanas blancas, por lo cual, resulta de fundamental importancia para entender la evolución estelar, dado que constituyen el nexo evolutivo entre dichos objetos. Como hemos explicado anteriormente, la mayoría de las estrellas terminarán su vida como enanas blancas, con lo cual es evidente que las PG 1159 constituyen una herramienta po-

⁹ Otro origen posible, que no se tendrá en cuenta en este trabajo porque tratamos con evolución estelar aislada, es un episodio de fusión de estrellas, conocido como "merger".

derosa para comprender los procesos físicos que llevan a la formación de estrellas enanas blancas.

El rango típico de temperaturas efectivas de las PG 1159 es de 75 000 K a 200 000 K, y de gravedades superficiales, $5.5 \lesssim \log(g) \lesssim 8.0$. Muestran, además, abundancias superficiales muy variadas, con rangos: $0.30 \lesssim X_{\text{He}} \lesssim 0.85$, $0.15 \lesssim X_{\text{C}} \lesssim 0.6$ y $0.02 \lesssim X_{\text{O}} \lesssim 0.20$ ¹⁰ (Miller Bertolami, 2009). La masa promedio para este tipo de estrellas resulta ser de $0.573 M_{\odot}$ (Althaus et al., 2010).

En particular, de las más de 40 estrellas PG 1159 conocidas, un subgrupo resulta ser pulsante. Entre las PG 1159 pulsantes se encuentran dos tipos de objetos: los que aún están rodeados por una nebulosa, y que son por ende llamados *núcleos de nebulosa planetaria* (más conocidos por sus siglas en inglés, PNNV, Planetary Nebula Nuclei Variable) y los que no (llamadas DOV¹¹). Ambos grupos son conocidos como estrellas variables *GW Virginis*, debido al prototipo de su clase, la estrella PG 1159-035 (McGraw, 1979; Althaus et al., 2010). Cabe aclarar que la presencia de la nebulosa no afecta los mecanismos de excitación de las pulsaciones, y por tal motivo, las PNNV y las DOV conforman una única clase de estrellas variables.

En general, las estrellas PG 1159 pulsantes son objetos compactos muy calientes y luminosos, que exhiben una fuerte deficiencia superficial de H y que son ricas en He, C y O. Por lo tanto, su estudio nos permite conocer los procesos físicos que llevan a la formación de enanas blancas con tal deficiencia de H. Se cree que la escasez de H que presentan, se debe al hecho de que sus estrellas progenitoras (objetos post-AGB) atravesaron un pulso térmico muy tardío (en inglés, *Very Late Thermal Pulse*, VLTP, durante el cual se produce un último flash termonuclear de He, que da lugar a una combustión violenta de la mayor parte del H. Posteriormente, y durante la etapa temprana de enana blanca, el asentamiento gravitacional produce que el He flote y elementos más pesados se hundan, dando lugar a superficies dominadas por He, convirtiendo así a las PG 1159 pulsantes en enanas blancas tipo DO (Unglaub & Bues, 2000). Durante esta etapa, empieza a decaer fuertemente la luminosidad debida a la quema de He y comienzan a dominar sobre ésta, las luminosidades debidas a pérdidas por neutrinos y a la liberación de energía gravotérmica (O'Brien & Kawaler, 2000; Althaus et al., 2005).

¹⁰ X_i es la abundancia por masa de la especie química i , definida tal que $\sum_i X_i = 1$.

¹¹ No debe confundirse a las estrellas DOV con las DO: las primeras son PG 1159 que pulsan y presentan C, O y He en su superficie; las segundas, son enanas blancas calientes (con T_{eff} entre 45 000 K y 200 000 K) que no pulsan y que sólo tienen He ionizado en su superficie, puesto que se supone que ya tuvo lugar una difusión, que hizo flotar al He y hundir tanto el C como el O.

1.3 ESTRELLAS ENANAS BLANCAS DEFICIENTES EN H

Una cantidad considerable de enanas blancas, el 20 % del total, presentan una composición química deficiente en H. Se considera que la mayoría proviene de estrellas PG 1159 (Althaus et al. (2005); Unglaub & Bues (2000); Dreizler & Werner (1996)), calientes y muy luminosas, y con capas superficiales deficientes en H y ricas en He, C y O.

Actualmente, se acepta el escenario de estrella renacida (en inglés, *born-again*) para explicar la mayor parte de las enanas blancas deficientes en H superficial -en evolución estelar aislada. Éste implica la ocurrencia de un VLTP durante las etapas tempranas de la evolución de la enana blanca, cuando la quema de H en capa casi ha concluido, y posterior a la etapa de nebulosa planetaria (en el diagrama HR, se halla luego del codo, lo cual explica por qué se llama “muy tardío”) (Fujimoto (1977), Schoenberner (1979) y más recientemente, Althaus et al. (2005)). Durante este pulso térmico, se forma una zona convectiva que crece hacia fuera impulsada por la cáscara que quema He, y que alcanza la envoltura rica en H, produciéndose así una quema muy violenta de la mayor parte del H, en la zona convectiva impulsada por el flash de He (Herwig et al., 1999; Miller Bertolami & Althaus, 2006). Debido a la convección, el H externo queda entonces disponible en el interior para ser quemado principalmente mediante la reacción $^{12}\text{C}(p,\gamma)^{13}\text{N}$ (captura de protones por colisión elástica con átomos de ^{12}C), que da lugar a cierta luminosidad, L_H , que puede alcanzar valores muy elevados en pocas horas. La estrella entonces evoluciona de manera muy rápida de vuelta hacia la AGB (en pocas décadas) y finalmente, hacia el dominio de las estrellas PG 1159, ricas en He, C y O (Werner & Herwig, 2006), con elevadas T_{eff} , debido a la composición química que adquieren. Posteriormente, se espera que estas estrellas evolucionen a enanas blancas DO. En la figura 1.2, podemos apreciar el track evolutivo completo de una estrella de $2.7 M_{\odot}$ que atravesó un VLTP durante su evolución desde la ZAMS hasta el dominio de las enanas blancas.

Cabe destacar que ciertas estrellas que dejan la AGB por primera vez, pueden experimentar un pulso térmico en una etapa diferente de su evolución, que también produce variaciones en el H superficial pero que, en cambio, deja una estrella con una pequeña envoltura rica en H. En contraste con el VLTP, este pulso, que es conocido como pulso térmico tardío (en inglés, *Late Thermal Pulse*, LTP) ocurre antes de que la estrella remanente alcance el estado de enana blanca, mientras aún se encuentra activa la capa que quema H y mientras se mueve en el diagrama HR hacia temperaturas mayores y a luminosidad constante. Este fenómeno produce que el H no sea completa y

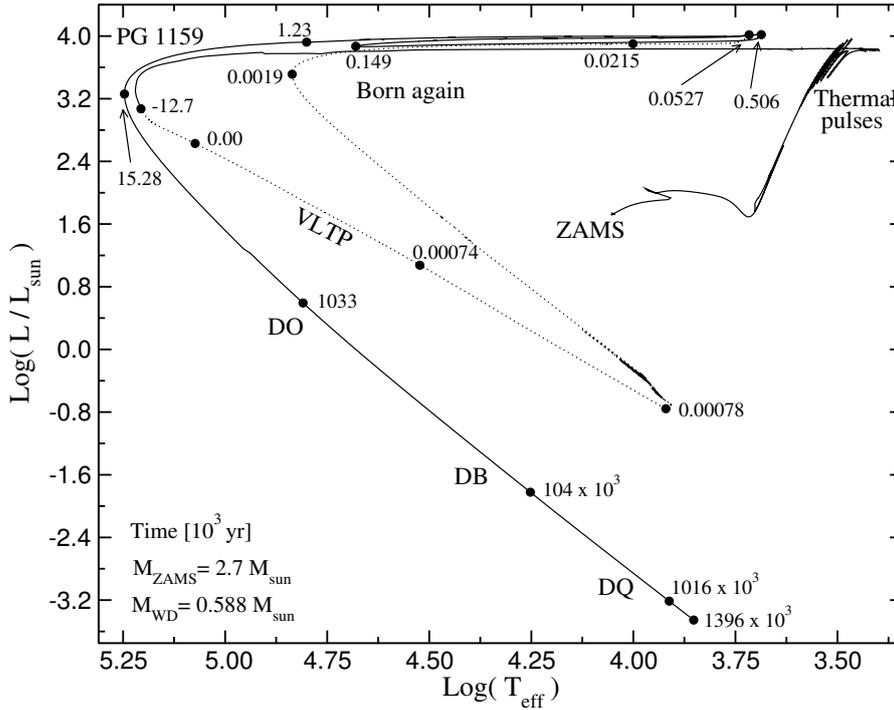


Figura 1.2: Evolución completa de una estrella con $2.7 M_{\odot}$ desde la ZAMS hasta la etapa de enana blanca. La estrella experimenta un episodio de VLTP en una etapa temprana de su enfriamiento, luego de culminada la combustión del H. Se marca con una línea punteada el estado evolutivo correspondiente a la fase de born-again y la del VLTP. Los números que están cerca de los puntos negros sólidos a lo largo del track, corresponden a la edad (en 10^3 años) a partir de la ocurrencia del pico del último pulso térmico. Asimismo se indican los dominios de las estrellas PG 1159, DO, DB y DQ. Como resultado de episodios de pérdida de masa, ésta decrece de 2.7 a $0.5885 M_{\odot}$. Luego del episodio de born-again, el remanente post-AGB deficiente en H, experimenta una segunda incursión hacia temperaturas más bajas, antes de alcanzar su track terminal de enana blanca (Adaptado de Panei (2004), Althaus et al. (2005)).

violentemente quemado, sino que diluido, de forma tal que superficialmente se detecta con una pequeña abundancia ¹². Luego de haber atravesado este pulso tardío, abandonará la AGB, y evolucionará como una estrella central de nebulosa planetaria, hacia T_{eff} mayores. Se espera que las PG 1159 resultantes del episodio de LTP, conocidas como PG 1159 híbridas, terminen convirtiéndose en enanas blancas DA, puesto que el H no ha sido completamente consumido sino di-

12 En un LTP, se produce la dilución de la envoltura residual rica en H como resultado de un episodio de dragado convectivo del material interior a la superficie -cuando el remanente vuelve a la AGB-. Tiene lugar porque la masa de la envoltura rica en H es mucho menor que la masa dragada desde el interior, luego del pulso térmico. Como ahora tiene bajas temperaturas superficiales, se pueden desarrollar zonas convectivas que distribuyen el H en una región mucho mayor de la estrella, diluyéndolo.

luido (Miller Bertolami & Althaus, 2006). Por el motivo expuesto, no constituyen el tipo de progenitor que nos interesa para la presente Tesis.

1.4 ESTRELLAS PULSANTES Y PULSACIONES

Una estrella pulsante es aquella que, en algún momento durante su evolución, modifica su brillo con un cierto período, debido a cambios producidos en su volumen, en escalas de tiempo relativamente cortas. Si bien la característica que las hace detectables es la variación en su luz, también se pueden observar cambios en el tipo espectral, variaciones en la velocidad radial, entre otros fenómenos.

Existen tres escalas de tiempo para caracterizar las pulsaciones: una escala de tiempo dinámica, τ_{dyn} , una térmica, τ_{ter} y una nuclear, τ_{nuc} . La primera, está relacionada con el tiempo de caída libre, τ_{ff} , que es un tiempo característico para medir apartamientos significativos del equilibrio hidrostático tales que alteren el estado de la estrella de modo apreciable. Esta escala es del orden de los períodos de pulsación (Cox, 1980).

Por su parte, la escala de tiempo térmica, está relacionada con el tiempo que tarda la energía térmica contenida por encima de una cierto radio, en transportarse hasta la superficie (saliendo de la estrella). Por último, τ_{nuc} , podría definirse como el tiempo requerido para que las propiedades de la estrella cambien apreciablemente como resultado de la evolución nuclear: depende, por supuesto, de la especie química que esté quemando. Se cumple que: $\Pi \sim \tau_{\text{dyn}} < \tau_{\text{ter}} \ll \tau_{\text{nuc}}$, donde Π es el período de oscilación de un modo radial fundamental (es decir, $\ell = 0$, $k = 0$ -ver debajo).

Las pulsaciones (llamadas también oscilaciones) más generales que experimentan las estrellas son las *no-radiales*. En éstas, la estrella se aparta de su configuración de equilibrio y oscila de forma tal que se desvía de su forma esférica, y un desplazamiento de un elemento de masa puede tener una dirección arbitraria. En estos apartamientos, tanto la gravedad (a través de la flotación) como la presión (en realidad, gradiente de presión proveniente de la compresibilidad del gas) pueden actuar como fuerzas restauradoras. Un caso particular, y el más simple, es el de *pulsaciones radiales*, un tipo de oscilación en el que la estrella oscila alrededor de su configuración de equilibrio expandiéndose y contrayéndose sin perder su forma esférica. Aquí, un desplazamiento de un elemento de masa es sólo en dirección radial, y la fuerza restauradora en este caso viene dada por los gradientes de presión. Dentro de los modos no-radiales existen dos familias de mo-

dos, los *modos g* (cuya fuerza de restitución principal es la flotación) y los *modos p* (que son análogos a los modos radiales).

A continuación, trataremos con el caso más general de oscilación, el no-radial. Para analizarlo, empecemos considerando una estrella aislada simétricamente esférica como un estado sin perturbar (en equilibrio), sobre el cual aplicaremos pequeñas perturbaciones (no vamos a considerar efectos de rotación y de campo magnético). Si las perturbaciones sobre las variables físicas son pequeñas, respecto a los valores del equilibrio, se puede trabajar con una teoría linealizada (entonces necesitamos que sean tan pequeñas como para poder desprestigiar términos de segundo orden y mayores). Esto hará el tratamiento mucho más sencillo. Asimismo, se trabaja adoptando una aproximación adiabática, despreciando así el calor ganado o cedido entre los elementos de masa del fluido estelar. Se considera además que las perturbaciones tienen una dependencia oscilatoria con el tiempo, de tipo $e^{i\sigma t}$, con σ la frecuencia angular o *autofrecuencia*. Con esta serie de suposiciones, se procede a resolver las ecuaciones diferenciales de pulsación -que son las ecuaciones básicas de la hidrodinámica, dadas por las ecuaciones de conservación de impulso, masa, energía y el gradiente térmico- linealizadas (ver el tratamiento realizado por Unno et al. (1989)). La forma que adquieren entonces dichas ecuaciones, permiten describir la parte angular de las perturbaciones en función de los *armónicos esféricos* $Y_\ell^m(\theta, \phi)$, de grado $\ell (= 0, 1, 2, \dots)$ y orden $m (= -\ell, -\ell + 1, \dots, 0, \dots, \ell - 1, \ell)$. Si además tenemos en cuenta que, en el equilibrio, el estado dependería únicamente de la coordenada radial, tendremos entonces que las perturbaciones se pueden escribir como:

$$f'_{k,\ell,m}(r, \theta, \phi, t) = f'_{k,\ell,m}(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\sigma_{k,\ell,m} t} \quad (1.1)$$

donde las cantidades primadas denotan una pequeña perturbación Euleriana de la cantidad f dada (que es la variable asociada a la magnitud física que está siendo perturbada, por ejemplo, la presión). Así, $f'(r)$ representa la *autofunción* del problema y proporcionaría la amplitud relativa de las pulsaciones dentro de la estrella. Tanto las autofunciones $f'_{k,\ell,m}(r)$, como las autofrecuencias $\sigma_{k,\ell,m}$ son obtenidas al resolver las ecuaciones de pulsación, que deberían calcularse de forma numérica para modelos realistas. Las autofunciones y los autovalores son obtenidos como soluciones de un problema de autovalores de cuarto orden en el espacio, siempre que estemos dentro de la aproximación adiabática mencionada.

Puede verse que cada modo de pulsación depende de tres números: k , que nos da el orden radial, ℓ , que nos indica el grado armónico, y m , el orden azimutal. Resulta conveniente interpretar geoméricamente estos parámetros: $\ell = 0, 1, 2, \dots$ es el número de líneas nodales (sobre las cuales el movimiento es nulo) en la superficie estelar y $m = 0, \pm 1, \dots, \pm \ell$ es el número de tales líneas nodales en longitud. Es interesante notar que si $\ell = 0$ (por ende, $m = 0$) recuperamos las

pulsaciones radiales. Para cualquier valor de ℓ , si $m = 0$, las líneas nodales son paralelos sobre la superficie estelar, y a estos modos se los llama *zonales*. El caso $\ell = |m|$, nos da líneas nodales meridianas: son los modos *sectoriales*. En los casos intermedios, la superficie queda dividida en $\ell - |m|$ paralelos y m meridianos, y los modos son llamados *teserales*. De este modo la superficie queda dividida mediante dichas líneas, en zonas que están en fase opuesta en brillo (temperatura) y velocidad del material, como puede apreciarse en la figura 1.3. Como resultado, diferentes zonas del disco estelar tienen diferentes brillos y esto es lo que genera las variaciones en la curva de luz de la estrella que está experimentando pulsaciones no-radiales, algo muy importante, ya que es lo que se emplea para el análisis que veremos a continuación. Como puede apreciarse de la figura, cuanto mayor el valor que toma ℓ , mayor el número de zonas alternadas en brillo en que queda dividida la superficie, y menores los cambios de brillo aparentes en la curva de luz. Esto produciría una cancelación geométrica, y como consecuencia, un efecto de selección, en que serán observados preferencialmente los modos de bajo grado armónico ℓ (por lo general no se observan ℓ mayores a 3, salvo en el caso del Sol por la cercanía). Por otra parte, en cuanto al índice k en modelos estelares homogéneos, nos indica el número de nodos radiales, ubicados en posiciones internas r_i ($i = 1, \dots, k$) de la estrella donde el movimiento radial del fluido es nulo. Para modos g , cuanto más grande el valor de k , más pequeña la frecuencia de oscilación, mientras que para modos p , vale lo opuesto.

Es importante notar que en ausencia de cualquier agente físico capaz de remover la simetría esférica (como campos magnéticos o rotación), las autofrecuencias $\sigma_{k,\ell,m}$ dependen de ℓ pero están $(2\ell + 1)$ veces degeneradas en m . Así, los modos caracterizados por el mismo valor de k y de ℓ correspondientes, oscilan todos con la misma frecuencia.

Retomando la clasificación de modos, cabe señalar que como solución al problema de autofunciones y autovalores expuesto, para un dado valor de $\ell > 0$, el espectro de modos no-radiales queda dividido en los mencionados modos de presión y de gravedad (dependiendo de la fuerza restitutiva actuando en la estrella). Además, y sólo para el caso en que $\ell > 1$, existe una tercera clase, los *modos f*.

Los modos g corresponden al dominio de bajas frecuencias (períodos largos) y se propagan generalmente en zonas internas de la estrella, cercanas al núcleo. Los desplazamientos del fluido estelar son esencialmente en dirección horizontal. La estructura del espectro de

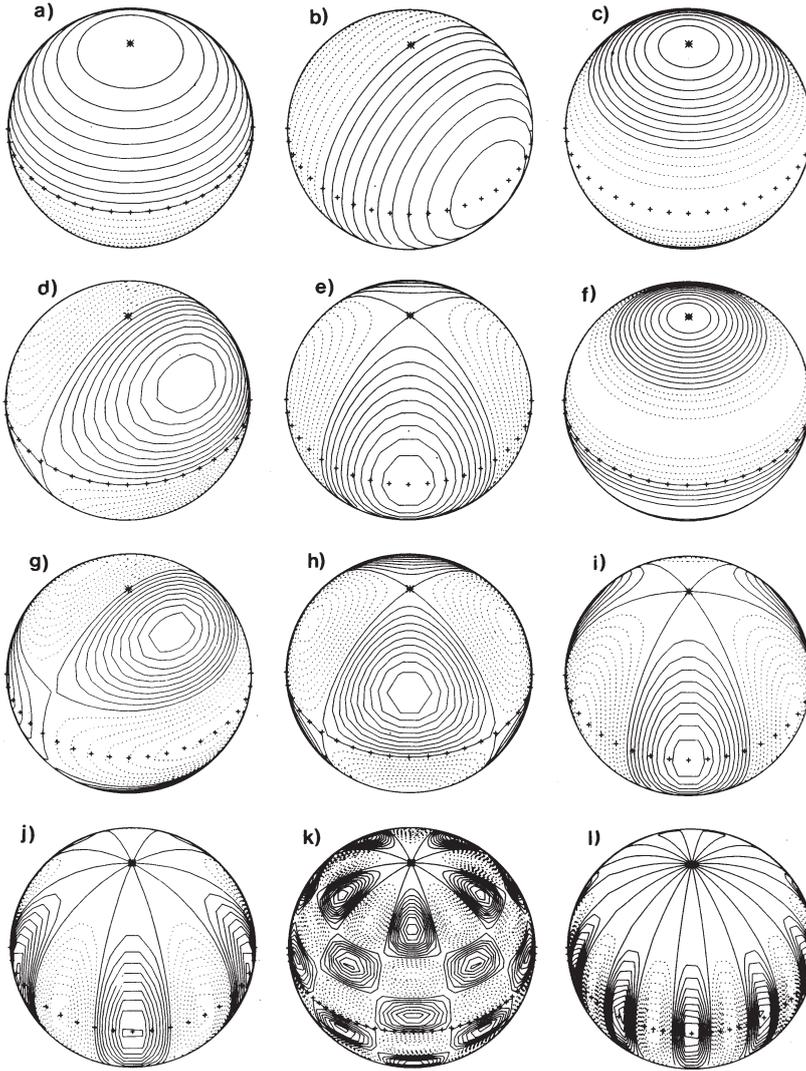


Figura 1.3: Esquema de contornos de los armónicos esféricos sobre la superficie de una estrella. El ecuador se indica con "+". Los casos ilustrados son: a) $\ell = 1$, $m = 0$; b) $\ell = 1$, $m = 1$; c) $\ell = 2$, $m = 0$; d) $\ell = 2$, $m = 1$; e) $\ell = 2$, $m = 2$; f) $\ell = 3$, $m = 0$; g) $\ell = 3$, $m = 1$; h) $\ell = 3$, $m = 2$; i) $\ell = 3$, $m = 3$; j) $\ell = 5$, $m = 5$; k) $\ell = 10$, $m = 5$; l) $\ell = 10$, $m = 10$. (Adaptado de Christensen-Dalsgaard (1998)).

períodos de estos modos está gobernada por la frecuencia de Brunt-Väisälä, dada por:

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) \quad (1.2)$$

donde g es la aceleración gravitacional local, $\Gamma_1 = (d \ln p / d \ln \rho)_{ad}$, p la presión y ρ la densidad. Si $N^2 > 0$, entonces N es la frecuencia (real) de oscilación de un elemento del fluido alrededor del equilibrio bajo la acción de la gravedad.

