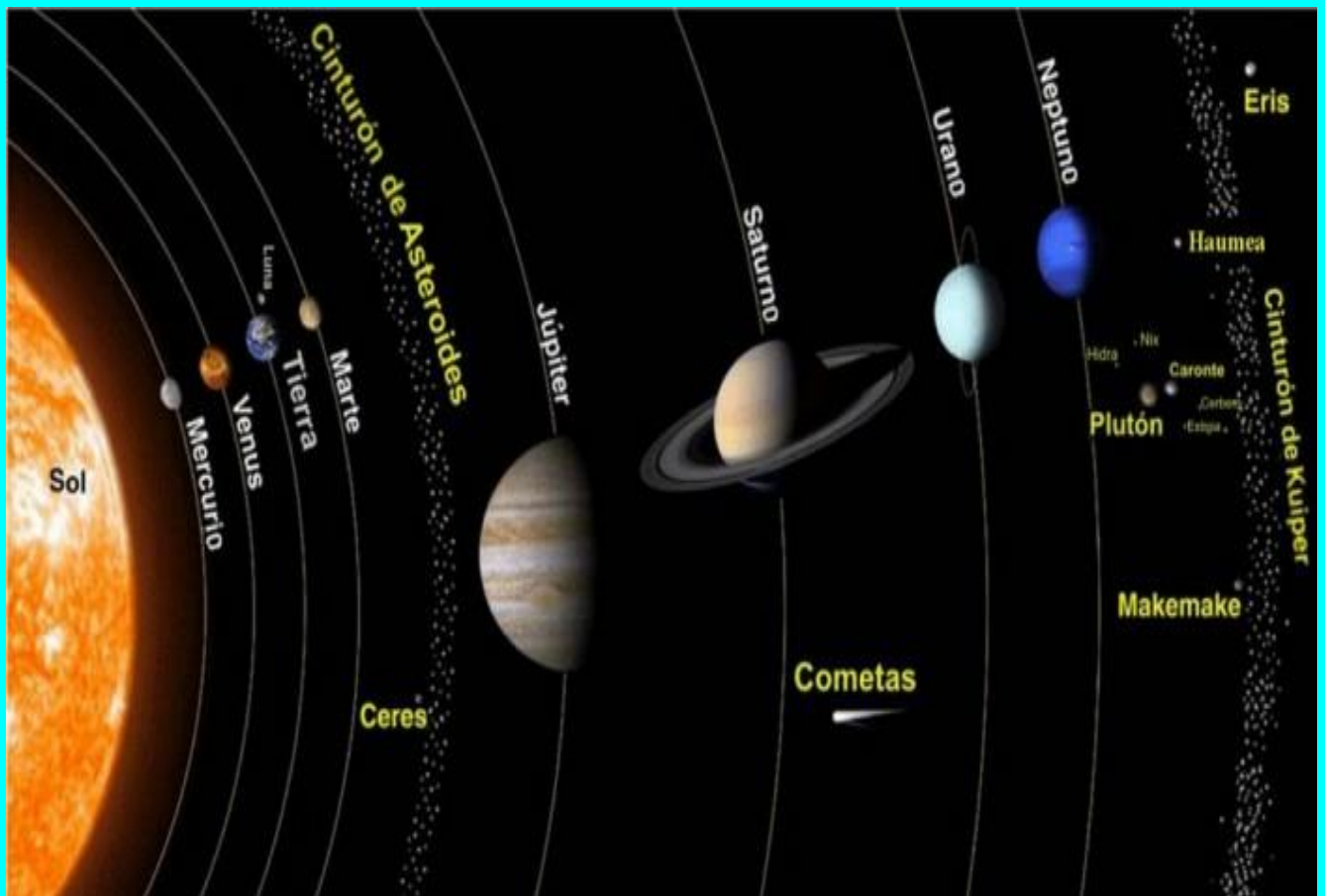


Apuntes

Mecánica Celeste Clásica



Francisco López García

Apuntes

Mecánica Celeste Clásica

Francisco López García

Ex Profesor del Departamento de Astronomía y Geofísica
Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales
Universidad Nacional de San Juan

Año 2018

DEDICADO

A la Abuela de mis ocho Nietos,
Por la enorme paciencia
Que me tuvo en los
Cincuenta y Tres Años de Matrimonio,
Y a mis Nietos Menores
Martín, Clara y Ramiro.

Contenido

	Pag.
Prefacio	VII
Capitulo 1. Conceptos astronómicos y dinámicos.	1
§ 1.1 Introducción.	1
Capitulo 2. La teoría de los dos cuerpos.	5
§ 2.1 Conceptos generales.	5
2.2 El movimiento en coordenadas polares.	10
2.3 La órbita en el plano. Desarrollos del movimiento elíptico.	21
Capitulo 3. El problema de n cuerpos.	
§ 3.1 Nociones generales.	29
3.2 Ecuaciones del movimiento.	29
3.3 Integrales primeras del movimiento.	32
3.4 El teorema del Virial.	40
3.5 Introducción al Sistema Heliocéntrico.	41
3.6 Ecuaciones de movimiento en el Sistema Heliocéntrico.	42
3.7 Soluciones del problema de tres cuerpos.	45
3.8 Ecuaciones del movimiento relativo.	57
3.9 Coordenadas de Jacobi en el problema de tres cuerpos.	61
Capitulo 4. El problema restringido de tres cuerpos.	
§ 4.1 Un breve comentario.	67
4.2 El problema restringido.	68
4.3 Estabilidad y la Integral de Jacobi.	81
4.4 El criterio de Tisserand.	83
4.5 Análisis de la integral de Jacobi.	86
Capitulo 5. Una aplicación de las ecuaciones canónicas.	
§ 5.1 Introducción y conceptos.	93
5.2 Aplicación al problema de dos cuerpos.	102
5.3 El método de variación de las constantes arbitrarias.	109
Capitulo 6. Teoría Planetaria.	
§ 6.1 Evolución del conocimiento.	117
6.2 Teoría Planetaria.	118
6.3 Ecuaciones Planetarias de Lagrange.	121
6.4 Conceptos básicos del Método de Variación de las Constantes.	130

Contenido

Capítulo 7. Desarrollo de la función perturbadora.	
§ 7.1 Conceptos generales.	135
7.2 Aplicación al Sistema Planetario.	138
7.3 Desarrollo de la función perturbadora en serie de potencias de e y e'	144
7.4 Desarrollo de la parte complementaria de la función perturbadora.	151
7.5 Aplicación a la variación de los elementos elípticos.	155
7.6 Teoría de las Perturbaciones Planetarias.	164
7.7 Perturbaciones en el Sistema Planetario.	172
7.8 Análisis cuando la excentricidad e inclinación son pequeñas.	178
Capítulo 8. La Teoría de la Luna de Hill.	
§ 8.1 Conceptos generales y ecuaciones de movimiento.	187
8.2 Solución periódica de las ecuaciones de movimiento de la Luna.	193
8.3 Cálculo de los coeficientes a_v y a_{-v-1} .	198
8.4 Ecuaciones de movimiento en un sistema en rotación (sinódico).	211
8.5 Formulas de Hill suponiendo que el movimiento del sistema sinódico es distinto de uno.	217
8.6 La Evección de la Luna.	225
Capítulo 9. Singularidades en el problema de tres y n-cuerpos.	
§ 9.1 Introducción y conceptos generales.	241
9.2 Colisión y regularización.	243
9.3 Teorema de Weierstrass – Sundman.	245
9.4 Colisión Binaria.	250
9.5 El teorema de Weierstrass – Sundman para el caso de n-cuerpos.	257
9.6 El Método de Regularización, nociones.	280
Epílogo.	283
Bibliografía.	289

Prefacio.

Estos “apuntes” sobre Mecánica Celeste Clásica están destinados a los alumnos que recién comienzan a estudiar y relacionarse con los *problemas dinámicos* de la Astronomía, por supuesto es necesario tener conocimiento de ciertos temas vinculado con Análisis Matemático III ¹, Mecánica Analítica y Métodos Numéricos.

La Mecánica Celeste es una rama de las Ciencias Exactas que estudia el movimiento de los cuerpos celestes utilizando como herramienta primordial las leyes de la Física Clásica. Por lo tanto, la Mecánica Celeste nos permite analizar en detalle el movimiento de los planetas alrededor del Sol, el de la Luna en torno a la Tierra, la órbita de un cometa, de una nave espacial a través del Sistema Solar, etc. Esta disciplina procura describir en forma matemática las fuerzas que actúan sobre un determinado sistema de cuerpos celestes (fuerzas gravitacionales, resistencia atmosférica, presión de radiación, etc.) obteniendo un conjunto de ecuaciones diferenciales, *que en teoría*, al ser resueltas permiten hallar el vector posición y velocidad de cada cuerpo para un cierto instante de tiempo.

Los orígenes y primeras ideas de esta apasionante disciplina se remonta a los tiempos de los filósofos griegos (siglo VI a. C.) uno de los cuales Pitágoras de Samos afirmaba que la Tierra era esférica y no ocupaba el centro del Universo además, observaron que el Sol, la Luna y los planetas no participan del movimiento uniforme de las estrellas, ya que cada uno tenía su propia trayectoria. Otro gran filósofo Demócrito, nacido en el 470 a. C., desarrolló la teoría atómica de la materia. Para él toda la materia consistía de pequeñas partículas a las que llamó "*átomos*", esta palabra significa "*indivisible*". Los escritos de Demócrito no se pudieron recopilar pero sus ideas se conocen por referencias de otros filósofos. Las ideas de Demócrito fueron totalmente intuitivas y a ellas se opusieron otras igualmente intuitivas de filósofos como Sócrates y Platón las cuales, para desgracia de la ciencia, tuvieron durante muchos siglos gran influencia en el mundo.

EL RENACIMIENTO.

A mediados del siglo XV se produjo en Italia un cambio social, económico y sobre todo intelectual, el cual produjo una evolución en las artes y la ciencia, y poco tiempo después en toda Europa. Los intelectuales de esa época se interesaron nuevamente en leer y estudiar los antiguos escritos griegos. Muchos de éstos “textos” no se perdieron, gracias a que los árabes los habían traducido en el siglo IX. Los textos árabes fueron también traducidos al latín por *Gerardo de Cremona* en el siglo XII, utilizando los libros que quedaron en Toledo (España) al ser reconquistada por los “*castellanos*” en el siglo XV. El descubrimiento de la imprenta por *Gutemberg* y los viajes de los “adelantados” españoles y portugueses, principalmente los de *Colón* y *Magallanes*, cambiaron los conceptos e ideas en la mente de los *científicos europeos*.

La expresión *Renacimiento* representa la “*reactivación*” del conocimiento y el progreso después de siglos de predominio del pensamiento dogmático establecido en la Europa de la *Edad Media*. Esta nueva etapa transformo el conocimiento científico y propuso una nueva forma de ver el mundo y al

¹ Donde se estudia: Ecuaciones Diferenciales Parciales, Desarrollos en Serie de Fourier, Funciones Especiales, Métodos de Aproximaciones Sucesivas, etc.

“*ser humano*”, estimuló el interés por las artes, la política y las ciencias, “examinando” el concepto “*geocéntrico*” medieval y sustituyéndolo por el “*heliocéntrico*”.

Una de las mentes brillantes del Renacimiento fue **Leonardo da Vinci** (1452-1519), además de ser un brillante pintor y escultor también se destacó por su pensamiento científico. En sus escritos sugiere que la verdadera ciencia comienza con la observación y que la “experimentación” es la madre de toda verdad. Este modo de investigar fue empleado por **Galileo Galilei** (15/02/1564-8/01/1642) un siglo después para desarrollar la ciencia moderna y los criterios de observación con un telescopio.

Nicolas Copérnico (19/02/1473-24/05/1543), científico polaco que estudió medicina y astronomía en Italia, redescubrió la teoría heliocéntrica de *Aristarco* y postuló que el movimiento de los planetas se podía demostrar y expresar fácilmente si se suponía que orbitaban entorno del Sol y escribió ¹:

“*Primero y sobre todo hallar la esfera de las estrellas fijas, conteniendo todas las cosas, y por esta razón inamovible que es, en verdad, el armazón del Universo, al cual deben referirse el movimiento y posición de todos los demás cuerpos celestes. De éstos el primero es Saturno, que recorre su ciclo en treinta años; síguete Júpiter, que lo hace en doce años; después Marte, cuyo recorrido es bienal; el cuarto en orden de duración de los ciclos es la Tierra, con la órbita lunar como un epiciclo; el quinto lugar corresponde a Venus, cuya rotación dura nueve meses, y el sexto, a Mercurio, que la efectúa en ochenta días. En el centro de todo brilla el Sol*”. (https://es.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Copernico).

La *Mecánica Celeste*, que ahora denominamos “*clásica*” comienza con las leyes de **Johannes Kepler** (27/12/1571– 15/11/1630), astrónomo y matemático alemán quien demostró que el movimiento de los planetas alrededor del Sol se realiza en órbitas cerradas. Su hipótesis sobre el Sistema Solar revolucionó los conceptos e ideas tradicionales vigentes hasta entonces, fundamentalmente la hipótesis geocéntrica propuesta por los clásicos griegos.

Este nuevo concepto sobre el movimiento planetario fue posteriormente fundamentado por el físico y matemático inglés Isaac Newton (25/12/1642-20/03/1727), quien formuló la ley de atracción gravitacional. Las leyes de Newton, no solamente explican las leyes de Kepler sino que predicen otras trayectorias para los cuerpos celestes: parábolas e hipérbolas. Posteriormente fue tratada, perfeccionada y desarrollada teóricamente y numéricamente con estudios más analíticos y matemáticos por Laplace, Lagrange, Hamilton, Euler, Bessel, Poisson y otros notables astrónomos y matemáticos en los siglos XVIII y XIX.

Kepler fue el primero en proponer las leyes que definen las órbitas a partir de las observaciones empíricas del movimiento de Marte apoyadas, en gran parte, en las observaciones astronómicas realizadas por **Tycho Brahe** (14/12/1546-24/10/1601) quien se negaba a dar dichos datos hasta que en su lecho de muerte lo llamó para decirle que se las otorgaría, después que murió, su familia aceptó dárselas a **Kepler** (después de mucho insistir). Años más tarde, **Newton** desarrolló su ley de gravitación basándose en el trabajo de **Kepler**.

Isaac Newton introdujo la idea y el concepto que el movimiento de los cuerpos en el cielo, como los planetas, el Sol, y la Luna, y el movimiento de objetos en la Tierra, como las “manzanas que caen de un árbol”, podían ser descriptos por las mismas leyes de la física. En este sentido él unificó el

¹ Su libro *De revolutionibus orbium coelestium* (*Sobre las revoluciones de las esferas celestes*) suele ser considerado el inicio y fundador de la astronomía moderna.

concepto y estudio del movimiento dinámico de los *cuerpos celestes* y de los cuerpos terrestres, es por esta razón que su Ley de Gravitación se llama Universal.

Después aparecieron los trabajos científicos de Gottfried Leibniz, Pierre-Simon Laplace, Joseph-Louis de Lagrange, Urbain Le Verrier, Simon Newcomb entre otros. La Mecánica Celeste y el estudio dinámico del Sistema Solar (teoría de perturbaciones, puntos de equilibrio, grandes aproximaciones, colisiones binarias y triples, desarrollos de métodos de cálculo, etc.) alcanzaron un gran desarrollo teórico, analítico y numérico en los siglos XVIII y XIX y a principios del siglo XX debido al gran interés que motivo su investigación e interpretación, incentivó a un gran número de astrónomos, matemáticos y físicos como: Tisserand, Poincaré, Charlier, Brown, Hill y otros a escribir numerosos tratados y libros que todavía son consultados.

Dedico estos Apuntes a mis Profesores de la Carrera de Astronomía y en especial de Mecánica Celeste y Análisis Matemático III como un homenaje y un recuerdo muy afectuoso a todos ellos.

Agradecimientos:

A la Doctora Romina P. Di Sisto y al Doctor Gonzalo Carlos De Elía por haber examinado minuciosamente este manuscrito y sus valiosas correcciones y comentarios. A ambos distinguidos colegas muchas gracias.

Francisco López García.
Ciudad de La Plata, primavera de 2018.

Capítulo 1

Conceptos astronómicos y dinámicos.

§ 1.1 Introducción.

El fundamento teórico de estos apuntes está basado en los principios de la Mecánica Clásica ¹, pero su aplicación concierne a los cuerpos celestes, en particular aquellos que pertenecen al Sistema Solar. Los conceptos básicos para estudiar la Mecánica Celeste se encuentran en las *tres leyes del movimiento y la ley de la gravitación de Newton* ², enunciada en su celebre trabajo: “*Philosophiae Naturales Principia Matemática*”, en 1687. Sin embargo, debemos destacar que fue *Kepler* ³ quien, años antes, dedujo sus tres famosas “leyes” sobre el movimiento de los planetas, utilizadas luego por Newton para enunciar su célebre ley de la gravitación. Efectivamente, las tres leyes de Kepler fueron las que permitieron deducir el tipo de fuerzas que actúan sobre un planeta. Las *leyes de Kepler* son:

Primera ley (1609). La órbita que describe un planeta en torno del Sol es una elipse, donde el Sol ocupa uno de los focos.

Segunda ley (1609). El radio vector que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

Tercera ley (1618). Para todos los planetas, el cuadrado de su periodo orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor a de su órbita.

Estas propiedades, que satisfacen el movimiento planetario, fueron enunciadas por Kepler analizando los datos observacionales sobre la posición de los planetas realizadas por el astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601), principalmente las relacionadas con el movimiento de Marte.

NOTA: **Tycho Brahe**, astrónomo danés, considerado como el más grande observador del cielo en el período de la observación astronómica sin telescopio; hizo que se construyera Uraniborg, un palacio que se convertiría en el primer instituto de investigación astronómica de Europa. Los instrumentos diseñados por Tycho Brahe le permitieron medir las posiciones de las estrellas y los planetas con una precisión muy superior a la de la época.

¹ Goldstein, H.; 1963, “*Mecánica Clásica*”, Ed. Aguilar S.A.

Landau, L. D. & Lifshitz, M.; 1960, “*Mechanics*”, Ed. Pergamon Press Ltd.

² Sir Isaac Newton, nació el 4 de enero de 1643 (según calendario gregoriano) en Woolsthorpe, Inglaterra y murió en Kinsington, Londres el 31 de enero de 1727 (a los 84 años). Estudio y fue Profesor del Trinity College, University of Cambridge.

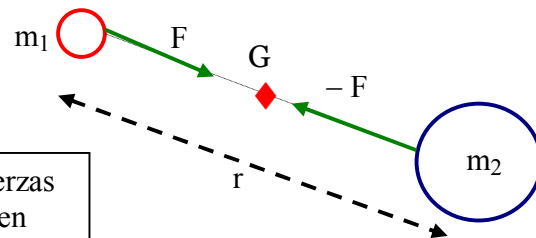
³ **Kepler**, Johannes, Nació el 27 de diciembre de 1571 y falleció el 15 de noviembre de 1630, de origen alemán. Sus leyes contribuyeron al conocimiento científico del Sistema Solar; fue astrónomo y matemático; Sus tres Leyes permitieron describir el movimiento de los planetas en su órbita alrededor del Sol. Fue colaborador de Tycho Brahe, a quien sustituyó como matemático imperial de Rodolfo II.

Atraído por la fama de Tycho Brahe, Johannes Kepler aceptó una invitación que le hizo para trabajar junto a él en Praga. Después de la muerte de Brahe, las mediciones de las posiciones de los planetas pasaron a estar a disposición de Kepler, y las observaciones del movimiento de Marte, en particular, de su movimiento retrógrado fueron esenciales para que pudiera formular las tres leyes que rigen el movimiento de los planetas. Posteriormente, estas leyes sirvieron de base a la Ley de la Gravitación Universal de Newton.

La ley de la gravitación universal enunciada por Newton en 1687, establece una relación cuantitativa para la fuerza de atracción entre dos cuerpos con masas finitas; este concepto físico se expresa por una ecuación cuyo enunciado es: “la fuerza que ejerce un cuerpo con masa m_1 sobre otro de masa m_2 es directamente proporcional al producto de ambas masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa”, es decir:

$$\vec{F} = k \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

De acuerdo con la mecánica newtoniana las dos fuerzas son iguales en módulo y dirección, pero contrarias en sentido; al estar aplicadas en diferentes cuerpos no se anulan y su efecto combinado no altera la posición del centro de gravedad G , común de ambas esferas.



El estudio de la Mecánica Celeste implica teorías dinámicas y matemáticas que permiten describir, con cierta precisión, el movimiento de los planetas alrededor del Sol, de los satélites alrededor de sus respectivos planetas, comprender el movimiento de un miembro de una estrella doble alrededor de la otra ó fenómenos similares. Tanto los datos observacionales como las teorías matemáticas permitieron comprender e interpretar el movimiento de los cuerpos celestes en todo el Universo observable. Fue Newton el primero en aportar nuevas ideas dinámicas y la matemática necesaria para estudiar y analizar el movimiento de los distintos cuerpos en el Sistema Solar.

Es importante destacar que las leyes de Kepler constituyen una descripción de la solución del problema gravitacional de n-cuerpos, donde:

- i) Todos los cuerpos pueden ser tratados como puntos masa.
- ii) Todas las masas, salvo una, son tan pequeñas que ellas no afectan apreciablemente el movimiento de las otras, pero son atraídas únicamente por el cuerpo de mayor masa.

Estas consideraciones tienen un alto grado de “exactitud” en el sistema dinámico Sol-planetas y en aquellos sistemas formados por un satélite moviéndose respecto de su primario; Sir Isaac Newton fue el primero en introducir estos conceptos, plantearlos y resolverlos satisfactoriamente.

En conclusión: si examinamos el movimiento orbital de los distintos miembros del Sistema Solar nos revelan ciertas propiedades ó características y además, varias incógnitas a resolver.

Por lo tanto, podemos asegurar que se cumplen las siguientes características orbitales y dinámicas:

- i) La mayoría de las órbitas en el Sistema Solar son elipses.
- ii) El movimiento de todos los miembros del Sistema Planetario (planetas, satélites, cuerpos menores, etc.) es “casi coplanar”.
- iii) La mayoría de los cuerpos satisfacen las leyes de Kepler.
- iv) Una ley de distribución orbital, similar a la de Bode, es posible.
- v) La conmensurabilidad entre los movimientos medios es un fenómeno frecuente.
- vi) Muchas partículas perteneciente a los anillos de Saturno ó algunos cuerpos en la región de asteroides, parecen evitar ciertas conmensurabilidad.
- vii) En ciertas órbitas cometarias así como también de satélites puede haber cambios o variaciones en sus elementos orbitales.

Los interrogantes ó controversias pueden ser los siguientes:

- i) Cual es el significado de las propiedades i) y vii) ?
- ii) Cuán estables son las orbitas planetarias teniendo en cuenta sólo sus mutuas perturbaciones gravitacionales ?.
- iii) Que edad tienen los planetas ?
- iv) Pueden los planetas colisionar entre si ?
- v) Los satélites retrógrados más externos de Júpiter y Saturno son asteroides capturados ?
- vi) Para un intervalo de tiempo muy grande la mayoría de las órbitas de los satélites son estables, aún si las fuerzas tidales son tenidas en cuenta ?.

Muchos de estos interrogantes todavía están sin responder.

Debemos aclarar que ésta es una visión clásica de la Mecánica Celeste que se hacia en los años 1950.

NOTA: Se recomienda consultar:

Danby, J.M.A.; 1992, “*Fundamentals of Celestial Mechanics*”, Ed. Willmann-Bell, Inc.
Roy, A. E.; 1978, “*Orbital Motion*”, Cap. 1. Ed. Adam Hilger Ltd.

En los textos de los siglos XVIII y XIX se definía a la Mecánica Celeste como una rama de la Astronomía que se ocupa del movimiento de los cuerpos celestes ¹; los principales fundamentos sobre los cuales estaban cimentados esta ciencia era la *Mecánica Teórica*, basada en los tres *Axiomas o Leyes* de Newton. Efectivamente, las dos primeras *Leyes de Newton* son suficientes para determinar el movimiento de un cuerpo sujeto a cualquier tipo de fuerzas conocida; sin embargo, es necesario otro “principio” cuando las investigaciones están relacionadas al movimiento de un sistema formado por dos o más cuerpos sujetos a sus mutuas interacciones. Precisamente, la *tercera ley de movimiento* expresa este principio y fue d’Alembert en 1742 quien la expreso con símbolos matemáticos ².

¹ **Tisserand**, F.; 1889, “*Traité de la Mécanique Céleste*”, (Paris, Ed. Gauthier-Villars).

Whittaker, E.T.; 1959, “*A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*”. Cambridge University Press.

² Consultar: Appell’s Mécanique, Vol. II, Cap. XXIII.

El concepto de *Astronomía Dinámica* implica la conexión entre procesos mecánicos y conocimientos físicos relacionados con los fenómenos observacionales. Formalmente la *Astronomía* es tan antigua que resulta casi imposible remontarnos a su origen; en cambio, la *Astronomía Dinámica* comienza en los tiempos de *Aristóteles* y desde entonces, importantes progresos “conceptuales” fueron realizados en solo muy breves intervalos.

Además, la aparición de los satélites artificiales y sondas interplanetarias han planteado interesantes problemas ante la posibilidad de posibles encuentros o colisiones, los cuales requieren “urgente” solución. Ante estos nuevos eventos, el término “astrodinámica” se aplica como una rama de la ciencia espacial la cual trata del comportamiento de objetos en el Sistema Solar bajo la acción de la ley de gravitación de Newton. También incluye temas como los efectos de la atmósfera, campos electromagnéticos, presión de radiación, etc. Por lo tanto, el estudio del movimiento orbital incluye a la Mecánica Celeste, Astrodinámica, Cinemática Estelar, Dinámica Estelar, movimiento de Sistemas Binarios, etc., y en las últimas décadas ha tenido un desarrollo muy significativo.

La expresión “movimiento orbital” se refiere al movimiento de un cuerpo de masa m respecto de otro de masa m_0 . Habitualmente este concepto implica el movimiento de un satélite alrededor de un planeta, ó de un planeta entorno del Sol, ó de una estrella alrededor de otra ó respecto del centro de la Galaxia, etc. Las distintas ramas de la dinámica han sido desarrolladas desde los tiempos de Newton para abordar los problemas asociados con temas matemáticos como las EDs en distintos sistemas de referencia utilizando variables físicas y otras sin dimensión. Es por esta razón que la Mecánica Celeste, la más antigua de estas ramas, iniciada por Newton alcanzó todo su clásico desarrollo durante los siglos XVIII y XIX, culminando con los “extraordinarios trabajos” de Poincaré y el completo tratamiento del movimiento de la Luna de Hill y Brown.

NOTA. Para una descripción sobre el desarrollo de la Mecánica Celeste recomendamos:

Barrow-Green, J.; 1997, “*Poincaré and the Three Body Problem*”. History of Mathematics, Vol. 11. Ed. American Mathematical Society.

Siegel, C.L. & Moser, J.K.; 1995, “*Lectures on Celestial Mechanics*”. Ed. Springer-Verlag.

Szebehely, V.; 1967, “*Theory of Orbits*”, Ed. Academic Press.

Capítulo 2

La teoría de los dos cuerpos.

§ 2.1 Conceptos generales.

Sea O un punto del espacio Euclidiano tridimensional, fijo o móvil y consideremos dos masas cualesquiera, sean m_0 y m_1 ; expresado de otro modo: dos puntos materiales de masa m_0 y m_1 , o dos cuerpos cuyas masas m_0 y m_1 supondremos concentradas en sus centros de gravedad y sean además, R_0 y R_1 los vectores de posición de dichos puntos masa respecto de O . Ver Figura 1.

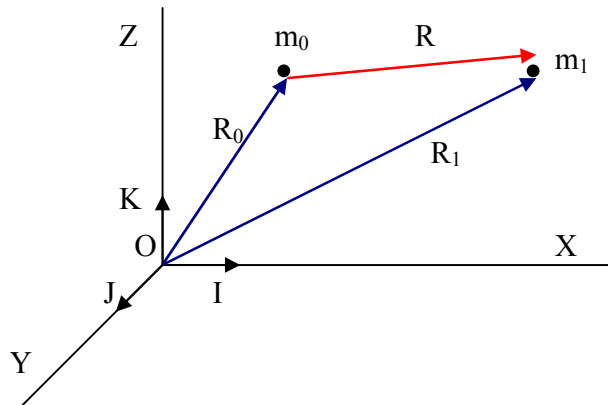


Fig. 1. Representación vectorial de la posición de m_0 y m_1 en el espacio Euclidiano \mathfrak{R}^3 . Donde $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0$, es la distancia mutua entre las masas.

De acuerdo con la ley de la Gravitación Universal de Newton ¹, cada uno de los puntos masa atrae al otro según una fuerza cuyo módulo es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas; sea $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0$, si definimos $r = |\mathbf{R}|$, entonces resulta:

$$F = G \frac{m_0 m_1}{r^2}$$

Donde la fuerza F actúa a lo largo del vector \mathbf{R} y G es una constante de proporcionalidad.

¹ La formulación matemática fue publicada por Isaac Newton en 1687, en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, aunque existe una versión previa en un fragmento manuscrito *De motu corporum in mediis regulariter cedentibus* de 1684.