Por su parte, los modos p, presentan altas frecuencias de oscilación (períodos cortos), y aumentan a medida que k y ℓ lo hacen. Generalmente, se propagan cerca de la superficie estelar, y están caracterizados por desplazamientos radiales del fluido estelar. La frecuencia crítica para estos modos es la de Lamb, definida según:

$$L_\ell^2 = \ell(\ell + 1) \frac{c_s^2}{r^2} \quad (1.3)$$

siendo c_s^2 el cuadrado de la velocidad del sonido adiabática local, dado por: $c_s^2 = \Gamma_1 p / \rho$. Una onda de sonido viaja una distancia aproximada de $2\pi r / \ell$, horizontalmente en un intervalo de tiempo de aproximadamente $2\pi / L_\ell$.

En cuanto a los modos f, hay un único modo para un dado valor de $\ell > 1$. Usualmente, éste no presenta nodo alguno en la dirección radial ($k = 0$), y presenta características tanto de los modos g como de los p. Su autofrecuencia aumenta lentamente con ℓ creciente.

Cuando el orden radial es lo suficientemente alto ($k \gg 1$) y para valores pequeños de ℓ , la frecuencia de los modos p viene dada, aproximadamente, por (Tassoul 1980):

$$\sigma_{k\ell} \simeq \frac{\pi}{2} \left(2k + \ell + n + \frac{1}{2} \right) \left[\int_0^{R_*} \frac{1}{c_s(r)} dr \right]^{-1} \quad (1.4)$$

En esta expresión, n es el índice politrópico que caracteriza la estructura de las capas superficiales del modelo estelar. Por otro lado, para modelos estelares completamente radiativos o completamente convectivos, y químicamente homogéneos, la frecuencia de los modos g para $k \gg 1$ está dada por:

$$\frac{1}{\sigma_{k\ell}} \simeq \frac{\pi}{2} \left(2k + \ell + n + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} \left[\int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1} \quad (1.5)$$

A partir de la ecuación (1.4) se tiene para modos p con ℓ fijo,

$$\Delta\sigma^\alpha = \sigma_{k+1\ell} - \sigma_{k\ell} = \pi \left[\int_0^{R_*} \frac{1}{c_s(r)} dr \right]^{-1} = \text{cte.} \quad (1.6)$$

es decir que el espaciado asintótico de frecuencia de dichos modos es constante (y no depende de ℓ) en el límite de alto orden radial. El valor de la constante depende sólo de la velocidad del sonido adiabática en el interior de la estrella.

Similarmente, a partir de la ecuación (1.5) tenemos para modos g con ℓ fijo:

$$\Delta\Pi_\ell^\alpha = \Pi_{k+1\ell} - \Pi_{k\ell} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} \left[\int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1} = \text{cte.} \quad (1.7)$$

donde $\Pi_{k\ell}=2\pi/\sigma_{k\ell}$ es el período de pulsación. Por lo tanto el espaciamiento de períodos para los modos g es un valor constante (que sí depende de ℓ) en el límite de alto orden radial. Este valor constante depende de la frecuencia de Brunt-Väisälä (Althaus et al., 2010), y se lo conoce como espaciamiento asintótico de períodos, cantidad que como quedará evidenciado, resulta fundamental para el presente trabajo.

1.4.1 Análisis local y diagramas de propagación

Un análisis local nos puede dar una noción de las propiedades de los modos de pulsación no-radiales. Si consideramos modos con longitud de onda muy corta (número de onda, k_r , muy grande), es decir, modos de alto orden radial ($k \gg 1$) y bajo la aproximación de potencial gravitacional nulo (conocida como *Aproximación de Cowling*, Cowling (1941)), los coeficientes en las ecuaciones de pulsación varían lentamente en comparación con las autofunciones. De esta manera, las soluciones resultan proporcionales a $e^{ik_r r}$. De estas consideraciones resulta la siguiente relación de dispersión:

$$k_r^2 = \frac{1}{\sigma^2 c_s^2} (\sigma^2 - L_\ell^2) (\sigma^2 - N^2). \quad (1.8)$$

Si $\sigma^2 > N^2$, L_ℓ^2 o $\sigma^2 < N^2$, L_ℓ^2 , entonces $k_r^2 > 0$ y $k_r \in \text{Re}$, y las soluciones pueden propagarse radialmente. Estas desigualdades definen dos regiones de propagación o *cavidades resonantes* en el interior estelar: la región p, correspondiente a la propagación de modos p, y la región g, asociada a la propagación de modos g. Si por el contrario, $N^2 > \sigma^2 > L_\ell^2$ o $L_\ell^2 > \sigma^2 > N^2$, entonces, $k_r^2 < 0$ y $k_r \in \text{Im}$, y por lo tanto las soluciones son *evanescentes*, es decir, la amplitud de oscilación crece o decrece exponencialmente con r.

Para visualizar las regiones de propagación descritas, podemos remitirnos a la figura 1.4. En la misma se presentan cuatro casos bien diferentes: en el primer panel, (a), se puede apreciar un modelo de estrella PG 1159 antes del codo evolutivo, mientras presenta nebulosa planetaria. En el segundo, (b), se ve una PG 1159 luego del mismo. En el tercero, (c), tenemos el caso representativo para una enana blanca DB; y por último, en (d), una enana blanca DA. En cada diagrama se puede ver los perfiles de las frecuencias de Brunt-Väisälä y de Lamb (para $\ell = 1$).

Como ya mencionamos anteriormente, la frecuencia de Brunt-Väisälä define las características de los modos g: los cambios en esta frecuencia, conllevan cambios importantes en las cavidades de propagación. Para el caso que nos ocupa, las GW Vir, los modos g se propagan principalmente en regiones profundas del núcleo, debido a los

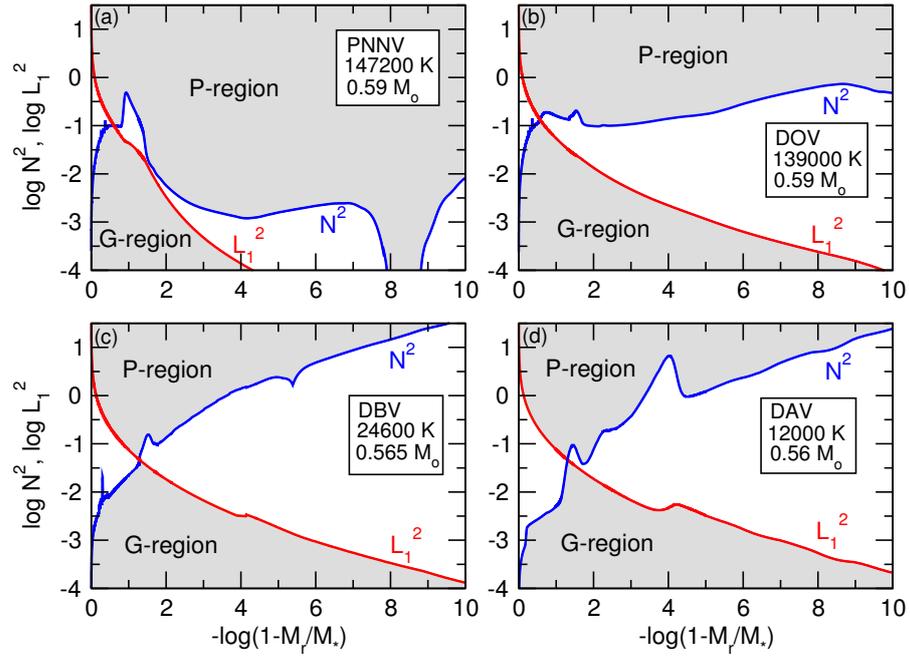


Figura 1.4: Diagramas de propagación ($\log(N^2)$, L_ℓ^2 como función de $-\log(1 - M_r/M_*)$) correspondientes a modelos estelares seleccionados de pre enanas blancas y enanas blancas (para modos con $\ell = 1$). En el panel (a), se observa la situación para una PNNV, en el (b), para una PG 1159 sin nebulosa planetaria. El (c), representa el caso para una enana blanca DB y el (d), el caso para una DA. Las zonas grises corresponden a las regiones de propagación de modos. (Adaptado de Althaus et al. (2010)).

grandes valores que toma N^2 allí. Esto se debe a que la degeneración electrónica no es tan importante en esta etapa de la vida de la estrella (no así en la etapa de enana blanca, donde pasa a ser muy importante) aunque hay ciertas diferencias entre las PG 1159, según estén antes o después del codo: debido a la diferencia en degeneración que presentan, las autofunciones adoptan amplitudes mayores en regiones cada vez más externas. Por otro lado, los modos p, pueden propagarse en regiones más externas de la estrella. Los comportamientos descritos suelen presentarse en todas las estrellas pulsantes “normales”, es decir, no-degeneradas. En resumen, los modos g sondan principalmente las regiones internas en el caso de las PG 1159 pulsantes (con y sin nebulosa planetaria), y son extremadamente sensibles a las capas externas en el caso de las variables DB y DA. Vale la pena notar, sin embargo, que algunos modos g con bajo orden k , son capaces de sondear el interior profundo en el caso de variables DA y DB, con lo cual se pueden hacer inferencias sobre la estructura del núcleo de C-O.

La segunda característica relevante de los diagramas de propagación es la presencia de protuberancias (más conocidas como “bumps”) y picos en la frecuencia de Brunt-Väisälä. Si las pre enanas blancas y enanas blancas fueran químicamente homogéneas, la frecuencia de

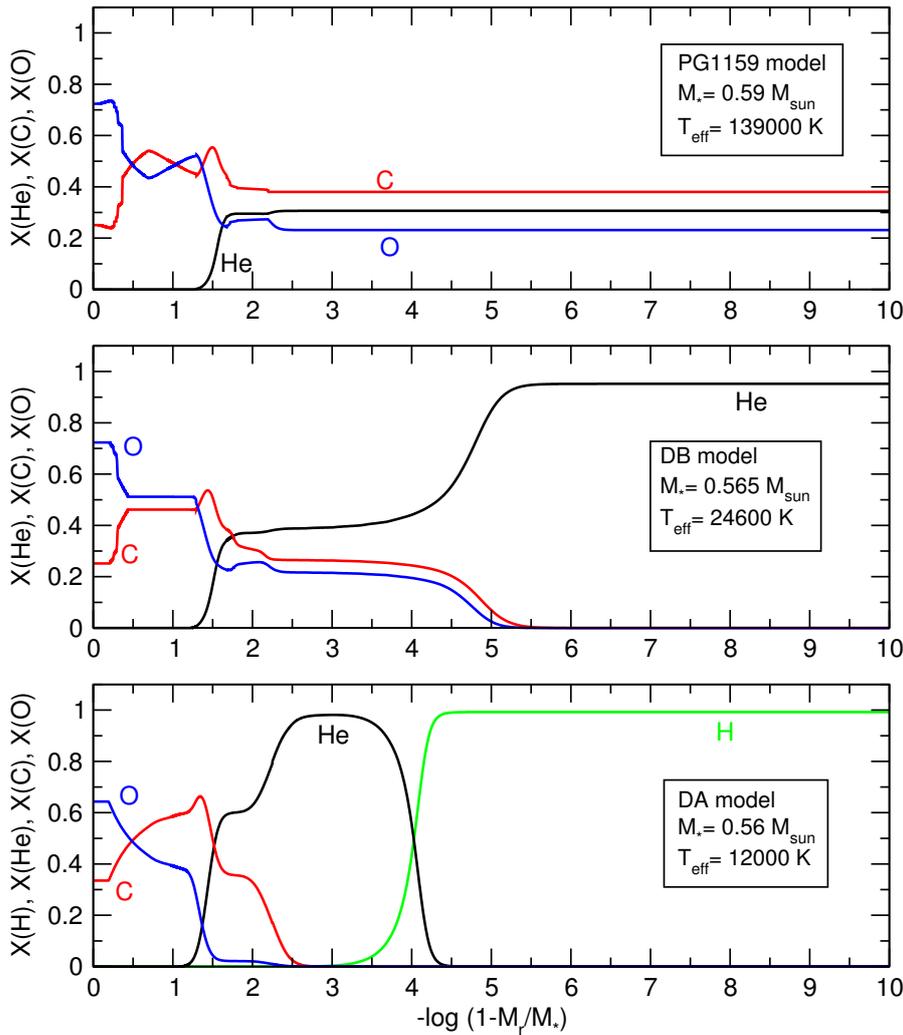


Figura 1.5: La estructura química interna de los modelos descritos de pre-enanas blancas y enanas blancas. En el panel (a), se observa la situación descrita: la transición química de He, C y O que da origen a los picos en los diagramas de propagación en los modelos de PG 1159. (Adaptado de Althaus et al. (2010)).

Brunt-Väisälä debería comportarse de manera suave. El hecho de que no se comporte así se debe a la presencia de gradientes abruptos de densidad en el interior de los modelos de estas estrellas, inducidos por las diversas regiones de transición química. Esto se puede apreciar en la figura 1.5: la estructura química de modelos realistas de PG 1159 exhibe transiciones bruscas de He, C y O en regiones internas, lo cual explica entonces el comportamiento que se ve en los paneles (a) y (b) de la figura 1.4. Además, comparando esos dos paneles, se puede ver que el bump es mucho más pronunciado en el caso del modelo de PNNV.

La frecuencia de Brunt-Väisälä de pre enanas blancas y enanas blancas debe calcularse numéricamente a través de la relación (Tassoul et al., 1990; Brassard et al., 1991):

$$N^2 = \frac{g^2 \rho}{P} \frac{\chi_T}{\chi_\rho} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla + B), \quad (1.9)$$

donde $\chi_T = (\partial \ln P / \partial \ln T)_\rho$ y $\chi_\rho = (\partial \ln P / \partial \ln \rho)_T$, ∇ y ∇_{ad} son los gradientes de temperatura real y adiabático, respectivamente, y B , el término de Ledoux, que viene dado por:

$$B = -\frac{1}{\chi_T} \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{X_i} \frac{d \ln X_i}{d \ln P}. \quad (1.10)$$

Aquí, X_i es la abundancia por masa de la especie i , n es el número total de especies consideradas, y:

$$\chi_{X_i} = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln X_i} \right)_{\rho, T, \{X_{j \neq i}\}} \quad (1.11)$$

Esta formulación (conocida como tratamiento “modificado de Ledoux”) tiene la ventaja de evitar problemas numéricos que aparecen cuando se usa la ecuación (1.2), en el caso de materia fuertemente degenerada, típico de los interiores de las enanas blancas (Brassard et al., 1991), y al mismo tiempo, nos da explícitamente la contribución a N de cualquier cambio en la composición en el interior del modelo (zonas de transición química) en función del término de Ledoux de la ecuación (1.10). Resulta muy importante hacer un tratamiento correcto de la frecuencia de Brunt-Väisälä en las interfases de composición química en enanas blancas estratificadas (Althaus et al., 2010).

1.4.2 Mecanismos de excitación: $\kappa - \gamma$ y ε

En esta sección, nos abocamos a describir brevemente cuáles son los mecanismos que generan las pulsaciones. Dos de ellos en particular nos resultan importantes para el tipo de estrellas bajo análisis: los llamados $\kappa - \gamma$ y el ε . Los mismos son mecanismos de excitación de modos que funcionan tanto en estrellas pre enanas blancas, así como también en enanas blancas, aunque el dominante es el primero.

En la descripción de los fenómenos que tienen lugar en las estrellas, tanto la temperatura como la opacidad (para ser precisos, su derivada) juegan roles importantes. Consideremos un elemento de fluido estelar y analicemos cómo se comporta ante una pequeña perturbación: queremos saber si su movimiento resulta estable o inestable, es decir, si la región de la estrella es una *región de excitación* (o *driving*), o si por el contrario es una *región de amortiguamiento* (o *damping*). Supongamos que el elemento de fluido es comprimido: normalmente

su temperatura tiende a aumentar y su opacidad, a disminuir. Esto hace más fácil la salida de la radiación respecto al caso en que no hubiera sido comprimido. Así, cuando el elemento se expanda, lo hará con menor impulso y en consecuencia, la expansión tendrá menor amplitud que la compresión. Entonces, la perturbación inicial se verá amortiguada y el caso es de equilibrio estable, por lo cual constituye una región de damping: cualquier pequeña perturbación que sea aplicada allí, tendrá amplitud decreciente y tenderá a desaparecer. Cabe destacar que este comportamiento ocurre en regiones donde el transporte es radiativo y la especie química dominante es neutra, o bien, completamente ionizada.

Sin embargo, hay ciertas situaciones en que esto no ocurre. En algunos casos, durante la compresión, la presión y la temperatura aumentan, pero la opacidad crece en lugar de disminuir (mecanismo κ). Así, la radiación queda "atrapada" en la región. De esta forma, si se produce una expansión, será un proceso más violento porque la región tiene esa energía adicional, que será liberada, promoviendo la inestabilidad, ya que la amplitud de la perturbación crecerá con el tiempo. Por tal motivo, una zona interna donde esto tiene lugar, constituye una región de driving. Ahora bien, en regiones donde existe ionización parcial de la especie química dominante, es decir, donde hay presencia de átomos ionizados y neutros de la especie, se dan las condiciones para que al producirse una compresión, ocurra el driving, porque parte de la radiación que queda almacenada en ese elemento de volumen es empleada para ionizar átomos (mecanismo γ). Luego, durante la expansión es liberada cuando esos átomos se recombinan. En conjunto, el *mecanismo* $\kappa - \gamma$, implica la inestabilidad causada por los efectos de la opacidad e ionización, actuando juntos.

Cuando se estudia el problema global, teniendo en cuenta las contribuciones de damping y driving de la estrella, podemos tener estabilidad en un modo de pulsación si las contribuciones netas de damping para ese modo superan a las contribuciones de driving. Y, por el contrario, podemos tener inestabilidad en un modo, si el driving supera el damping. En este caso el modo inestable puede crecer en amplitud hasta hacerse observable.

Por otro lado, en el *mecanismo* ϵ , entra en juego la inestabilidad debido a las reacciones nucleares. Cuando ocurre una compresión, la temperatura y por ende, la tasa de generación de energía nuclear, son mucho más altos que en el estado de equilibrio, y la materia gana energía térmica. A su vez, en una expansión, esta tasa disminuye por debajo del valor del equilibrio. Así, la materia pierde energía térmica. Este proceso lleva a un crecimiento gradual de las amplitudes de las perturbaciones y una consecuente inestabilidad (ver Monachesi (2006)). Se encuentra que el mecanismo ϵ excita modos con períodos

muy cortos (valores muy bajos de k).

En general se encuentra que el mecanismo $\kappa - \gamma$ tiene regiones de excitación más externas, y en el caso que nos ocupa, los átomos en ionización parcial son de C y O. Cabe aclarar que en los cálculos para los modelos empleados no es necesario considerar convección superficial, que no podría despreciarse en el caso de enanas blancas DA y DB, donde se produce una interacción entre las pulsaciones y la convección.