G se denominada *constante de la Gravitación Universal* y depende de las unidades elegidas; el valor hallado experimentalmente en el laboratorio es:

$$G = 6,672 \times 10^{-8} \text{ en unidades c.g.s.}$$

NOTA: El análisis de los movimientos (órbitas) de los cuerpos que pertenecen al Sistema Planetario confirma que G es una constante, la cual es independiente de las condiciones físicas de los cuerpos tales como temperatura, composición química, etc. por lo tanto, es razonable suponer que es una *constante universal*. En general, m_0 es mucho mayor que m_1 ; por ejemplo, en el Sistema Solar, si m_0 representa la masa del Sol y m_1 la masa de cualquier planeta ¹ entonces, los efectos de atracción del planeta sobre el Sol son pequeños comparados con los efectos de atracción del Sol sobre el planeta; en consecuencia, el Sistema Solar esta representado, en primera aproximación, por un modelo físico con un “centro fijo de atracción”. El valor de la constante de la Gravitación Universal depende del sistema de unidades elegidas; si estas son: unidad de distancia: 1 UA (unidad astronómica), unidad de masa: 1 masa solar y unidad de tiempo: 1 día solar medio entonces, el valor de la constante gravitacional en estas unidades, denomina constante de Gauss o constante Gaussiana es: $k = 0.017\ 202\ 098\ 05$.

En este Capítulo nos proponemos estudiar el movimiento de dos puntos masa respecto de un sistema de referencia fijo, en el espacio euclidiano \mathfrak{R}^3 , con origen en O. Sean $\{I, J, K\}$ los versores ortogonales ² que definen la terna fija (X, Y, Z) entonces, los vectores de posición tienen la expresión:

$$\mathbf{R}_0 = x_0 I + y_0 J + z_0 K, \quad \mathbf{R}_1 = x_1 I + y_1 J + z_1 K;$$

por lo tanto, el módulo del vector \mathbf{R}_0 es: $|\mathbf{R}_0| = r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, análogamente el módulo de \mathbf{R}_1 es: $|\mathbf{R}_1| = r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. La distancia r, entre los dos puntos masa considerados, es el módulo del vector diferencia de \mathbf{R}_1 menos \mathbf{R}_0 ; i.e., $r = |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$.

Vamos a deducir las ecuaciones del movimiento aplicando el segundo principio de la dinámica. “*La variación del momento lineal de una partícula, con respecto al tiempo, es proporcional a la fuerza aplicada a la partícula y tiene lugar en la misma dirección que la fuerza*”.

Sea Γ_0 y Γ_1 las aceleraciones de las masas m_0 y m_1 respectivamente entonces, para el punto masa m_0 resulta,

$$m_0 \Gamma_0 = k^2 \frac{m_0 m_1}{r^2} \frac{(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0)}{r}$$

simplificando se tiene

$$\Gamma_0 = \ddot{\mathbf{R}}_0 = k^2 \frac{m_1}{r^3} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) \quad (2.1)$$

¹ Si m_0 representa la masa del Sol entonces, $m_0 = 1 \mathcal{M}_{\text{Sol}}$; si m_1 es la masa de Júpiter resulta: $m_1 = \mathcal{M}_{\text{Júpiter}} \sim 0.001 \mathcal{M}_{\text{Sol}}$.

² $|I| = |J| = |K| = 1$ y perpendiculares entre si.

y una expresión similar para la masa m_1 , luego

$$\Gamma_1 = \ddot{R}_1 = k^2 \frac{m_0}{r^3} (R_0 - R_1)$$

o también,

$$\ddot{R}_1 = -k^2 \frac{m_0}{r^3} (R_1 - R_0) \quad (2.2)$$

NOTA: La aceleración $\Gamma_i = d^2 R_i / d t^2 = \ddot{R}_i$.

Por lo tanto, si representamos el vector diferencia $(R_1 - R_0)$ por P , i.e., $(R_1 - R_0) = P$, donde P es un vector variable función del tiempo, $P = P(t)$ entonces, restando miembro a miembro la ecuación (2.2) de (2.1) resulta:

$$\ddot{P} = \ddot{R}_1 - \ddot{R}_0 = -\frac{k^2}{r^3} m_0 P - \frac{k^2}{r^3} m_1 P$$

agrupando, $\ddot{P} = -\frac{k^2}{r^3} (m_0 + m_1) P$, $\Rightarrow \ddot{P} = -\frac{k^2 (m_0 + m_1)}{r^3} P$; si definimos $k^2 (m_0 + m_1) = \mu$

se tiene: $\ddot{P} = -\frac{\mu}{r^3} P$, o sea

$$\ddot{P} + \frac{\mu}{r^3} P = 0 \quad (2.3)$$

La expresión (2.3) es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables del *problema de los dos cuerpos* en forma vectorial; esta ecuación es *integrable*¹ y define el movimiento de uno cualquiera de los puntos masa respecto del otro, *movimiento relativo*. Esto se debe a que siempre es posible fijar (o determinar) uno cualquiera de los vectores R_0 ó R_1 ; por ejemplo, si fijamos R_0 y resolvemos la ecuación de movimiento del problema de los dos cuerpos podemos hallar la ley de variación del vector P en función del tiempo y por tanto, la ley de variación del vector R_1 lo cual significa conocer la ley del movimiento del cuerpo m_1 respecto de m_0 , definido como origen.

Un razonamiento análogo se puede hacer fijando el punto masa m_1 y determinar la ley del movimiento de m_0 .

A partir de la ED (2.3) se pueden deducir dos integrales importantes². Si multiplicamos vectorialmente ambos miembros de la ecuación (2.3) por el vector P , resulta

$$P \times \ddot{P} + \frac{\mu}{r^3} P \times P = 0$$

pero $P \times P \equiv 0$, por ser vectores paralelos. Luego, $P \times \ddot{P} = 0$ entonces, $D(P \times \dot{P}) = 0$, y por tanto:

¹ Una ecuación diferencial es integrable cuando podemos expresar su solución en forma cerrada (mediante funciones elementales) o por series de potencias convergentes.

² Las integrales del movimiento son expresiones analíticas, generalmente cerradas, que permanecen constantes durante el movimiento. Conocidas también como *integrales primeras*.

$\mathbf{P} \times \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{C} = \text{constante}$. Entonces la igualdad

$$\mathbf{P} \times \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{C} \quad (2.4)$$

es una *integral primera del movimiento*, siendo \mathbf{C} un vector constante. La ecuación (2.4) nos dice que el *vector momento angular* del sistema permanece constante durante el movimiento y es perpendicular al plano que definen los vectores \mathbf{P} y $\dot{\mathbf{P}}$, vector posición y velocidad respectivamente; esto significa que el movimiento tiene lugar en el plano definido por \mathbf{P} y $\dot{\mathbf{P}}$, y por tanto $\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} = 0$ ¹, siempre que $\mathbf{C} \neq 0$. La ecuación (2.4) se denomina *Integral de las Áreas*.

Si multiplicamos la ecuación (2.3) escalarmente por $\dot{\mathbf{P}}$, se obtiene

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \ddot{\mathbf{P}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{P}} = 0,$$

los productos interiores se pueden escribir de la forma: $\dot{\mathbf{P}} \cdot \ddot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} D(\dot{\mathbf{P}}^2)$ y $\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} D(\mathbf{P}^2)$; si reemplazamos estas expresiones en la ecuación anterior resulta:

$$\frac{1}{2} D(\dot{\mathbf{P}}^2) + \frac{\mu}{r^3} \frac{1}{2} D(\mathbf{P}^2) = 0,$$

por definición $\mathbf{P}^2 = r^2$, entonces se tiene: $\frac{1}{2} D(\dot{\mathbf{P}}^2) + \frac{1}{2} \frac{\mu}{r^3} D(r^2) = 0$; e integrando término a término resulta la ecuación

$$\dot{\mathbf{P}}^2 - 2 \frac{\mu}{r} = h \quad (2.5)$$

donde h es una constante de integración.

La ecuación (2.5) representa la *integral de la energía* o la *integral de las fuerzas vivas*. A diferencia de la integral de las áreas, ecuación vectorial, la integral de la energía es una ecuación escalar.

Si en la integral vectorial de las áreas (2.4) multiplicamos escalarmente por el vector posición \mathbf{P} resulta: $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \times \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{P} = 0$; esta ecuación expresa que el vector \mathbf{P} se desplaza siempre en un plano, ¿por qué? ²; luego, el movimiento de los cuerpos m_0 y m_1 se realiza en un plano. Los vectores \mathbf{P} y \mathbf{C} están representados, en función de sus coordenadas cartesianas, de la forma:

$$\mathbf{P} = x \mathbf{I} + y \mathbf{J} + z \mathbf{K}, \quad \mathbf{C} = c_1 \mathbf{I} + c_2 \mathbf{J} + c_3 \mathbf{K}$$

Luego, $\mathbf{C} \cdot \mathbf{P} = c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$ es la ecuación de un plano que pasa por el origen de coordenadas, donde c_1 , c_2 , y c_3 son coeficientes constantes.

¹ Por ser $\mathbf{P} \perp \mathbf{C}$.

² Si el producto escalar de dos vectores es nulo significa que ambos vectores son perpendiculares y por tanto, el vector posición \mathbf{P} es \perp al vector momento angular \mathbf{C} .

Es posible considerar un sistema de coordenadas rectangulares, con origen en m_0 , que contenga en el plano $\{x,y\}$ al punto masa m_1 y por tanto, su movimiento; esto significa que estamos suponiendo que el mismo se realiza en el plano $\{x,y\}$. Ver Figura 2.

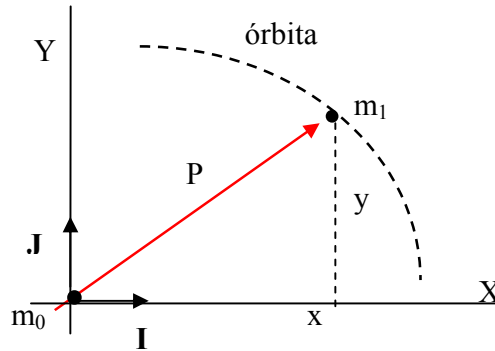


Fig. 2. Representación gráfica del movimiento relativo de m_1 respecto de m_0 (origen) en el plano $\{x,y\}$.

Las ecuaciones del movimiento relativo se obtienen haciendo $z = 0$ en toda la teoría anterior. Entonces la expresión cartesiana del vector P es:

$$P = x I + y J; \text{ su módulo } |P| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y } \dot{P} = \dot{x} I + \dot{y} J, \text{ su variación respecto del tiempo.}$$

Luego, la ecuación vectorial (2.3) en coordenadas cartesianas toma la forma:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\mu}{r^3} x &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{\mu}{r^3} y &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Es decir, un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, el cual requiere cuatro constantes de integración para su solución completa; hallar e interpretar estas constantes constituye la "esencia" del problema de los dos cuerpos en el plano ¹. En síntesis, el sistema (2.6) representa el movimiento relativo de m_1 respecto de m_0 en el plano $\{x,y\}$.

A partir de la ecuación vectorial (2.4), i.e., $P \times \dot{P} = C$, resulta

$$x \dot{y} - y \dot{x} = c_3 \tag{2.7}$$

la integral de las áreas en el plano en coordenadas cartesianas.

Finalmente, la integral de la energía (2.5) en coordenadas cartesianas y en el plano tiene la expresión:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = V^2 = \frac{2\mu}{r} + h \tag{2.8}$$

¹ Se sugiere consultar: **Danby**, J.M.A.; 1992. "Fundamentals of Celestial Mechanics", Capítulo 6, pág. 125.

donde V es la velocidad relativa de m_1 respecto de m_0 . Si definimos la función $U(r) = -\frac{\mu}{r}$, denominada *función potencial*, entonces (2.8) toma la forma

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + U(r) = h \quad (2.9)$$

donde $\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$; es otro modo de escribir la *integral de la energía*. Si adoptamos $U(r)$ tal que tienda a cero cuando r tiende a infinito, entonces la constante h representa la *energía de la órbita*. En la ecuación (2.9) la cantidad $[h - U(r)]$ debe ser no negativa, de modo que los círculos obtenidos por las soluciones de

$$h - U(r) = 0$$

representan en general, contornos “fundamentales” que no pueden ser cruzados durante el movimiento. En particular, si h es negativo, debe ser un límite superior para los posibles valores de r , de modo que el movimiento está acotado. Si h es positivo y dU/dr siempre conserva el mismo signo, la velocidad tiende a un límite finito cuando r tiende a infinito; la partícula nunca retorna y el movimiento es infinito.

NOTA: Las integrales (2.7) y (2.8) representan las ecuaciones fundamentales en el caso de órbitas centrales, donde el potencial $U(r)$ es una función de punto i.e., es función sólo de las coordenadas ¹.

§ 2.2 El movimiento en coordenadas polares.

Las variables cartesianas $\{x,y\}$ y sus derivadas respecto del tiempo, tienen la siguiente expresión en coordenadas polares ². Ver Figura 3.

$$x = r \cos \omega, \quad \dot{x} = \dot{r} \cos \omega - r \dot{\omega} \sin \omega$$

$$y = r \sin \omega, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \omega + r \dot{\omega} \cos \omega$$

y las relaciones $\dot{x}\dot{y}$ e $\dot{y}\dot{x}$ tienen la forma:

$$\dot{x}\dot{y} = \dot{r}\dot{r} \cos \omega \sin \omega + r^2 \cos^2 \omega \dot{\omega}$$

$$\dot{y}\dot{x} = \dot{r}\dot{r} \sin \omega \cos \omega + r^2 \sin^2 \omega \dot{\omega}$$

luego, la integral de las áreas $\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x} = c_3$, en coordenadas polares, resulta

$$r^2 \dot{\omega} = c_3 = C \quad (2.10)$$

¹ Moulton, F.R.; 1970, “An Introduction to Celestial Mechanics”, Ed. Dover Publications, Inc.

Taff, L.G.; 1985, “Celestial Mechanics”, Ed. Wiley.

² Consultar Balanzat, M.; 2002, “Matemática Avanzada para la Física”, Ed. Eudeba.

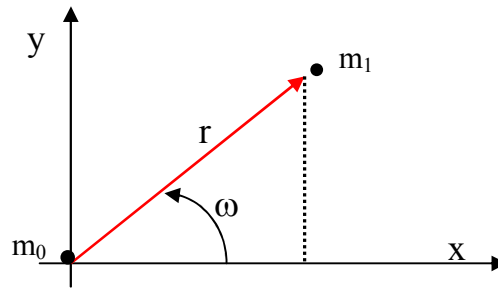


Fig. 3. Representación gráfica de las coordenadas polares $\{r, \omega\}$ del cuerpo m_1 en el plano.

Del mismo modo calculamos $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\omega}^2$, luego la integral de la energía tiene la forma

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\omega}^2 = \frac{2\mu}{r} + h \tag{2.11}$$

también es frecuente expresar la ecuación de la energía en coordenadas polares como

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\omega}^2) + U(r) = h \tag{2.12}$$

donde $U(r) = -\frac{\mu}{r}$.

NOTA: Las ecuaciones (2.10) y (2.12) no se modifican si reemplazamos t por $-t$, pero la constante h tiene el signo opuesto de modo que el movimiento es *reversible*. Esto significa que si v^1 cambiara su signo en un punto la trayectoria retrocedería i.e., tendría dirección contraria. De la integral de las áreas, $r^2 \dot{\omega} = C$ es evidente que $\dot{\omega}$ debe conservar el mismo signo durante el movimiento; generalmente es considerado positivo. Además, si h es positivo, $\dot{\omega}$ tiende a cero cuando r tiende a infinito; entonces, puesto que \dot{r} tiende a un límite finito, el movimiento debe ser asintótico, como ocurre con el movimiento hiperbólico. Por otra parte, si $h = 0$ (órbita parabólica en el movimiento Kepleriano), \dot{r} tiende a cero, $\dot{r} \rightarrow 0$.

La ecuación de la órbita. A partir de la ley de las áreas podemos obtener dt y reemplazar en la integral de la energía, procediendo de la siguiente forma:

$$r^2 \dot{\omega} = r^2 \frac{d\omega}{dt} = C \Rightarrow dt = \frac{r^2}{C} d\omega$$

¹ v representa la velocidad de m_1 respecto de m_0 en coordenadas cartesianas o polares.

La integral de la energía en coordenadas polares tiene la expresión:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = 2\frac{\mu}{r} + h \Rightarrow (dr)^2 + r^2 (d\omega)^2 = 2\frac{\mu}{r} (dt)^2 + h (dt)^2$$

donde, $(dt)^2 = \frac{r^4}{C^2} (d\omega)^2$; entonces, $(dr)^2 + r^2 (d\omega)^2 = 2\frac{\mu}{r} \frac{r^4}{C^2} (d\omega)^2 + h \frac{r^4}{C^2} (d\omega)^2$

agrupando y simplificando resulta, $(dr)^2 = \left(2\mu \frac{r^3}{C^2} + h \frac{r^4}{C^2} - r^2\right) (d\omega)^2$, luego

$$dr = \left(2\mu \frac{r^3}{C^2} + h \frac{r^4}{C^2} - r^2\right)^{1/2} d\omega;$$

y por tanto,

$$d\omega = \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\frac{\mu}{C^2} \frac{1}{r} + h \frac{1}{C^2} - \frac{1}{r^2}}}$$

integrando ambos miembros se tiene,

$$\omega = \int \frac{1}{r^2} \frac{dr}{\left[\frac{h}{C^2} + \frac{\mu^2}{C^4} - \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\right)^2\right]^{1/2}},$$

para resolver la integral introducimos nuevas variables, sea: $\alpha^2 = \frac{h}{C^2} + \frac{\mu^2}{C^4}$, y $u = \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\right)$,

entonces $u^2 = \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\right)^2$ y $du = -\frac{1}{r^2} dr$, reemplazando en la integral resulta,

$$\omega = -\int \frac{du}{(\alpha^2 - u^2)^{1/2}} = \arccos \frac{u}{\alpha} + \omega_0 \Rightarrow \frac{u}{\alpha} = \cos(\omega - \omega_0), \text{ reemplazando } u \text{ y } \alpha \text{ se obtiene,}$$

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} = \sqrt{\frac{h}{C^2} + \frac{\mu^2}{C^4}} \cos(\omega - \omega_0) \Rightarrow r = \frac{1}{\frac{\mu}{C^2} + \left(\frac{h}{C^2} + \frac{\mu^2}{C^4}\right)^{1/2} \cos(\omega - \omega_0)},$$

Otra forma de expresar el radio vector r es:

$$r = \frac{\frac{C^2}{\mu}}{1 + \left(\frac{h C^2}{\mu^2} + 1 \right)^{1/2} \cos(\omega - \omega_0)}$$

entonces, si definimos $\frac{C^2}{\mu} = p$ y $e = \left(1 + \frac{h C^2}{\mu^2} \right)^{1/2}$ resulta la siguiente expresión “clásica”:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\omega - \omega_0)} \tag{2.13}$$

que representa la ecuación, en coordenadas polares, de una cónica ¹, i.e., es la trayectoria que describe el punto masa m_1 con respecto al punto m_0 (origen de referencia) denominado foco de la cónica; las cantidades e y ω_0 son constantes arbitrarias y p , *semilatus rectum*, un parámetro. La forma de la cónica esta definida por los valores que adopta e , *excentricidad*, a saber:

- $e = 0$ es una circunferencia
- $e = 1$ es una parábola
- $e < 1$ es una elipse \Rightarrow (Primera ley de Kepler)
- $e > 1$ es una hipérbola

Resumen.

Las ecuaciones del movimiento relativo de m_1 respecto de m_0 , en el plano $\{x,y\}$, son:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{r^3} x = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{\mu}{r^3} y = 0,$$

donde $\mu = k^2(m_0 + m_1)$. Las integrales primeras del sistema de ED, integrales del movimiento son:

$$x \dot{y} - y \dot{x} = C$$

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{\mu}{r} + h,$$

donde: $r^2 = x^2 + y^2$; llamadas integral de las áreas y de la energía respectivamente. Estas expresiones, en coordenadas polares tienen la forma:

¹ La palabra “cónica” proviene de la frase “sección cónica”. Sus propiedades se pueden hallar en: **Danby, J. M.;** 1992, “*Fundamentals of Celestial Mechanics*”, Apéndice A, pág. 413.

$$r^2 \dot{\omega} = C$$

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\omega}^2) = \frac{\mu}{r} + h$$

Entonces, a partir de este sistema de ecuaciones diferenciales hemos deducido la ecuación de la órbita,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\omega - \omega_0)}$$

donde $p = \frac{C^2}{\mu}$ es un parámetro y la constante arbitraria e (excentricidad) es función del valor de h ,

constante de la energía; $e = \left(1 + \frac{h C^2}{\mu^2}\right)^{1/2}$, luego

$$e \begin{cases} < 1 & h < 0 & \text{elipse} \\ > 1 & h > 0 & \text{hiperbola} \\ = 1 & h = 0 & \text{parabola} \end{cases}$$

La representación gráfica del movimiento relativo de dos cuerpos, en el plano y en coordenadas polares, se muestra en la Figura 4.

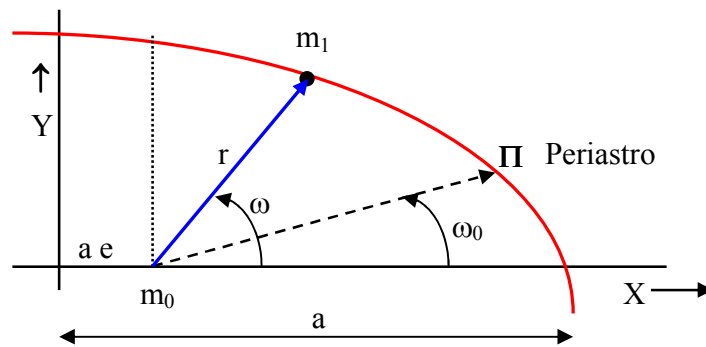


Fig. 4. Descripción del movimiento de m_1 respecto de m_0 en coordenadas polares. Π es la posición del periastro. Las coordenadas polares que definen la posición de m_1 son r y ω .

Cálculo de los valores máximos y mínimos del radio vector r en función de ω . Suponemos que la dirección del argumento del periastro ω_0 coincide con la dirección del eje-x, luego $\omega_0 = 0$ y por tanto r será mínimo cuando $\omega = 0$, i.e., si $r = \frac{p}{1 + e \cos \omega}$ resulta para $\omega = 0$ que r será un mínimo, entonces

se tiene: $r = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e)$, por ser $p = a(1 - e^2)$.

Si $\omega = \pi$ entonces r es máximo, ya que $r = \frac{p}{1 - e} = a(1+e)$.

Además, como hemos visto $p = a(1 - e^2) = \frac{C^2}{\mu}$ luego, el módulo al cuadrado del vector momento

angular tiene la forma, $C^2 = \mu a(1 - e^2)$; también por definición, la excentricidad e tiene la expresión

$e = \sqrt{1 + \frac{h C^2}{\mu^2}}$, (ver pág. 13), entonces $e^2 = 1 + \frac{h C^2}{\mu^2}$ y reemplazando el valor hallado de C^2 resulta

$e^2 = 1 + \frac{h}{\mu} a(1 - e^2)$; luego $\frac{h}{\mu} a(1 - e^2) = -(1 - e^2)$ y a partir de esta igualdad podemos obtener

h como: $h = -\frac{\mu(1 - e^2)}{a(1 - e^2)}$ y por tanto,

$$h = -\frac{\mu}{a}$$

Expresión que representa la *energía total del sistema* y nos dice que es inversamente proporcional al semieje mayor de la órbita (una constante del movimiento); además, si $e < 1$ (órbita elíptica), a es positivo entonces la integral de la energía es negativa y la trayectoria es estable¹.

Tercera ley de Kepler. El elemento de área en coordenadas polares se obtiene del triángulo formado por r , $(r + dr)$ y $d\omega$, su expresión

analítica es: $dA = \frac{1}{2} r^2 d\omega$, ver Figura 5.

Teniendo en cuenta la ecuación (2.10), la

integral de las áreas: $r^2 \dot{\omega} = C$, resulta

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} = C; \text{ luego, } \frac{1}{2} r^2 d\omega = \frac{1}{2} C dt$$

y por tanto, $dA = \frac{1}{2} r^2 d\omega = \frac{1}{2} C dt$.

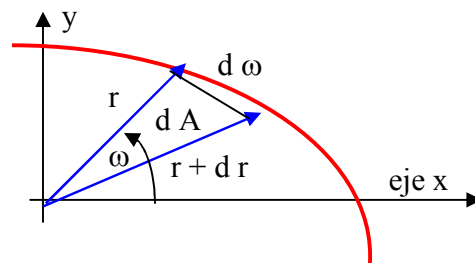


Fig. 5. Representación del elemento de área dA

Entonces, la *velocidad areal* esta expresada por la ecuación $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} C$; i.e., es una constante. Si

reemplazamos el valor de la constante C , hallado anteriormente, se obtiene

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \tag{2.14}$$

Expresión que relaciona la velocidad areal con los parámetros de la órbita a y e .

NOTA: La ecuación (2.14) es válida para $e < 1$.

¹ Un concepto muy importante en el estudio de los sistemas dinámicos. El movimiento $r(t)$ es *estable* si se satisfacen las siguientes dos condiciones:

- i) $r(t) \neq 0$ para todo valor de t en ausencia de colisión.
- ii) $|r(t)| \leq c$ ($c = \text{constante}$).

Si el movimiento es estable, entonces la energía total h del sistema es negativa. (Teorema de Jacobi).

Sea T el *período* de m_1 respecto de m_0 y n su *movimiento medio*, i.e., $n = \frac{2\pi}{T}$. Además, por definición, la velocidad areal en una órbita elíptica es: $\frac{\pi a b}{T}$; entonces, por definición de movimiento medio $T = \frac{2\pi}{n}$ luego, la velocidad areal es: $\frac{\pi a b}{T} = \pi \frac{a b}{2\pi} n = \frac{1}{2} a b n = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1 - e^2} n$ ¹. Por lo tanto, si igualamos las dos expresiones halladas para la velocidad areal, resulta

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu a (1 - e^2)} = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1 - e^2} n,$$

relación que nos permite determinar μ ,

$$\mu = n^2 a^3 = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

Consideremos dos planetas orbitando el Sol, con masas m_1 y m_2 ; sean a_1, n_1 y a_2, n_2 sus semi eje mayor y movimiento medio respectivamente, entonces se satisfacen las siguientes relaciones²:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= k^2 (m_0 + m_1) = n_1^2 a_1^3 \\ \mu_2 &= k^2 (m_0 + m_2) = n_2^2 a_2^3\end{aligned}$$

donde m_0 es la masa del Sol. Dividiendo miembro a miembro estas dos expresiones resulta,

$$\frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_2} = \frac{n_1^2 a_1^3}{n_2^2 a_2^3},$$

el primer miembro se puede expresar de la forma: $\frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_2} = 1 + \frac{m_1 - m_2}{m_0 + m_2}$, luego se tiene

$$\frac{n_1^2 a_1^3}{n_2^2 a_2^3} = 1 + \frac{m_1 - m_2}{m_0 + m_2}, \quad (2.15)$$

expresión que representa la *Tercera Ley de Kepler*.

NOTA: El enunciado de la tercera ley de Kepler es: “*El cuadrado de los periodos de dos planetas cualesquiera es proporcional al cubo de sus distancias medias desde el Sol*”.

$$\frac{T_1^2}{T_{\text{Tierra}}^2} \sim \frac{a_1^3}{a_{\text{Tierra}}^3}$$

¹ En una órbita elíptica a es el semi eje mayor y b el semi eje menor, están relacionados por: $b = a (1 - e^2)^{1/2}$.

² Recordar que la constante $\mu = k^2 (m_0 + m_1)$ donde k es la constante gravitacional del problema de dos cuerpos.

Luego,

$$\frac{n_1^2 a_1^3}{n_2^2 a_2^3} = 1, \quad (2.16)$$

Esta expresión es correcta si $m_0 \gg m_1$ y m_2 .

Entonces, de acuerdo a (2.15), la tercera ley de Kepler sólo se satisface aproximadamente en el Sistema Solar, pues en él la masa del planeta mayor (Júpiter) es del orden de 0,001 la masa del Sol ¹. En conclusión, la tercera ley de Kepler (2.16) sólo es válida en el Sistema Solar. La expresión rigurosa que la acredita es la fórmula (2.15). Si consideramos un sistema estelar (por ejemplo, un sistema binario) la fórmula que se debe aplicar, para obtener los elementos de la órbita o el movimiento medio, es la expresión (2.15).