1.5 ASTROSISMOLOGÍA

Muchas estrellas pulsan, y esto resulta muy ventajoso para conocer ciertos aspectos del interior estelar, mediante su estudio en la disciplina conocida como Astrosismología. La misma consiste en la confrontación entre las frecuencias observadas (períodos) de estrellas pulsantes y ciertos modelos teóricos apropiados, que permiten entonces inferir detalles sobre su masa, su estructura interna, su tasa de rotación, entre otros, siempre que los modos hayan sido correctamente identificados. Como cada modo de oscilación individual se propaga en una región específica de la estrella, cada frecuencia va a proveer información sobre esa zona particular del interior estelar, la zona en que el modo correspondiente principalmente oscila. De este modo, cuanto mayor es el número de frecuencias observadas, más rica y precisa la información que pueda extraerse mediante las técnicas astrosismológicas (ver Córscico (2003)). Cabe destacar que el principal observable de la Astrosismología, las frecuencias de oscilación, son las cantidades que pueden medirse con mayor precisión para una estrella, con lo cual su estudio resulta muy viable.

Tanto las enanas blancas como las pre-enanas blancas pulsan con modos g no-radiales. En las primeras, solemos encontrar períodos entre 100 y 1400 s. En cuanto a las GW Vir, pulsan con períodos que van desde los 300 hasta los 3000 s, aunque las PNNV pueden hacerlo con valores aún mayores, llegando incluso hasta los 6000 s. En el caso de las enanas blancas de masa extremadamente baja (siendo sus siglas en inglés, ELMV), pueden llegar hasta los 6200 s (Córscico, 2014).

A continuación, describiremos algunas herramientas astrosismológicas que actualmente se emplean para sondear el interior de las estrellas pulsantes.

1.5.1 Espaciamento de períodos: determinación de la masa estelar

Como hemos visto anteriormente, de la ecuación (1.2) puede verse que la frecuencia de Brunt-Väisälä es directamente proporcional a la gravedad. Entonces, según la ecuación (1.7), el espaciamento de períodos resulta inversamente proporcional a la gravedad, y así, a la masa estelar. Por este motivo, si se dispone del espaciamento de períodos, es posible inferir la masa de una estrella. En particular, esto es cierto para las GW Vir, puesto que en esos casos tanto los períodos como los espaciamentos de períodos dependen casi exclusivamente de la masa estelar, y en bastante menor medida, de la luminosidad y del grosor de la envoltura exterior rica en He (Althaus et al., 2010; Kawaler & Bradley, 1994).

Para estimar la masa estelar, se procede comparando el espaciamento observado de períodos de la estrella bajo estudio, con el espaciamento asintótico de períodos de una adecuada grilla de modelos estelares. Se procede computando el espaciamento de períodos asintótico, $\Delta\Pi_l^a$, de los modelos para distintos valores de T_{eff} (en nuestro caso, empleamos los modelos de estrellas PG 1159 generados por Althaus et al. (2005) y Miller Bertolami & Althaus (2006), correspondientes a secuencias evolutivas de masas estelares diferentes. De la espectroscopía, se dispone de un valor para la T_{eff} de la estrella objetivo. Al combinar ese parámetro (con sus errores), junto con el valor previamente determinado para el espaciamento de períodos observado (con sus errores) en una gráfica $\Delta\Pi_l^a$ vs T_{eff} , tenemos un rango de valores que yace cerca de las curvas de los modelos. Realizando una simple interpolación lineal, se puede finalmente, obtener el valor de la masa.

Esta estimación es de muy bajo costo computacional, ya que no involucra cálculos de pulsación. Sin embargo, no hay que perder de vista el hecho de que esta derivación que emplea el espaciamento asintótico de períodos, puede no ser muy realista, si tenemos en cuenta que las PG 1159 pulsán con modos caracterizados por órdenes radiales bajos e intermedios. Este defecto del método se debe, en parte, a lo expuesto anteriormente: las predicciones de la teoría asintótica de pulsaciones estelares de modos g son formalmente válidas en el límite de muy altos órdenes (períodos muy largos), y para estrellas químicamente homogéneas, cuando en realidad las estrellas PG 1159 no pulsán con períodos tan largos ni son, probablemente, químicamente estratificadas. Por lo tanto, este método puede conducir a sobreestimaciones de la masa estelar (excepto para estrellas que pulsán en muy altos órdenes radiales, como las PNNV) (Althaus et al., 2008).

Por otro lado, disponemos de un método alternativo para inferir la masa de las estrellas PG 1159, que se basa en la comparación del espaciamiento de períodos observado con el promedio de los espaciamientos de períodos $\overline{\Delta P}$ calculado para cada modelo. Mientras el promedio sea evaluado sobre un rango adecuado de períodos, este abordaje resulta apropiado para regímenes de períodos cortos, intermedios y largos. Más adelante, daremos más detalles sobre cómo se calcula dicho promedio, pero es importante mencionar que este método requiere cálculos detallados de períodos de oscilación, a diferencia del enfoque anterior. Por otra parte, la estimación de la masa también se realiza a través de una simple interpolación lineal, análoga a la previamente descrita. Se debe destacar que este método resulta mucho más realista que el anterior (Althaus et al., 2010).

Es importante notar que ambas aproximaciones para estimar la masa de las estrellas PG 1159 dependen fuertemente del valor de la temperatura efectiva de la estrella, y por lo tanto los resultados son inevitablemente afectados por los errores asociados a la determinación de la T_{eff} (Althaus et al., 2010).

1.5.2 *Ajuste de períodos: modelos astrosismológicos*

Este método consiste en la búsqueda de modelos estelares cuyos períodos de oscilación sean lo más próximos posible a los períodos individuales observados en la estrella objetivo. Esto se lleva a cabo mediante el cálculo de una función de calidad, que como veremos luego, no es más que la desviación estándar entre los períodos de pulsación teóricos de los modelos y los individuales observados. A veces es posible encontrar un único mínimo de dicha función lo que implicaría la existencia de una única solución astrosismológica, tal es el caso de los estudios astrosismológicos sobre PG 1159 realizados por Córscico et al. (2007a,b, 2008, 2009). Sin embargo, otras veces sucede que la función posee múltiples mínimos locales, lo cual lleva a la necesidad de emplear restricciones externas al método, como ser, el rango de valores espectroscópicos permitidos para la T_{eff} . Lo relevante de esta técnica, es que permite estimar valores teóricos adicionales a la masa, como ser luminosidad, radio, gravedad, entre otros.

1.5.3 *Efectos producidos por la rotación*

Cuando en secciones precedentes analizamos las pulsaciones, supusimos la ausencia de agentes físicos capaces de remover la simetría esférica, como la rotación o un campo magnético. De esa manera, las autofrecuencias $\sigma_{k\ell m}$ resultaban $(2\ell+1)$ veces degeneradas en m . En

presencia de rotación, entonces, ya no se tiene un eje de simetría preferencial para las oscilaciones. Si la rotación es lenta, como parece ser el caso de la mayor parte de las enanas blancas, tenemos que la velocidad angular de rotación, Ω , resulta $\Omega \ll \sigma_{k\ell m}$. En este caso, podemos aplicar la teoría de perturbaciones a primer orden, para obtener en consecuencia que la rotación remueve por completo la degeneración, y de ese modo, cada frecuencia es dividida en $(2\ell+1)$ componentes equiespaciadas. Cada componente del multiplete viene dada por:

$$\sigma_{k\ell m}(\Omega) = \sigma_{k\ell}(\Omega = 0) + \delta\sigma_{k\ell m}. \quad (1.12)$$

Si asumimos que la rotación es rígida ($\Omega = \text{cte.}$), se puede expresar la corrección a las autofrecuencias como:

$$\delta\sigma_{k\ell m} = -m\Omega(1 - C_{k\ell}), \quad (1.13)$$

donde $m = 0, \pm 1, \dots, \pm \ell$ y $C_{k\ell}$ son coeficientes que dependen de los detalles de la estructura estelar y sus autofunciones son obtenidas del caso sin rotación. Estos coeficientes vienen dados por (Cowling & Newing, 1949; Ledoux, 1951):

$$C_{k\ell} = \frac{\int_0^{R^*} \rho r^2 [2\xi_r \xi_t + \xi_t^2] dr}{\int_0^{R^*} \rho r^2 [\xi_r^2 + \ell(\ell+1)\xi_t^2] dr}, \quad (1.14)$$

donde ξ_r y ξ_t son las autofrecuencias radial y tangencial, respectivamente. Notemos que, en el caso de modos p, si k aumenta, entonces $\xi_r \gg \xi_t$, y así, $C_{k\ell} \rightarrow 0$. A su vez, en el caso en que fueran modos g, cuando k aumenta, entonces $\xi_r \ll \xi_t$ de tal forma que $C_{k\ell} \rightarrow 1/\ell(\ell+1)$ (Althaus et al., 2010).

1.6 MOTIVACIÓN DE ESTA TESIS

Por lo expuesto previamente, el estudio de las estrellas PG 1159 es clave para comprender la física de los procesos que, luego de que las estrellas salen de la AGB, conducen a la formación de enanas blancas carentes de H. Además, resultan particularmente importantes para inferir propiedades fundamentales acerca de estrellas pre enanas blancas en general, tales como la masa estelar y la estratificación química superficial (Córscico & Althaus, 2006).

Actualmente se conocen más de 40 estrellas PG 1159, de las cuales 19 resultan ser pulsantes. Estas estrellas, las GW Vir, presentan variaciones multiperiódicas de brillo producidas por modos g de bajo orden armónico ($\ell \leq 2$) y altos órdenes radiales ($k \geq 18$) con períodos en el rango de los 300 a 3000 s. De estos 19 miembros que hasta ahora se conocen, al menos 5 (RX J2117.1+3412, PG 1159-035, PG 1707+427, PG 2131+066 y PG 0122+200) han sido observados en forma intensiva por el arreglo internacional de telescopios *Whole Earth Telescope*

(WET), por lo cual constituyen objetivos muy interesantes para la Astrosismología. Se puede visualizar en la figura 1.6 la localización de las diferentes familias de pre-enanas blancas y enanas blancas observadas hasta el momento. Hemos incluido a la SDSS J0349-0059, la estrella a estudiar en esta Tesis, con los datos extraídos de Woudt et al. (2012).

En el plano teórico, se ha hecho un gran progreso en los modelos numéricos de las PG 1159. Éstos han sido generados por Althaus et al. (2005) y Miller Bertolami & Althaus (2006), considerando la historia evolutiva previa completa de las estrellas progenitoras. Específicamente, se ha simulado la evolución completa de secuencias estelares con masas iniciales sobre la ZAMS en el rango de 1 a $3.75 M_{\odot}$. Todas las secuencias post-AGB fueron computadas usando el código evolutivo LP-CODE (Althaus et al., 2005, 2003) y fueron seguidas a través del VLTP y el episodio resultante de “born-again”, que da lugar a la composición química deficiente en H y rica en He, C y O característicos de las PG 1159. Las masas de los remanentes resultantes son 0.530, 0.542, 0.565, 0.589, 0.609, 0.664, y $0.741 M_{\odot}$. Es importante destacar que este es el único conjunto de secuencias evolutivas que cubre un amplio rango de masas, razón por la cual son modelos particularmente apropiados para Astrosismología. Estos progresos prepararon el terreno para realizar inferencias astrosismológicas sin precedentes (Córscico et al., 2007a,b, 2008, 2009). En dichos trabajos, se han empleado diferentes métodos astrosismológicos, como los que hemos indicado en la sección anterior, para inferir la masa estelar de las GW Vir, y que son los que utilizamos en el presente trabajo para el caso particular que lo motiva. Cabe destacar, respecto del método de ajuste de períodos, que es de una calidad sin precedentes, y más aún, tiene la virtud de que en el mismo no se realiza ningún ajuste artificial de los valores de parámetros estructurales tales como el espesor de la envoltura externa, las abundancias químicas superficiales, o la forma del perfil químico del núcleo (a diferencia del resto de los trabajos realizados en esta área), y en su lugar, éstos son mantenidos fijos de acuerdo a las predicciones de los cálculos evolutivos. También, por primera vez, el mismo conjunto (“set”) de secuencias evolutivas es usado para las derivaciones espectroscópicas y astrosismológicas de la masa estelar. Este remarcable refinamiento (comparado con trabajos previos) resulta en un mejor acuerdo entre las masas astrosismológicas y las espectroscópicas de las estrellas GW Vir.

El objetivo del presente trabajo es, en base a lo presentado en esta sección, la aplicación de las técnicas astrosismológicas a la estrella variable SDSS J0349-0059, con el fin de conocer su estado evolutivo y su estructura interna. Empleamos los datos de las observaciones fotométricas realizadas en los años 2007 y 2009 presentes en el trabajo de Woudt et al. (2012), quienes han podido determinar con detalle

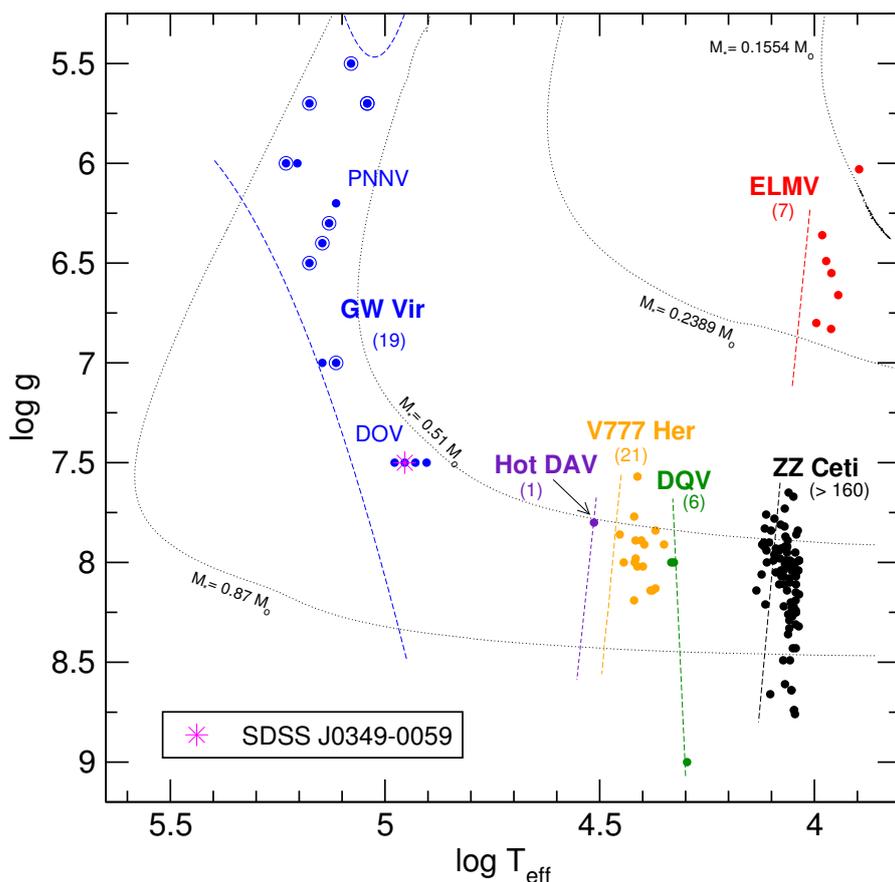


Figura 1.6: Localización de las diferentes clases de pre enanas blancas y enanas blancas pulsantes en el plano $\log(T_{\text{eff}}) - \log(g)$, indicadas con puntos de distintos colores. Se muestra a la estrella bajo estudio, la SDSS J0349-0059. Entre paréntesis, se indica el número de miembros conocidos hasta el momento, de cada clase. Se incluyen cuatro caminos evolutivos de modelos, como referencia. Se muestran los bordes azules teóricos de las diferentes bandas de inestabilidad, con líneas de trazos. Los círculos rodeando puntos azules indican que se trata de PG 1159, con presencia de nebulosa planetaria (PNNV). (Adaptado de Córscico (2014)).

los períodos de pulsación, los cuales están en el rango entre 300 y 1000 s, con amplitudes entre 3.5 y 18.6 mmag (milimagnitudes). En dicho trabajo se incluye un análisis pulsacional preliminar, basado en el espaciamiento de períodos. Debido al número considerablemente alto de períodos independientes que la estrella exhibe, resulta muy interesante realizar un estudio astrosismológico completo, incluyendo la determinación de su masa estelar y la obtención de un modelo sismológico único así como también el estudio de la rotación de la estrella, que es evidenciada por la presencia de un desdoblamiento de la frecuencia principal de oscilación, más conocido como *splitting rotacional*.

HERRAMIENTAS NUMÉRICAS

A continuación, expondremos muy brevemente los códigos con los cuales se generaron tanto las secuencias evolutivas previamente mencionadas así como los cálculos pulsacionales, cuyos resultados fueron empleados para esta Tesis.

Por un lado se trata de un código evolutivo, LP-CODE, desarrollado completamente en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas. Para una descripción completa y actualizada del mismo, remitirse a Althaus et al. (2003) y Althaus et al. (2005). En particular, fue aplicado por Miller Bertolami, para su Tesis Doctoral (Miller Bertolami, 2009). En cuanto al código de pulsaciones, la versión actualizada del código LP-PUL también fue desarrollado en la Facultad (Córscico & Althaus (2006) y referencias allí presentes). Ambos fueron y son ampliamente utilizados para el desarrollo de un gran número de Tesis de Licenciatura y Doctorales (como por ejemplo, las Tesis Doctorales de Córscico (2003) y Romero (2012)), así como también de numerosas publicaciones, como Córscico et al. (2007a,b, 2008, 2009), entre otras.

2.1 CÓDIGO EVOLUTIVO: LP-CODE

Este código está basado en un esquema tipo Henyey para el cálculo de evolución estelar. La implementación se lleva a cabo a través de una linealización implícita del sistema de ecuaciones de estructura y evolución de una configuración con simetría esférica:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_n - \epsilon_\nu - c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -\sum_j \langle v\sigma \rangle_{ij} n_i n_j + \sum_{kl} \langle v\sigma \rangle_{kl} n_k n_l + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D_{\text{mix}} \frac{\partial n_i}{\partial r} \right) \quad (2.5)$$

En estas expresiones: G es la constante de gravitación universal, l la luminosidad, ϵ_n es la energía nuclear liberada por unidad de masa y de tiempo, ϵ_ν la energía liberada por neutrinos por unidad de masa y de tiempo, c_p el calor específico a presión constante por unidad de masa, δ es el coeficiente de expansión térmica tal que: $\delta = -(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T})_P$, ∇ es el gradiente de temperatura definido como: $\nabla = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$. Además, n_i es el número de partículas por unidad de volumen de la especie i , con $i = 1, \dots, I$, donde I representa el número total de especies químicas que se consideran, $\langle \nu \sigma \rangle_{ij}$ representa la tasa de reacciones nucleares por par de partículas entre las especies i y j , y D_{mix} es el coeficiente de difusión que describe el proceso de mezcla.

El sistema algebraico resultante de la linealización es resuelto a través de un método iterativo de Newton-Raphson. La variable independiente es la masa fraccionaria m , que representa la masa interna a un radio r .¹ Además, se emplean ciertos cambios de variables con el fin de lograr estabilidad computacional:

$$\xi = \ln(1 - m/M_*), \quad (2.6)$$

que pasa a ser la variable independiente (M_* es la masa total de la estrella), y:

$$\theta = \ln(T/T_0) \quad (T_0 \equiv 10^6 \text{ K}), \quad (2.7)$$

$$p = \ln(P/P_0) \quad (P_0 \equiv 10^{15} \text{ din cm}^{-2}), \quad (2.8)$$

$$x = \ln(r/r_0) \quad (r_0 \equiv 10^{10} \text{ K}), \quad (2.9)$$

$$\lambda = l/(\Lambda l_0) \quad (l_0 \equiv 10^{33} \text{ erg seg}^{-1}). \quad (2.10)$$

Las variables θ , p , x y λ son dependientes. Las constantes T_0 , P_0 , r_0 , l_0 y Λ son factores de escala. Entre otras características relevantes se puede mencionar que, cuando se trata con materia no-degenerada, se calcula el grado de ionización parcial mediante la Ley de Saha para un gas de H y He. La ecuación de estado que se utiliza es la del gas ideal, teniendo en cuenta los efectos de la presión de radiación. Cuando corresponde considerar materia degenerada, se hace un planteo en términos de integrales de Fermi que por no tener solución analítica, el código emplea desarrollos en serie de potencias adecuados para cada tipo de degeneración. Las especies nucleares consideradas son: H, D, ^3He , ^4He , ^7Li , ^7Be , ^{12}C , ^{13}C , ^{14}N , ^{15}N , ^{16}O , ^{17}O , ^{18}O , ^{19}F y ^{20}Ne . Se considera una red de 30 reacciones nucleares, que incluyen los ciclos PP y CNO para la combustión de H, y en el caso de la combustión de He, se incluyen las reacciones fundamentales que determinan la tasa de liberación de energía durante esa etapa.

¹ En los interiores estelares no es conveniente usar como variable independiente al radio.