NOTA: Cuando el movimiento de los cuerpos, en un sistema estelar, satisface las *tres Leyes de Kepler* se lo define como “*movimiento Kepleriano*” y en el caso de un sistema planetario, se dice que se mueven en “*órbitas Keplerianas*”. También es importante expresar el período (una revolución completa) en función de a y μ ,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$

Si en la integral de las áreas o integral de las fuerzas vivas, enunciada por la relación: $r^2 d\omega = C dt$, reemplazamos $d\omega$ y las constantes por sus desarrollos, ver pág. 12, entonces resulta:

$$d\omega = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\left(\frac{2\mu}{C^2} \frac{1}{r} + \frac{h}{C^2} - \frac{1}{r^2}\right)}} \quad \text{luego,} \quad C dt = r^2 \frac{dr}{r^2 \sqrt{\left(\frac{2\mu}{C^2} \frac{1}{r} + \frac{h}{C^2} - \frac{1}{r^2}\right)}}$$

factoreando $\frac{1}{C^2}$ y $\frac{1}{r^2}$ en el radicando resulta, $C dt = \frac{C r dr}{\sqrt{2\mu r + hr^2 - C^2}}$; recordemos que

$$C^2 = \mu a (1-e^2) \text{ y } \mu = n^2 a^3; \text{ reemplazando y simplificando se tiene, } dt = \frac{r dr}{na \sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}}$$

luego,

$$n dt = \frac{r dr}{a \sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}} \quad (2.17)$$

haciendo la sustitución: $r - a = -a e \cos E$, resulta $r = a (1 - e \cos E)$ y $dr = a e \sin E dE$; reemplazando en la ecuación diferencial (2.17) se tiene

¹ La masa de Júpiter $\mathcal{M}_{\text{Jup}} \cong 0.000954786 \mathcal{M}_{\text{Sol}}$.

$$n dt = \frac{(a - ae \cos E) ae \sin E dE}{a \sqrt{a^2 e^2 - a^2 e^2 \cos^2 E}} = \frac{(1 - e \cos E) \sin E}{\sqrt{1 - \cos^2 E}} dE,$$

luego, $n dt = (1 - e \cos E) dE$ ¹; integrando ambos miembros resulta, $n(t - \tau) = E - e \sin E$.

Sea $n(t - \tau) = M$, la *Anomalía Media*, entonces resulta

$$M = E - e \sin E \quad (2.18)$$

Expresión que define la *ecuación de Kepler*; relaciona la *anomalía excéntrica* E con la *anomalía media* M ; es una ecuación trascendente, por lo tanto su solución es por métodos iterativos².

NOTA: En las órbitas elípticas τ es una constante de integración y define el *instante de pasaje por el perihelio*.

La ecuación de Kepler y la búsqueda de su solución en forma numérica o analítica han promovido durante muchos años el interés de los astrónomos y matemáticos. A comienzo del siglo XX Moulton³ escribió:

“A very large number of analytical and graphical solutions have been discovered, nearly every prominent mathematician from Newton until the middle of the last century having given the subject more or less attention. A bibliography containing the references to 123 papers on Kepler’s equation is given in the Bulletin Astronomique, January 1900, and even this list is incomplete”.

La solución de la ecuación de Kepler ha sido y es un tema que todavía tiene vigencia en trabajos de investigación; aún las soluciones analíticas explícitas, que ahora son conocidas en la forma de integrales definidas, no son tan eficientes como los métodos numéricos. En general, las soluciones numéricas aplican el método de aproximaciones sucesivas².

El radio vector r expresado en función de la anomalía excéntrica tiene la forma: $r = a(1 - e \cos E)$. De la ecuación (2.13), que relaciona el vector r con la *anomalía verdadera* ω , podemos hallar su variación en función de la anomalía excéntrica luego, $r + r e \cos(\omega - \omega_0) = p$, si $\omega_0 = 0$ ⁴, resulta $r \cos \omega = \frac{p - r}{e} = \frac{p}{e} - \frac{r}{e}$; de acuerdo a la Figura 4, $x = r \cos \omega$, entonces $x = \frac{p}{e} - \frac{a(1 - e \cos E)}{e}$ sustituyendo el valor de $p = a(1 - e^2)$ y simplificando se tiene,

$$x = a(\cos E - e)$$

fórmula que permite calcular la abscisa x , en cualquier instante t , en función de la *anomalía excéntrica*.

¹ Recordar que: $\sin^2 E + \cos^2 E = 1$.

² López García, F.; 2004, “Introducción a la Dinámica del Sistema Solar”, Apéndice C, pág. 89.

Roy, A. E.; 1978, “Orbital Motion”, pág. 84.

³ Moulton, F.R.; 1914, “An Introduction to Celestial Mechanics”.

⁴ El ángulo $\omega_0 = 0$ define la posición del periastro.

En realidad x es función de la variable t a través de la anomalía excéntrica: $x \rightarrow f(E(t))$, ya que E es función de t a través de M , ver ecuación (2.18). Para calcular la ordenada y recordemos que: $r^2 = x^2 + y^2$ luego, $y^2 = r^2 - x^2$, reemplazando r y x por sus valores hallados resulta,

$$y^2 = a^2 (1 - e \cos E)^2 - a^2 (\cos E - e)^2,$$

operando algebraicamente se tiene

$$y^2 = a^2 (1 - e^2) \sin^2 E$$

por lo tanto,

$$y = a \sqrt{1 - e^2} \sin E$$

pero como $a\sqrt{1 - e^2} = b$, entonces,

$$y = b \sin E$$

luego,

$$\begin{aligned} x + a e &= a \cos E = X \\ b \sin E &= y \end{aligned}$$

sistema de ecuaciones que representa las ecuaciones paramétricas de la elipse, i.e.,

$$\begin{aligned} X &= a \cos E \\ y &= b \sin E \end{aligned} \tag{2.19}$$

Construyamos dos circunferencias con los respectivos radios de la elipse, ver Figura 6.

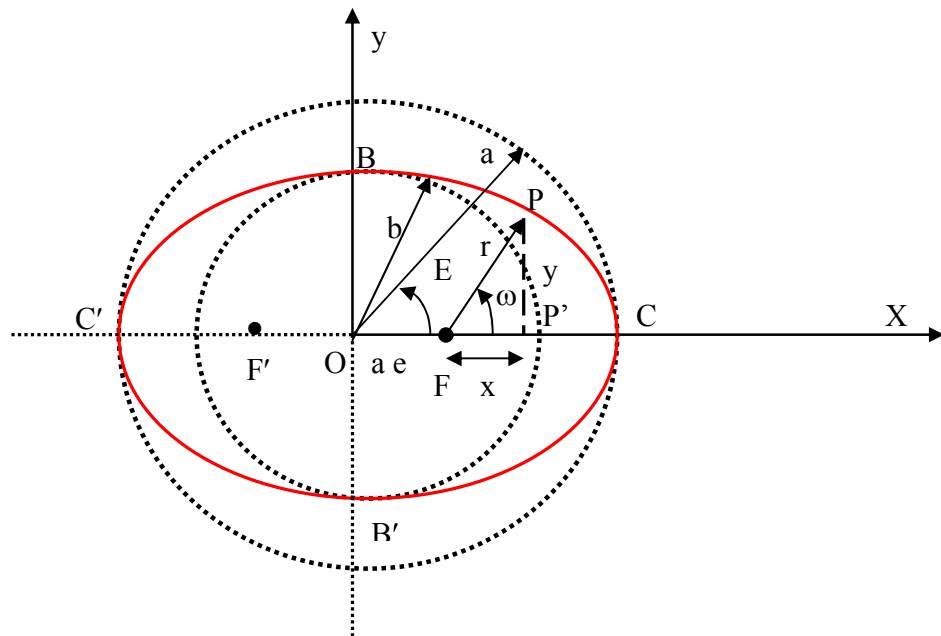


Fig. 6. La órbita (línea roja) "elipse" construida entre dos circunferencias de radios a y b . F es el foco de la elipse. P la posición del planeta en la órbita. La distancia $OC = a$, la distancia $OB = b$; la distancia $FP' = x$ y $OP' = X$, además $PP' = y$. El ángulo ω es la anomalía verdadera y E la anomalía excéntrica.

La elipse (órbita) esta comprendida entre la circunferencia interior de radio b y la circunferencia exterior de radio a ; siendo b el semi-eje menor y a el semi-eje mayor. Entonces, las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$\begin{aligned} X &= a \cos E \\ y &= b \sin E \end{aligned}$$

ya que, elevando al cuadrado y sumando resulta,

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.20)$$

la ecuación de una elipse, en coordenadas cartesianas, con centro en O . ver Figura 6.

Luego, las coordenadas del punto P , sobre la elipse, son

$$\begin{aligned} X &= a \cos E \\ y &= b \sin E \end{aligned}$$

De la Figura 6 resulta: $OF = a e$; $FP' = x$; $OP' = X$; P es un punto genérico sobre la elipse. Entonces, los ángulos E y ω cumplen la condición:

ω	E
0	0
π	π
2π	2π

Propiedades de la elipse. La elipse es una cónica ¹ donde la excentricidad $0 \leq e < 1$. Si $e = 0$ es una circunferencia. De la ecuación polar se deduce que r esta acotada, de modo que la elipse es una curva cerrada. La ecuación (2.20) es la forma cartesiana de representarla, donde a y b son positivos y $b < a$. La ecuación en coordenadas polares tiene la forma ²:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

siendo p el *parámetro* de la cónica. En la Figura 6, el foco de la elipse (F) define el origen del sistema de coordenadas y se encuentra sobre el eje X ; por simetría F' es el otro foco, tal que el centro de la elipse O bisecta la recta FF' . Entonces resultan las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} OC = OC' &= a, & FC = q &= a(1 - e), & p &= a(1 - e^2), & OF = OF' &= a e \\ OB = OB' &= b, & FC' = q' &= a(1 + e), & b^2 &= a^2(1 - e^2) \end{aligned}$$

Luego la ecuación polar se puede escribir de la forma: $\frac{a(1 - e^2)}{r} = 1 + e \cos v$.

¹ Definición: Una sección cónica es la intersección de un plano y un cono. Variando el ángulo y el lugar de la intersección, podemos crear un círculo, un elipse, una parábola o una hipérbola.

² Consultar pagina 18. El ángulo $v \equiv \omega$.

De la ecuación de Kepler (2.18) deducimos: $E - M = e \operatorname{sen} E$, pero el segundo miembro, $e \operatorname{sen} E$, admite un desarrollo en serie de Fourier ¹ de la forma,

$$E - M = e \operatorname{sen} E = \sum_n b_n \operatorname{sen} nM$$

Luego,

$$E = M + \sum_n b_n \operatorname{sen} nM \quad (2.21)$$

Este desarrollo nos permite calcular la anomalía excéntrica en función de la anomalía media. Los b_n son los coeficientes de Fourier ² y $n = 1, 2, 3, \dots$ (entero positivo).

§ 2.3 La órbita en el plano. Desarrollos del movimiento elíptico.

Para determinar la órbita de un planeta en el plano $\{x,y\}$ es necesario conocer cuatro constantes, $[a, e, \tau, \varpi]$; donde,

a = semi-eje mayor, e = excentricidad,

τ = instante de pasaje por el perihelio, υ = anomalía verdadera.

Ver Figura 7.

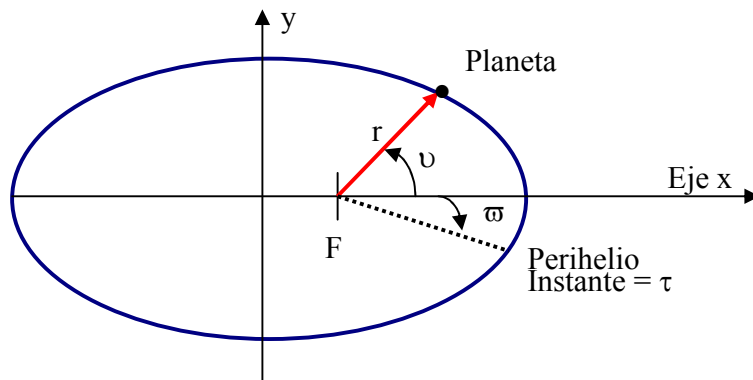


Fig. 7. El planeta P describe una órbita elíptica, $e < 1$. La forma de la elipse está descrita por los elementos a y e ; τ es un instante de tiempo y ϖ el ángulo de posición del periastro respecto de una dirección determinada.

Si consideramos la *anomalía verdadera* υ , las coordenadas $\{x,y\}$ de planeta tienen la expresión

$$x = r \cos \upsilon$$

$$y = r \operatorname{sen} \upsilon$$

donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{p}{1 + e \cos(\upsilon - \varpi)}.$$

¹ Consultar: **Moulton**, F.R.; 1970, "An Introduction to Celestial Mechanics", pág. 165.

² Los coeficientes de Fourier se obtienen de la expresión: $b_n = 2/\pi \int E(M) \operatorname{sen}(nM) dM$; la integral es entre 0 y π . El desarrollo de $E = f(e, M)$ se puede consultar en: **López García**, F.; 2004, "Una Introducción a la Dinámica del Sistema Solar", pág. 20.

siendo $p = a(1 - e^2)$. Además, las coordenadas x e y en función de la anomalía excéntrica tienen la expresión

$$\begin{aligned}x &= a(\cos E - e) \\y &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E\end{aligned}$$

donde el radio vector $r = a(1 - e \cos E)$ y $n(t - \tau) = M = E - e \sin E$; siendo M el ángulo que describe, en un tiempo t , el radio vector \mathbf{r} si el movimiento fuese circular y uniforme¹.

Es importante poder expresar una de las anomalías en función de la otra². Vamos a demostrar una relación entre la anomalía verdadera ν y la anomalía excéntrica E ; Para ello recordemos que:

$$r \cos \nu = a(\cos E - e) \Rightarrow \cos \nu = \frac{a(\cos E - e)}{r} = \frac{a(\cos E - e)}{a(1 - e \cos E)} = \frac{(\cos E - e)}{(1 - e \cos E)}.$$

Sumamos la unidad en ambos miembros y operamos algebraicamente, resulta:

$$1 + \cos \nu = \frac{\cos E - e + 1 - e \cos E}{(1 - e \cos E)} = \frac{(1 - e)(1 + \cos E)}{(1 - e \cos E)},$$

y restando de la unidad en ambos miembros, se obtiene:

$$1 - \cos \nu = \frac{1 - e \cos E - (\cos E - e)}{(1 - e \cos E)} = \frac{(1 + e)(1 - \cos E)}{(1 - e \cos E)},$$

estas dos ecuaciones se pueden formular en función del arco mitad, entonces resultan las expresiones:

$$1 + \cos \nu = 2 \cos^2 \frac{\nu}{2} = \frac{(1 - e) 2 \cos^2 \frac{E}{2}}{(1 - e \cos E)},$$

$$1 - \cos \nu = 2 \sin^2 \frac{\nu}{2} = \frac{(1 + e) 2 \sin^2 \frac{E}{2}}{(1 - e \cos E)};$$

dividiendo miembro a miembro, se obtiene: $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \nu = \frac{1 + e}{1 - e} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} E$, luego

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (2.22)$$

relación importante que vincula la anomalía verdadera ν con la anomalía excéntrica E .

¹ Consultar: **López García**, F.; 2004, "Una Introducción a la Dinámica del Sistema Solar"; pág. 10.

² En los métodos numéricos para calcular y determinar órbitas se emplean expresiones que relacionan ambas anomalías.

Desarrollos analíticos. Nos proponemos desarrollar la anomalía verdadera v , en serie de senos de los múltiplos de la anomalía excéntrica E . De la ecuación (2.22) podemos escribir que

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad \text{luego} \quad \frac{1+e}{1-e} = \frac{(1+\beta)^2}{(1-\beta)^2}$$

operando algebraicamente resulta,

$$e [(1-\beta)^2 + (1+\beta)^2] = (1+\beta)^2 - (1-\beta)^2 \Rightarrow e [2 + 2\beta^2] = 4\beta \Rightarrow e [1 + \beta^2] = 2\beta,$$

por lo tanto, $e = \frac{2\beta}{1+\beta^2}$; de esta ecuación obtenemos β en función de la excentricidad de la forma,

$$\beta^2 - \frac{2}{e}\beta + 1 = 0, \text{ luego,}$$

$$\beta = \frac{1}{e} \left[1 \pm \sqrt{1 - e^2} \right] \quad (2.23)$$

NOTA: Nos interesa sólo un valor de β porque la excentricidad, en general, es pequeña en el Sistema Solar¹.

Teniendo en cuenta el desarrollo de $\sqrt{1 - e^2} \cong 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \dots$, resulta,

$$\beta \cong \frac{1}{e} \left[1 \pm \left(1 - \frac{1}{2}e^2 - \dots \right) \right] = \frac{1 \pm 1}{e} \mp \frac{e}{2}; \text{ luego, } \beta \text{ es mínimo cuando consideramos el signo negativo}$$

por lo tanto, la ecuación (2.23) toma la forma

$$\beta = \frac{1}{e} \left[1 - \sqrt{1 - e^2} \right] \quad (2.23a)$$

Con la introducción y definición de β la ecuación (2.22) resulta,

$$\text{tg} \frac{v}{2} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \text{tg} \frac{E}{2}, \quad (2.24)$$

Considerando las expresiones exponenciales imaginarias, de la siguiente forma: $e^{iv} = X$, $e^{iE} = Y$, entonces, podemos escribir:

$$\text{tg} \frac{v}{2} = \frac{\text{sen} \frac{v}{2}}{\cos \frac{v}{2}} = \frac{e^{\frac{v}{2}i} - e^{-\frac{v}{2}i}}{2i \left(\frac{e^{\frac{v}{2}i} + e^{-\frac{v}{2}i}}{2} \right)} = \frac{1}{i} \frac{X^{\frac{1}{2}} - X^{-\frac{1}{2}}}{X^{\frac{1}{2}} + X^{-\frac{1}{2}}}$$

¹ Para los planetas $e < 0,1$, excepto Mercurio $e = 0.2056$; para los cuerpos menores: asteroide, cometas, etc. la excentricidad puede alcanzar el orden de: $e \sim 0,9$.

Dividiendo numerador y denominador por $X^{-\frac{1}{2}}$ resulta,

$$\operatorname{tg} \frac{\upsilon}{2} = -i \frac{X-1}{X+1}, \quad \text{análogamente: } \operatorname{tg} \frac{E}{2} = -i \frac{Y-1}{Y+1}$$

reemplazando en la ecuación (2.24) se obtiene:

$$\frac{X-1}{X+1} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{Y-1}{Y+1}$$

resolviendo esta ecuación respecto de X, resulta:

$$X \left(1 - \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{Y-1}{Y+1} \right) = 1 + \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{Y-1}{Y+1};$$

operando algebraicamente se obtiene,

$$X[(1-\beta)(Y+1) - (1+\beta)(Y-1)] = (1-\beta)(Y+1) + (1+\beta)(Y-1)$$

por lo tanto,

$$X[2 - 2\beta Y] = -2\beta + 2Y$$

luego,

$$X = \frac{-\beta + Y}{1 - \beta Y} = Y \frac{1 - \beta Y^{-1}}{1 - \beta Y}.$$

Tomando logaritmos en ambos miembros y recordando las definiciones de X e Y se tiene: $\ln X = i \upsilon$ y $\ln Y = i E$, entonces

$$\ln X = i \upsilon \equiv i E + \ln(1 - \beta Y^{-1}) - \ln(1 - \beta Y) \quad (2.25)$$

Como β es una cantidad muy pequeña ¹, i.e., $\beta \ll 1$, resulta $|\beta Y| = |\beta| \ll 1$ y $|\beta Y^{-1}| = |\beta| \ll 1$ ²; recordemos además, que el desarrollo en serie de potencias de la expresión $\ln(1+x)$ es de la forma:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \dots) dx$$

luego,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

y permutando x por -x resulta

$$\ln(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots)$$

¹ Consultar ecuación (2.23)

² Recordar que $|X| = |Y| \leq 1$; porqué ?.

Entonces, si aplicamos estos resultados a la ecuación (2.25), $i v = i E + \ln(1 - \beta Y^{-1}) - \ln(1 - \beta Y)$, resulta:

$$i v = i E - \left(\beta Y^{-1} + \frac{\beta^2 Y^{-2}}{2} + \frac{\beta^3 Y^{-3}}{3} + \dots \right) + \left(\beta Y + \frac{\beta^2 Y^2}{2} + \frac{\beta^3 Y^3}{3} + \dots \right)$$

este desarrollo se puede escribir de la forma,

$$v = E + \frac{2}{2i} \beta (Y - Y^{-1}) + \frac{2}{2i} \frac{\beta^2}{2} (Y^2 - Y^{-2}) + \frac{2}{2i} \frac{\beta^3}{3} (Y^3 - Y^{-3}) + \dots$$

Nuevamente si recordamos la definición de Y , se obtiene:

$$v = E + 2 \left[\beta \operatorname{sen} E + \frac{\beta^2}{2} \operatorname{sen} 2 E + \frac{\beta^3}{3} \operatorname{sen} 3 E + \dots \right] \quad (2.26)$$

Expresión que representa el desarrollo en serie de la anomalía verdadera v , en función de la anomalía excéntrica E ; la serie converge uniformemente para todo valor de E , ya que el término n -ésimo tiene la forma:

$$\left| \frac{\beta^n}{n} \operatorname{sen} n E \right| \leq \frac{\beta^n}{n} \leq 1, \quad \text{por ser } \beta \ll 1.$$

Desarrollo de la anomalía excéntrica en función de la anomalía media.

La ecuación de Kepler se escribe frecuentemente de la forma: $M = E - e \operatorname{sen} E$, donde M se define como $M = n(t - \tau)$ y τ el instante de pasaje por el periastro. Nos proponemos hallar un desarrollo de E en serie trigonométrica en función de la anomalía media M . Como $(e \operatorname{sen} E)$ es una función periódica, con período 2π , admite un desarrollo en serie de Fourier ¹ con términos impares ², de la forma:

$$e \operatorname{sen} E = \sum_v b_v \operatorname{sen} v E$$

donde,

$$b_v = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (E - M) \operatorname{sen} v M \, dM.$$

Además, $\operatorname{sen} v M \, dM = -\frac{1}{v} d(\cos v M)$, reemplazando e integrando por partes se tiene,

$$b_v = -\frac{2}{v\pi} \int_0^\pi (E - M) d(\cos v M) = -\frac{2}{v\pi} \left\{ [(E - M) \cos v M]_0^\pi - \int_0^\pi \cos v M \, d(E - M) \right\}$$

¹ López García, F.; 1995, "Curso de Análisis Matemático III", Capítulos 2 y 3.

² Si la función a representar en serie de Fourier es impar, sólo admite un desarrollo de términos impares. Con_sultar ¹.

La relación entre las anomalías es la siguiente: cuando $E = 0 \Rightarrow M = 0$ y para $E = \pi \Rightarrow M = \pi$ entonces, el primer término se anula y por tanto el coeficiente de Fourier b_v toma la forma

$$b_v = \frac{2}{v\pi} \int_0^\pi \cos vM (dE - dM)$$

pero $\int_0^\pi \cos vM dM \equiv 0$, luego $b_v = \frac{2}{v\pi} \int_0^\pi \cos vM dE = \frac{2}{v\pi} \int_0^\pi \cos(vE - ve \operatorname{sen} E) dE$.

Vamos a demostrar que los b_v se pueden expresar de la forma: $b_v = \frac{2}{v} J_v(ve)$, donde los $J_v(ve)$ son las *funciones de Bessel*¹ de orden v y argumento (ve) ; luego, la anomalía excéntrica E admite el siguiente desarrollo,

$$E = M + 2 \sum_v \frac{J_v(ve)}{v} \operatorname{sen}(vM) \quad (2.27)$$

donde v toma valores enteros.

NOTA: Las funciones de Bessel² son soluciones de la ecuación diferencial de Bessel de orden n , definida como:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (2.28)$$

cuya solución $y(x)$ esta dada por la expresión $J_n(x)$ formulada como:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nu - x \operatorname{sen} u) du.$$

Es fácil probar que estas funciones son soluciones de la ED de Bessel (2.28). Las funciones de Bessel admiten el siguiente desarrollo:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \dots \right]$$

i.e., un desarrollo en serie de potencias del argumento x , cuyo radio de convergencia es infinito.

Comentario: Las funciones de *Bessel* aparecieron por primera vez en la década de 1730 en un trabajo de *Daniel Bernoulli* y *Euler*, relacionado con las oscilaciones de una cadena suspendida verticalmente. La misma ecuación aparece en un artículo publicado por *Euler* en 1764 vinculado con las vibraciones de un tambor y *Fourier* las usó en su clásico tratado sobre la *teoría de difusión del calor* (1822). Sin embargo, sus propiedades generales fueron estudiadas por primera vez, en forma sistemática, en 1824, en una publicación de *F.W. Bessel* quien estaba investigando el movimiento de los planetas. La obra clásica sobre las funciones de *Bessel* es: “*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*” de *G.N. Watson*, 1944.

¹ **Bessel**, F.W. (1784-1846). Destacado astrónomo y matemático alemán. Al estudiar el movimiento de los planetas y sus perturbaciones (aplicando la teoría del potencial) determinó la ED del movimiento que lleva su nombre, la importancia de esta ED ordinaria son sus soluciones llamadas *funciones de Bessel*.

² Consultar **López García**, F.; 2008, “*Curso Análisis Matemático III*”, Capítulo 10, pág. 75-96.

La ecuación de Laplace.

Diferenciando la ecuación de Kepler (2.18) y recordando que $r = a(1 - e \cos E)$ se tiene: $(1 - e \cos E) dE = dM$, y teniendo en cuenta la ecuación (2.27) resulta:

$$\frac{dE}{dM} = \frac{a}{r} = 1 + 2 \sum_v J_v(ve) \cos(vM)$$

Expresión que permite calcular la distancia r en función de la anomalía media M ; ver Figura 6, pág. 19.

Recordemos la fórmula de *Lagrange*¹, mediante la cual es posible modificar (invertir) la ecuación de Kepler; “no es una serie de la forma anterior (serie de Fourier con términos seculares) sino, una serie de potencias de la excentricidad”, convergente para valores de e pequeños ($e \ll 1$). La fórmula de *Lagrange* nos permite expresar:

$$E = M + e \sin M + \frac{e^2}{2!} C_n \sin^2 M + \frac{e^3}{3!} C_n^2 \sin^3 M + \dots \tag{2.29}$$

Serie que converge para todo M , ya que es convergente en $I [0, 2\pi]$ y por periodicidad para todo valor de M ; para ello es necesario, como lo demostró *Laplace*, que la excentricidad sea menor que: $e < 0.66274342\dots$ (radio de convergencia).

¿Cómo se determina del *radio de convergencia* de la serie (2.29)? Se trata de hallar los puntos singulares de la función definida por el desarrollo de Lagrange; para ello supongamos que en la ecuación de Kepler (2.18) la anomalía media es arbitraria entonces, diferenciando respecto de E y e , resulta:

$$(1 - e \cos E) dE - \sin E de \equiv 0$$

por ser M arbitrario, luego:

$$\frac{dE}{de} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E}.$$

Supongamos que en esta ED, la anomalía excéntrica y la excentricidad son variables complejas, entonces la ED admite una solución en serie de potencias de la excentricidad, cuyo radio de convergencia está definido por la distancia al origen del punto singular más próximo de la función dada por la ED. Los puntos singulares de esta ecuación son los que anulan el denominador i.e., $1 - e \cos E = 0$; sin embargo, estos puntos deben satisfacer a la ecuación de Kepler: $E - e \sin E = M$.

Considerando estas dos ecuaciones se puede eliminar la anomalía excéntrica obteniéndose entonces, una relación entre la excentricidad y la anomalía media i.e., $e = f(M)$; luego, para cada valor real de la anomalía media se obtiene, en general, un valor complejo de la excentricidad y el lugar geométrico de los puntos correspondientes a todos los puntos reales de la anomalía media están sobre una curva, denominada “curva de puntos singulares”. En particular, para $M = 0$ y $M = 2\pi$ corresponde el punto $+1$ y para el valor $M = \pi$, el punto -1 .

¹ **Stoer, J.& Bulirsch, R.**; 2002, "Introduction to Numerical Analysis", Ed. Springer.

La fórmula de Lagrange permite calcular una función $f(x)$ mediante la expresión: $f(t_0 - x) \cong \sum_{n=0}^m p_n(x) f(t_0 - nh)$, donde

$p_n(x)$ son polinomios en x . Estas expresiones se suelen aplicar a la solución de ED, como en los métodos de predictor-corrector. No son recomendables para interpolación.

La representación gráfica de $e = f(M)$ es una curva simétrica respecto del origen y de los ejes real e imaginario de la excentricidad; su menor distancia al origen esta dada por la *ecuación de Laplace*,

$$1 + \sqrt{1 + q^2} = q e^{\sqrt{1 + q^2}}$$

esta ecuación trascendente permite determinar el radio de convergencia del desarrollo (2.29). Ver Figura 8.

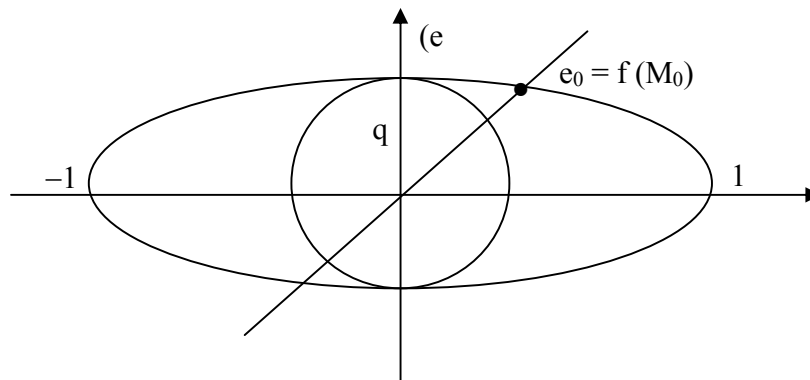


Fig. 8. Representación en el plano complejo de la solución de la ecuación de Laplace.

Reseña: Hemos introducido distintas clases de variables, las cuales serán útiles para un posterior estudio de las perturbaciones en el movimiento Kepleriano, denominadas “elementos orbitales clásicos”. Sin embargo, no hemos considerado en su totalidad las múltiples aplicaciones del movimiento Kepleriano; para ello sugerimos un estudio más exhaustivo relacionado con la formulación canónica de los sistemas dinámicos. Consultar: **Duriez, L.; Ferraz-Mello, S.; Henrard, J.**; 1989, “*Modern Methods in Celestial Mechanics*”, Ecole de Goutelas 1989. Ed. Frontières.

En síntesis, hemos estudiado las aplicaciones del problema de las fuerzas centrales para la descripción y solución del movimiento de un sistema de dos cuerpos sometidos sólo a su “mutua atracción gravitacional”. Se admite que las dos masas se encuentran suficientemente aisladas respecto de otros cuerpos del Universo, de tal modo que la única fuerza actuante es su mutua interacción gravitacional. En las aplicaciones astronómicas las distancias entre los cuerpos es muy grande comparada con sus dimensiones físicas.

Entonces, el análisis del mismo estuvo orientado hacia un detallado estudio sobre la dinámica del movimiento resultante y por lo tanto resolver dos problemas que son centrales en la Mecánica Celeste.

- i) Dada la posición y velocidad, en el espacio euclidiano, de un punto masa en función del tiempo hallar los elementos o parámetros que definen su órbita.
- ii) Dado los elementos orbitales o parámetros definiendo la forma y orientación de la trayectoria dinámica, hallar la posición del punto masa en el espacio, en un instante dado.

En el próximo Capítulo analizaremos las perturbaciones producidas por un tercer cuerpo ó varios, en relación con la dinámica del problema de dos cuerpos.

Capítulo 3

El problema de n cuerpos.

§ 3.1 Nociones generales.

Cuando tres ó más cuerpos se mueven por su mutua atracción gravitacional el movimiento resulta más complejo, aumentando rápidamente su dificultad con el número de objetos involucrados. Como hemos estudiado en el Capítulo anterior, el problema de dos cuerpos puede ser formulado matemáticamente de tal modo que, conociendo la posición y velocidad inicial de un cuerpo respecto del otro en un instante t_0 , se puede predecir su posición y velocidad en el espacio en cualquier otro instante. Este modo de determinar el movimiento constituye una *solución matemática cerrada* del problema. Por el contrario, si más de dos cuerpos están involucrados en el estudio dinámico es imposible, en general, formular tal solución. Sin embargo, ciertos casos particulares pueden ser tratados analíticamente ¹.

Los planetas del Sistema Solar constituyen un clásico ejemplo del problema de n cuerpos. Como sus posiciones varían durante su movimiento orbital alrededor del Sol, las fuerzas gravitacionales que actúan sobre cada uno de los cuerpos también varían. Sin embargo, en el caso del Sistema Solar, el Sol es el centro de fuerzas dominante por lo tanto, el movimiento planetario resultante se aproxima al movimiento que se observaría si el Sol y cada planeta formaran un sistema de dos cuerpos puro. Las diferencias entre el problema de dos cuerpos y la acción (influencia) de los otros planetas se denominan *perturbaciones*. Como ejemplo, consideremos un satélite artificial, cuya masa es muy pequeña, moviéndose alrededor de la Tierra; el centro de fuerzas es la Tierra misma. Sin embargo, el Sol, la Luna y la no esfericidad de la Tierra causan pequeñas perturbaciones sobre el movimiento del satélite alrededor de ésta, considerado en *primera aproximación* como un problema de dos cuerpos.

En este Capítulo haremos una reseña matemática sobre los principales temas concernientes al problema de n cuerpos.

§ 3.2 Ecuaciones del movimiento.

Consideremos n puntos masa, m_0, m_1, \dots, m_{n-1} , no necesariamente coplanares; designemos con R_j y R_k los vectores de posición de los puntos masa m_j y m_k respectivamente, respecto de un origen arbitrario O del espacio Euclidiano \mathcal{R}^3 ; además indicamos con $\{I, J, K\}$ tres vectores unitarios o versores ortogonales dos a dos con origen en O y con (ξ_j, η_j, ζ_j) las coordenadas cartesianas del punto masa m_j entonces, el vector R_j admite la expresión canónica: $R_j = \xi_j I + \eta_j J + \zeta_j K$; ver Figura 9, y la distancia entre los punto masa m_j y m_k , i.e., el módulo del vector $(R_k - R_j)$, es:

¹ Consultar: **Marchal**, C.; 1990, “*The Three-Body Problem*”, Ed. Elsevier.

Valtonen, M. & **Karttunen**, H.; 2006, “*The Three-Body Problem*”, Ed. Cambridge University Press.

$$|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j|^2 = |\xi_j - \xi_k|^2 + |\eta_j - \eta_k|^2 + |\zeta_j - \zeta_k|^2 \quad (3.1)$$

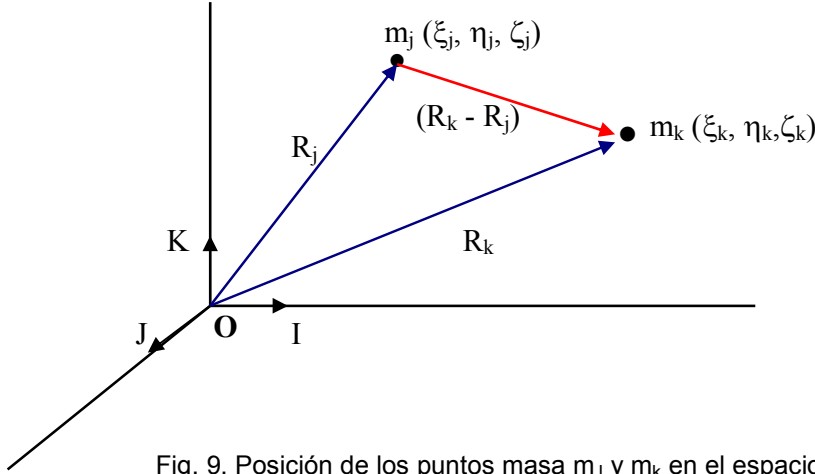


Fig. 9. Posición de los puntos masa m_j y m_k en el espacio Euclidiano \mathfrak{R}^3 , sistema de referencia versores $\{I, J, K\}$.

La fuerza resultante de la atracción gravitacional Newtoniana, que sobre el punto masa m_j ejercen sobre él los $(n-1)$ puntos masa restantes y en virtud de los principios de la Dinámica, tiene la expresión:

$$m_j \ddot{\mathbf{R}}_j = \sum_{k=1}^{n-1} * G \frac{m_j m_k}{|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j|^2} \frac{(\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j)}{|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j|} \quad (3.2)$$

En esta suma vectorial ¹ $k \neq j$; el subíndice j toma los valores $j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. G es la constante de la gravitación universal, constante de Newton, su valor hallado experimentalmente es: $6,668 \times 10^{-8}$ dinas.cm²/gr² (sistema de unidades c.g.s.)². La fórmula (3.2) representa la ecuación diferencial del movimiento de m_j respecto del punto de referencia O, perturbado por los $(n-1)$ puntos masa restantes.

El potencial (ó función potencial) en un sistema de n puntos masa esta definido por la expresión:

$$U = k^2 \sum_j * \sum_{k>j} * \frac{m_j m_k}{|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j|} = k^2 \left[\frac{m_0 m_1}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0|} + \frac{m_0 m_2}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0|} + \dots + \frac{m_0 m_{n-1}}{|\mathbf{R}_{n-1} - \mathbf{R}_0|} + \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|} + \dots + \frac{m_1 m_{n-1}}{|\mathbf{R}_{n-1} - \mathbf{R}_1|} + \dots \right]$$

¹ En el símbolo suma $\sum *$ el asterisco indica que k toma todos los valores desde $k = 0$ hasta $k = n-1$, excepto $k = j$; $k \neq j$.

² En el Sistema Planetario $G \equiv k^2 = 0,017202119\dots$ en las unidades: UA, \mathcal{M}_{Sol} , DSM, denominada constante de la gravitación de Gauss. La constante gravitacional depende del sistema de unidades elegido.

Con esta definición de la función potencial U vamos a demostrar que el segundo miembro de la ecuación diferencial (3.2) es el gradiente de U respecto del vector posición R_j , con lo cual el sistema de ED toma la forma,

$$m_j \ddot{R}_j = U_{R_j} \equiv \nabla U$$

para ello basta demostrar que,

$$U_{R_j} = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \xi_j} + \frac{\partial U}{\partial \eta_j} + \frac{\partial U}{\partial \zeta_j}$$

El gradiente de la función U en la dirección R_j es,

$$U_{R_j} = -k^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_j m_k}{|R_k - R_j|^2} \left[\frac{\partial |R_k - R_j|}{\partial \xi_j} I + \frac{\partial |R_k - R_j|}{\partial \eta_j} J + \frac{\partial |R_k - R_j|}{\partial \zeta_j} K \right]$$

multiplicando cada término (derivada) por $\frac{|R_k - R_j|}{|R_k - R_j|}$ resulta

$$U_{R_j} = -k^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_j m_k}{|R_k - R_j|^3} \left[|R_k - R_j| \frac{\partial |R_k - R_j|}{\partial \xi_j} I + |R_k - R_j| \frac{\partial |R_k - R_j|}{\partial \eta_j} J + |R_k - R_j| \frac{\partial |R_k - R_j|}{\partial \zeta_j} K \right] \quad (3.3)$$

además, derivando la expresión (3.1) respecto de (ξ, η, ζ) se tiene:

$$2 |R_k - R_j| \frac{\partial |R_k - R_j|}{\partial \xi_j} = 2(\xi_j - \xi_k)$$

$$2 |R_k - R_j| \frac{\partial |R_k - R_j|}{\partial \eta_j} = 2(\eta_j - \eta_k)$$

$$2 |R_k - R_j| \frac{\partial |R_k - R_j|}{\partial \zeta_j} = 2(\zeta_j - \zeta_k)$$

reemplazando estos resultados en la ecuación (3.3) resulta,

$$U_{R_j} = -k^2 \sum_{k=0}^{n-1} * \frac{m_j m_k}{|R_k - R_j|^3} [(\xi_j - \xi_k) I + (\eta_j - \eta_k) J + (\zeta_j - \zeta_k) K];$$

la expresión entre corchetes es la diferencias de los vectores posición $(R_j - R_k)$, luego se tiene

$$U_{R_j} = -k^2 \sum_{k=0}^{n-1} * \frac{m_j m_k}{|R_k - R_j|^3} (R_j - R_k)$$

Por lo tanto, queda demostrado que la fuerza que actúa sobre masa m_j es igual al gradiente de la función potencial U^1 :

$$m_j \ddot{R}_j = U_{R_j} = \nabla U.$$

§ 3.3 Integrales primeras del movimiento.

El concepto de *integral primera* proviene de la *solución o integral* de una ecuación diferencial de orden n , representada por cualquier función que satisfaga la ED y que permanece constante “*en toda la solución o curva integral*”².

Definición. Se define la *integral general* de una ED a toda función Φ de la variable x y de un cierto número de parámetros c_i :

$$\Phi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

tal que, cualquiera sean los valores de los parámetros, la función Φ es solución de la ED.

Entonces, una integral primera (cantidad que se conserva o permanece constante durante el movimiento) en un sistema de EDs definido como:

$$x' = f(t, x), \quad x \in \mathfrak{R}^n, \quad f: A \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$$

es la función $\Phi(x, t) = \text{constante}$ a la largo de las curvas integrales o soluciones del sistema, i.e., $\Phi(x(t), t) = \text{constante}, \forall t$, y para toda solución $x(t)$ del sistema de EDs.

NOTA: Una **integral del movimiento** o **constante del movimiento**, en un problema dinámico, es una función de las posiciones y velocidades (o su equivalente en coordenadas generalizadas y momentos conjugados) que permanece constante a lo largo de la trayectoria del sistema en el espacio de fase. En la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias este concepto se generaliza al de **integral primera**. Una integral primera depende de las variables de la ecuación diferencial y sus derivadas y permanece constante respecto del "tiempo" u otra variable.

Si sumamos todas las ecuaciones del sistema (3.2) se obtiene

$$\sum_{j=0}^{n-1} m_j \ddot{R}_j = k^2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} * \frac{m_j m_k}{|R_k - R_j|^3} (R_k - R_j) \equiv 0 \quad (3.4)$$

¹ El gradiente de $U = \text{grad } U = \nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) U \equiv \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k$, es un vector en \mathfrak{R}^3 .

² Consultar **Verhulst**, F.; 2000, "Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems", pág. 16.

Porqué es idénticamente nula ?.

A cada término de la suma, por ejemplo: $k^2 \frac{m_j m_k}{|R_k - R_j|^3} (R_k - R_j)$ podemos asociarle el término

$k^2 \frac{m_k m_j}{|R_j - R_k|^3} (R_j - R_k)$, con lo cual se demuestra que $\sum_{j=0}^{n-1} m_j \ddot{R}_j \equiv 0$; luego, integrando¹ esta

igualdad resulta:

$$\sum_{j=0}^{n-1} m_j \dot{R}_j = \mathbf{A} \quad (3.5)$$

Esta ecuación es una *integral*, donde \mathbf{A} es un vector constante; en realidad, esta expresión en coordenadas cartesianas representa tres integrales, i.e.,

$$\sum_{j=0}^{n-1} m_j \left(\dot{\xi}_j \mathbf{I} + \dot{\eta}_j \mathbf{J} + \dot{\zeta}_j \mathbf{K} \right) = a_1 \mathbf{I} + a_2 \mathbf{J} + a_3 \mathbf{K}$$

entonces igualando las componentes vectoriales se tiene:

$$\sum_{j=0}^{n-1} m_j \dot{\xi}_j = a_1, \quad \sum_{j=0}^{n-1} m_j \dot{\eta}_j = a_2, \quad \sum_{j=0}^{n-1} m_j \dot{\zeta}_j = a_3$$

representan tres integrales cartesianas.

Multiplicando la ecuación (3.5) por dt, en ambos miembros e integrando término a término, resulta

$$\sum_{j=0}^{n-1} m_j R_j = \mathbf{A} t + \mathbf{B} \quad (3.6)$$

una nueva *integral del movimiento*, cuya expresión cartesiana resulta:

$$\sum_{j=0}^{n-1} m_j \xi_j = a_1 t + b_1, \quad \sum_{j=0}^{n-1} m_j \eta_j = a_2 t + b_2, \quad \sum_{j=0}^{n-1} m_j \zeta_j = a_3 t + b_3 \quad (3.6a)$$

Estas ecuaciones representan las *integrales del baricentro* o *centro de gravedad* del sistema de n cuerpos, donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son vectores constantes y $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$, $i = 1,2,3$ son sus componentes cartesianas.

Si indicamos con $\{\xi_G, \eta_G, \zeta_G\}$ las coordenadas del baricentro del sistema de n puntos masa y

además, si $\mathcal{M} = \sum_{j=0}^{n-1} m_j$ es la masa total del sistema, entonces se deducen las siguientes fórmulas²:

$$\mathcal{M} \xi_G = \sum_j m_j \xi_j, \quad \mathcal{M} \eta_G = \sum_j m_j \eta_j, \quad \mathcal{M} \zeta_G = \sum_j m_j \zeta_j.$$

¹ Recordar que $\ddot{R}_j = d^2 R_j / dt^2$.

² Consultar: **Whittaker**, E.T.; 1988, "*Analytical Dynamics*", Ed. Cambridge University Press.
Goldstein, H.; 2006, "*Mecánica Clásica*", Capítulo 3. Ed. Reverté.

Multiplicando estas tres ecuaciones por los vectores unitarios $\{I, J, K\}$ y sumando e indicando además, con R_G el vector de posición del baricentro del sistema resulta:

$$\mathcal{M} R_G = \sum_{j=0}^{n-1} m_j R_j$$

y en virtud de la ecuación (3.6), se tiene:

$$\mathcal{M} R_G = A t + B,$$

expresión que formula que el baricentro del sistema se desplaza con movimiento rectilíneo y uniforme. Luego,

$$R_G = \frac{A}{M} t + \frac{B}{M}.$$

Ecuación que nos dice que el *centro de masa del sistema de n puntos se mueve, en el espacio, uniformemente en línea recta.*

Integral de las áreas e integral de la energía.

Hemos estudiado que si m_0, m_1, \dots, m_{n-1} representan n puntos masa, los cuales se mueven en un campo gravitatorio newtoniano i.e., cada uno de los puntos masa está sometido a la atracción de los restante cuerpos, por una fuerza proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias, entonces las ecuaciones diferenciales del movimiento tienen la forma ¹:

$$M_j \ddot{R}_j = U_{R_j} = \nabla U, \quad (3.7)$$

donde $j = 1, 2, \dots, (n-1)$. Si R_j es el vector de posición del punto masa m_j respecto de un origen O y U_{R_j} es el gradiente en la dirección R_j de cierta función escalar U, entonces

$$U_{R_j} = \text{grad}_{R_j} U = \frac{\partial U}{\partial \xi_j} I + \frac{\partial U}{\partial \eta_j} J + \frac{\partial U}{\partial \zeta_j} K,$$

donde $\{\xi_j, \eta_j, \zeta_j\}$ indican las coordenadas cartesianas del punto m_j respecto del sistema determinado por la terna fundamental de vectores unitarios $\{I, J, K\}$ con origen en O (ver Figura 9, pág. 30); donde U es la *función potencial*, definida por la expresión:

$$U = k^2 \left\{ \frac{m_0 m_1}{|R_1 - R_0|} + \frac{m_0 m_2}{|R_2 - R_0|} + \dots + \frac{m_0 m_{n-1}}{|R_{n-1} - R_0|} + \frac{m_1 m_2}{|R_2 - R_1|} + \dots + \frac{m_1 m_{n-1}}{|R_{n-1} - R_1|} + \dots \right. \\ \left. \frac{m_{n-2} m_{n-1}}{|R_{n-1} - R_{n-2}|} \right\},$$

como hemos visto esta fórmula se puede expresar de la forma,

¹ El concepto físico clásico es: masa x aceleración igual a fuerza o también igual al gradiente de una función potencial, la cual sólo depende de la posición, denomina función de punto.

$$U = k^2 \sum_j^* \sum_{k>j}^* \frac{m_j m_k}{|R_k - R_j|},$$

expresión simbólica que se suele escribir para definir la función potencial. El sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (3.7), que define el movimiento de los n cuerpos, admite las siguientes integrales,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{(n-1)} m_j \dot{R}_j &= \mathbf{A} \\ \sum_{j=0}^{(n-1)} m_j R_j &= \mathbf{A} t + \mathbf{B} \end{aligned} \tag{3.7a}$$

estas ecuaciones representan las seis integrales del *baricentro* y demuestran que el *centro de masa* del sistema de n puntos masa se desplaza con movimiento rectilíneo y uniforme.

El gradiente de la función U en la dirección R_j esta dado por la expresión:

$$U_{R_j} = k^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_k m_j}{|R_k - R_j|^3} (R_k - R_j) = m_j \ddot{R}_j$$

introduciendo el significado de U_{R_j} como el gradiente de U, en el sistema de ecuaciones diferenciales (3.7) y, multiplicando vectorialmente ambos miembros de la igualdad, por R_j y sumando desde $j = 0$ hasta $(n-1)$ resulta,

$$\sum_{j=0}^{(n-1)} m_j R_j \times \ddot{R}_j = k^2 \sum_{j=0}^{(n-1)} \sum_{k=0}^{(n-1)} \frac{m_j m_k}{|R_k - R_j|^3} (R_j \times R_k - R_j \times R_j)$$

Pero $R_j \times R_j \equiv 0$, luego

$$\sum_{j=0}^{(n-1)} m_j R_j \times \ddot{R}_j = k^2 \sum_{j=0}^{(n-1)} \sum_{k=0}^{(n-1)} \frac{m_j m_k}{|R_k - R_j|^3} (R_j \times R_k);$$

la suma del segundo miembro es nula, ya que a cada término de la suma doble, que es de la forma

$$k^2 \frac{m_j m_k}{|R_k - R_j|^3} (R_j \times R_k)$$

le podemos hacer corresponder el término

$$k^2 \frac{m_j m_k}{|R_j - R_k|^3} (R_k \times R_j)$$

y por tanto, la suma de estos dos términos es nula. Luego,

$$\sum_{j=0}^{(n-1)} m_j \mathbf{R}_j \times \ddot{\mathbf{R}}_j \equiv 0$$

o también,

$$\sum_{j=0}^{(n-1)} m_j \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_j \times \dot{\mathbf{R}}_j) = 0$$

e integrando en ambos miembros resulta,

$$\sum_{j=0}^{(n-1)} m_j (\mathbf{R}_j \times \dot{\mathbf{R}}_j) = \mathbf{C} \quad (3.8)$$

esta integral vectorial, equivalente a tres integrales cartesianas, se denomina la *integral de las áreas* o del *momento angular*. La integral se puede escribir en forma cartesiana del siguiente modo:

$$\sum_{j=0}^{(n-1)} m_j \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ \xi_j & \eta_j & \zeta_j \\ \dot{\xi}_j & \dot{\eta}_j & \dot{\zeta}_j \end{vmatrix} = C_1 \mathbf{I} + C_2 \mathbf{J} + C_3 \mathbf{K}$$

igualando los coeficientes de los versores correspondientes se obtiene,

$$\sum_{j=0}^{(n-1)} m_j (\eta_j \dot{\zeta}_j - \zeta_j \dot{\eta}_j) = C_1$$

$$\sum_{j=0}^{(n-1)} m_j (\zeta_j \dot{\xi}_j - \xi_j \dot{\zeta}_j) = C_2 \quad (3.8a)$$

$$\sum_{j=0}^{(n-1)} m_j (\xi_j \dot{\eta}_j - \eta_j \dot{\xi}_j) = C_3$$

las tres ecuaciones configuran la *integral de las áreas en forma cartesiana*.

Las ecuaciones (3.8) y (3.8a) representan las *integrales primeras del movimiento del problema de n cuerpos*, denominadas *integral de las áreas* o *principio de conservación del momento angular* respecto de un sistema de coordenadas con tres ejes ortogonales. Hacemos notar que estas integrales son válidas en cualquier sistema de coordenadas arbitrario, en el cual se cumplan las leyes del movimiento de Newton¹.

¹ Consultar: **Danby**, J.M.A., 1992, “*Fundamentals of Celestial Mechanics*”, Cap. 9.
Roy, A.E., 1978, “*Orbital Motion*”, Cap. 5.

Para determinar el movimiento (o el tipo de movimiento), es necesario conocer las *posiciones* y *velocidades* (condiciones iniciales) para un valor determinado de la variable independiente t (tiempo)¹.

Los datos iniciales están representados por el conjunto de valores $\{\xi_j, \eta_j, \zeta_j\}$ y $\{\dot{\xi}_j, \dot{\eta}_j, \dot{\zeta}_j\}$ para $t = t_0$, los cuales permiten determinar las constantes C_1, C_2, C_3 y por tanto, el momento angular total del sistema i.e., la integral de las áreas.

Otra integral primera es la *integral de las fuerzas vivas*, la cual se obtiene multiplicando escalarmente las ecuaciones diferenciales del movimiento (3.7) por el vector $\dot{\mathbf{R}}_j$ y sumando en ambos miembros, resulta:

$$\sum_{j=0}^{(n-1)} m_j \dot{\mathbf{R}}_j \ddot{\mathbf{R}}_j = \sum_{j=0}^{(n-1)} U_{\mathbf{R}_j} \dot{\mathbf{R}}_j,$$

El vector posición \mathbf{R}_j esta definido por la expresión: $\mathbf{R}_j = \xi_j \mathbf{I} + \eta_j \mathbf{J} + \zeta_j \mathbf{K}$ y su vector derivada es: $\dot{\mathbf{R}}_j = \dot{\xi}_j \mathbf{I} + \dot{\eta}_j \mathbf{J} + \dot{\zeta}_j \mathbf{K}$, por lo tanto, el segundo miembro toma la forma

$$\sum_{j=0}^{(n-1)} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j + \frac{\partial U}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j + \frac{\partial U}{\partial \zeta_j} \dot{\zeta}_j \right) = \frac{dU}{dt}$$

La *función potencial* U , por definición, sólo depende de los vectores de posición por lo tanto, es función solamente de las $3n$ coordenadas (ξ_j, η_j, ζ_j) de los n puntos masa considerados y como dichas coordenadas son función del tiempo t , la función escalar U es también una función del tiempo luego, el segundo miembro es la derivada total de U respecto de t . Además,

$$\dot{\mathbf{R}}_j \ddot{\mathbf{R}}_j = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{R}}_j^2)$$

entonces, $\sum_{j=0}^{(n-1)} m_j \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{R}}_j^2) = \frac{dU}{dt}$, e integrando ambos miembros resulta,

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{(n-1)} m_j \dot{\mathbf{R}}_j^2 = U + h$$

también se puede escribir en forma cartesiana: $\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{(n-1)} m_j (\dot{\xi}_j^2 + \dot{\eta}_j^2 + \dot{\zeta}_j^2) = U + h$, y en su expresión mas frecuente:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{(n-1)} m_j v_j^2 = U + h \tag{3.9}$$

¹ Matemáticamente constituye un *problema de valor inicial*; es decir, consiste en resolver EDs con ciertas condiciones adicionales y arbitrarias que se imponen a la función incógnita y sus derivadas llamadas *condiciones iniciales* para $t = t_0$.

El primer miembro de la ecuación (3.9) es la *energía cinética* de las masas m_i , representada por T; entonces (3.9) toma la forma

$$T = U + h$$

Si $V = -U$, siendo V la energía potencial y $E = h$ una constante, resulta

$$E = T + V \quad (3.10)$$

Ecuación que enuncia el *principio de conservación de la energía*, siendo E la *constante de la energía*; esta expresión es una magnitud escalar como la demuestra la ecuación (3.9). La igualdad (3.10) se conoce también como la *integral de la energía*.

En el sistema de ecuaciones (3.7a), **A** y **B** son vectores constantes de integración, que definen seis constantes escalares, conocidas como las *integrales del centro de masa*; además, las tres *integrales de las áreas*, ecuaciones (3.8a) y la *integral de la energía*, ecuación (3.10), constituyen las únicas integrales primeras del movimiento del problema de n cuerpos. Luego, el sistema de n EDs, de segundo orden, ecuaciones (3.7) o su equivalente, un sistema de 3n EDs de primer orden (expresión cartesiana) sólo admiten 10 integrales algebraicas; y en consecuencia, el sistema formado por n cuerpos sólo admite: $(6n - 10)$ *grados de libertad*.

Síntesis de las integrales del movimiento.

La energía potencial en un sistema de n puntos masa es:

$$V = -k^2 \sum_{i,j=1}^n \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}}, \quad (i \neq j)$$

Esta magnitud escalar sólo depende de las distancias relativas¹ entre los puntos masa. Su valor es invariante para cualquier traslación del origen del sistema de coordenadas o una rotación de los ejes del sistema, para cualquier ángulo arbitrario. Entonces, a causa de esta invariancia, las integrales de movimiento: *centro de masa* y la *integral de las áreas* definen nueve constantes de integración. En el Sistema Solar estas constantes dependen de las observaciones. La décima constante es la *integral de la energía*, por lo tanto son 10 las constantes de integración en el problema de n cuerpos. Sin embargo, para poder resolver “completamente” este problema dinámico es necesario conocer 6n constantes.

Muchos astrónomos y matemáticos han desarrollado otras integrales que satisfagan las ecuaciones de movimiento y por tanto otras constantes; sin embargo, este esfuerzo no tuvo éxito. Las integrales, como la de la energía, son relaciones algebraicas entre las coordenadas y sus velocidades. En 1887, **Bruns**² demostró que estas 10 integrales son las únicas integrales algebraicas independientes en el problema de tres cuerpos. Posteriormente **Poincaré**, H.; 1896, “*Sur la méthode de Bruns*”, Comptes. Rendus 123, 1224; agregó nuevas restricciones al problema de la “no existencia de nuevas integrales” en el problema de tres cuerpos haciendo unas correcciones al teorema de **Bruns**. Se recomienda consultar: **Moulton**, F. R.; 1948, “*An Introduction to Celestial Mechanics*”, Cap. VII, pág. 261.

¹ La distancia relativa entre dos puntos masas es: $\rho_{ij} = |R_j - R_i| = \sqrt{(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2 + (\zeta_j - \zeta_i)^2}$, $i \neq j$.

² **Bruns**, H.; 1887, “*Über die Integrale des Vielkörper-Problems*”, Acta Mathematica, Vol. XI, pag. 25.

NOTA: Cualquier otra integral se obtendría por combinación lineal de estas diez; en consecuencia, sólo existen 10 integrales algebraicas ¹. Una exposición muy detallada de estos teoremas se encuentra en el libro de **Whittaker** ². En 1960, los matemáticos rusos sugirieron un nuevo concepto para definir los sistemas dinámicos: los denominaron *sistemas integrados y no integrados* ³.

En conclusión, no es posible, en general, resolver el problema de n cuerpos i.e., hallar la variación de las coordenadas y componentes de la velocidad en función del tiempo para un instante cualquiera; por lo tanto, el problema no tiene una *solución cerrada*, significa que no es posible predecir el comportamiento dinámico para cualquier instante de tiempo. Además, es imposible determinar el movimiento si dos o más cuerpos colisionan entre sí, o si alguno de ellos escapa del sistema.