2.2 CÓDIGO DE PULSACIONES: LP-PUL

Este código fue desarrollado para estudiar las propiedades pulsacionales en estrellas variables, y en particular, para calcular los modos no-radiales de estrellas con simetría esférica. Ha sido ampliamente utilizado desde su desarrollo, como se puede ver en Córscico et al. (2007a,b, 2008, 2009), entre otros.

Inicialmente ², se orientó en la resolución de las ecuaciones que modelan las oscilaciones adiabáticas. Estos cálculos proveen de suficiente información sobre la estructura mecánica de la estrella, por lo cual los empleamos en el presente trabajo.

Este código está basado en una modificación de la técnica de Newton-Raphson presentada en Kippenhahn et al. (1967) para resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales de oscilaciones no-radiales, lineales y adiabáticas, para estrellas con simetría esférica. Las ecuaciones a resolver son:

$$x \frac{dy_1}{dr} = (V_g - 3)y_1 + \left[\frac{l(l+1)}{C_1 \omega^2} - V_g \right] y_2 + V_g y_3, \quad (2.11)$$

$$x \frac{dy_2}{dr} = (C_1 \omega^2 - A^*)y_1 + (A^* - U + 1)y_2 - A^* y_3, \quad (2.12)$$

$$x \frac{dy_3}{dr} = (1 - U)y_3 + y_4, \quad (2.13)$$

$$x \frac{dy_4}{dr} = UA^* y_1 + UV_g y_2 + [l(l+1) - UV_g]y_3 - Uy_4, \quad (2.14)$$

donde y_1, y_2, y_3 e y_4 son autofunciones adimensionales de Dziembowski (1971), dadas por:

$$y_1 = \frac{\xi_r}{r}, \quad (2.15)$$

$$y_2 = \frac{p'}{gr\rho}, \quad (2.16)$$

$$y_3 = \frac{\Phi'}{gr}, \quad (2.17)$$

$$y_4 = \frac{1}{g} \frac{d\Phi'}{dr}, \quad (2.18)$$

en tanto que V_g, U, A^*, ω y C_1 valen:

$$V_g = \frac{gr}{c^2}, \quad (2.19)$$

² Más tarde el código fue ampliado al caso no adiabático, para el estudio de la estabilidad vibracional (Córscico et al., 2006).

$$U = \frac{4\pi\rho r^3}{M_r}, \quad (2.20)$$

$$A^* = \frac{r}{g} N^2, \quad (2.21)$$

$$\omega^2 = \frac{R_*^3}{GM_*} \sigma^2, \quad (2.22)$$

$$C_1 = \left(\frac{r}{R}\right)^3 \left(\frac{M_*}{M_r}\right), \quad (2.23)$$

Empleando condiciones de contorno adecuadas para resolver este sistema lineal de ecuaciones, de cuarto orden, se puede hallar la solución mediante la implementación de un método numérico. En este caso, se utiliza el método de diferencias finitas, que se lleva a cabo dividiendo el modelo de equilibrio en un número finito de capas concéntricas. Se comienza con una solución aproximada y se va mejorando de forma iterativa.

Finalmente, el código de pulsaciones calcula, para cada modo, las autofunciones y_i ($i = 1, \dots, 4$) y la frecuencia adimensional ω_k , siendo k el orden radial del modo. Luego, calcula cantidades fundamentales para el estudio de las pulsaciones como los períodos de pulsación P_k , los coeficientes de splitting rotacional C_k , entre otras.

ANÁLISIS DE LA ESTRELLA VARIABLE SDSS J0349-0059

En este capítulo presentaremos los datos y métodos empleados en el análisis de la estrella variable SDSS J0349-0059, extraídos del trabajo de Woudt et al. (2012), para determinar el espaciamiento de períodos observado (necesario para poder inferir la masa estelar, puesto que el espaciamiento depende de ésta, en este tipo de estrellas). Posteriormente, expondremos cómo se emplearon las técnicas para determinar su masa, los resultados obtenidos y las cotas de error de cada una de éstas. Asimismo, presentaremos el modelo sismológico que mejor ajusta, y el análisis del splitting rotacional, con la consecuente estimación del período de rotación de la estrella.

3.1 DETERMINACIÓN DEL ESPACIAMIENTO DE PERÍODOS OBSERVADO

Disponemos de dos conjuntos de observaciones, correspondientes a enero de 2007 y diciembre de 2009. En el primero, tenemos unos trece períodos presentes en la Tabla 3.1, mientras que en el segundo, diez períodos, expresados en la Tabla 3.2. Podemos observar que hay un período repetido (el último); también se evidencia que hay ciertos valores muy próximos en la Tabla 3.1: 416.42, 418.90 y 421.28 s. Esto indica la presencia de un triplete de frecuencias, debido a la rotación de la estrella, que luego nos permitirá estimar el período de rotación¹.

Mediante distintas elecciones de los datos, hallaremos el valor del espaciamiento de períodos involucrado, $\Delta\Pi^o$. Como mencionamos en la Introducción, se espera que en el límite asintótico los períodos de modos g estén equiespaciados, y que ese espaciamiento de períodos dependa de la masa estelar (ver ecuación (1.7)). Si bien las pulsaciones de la estrella pueden no estar estrictamente en el régimen asintótico, es posible de todas maneras tratar de extraer un espaciamiento de períodos en el conjunto de datos, de tal forma de poder usarlo para inferir la masa estelar. Usualmente, estas estrellas exhiben un espaciamiento de períodos correspondientes a modos con $\ell = 1$. Por otra parte, como ya mencionamos, no hay que perder de vista el hecho de que no se suelen ver presentes modos para $\ell \geq 2$, no porque no estén excitados, sino porque sufren efectos de cancelación.

¹ El hecho de que en la Tabla 3.2 no se observen las tres componentes del triplete puede deberse a una orientación geométrica desfavorable de la estrella.

Frecuencia (μHz)	Período (s)	Amplitud (mmag)	Rango
1037.9 ± 0.4	963.48 ± 0.37	3.7 ± 0.9	12
1103.3 ± 0.4	906.37 ± 0.33	3.9 ± 0.9	11
1931.1 ± 0.1	517.84 ± 0.03	11.3 ± 1.0	4
1983.4 ± 0.2	504.18 ± 0.05	6.8 ± 0.9	6
2055.9 ± 0.4	486.40 ± 0.09	4.2 ± 0.9	10
2072.2 ± 0.2	482.58 ± 0.05	6.6 ± 0.9	8
2150.3 ± 0.4	465.05 ± 0.09	3.5 ± 0.9	13
2372.6 ± 0.2	421.48 ± 0.04	6.7 ± 0.9	7
2387.2 ± 0.1	418.90 ± 0.02	18.6 ± 1.1	1
2401.4 ± 0.1	416.42 ± 0.02	15.2 ± 1.0	2
2826.5 ± 0.2	353.79 ± 0.03	7.2 ± 0.9	5
2865.2 ± 0.1	349.02 ± 0.01	12.1 ± 1.0	3
3323.0 ± 0.3	300.93 ± 0.03	5.5 ± 0.9	9

Tabla 3.1: Datos de Woudt et al. (2012), de enero 2007

Frecuencia (μHz)	Período (s)	Amplitud (mmag)	Rango
1097.1 ± 0.1	911.49 ± 0.08	9.1 ± 0.7	4
1468.8 ± 0.3	680.83 ± 0.14	3.6 ± 0.7	8
1779.9 ± 0.3	561.83 ± 0.09	4.0 ± 0.7	7
1935.3 ± 0.4	516.72 ± 0.11	3.3 ± 0.7	10
1955.3 ± 0.3	511.43 ± 0.08	4.2 ± 0.7	6
2383.5 ± 0.4	419.55 ± 0.07	3.4 ± 0.7	9
2385.6 ± 0.1	419.18 ± 0.02	15.2 ± 0.9	1
2425.6 ± 0.2	412.27 ± 0.03	10.0 ± 0.8	2
2864.8 ± 0.1	349.06 ± 0.01	9.6 ± 0.8	3
3323.0 ± 0.3	300.93 ± 0.03	4.3 ± 0.7	5

Tabla 3.2: Datos de Woudt et al. (2012), de diciembre 2009

El primer paso en nuestro análisis consiste en encontrar un espaciamiento de períodos (si existe) en una lista de períodos observados. Para hacer una buena estimación del espaciamiento de períodos, emplearemos tres métodos distintos:

- Kolmogorov-Smirnov
- Varianza Inversa
- Transformada de Fourier

Veamos, brevemente, de qué se trata cada uno de estos métodos.

3.1.1 *Kolmogorov-Smirnov*

Para su empleo, nos basamos en el método presentado por Kawaler (1988). Éste testea la significancia de un espaciamiento de períodos uniforme percibido. Se trabaja por un lado, generando un conjunto grande de números aleatorios en el intervalo $[0,1]$, con distribución uniforme. Por otro lado, con la lista de períodos observados de que se dispone, se genera un conjunto de números que van a estar distribuidos también en $[0,1]$. Esto se lleva a cabo mediante la resta: $r_i(\Delta\Pi) = n_i - \text{int}(n_i)$, donde $\text{int}(x)$ es el mayor número entero menor que x , y $n_i = (\Pi_i - \Pi_s)$. En esta expresión, Π_i es cada uno de los períodos de la lista de períodos observados y Π_s , el período más corto. Si todos los períodos tienen el mismo valor de ℓ , entonces la cantidad $r_i(\Delta\Pi)$ será cero para un valor adecuado de $\Delta\Pi$. Si el valor asumido para $\Delta\Pi$ fuera incorrecto, o si los períodos no pudieran ser representados por la relación asintótica (ecuación (1.7)) entonces, en general, no será cero. Para una distribución aleatoria de períodos, los valores $r_i(\Delta\Pi)$ estarán distribuidos uniformemente entre 0 y 1.

El método de K-S provee una medida de la probabilidad de que cierto conjunto de datos proceda de una dada distribución. En este caso, es usado para determinar la probabilidad de que los $r_i(\Delta\Pi)$ provengan de una distribución uniforme, para un dado $\Delta\Pi$. Se calcula, entonces, la probabilidad de que los números asociados a los períodos observados tengan alguna correlación con la distribución aleatoria generada. Cualquier espaciamiento de períodos presente en los datos (que entonces indicaría que siguen una distribución no aleatoria), va a manifestarse como un mínimo de esa probabilidad.

3.1.2 *Varianza Inversa*

Este test se basa en el método presentado por O'Donoghue (1994). Consiste en ajustar un conjunto de períodos igualmente espaciados a los períodos observados y elegir el espaciamiento de forma tal que la varianza inversa de los residuos del modelo ajustado sea maximizada. Específicamente, disponemos de un conjunto de períodos observados, Π_i , $i=1, \dots, N$. Se construye otro conjunto de períodos, $C(i)$, mediante: $C(i) = \Pi_o + k(i)\Delta\Pi$, donde los $k(i)$ son números enteros, y $\Delta\Pi$ es un espaciamiento de períodos de prueba (será el paso que considere para la generación del conjunto). En la práctica, hemos elegido Π_o como el período más corto. A continuación, se pueden determinar los valores de los $k(i)$ que minimicen la diferencia entre $C(i)$ y Π_i . Luego, se recalcula el valor de Π_o para mejorarlo, mediante: $\Pi_o = \Sigma_i[\Pi_i -$

$k(i)\Delta\Pi]/N$. Ahora que se tienen todos los parámetros del modelo, pueden obtenerse los residuos a partir de: $R(i) = [\Pi_i - C(i)]/\Delta\Pi$. Por último, se calcula la varianza de los N residuos y se grafica su inversa, para un rango adecuado de $\Delta\Pi$.

3.1.3 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier se utiliza para pasar al dominio de la frecuencia de una señal, para poder así obtener información que no resulta evidente en el dominio temporal. En una lista de períodos observados, a los cuales les vamos a atribuir altura 1 en un gráfico $g(t)$ vs t , se analiza si subyace algún tipo de periodicidad, ya que, como dijimos, buscamos un $\Delta\Pi$. Procedemos construyendo la función conocida *Delta Comb*, que es una distribución construida a partir de funciones de tipo *delta de Dirac*. Cada delta estará ubicada en el período dato y tendrá altura 1 (amplitud). El resto de los puntos tendrán amplitud nula. Notar que, debido a esta construcción, no están equiespaciadas las deltas. Una vez armada, se calcula la transformada de Fourier, pasando del dominio de períodos (en segundos) a frecuencia (inversa de segundos). Como en el gráfico obtenido no es fácil distinguir espaciamiento alguno, se grafica la potencia, como la amplitud al cuadrado contra la inversa de la frecuencia. Si hay un espaciamiento $\Delta\Pi$ oculto, ahora sí será visible en forma de pico (así como los picos presentes en los gráficos de los otros dos métodos).

3.1.4 Resultados

Luego de realizar una numerosa cantidad de pruebas con distintos conjuntos de datos elegidos, y de analizar las gráficas, se puede ver cómo se modifican las curvas, quedando mejor o peor definidos los picos a medida que se incorporan o quitan uno o más períodos. Con las pruebas llevadas a cabo, como quedará evidenciado en las siguientes figuras realizadas empleando los tres métodos, parecen haber dos conjuntos de datos distintos que representan tres espaciamientos diferentes: uno principal, más pronunciado y bien definido, y uno secundario, no tan definido, ambos emergentes de los datos presentes en la Tabla 3.3. A su vez, podemos ver otro pico, que en cambio está bien representado por los datos que figuran en la Tabla 3.4, que son valores que dejamos excluidos de la anterior muestra.

Con el primer test, si bien no resulta tan fácil distinguir los picos, se pueden visualizar, como se muestra en las figuras 3.1. En particular, y para ejemplificar las pruebas de conjuntos que se realizan, vemos en la figura 3.1a los 22 períodos originales (es decir, todos los datos). Aquí, se puede distinguir el pico principal cerca de los 23.49 s, así

Período [s]	Amplitud [mmag]
963.48 ± 0.37	3.7 ± 0.9
911.49 ± 0.08	9.1 ± 0.7
906.37 ± 0.33	3.9 ± 0.9
680.83 ± 0.14	3.6 ± 0.7
561.83 ± 0.09	4.0 ± 0.7
511.43 ± 0.08	4.2 ± 0.7
486.40 ± 0.09	4.2 ± 0.9
465.05 ± 0.09	3.5 ± 0.9
421.48 ± 0.04	6.7 ± 0.9
419.18 ± 0.02	15.2 ± 0.9
418.90 ± 0.02	18.6 ± 1.1
416.42 ± 0.02	15.2 ± 1.0
349.06 ± 0.01	9.6 ± 0.8
349.02 ± 0.01	12.1 ± 1.0
300.93 ± 0.03	4.3 ± 0.7

Tabla 3.3: Datos combinados del 2007 y 2009, 15 períodos.

Período [s]	Amplitud [mmag]
517.84 ± 0.03	11.3 ± 1.0
516.72 ± 0.11	3.3 ± 0.7
504.18 ± 0.05	6.8 ± 0.9
482.17 ± 0.05	6.6 ± 0.9
412.27 ± 0.03	10.0 ± 0.8
353.79 ± 0.03	7.2 ± 0.9

Tabla 3.4: Datos excluidos del conjunto principal, 6 períodos.

como también el pico secundario que mencionamos, en ~ 16.5 s, aunque éste no es de los más intensos. Cuando graficamos sólo los 10 datos de 2009, no se llegan a definir mejor, como en la figura 3.1b. Si restringimos la muestra, según la Tabla 3.3, tampoco mejora mucho la visualización, como podemos ver en la figura 3.1c, aunque parece haber un pico principal alrededor de los 23.5 s, y uno secundario, en ~ 16.5 s.

Analizando los mismos casos, para el test de Varianza Inversa, resultan mucho más evidentes tanto el pico de ~ 23.49 s como el de

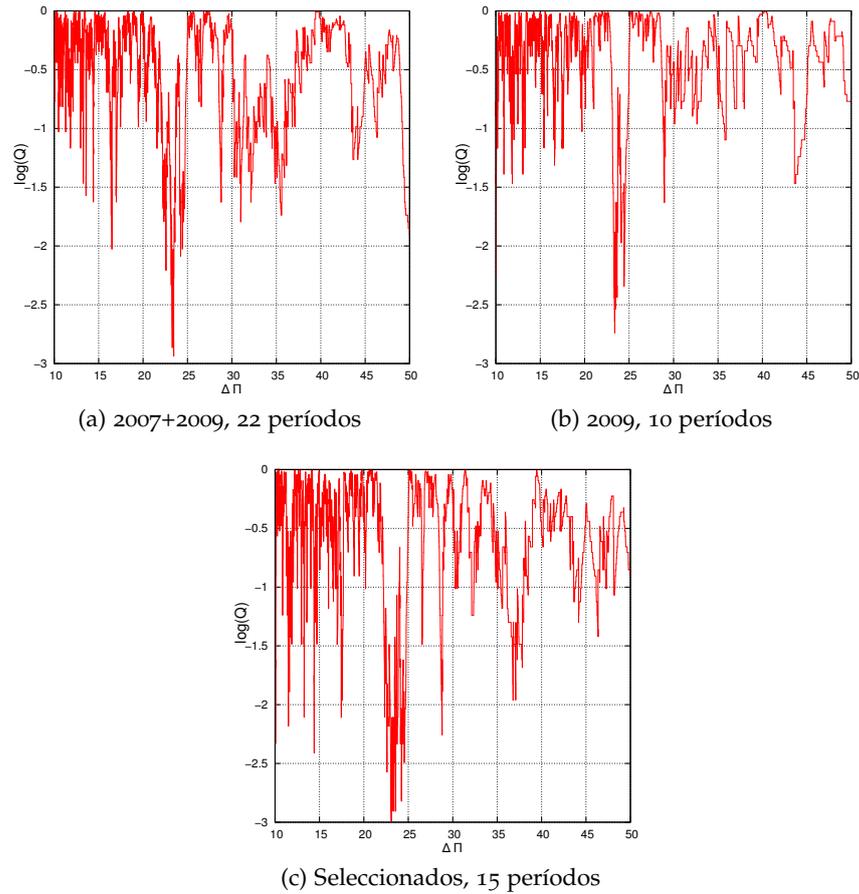


Figura 3.1: Test de Kolmogorov-Smirnov.

~ 16.5 s, según se ve en las figuras 3.2. Podemos notar cuánto mejor quedan definidos los picos (en comparación con el K-S), tanto en el caso de la lista completa de períodos, en 3.2a como en el caso de los datos seleccionados de Tabla 3.3, en 3.2c. No hay que perder de vista que el pico secundario queda mucho más evidenciado empleando el conjunto de datos completo (ver 3.2a). Cabe mencionar que en los datos de 2009 el pico principal se encuentra en un valor algo mayor a 23.49 (figura 3.2b), y que se distingue fácilmente el que está cerca de los 16.5 s.

En cuanto al método que emplea la transformada de Fourier, obtenemos las gráficas 3.3. Nuevamente, se evidencia la presencia de ambos espaciamientos de períodos de ~ 23.49 s y de ~ 16.5 s, como se puede apreciar con más detalle en las figuras 3.3a y 3.3c, aunque quizás el método es un poco menos definitivo que el de la Varianza Inversa. Cabe destacar que el pico de ~ 16.5 s también se manifiesta para los datos de 2009 (figura 3.3b).

Podemos ver de los resultados de los tres métodos, la importante presencia del pico en ~ 23.49 s, que se manifiesta tanto para el

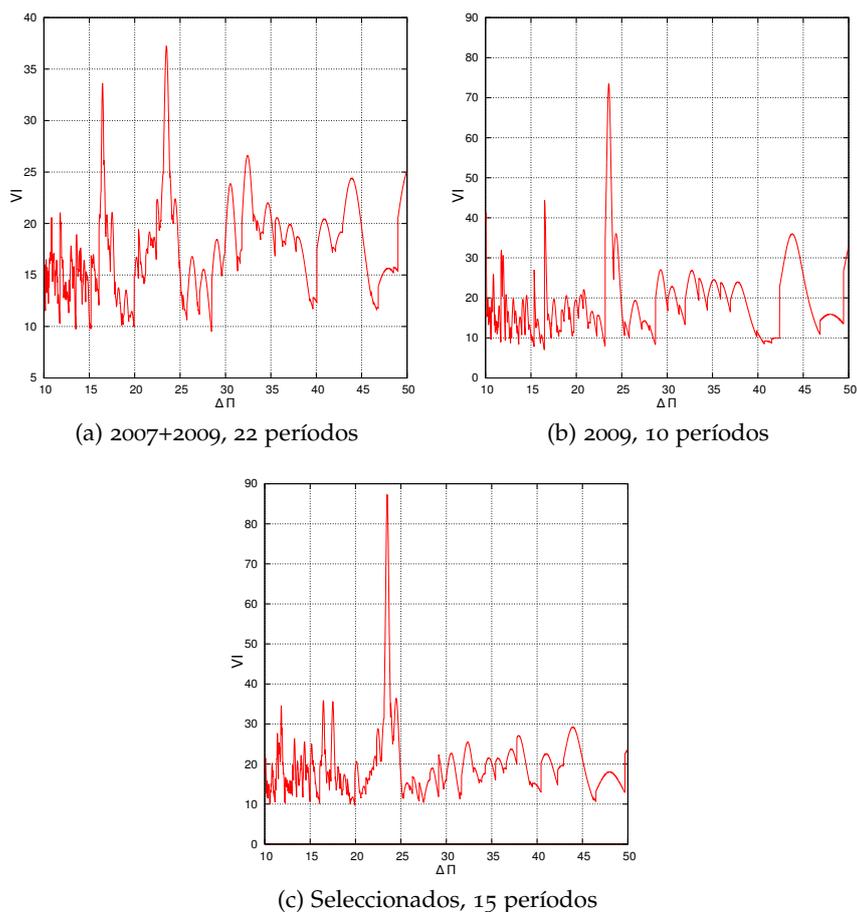


Figura 3.2: Test de Varianza Inversa (VI).

conjunto de 22 datos de 2007 y 2009, como para los 15 períodos elegidos de ambos conjuntos. Además, en todos los casos se observa el pico menos relevante en ~ 16.5 s. A partir de lo observado, se concluye una fuerte evidencia de un espaciamiento constante de períodos $\Delta\Pi \approx 23.49$ s. Se puede apreciar además que resulta más evidente aún a través del método de Varianza Inversa, con lo cual concluimos que parece ser el procedimiento más conveniente para estimar el espaciamiento de períodos observado.