En general, en la Mecánica Celeste clásica, se analizan y estudian ciertas configuraciones especiales, principalmente en el problema de tres cuerpos, restringido o no. Estas configuraciones que conducen a soluciones particulares fueron estudiadas por **Lagrange** ⁴ en 1772.

Síntesis ⁵: Las integrales deducidas expresan relaciones algebraicas entre las coordenadas, las velocidades y eventualmente el tiempo y , en virtud del teorema de **Bruns**, el problema de tres cuerpos no admite más integrales algebraicas que las 10 obtenidas. Entonces, un sistema de $3n$ ecuaciones diferenciales de segundo orden, o su equivalente un sistema de $6n$ ecuaciones diferenciales de primer orden, que definen el movimiento de n cuerpos, sólo es posible reducir el número de grados de libertad en 10; luego, estas 10 integrales pueden disminuir el orden del sistema a uno de orden $(6n-10)$; por ejemplo, en el caso particular de tres cuerpos estas integrales algebraicas reducen el orden a ocho.

Plano invariable de Laplace.

En el Sistema Solar, las órbitas de los planetas, con la excepción de Plutón ⁶, tienen inclinaciones pequeñas ($i < 3^\circ$, $i_{\text{Mercurio}} \cong 7^\circ$) con respecto a un plano que contiene al baricentro del sistema y perpendicular al vector momento angular total del mismo, denominado *plano invariable de Laplace*. Si las coordenadas perpendiculares a este plano son despreciadas, las ecuaciones del movimiento del problema de n cuerpos tienen un plano común; entonces, el sistema de ED es del orden $4n$ y por lo tanto, el número de integrales es ahora 6; luego, el orden puede ser reducido a: $4n - 6$. En el caso particular del problema de tres cuerpos, si se considera este plano el sistema reduce su orden a seis. Consultar: **Morbidelli**, A.; 2002, “*Modern Celestial Mechanics*”, pág. 131.

Sintetizando, la ecuación (3.8) nos dice que el momento angular de las masas del sistema es constante. El vector C define un plano denominado *plano invariable de Laplace* cuya inclinación es de 1.5° respecto al plano de la eclíptica y está situado entre los planos de las órbitas de Júpiter y Saturno.

Para aquellos estudiantes que estén interesados, desde el punto de vista matemático, en el problema de n cuerpos recomendamos: **Wintner**, A.; 1947, “*The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*”, **Moulton**, F. R.; 1948, “*An Introduction to Celestial Mechanics*”, Cap. VII, pág. 261.

¹ Poincaré, H.; 1892, “*Les Methodes Nouvelle de la Mecanique Céleste*”, Paris, Gauthier-Villars, Capítulo 5, pag. 250.

² Whittaker, E.T.; 1917, “*Analytical Dynamics*”, Cambridge University Press, Capítulo 14.

³ Arnol'd, V.I.; 1963, Uspekhi Matematicheskikh Nauk **18**, pág. 91.

⁴ Lagrange, J.L.; 1873, “*Collected Works*”, Paris, Gauthier-Villars, Vol. VI, pág. 229.

⁵ Szebehely, V.; 1967, “*Theory of Orbits*”, Academic Press, pág. 66-67.

⁶ Considerado un “planeta enano”, resolución 6A de la UAI, Asamblea General XXVI, Praga 2006.

§ 3.4 El teorema del Virial. Nociones elementales.

Consideremos la función

$$I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2.$$

definida como el *momento de inercia* de un sistema de n puntos masa ¹. Diferenciando dos veces con respecto al tiempo, resulta:

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{R}_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i R_i \ddot{R}_i = 2T + \sum_{i=1}^n R_i \cdot \nabla_i U$$

donde U es una función de punto, homogénea en todas sus coordenadas, de orden -1 , entonces aplicando el teorema de Euler se tiene,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i \cdot \nabla_i U &= \sum_{i=1}^n \left\{ x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial U}{\partial z_i} \right\} \\ &= -U = V. \end{aligned}$$

Luego,

$$\ddot{I} = 4T - 2U = 4T + 2V \quad (3.11)$$

Si tenemos en cuenta la integral de la energía (3.10), la ecuación (3.11) se puede escribir en forma alternativa:

$$\ddot{I} = 4E - 2V = 2(T + E) \quad (3.12)$$

Las ecuaciones (3.11) y (3.12) representan el *Teorema del Virial* ².

En la expresión (3.12) las cantidades T y V son positivas; por lo tanto, si E adopta un valor tal que $(4E - 2V) > 0$ o $(2T + 2E) > 0$, i.e., son cantidades positivas entonces, \ddot{I} es positivo y en consecuencia, I aumenta sin límite. Un “sofisma” es concluir que al menos uno de los R_i tiende a infinito, lo cual es equivalente a decir que al menos uno de los cuerpos escapa del sistema ³. Como ejemplo, supongamos que $R_1 = t \cos t$ y $R_2 = t \sin t$ entonces $R_1^2 + R_2^2 = t^2$ expresión que tiende a infinito cuando $t \rightarrow \infty$. Pero no es correcto decir que “al menos uno de los R_i debe aumentar sin límite”. En efecto, se ha demostrado que, sólo en el caso $n = 3$, al menos uno de los cuerpos escapa del sistema si \ddot{I} es positivo.

Para que el sistema se “conservé en conjunto” i.e., sea *estable* es necesario que E sea negativo y por tanto \ddot{I} debe ser negativo o cero sin embargo, este enunciado no representa una *condición suficiente*.

¹ Dado un sistema de partículas y un eje arbitrario, se define el *momento de inercia* I como la suma de los productos de las masas de las partículas por el cuadrado de la distancia r de cada partícula a dicho eje. Matemáticamente se expresa como: $I = \sum m_i r_i^2$; para un cuerpo de masa continua esta definición se generaliza $I = \int_V r^2 dm$, el subíndice V en la integral indica que se integra sobre todo el volumen del cuerpo.

² Goldstein, H.; 1963, “Mecánica Clásica”, págs. 101-104. Roy, A. E.; 1978, “Orbital Motion”, pag. 117.

Danby, J.M.A.; 1992, “Fundamentals of Celestial Mechanics”, pag. 276.

³ Pollard, H.; 1966, “Mathematical Introduction to Celestial Mechanics”, pág.44-46.

Siegel, C. L. & Moser, J. K.; 1971, “Lectures on Celestial Mechanics”, pág. 19-25.

§ 3.5 Introducción al Sistema Heliocéntrico.

Prólogo.

Las coordenadas heliocéntricas tienen su origen en el Sol y pueden ser coordenadas cartesianas, eclípticas o ecuatoriales. Se distinguen de las coordenadas geocéntricas porque éstas tienen su origen en la Tierra. Los planetas, asteroides, cometas y otros cuerpos que giran en torno al Sol, incluida la Tierra, se estudian e investigan en coordenadas heliocéntricas. Estas coordenadas expresan la verdadera posición espacial en las unidades físicas adoptadas. Ninguna observación del Sol se puede realizar en coordenadas heliocéntricas. Hay dos clases de sistemas de coordenados que son dos subcategorías: cartesiana-heliocéntrica y heliocéntrica-radial ¹.

Coordenadas Cartesianas Heliocéntricas. En el sistema de coordenadas cartesianas $\{x,y,z\}$, los ejes son perpendiculares entre sí; el eje- z es definido paralelo a la línea desde el Sol hacia el observador. El eje- y es perpendicular al eje- z y al plano que contiene al eje- z y al eje polar norte, positivo hacia el norte del Sol. El eje- x es definido perpendicular a ambos ejes- z e y , con x positivo hacia el oeste solar. Este es un sistema de coordenadas directo. Las unidades en cada eje se expresan en una distancia física (p.j. en Km.; unidades astronómicas, UA; o en \mathcal{R}_{Sol}). Los sistemas de coordenadas cartesianos-heliocéntricos son usados con frecuencia en la teoría del movimiento planetario ².

Teoría Heliocéntrica.

La Teoría Heliocéntrica afirma que la Tierra y los demás planetas giran alrededor del Sol. Esta teoría fue propuesta en la antigüedad por el “astrónomo” griego *Aristarco de Samos* (310 a.c.-230 a.c.), quien se basó en medidas elementales de la distancia entre la Tierra y el Sol, determinando que las dimensiones del Sol eran mucho mayores comparadas con las de la Tierra. Por esta razón, *Aristarco* propuso que la Tierra debía girar alrededor del Sol y no a la inversa, como sostenía la teoría geocéntrica de *Ptolomeo* e *Hiparco*, aceptada en esa época y en los siglos siguientes, acorde con la visión antropocéntrica imperante.

Sin embargo, más de un milenio después, en el siglo XVI, esta teoría volvería a ser formulada, esta vez por *Nicolás Copérnico*, uno de los astrónomos más influyentes de la historia, con la publicación en 1543 del libro “*De Revolutionibus Orbium Coelestium*”. La diferencia fundamental entre la propuesta de *Aristarco* en la antigüedad y la teoría de Copérnico es que este último emplea cálculos matemáticos para sustentar su hipótesis. Precisamente a causa de esto y a pesar de que su libro fue prohibido por la Iglesia Católica hasta 1835, durante casi tres siglos, dado que la teoría heliocéntrica contradice la Biblia, sus ideas marcaron el comienzo de lo que se conoce como la revolución científica. No sólo fue un cambio importantísimo en la astronomía, sino en las ciencias en general y particularmente en la cosmovisión de la civilización. A partir de la publicación de su libro y la refutación del sistema geocéntrico defendido por la astronomía griega, la civilización rompe con la idealización del saber incuestionable de la antigüedad y se lanza con mayor ímpetu en busca de un nuevo conocimiento.

Se recomienda: **Seeds, M. A. & Backman, D. E.**; 2009, “*Astronomy, The Solar System and Beyond*”, Ed. Brooks/Cole. Es un libro muy didáctico.

¹ **Morbidelli, A.**; 2002, “*Modern Celestial Mechanics*”, págs. 11, 17, 22-24.

² **Brouwer, D. & Clemence, G.**; 1961, “*Methods of Celestial Mechanics*”, págs. 31-47.

El movimiento de los planetas en la Teoría Heliocéntrica ¹.

A pesar de que *Copérnico* propuso una nueva teoría situando al Sol en el centro del Sistema Planetario, su hipótesis se basaba en que los planetas giraban alrededor del mismo en órbitas circulares, igual a lo establecido en el modelo geocéntrico de *Ptolomeo*, con la diferencia que en este último el Sol orbitaba entorno de la Tierra. Por esta razón, si bien los cálculos matemáticos para predecir el movimiento de los planetas se habían simplificado considerablemente con la teoría de *Copérnico*, éstos no arrojaban aún resultados exactos y precisaban de numerosas correcciones y combinaciones con “círculos”. Los cálculos adquirieron un grado de exactitud “más preciso y más simple” recién en 1609, cuando el astrónomo alemán *Johannes Kepler* (1571-1630) reformuló la teoría, sugiriendo que la trayectoria de los planetas no era circular, sino elíptica.

En el modelo de *Copérnico* se llama período orbital al intervalo entre dos conjunciones, superiores o inferiores, si el planeta es interior; y dos conjunciones u oposiciones, si el planeta es exterior. Desde la antigüedad, se conoce dicho periodo para todos los planetas. En el período sinódico se repiten las distintas configuraciones de los cuerpos celestes.

Si bien no se puede considerar a Copérnico como el que propuso el “sistema heliocéntrico actual” ni el que desarrolló la teoría, sí cumplió una función primordial como inspirador para los científicos que le sucedieron. La verdadera revolución aún habría de venir, cuando otros científicos como *Galileo Galilei*, *Johannes Kepler* y *René Descartes* iniciaron nuevas investigaciones sobre este tema, que llevarían a replantear la epistemología, la filosofía e incluso la teología. En efecto, fueron las observaciones realizadas por *Galileo*, sobre los satélites jovianos, las que establecieron una prueba contundente a favor de la revolución copernicana.

Los “astrónomos”, que en forma cronológica contribuyeron al concepto de Sistema Heliocéntrico son : *Heráclides Póntico* (390 a.c.-310 a.c.), *Aristarco de Samos* (310 a.c.-230 a.c.), *Hiparco de Nicea* (190 a.c.-120 a.c.), *Claudio Ptolomeo* (85-165), *Nicolás Copérnico* (1473-1543), *Tycho Brahe* (1546-1601), *Giordano Bruno* (1548-1600), *Galileo Galilei* (1564-1642), *Johannes Kepler* (1571-1630).

§ 3.6 Ecuaciones de movimiento en el Sistema Heliocéntrico.

Desde la época de los griegos se intenta explicar el movimiento de los planetas sobre la esfera celeste. En el Sistema Solar, casi toda su masa está concentrada en el Sol, el estudio de la trayectoria de un planeta se realiza analíticamente utilizando los resultados del problema de dos cuerpos (planeta y Sol), ya que las ecuaciones diferenciales del movimiento son completamente integrables. Sin embargo, para periodos de tiempo muy extensos, los restantes planetas influyen sobre el movimiento del cuerpo considerado, por lo tanto su trayectoria será ligeramente diferente en dimensión y orientación espacial cuando el tiempo t aumenta considerablemente. También, aparecen dificultades cuando se consideran configuraciones con más de tres cuerpos; entonces las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento no tienen una solución analítica exacta y por lo tanto, es necesario recurrir a integraciones numéricas, las cuales nos permiten obtener aproximaciones “muy precisas” en un intervalo de tiempo muy grande ².

¹ Moulton, F.R.; 1970, “*An Introduction to Celestial Mechanics*”, págs. 269-273.

² Stiefel, E. L. & Scheifele, G.; 1971, “*Linear and Regular Celestial Mechanics*”. Ed. Springer-Verlag.

Los métodos numéricos son confiables, en general dependen del error que se cometa en la integración de las EDs ¹. El objetivo de esta Sección es estudiar el problema de n cuerpos sometido a la atracción gravitatoria de masas puntuales, con condiciones iniciales de posición y velocidad arbitrarias, en el espacio de tres dimensiones.

Resumiendo, el problema de n cuerpos consiste en plantear n ecuaciones diferenciales de segundo orden con condiciones iniciales (posición y velocidad) arbitrarias; la masa de los planetas es conocida y en general, en unidades de la masa del Sol, \mathcal{M}_{Sol} ².

Definimos el sistema de coordenadas de forma tal que el origen es uno cualquiera de los n puntos masas dados. Consideremos sólo tres puntos masa, m_0 , m_1 , m_2 y supongamos que m_0 es la masa del Sol. Entonces, las ecuaciones de movimiento, en un sistema de coordenadas inercial ³, tienen la forma:

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{\mathbf{R}}_0 &= \nabla U_{\mathbf{R}_0} = k^2 \frac{m_0 m_1}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0|^3} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) + k^2 \frac{m_0 m_2}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0|^3} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0) \\ m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 &= \nabla U_{\mathbf{R}_1} = k^2 \frac{m_1 m_0}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_1|^3} (\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_1) + k^2 \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^3} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2 &= \nabla U_{\mathbf{R}_2} = k^2 \frac{m_2 m_0}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_2|^3} (\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_2) + k^2 \frac{m_2 m_1}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^3} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \end{aligned}$$

Consideremos nuevas variables, sea: $(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) = \mathbf{P}_1$ y $(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0) = \mathbf{P}_2$, donde \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 son vectores que indican las posiciones relativas de m_1 y m_2 respecto de m_0 .

Simplificamos las ecuaciones anteriores dividiendo por m_0 , m_1 y m_2 respectivamente y además restamos la primera ecuación de las otras dos, entonces resulta,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{P}}_1 &= -k^2 \frac{m_0}{|\mathbf{P}_1|^3} \mathbf{P}_1 - k^2 \frac{m_1}{|\mathbf{P}_1|^3} \mathbf{P}_1 + k^2 \frac{m_2}{|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1|^3} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) - k^2 \frac{m_2}{|\mathbf{P}_2|^3} \mathbf{P}_2 \\ \ddot{\mathbf{P}}_2 &= -k^2 \frac{m_0}{|\mathbf{P}_2|^3} \mathbf{P}_2 - k^2 \frac{m_1}{|\mathbf{P}_1|^3} \mathbf{P}_1 + k^2 \frac{m_1}{|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2|^3} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) - k^2 \frac{m_2}{|\mathbf{P}_2|^3} \mathbf{P}_2 \end{aligned}$$

estas ecuaciones también se pueden escribir de la forma:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{P}}_1 + k^2 \frac{(m_0 + m_1)}{|\mathbf{P}_1|^3} \mathbf{P}_1 &= k^2 m_2 \left[\frac{\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1}{|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1|^3} - \frac{\mathbf{P}_2}{|\mathbf{P}_2|^3} \right] \\ \ddot{\mathbf{P}}_2 + k^2 \frac{(m_0 + m_2)}{|\mathbf{P}_2|^3} \mathbf{P}_2 &= k^2 m_1 \left[\frac{\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2}{|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2|^3} - \frac{\mathbf{P}_1}{|\mathbf{P}_1|^3} \right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

¹ El error depende del **integrador** utilizado, del paso tabular, de posibles aproximaciones o colisiones, etc. Recomendamos el integrador: "Evorb13" de **Brunini**, A. (UNLP) y **Gallardo**, T. (UR). Consultar: www.fisica.edu.uy/~gallardo/evorb

² También pueden estar dadas en función de la masa de Júpiter o de la Tierra.

³ **Brouwer**, D. & **Clemence**, G. M.; 1961, "*Methods of Celestial Mechanics*", Cap. X, pág. 249.

Las ecuaciones (3.13) representan, en coordenadas heliocéntricas, las *ecuaciones de movimiento del problema de tres cuerpos*. Estas ecuaciones constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales simultáneas de segundo orden en forma vectorial equivalente por tanto, a un sistema de seis ecuaciones diferenciales simultáneas de segundo orden en forma cartesiana. Además, si uno cualquiera de los tres cuerpos tiene masa nula, por ejemplo si $m_2 = 0$ entonces, la primera ecuación del sistema (3.13) representa la ecuación de movimiento en el problema de dos cuerpos.

Consideremos coordenadas cartesianas con origen en la masa m_0 luego, las coordenadas del vector \mathbf{P}_1 ¹ son $\{x_1, y_1, z_1\}$ o también, $\mathbf{P}_1 = x_1 \mathbf{I} + y_1 \mathbf{J} + z_1 \mathbf{K}$, donde, $x_1 = \xi_1 - \xi_0$, $y_1 = \eta_1 - \eta_0$, $z_1 = \zeta_1 - \zeta_0$ ²; análogamente para $\mathbf{P}_2 = x_2 \mathbf{I} + y_2 \mathbf{J} + z_2 \mathbf{K}$, donde $x_2 = \xi_2 - \xi_0$, $y_2 = \eta_2 - \eta_0$, $z_2 = \zeta_2 - \zeta_0$.

Vamos a demostrar que las ecuaciones heliocéntricas (3.13) se pueden escribir de la forma:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{P}}_1 + k^2 \frac{(m_0 + m_1)}{|\mathbf{P}_1|^3} \mathbf{P}_1 &= \mathfrak{R}_{\mathbf{P}_1}^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{P}}_2 + k^2 \frac{(m_0 + m_2)}{|\mathbf{P}_2|^3} \mathbf{P}_2 &= \mathfrak{R}_{\mathbf{P}_2}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $\mathfrak{R}_{\mathbf{P}_1}^{(1)}$ y $\mathfrak{R}_{\mathbf{P}_2}^{(2)}$ es el gradiente de la función escalar \mathfrak{R} , definida como la función perturbadora cuya expresión es,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^{(1)} &= k^2 m_2 \left[\frac{1}{|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1|} - \frac{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2}{|\mathbf{P}_2|^3} \right] \\ \mathfrak{R}^{(2)} &= k^2 m_1 \left[\frac{1}{|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1|} - \frac{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2}{|\mathbf{P}_1|^3} \right] \end{aligned}$$

El gradiente de la función escalar esta expresado de la forma³:

$$\mathfrak{R}_{\mathbf{P}_1}^{(1)} = \frac{\partial \mathfrak{R}^{(1)}}{\partial x_1} \mathbf{I} + \frac{\partial \mathfrak{R}^{(1)}}{\partial y_1} \mathbf{J} + \frac{\partial \mathfrak{R}^{(1)}}{\partial z_1} \mathbf{K}$$

Recordemos que:

$$|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2; \quad (3.15)$$

$$2|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1|^2 \frac{\partial (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)}{\partial x_1} = -2(x_2 - x_1) = 2(x_1 - x_2)$$

y que: $\frac{\partial (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1)}{\partial x_1} = x_2$.

¹ Vector posición de m_1 respecto de m_0 .

² $\{\xi_j, \eta_j, \zeta_j\}$ coordenadas del punto masa m_j respecto de un sistema de referencia inercial, consultar § 3.2, pág. 29.

³ El gradiente de $U = \text{grad } U = \nabla U = (i \partial/\partial x + j \partial/\partial y + k \partial/\partial z) U = \partial U/\partial x \mathbf{i} + \partial U/\partial y \mathbf{j} + \partial U/\partial z \mathbf{k}$. Luego, el gradiente de una función escalar es un vector.

Por lo tanto,

$$\mathfrak{R}_{P_1}^{(1)} = -\frac{k^2}{|P_2 - P_1|^3} |P_2 - P_1| \left[\frac{\partial |P_2 - P_1|}{\partial x_1} I + \frac{\partial |P_2 - P_1|}{\partial y_1} J + \frac{\partial |P_2 - P_1|}{\partial z_1} K \right] -$$

$$-\frac{k^2}{|P_2|^3} \left[\frac{\partial (P_1 P_2)}{\partial x_1} I + \frac{\partial (P_1 P_2)}{\partial y_1} J + \frac{\partial (P_1 P_2)}{\partial z_1} K \right]$$

Entonces, teniendo en cuenta las fórmulas (3.15) resulta,

$$\mathfrak{R}_{P_1}^{(1)} = -\frac{k^2}{|P_2 - P_1|^3} [(x_1 - x_2) I + (y_1 - y_2) J + (z_1 - z_2) K] - \frac{k^2}{|P_2|^3} [x_2 I + y_2 J + z_2 K]$$

y en forma vectorial tiene la expresión,

$$m_2 \mathfrak{R}_{P_1}^{(1)} = \frac{k^2 m_2}{|P_2 - P_1|^3} (P_2 - P_1) - \frac{k^2 m_2}{|P_2|^3} P_2,$$

Como se quería demostrar. De un modo similar se demuestra para el gradiente $\mathfrak{R}_{P_2}^{(2)}$.

Entonces, las ecuaciones vectoriales de movimiento (3.14) en coordenadas cartesianas heliocéntricas toman la forma ¹:

$$\ddot{x}_1 + \frac{k^2 (m_0 + m_1)}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^3}} x_1 = m_2 \frac{\partial \mathfrak{R}^{(1)}}{\partial x_1}$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{k^2 (m_0 + m_2)}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^3}} x_2 = m_1 \frac{\partial \mathfrak{R}^{(2)}}{\partial x_2}$$
(3.16)

expresiones análogas para $\{\ddot{y}_1, \ddot{z}_1\}$ y $\{\ddot{y}_2, \ddot{z}_2\}$.

§ 3.7 Soluciones del problema de tres cuerpos.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento del problema de tres cuerpos, en coordenadas cartesianas heliocéntricas, fueron deducidas en (3.16). La Figura 10 muestra la posición de m_1 y m_2 respecto de m_0 (Sol) en coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$.

Las ecuaciones de movimiento de m_1 y m_2 respecto de m_0 , en forma vectorial, son [ver (3.14)]

$$\ddot{P}_1 + k^2 \frac{(m_0 + m_1)}{|P_1|^3} P_1 = \mathfrak{R}_{P_1}^{(1)}$$

$$\ddot{P}_2 + k^2 \frac{(m_0 + m_2)}{|P_2|^3} P_2 = \mathfrak{R}_{P_2}^{(2)}$$

¹ Poincaré, H.; 1892, “*Methodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*”, Tomo I. Danby, “*Fundamentals of Celestial Mechanics*”, pág. 273-280.

Donde $\mathfrak{R}_{P_1}^{(1)}$ es el gradiente de la función perturbadora según la dirección P_1 , y $\mathfrak{R}^{(1)}$ y $\mathfrak{R}^{(2)}$ representan las funciones perturbadoras, cuyas expresiones son:

$$\mathfrak{R}^{(1)} = k^2 m_2 \left[\frac{1}{|P_2 - P_1|} - \frac{P_1 \cdot P_2}{|P_2|^3} \right]$$

$$\mathfrak{R}^{(2)} = k^2 m_1 \left[\frac{1}{|P_2 - P_1|} - \frac{P_1 \cdot P_2}{|P_1|^3} \right]$$

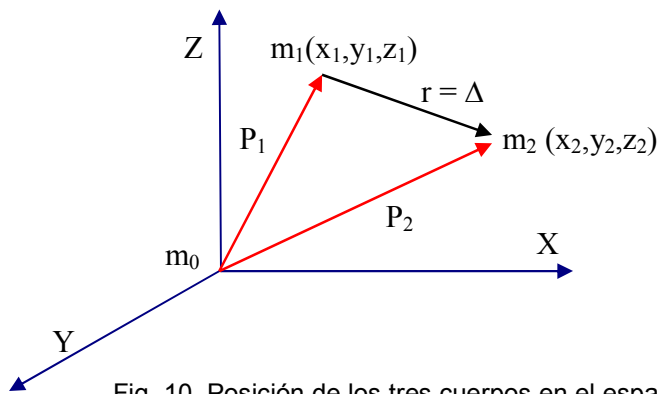


Fig. 10. Posición de los tres cuerpos en el espacio \mathbf{R}^3 . m_0 (Sol) coincide con el origen de coordenadas cartesianas heliocéntricas.

Donde, $\frac{1}{|P_2 - P_1|} = \frac{1}{|P_1 - P_2|} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\Delta}$ es la inversa de la distancia mutua entre los cuerpos m_1 y m_2 . Se la designa como la *parte principal* de la *función perturbadora*. Luego, el gradiente de la función perturbadora tiene la forma,

$$\mathfrak{R}_{P_1}^{(1)} = + \frac{k^2 m_2}{|P_2 - P_1|^3} (P_2 - P_1) - \frac{k^2 m_2}{|P_2|^3} P_2$$

$$\mathfrak{R}_{P_2}^{(1)} = + \frac{k^2 m_1}{|P_2 - P_1|^3} (P_1 - P_2) - \frac{k^2 m_1}{|P_1|^3} P_1$$

Hemos visto que en el problema de tres cuerpos sólo se conocen diez integrales algebraicas y por tanto, el grado de indeterminación es ocho ¹. En general, no existen más integrales que las enunciadas, pero hay algunos casos particulares de gran interés astronómico, en el cual el sistema de tres cuerpos se puede resolver, i.e., admite una solución. Es el caso de las *soluciones homográficas*, de *equilibrio relativo* y *colineales* ².

¹ Consultar pág. 38.

² Consultar: **Lhotka** et al.; 2008, MNRAS, Vol. 384, págs. 1165-1177.

Meyer, K.R., **Hall**, G.R., **Offin**, D.; 2009, "Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem", Cap. 12, pág. 304. Ed. Springer. (recomendable).

Soluciones homográficas.

Decimos que una solución del problema de tres cuerpos es *homográfica*¹ si la configuración del sistema se conserva durante el movimiento semejante a si mismo, i.e., si el triángulo formado por los tres puntos masa, en un instante cualquiera t , es semejante al triángulo formado por las tres masas en el instante inicial de la configuración, para $t = t_0$.

Entonces, debe verificarse si la configuración es *homográfica*, que el ángulo determinado por los vectores P_1 y P_2 sea constante en el tiempo; definimos este ángulo por ω y además, que la relación

$$\frac{|P_1|}{|P_1^0|} = \frac{|P_2|}{|P_2^0|} = \rho(t) > 0 \quad (3.17)$$

sea positiva, tal que para todo $t = t_0$ se verifique $\rho(t_0) = 1$. Indiquemos con a_1 y a_2 los módulos de $P_1(t_0)$ y $P_2(t_0)$ respectivamente y con $a_0 = |P_2(t_0) - P_1(t_0)|$; de tal modo, que la expresión (3.17) toma la forma:

$$|P_1| = a_1 \rho; \quad |P_2| = a_2 \rho; \quad y \quad |P_2(t_0) - P_1(t_0)| = a_0 \rho \quad (3.17a)$$

donde ρ se define como la *función de dilatación*; es una función continua y derivable. Si en las ecuaciones de movimiento (3.13) introducimos la definición de los módulos (3.17a) resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{P}_1 + k^2 \frac{(m_0 + m_1)}{a_1^3 \rho^3} P_1 &= \frac{k^2 m_2}{a_0^3 \rho^3} (P_2 - P_1) - \frac{k^2 m_2}{a_2^3 \rho^3} P_2 \\ \ddot{P}_2 + k^2 \frac{(m_0 + m_2)}{a_2^3 \rho^3} P_2 &= \frac{k^2 m_1}{a_0^3 \rho^3} (P_2 - P_1) - \frac{k^2 m_1}{a_1^3 \rho^3} P_1 \end{aligned}$$

multiplicamos ambas ecuaciones por ρ^3 y además, como los coeficientes de los vectores P_1 y P_2 son cantidades constantes, las ecuaciones anteriores se pueden escribir de la forma:

$$\begin{aligned} \rho^3 \ddot{P}_1 + a_{11} P_1 + a_{12} P_2 &= 0 \\ \rho^3 \ddot{P}_2 + a_{21} P_1 + a_{22} P_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_{11} &= + \frac{k^2 (m_0 + m_1)}{a_1^3} + k^2 \frac{m_2}{a_0^3}, & a_{12} &= k^2 m_2 \left(\frac{1}{a_2^3} - \frac{1}{a_0^3} \right) \\ a_{21} &= k^2 m_1 \left(\frac{1}{a_1^3} - \frac{1}{a_0^3} \right), & a_{22} &= + \frac{k^2 (m_0 + m_2)}{a_2^3} + k^2 \frac{m_1}{a_0^3}. \end{aligned}$$

¹ Arnold, V., Kozlov, V., Neishtadt, A.; 2006, "Mathematical aspects of Classical and Celestial Mechanics".

Danby, J.M.; 1992, "Fundamentals of Celestial Mechanics", Cap. 8, pág. 266.

Plummer, H.C.; 1960, "An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy". Es uno de los mejores libros de referencia.

Wintner, A.; 1947, "The Analytical Foundations of Celestial Mechanics".

Si elegimos las unidades de longitud y tiempo, de tal modo que: $k^2 = 1$ y $m_0 + m_1 + m_2 = 1$; entonces, los coeficientes a_{ij} se simplifican y por lo tanto, tienen la expresión:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{(1-m_2)}{a_1^3} + \frac{m_2}{a_0^3}, & a_{12} &= m_2 \left(\frac{1}{a_2^3} - \frac{1}{a_0^3} \right) \\ a_{21} &= m_1 \left(\frac{1}{a_1^3} - \frac{1}{a_0^3} \right), & a_{22} &= \frac{(1-m_1)}{a_2^3} + \frac{m_1}{a_0^3}. \end{aligned} \quad (3.18a)$$

Resumiendo. El sistema de ED (3.18) nos permite hallar soluciones en la cual la forma geométrica de la configuración permanece invariante. En este tipo de soluciones la escala de longitud puede variar y la figura puede rotar pero la forma geométrica no varía. Una de estas configuraciones es un triángulo equilátero o los tres cuerpos alineados.

NOTA: Mi Profesor, el Dr. Reynaldo P. **Cesco**, estudió exhaustivamente este problema en un trabajo titulado: “*Sobre las soluciones homográficas del problema de los tres cuerpos*”; 1959, Serie Astronómica tomo 25, N° 2, Observatorio Astronómico de la Universidad Nacional de La Plata. Recomendando su lectura.

Solución de equilibrio relativo.

Las soluciones homográficas han sido estudiadas exhaustivamente por *Whittaker*¹ y *Levi-Civita*²; cuyos resultados son *soluciones particulares* de las *soluciones de Lagrange*³; quien, con pocos años de posteridad a *Euler*⁴ dio las únicas soluciones exactas conocidas hasta ahora del problema de los tres cuerpos con la ley de atracción de *Newton*.

Las *soluciones de equilibrio relativo*, corresponden al caso particular cuando la dilatación $\rho(t)$ es constante e idéntica al valor que adopta en el instante t_0 , i.e., $\rho(t_0) = 1$. En este caso la solución de los tres cuerpos correspondiente a una solución homográfica, transforma las ecuaciones (3.18) en el siguiente sistema:

¹ **Whittaker** E. T. Nació en 1873 Inglaterra y murió en 1956 Escocia. Fue astrónomo real de Irlanda en el 1906. Sus estudios sobre Análisis Numérico, Funciones Especiales, Mecánica Analítica, Mecánica Celeste, Ecuaciones diferenciales etc. le valieron para obtener una Cátedra en la Universidad de Edimburgo y posteriormente el título de Sir.

² **Levi-Civita**, T.(1873-1941) fue un matemático italiano, famoso por su trabajo sobre cálculo tensorial pero también hizo contribuciones importantes en otras áreas de las matemáticas. Fue discípulo de Gregorio Ricci-Curbastro, el inventor del cálculo tensorial. Sus trabajos incluyen publicaciones fundacionales en Matemáticas puras y aplicadas, en Mecánica Celeste (problema de tres cuerpos) y en hidrodinámica. Levi-Civita colaboró con Albert Einstein en la aplicación del cálculo tensorial, en la teoría de la relatividad general.

³ **Lagrange**, J.L. Nació en 1736 Turín y murió en 1813 Paris. Exquisito matemático !. Solo diremos que a los dieciséis años de edad fue nombrado profesor de matemáticas en la Escuela Real de Artillería de Turín. Su producción científica está reflejada en su obra “*Mécanique Analytique*”. “Transcribía a las matemáticas todos los temas sobre investigaciones físicas que le traían sus amigos, de la misma manera que Schubert ponía música a cualquier ritmo que atraía su fantasía”.

⁴ **Euler**, L. Nació en 1707 Basilea y murió 1783 en San Petersburgo. Probablemente uno de los más grandes matemáticos de la historia, comparable a Gauss, Newton, Laplace y Arquímedes. Fue discípulo de Bernoulli, a quien superó rápidamente. Posiblemente fue el matemático más fecundo y productivo; su actividad científica se manifiesta en sus publicaciones, un promedio de 600 páginas por año entre los años 1727 y 1783. Publico varios trabajos sobre el movimiento de la Luna y problema de tres cuerpos.

$$\ddot{\mathbf{P}}_1 + a_{11} \mathbf{P}_1 + a_{12} \mathbf{P}_2 = 0 \quad (3.19a)$$

$$\ddot{\mathbf{P}}_2 + a_{21} \mathbf{P}_1 + a_{22} \mathbf{P}_2 = 0$$

Estas ecuaciones forman un sistema de seis ecuaciones diferenciales simultáneas de segundo orden, lineales con coeficientes constantes; el cual se puede resolver pero presenta una “objección”: sólo conduce a la *solución de equilibrio relativo*; por lo tanto, analizaremos este sistema en algunos casos particulares. Por definición se tiene,

$$|\mathbf{P}_1| = a_1, \quad |\mathbf{P}_2| = a_2, \quad |\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1| = a_0; \quad \dot{\mathbf{P}}_1^2 = a_1^2, \quad \dot{\mathbf{P}}_2^2 = a_2^2, \quad (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)^2 = a_0^2$$

Derivando las tres últimas igualdades, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 \dot{\mathbf{P}}_1 &= 0 \\ \mathbf{P}_2 \dot{\mathbf{P}}_2 &= 0 \\ (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)(\dot{\mathbf{P}}_2 - \dot{\mathbf{P}}_1) &= 0, \end{aligned}$$

además, $\mathbf{P}_1 \dot{\mathbf{P}}_2 + \mathbf{P}_2 \dot{\mathbf{P}}_1 = 0$. El sistema anterior presenta tres relaciones muy útiles para el tratamiento que sigue. Si multiplicamos escalarmente la primera ecuación de (3.19a) por \mathbf{P}_1 y la segunda ecuación por \mathbf{P}_2 resulta,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 \ddot{\mathbf{P}}_1 + a_{11} a_1^2 + a_{12} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 &= 0 \\ \mathbf{P}_2 \ddot{\mathbf{P}}_2 + a_{21} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 + a_{22} a_2^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.19b)$$

recordemos que $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$ es el producto escalar de los vectores \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 , definido como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo comprendido entre los vectores, representado por ω , luego se tiene

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = a_1 a_2 \cos \omega = p = \text{constante}$$

además, como $\mathbf{P}_1 \dot{\mathbf{P}}_1 = 0$ derivando se tiene: $\dot{\mathbf{P}}_1 \dot{\mathbf{P}}_1 + \mathbf{P}_1 \ddot{\mathbf{P}}_1 = 0$; por lo tanto $\mathbf{P}_1 \ddot{\mathbf{P}}_1 = -\dot{\mathbf{P}}_1^2$, entonces resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 \ddot{\mathbf{P}}_1 &= -\dot{\mathbf{P}}_1^2 \\ \mathbf{P}_2 \ddot{\mathbf{P}}_2 &= -\dot{\mathbf{P}}_2^2 \end{aligned}$$

reemplazando en el sistema (3.19b) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_1^2 &= a_{11} a_1^2 + a_{12} p \\ \dot{\mathbf{P}}_2^2 &= a_{22} a_2^2 + a_{21} p \end{aligned} \quad (3.19c)$$

Las ecuaciones (3.19c) nos dicen que el cuadrado de los vectores velocidad es constante.

Posibles soluciones.

Consideremos el sistema (3.19a), supongamos primero que los números constantes $a_{12} = a_{21} \equiv 0$, en este caso tiene que ser $a_0 = a_1 = a_2$ ¹, i.e., resulta una *configuración equilátera* entonces, el sistema de ED toma la forma

$$\ddot{\mathbf{P}}_1 + a_{11} \mathbf{P}_1 = 0$$

$$\ddot{\mathbf{P}}_2 + a_{22} \mathbf{P}_2 = 0$$

como las cantidades a_{11} y a_{22} ¹ son iguales, resulta: $a_{11} = a_{22} = \frac{1}{a_0^3}$, luego las ecuaciones anteriores tienen la expresión:

$$\ddot{\mathbf{P}}_1 + a_{11} \mathbf{P}_1 = 0$$

$$\ddot{\mathbf{P}}_2 + a_{11} \mathbf{P}_2 = 0$$

Las cuales configuran un sistema de ED no simultáneas, i.e., ambas ecuaciones son independientes; la primera ecuación vectorial representa tres EDs de segundo orden en coordenadas cartesianas, independientes de las otras tres, expresadas por la segunda ED vectorial.

Hemos supuesto que $a_{12} = a_{21} \equiv 0$ y $a_0 = a_1 = a_2$, luego el sistema (3.19c) toma la forma

$$\dot{\mathbf{P}}_1^2 = a_{11} a_0^2$$

$$\dot{\mathbf{P}}_2^2 = a_{22} a_0^2$$

lo cual implica que $\dot{\mathbf{P}}_1^2 = \dot{\mathbf{P}}_2^2$ por ser $a_{11} = a_{22}$ entonces, resulta la relación $a_{11} = \frac{\dot{\mathbf{P}}_v^2}{a_0^2}$, donde $v = 1, 2$.

Indiquemos con ϖ el ángulo que los vectores velocidad $\dot{\mathbf{P}}_1$ y $\dot{\mathbf{P}}_2$ forman entre sí luego, el producto escalar entre ambos vectores se puede calcular por dos métodos diferentes:

1º) Aplicando la definición: $\dot{\mathbf{P}}_1 \cdot \dot{\mathbf{P}}_2 = a_{11} a_0^2 \cos \varpi$.

2º) Derivando la igualdad $\mathbf{P}_1 \dot{\mathbf{P}}_2 + \mathbf{P}_2 \dot{\mathbf{P}}_1 = 0$, demostrada anteriormente (pág. 49), resulta

$$2 \dot{\mathbf{P}}_1 \dot{\mathbf{P}}_2 + \mathbf{P}_1 \ddot{\mathbf{P}}_2 + \mathbf{P}_2 \ddot{\mathbf{P}}_1 = 0$$

$$2 \dot{\mathbf{P}}_1 \dot{\mathbf{P}}_2 - a_{11} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 - a_{11} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = 0$$

$$\dot{\mathbf{P}}_1 \dot{\mathbf{P}}_2 = \frac{1}{2} 2 a_{11} p$$

igualando ambos productos se deduce: $a_{11} a_0^2 \cos \varpi = a_{11} p = a_{11} a_0^2 \cos \omega$, por lo tanto:

$$\cos \varpi = \cos \omega = \cos 60^\circ = 1/2, \text{ si y solo si } \varpi = \omega = \pi/3.$$

¹ Consultar sistema de ecuaciones (3.18a).

Luego, los vectores velocidad también forman un ángulo de 60° entre si; además, como estos vectores son perpendiculares a los vectores posición P_1 y P_2 , se deduce que el movimiento se realiza en un plano.

Análisis de las soluciones homográficas colineales en equilibrio relativo.

Definición de solución homográfica:

Una solución del problema de los tres cuerpos es homográfica si la configuración de los tres cuerpos se mantiene semejante a si misma durante el movimiento.

Si indicamos con P_1^0 y P_2^0 los vectores de posición de los puntos masa m_1 y m_2 , respecto de un sistema heliocéntrico con origen en m_0 , en el instante inicial ($t_0 = 0$) y con P_1 y P_2 los respectivos vectores de posición en un instante cualquiera t entonces, la representación geométrica de la solución homográfica consiste de triángulos semejantes, i.e., el ángulo ω es constante. La Figura 11, muestra la distribución “triangular” de tres cuerpos en una solución homográfica.

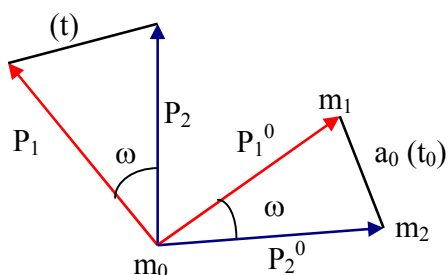


Fig. 11. La configuración homográfica con m_0 como origen de coordenadas. El ángulo ω permanece constante durante el movimiento y la configuración triangular permanece siempre semejante al instante inicial.

En 1772 Lagrange descubrió dos soluciones particulares del problema de tres cuerpos denominadas *soluciones estacionarias*. Se admite que, inicialmente, las tres masas están en un mismo plano. Entonces, resulta una *solución estacionaria* cuando la configuración geométrica permanece invariante con respecto al tiempo. Si el movimiento de las masas es tal que sus distancias mutuas no varían, implica que la configuración simplemente rota en su propio plano alrededor del centro de masa ¹.

Hemos estudiado que la función dilatación, ecuación (3.17), satisface las condiciones $\rho(t) > 0$ y $\rho(0) = 1$, además, si indicamos con a_1 y a_2 las longitudes de los vectores P_1^0 y P_2^0 resulta,

$$P_1^2 = a_1^2 \rho^2, \quad P_2^2 = a_2^2 \rho^2, \quad P_1 P_2 = a_1 a_2 \rho^2 \cos \omega = p \tag{3.20}$$

Entonces, las soluciones de equilibrio relativo son las que corresponden a ρ constante e igual a uno, i.e., $\rho(t) \equiv 1$.

NOTA. Recomendamos consultar: **Boccaletti, D. & Pucacco, G.**; 1996, "Theory of Orbits, Integrable systems and non-perturbative methods", Cap. 3, págs. 218-235.

¹ **McCuskey, S.W.**; 1963, "Introduction to Celestial Mechanics", pág. 100.
Roy, A. E.; 1978, "Orbital Motion", pág. 124.

Los vectores P_1 y P_2 , aun cuando tienen modulo constante, son funciones del tiempo t y por tanto, podemos derivar las expresiones (3.20), luego

$$\begin{aligned} P_v \dot{P}_v &= 0 \\ \dot{P}_v^2 + P_v \ddot{P}_v &= 0, \quad \text{para } v = 1,2 \end{aligned} \quad (3.20a)$$

derivando la tercera ecuación de (3.20) resulta: $\dot{P}_1 P_2 + P_1 \dot{P}_2 = 0$.

Hemos estudiado, ver (3.18), que las ecuaciones diferenciales del problema de tres cuerpos, correspondiente a una solución homográfica con dilatación $\rho(t)$, en un sistema heliocéntrico, tienen la forma:

$$\begin{aligned} \rho^3 \ddot{P}_1 + a_{11} P_1 + a_{12} P_2 &= 0 \\ \rho^3 \ddot{P}_2 + a_{21} P_1 + a_{22} P_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{11} &= + \frac{(m_0 + m_1)}{a_1^3} + \frac{m_2}{a_0^3}, & a_{12} &= m_2 \left(\frac{1}{a_2^3} - \frac{1}{a_0^3} \right) \\ a_{21} &= m_1 \left(\frac{1}{a_1^3} - \frac{1}{a_0^3} \right), & a_{22} &= + \frac{(m_0 + m_2)}{a_2^3} + \frac{m_1}{a_0^3}. \end{aligned}$$

Si los coeficientes $a_{12} = a_{21} = 0$ y $\rho(t) \equiv 1$ se obtienen las *soluciones equiláteras de equilibrio relativo de Lagrange*; luego, las ecuaciones del movimiento toman la forma

$$\begin{aligned} \ddot{P}_1 + a_{11} P_1 &= 0 \\ \ddot{P}_2 + a_{22} P_2 &= 0 \end{aligned}$$

un sistema de dos ecuaciones diferenciales vectoriales de segundo orden independientes o también, doce ecuaciones diferenciales cartesianas de primer orden e independientes, consultar ¹.

Supongamos ahora que $a_{12} \neq 0$ entonces, podemos calcular los cuadrados de los módulos del vector velocidad, teniendo en cuenta (3.20a) y (3.18), resulta

$$\begin{aligned} \dot{P}_1^2 &= a_{11} a_1^2 + a_{12} p \\ \dot{P}_2^2 &= a_{22} a_2^2 + a_{21} p \end{aligned} \quad (3.21)$$

Luego, ambas relaciones son constantes; ver (3.19c).

¹ **Mc Cuskey**, S. W.; 1963, "Introduction to Celestial Mechanics", pag. 102-108.
Moulton, F. R.; 1914, "An Introduction to Celestial Mechanics", pág. 298-318.
Plummer, H. C.; 1960, "An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy".
Szebehely, V.; 1967, "Theory of Orbits", pag. 133-144.
Wintner, A.; 1947, "The Analytical Foundations of Celestial Mechanics".

Derivando estas dos igualdades respecto del tiempo resulta,

$$\dot{P}_1 \ddot{P}_1 = 0$$

$$\dot{P}_2 \ddot{P}_2 = 0$$

Entonces, teniendo en cuenta las ecuaciones diferenciales (3.19a) y multiplicando escalarmente por \dot{P}_1 y \dot{P}_2 respectivamente se tiene:

$$\dot{P}_1 \ddot{P}_1 + a_{11} \dot{P}_1 P_1 + a_{12} \dot{P}_2 P_1 = 0$$

$$\dot{P}_2 \ddot{P}_2 + a_{21} \dot{P}_1 P_2 + a_{22} \dot{P}_2 P_2 = 0$$

además, como $\dot{P}_v \ddot{P}_v = 0$ y $P_v \dot{P}_v = 0$ ($v = 1,2$) las ecuaciones anteriores resultan:

$$a_{12} \dot{P}_2 P_1 = 0$$

$$a_{21} \dot{P}_1 P_2 = 0$$

como por hipótesis $a_{12} \neq 0$, entonces es necesario que $\dot{P}_1 P_2 = 0$ y también $P_1 \dot{P}_2 = 0$, Por lo tanto se cumple que:

$$\dot{P}_1 \perp P_1, \quad \dot{P}_2 \perp P_1, \quad \dot{P}_1 \perp P_2, \quad \dot{P}_2 \perp P_2$$

ver Figura 12; estas relaciones implican el paralelismo entre \dot{P}_1 y \dot{P}_2 ; por lo tanto, $\dot{P}_1 = \lambda \dot{P}_2$, donde

$$\lambda = \frac{|\dot{P}_1|}{|\dot{P}_2|} = \text{constante.}$$

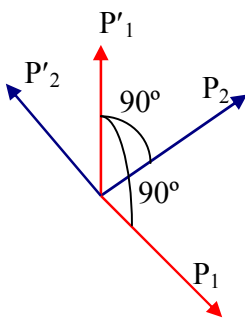


Fig.12. Ortogonalidad entre los vectores posición P_v y velocidad P'_v ($v = 1,2$).

Derivando la relación de proporcionalidad $\dot{P}_1 = \lambda \dot{P}_2$ con respecto al tiempo resulta $\ddot{P}_1 = \lambda \ddot{P}_2$; reemplazando en la primera de las ecuaciones (3.19a) se tiene,

$$\lambda \ddot{P}_2 + a_{11} P_1 + a_{12} P_2 = 0$$

asimismo multiplicamos la segunda ecuación de (3.19a) por λ , resulta:

$$\lambda \ddot{P}_2 + \lambda a_{21} P_1 + \lambda a_{22} P_2 = 0,$$

luego, restando miembro a miembro ambas expresiones se tiene,

$$(a_{11} - \lambda a_{21})P_1 + (a_{12} - \lambda a_{22})P_2 = 0$$

Supongamos que $P_1 \times P_2 \neq 0^1$ entonces, la igualdad anterior sólo se verifica si los coeficientes son nulos ya que $P_1 \times P_2 \neq 0$, lo cual implica que

$$\lambda = \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

pero esta igualdad no puede verificarse pues los a_{ij} no son proporcionales, entonces la relación anterior contradice la hipótesis que $P_1 \times P_2 \neq 0$.

Vamos a demostrar que la igualdad $a_{11} a_{22} = a_{12} a_{21}$ no es posible, por estar en oposición con nuestra hipótesis; reemplazando los a_{ij} por sus valores (ver pág. 48) resulta:

$$\left(\frac{(1-m_2)}{a_1^3} + \frac{m_2}{a_0^3} \right) \left(\frac{(1-m_1)}{a_2^3} + \frac{m_1}{a_0^3} \right) = m_1 m_2 \left(\frac{1}{a_2^3} - \frac{1}{a_0^3} \right) \left(\frac{1}{a_1^3} - \frac{1}{a_0^3} \right)$$

Operando algebraicamente se tiene: $\frac{1}{a_1^3 a_2^3} - \frac{m_1}{a_1^3 a_2^3} + \frac{m_1}{a_0^3 a_1^3} - \frac{m_2}{a_1^3 a_2^3} + \frac{m_2}{a_0^3 a_2^3} = 0$; luego, multiplicamos

esta igualdad por: $a_0^3 a_1^3 a_2^3$ resulta: $a_0^3 - m_1 a_0^3 + m_1 a_2^3 - m_2 a_0^3 + m_2 a_1^3 = 0$, entonces agrupando

según los a_i se tiene: $a_0^3 (1 - m_1 - m_2) + m_1 a_2^3 + m_2 a_1^3 = 0$, y finalmente obtenemos ²:

$$m_0 a_0^3 + m_1 a_2^3 + m_2 a_1^3 = 0$$

Este resultado está en contradicción con nuestra hipótesis, ya que las masas y los módulos de los vectores de posición son cantidades positivas i.e., $m_v > 0, a_v > 0$, para $v = 0,1,2$. En consecuencia, $P_1 \times P_2 = 0$, luego los vectores P_1 y P_2 son paralelos ³; ver Figura 13.

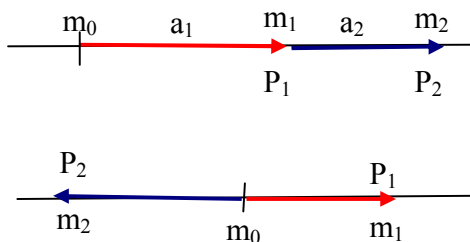


Fig. 13. Posibles configuraciones colineales de tres cuerpos con origen en m_0 . Los vectores posición P_v de las masas m_v ($v = 1,2$) están en la misma dirección o en sentido opuesto.

Los vectores posición P_1 y P_2 son paralelos; en el primer caso los cuerpos están alineados en la misma dirección, en el segundo caso las masas están alineadas en direcciones opuestas. Por lo tanto, podemos escribir que:

$$P_1 = \lambda P_2 \text{ y } \dot{P}_1 = \lambda \dot{P}_2$$

Luego, $\lambda = \frac{|P_1|}{|P_2|} = \frac{a_1}{a_2}$, y por tanto

$$P_1^2 = \frac{a_1^2}{a_2^2} P_2^2.$$

¹ El signo \times indica el producto vector.

² Recordar que: $m_0 + m_1 + m_2 = 1$.

³ Consultar: **Mc Cuskey**, S.M.; 1963, "Introduction to Celestial Mechanics", págs. 102-106.

Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales (3.18) no son simultáneas, son ecuaciones diferenciales independientes. Entonces, teniendo en cuenta la relación $\dot{P}_1 = \lambda \dot{P}_2$, donde $\lambda = \frac{a_1}{a_2}$, reemplazando luego en las ecuaciones (3.21) y restando miembro a miembro resulta:

$$a_{11} a_1^2 a_2^2 + a_{12} a_2^2 p - a_{22} a_2^2 a_1^2 + a_{21} a_1^2 p = 0$$

factoriando se tiene

$$a_1^2 a_2^2 (a_{11} - a_{22}) + (a_{12} a_2^2 - a_{21} a_1^2) p = 0 \tag{3.22}$$

Esta expresión es una relación entre las masas y sus distancias medias ¹ que se debe satisfacer, es una ecuación de 5º grado descubierta por *Euler* en 1767, la cual le permitió determinar las distancias a que deben estar inicialmente ubicados los cuerpos para obtener una solución de equilibrio relativo conociendo las masas de los mismos.

Vamos a suponer que $a_1 < a_2$ y además, $a_1 = \varepsilon a_2$; luego $a_0 = a_2 - a_1 = a_2 - \varepsilon a_2 = (1 - \varepsilon) a_2$, donde $0 < \varepsilon < 1$. Entonces, los coeficientes a_1 y a_2 en la ecuación (3.22) se pueden simplificar; tener en cuenta que: $m_0 + m_1 + m_2 = 1$ y que $p = a_1 a_2 \cos \omega = a_1 a_2 = \varepsilon a_2^2$, luego resulta

$$\varepsilon^2 a_2^2 a_2^2 \left[\frac{1 - m_2}{\varepsilon^3 a_2^3} + \frac{m_2}{(1 - \varepsilon)^3 a_2^3} - \left(\frac{1 - m_1}{a_2^3} + \frac{m_1}{(1 - \varepsilon)^3 a_2^3} \right) \right] + \left[m_2 \left(\frac{1}{a_2^3} - \frac{1}{(1 - \varepsilon)^3 a_2^3} \right) a_2^3 - m_1 \varepsilon^2 a_2^3 \left(\frac{1}{\varepsilon^3 a_2^3} - \frac{1}{(1 - \varepsilon)^3 a_2^3} \right) \right] p = 0.$$

Podemos simplificar y reemplazar p , entonces se tiene

$$(1 - m_2)(1 - \varepsilon)^2 - m_2 \varepsilon^2 + m_2 \varepsilon^2 (1 - \varepsilon^2) - (1 - m_1) \varepsilon^3 (1 - \varepsilon)^2 - m_1 \varepsilon (1 - \varepsilon)^2 = 0$$

una ecuación algebraica de quinto grado, hallada por *Euler*, donde $0 < \varepsilon < 1$ que satisface la condición $m_0 > m_1 > m_2$. Esta ecuación tiene cinco raíces, denominadas L_1, L_2 , y L_3 o *puntos de libración* y L_4 y L_5 denominados los *puntos de Lagrange* ². La Figura 14 muestra la posición de estos puntos de acuerdo a la ubicación de las masas m_0 y m_1 .

Si la masa m_1 no está entre m_0 y m_2 como hemos supuesto ($a_1 < a_2$) y se cumple que $a_1 > a_2$ entonces, es conveniente hacer $a_2 = \varepsilon a_1$ y por tanto $a_0 = (1 - \varepsilon) a_1$. Si m_0 está ubicado entre m_1 y m_2 conviene definir ε a la relación entre a_1 y a_0 o entre a_2 y a_0 , i.e., $\varepsilon = \frac{a_1}{a_0} < 1$ o $\varepsilon = \frac{a_2}{a_0} < 1$; ver gráficos Fig. 13a.

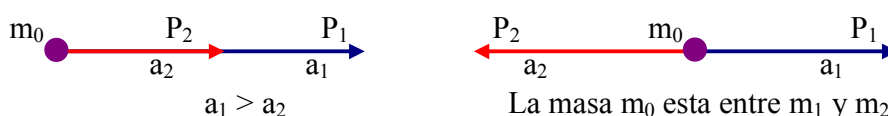


Fig. 13a.

¹ Consultar definición de a_{ij} , ver Ecuac. 3.18, pág. 52.

² Consultar: **Tisserand**, F.; 1881, "Mécanique Céleste", Vol. 1, pág. 155.

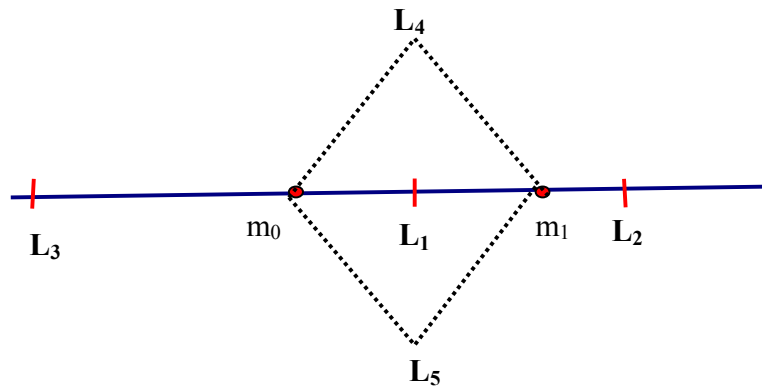


Fig. 14. Los cinco puntos L_j son denominados *puntos de libración* o de *equilibrio*. Los tres primeros (L_1 , L_2 , L_3) son llamados *puntos de Euler* y los dos restantes *puntos de Lagrange* (L_4 y L_5).

NOTA: Podemos apreciar, de la definición del parámetro ε que éste depende de las posiciones relativas de a_1 y a_2 respecto de a_0 y de la ubicación de a_0 respecto de a_1 y a_2 .