Por otra parte, es interesante notar que el conjunto de valores que quedó exceptuado de la muestra anterior (presentes en la Tabla 3.4) da lugar a un espaciamiento $\Delta\Pi \approx 11.6$ s. Esto se puede ver en las figuras 3.4; en particular, resulta más evidente en las figuras 3.4b y 3.4c.

Resulta importante notar que los espaciamientos $\Delta\Pi \approx 16.5$ s y $\Delta\Pi \approx 11.6$ s, no pueden tratarse de modos con $\ell = 2$. Esto resulta evidente del siguiente argumento: según lo mencionado anteriormente, para modos g con ℓ fijo, y para alto orden radial k (Tassoul, 1980):

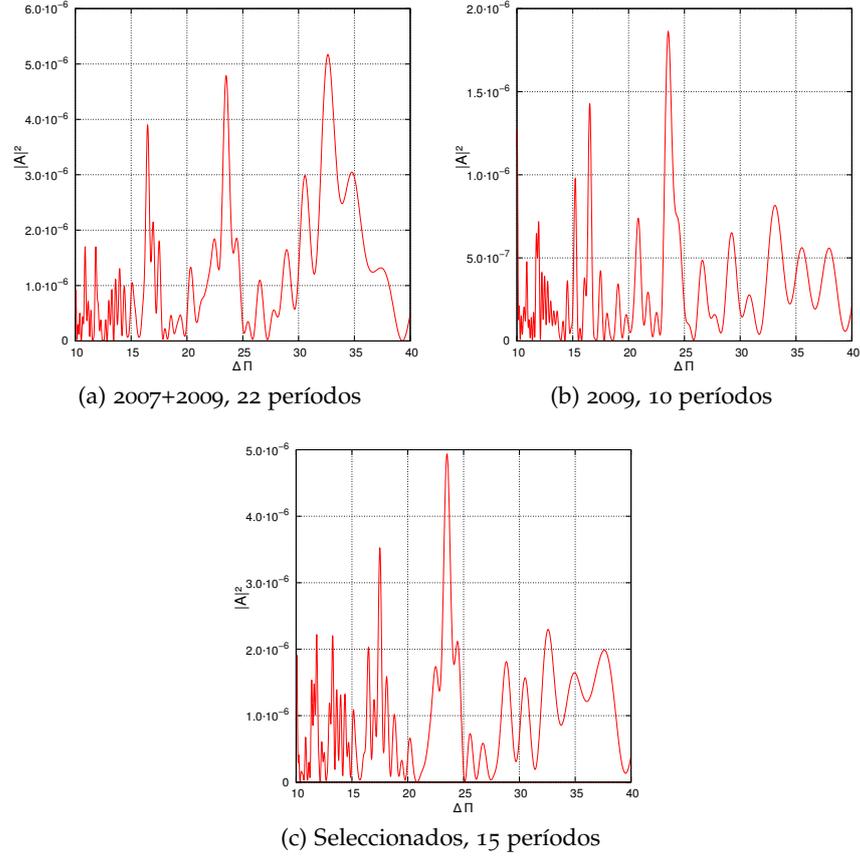


Figura 3.3: Test de Transformada de Fourier.

$$\Delta\Pi_\ell^a = \Pi_{k+1,\ell} - \Pi_{k,\ell} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1} \quad (3.1)$$

entonces, si $\ell = 1$, se obtiene:

$$\Delta\Pi_{\ell=1}^a = \frac{2\pi^2}{\sqrt{2}} \left[\int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1} \quad (3.2)$$

y para $\ell = 2$:

$$\Delta\Pi_{\ell=2}^a = \frac{2\pi^2}{\sqrt{2 \times 3}} \left[\int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1} \quad (3.3)$$

y así:

$$\Delta\Pi_{\ell=2}^a = \frac{\Delta\Pi_{\ell=1}^a}{\sqrt{3}} \quad (3.4)$$

con lo cual, esperaríamos que si el espaciamento correspondiente a $\ell = 1$ vale $\Delta\Pi_{\ell=1}^a \simeq 23.49$ s, entonces el correspondiente a $\ell = 2$

debería valer $\Delta\Pi_{\ell=2}^a \simeq 13.6$ s en contraste con los valores observados de $\Delta\Pi_{\ell=2}^a \simeq 16.5$ s y $\Delta\Pi_{\ell=2}^a \simeq 11.6$ s.

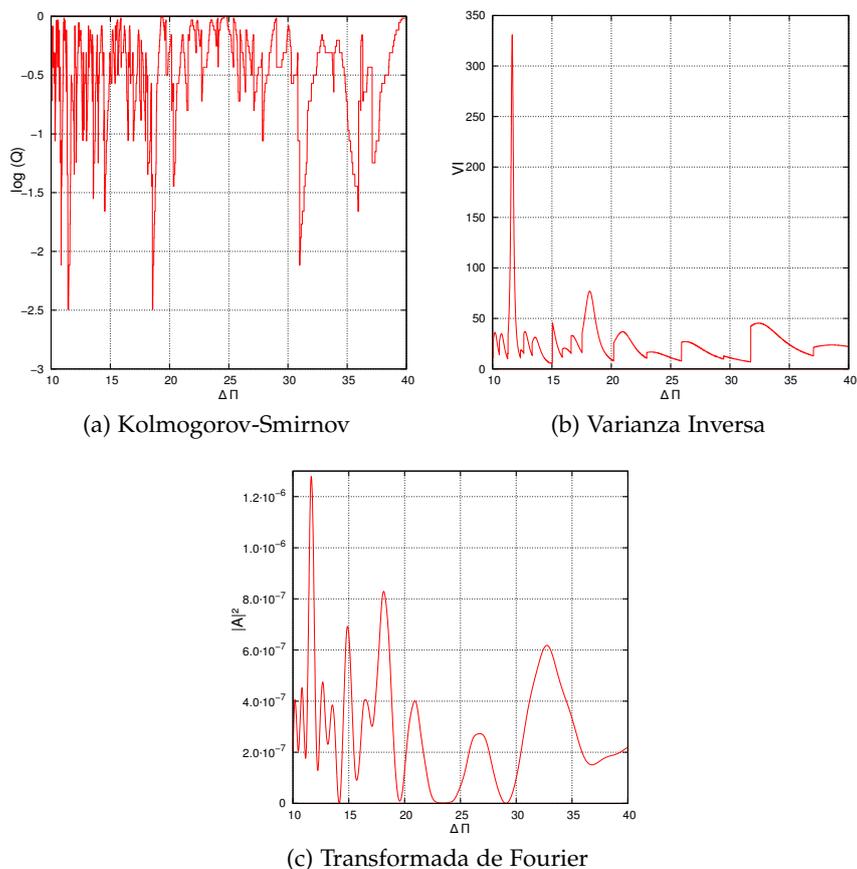


Figura 3.4: Análisis de los 6 períodos exceptuados del principal.

Más adelante en este trabajo, veremos que, aún si ignorásemos estos indicios de que ninguno de los dos espaciamentos corresponden a tal grado armónico, y buscáramos el valor de masa correspondiente a cada caso, obtendríamos masas muy diferentes a la físicamente esperable.

Una vez adoptado como valor $\Delta\Pi = 23.49$ s, proveniente de la lista de la Tabla 3.3, le asignamos a cada uno de esos 15 períodos, un valor de referencia, n , para a continuación hacer un ajuste lineal del tipo: $\Pi = n\Delta\Pi + C$ por mínimos cuadrados. Así, C sería 300.93 s, que es el período más corto de la lista. Si a ese “primer período”, se le asigna $n = 1$, al siguiente de la lista, 349.06 s le corresponderá un determinado valor de n , calculado a partir de esa expresión. De este modo, se arma una tabla que luego se ajusta, encontrando el valor de $\Delta\Pi$ que en adelante se emplea, con un error dado por el mismo método de ajuste. Haciendo uso de un sencillo programa que ajuste

los datos de la tabla, se obtiene un valor para el espaciamiento de períodos observado, correspondiente al grado armónico $\ell = 1$:

$$\Delta\Pi_{\ell=1}^o = 23.4904 \pm 0.07741 \text{ s.} \quad (3.5)$$

3.2 DETERMINACIÓN DE LA MASA

En esta sección, nos abocamos a restringir el valor de la masa de la estrella variable SDSS J0349-0059, a través de tres métodos diferentes, basados en los conceptos expuestos en la sección 1.5. Además, calculamos el valor de la masa espectroscópica, a fin de poder comparar con los valores obtenidos mediante las técnicas astrosismológicas.

Para estos cuatro métodos, y como ya hemos mencionado, se utiliza el conjunto de modelos resultantes de la simulación de la evolución completa de estrellas deficientes en H representativas de la clase espectral de la estrella bajo estudio, PG 1159. Cabe recordar que el rango de masas iniciales sobre la ZAMS es de 1 a $3.75 M_{\odot}$ con las secuencias post-AGB computadas mediante el código evolutivo LP-CODE (Althaus et al., 2005, 2003). Los espectros de períodos de modos g no-radiales con grados armónicos $\ell = 1$ y $m = 0$ ², fueron calculados con la versión adiabática del código de pulsaciones LP-PUL (Córscico & Althaus, 2006). Las masas empleadas son: 0.530, 0.542, 0.565, 0.589, 0.609, 0.664, $0.741 M_{\odot}$.

3.2.1 Masa espectroscópica

Estimamos la masa espectroscópica, representando en un mismo gráfico $\log(g)$ vs $\log(T_{\text{eff}})$, los modelos junto con los parámetros: $T_{\text{eff}} = 90.0 \pm 0.9$ kK y $\log(g) = 7.5 \pm 0.01$ (cgs), de que se disponen para la estrella de estudio, extraídos de Woudt et al. (2012). Podemos ver en la figura 3.5, que la estrella SDSS J0349-0059 está ubicada luego de lo que se conoce como “codo evolutivo”. Al graficar con más detalle, apreciamos que la “caja de error” yace cerca de los modelos de $M_{*} = 0.530 M_{\odot}$, $M_{*} = 0.542 M_{\odot}$ y $M_{*} = 0.565 M_{\odot}$, como podemos ver con mayor precisión, en la figura 3.6. Procedemos calculando el valor de M_{*} interpolando linealmente usando los puntos $(M_{*}, \log(g))$ para los modelos y se obtiene $M_{*} = 0.543 M_{\odot}$. En cuanto a los errores, obtenemos el valor de $M_{\text{máx}}$ (representado por el vértice inferior izquierdo de la caja), y el $M_{\text{mín}}$ (representado por el vértice superior

² Si bien puede parecer una inconsistencia el hecho de emplear un valor de espaciamiento de períodos determinado empleando una lista donde están presentes las componentes del triplete, con el hecho de usar $m=0$, este problema no existe puesto que cuando se probó extrayendo esos dos valores de períodos, se obtuvo el mismo resultado para el espaciamiento.

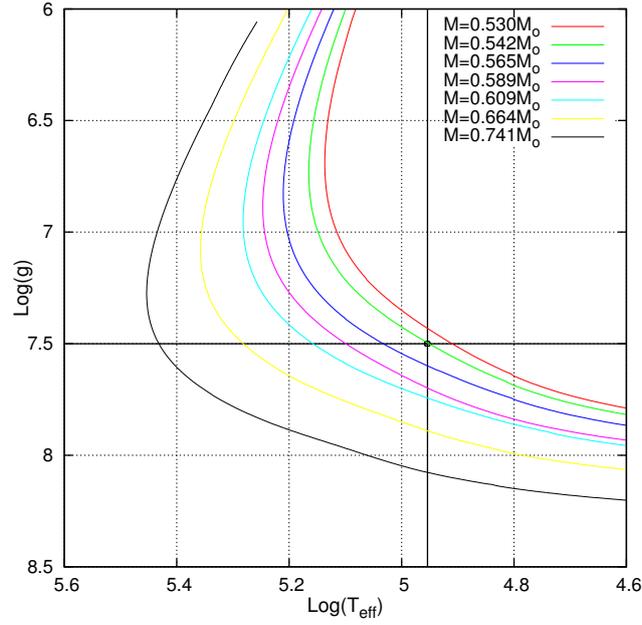


Figura 3.5: Las curvas son los modelos, y la variable SDSS J0349-0059 está representada por la intersección de las rectas.

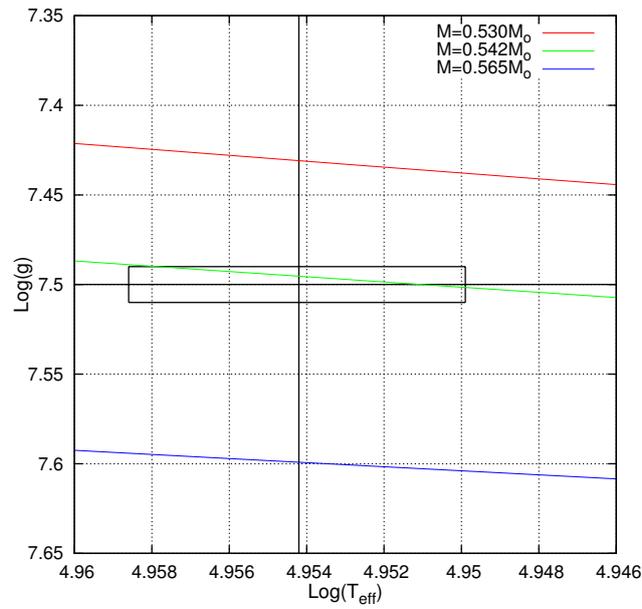


Figura 3.6: Modelos, “caja de error” y SDSS J0349-0059, representada por la intersección de las rectas.

derecho de la caja) mediante una interpolación análoga a la precedente. Obtenemos: $M_{\text{máx}} = 0.547 M_{\odot}$ y $M_{\text{mín}} = 0.539 M_{\odot}$, con lo cual el valor de la masa con el error resulta:

$$M_{\star} = 0.543 \pm 0.004 M_{\odot} \quad (3.6)$$

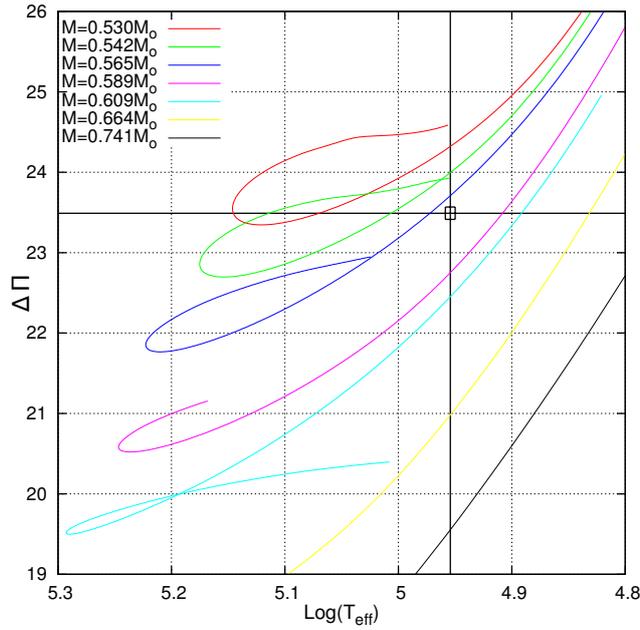


Figura 3.7: Espaciamiento asintótico de períodos para los modelos, junto con el espaciamento de períodos observado para SDSS J0349-0059, contra $\log(T_{\text{eff}})$.

3.2.2 Comparación del espaciamento de períodos observado ($\Delta\Pi_{\ell}^o$) con el espaciamento asintótico de períodos ($\Delta\Pi_{\ell}^a$)

Para estimar el valor de la masa mediante este método, graficamos los modelos $\Delta\Pi_{\ell=1}^a$ vs $\log(T_{\text{eff}})$ junto con los parámetros disponibles para la estrella: $T_{\text{eff}} = 90.0 \pm 0.9$ kK y $\Delta\Pi_{\ell=1}^o = 23.4904 \pm 0.07741$ s, como se aprecia en la figura 3.7. A continuación, procedemos de manera análoga al punto anterior: en este caso, la “caja de error” queda confinada a una región entre los modelos con $M_* = 0.565 M_{\odot}$ y $M_* = 0.589 M_{\odot}$, como puede verse en la figura 3.8, de modo que obtendremos el valor de M_* , en el centro de la caja (es decir, para el punto en el que $T_{\text{eff}} = 90.0$ kK y $\Delta\Pi_{\ell=1}^o = 23.4904$ s), interpolando linealmente usando los puntos $(M_*, \Delta\Pi_{\ell=1}^a)$ para ambos modelos.

Los cálculos nos arrojan un valor de $M_* = 0.569 M_{\odot}$. Para estimar el error, obtenemos $M_{\text{máx}}$ representado por el vértice inferior derecho de la caja, y el $M_{\text{mín}}$, representado por el vértice superior izquierdo de la caja, mediante una interpolación análoga a la precedente. Obtenemos: $M_{\text{máx}} = 0.5716 M_{\odot}$ y $M_{\text{mín}} = 0.5669 M_{\odot}$. Así, el valor de la masa con el error pasa a ser:

$$M_* = 0.569^{+0.004}_{-0.002} M_{\odot} \quad (3.7)$$

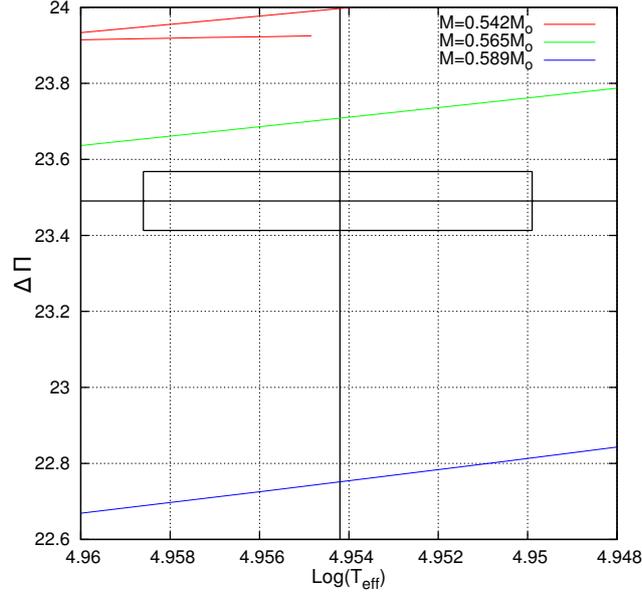


Figura 3.8: Modelos, SDSS J0349-0059 y “caja de error”.

3.2.3 Comparación del espaciamiento de períodos observado ($\Delta\Pi_\ell^o$) con el promedio de los espaciamientos computados ($\overline{\Delta\Pi}_\ell$)

En este caso inferimos la masa comparando el espaciamiento de períodos observado con el promedio de los espaciamientos de períodos calculados para cada modelo. Calculamos el promedio de los espaciamientos de períodos obtenidos según:

$$\overline{\Delta\Pi}_\ell = (N - 1)^{-1} \sum_k \Delta\Pi_k \quad (3.8)$$

donde el $\Delta\Pi_k$ está dado por:

$$\Delta\Pi_k = \Delta\Pi_{k+1} - \Delta\Pi_k \quad (3.9)$$

donde, recordemos, k representa el orden radial y N , el número de períodos computados que caen en el rango de los períodos observados. En nuestro caso, $\Delta\Pi_k \in [300, 970]$ s, de acuerdo con la Tabla 3.3. Empleamos programas que, para un valor de ℓ fijo, calculan un $\overline{\Delta\Pi}_\ell$ para esos períodos, para un rango de T_{eff} (un cambio en la T_{eff} cambia la estructura interna, lo que cambia el espaciamiento, logrando que tenga una mayor o menor cantidad de modos). Realizamos este cálculo para cada una de las masas de los modelos mencionados, tanto para $\ell = 1$ como para $\ell = 2$, aunque por lo visto previamente, el espaciamiento de períodos de 23.4904 s es compatible con $\ell = 1$.