La imagen, Figura 15, nos muestra los puntos de equilibrio del Sistema Sol-Tierra-Luna.

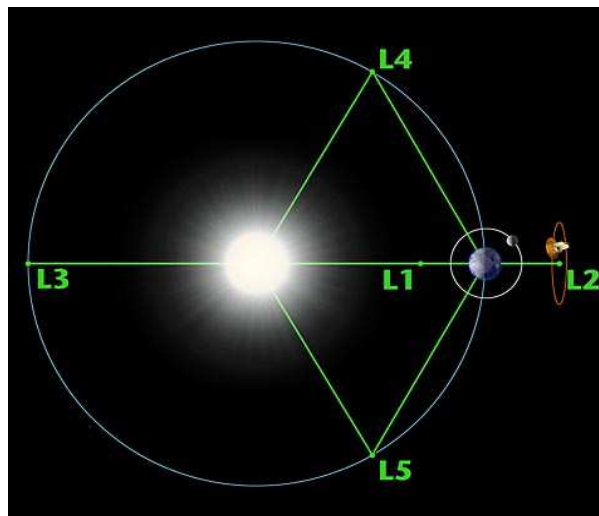


Fig. 15. El Sol ocupa la posición en m_0 ; el sistema Tierra-Luna la posición m_1 y un "cuerpo artificial" en el punto de equilibrio L_2 . "Solar and Heliospheric Observatory Satellite, SOHO". Consultar: <http://ciencia.nasa.gov/>

NOTA: Recomendamos el artículo de **F. Roig** publicado en el Boletín de la AAA: BAAA, Vol. 50, 2007, pág. 3-13.

McCuskey, S. W.; 1963, "Introduction to Celestial Mechanics", págs. 109-117.

Szebehely, V.; 1967, "Theory of Orbits", Cap. 5, págs. 231-318.

§ 3.8 Ecuaciones del movimiento relativo.

Conceptos: El estudio y el análisis del movimiento de los cuerpos del Sistema Solar se hacen muy complejos cuando se considera el comportamiento dinámico de más de dos cuerpos que se mueven bajo su mutua atracción gravitatoria, esta dificultad aumenta con el número de cuerpos considerados. Como hemos visto anteriormente, el problema de dos cuerpos puede ser formulado matemáticamente de tal modo que, dadas las condiciones iniciales, posición y velocidad de un cuerpo respecto del otro es posible predecir, en un instante cualquiera, su posición y velocidad en el espacio. Entonces, decimos que la solución matemática del problema es *cerrada*. Sin embargo, cuando se estudia el movimiento de más de dos cuerpos es imposible, en general, formular una solución cerrada, salvo en ciertos casos especiales o particulares.

Los planetas del Sistema Solar constituyen un clásico ejemplo del problema de n cuerpos. Como la posición de éstos varía durante su movimiento orbital alrededor del Sol, las fuerzas gravitacionales que actúan sobre uno cualquiera de ellos también varía. Sin embargo, en el Sistema Solar, el Sol es el centro de fuerzas dominante ¹. Por lo tanto, el movimiento planetario resulta, en primera aproximación, equivalente al movimiento que tendría cada planeta alrededor del Sol, lo cual implica un sistema dinámico de dos cuerpos. Las pequeñas discrepancias observacionales, debidas a la acción gravitatoria de los otros planetas se denominan *perturbaciones* ².

La imposibilidad práctica de establecer un sistema de coordenadas fijo en el espacio, al cual los movimientos de los cuerpos celestes puedan estar referidos, nos induce a considerar los movimientos relativos de $n-1$ cuerpos respecto del n -ésimo. Por ejemplo, en el Sistema Solar elegimos el Sol como origen de coordenadas y el plano de la eclíptica como plano fundamental de referencia. Entonces, el movimiento de los otros miembros del sistema, planetas, cometas, satélites, etc. puede ser descrito respecto del Sol. En esta sección analizaremos el movimiento de tres cuerpos.

Supondremos que las masas tienen simetría esférica, son homogéneas y se atraen mutuamente como puntos masa. Consideremos primero tres masas, m_1 , m_2 y m_3 , cuyas posiciones, respecto de un sistema de referencia inercial fijo, están definidas por los vectores de posición r_1 , r_2 y r_3 , ver Figura 15,

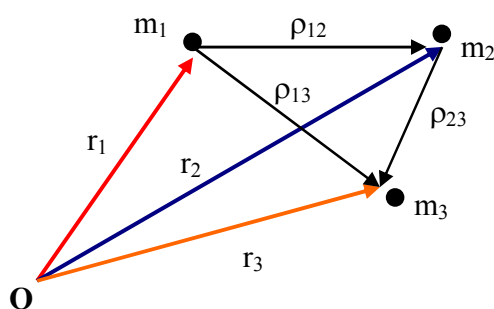


Fig. 15. Los vectores de posición r_i de los tres cuerpos: m_1 , m_2 y m_3 respecto del sistema de referencia inercial O y las distancias relativas ρ_{ij} ($i,j = 1,2,3$) entre las masas.

¹ La Masa del Sol $\mathcal{M}_{\text{Sol}} = 1,9981 \times 10^{30}$ kg. La masa de todos los planetas es: $2668,5203 \times 10^{24}$ kg. Luego, el Sol representa el 99,87 % la masa total del Sistema Solar.

² Barrow-Green, J.; 1997, "Poincaré and the Three Body Problem", American Mathematical Society.
Stiefel, E.L. & Scheifele, G.; 1971, "Linear and Regular Celestial Mechanics", pág. 110.

Supongamos que las únicas fuerzas actuantes son las “atracciones Newtonianas mutuas” de cada cuerpo sobre los otros. Con esta suposición las ecuaciones del movimiento toman la forma ¹:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = k^2 \left\{ \frac{m_1 m_2}{\rho_{12}^3} \rho_{12} + \frac{m_1 m_3}{\rho_{13}^3} \rho_{13} \right\} \quad (3.23a)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = k^2 \left\{ \frac{m_2 m_3}{\rho_{23}^3} \rho_{23} - \frac{m_2 m_1}{\rho_{12}^3} \rho_{12} \right\} \quad (3.23b)$$

$$m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = -k^2 \left\{ \frac{m_3 m_2}{\rho_{32}^3} \rho_{32} + \frac{m_3 m_1}{\rho_{13}^3} \rho_{13} \right\} \quad (3.23c)$$

donde los ρ_{ij} son vectores que unen los puntos masas m_i con m_j , como se muestra en la Figura 15. Sumando estas ecuaciones e integrando dos veces resulta, consultar (3.6) pág.33,

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 \quad (3.24)$$

donde \mathbf{c}_1 y \mathbf{c}_2 son vectores constantes de integración. Por definición, la posición del centro de masa, \mathbf{R} , de los tres cuerpos es:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{M}$$

donde $M = m_1 + m_2 + m_3$. Por lo tanto, y teniendo en cuenta (3.24), resulta:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{c}_1}{M} t + \frac{\mathbf{c}_2}{M} \quad (3.25)$$

Esta ecuación nos dice que el centro de masa permanece en reposo o se mueve uniformemente en el espacio en línea recta; constituye una integral primera de las ecuaciones del movimiento (3.23a,b,c) e implica seis constantes arbitrarias i.e., las seis componentes de los vectores \mathbf{c}_1 y \mathbf{c}_2 . Este resultado ya fue deducido anteriormente, consultar (3.7a) pág. 35.

Si en la Figura 15 elegimos m_1 como el origen del sistema de referencia y restamos la ecuación (3.23a) de las ecuaciones (3.23b) y (3.23c) obtenemos el siguiente sistema de ED, después de algunas simplificaciones resulta:

$$\ddot{\rho}_{12} = -k^2 \frac{(m_1 + m_2)}{\rho_{12}^2} \mathbf{u}_{12} + k^2 m_3 \left\{ \frac{1}{\rho_{23}^2} \mathbf{u}_{23} - \frac{1}{\rho_{13}^2} \mathbf{u}_{13} \right\} \quad (3.26a)$$

$$\ddot{\rho}_{13} = -k^2 \frac{(m_1 + m_3)}{\rho_{13}^2} \mathbf{u}_{13} + k^2 m_2 \left\{ \frac{1}{\rho_{23}^2} \mathbf{u}_{23} - \frac{1}{\rho_{12}^2} \mathbf{u}_{12} \right\} \quad (3.26b)$$

donde \mathbf{u}_{12} , \mathbf{u}_{13} y \mathbf{u}_{23} son vectores unidad (versores) según la dirección de los vectores ρ_{12} , ρ_{13} y ρ_{23} respectivamente. Recordar que: $\mathbf{u}_{ij} = \rho_{ij} / |\rho_{ij}|$

¹ Consultar: § 3.6, pág. 43 y **McCuskey**, S. W.; 1963, “Introduction to Celestial Mechanics”, Cap. 5.

Una generalización al problema de n cuerpos se puede hacer a partir de éste análisis.

Interpretación de las ED. La primera ED, (3.26a), es la ecuación de movimiento del cuerpo m_2 respecto de m_1 y la segunda ED es la ecuación de movimiento de m_3 respecto de m_1 . Además, el segundo miembro de (3.26a) consta de tres términos los cuales representan:

- i) la aceleración de m_2 debido a la acción de m_1 , i.e., la fuerza que ejerce m_1 sobre m_2 ,
- ii) la aceleración de m_2 debido a la acción de m_3 , o la fuerza que m_3 ejerce sobre m_2 ,
- iii) la aceleración de m_1 aumenta o disminuye debido a la presencia de m_3 .

El segundo miembro de (3.26b) se interpreta en forma análoga.

NOTA: Si $m_3 = 0$, es evidente que (3.26a) describe el movimiento de m_2 alrededor de m_1 , es decir, representa el movimiento en el problema de dos cuerpos ¹. Análogamente, si $m_2 = 0$ la ecuación (3.26b) representa el movimiento relativo de m_3 respecto de m_1 .

Supongamos que m_1 es la masa preponderante en el sistema de tres cuerpos y además, está situada en el origen del sistema de coordenadas cartesianas, ver Figura 16. Designemos con m el cuerpo cuyo movimiento deseamos estudiar y, con m' la masa del cuerpo que “perturba” el movimiento de m alrededor de m_1 . Entonces, las ecuaciones del movimiento de m alrededor de m_1 y perturbado por m' son, en coordenadas cartesianas ²:

$$\ddot{x} = -\frac{k^2 M}{r^3} x + k^2 m' \left\{ \frac{x' - x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3} \right\} \tag{3.27a}$$

$$\ddot{y} = -\frac{k^2 M}{r^3} y + k^2 m' \left\{ \frac{y' - y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3} \right\} \tag{3.27b}$$

$$\ddot{z} = -\frac{k^2 M}{r^3} z + k^2 m' \left\{ \frac{z' - z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3} \right\} \tag{3.27c}$$

donde $M = m_1 + m$.

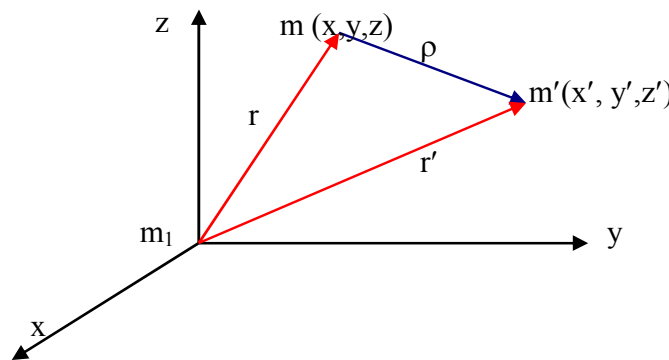


Fig. 16. Posición de los tres cuerpos en el espacio euclidiano \mathfrak{R}^3 . Notar que la posición de m_1 coincide con el origen del sistema de coordenadas. Si m_1 representa el Sol, el sistema de coordenadas es Heliocéntrico. ρ es la distancia mutua entre el cuerpo m y el perturbador m' .

¹ Ver Capítulo 2, pág. 5.

² Brouwer, D. & Clemence, G.; 1961, “Methods of Celestial Mechanics”, Capítulos X y XIII.

La distancia mutua ρ se define como: $\rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$ entonces, es fácil verificar

$$\frac{x' - x}{\rho^3} = \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial x}$$

$$\frac{y' - y}{\rho^3} = \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial y}$$

$$\frac{z' - z}{\rho^3} = \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial z}$$

Además, las coordenadas $\{x,y,z\}$ son independientes de $\{x',y',z'\}$ luego, se cumplen las relaciones

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right] = \frac{x'}{r'^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right] = \frac{y'}{r'^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right] = \frac{z'}{r'^3}$$

Reemplazando estas expresiones en las ED (2.27a,b,c) se obtienen las siguientes ecuaciones del movimiento ¹:

$$\ddot{x} = -\frac{k^2 M}{r^3} x + \frac{\partial R}{\partial x} \quad (3.28a)$$

$$\ddot{y} = -\frac{k^2 M}{r^3} y + \frac{\partial R}{\partial y} \quad (3.28b)$$

$$\ddot{z} = -\frac{k^2 M}{r^3} z + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (3.28c)$$

donde

$$R = k^2 m' \left\{ \frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right\}$$

Donde R es una función que depende de las masas y las coordenadas, denomina *perturbación* o *función perturbadora*. Es evidente que $R = 0$ conduce a la definición del problema de dos cuerpos o al problema del movimiento relativo de m respecto de m_1 .

Es importante destacar que si más de una *masa perturbadora* esta presente en el sistema entonces, la función perturbadora resultante, debida a la acción de todas las masas, es la suma de todas ellas, i.e., la resultante de todas las masas presentes. Si indicamos

$$R_i = k^2 m'_i \left\{ \frac{1}{\rho_i} - \frac{xx'_i + yy'_i + zz'_i}{r_i'^3} \right\},$$

¹ Szebehely, V.; 1967, "Theory of Orbits, The Restricted Problem of three bodies", Capítulo 1, pág. 25.

la función perturbadora de la masa m'_i que actúa sobre la masa m^1 entonces, las ecuaciones de movimiento del cuerpo m en torno a m_1 perturbado por los $(n-2)$ cuerpos restantes adquieren la forma:

$$\ddot{x} = -\frac{k^2 M}{r^3} x + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial R_i}{\partial x} \quad (3.29a)$$

$$\ddot{y} = -\frac{k^2 M}{r^3} y + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial R_i}{\partial y} \quad (3.29b)$$

$$\ddot{z} = -\frac{k^2 M}{r^3} z + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial R_i}{\partial z} \quad (3.29c)$$

donde n es el número de puntos masas en el sistema y $(n-2)$ el número de cuerpos perturbadores.

NOTA: Si el movimiento se realiza en un plano, a veces es conveniente utilizar coordenadas polares representadas por r y θ ; entonces, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ luego, las ecuaciones de movimiento del problema de tres cuerpos toman la forma ²:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k^2 M}{r^2} = \frac{\partial R}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = \frac{\partial R}{\partial \theta}$$

donde la función perturbadora R tiene la expresión

$$R = k^2 m' \left\{ \frac{1}{\rho} - \frac{r}{r'^2} \cos(\theta - \theta') \right\}.$$

§ 3.9 Coordenadas de Jacobi en el problema de tres cuerpos.

Las ecuaciones (3.23a,b,c), pág. 58, se pueden escribir de la forma:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + G \frac{m_3 m_1}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + G \frac{m_3 m_2}{r_{23}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \\ m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 &= G \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + G \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde los vectores de posición \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 y \mathbf{r}_3 están referidos a un sistema de coordenadas con origen en el centro de gravedad de los tres cuerpos ³, ver Figura 17.

¹ La masa m_i ejerce una fuerza de atracción gravitacional sobre m que es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas, *ley de la gravitación universal, enunciada por Newton*.

² **Moulton**, F. R.; 1984, "An Introduction to Celestial Mechanics", pág. 172.

³ G es la constante de la gravitación universal, su valor es función de las unidades de masa, longitud y tiempo elegidas.

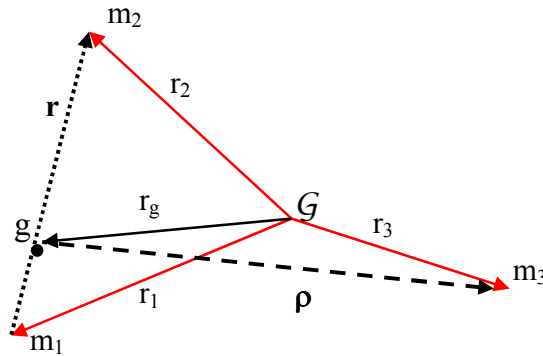


Fig. 17. Los vectores \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 y \mathbf{r}_3 determinan la posición de los tres puntos masa respecto de \mathcal{G} , baricentro de los tres cuerpos; g es el centro de masa de m_1 y m_2 ; \mathbf{r} define la posición de m_2 respecto de m_1 ; el vector $\boldsymbol{\rho}$ es la posición de m_3 respecto de g . Los vectores \mathbf{r} y $\boldsymbol{\rho}$ definen las coordenadas de Jacobi.

De acuerdo a la ecuación (3.25), pág. 58 (definición de centro de masa), si los vectores \mathbf{c}_1 y \mathbf{c}_2 son nulos, i.e., el origen de coordenadas coincide con el centro de masa, resulta: $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0$, entonces, uno de los vectores \mathbf{r}_i se puede eliminar. Sin embargo, preferimos proceder de otro modo. Para ello consideremos el movimiento de m_2 respecto de m_1 , definiendo el vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y el movimiento de m_3 respecto del centro de masa g de los cuerpos m_1 y m_2 . La posición del baricentro g respecto de \mathcal{G} esta dado por:

$$\mathbf{r}_g = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{(m_1 + m_2)} = - \frac{m_3 \mathbf{r}_3}{(m_1 + m_2)}$$

La definición del vector $\boldsymbol{\rho}$, correspondiente a la masa m_3 , respecto del centro de masa g esta dado por la ecuación ¹:

$$\mathbf{r}_3 + \frac{m_3 \mathbf{r}_3}{(m_1 + m_2)} = M \frac{\mathbf{r}_3}{\mu}$$

Donde $M = m_1 + m_2 + m_3$ y $\mu = m_1 + m_2$. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\rho} = M \frac{\mathbf{r}_3}{\mu}$$

entonces, es fácil verificar que:

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}; \quad \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\rho} + \frac{m_2}{\mu} \mathbf{r}; \quad \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\rho} - \frac{m_1}{\mu} \mathbf{r}.^2$$

Si en las ecuaciones (3.30) dividimos la primera por m_1 , la segunda ecuación por m_2 y restando la primera de la segunda, se obtiene la ecuación

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \frac{G \mu}{r^3} \mathbf{r} + G m_3 \left[\frac{\boldsymbol{\rho} - m_1 \mu^{-1} \mathbf{r}}{r_{23}^3} - \frac{\boldsymbol{\rho} + m_2 \mu^{-1} \mathbf{r}}{r_{13}^3} \right] \quad (3.31)$$

¹ La posición de m_3 respecto de g esta dada por el vector: $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_g$.

² Las distancias mutuas de m_3 a m_1 y m_2 , respectivamente, admiten también las siguientes expresiones:

$r_3 - r_1 = \rho - (r_1 - r_g)$ y $r_3 - r_2 = \rho - (r_2 - r_g)$.

Consideremos ahora la última de las ecuaciones (3.30); multipliquemos ambos miembros por $M \mu^{-1} m_3^{-1}$, entonces resulta:

$$\ddot{\rho} = -G \frac{M m_1 \mu^{-1}}{r_{13}^3} (\rho + m_2 \mu^{-1} r) - G \frac{M m_2 \mu^{-1}}{r_{23}^3} (\rho - m_1 \mu^{-1} r) \quad (3.32)$$

Las ED (3.31) y (3.32) definen los vectores r y ρ denominados *coordenadas de Jacobi*¹ y además, las ecuaciones de movimiento de los tres cuerpos en este sistema de coordenadas.

El sistema de ED (3.30) representa las ecuaciones del movimiento de tres cuerpos respecto de un origen fijo en el espacio, de acuerdo a la segunda ley de Newton. Asimismo, el movimiento de los cuerpos puede estar referido a la posición de uno de ellos, generalmente el de mayor masa, definido como *movimiento relativo*; ejemplo, el Sistema Solar². Por el contrario, en el sistema de *coordenadas de Jacobi* el movimiento de la masa m_2 esta referido a la posición de m_1 y la posición del cuerpo perturbador m_3 esta relacionada al baricentro del sistema m_1 - m_2 . Las coordenadas de los vectores $r(x,y)$ y $\rho(d,\theta)$ permiten describir el movimiento de m_2 y m_3 . Ver Figura 18.

Si representemos la velocidad relativa \dot{r} por v y $\dot{\rho}$ por V y definimos las constantes $\alpha_1 = \frac{m_1 m_2}{\mu}$ y $\alpha_2 = \frac{m_3 \mu}{M}$ entonces, en función de las coordenadas de Jacobi r y ρ , se verifican las siguientes integrales del movimiento (ver § 3.3, pág. 32):

$$\begin{aligned} c &= \alpha_1 (r \times v) + \alpha_2 (\rho \times V) \Rightarrow \text{vector momento angular (constante)} \\ 2I &= \alpha_1 r^2 + \alpha_2 \rho^2 \Rightarrow \text{Momento de inercia.} \\ 2T &= \alpha_1 v^2 + \alpha_2 V^2 \Rightarrow \text{Energía cinética.} \end{aligned}$$

Las tres ecuaciones representan las integrales de movimiento del problema de tres cuerpos, en función de las coordenadas de Jacobi. En general, se utilizan las coordenadas de Jacobi en los sistemas Jerárquicos; por ejemplo, el Sistema Solar es un sistema jerárquico.

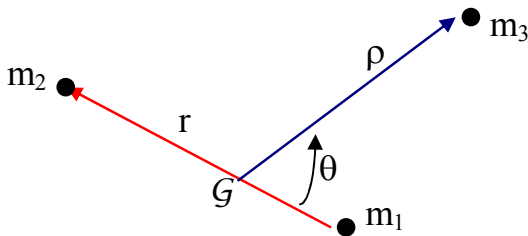


Fig. 18. Definición de coordenadas de Jacobi. El modulo del vector ρ es: $|\rho| = d$ la distancia de G a m_3 ; G es el baricentro de m_1 y m_2 .

Sistemas jerárquicos: Son aquellos sistemas dinámicos en los cuales algún elemento físico es predominante, por ejemplo, la masa del Sol en el Sistema Solar es mucho mayor que la masa del resto de los miembros del Sistema o en un sistema estelar binario o triple donde una de sus componentes es una gigante y las otras son estrellas enanas marrones.

¹ López García, F.; 1981, "Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica", Vol. 6, págs. 107-109.

² Consultar: Moulton, F.R.; 1970, "An Introduction to Celestial Mechanics", págs. 269-273. Ed. Dover.

Conceptos generales. El estudio dinámico de un sistema de tres o más partículas, las coordenadas de Jacobi pueden ser utilizadas para simplificar la formulación matemática. Estas coordenadas se utilizan, por lo general, en el tratamiento de las moléculas poliatómicas, reacciones químicas y en el problema de tres cuerpos. Un algoritmo útil para generalizar las coordenadas de Jacobi, aplicable al problema de n-cuerpos, se basa en la estructura del “árbol binario”; este algoritmo se describe como sigue; ver Figura 19:

Sea m_1 y m_2 las masas de dos cuerpos, las cuales son reemplazadas por un nuevo cuerpo de masa virtual $M = m_1 + m_2$ situado en G_1 , “baricentro”. Las posiciones de estas masas, definidas por los vectores \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , respecto de O , son reemplazadas por el vector, posición relativa, $\boldsymbol{\rho}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$; el vector que define su centro de masa es: $\mathbf{R}_{12} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / (m_1 + m_2)$. Si se agrega un tercer cuerpo m_3 su posición, el vector $\boldsymbol{\rho}_2$, esta referido al centro de masa de m_1 y m_2 ; si añadimos un cuarto cuerpo m_4 , su posición estará referido al punto G_2 definido como el centro de masa de G_1 y m_3 ; de un modo análogo se procede si hubiese otros cuerpos. El vector \mathbf{R} define la posición del centro de masa G_3 respecto de O , si solo consideramos cuatro cuerpos¹.

Entonces, las *coordenadas de Jacobi*, en este caso, son: $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3$, ver Figura 19.

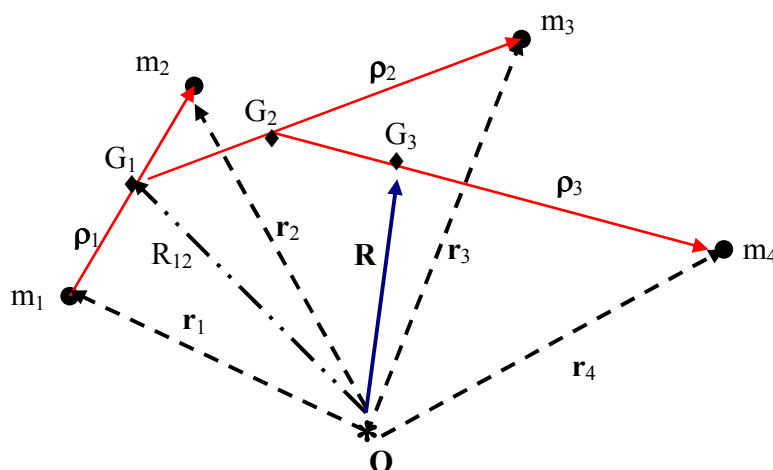


Fig. 19. Representación de las coordenadas de Jacobi en el caso de cuatro cuerpos.

En el problema de cuatro cuerpos las coordenadas de Jacobi se definen de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \boldsymbol{\rho}_j = \frac{1}{m_{0j}} \sum_{k=1}^j m_k \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{j+1}; \quad \text{donde } m_{0j} = \sum_{k=1}^j m_k.$$

El vector \mathbf{R} representa el centro de masa de los cuerpos del sistema,

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m_0} \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k, \quad \text{donde } m_0 = \sum_{k=1}^N m_k$$

donde N es el número de cuerpos.

¹ El centro de masa G_n es el baricentro entre el punto G_{n-1} , cuya masa virtual corresponde a los $(n-1)$ puntos masa restantes y la masa del cuerpo n -ésimo, m_n ; para $n \geq 3$.

NOTA: La publicación original de Jacobi se puede consultar en:

Jacobi, C.G.J.; 1843, "Sur l'élimination des noeuds dans le Problème des Trois Corps", Crelle J. Reine Angew. Math., 26, pag. 115-131.

Consultar: **Roy**, A. E.; 1978, "Orbital Motion", pág. 152-153. Ed. Adam Hilger.

Sistema estelar jerárquico.

Un sistema de tres cuerpos es jerárquico si dos de sus masas forman un sistema binario y el tercer cuerpo se encuentra a gran distancia, ver Figura 19a. Si el sistema binario es estable (en algún sentido) los cuerpos, m_1 y m_2 , orbitan elipses Keplerianas perturbadas con respecto a su centro de masa común, designado por G. La masa externa (m_3) también tiene una órbita Kepleriana (elipse) perturbada respecto de G y exterior a la órbita de la binaria. La estabilidad de estos sistemas ha sido analizada por diferentes autores, principalmente en la década del 70, considerando una *condición suficiente* para la estabilidad de los mismos; cuando las "condiciones" son satisfechas entonces, la binaria tiene un movimiento estable y m_3 permanecerá siempre a gran distancia de G; este resultado tiene cierta similitud o es comparable con la estabilidad de Hill en el problema de tres cuerpos restringido circular. La condición suficiente depende del valor de la cantidad: $c^2 E$, donde c es el vector momento angular total y E la energía del sistema de tres cuerpos ¹.

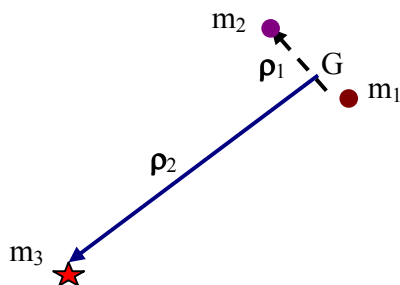


Fig. 19a. Representación de las Coordenadas de Jacobi, donde $\rho_2 \gg \rho_1$.

Hemos estudiado (ver págs.38-39) que una solución analítica general no es posible cuando consideramos sistemas dinámicos con más de dos cuerpos. Sin embargo, es posible describir las órbitas de tres cuerpos empleando "métodos aproximados" por ejemplo, cuando el sistema es jerárquico, i.e., si el mismo está formado por un sistema binario y un tercer cuerpo alejado de éste.

Entonces, podemos considerar como exactas, en una primera aproximación, las órbitas de los dos cuerpos y los efectos del tercer cuerpo y sus perturbaciones como pequeñas fuerzas que hacen que la trayectoria verdadera tenga pequeñas desviaciones de la trayectoria de referencia.

NOTA: Este problema ha sido estudiado por un gran número de famosos matemáticos, a saber: Euler, Lagrange, Jacobi, Tisserand, Hill, Poincaré, Sundman, Burrau, Kozai, Kustaanheimo, Stiefel, Henon, Marchal y Szebehely. Se lo puede considerar como un "período clásico" dominado por métodos analíticos; pero, a partir de 1970 con la posibilidad de realizar cálculos de órbitas "exactas" empleando computadoras, el estudio del problema general de tres cuerpos contribuyó con nuevas ideas y métodos a la investigación de los sistemas dinámicos.