A continuación, graficamos $\overline{\Delta\Pi}_{\ell=1}$ vs $\log(T_{\text{eff}})$ de cada uno de los modelos, como antes, junto con los parámetros para la estrella de

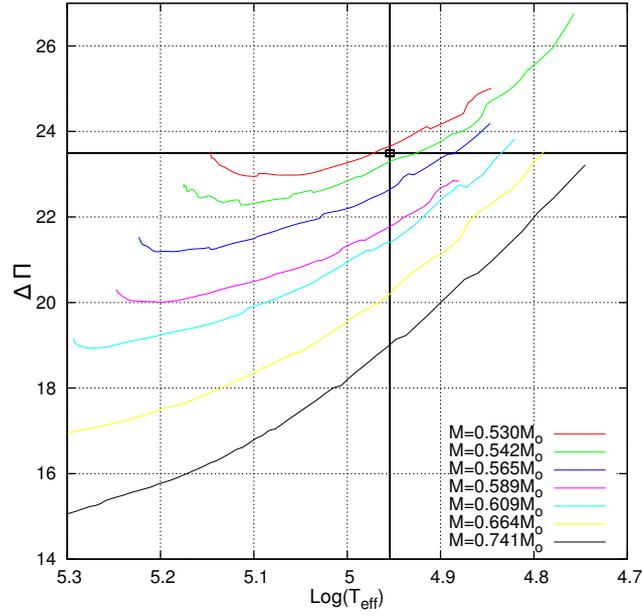


Figura 3.9: Modelos y SDSS J0349-0059 ($\ell = 1, m = 0$)

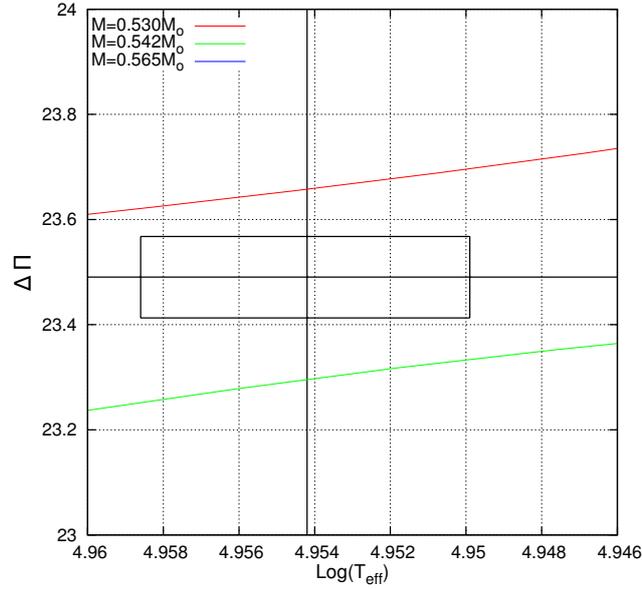


Figura 3.10: Modelos, SDSS J0349-0059 y “caja de error” ($\ell = 1, m = 0$)

estudio, $\Delta\Pi_{\ell=1}^0 = 23.4904 \pm 0.07741$ s y $T_{\text{eff}} = 90.0$ kK. Obtenemos la figura 3.9, donde podemos notar que las curvas no son suaves, en contraste con el caso anterior. Procediendo del mismo modo que antes, obtenemos de la interpolación lineal a partir de los datos de la figura 3.10: $M_* = 0.535 M_{\odot}$, con $M_{\text{máx}} = 0.539 M_{\odot}$ y $M_{\text{mín}} = 0.532 M_{\odot}$, por lo cual, aproximadamente:

$$M_* = 0.535 \pm 0.004 M_{\odot} \tag{3.10}$$

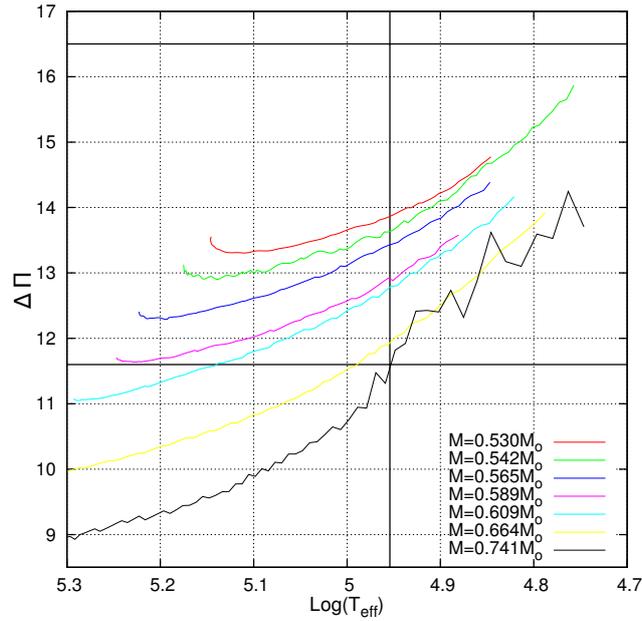


Figura 3.11: Modelos correspondientes a modos $\ell = 2$ ($m = 0$), y lugar que ocuparían los valores $\Delta\Pi = 16.5$ s y $\Delta\Pi = 11.6$ s, para $T_{\text{eff}} = 900$ kK

Esta aproximación es más realista que la anterior, dado que comparar un espaciamento $\Delta\Pi_\ell^o$ extraído de los períodos observados con un $\overline{\Delta\Pi}_\ell$, que es un promedio, es más adecuado porque la estrella no pulsa exactamente en el régimen asintótico.

Si graficamos las curvas obtenidas para los modelos correspondientes al grado armónico $\ell = 2$, como se aprecia en la figura 3.11, vemos en primer lugar, que a valores de espaciamento de períodos más bajos se corresponden valores mayores de masa. En este punto, podemos aclarar la cuestión que mencionamos previamente respecto a los espaciamentos de períodos $\Delta\Pi \approx 16.5$ s y $\Delta\Pi \approx 11.6$ s (recordemos que el primero correspondía a un pico secundario en los datos de la Tabla 3.3, y el segundo, provenía de los períodos que habían sido excluidos de esa Tabla, que están presentes en la Tabla 3.4). En el caso de $\Delta\Pi \approx 16.5$ s, podemos ver que si se adoptara como proveniente de un grado armónico $\ell = 2$, y se observaran (ver figura 3.11) los valores de masa que tendría en el rango de temperatura efectiva dado, le correspondería un valor muy pequeño, mucho menor a $0.530 M_\odot$, en contraste con el dado para la masa espectroscópica ($M_* = 0.543 M_\odot$). En el caso de $\Delta\Pi \approx 11.6$ s, por el contrario, si se adoptara ese valor como proveniente de un grado armónico $\ell = 2$, le correspondería un valor muy grande, cercano a $0.741 M_\odot$, mucho mayor al dado por la masa espectroscópica. En ambos casos, al analizar qué valores de $\log(g)$ tendrían tales masas, en un gráfico $\log(g)$ vs $\log(T_{\text{eff}})$ como el de la figura 3.5, éstos quedarían muy por fuera de los márgenes de error dados para este parámetro.

3.2.4 Ajuste período a período

En esta sección, nos disponemos a buscar un modelo cuyos períodos calculados reproduzcan, lo más cercanamente posible, los períodos observados individuales de la estrella variable SDSS J0349-0059. La calidad del ajuste entre los períodos de pulsación teóricos (Π_k) y los observados (Π_i^o) es medida en términos de una función de calidad definida mediante:

$$\chi^2(M_*, T_{\text{eff}}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \min[(\Pi_i^o - \Pi_k)^2] \quad (3.11)$$

donde n es el número total de períodos observados que se consideran. Notemos que la raíz cuadrada de esta cantidad representa la desviación estándar entre los períodos observados y teóricos. De este modo, el modelo de PG 1159 que muestre el valor más pequeño para χ^2 , será adoptado como el “modelo que mejor ajusta”. Se evalúa la función $\chi^2(M_*, T_{\text{eff}})$ para todos los modelos y se considera un amplio rango de T_{eff} .

Utilizamos un conjunto de datos, que no es exactamente el mismo que empleamos anteriormente.

CONJUNTO DE DATOS Empleamos la Tabla 3.3, pero con una diferencia: necesitamos promediar aquellos valores que son muy cercanos. La proximidad numérica de los valores se debe a que se trata de dos sets distintos de datos (en distintas épocas de observación, con lo cual pueden existir diferencias en la medición de los mismos períodos³. Así, nos queda un conjunto de 10 valores: 300.93, 349.04, 419.04, 465.05, 486.40, 511.43, 561.83, 680.83, 908.93 y 963.48 s. De modo que $n = 10$, en este caso. En cuanto al valor de ℓ , consideramos que $\ell = 1$, puesto que como explicamos más arriba, ese conjunto de datos da lugar al espaciamiento de períodos observado de 23.4904 s, compatible con ese valor del grado armónico.

Implementamos un código para realizar estos cálculos, para cada modelo, y los resultados obtenidos se grafican, generalmente, utilizando la inversa de $\chi^2(M_*, T_{\text{eff}})$ contra la T_{eff} , de modo que en vez de buscar un mínimo, buscaremos un máximo. Como las curvas quedan solapadas, se suele adicionar una cantidad arbitraria a cada una (en este caso, 0.1 unidades) para una mayor claridad visual. Como referencia, incluimos los márgenes de error de T_{eff} . La gráfica resultante se puede apreciar en la figura 3.12.

Podemos ver que, aproximadamente dentro de las barras de error en T_{eff} , queda contenida una solución para la masa de $0.542 M_{\odot}$, como

³ Podría haberse tratado de una mezcla de modos con $\ell = 1$ y $\ell = 2$ con valores muy próximos de sus períodos, sin embargo, no hemos encontrado evidencia de que ese fuera el caso.

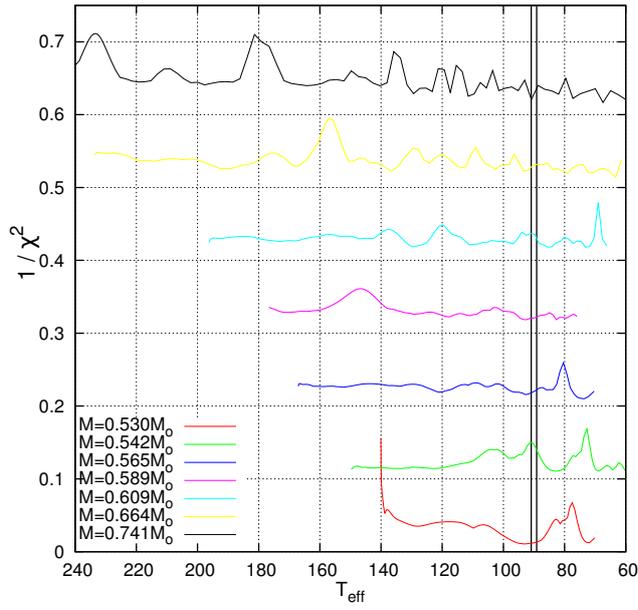


Figura 3.12: Inversa de la función de calidad correspondiente al ajuste de períodos considerando $\ell = 1$, $m = 0$ contra la T_{eff} (en [kK]). Se indican los distintos modelos, así como también los márgenes de error en la T_{eff} para SDSS J0349-0059.

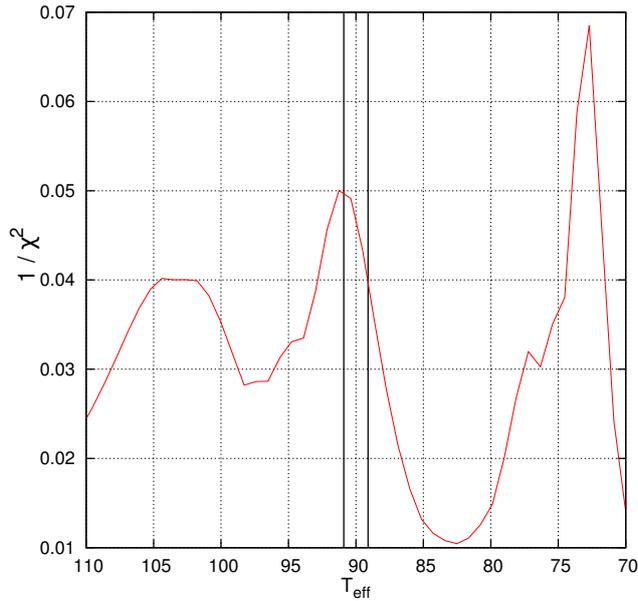


Figura 3.13: Modelo astrosismológico elegido, de $0.542 M_{\odot}$, junto con los márgenes de error de T_{eff} (en [kK]) para SDSS J0349-0059.

puede apreciarse mejor en la figura 3.13. La T_{eff} a la que corresponde ese máximo es de $T_{\text{eff}} \simeq 91\,255$ K. Vemos que hay picos más pronunciados, pero quedan muy por fuera del rango de T_{eff} .

Por lo tanto, para este conjunto de datos, adoptaremos un modelo astrosismológico con parámetros:

$$M = 0.542 M_{\odot} \quad (3.12)$$

$$T_{\text{eff}} \simeq 91\,255 \text{ K} \quad (3.13)$$

Además de la solución astrosismológica adoptada, puede verse de la figura 3.12 que existen otros modelos con masas de $0.565 M_{\odot}$ y $0.530 M_{\odot}$ que reproducen muy bien los períodos observados, pero que no podemos adoptarlos como soluciones astrosismológicas para esta estrella porque están en contradicción con la limitación impuesta por la T_{eff} , la cual se deriva a partir de la espectroscopía. Se podría argumentar que la barra de error de la T_{eff} es muy pequeña, y que considerando una incerteza mayor se podrían englobar esas soluciones (que están a $T_{\text{eff}} \lesssim 80\,000 \text{ K}$). Sin embargo, en ese caso el error en la T_{eff} debería ser más de 10 veces el error consignado por Woudt et al. (2012), de tan sólo 900 K. Esto hace que consideremos esas posibles soluciones sólo como marginales, porque en rigor, no satisfacen la restricción impuesta por la espectroscopía.

A continuación, como tenemos datos detallados de cada modelo sismológico, podemos comparar cada período observado con el teórico del mismo, conocer su diferencia y el orden radial k del período, entre otros parámetros. Para el caso del modelo sismológico adoptado, los datos figuran en la Tabla 3.5. Se puede ver que el valor medio de los $\langle |\delta\Pi| \rangle \simeq 3.80 \text{ s}$.

Π°	Π^t	k	$ \delta\Pi $
963.48	957.00	39	6.48
908.93	909.39	37	0.46
561.83	560.07	22	1.76
511.43	514.65	20	3.22
486.40	490.69	19	4.29
465.05	468.23	18	3.18
419.04	422.45	16	3.41
349.04	354.92	13	5.88
300.93	306.45	11	5.52

Tabla 3.5: Datos referidos al modelo sismológico con $M_{\star} = 0.542 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 91\,255 \text{ K}$ ($\ell = 1, m = 0$).

Es interesante notar que para la secuencia de modelos de $M_{\star} = 0.542 M_{\odot}$ hay otros máximos de la función que podemos analizar. El máximo correspondiente a $T_{\text{eff}} \simeq 72\,706 \text{ K}$ tiene como períodos teóricos y órdenes radiales, los valores de la Tabla 3.6. En este caso, el valor medio de los $\langle |\delta\Pi| \rangle \simeq 3.02 \text{ s}$. Si bien este caso representa el me-

por ajuste para esa masa, se trata de una estrella demasiado fría, en comparación con los valores de referencia de que disponemos.

Π^o	Π^t	k	$ \delta\Pi $
963.48	956.91	37	6.57
908.93	909.09	35	0.16
561.83	564.16	21	2.33
511.43	514.08	19	2.65
486.40	493.01	18	6.61
465.05	467.96	17	2.91
419.04	420.61	15	1.57
349.04	347.19	12	1.85
300.93	298.44	10	2.49

Tabla 3.6: Datos referidos al modelo con $M_* = 0.542 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} = 72706$ K ($\ell = 1, m = 0$).

Por último, el caso del pico menos pronunciado corresponde a un modelo con una $T_{\text{eff}} = 104376$ K. Los datos que obtenemos están presentes en la Tabla 3.7. El valor medio ahora resulta ser: $\langle |\delta\Pi| \rangle \simeq 4.21$ s.

Π^o	Π^t	k	$ \delta\Pi $
963.48	959.27	40	4.21
908.93	912.02	38	3.09
561.83	571.28	23	9.45
511.43	503.57	20	7.86
486.40	483.16	19	3.24
465.05	459.16	18	5.89
419.04	416.51	16	2.53
349.04	348.02	13	1.02
300.93	301.49	11	0.56

Tabla 3.7: Datos referidos al modelo con $M_* = 0.542 M_\odot$ y $T_{\text{eff}} = 104376$ K ($\ell = 1, m = 0$).

Finalmente, en la Tabla 3.8 incluimos los parámetros estructurales del modelo sismológico adoptado.

3.2.5 *Splitting rotacional*

Suponiendo rotación lenta y rígida, basándonos en el tratamiento presentado en la sección 1.5.3, vamos a estimar la magnitud del

Cantidad	Espectroscopía	Astrosismología
$T_{\text{eff}}[\text{kK}]$	90.0 ± 0.9	91.255
$\log(g)$	7.5 ± 0.01	7.488
$M_*[M_{\odot}]$		0.542
$\log(R_*/R_{\odot})$		-1.658
$\log(L_*/L_{\odot})$		1.475

Tabla 3.8: Características principales obtenidas para el modelo sismológico adoptado para SDSS J0349-0059.

período de rotación. La teoría predice que la rotación produce un desdoblamiento de las frecuencias de pulsación si $\ell = 1$, con lo cual, deberíamos observar dos componentes simétricas respecto a la central (tripleto de frecuencias). En las observaciones suele encontrarse cierta diferencia, no exhibiéndose de forma equiespaciada, como es nuestro caso.

Según los datos de que disponemos, la existencia del splitting se manifiesta en los períodos: 416.42, 418.90 y 421.28 s, con amplitudes y frecuencias como puede verse en la Tabla 3.9.

Frecuencia (μHz)	Período (s)	Amplitud (mmag)	Rango
2372.6 ± 0.2	421.48 ± 0.04	6.7 ± 0.9	7
2387.2 ± 0.1	418.90 ± 0.02	18.6 ± 1.1	1
2401.4 ± 0.1	416.42 ± 0.02	15.2 ± 1.0	2

Tabla 3.9: Datos de Woudt et al. (2012), de enero 2007

Suponemos que los períodos 416.42 s y 421.28 s corresponden a las componentes del tripleto con $m = +1$ y $m = -1$, respectivamente, y que 418.90 s es la componente central, es decir, la correspondiente a $m = 0$. Si esta suposición es válida, podemos entonces inferir un espaciamiento de frecuencias de: $\Delta\sigma = \sigma(m = +1) - \sigma(m = -1) = 28.8 \mu\text{Hz}$, entre los extremos de las componentes del tripleto. De esta manera, $\delta\sigma = \Delta\sigma/2 = 14.4 \mu\text{Hz}$. Como ya dijimos, bajo las suposiciones mencionadas, $\delta\sigma_{k\ell m} = -m\Omega(1 - C_{k\ell})$. En cuanto al valor de $C_{k\ell}$ en este caso no sería del todo correcto adoptar $C_{k\ell} \simeq 0.5$ (que es el valor asintótico, ver sección 1.5.3), puesto que los valores de k no son tan altos. Puede verse nuevamente la gran ventaja que representa disponer de modelos tan detallados, ya que uno de los parámetros de que disponemos es éste. Buscando este valor (correspondiente a nuestro modelo astrosismológico), para el período teórico más próximo al observado para $m = 0$, obtenemos un valor de $C_{k\ell} = 0.4936$. Realizando la cuenta, ob-

tenemos un valor de $\Omega = 28.4360 \mu\text{Hz}$, por lo cual haciendo $P_{\text{rot}} = 1/\Omega$, se infiere un valor estimado para el período de rotación estelar de:

$$P_{\text{rot}} = 0.407\text{d.} \quad (3.14)$$

Por último resta aclarar que si bien deberíamos observar estos splitting en todas las frecuencias de oscilación, ese no suele ser el caso. El motivo aún se desconoce.

CONCLUSIONES

En esta Tesis hemos realizado un estudio astrosismológico detallado sobre la estrella variable SDSS J0349-0059. Ésta es una estrella variable pulsante del tipo GW Virginis, también denominada PG 1159 pulsante.

El estudio que realizamos, está basado en los períodos determinados por Woudt et al. (2012). La estrella exhibe períodos de oscilación en modos g no-radiales entre 300 y 1000 s, con amplitudes entre 3.5 y 18.6 mmag, y uno de sus modos de oscilación muestra un probable triplete de frecuencias, debido a la rotación de la estrella. En dicho trabajo además figuran los datos espectroscópicos: $T_{\text{eff}} = 90\,000\text{ K}$ y $\log(g) = 7.5 \pm 0.01$ (cgs).

El procedimiento y los resultados obtenidos pueden sintetizarse de la siguiente manera:

- Derivamos la masa espectroscópica junto con su error, mediante una comparación de sus parámetros superficiales (T_{eff} , $\log(g)$) con un conjunto de tracks evolutivos de modelos teóricos de estrellas PG 1159, como puede verse en la sección 3.2.1. Encontramos un valor de: $M_* = 0.543 \pm 0.004 M_{\odot}$.
- A partir de la lista de datos fotométricos extraídos de Woudt et al. (2012), específicamente la lista de períodos medidos, hemos podido calcular el valor del espaciamiento de períodos, empleando tres métodos distintos: Varianza Inversa, Transformada de Fourier y Kolmogorov-Smirnov. Resulta entonces muy bien estimado por haber usado tres métodos independientes y por el excelente acuerdo que existe entre ellos. De esta forma disponemos de un espaciamiento de períodos derivado robusto. El valor obtenido es de: $\Delta\Pi_{\ell=1}^{\circ} = 23.4904 \pm 0.07741\text{ s}$ (sección 3.1.4).
- Utilizando la teoría asintótica de pulsaciones no-radiales en modos g (Tassoul, 1980) es posible asociar a ese espaciamiento de períodos observado un origen físico: éste, es la separación de períodos consecutivos en el régimen asintótico, es decir, de alto orden radial k. Dada la dependencia del espaciamiento de períodos con la masa estelar, es posible emplear un método para hallar M_* a partir de la comparación entre el espaciamiento de períodos observado y el espaciamiento asintótico calculado para el conjunto de modelos estelares de que disponemos, fijando la T_{eff} según la derivada espectroscópicamente. La estimación

de la masa, junto con su error, es de: $M_* = 0.569^{+0.004}_{-0.002} M_\odot$ (sección 3.2.2). Dado que las pulsaciones de la estrella de estudio no están estrictamente en el régimen asintótico, el valor de la masa derivada por este método resulta sobreestimada.

- A continuación, con el objeto de encontrar un valor más preciso para la masa estelar, hicimos otra determinación comparando el espaciamiento de períodos observado, con el espaciamiento promedio de períodos calculado a partir del espectro de pulsaciones del set de modelos. Este método nos proporciona el valor: $M_* = 0.535 \pm 0.004 M_\odot$ (sección 3.2.3)
- Posteriormente, mediante un ajuste de períodos, derivamos un modelo sismológico en base a la comparación de los períodos individuales de la estrella de estudio, con los períodos de los modos g calculados sobre los modelos teóricos. De esta manera, hallamos un modelo sismológico que reproduce con cierto grado de exactitud los períodos observados, determinando así un valor adicional de masa estelar: $M_* = 0.542 M_\odot$, con $T_{\text{eff}} = 91\,255$ K (sección 3.2.4).
- Finalmente, habiendo adoptado el modelo de $M_* = 0.542 M_\odot$, que mejor ajusta a los períodos observados aproximadamente dentro de márgenes de temperatura efectiva de la estrella, pudimos determinar el período de rotación, empleando la separación entre las componentes del triplete de frecuencias asociado al período: 418.90 s ($m = 0$). El valor obtenido es: $P_{\text{rot}} = 0.407$ d.

Sin lugar a duda, hemos podido encontrar un excelente acuerdo entre las estimaciones para la masa espectroscópica, la masa derivada a partir del espaciamiento promedio y la determinada a partir del ajuste de períodos, a pesar de haber sido hallados mediante métodos tan diferentes. Esto demuestra una gran consistencia interna de nuestro estudio. Por otra parte, el haber encontrado un modelo astrosismológico de la estrella implica tener información de su gravedad, radio y luminosidad, parámetros que no pueden inferirse mediante ningún otro método.

El período de rotación determinado en nuestro análisis, está claramente en muy buen acuerdo con el calculado previamente para esta estrella, según Woudt et al. (2012), de $P_{\text{rot}} = 0.40 \pm 0.01$ d, y también en línea con los valores derivados para otras enanas blancas y pre enanas blancas pulsantes (ver Fontaine & Brassard (2008), Tabla 4). Este resultado reafirma la idea cada vez más aceptada de que las enanas blancas y pre enanas blancas aisladas tienen una velocidad angular de rotación lenta, es decir, que son rotadores lentos.

Nuestro estudio astrosismológico de la estrella variable SDSS J0349-0059 constituye un paso más en el estudio de estrellas pulsantes sobre

la base de modelos estelares completamente evolutivos (Althaus et al., 2005; Miller Bertolami & Althaus, 2006), estudio iniciado en el Grupo de Evolución y Pulsaciones Estelares de nuestra Facultad (Córscico & Althaus (2006); Córscico et al. (2007a,b, 2008, 2009); Kepler et al. (2014)).

En el futuro cercano nos proponemos llevar a cabo un análisis astrosismológico similar al presentado en esta Tesis para la estrella VV47 (González Pérez et al., 2006), que es una estrella PG1159 pulsante del tipo PNNV, es decir, que posee una nebulosa planetaria.

A

APÉNDICE

En este Apéndice se adjunta el trabajo de donde fueron extraídos los datos para la presente Tesis.

SDSS J0349–0059 is a GW Virginis star

Patrick A. Woudt,¹★ Brian Warner^{1,2}★ and Ewald Zietsman¹

¹*Astrophysics, Cosmology and Gravity Centre, Department of Astronomy, University of Cape Town, Private Bag X3, Rondebosch 7701, South Africa*

²*School of Physics and Astronomy, Southampton University, Highfield, Southampton SO17 1BJ*

Accepted 2012 August 8. Received 2012 August 8; in original form 2012 July 31

ABSTRACT

High-speed photometric observations of the spectroscopically discovered PG 1159 star SDSS J034917.41–005917.9 in 2007 and 2009 reveal a suite of pulsation frequencies in the range of 1038–3323 μHz with amplitudes between 3.5 and 18.6 mmag. SDSS J034917.41–005917.9 is therefore a member of the GW Vir class of pulsating pre-white dwarfs. We have identified 10 independent pulsation frequencies that can be fitted by an asymptotic model with a constant period spacing of 23.61 ± 0.21 s, presumably associated with a sequence of $\ell = 1$ modes. The highest amplitude peak in the suite of frequencies shows evidence for a triplet structure, with a frequency separation of 14.4 μHz . Five of the identified frequencies do not fit the $\ell = 1$ sequence, but are, however, well modelled by an independent asymptotic sequence with a constant period spacing of 11.66 ± 0.13 s. It is unclear to which ℓ mode these frequencies belong.

Key words: techniques: photometric – stars: individual: SDSS J034917.41–005919.2 – stars: oscillations.

1 INTRODUCTION

The GW Vir stars are a subgroup of variables in the spectroscopic PG 1159 class, which form a link between the (post-asymptotic giant branch) central stars of planetary nebulae and the H-deficient white dwarf cooling sequence. They pulsate non-radially and lie in an instability strip bounded by effective temperatures $200\,000 > T_{\text{eff}} > 75\,000$ K, excited by the kappa mechanism working through partial ionization of carbon and oxygen. Studying these stars with asteroseismology has provided important knowledge on the interiors of the late stages of stellar evolution (Winget & Kepler 2008). There are 19 known GW Vir stars (Quirion, Fontaine & Brassard 2007; Quirion 2009), showing a wide variety of behaviour. The possible addition of more examples is therefore of significance. Here we show that the known spectroscopic PG 1159 star SDSS J034917.41–005919.2 (hereafter SDSS J0349–0059) is a non-radial pulsator, putting it in the GW Vir subclass. In Section 2, we describe what is already known about SDSS J0349–0059 and list our high-speed photometric observations. Section 3 analyses these and presents comparisons with other GW Vir stars.

2 SDSS J0349–0059 AS A PG 1159 STAR

2.1 The PG 1159 instability strip

Hügelmeier et al. (2006) used Sloan Digital Sky Survey (SDSS) spectra of five spectroscopically discovered PG 1159 stars, includ-

ing SDSS J0349–0059, to interpret their spectra using non-local thermodynamic equilibrium (non-LTE) model atmospheres; these were added to the analyses of six previously analysed stars. Among these, SDSS J0349–0059 has an average position, with $T_{\text{eff}} = 90.0 \pm 0.9$ kK and $\log g = 7.50 \pm 0.01$ (cgs).

Córsico, Althaus & Miller Bertolami (2006) computed non-adiabatic pulsation models for stars in the GW Vir instability strip and found that their models agree with the observed strip. The parameters listed above for SDSS J0349–0059 place it within the observed instability strip (cf. figs 6 and 7 of Córsico et al. 2006).

2.2 High-speed photometry of SDSS J0349–0059

SDSS J0349–0059 was observed in 2007 January, 2009 March and 2009 December with the University of Cape Town's CCD photometer (O'Donoghue 1995) attached to the 40- and 74-inch reflectors at the Sutherland site of the South African Astronomical Observatory. The motivation for observing this star was inclusion as a UV-rich star included in a search for possible AM CVn stars.

The observing log is given in Table 1 and the individual light curves are shown in Fig. 1. Note that the short observing runs in 2009 March (S7846, S7855 and S7859) were observed at high airmass (1.7–3); this is evident in the downward trend seen in each of the light curves. The differential photometric correction fails at these large airmasses due to the different colours of the target and the reference star; SDSS J0349–0059 has $(g - r) = -0.42$, whereas the reference star is redder at $(g - r) = 0.26$ (SDSS Data Release 8; Aihara et al. 2011).

*E-mail: patrick.woudt@uct.ac.za (PAW); brian.warner@uct.ac.za (BW)

Table 1. Observing log of photometric observations.

Run	Date of obs. (start of night)	HJD ^a (+245 0000.0)	Length (h)	t_{in} (s)	V (mag)
S7699	20/01/2007	4121.292 87	2.38	20	17.7
S7701	21/01/2007	4122.274 72	3.39	20	17.7
S7703	22/01/2007	4123.274 66	3.02	20	17.7
S7706	23/01/2007	4124.271 98	3.06	20	17.8
S7846	20/03/2009	4911.236 29	1.34	30	17.9
S7855	23/03/2009	4914.233 55	1.19	30	17.9
S7859	24/03/2009	4915.234 60	1.12	30	17.9
S7899	24/12/2009	5190.354 93	1.27	30	17.8
S7901	25/12/2009	5191.282 64	2.83	30	17.8
S7904	26/12/2009	5192.286 31	2.63	30	17.8
S7906	27/12/2009	5193.283 08	2.74	30	17.9

^aHJD of first observation; t_{in} is the integration time.

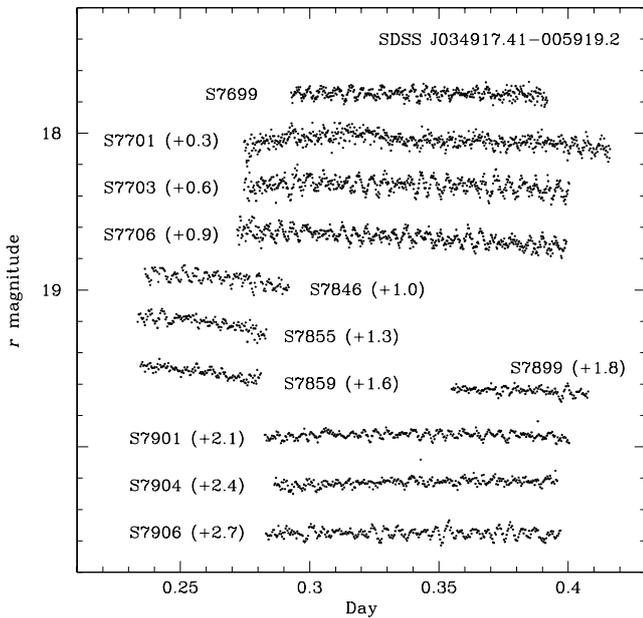


Figure 1. Individual light curves of SDSS J0349–0059. The light curve of run S7699 is displayed at the correct brightness. Vertical offsets (indicated between brackets) have been applied to other light curves for display purposes only.

The Fourier transforms (FTs) of the three data sets (2007 January, 2009 March and 2009 December) are shown in Fig. 2. In the construction of the FTs, individual runs have their mean and trend removed.

Rapid oscillations with a range ~ 0.2 mag and time-scale ~ 300 – 900 s are visible in the light curves and their FTs, which, with the spectra discussed by Hügelmeyer et al. (2006), place SDSS J0349–0059 in the GW Vir subgroup of PG 1159 stars.

3 ANALYSIS

The FTs of the combined runs in 2007 January (upper panel of Fig. 2) and 2009 December (lower panel of Fig. 2) show a substantial amount of variation in the distribution of power in the FTs. The 2009 March data set is shown for completeness, but given the relatively few short observing runs, the signal-to-noise ratio in the FT of the combined runs in 2009 March (middle panel of Fig. 2) is too low to identify many individual pulsation frequencies. However, the main

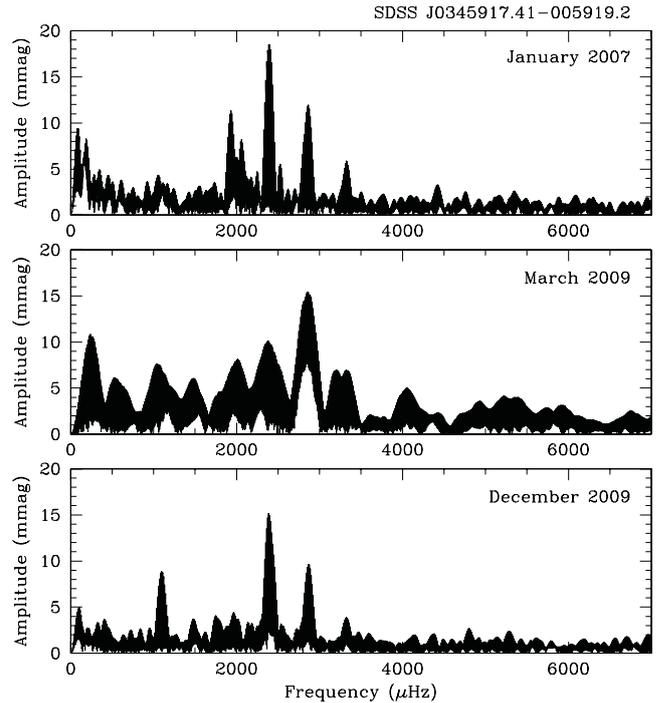


Figure 2. The FTs of SDSS J0349–0059 in 2007 January (upper panel), 2009 March (middle panel) and 2009 December (lower panel).

peak in 2009 March at ~ 2865 μHz is also seen in 2007 January and 2009 December.

The distribution of pulsation frequencies in SDSS J0349–0059 resembles closely that of the GW Vir star PG 1707+427 (Kawaler et al. 2004), which has a main peak at 2236 μHz and additional frequencies in the range of 1100–2988 μHz . In SDSS J0349–0059, the main peak is located at 2386 μHz with additional pulsation frequencies in the range of 1097–3323 μHz .

Fig. 3 shows an expanded view of the FT of the combined runs in 2007 January (upper two panels) and 2009 December (lower two panels) in the 1000–3500 μHz frequency range. The window functions for the two data sets are given in the rightmost panels of Fig. 3, scaled to the amplitude of the highest peak in the respective FTs. In each FT, the horizontal dashed line corresponds to 4σ amplitude detection limit; this limit is 3.5 mmag for 2007 January and 3.1 mmag for 2009 December. The standard deviation (σ) has been determined over the 1000–4000 μHz frequency range, after pre-whitening the FT by the frequencies listed in Table 2 and randomizing the residual brightness variations for each observing run against the timing array.

In the 2007 January FT, 13 frequencies have been identified with amplitudes above the 4σ amplitude limit. They are marked by the vertical dashed lines in Fig. 3. Successive pre-whitening of the highest amplitude peak has resulted in the identification of the 13 pulsation frequencies listed in Table 2. Some of these frequencies could possibly be misidentified as a 1-day alias, although the coincidence of frequencies in the two independent data sets gives some reassurance of correct identification; in Table 2, we merely list the frequencies associated with the highest amplitude signals. The final FT pre-whitened at these 13 frequencies is shown immediately below the original FT.

Similarly, 10 independent frequencies have been identified in the 2009 December data. They are listed in Table 2 and marked by the vertical dashed lines in the third vertical panel (left) of Fig. 3. Again,

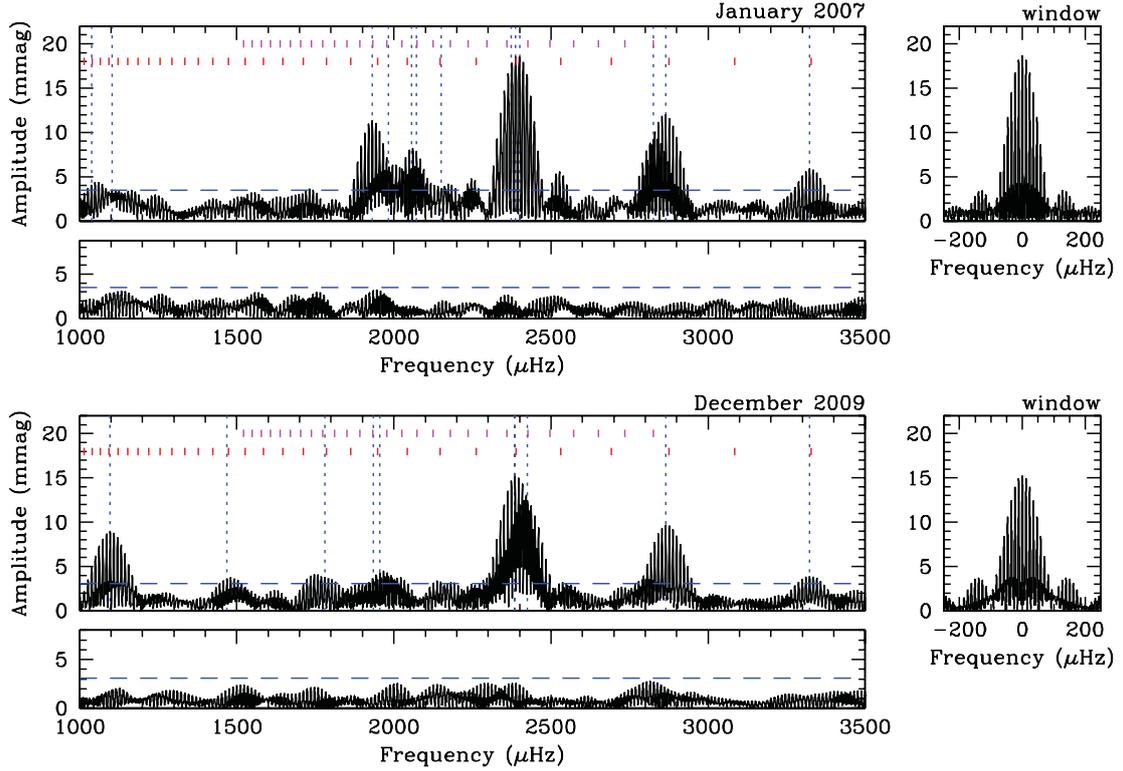


Figure 3. The FTs of SDSS J0349–0059 in 2007 January (upper panels) and 2009 December (lower panels). For each data set, three panels are displayed: the original FT of the combined observing run (top-left), the residual FT after pre-whitening with the identified frequencies listed in Table 2 (lower-left) and the window function (top-right). The 4σ amplitude limit is indicated by the horizontal dashed line, the identified frequencies are marked by the vertical dashed lines and frequencies associated with the two asymptotic models with a constant period spacing are marked by short vertical markers; see Section 3.2 for details.

Table 2. Frequency identifications.

Frequency (μHz)	Period (s)	Amplitude (mmag)	Rank
2007 January			
1037.9 ± 0.4	963.48 ± 0.37	3.7 ± 0.9	12
1103.3 ± 0.4	906.37 ± 0.33	3.9 ± 0.9	11
1931.1 ± 0.1	517.84 ± 0.03	11.3 ± 1.0	4
1983.4 ± 0.2	504.18 ± 0.05	6.8 ± 0.9	6
2055.9 ± 0.4	486.40 ± 0.09	4.2 ± 0.9	10
2072.2 ± 0.2	482.58 ± 0.05	6.6 ± 0.9	8
2150.3 ± 0.4	465.05 ± 0.09	3.5 ± 0.9	13
2372.6 ± 0.2	421.48 ± 0.04	6.7 ± 0.9	7
2387.2 ± 0.1	418.90 ± 0.02	18.6 ± 1.1	1
2401.4 ± 0.1	416.42 ± 0.02	15.2 ± 1.0	2
2826.5 ± 0.2	353.79 ± 0.03	7.2 ± 0.9	5
2865.2 ± 0.1	349.02 ± 0.01	12.1 ± 1.0	3
3323.0 ± 0.3	300.93 ± 0.03	5.5 ± 0.9	9
2009 December			
1097.1 ± 0.1	911.49 ± 0.08	9.1 ± 0.7	4
1468.8 ± 0.3	680.83 ± 0.14	3.6 ± 0.7	8
1779.9 ± 0.3	561.83 ± 0.09	4.0 ± 0.7	7
1935.3 ± 0.4	516.72 ± 0.11	3.3 ± 0.7	10
1955.3 ± 0.3	511.43 ± 0.08	4.2 ± 0.7	6
2383.5 ± 0.4	419.55 ± 0.07	3.4 ± 0.7	9
2385.6 ± 0.1	419.18 ± 0.02	15.2 ± 0.9	1
2425.6 ± 0.2	412.27 ± 0.03	10.0 ± 0.8	2
2864.8 ± 0.1	349.06 ± 0.01	9.6 ± 0.8	3
3323.0 ± 0.3	300.93 ± 0.03	4.3 ± 0.7	5

the final FT pre-whitened at the identified frequencies is displayed below the original FT.

The highest amplitude peak in both the 2007 and 2009 observations is located at $\sim 2386 \mu\text{Hz}$ (peak amplitudes of 18.6 and 15.2 mmag in 2007 and 2009, respectively). Other pulsation frequencies in common between the two data sets are around $2865 \mu\text{Hz}$ – peak amplitudes of 12.1 mmag (2007) and 9.6 mmag (2009) – and $3323 \mu\text{Hz}$ – peak amplitudes of 5.5 mmag (2007) and 4.3 mmag (2009).

3.1 Rotational splitting of the 2387- μHz (419-s) oscillation

The highest peak in the 2007 data shows clear evidence for three closely spaced frequencies. This is illustrated in Fig. 4 where we show the 2007 January FT in the frequency range of 2000–3000 μHz (original, top panel). After pre-whitening by the main peak at 2387.2 μHz , a clear window function remains (middle panel) at 2401.4 μHz . Pre-whitening at 2401.4 μHz leaves a distinct signal at 2372.6 μHz (lower panel). All frequencies are marked by vertical dashed lines. This suggests that the strongest peak is in fact a triplet, with a frequency separation of $14.4 \pm 0.2 \mu\text{Hz}$.

The 2009 data reveal two components of the triplet: a strong peak at 2385.6 μHz and a low-amplitude peak at 2383.5 μHz which is probably the 1-day alias of the 2372.6 μHz peak seen in 2007.

We draw again on the similarity with PG 1707+427, where evidence was found for a 9 μHz split of the main mode, interpreted as a rotational frequency splitting, corresponding to a rotation period of 0.65 d (Kawaler et al. 2004). In SDSS J0349–0059, this would

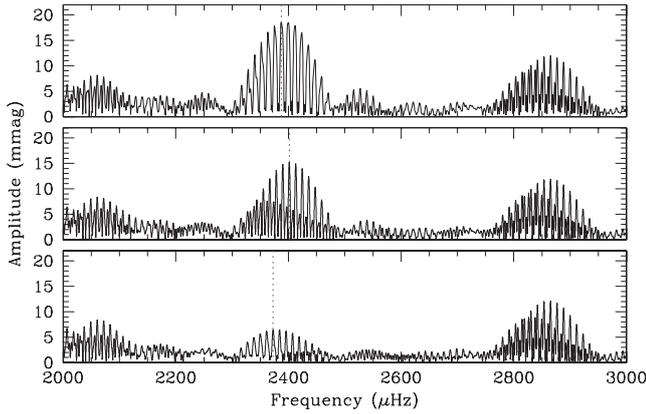


Figure 4. The FT of SDSS J0349–0059 in 2007 January (upper panel). The middle panel displays the FT after pre-whitening of the strongest signal in the original data at 2387.2 μHz . The lower panel displays the residual FT after subsequently pre-whitening the data at a frequency of 2401.4 μHz . Peak frequencies of the resolved triplet at 419 s are marked by the dashed vertical lines.

imply a rotation period of 0.40 ± 0.01 d if the pulsation mode is $\ell = 1$.

3.2 Period spacing

Given the strong similarity with PG 1707+427, we suspected that the frequencies identified in SDSS J0349–0059 and listed in Table 2 are predominantly part of a sequence of $\ell = 1$ g modes with constant period spacing; this is an asymptotic model of the form $P_{\text{model}} = n\Delta P + C$, where P_{model} is the model period, n is an integer, ΔP is a constant period spacing and C is a constant period.

Guided by the analysis of Kawaler et al. (2004), we first looked at the pulsation frequencies in the 2009 December data. In the 2009 December observations, a large-amplitude low-frequency pulsation was detected at 1097 μHz , assumed to be a high-order (n) mode similar to the $\Delta n = 25$ mode identified by Kawaler et al. in PG 1707+427 around 1100 μHz .

To search the suite of periods for a constant period spacing, we used the inverse variance method as outlined by O’Donoghue (1994). By letting ΔP vary between 10 and 40 s (in steps of 0.005 s), we compared the measured periods with the model periods and plotted the inverse variance of the timing residual (divided by ΔP) as a function of ΔP . The results are shown in the upper panel of Fig. 5 for all the 10 periods identified in 2009 December. A low-amplitude peak around $\Delta P \sim 23.5$ is evident. The significance of this peak improves substantially when two periods are removed from the sequence (412.3 and 516.7 s), where the remaining seven independent periods (we have also removed the lower sideband component of the 419-s triplet) form a well-defined sequence with $\Delta P = 23.52 \pm 0.19$ s and $C = 301.70$ s. This is shown in the bottom panel of Fig. 5. In comparison, Kawaler et al. (2004) find $\Delta P = 23.0$ s and $C = 332.9$ s for PG 1707+427.

All but five periods identified in 2007 and 2009 fit the asymptotic model with a constant period spacing around ~ 23.5 s. They are listed in Table 3 against the identified mode difference (Δn), the period difference ($\delta P = P_{\text{obs}} - P_{\text{model}}$) and presumably belong to $\ell = 1$ modes. The best-fitting model based on the periods listed in Table 3 gives $\Delta P = 23.61 \pm 0.21$ s and $C = 300.54$ s. The upper panel of Fig. 6 shows the inverse variance as a function of ΔP for this set of periods. Had we only selected frequencies with amplitudes

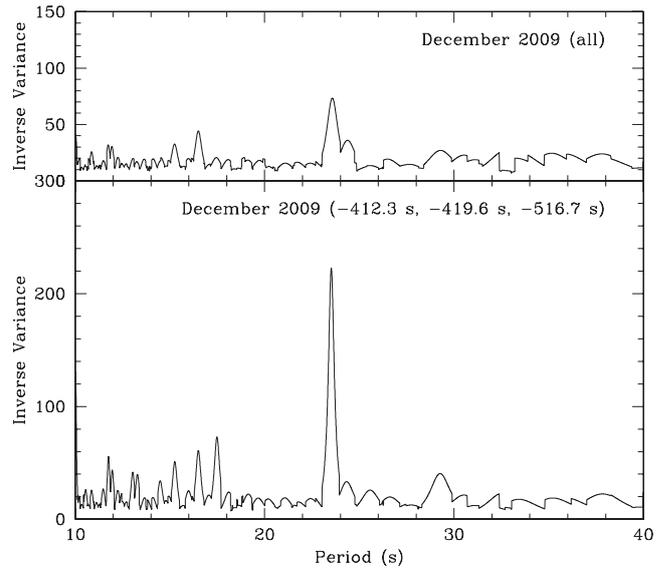


Figure 5. The inverse variance versus ΔP for all periods identified in 2009 December (upper panel) and for seven independent periods (all except 412.3, 419.6 and 516.7 s; lower panel).

Table 3. Periods compared to an asymptotic model with a period spacing of 23.61 s and a constant period of 300.54 s.

Δn	P_{model} (s)	P_{obs} (s)	δP (s)	$\delta P/23.61$	Remarks
0	300.53	300.93	0.40	0.02	2007[5.5]/2009[4.3] ^a
2	347.76	349.02	1.26	0.05	2007[12.1]
		349.06	1.30	0.06	2009[9.6]
5 ^b	418.59	418.90	0.31	0.01	2007[18.6]
		419.18	0.59	0.02	2009[15.2]
7	465.81	465.05	-0.76	-0.03	2007[3.5]
8	489.42	486.40 ^c	-3.02	-0.13	2007[4.2]
9	513.03	511.43	-1.60	-0.07	2009[4.2]
11	560.25	561.83	1.58	0.07	2009[4.0]
16	678.30	680.83	2.53	0.11	2009[3.6]
26	914.40	911.49	-2.91	-0.12	2009[9.1]
		906.37 ^d	-8.03	-0.34	2007[3.9]
28	961.62	963.48	1.86	0.08	2007[3.7]

^aThe year in which the pulsation is detected; the amplitude of the pulsation is listed in square brackets (in units of mmag).

^bThe $m = \pm 1$ modes of this triplet are not listed here.

^cThe 1-day alias of the $\Delta n = 8$ mode is at 489.2 s, which gives $\delta P = -0.2$ s and $\delta P/23.61 = -0.01$.

^dThe 1-day alias of the $\Delta n = 26$ mode (2007) is at 916.2 s, which gives $\delta P = 1.8$ s and $\delta P/23.61 = 0.07$.

above a 5σ limit (as opposed to our current 4σ selection), the inverse variance analysis would have given a similar result ($\Delta P = 23.47 \pm 0.13$ s and $C = 301.67$ s). The sequence of frequencies associated with the best-fitting model ($\Delta P = 23.61$ s) is shown in Fig. 3 by the lower sequence of short vertical markers (starting at 3327 μHz).

The remaining five periods not matched by this model are part of a sequence themselves with a fixed period spacing of $\Delta P = 11.66 \pm 0.13$ s and $C = 353.91$ s. They are listed in Table 4 and the result of the inverse variance test is shown in the lower panel of Fig. 6. Within the formal error, this period spacing is consistent with being equal to half the period spacing of the $\ell = 1$ model. The sequence of frequencies associated with this model ($\Delta P = 11.66$ s) is also shown in Fig. 3 by the upper sequence of short vertical markers

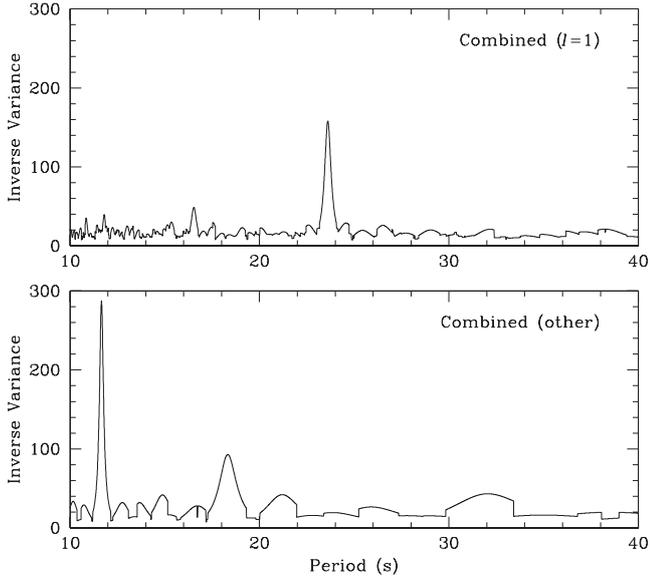


Figure 6. The inverse variance versus ΔP for all the periods identified as $\ell = 1$ modes (upper panel) and for the remaining set of five periods that cannot be fitted by the $\ell = 1$ constant spacing model (lower panel).

Table 4. Periods compared to an asymptotic model with a period spacing of 11.66 s and a constant period of 353.91 s.

Δn	P_{model} (s)	P_{obs} (s)	δP (s)	$\delta P / 11.66$	Remarks
0	353.91	353.79	-0.12	-0.01	2007[7.2] ^a
5	412.21	412.27	0.06	0.01	2009[10.0]
11	482.17	482.58	0.41	0.04	2007[6.6]
13	505.49	504.18	-1.31	-0.11	2007[6.8]
14	517.15	517.84	0.69	0.06	2007[11.3]
		516.72	-0.43	-0.04	2009[3.3]

^aThe year in which the pulsation is detected; the amplitude of the pulsation is listed in square brackets (in units of mmag).

(starting at 2826 μHz) and can be compared with the asymptotic model for the $\ell = 1$ modes.

The $\delta P / \Delta P$ residuals we obtain for the two models are similar to those found in studies of other GW Vir stars (e.g. Kawaler et al. 2004).

4 DISCUSSION

Our photometric observations show that SDSS J0349–0059 is a non-radial pulsator in the GW Vir class of variable stars. Frequency splitting of the principal oscillation mode at 419 s reveals a rotation period of 0.40 d, if the oscillation mode is $\ell = 1$. As with many other GW Vir stars, it is possible to represent most of the modes with a linear relationship in period, similar to what has been seen in PG 1707+427, but with parameters that put SDSS J0349 slightly redwards of the latter star, which now defines the red edge of the GW Vir instability strip.

The five oscillation modes not included in the above group can be fitted by another linear relationship in which the spacing is a harmonic of the first sequence. However, there is no currently known physical model which explains this behaviour. This is unlike PG 1707+427 where the discrepant oscillation modes appear to have an $\ell = 2$ origin.

ACKNOWLEDGMENTS

Our research is supported by the University of Cape Town and by the National Research Foundation. This work was completed during a visit by PAW to the University of Southampton, which was funded by an ERC advanced investigator grant awarded to R. Fender. This paper uses observations made at the South African Astronomical Observatory (SAAO).

REFERENCES

- Aihara H. et al., 2011, *ApJS*, 193, 29
 Córscico A. H., Althaus L. G., Miller Bertolami M. M., 2006, *A&A*, 458, 259
 Hügelmeyer S. D., Dreizler S., Homeier D., Krzesiński J., Werner K., Nitta A., Kleinman S. J., 2006, *A&A*, 454, 617
 Kawaler S. D. et al., 2004, *A&A*, 428, 969
 O'Donoghue D., 1994, *MNRAS*, 270, 222
 O'Donoghue D., 1995, *Balt. Astron.*, 4, 517
 Quirion P.-O., 2009, *Commun. Astroseismol.*, 159, 99
 Quirion P.-O., Fontaine G., Brassard P., 2007, *ApJS*, 171, 219
 Winget D. E., Kepler S. O., 2008, *ARA&A*, 46, 147

This paper has been typeset from a $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.

BIBLIOGRAFÍA

- Althaus, L. G., Córscico, A. H., Isern, J., y García-Berro, E.: 2010, *A&A Rev.* **18**, 471 (citado en páginas 3, 7, 15, 16, 17, 18, 21, 22 y 23)
- Althaus, L. G., Córscico, A. H., Kepler, S. O., y Miller Bertolami, M. M.: 2008, *A&A* **478**, 175 (citado en página 21)
- Althaus, L. G., Serenelli, A. M., Córscico, A. H., y Montgomery, M. H.: 2003, *A&A* **404**, 593 (citado en páginas 24, 27 y 40)
- Althaus, L. G., Serenelli, A. M., Panei, J. A., Córscico, A. H., García-Berro, E., y Scóccola, C. G.: 2005, *A&A* **435**, 631 (citado en páginas 7, 8, 9, 21, 24, 27, 40 y 55)
- Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F., Kawaler, S. D., y Tassoul, M.: 1991, *ApJ* **367**, 601 (citado en página 18)
- Clayton, D. D.: 1968, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*, New York, McGraw-Hill (citado en página 2)
- Córscico, A. H.: 2003, *Tesis Doctoral*, UNLP (citado en páginas 20 y 27)
- Córscico, A. H.: 2014, *ArXiv e-prints* (citado en páginas 20 y 25)
- Córscico, A. H. y Althaus, L. G.: 2006, *A&A* **454**, 863 (citado en páginas 23, 27, 40 y 55)
- Córscico, A. H., Althaus, L. G., Kepler, S. O., Costa, J. E. S., y Miller Bertolami, M. M.: 2008, *A&A* **478**, 869 (citado en páginas 22, 24, 27, 29 y 55)
- Córscico, A. H., Althaus, L. G., y Miller Bertolami, M. M.: 2006, *A&A* **458**, 259 (citado en página 29)
- Córscico, A. H., Althaus, L. G., Miller Bertolami, M. M., y García-Berro, E.: 2009, *A&A* **499**, 257 (citado en páginas 22, 24, 27, 29 y 55)
- Córscico, A. H., Althaus, L. G., Miller Bertolami, M. M., y Werner, K.: 2007a, *A&A* **461**, 1095 (citado en páginas 22, 24, 27, 29 y 55)
- Córscico, A. H., Miller Bertolami, M. M., Althaus, L. G., Vauclair, G., y Werner, K.: 2007b, *A&A* **475**, 619 (citado en páginas 22, 24, 27, 29 y 55)
- Cowling, T. G.: 1941, *MNRAS* **101**, 367 (citado en página 15)
- Cowling, T. G. y Newing, R. A.: 1949, *ApJ* **109**, 149 (citado en página 23)
- Cox, J. P.: 1980, *Theory of stellar pulsation*, Princeton, N.J. : Princeton University Press, c1980 (citado en página 10)
- Dreizler, S. y Werner, K.: 1996, *A&A* **314**, 217 (citado en página 8)
- Eisenstein, D. J., Liebert, J., Harris, H. C., Kleinman, S. J., Nitta, A., Silvestri, N., Anderson, S. A., Barentine, J. C., Brewington, H. J.,

- Brinkmann, J., Harvanek, M., Krzesiński, J., Neilsen, Jr., E. H., Long, D., Schneider, D. P., y Snedden, S. A.: 2006, *ApJS* **167**, 40 (citado en página 6)
- Fontaine, G. y Brassard, P.: 2008, *PASP* **120**, 1043 (citado en página 54)
- Fujimoto, M. Y.: 1977, *PASJ* **29**, 331 (citado en página 8)
- González Pérez, J. M., Solheim, J.-E., y Kamben, R.: 2006, *A&A* **454**, 527 (citado en página 55)
- Herwig, F., Blocker, T., Langer, N., y Driebe, T.: 1999, *A&A* **349**, L5 (citado en página 8)
- Kawaler, S. D.: 1988, in J. Christensen-Dalsgaard & S. Frandsen (eds.), *Advances in Helio- and Asteroseismology*, Vol. 123 of *IAU Symposium*, p. 329 (citado en página 33)
- Kawaler, S. D. y Bradley, P. A.: 1994, *ApJ* **427**, 415 (citado en página 21)
- Kepler, S. O., Fraga, L., Winget, D. E., Bell, K., Córscico, A. H., y Werner, K.: 2014, *MNRAS* **442**, 2278 (citado en página 55)
- Kippenhahn, R., Weigert, A., y Hofmeister, E.: 1967, *Methods in Computational Physics*, New York, Academic Press (citado en página 29)
- Ledoux, P.: 1951, *ApJ* **114**, 373 (citado en página 23)
- McGraw, J. T.: 1979, *ApJ* **229**, 203 (citado en página 7)
- Miller Bertolami, M.: 2009, *Tesis Doctoral*, UNLP (citado en páginas 7 y 27)
- Miller Bertolami, M. M. y Althaus, L. G.: 2006, *A&A* **454**, 845 (citado en páginas 8, 10, 21, 24 y 55)
- Monachesi, A.: 2006, *Tesis de Licenciatura*, UNLP (citado en página 19)
- O'Brien, M. S. y Kawaler, S. D.: 2000, *ApJ* **539**, 372 (citado en página 7)
- O'Donoghue, D.: 1994, *MNRAS* **270**, 222 (citado en página 33)
- Panei, J. A.: 2004, *Tesis Doctoral*, UNLP (citado en página 9)
- Romero, A. D.: 2012, *Tesis Doctoral*, UNLP (citado en página 27)
- Schoenberner, D.: 1979, *A&A* **79**, 108 (citado en página 8)
- Tassoul, M.: 1980, *ApJS* **43**, 469 (citado en páginas 37 y 53)
- Tassoul, M., Fontaine, G., y Winget, D. E.: 1990, *ApJS* **72**, 335 (citado en página 18)
- Unglaub, K. y Bues, I.: 2000, *A&A* **359**, 1042 (citado en páginas 7 y 8)
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., y Shibahashi, H.: 1989, *Non-radial oscillations of stars* (citado en página 11)
- Werner, K. y Herwig, F.: 2006, *PASP* **118**, 183 (citado en página 8)
- Woudt, P. A., Warner, B., y Zietsman, E.: 2012, *MNRAS* **426**, 2137 (citado en páginas v, xi, 24, 31, 32, 40, 48, 50, 53 y 54)