¹ Aarseth, S.J. & Mardling, R.A.; 1999, 'Dynamics and stability of three-body systems', The Dynamics of Small Bodies in the Solar System; pág. 385. Eds. B. A. Steves and A. E. Roy. Kluwer Academia Publishers;

Uno de los primeros resultados, muy importante, utilizando poderosas computadoras, fue el descubrimiento de la inestabilidad inherente del sistema de tres cuerpos. Resumiendo, en un sistema jerárquico dos de los cuerpos forman una binaria estable mientras que el tercer cuerpo tiene movimiento estable o escapa del sistema.

Recomendamos la siguiente bibliografía:

Belbruno, E.; 2004, "Capture Dynamics and Chaotic Motions in Celestial Mechanics", pag. 9, Ed. Princeton University Press.

Bertotti, B. & Farinella, P.; 1990, "Physics of the Earth and Solar System", Capitulo 12, pág. 242-254, Ed. Kluwer.

Marchal, C.; 1990, "The Three-Body Problem", Ed. Elsevier, Ámsterdam.

Valtonen, M.J. & Karttunen, H.; 2006, "The Three-Body Problem", Capitulo 9, pág. 221-239. Ed. Cambridge University Press.

Un sistema estelar triple: En un sistema estelar triple, cada estrella orbita el centro de masa del sistema. Generalmente, dos de las estrellas forman un sistema binario y la tercera se encuentra en uno de los focos de la elipse que describe el sistema doble; ver Figura 19b. Esta configuración es *jerárquica*. Sistemas estelares que contengan más de tres estrellas son, en general, jerárquicos. Se sugiere consultar Fig. 17, pág. 62.

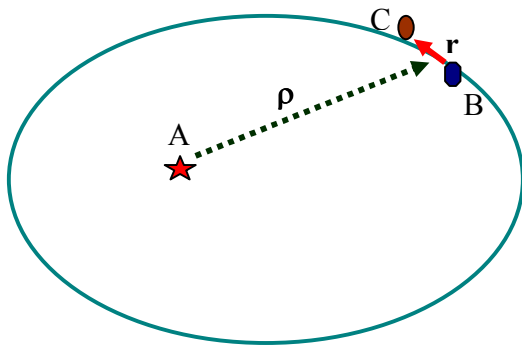


Fig. 19b. Sistema estelar jerárquico. Esta formado por una estrella principal A y un sistema binario BC. El sistema binario tiene un periodo entorno de A de 25,7 años. Los vectores \mathbf{r} y $\boldsymbol{\rho}$ representan las coordenadas de Jacobi. Consultar: Fig. 17, pág. 62. Además, la estrella principal A tiene un planeta del tipo "Júpiter caliente".

La Figura 19b representa el sistema HD 188753. Consta de una estrella principal A cuyas características son: Tipo Esp.: G8V; $m = 7,43$; $\mathcal{M} = 1,06 \mathcal{M}_{\text{Sol}}$; $R = 1,28 R_{\text{Sol}}$; $T_{\text{eff}} = 5750 \text{ }^\circ\text{K}$. A una distancia media de 12,3 UA, se encuentran dos estrellas que forman un sistema binario con una masa total de $1,63 \mathcal{M}_{\text{Sol}}$ orbitando con un periodo de 25,7 años y una excentricidad $e \cong 0,50$. El T.E. de B es K0V y el de C es M, separadas por una distancia de 0,66 UA con un periodo orbital de 156 días respecto de su baricentro. El vector \mathbf{r} denota la posición de la componente C respecto de B y $\boldsymbol{\rho}$ es la posición del baricentro G (B y C) respecto de A.

En el año 2005 fue descubierto el primer exoplaneta en un sistema triple entorno de la estrella A, denominado HD 188753 Ab; las características del exoplaneta son: $\mathcal{M} > 1,14 \mathcal{M}_{\text{Jup}}$; periodo orbital $P = 3,3481$ días; semi eje mayor $a = 0,0446$ UA y $e = 0$. **Aun no confirmado:** <http://exoplanet.eu/>.

Capítulo 4

El problema restringido de tres cuerpos.

§ 4.1 Un breve comentario.

El problema de tres cuerpos (considerados como puntos masa) fue descrito y analizado con las ecuaciones de movimiento (3.13) pág. 43 ó (3.14) pág. 44 en coordenadas heliocéntricas, es un sistema de dos ED simultáneas de segundo orden, en forma vectorial, ó equivalente a doce ED de primer orden en forma cartesiana. También hemos estudiado que el movimiento de las tres masas, sometidas a su mutua atracción gravitacional, no admite una solución analítica cerrada debido a que sólo se conocen 10 integrales algebraicas del movimiento y por tanto, el grado de indeterminación es ocho ¹. Luego, el problema de tres cuerpos (y en general, el de n -cuerpos para $n > 3$) no se puede resolver por el método de las cuadraturas (integrales de movimiento o integrales primeras). *Henri Poincaré* ² demostró que no existe una expresión analítica que resuelva este problema; es decir, de las 18 integrales de movimiento sólo 10 pueden ser halladas por las leyes de conservación. Además de estas 10 integrales, no existe otra integral que sea algebraica e independiente. Estos resultados no implican, sin embargo, que no exista una solución general del problema de los tres cuerpos, pues es posible desarrollar una solución en serie de potencias.

Sundman ³, en 1906 y 1909, utilizando métodos analíticos, demostró la existencia de una serie infinita, convergente uniformemente, como solución al problema restringido de tres cuerpos en el plano, donde las singularidades son “eliminadas” a través de un proceso de regularización.

NOTA. Recomendamos las siguientes publicaciones y textos:

Cesco, R.P.; 1965, “*Solución del problema de los tres cuerpos por prolongaciones analíticas aproximadas*”, Serie Astronómica, Tomo XXXI, Observatorio Astronómico de La Plata.

Cesco, R.P. & **Riu**, P.C.; 1967, “*Sobre el problema restringido elíptico de los tres cuerpos*”, Serie Astronómica, Tomo XXXIV, Observatorio Astronómico de La Plata.

Morbidelli, A.; 2002, “*Modern Celestial Mechanics*”, págs. 17-21 y 196-220.

Sundman, K.; 1913, “*Mémoire sur le problème des trois corps*” Acta Math. 36, pag. 105-179.

Szebehely, V.; 1967, “*Theory of Orbits in the Restricted Problem of Three Bodies*”;

¹ Consultar § 3.3 Integrales primeras del movimiento, pág. 38.

² Matemático francés, nació en Nancy el 29 de abril de 1854 y falleció en París el 17 de julio de 1912.

³ **Sundman**, Karl Frithiof (1873–1949) matemático finlandés. En 1918 fue nombrado profesor de Astronomía en la Universidad Helsinki y también director del Observatorio, cargos que ocupó hasta su jubilación en 1941.

§ 4.2 El problema restringido.

Analicemos el siguiente ejemplo del problema restringido: Sol – Planeta – Asteroide.

Consideremos primero la solución del problema de dos cuerpos en un sistema heliocéntrico plano; ver Figura 20.

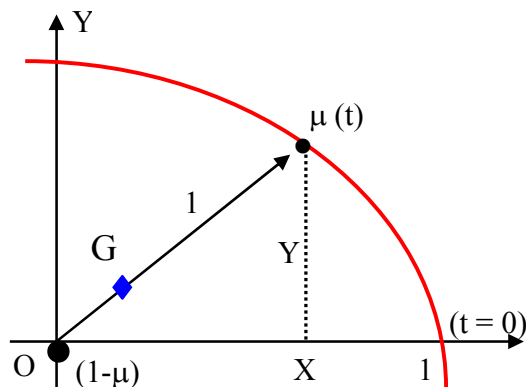


Fig. 20. Sistema Heliocéntrico. En el origen esta situado el Sol con masa $(1-\mu)$; el planeta, de masa μ , describe una órbita circular en torno del Sol; la distancia es $r = 1$.

O también,

$$\left. \begin{aligned} X'' + X &= 0 \\ Y'' + Y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Es un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden independientes; donde las variables } X \text{ e } Y \text{ son funciones de } t.$$

Notar que la masa total del sistema es la unidad si la masa del planeta es μ , la masa del Sol es $(1-\mu)$ entonces, las ecuaciones (4.1) representan el movimiento del cuerpo de masa μ , donde X e Y son las coordenadas del planeta en el plano $\{X, Y\}$, para todo t ; el origen de coordenadas O esta situado en el Sol con masa $(1-\mu)$.

Las condiciones iniciales, para $t = 0$ son: la masa μ situada en $X(0) = 1$ e $Y(0) = 0$ luego, una solución particular es:

$$\begin{aligned} X(t) &= \cos t \\ Y(t) &= \sin t \end{aligned}$$

la cual corresponde a un movimiento periódico¹, con período 2π y movimiento medio $n = 1$, porqué?. Entonces, de acuerdo con la tercera ley de Kepler: $n^2 a^3 = k^2 (m_{\text{Sol}} + m_{\mu}) = 1$; además, el *movimiento medio* n se define como $n = 2\pi / T$, como el periodo es 2π , resulta $n = 1$ y por tanto $a = 1$.

Consideremos ahora un cambio de coordenadas; elegimos como origen el baricentro del sistema Sol-planeta representado por G (ver Figura 20) luego, el planeta μ y el Sol se mueven respecto de G y si éste permanece fijo o se desplaza con movimiento uniforme y rectilíneo, ambos cuerpos describen circunferencias en torno a G y en virtud de las integrales del baricentro, se puede escribir:

¹ Son las ecuaciones paramétricas del movimiento de un cuerpo sobre una circunferencia de radio 1 y frecuencia $\omega = 1$.

Supongamos que el planeta de masa μ , describe alrededor del Sol, con masa $(1-\mu)$, una órbita circular ($e = 0$). La distancia del punto masa μ al Sol es 1; la constante Gaussiana $k^2 \equiv 1$; el punto G representa el baricentro del sistema Sol-planeta. Entonces, las ecuaciones de movimiento de μ respecto del Sol son:

$$\begin{aligned} X'' + 1 \frac{[(1-\mu) + \mu]}{1^3} X &= 0 \\ Y'' + 1 \frac{[(1-\mu) + \mu]}{1^3} Y &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} (1-\mu) \xi_0 + \mu \xi_1 &= 0 \\ (1-\mu) \eta_0 + \mu \eta_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Expresión válida si elegimos las constantes de las integrales de movimiento del centro de masa ¹ igual a cero, luego:

$$\begin{aligned} \xi_0 + \mu (\xi_1 - \xi_0) &= 0 \\ \eta_0 + \mu (\eta_1 - \eta_0) &= 0 \end{aligned}$$

Por definición de las coordenadas $\{\xi, \eta\}$ se tiene: $\xi_1 - \xi_0 = X$, $\eta_1 - \eta_0 = Y$; luego

$$\xi_1 - \xi_0 = \cos t, \quad \eta_1 - \eta_0 = \sin t$$

entonces, teniendo en cuenta (4.2), las coordenadas del cuerpo $(1-\mu)$ tienen la expresión:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= -\mu (\xi_1 - \xi_0) = -\mu \cos t \\ \eta_0 &= -\mu (\eta_1 - \eta_0) = -\mu \sin t \end{aligned}$$

y análogamente, para el cuerpo de masa μ , resulta:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (1-\mu) \cos t \\ \eta_1 &= (1-\mu) \sin t \end{aligned}$$

Vamos a realizar una nueva transformación de coordenadas, conservando el mismo origen G pero suponiendo que el eje de abscisa X gira alrededor de G, con un período igual a 2π i.e., con velocidad angular igual a la unidad y el eje Y perpendicular al eje X. En un instante t, el eje de abscisa habrá descrito el ángulo t; supongamos además, que en el plano que se mueven los cuerpos μ y $(1-\mu)$ se desplace también, conforme a la ley de Newton, un cuerpo con masa prácticamente nula, $m \sim 0$, como es efectivamente la masa de un asteroide respecto del sistema Sol-Júpiter.

Sean (ξ_2, η_2) las coordenadas del cuerpo de masa nula en un instante t, en el sistema de coordenadas fijo definido por $\{\xi, \eta\}$ y sean (x, y) sus coordenadas en el sistema móvil definido por $\{x, y\}$. (ver Figura 21). Entonces, procedemos del siguiente modo: el primer paso es expresar las coordenadas x e y en función de ξ_2 y η_2 de la forma ²,

$$\begin{aligned} x &= \xi_2 \cos t + \eta_2 \sin t \\ y &= -\xi_2 \sin t + \eta_2 \cos t \end{aligned} \quad (4.3)$$

Además, las ecuaciones diferenciales del movimiento de m son:

$$\begin{aligned} m \ddot{\xi}_2 &= \frac{\partial U}{\partial \xi_2} \\ m \ddot{\eta}_2 &= \frac{\partial U}{\partial \eta_2} \end{aligned}$$

¹ Consultar ecuación (3.6), pág. 33. Recordar que $\{\xi_0, \eta_0\}$ son las coordenadas de $(1-\mu)$ respecto de G y $\{\xi_1, \eta_1\}$ las coordenadas baricéntricas de μ .

² Es simplemente una transformación de coordenadas del sistema $\{\xi, \eta\}$ al sistema móvil $\{x, y\}$.

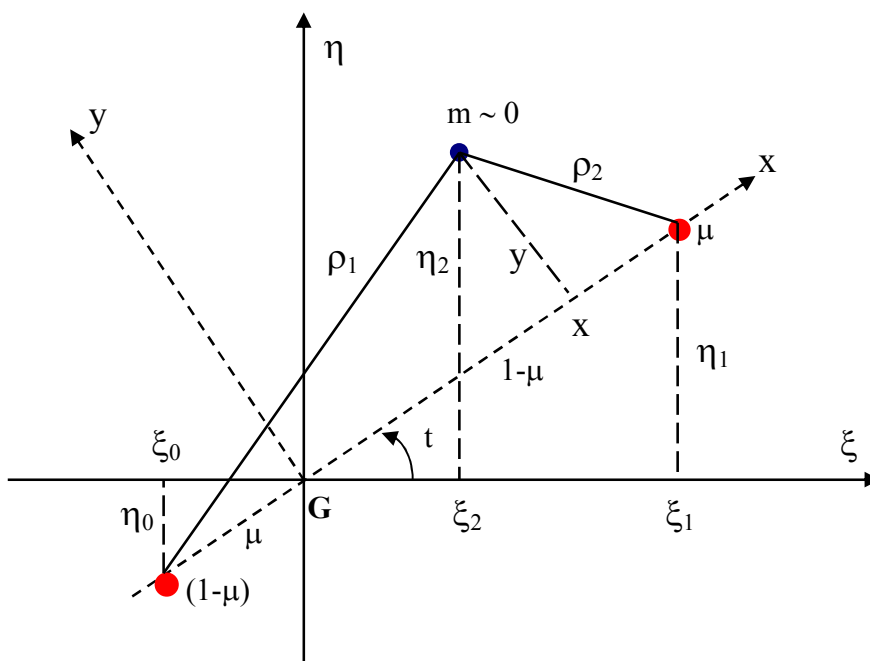


Fig. 21. El sistema de coordenadas $\{\xi, \eta\}$ es fijo y el sistema $\{x, y\}$ es móvil con velocidad angular igual a uno y periodo 2π . En un instante t el sistema móvil rota un ángulo t . Los puntos masa μ y $(1-\mu)$ están siempre sobre el eje- x ; la distancia entre ellos es siempre uno. G es el origen de coordenadas en ambos sistemas.

Siendo U la función potencial definida por la expresión:

$$U = \frac{(1-\mu)\mu}{r_{01}} + \frac{(1-\mu)}{\rho_1} m + \frac{\mu}{\rho_2} m$$

Recordar que, por definición, $r_{01} \equiv 1$, distancia entre los puntos masa $(1-\mu)$ y μ ; entonces, el primer sumando de U es constante y por ende todas sus derivadas parciales son nulas, luego el potencial se reduce a:

$$U^* = \frac{(1-\mu)}{\rho_1} m + \frac{\mu}{\rho_2} m$$

por lo tanto, las ecuaciones del movimiento de m respecto de G tienen la expresión:

$$m \ddot{\xi}_2 = \frac{\partial U^*}{\partial \xi_2}, \quad m \ddot{\eta}_2 = \frac{\partial U^*}{\partial \eta_2}$$

Recordar que en la función U^* está presente m como factor y también lo está en las ED del movimiento, entonces podemos simplificar, resulta:

$$\ddot{\xi}_2 = \frac{\partial U}{\partial \xi_2}, \quad \ddot{\eta}_2 = \frac{\partial U}{\partial \eta_2}$$

donde ahora la función U tiene la expresión: $U = \frac{(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}$.

Por razones de simplicidad suprimimos en las fórmulas de transformación (4.3) y en las ED del movimiento el subíndice 2, entonces resulta:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \end{array} \right\} U = \frac{(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}$$

Derivando las funciones de transformación de coordenadas (4.3) y teniendo en cuenta que las variables ξ y η son funciones del tiempo, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\xi} \cos t + \dot{\eta} \sin t - \xi \sin t + \eta \cos t \\ \dot{y} &= -\dot{\xi} \sin t + \dot{\eta} \cos t - \xi \cos t - \eta \sin t \end{aligned} \quad (4.3a)$$

recordar que:

$$-\dot{\xi} \sin t + \dot{\eta} \cos t = \dot{y}, \quad -(\dot{\xi} \cos t + \dot{\eta} \sin t) = -\dot{x}$$

reemplazando resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\xi} \cos t + \dot{\eta} \sin t + y \\ \dot{y} &= -\dot{\xi} \sin t + \dot{\eta} \cos t - x \end{aligned}$$

Derivando nuevamente la primera ED se deduce,

$$\ddot{x} = \ddot{\xi} \cos t + \ddot{\eta} \sin t + \dot{y} - (\dot{\xi} \sin t - \dot{\eta} \cos t)$$

pero, $-\dot{\xi} \sin t + \dot{\eta} \cos t = \dot{y} + x$ entonces, sustituyendo en \ddot{x} se tiene:

$$\ddot{x} = \ddot{\xi} \cos t + \ddot{\eta} \sin t + \dot{y} + \dot{y} + x$$

y agrupando resulta,

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \ddot{\xi} \cos t + \ddot{\eta} \sin t + x$$

Un desarrollo análogo aplicamos a la derivada \dot{y} del sistema (4.3a), luego

$$\ddot{y} = -\ddot{\xi} \sin t + \ddot{\eta} \cos t - \dot{\xi} \cos t - \dot{\eta} \sin t - \dot{x}$$

Pero hemos visto que:

$$-(\dot{\xi} \sin t + \dot{\eta} \cos t) = -\dot{x} + y$$

entonces, reemplazando en \ddot{y} se tiene, $\ddot{y} = -\ddot{\xi} \sin t + \ddot{\eta} \cos t - \dot{x} - \dot{x} + y$; y finalmente resulta,

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = -\ddot{\xi} \sin t + \ddot{\eta} \cos t + y$$

Por lo tanto, se obtiene el siguiente sistema de ED

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \ddot{\xi} \cos t + \ddot{\eta} \sin t + x$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = -\ddot{\xi} \sin t + \ddot{\eta} \cos t + y$$

Recordemos que: $\ddot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}$ y $\ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta}$, y reemplazando en el sistema anterior resulta

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cos t + \frac{\partial U}{\partial \eta} \sin t + x$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} \sin t + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cos t + y$$

pero, $\frac{\partial U}{\partial \xi} \cos t + \frac{\partial U}{\partial \eta} \sin t \equiv \frac{\partial U}{\partial x}$, luego $\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} + x = \frac{\partial}{\partial x} \left(U + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 \right)$, ya que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} y^2 \right) = 0.$$

Análogamente, $\ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} \sin t + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cos t + y = \frac{\partial U}{\partial y} + y = \frac{\partial}{\partial y} \left(U + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 \right)$, por

$$\text{ser: } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} x^2 \right) = 0.$$

Recordar que, $\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cos(\lambda \xi) + \frac{\partial U}{\partial \eta} \sin(\lambda \eta)$. En consecuencia, podemos escribir:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{aligned} \right\} \Omega = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2} (x^2 + y^2). \quad (4.4)$$

Donde Ω define la *función perturbadora*.

Este sistema de ecuaciones diferenciales fue utilizado por Hill ¹ como base para estudiar la teoría de la Luna.

NOTA. Hill, George William nació en New York el 3 de marzo de 1838 y se trasladó con su familia a West Nyack cuando tenía ocho años. Después de asistir a la escuela secundaria, Hill se graduó en la *Universidad of Rutgers* en 1859. Desde 1861, trabajó en la *Nautical Almanac Office* en Cambridge, Massachusetts. Su trabajo se centralizó en el modelo matemático que describe el problema de los tres cuerpos y luego continuó con el análisis de las perturbaciones ejercida por los planetas Júpiter y Saturno sobre la órbita de la Luna alrededor de la Tierra. Falleció en West Nyack el 16 de abril de 1914. Llegó a ser presidente de la *American Mathematical Society* en 1894, ocupando el cargo durante dos años. Fue elegido miembro de la *Sociedad Real de Edimburgo* en 1908, así como de las academias de *Bélgica* (1909), *Christiania* (1910), *Suecia* (1913), entre otras. Obtuvo varios premios y medallas en reconocimiento a su labor científica.

Supongamos ahora que el punto masa m (~ 0) se mueve en un entorno de L_4 , punto de libración, (ver Figura 14 y 15, pág.56). Además, si en la Figura 21 situamos al cuerpo m próximo a L_4 se obtiene el siguiente grafico, ver Figura 22.

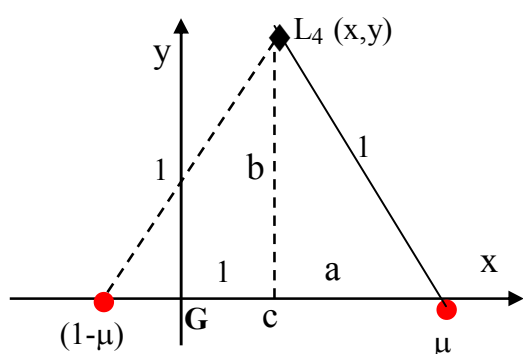


Fig. 22. El punto L_4 esta en el plano que forman las masas $(1-\mu)$ y μ , cuya distancia es 1, al igual que las distancias de estas masas al punto L_4 .

La distancia de la masa $(1-\mu)$ al punto L_4 es:

$$\rho_1 = 1 \text{ y de } \mu \text{ a } L_4 \text{ es } \rho_2 = 1 \text{ luego } ^2,$$

$$\rho_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2 ; \quad \rho_2^2 = (x + \mu - 1)^2 + y^2,$$

Además, si a y b son los lados que dividen al triángulo equilátero: $(1-\mu)\mu L_4$, en dos, entonces

$$\text{resulta: } a = \frac{1}{2} \text{ y } b = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ porque?}$$

$$\text{La posición de } c \text{ respecto de } G \text{ es: } \frac{(1-2\mu)}{2}$$

sobre el eje X.

Si el cuerpo m se mueve en un entorno de L_4 se trata de un asteroide del tipo Troyano ³ supongamos además, que el Troyano se desplaza en el plano de la órbita de Júpiter e indiquemos con ξ y η las coordenadas, en un instante cualquiera t , del Troyano respecto de un sistema con ejes paralelos y dirigidos en el mismo sentido que el sistema $\{X,Y\}$ pero con origen en el punto L_4 . Entonces, se tiene:

¹ Hill, en 1878, utilizando la integral de Jacobi, demostró que la distancia Tierra-Luna permanece acotada, casi para todo t , suponiendo que su modelo para el sistema Sol-Tierra-Luna es correcto; posteriormente Broun (1896) construyó una teoría lunar mas precisa.

² Recordar que la posición del planeta μ respecto de G es: $(1-\mu)$ y la posición del Sol $(1-\mu)$ también respecto de G es: $-\mu$.

³ Los asteroides Troyanos pertenecen a un grupo de asteroides que se mueven en el plano de la órbita de Júpiter. Están situados en los dos puntos de Lagrange a 60 grados por delante, L_4 (precediendo a Júpiter en su órbita), y por detrás de Júpiter, L_5 (siguiéndolo a Júpiter en su órbita).

$$\begin{aligned}x &= a + \xi \\y &= b + \eta\end{aligned}\quad (4.5)$$

NOTA: a y b son las coordenadas de L_4 respecto de G , donde $a = (1-2\mu)/2$ y $b = \sqrt{3}/2$.

Las coordenadas ξ y η son, en general, muy pequeñas; esta suposición es válida si el Troyano no se aleja demasiado del punto de libración L_4 . La Figura 23 ilustra la geometría del problema.

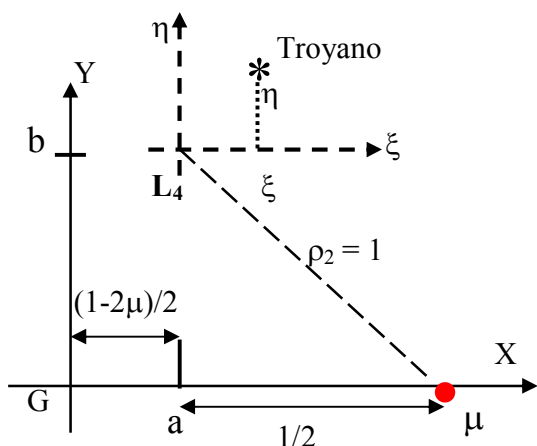


Fig. 23. El sistema de coordenadas $\{\xi, \eta\}$ con origen L_4 , es paralelo al sistema $\{X, Y\}$. Las coordenadas de L_4 , respecto de G , son (a, b) valores constantes.

NOTA: Los Troyanos forman un grupo de asteroides que se mueven en la órbita de Júpiter, sus semiejes mayor varían entre 5.05 y 5.40 UA. Están situados en los dos puntos de Lagrange triangulares a 60 grados delante y detrás de Júpiter. Su nombre es en honor de los héroes de las guerras troyanas. Los situados en el punto L_4 , preceden a Júpiter, recibieron los nombres de los guerreros griegos, y de ahí que se los conozcan como los "griegos", mientras que los que siguen a Júpiter, punto L_5 , recibieron nombres de los defensores de la ciudad de Troya, se los designan como "troyanos".

Consideremos nuevamente las ecuaciones diferenciales de Hill, ecuaciones (4.4), reemplazamos las coordenadas x e y por sus expresiones en función de ξ y η , ver (4.5) así como también en sus derivadas segundas, luego se tiene ¹:

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial x \partial y}\right)_0 \eta + \dots \quad (4.4a)$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial y^2}\right)_0 \eta + \dots$$

un desarrollo en serie de potencias de ξ y η , en un entorno del punto (a, b) ; notar que sólo nos limitamos a los términos de primer orden en ξ y η ² entonces, el sistema de ED (4.4a) es lineal con coeficientes constantes, ya que las derivadas están calculadas para un punto fijo (a, b) .

El siguiente paso es calcular las derivadas de la función perturbadora Ω respecto de x e y .

$$\text{Recordemos la expresión de } \Omega = \frac{(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

¹ Recordar que ρ_1 y ρ_2 están en función de x e y .

² Los términos de orden superior no se tienen en cuenta, ya que los Troyanos están próximos a los puntos de libración L_4 o L_5 por lo tanto, los valores de ξ y η son pequeños.

Cálculo de las derivadas.

Recordar que la distancia del punto masa $(1-\mu)$ al punto de libración L_4 es $\rho_1 = 1$, del mismo modo, la distancia de μ a L_4 es $\rho_2 = 1$. Las expresiones que definen estas distancias en función de x e y son:

$$\rho_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2, \quad \rho_2^2 = (x + \mu - 1)^2 + y^2,$$

y sus derivadas,

$$2 \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 2(x + \mu), \quad 2 \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial y} = 2y,$$

$$2 \rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = 2(x + \mu - 1), \quad 2 \rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial y} = 2y,$$

Las coordenadas de los puntos a y b , respecto al origen G ¹ (baricentro de los puntos masa $(1-\mu)$ y μ) son: $a = \frac{(1-2\mu)}{2}$ y $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ver Figura 23. Luego, el valor de las derivadas en este punto son:

$$\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = \frac{1}{2}, \quad \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial y} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = -\frac{1}{2}, \quad \rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial y} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cálculo de las derivadas de la *función perturbadora* en el punto (a,b) .

$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right) = -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho_2^3} \rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + x$; luego para $x = a = \frac{(1-2\mu)}{2}$ e $y = b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, resulta

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_{a,b} = -\frac{(1-\mu)}{1} \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\mu}{1} \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \mu\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{2} \equiv 0, \text{ luego: } \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_{a,b} \equiv 0.$$

Del mismo modo hallamos $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right) = -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho_2^3} \rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial y} + y$;

entonces, $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_{a,b} = -(1-\mu) \frac{\sqrt{3}}{2} - \mu \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, luego: $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_{a,b} \equiv 0$.

¹ Teniendo en cuenta la Figura 23 deducimos la distancia $Ga =$ distancia $(G\mu)$ menos la distancia $(a\mu)$, entonces resulta: $a = (1-\mu) - \frac{1}{2} = (1-2\mu)/2$ y $b^2 = 1 - (1/2)^2$ luego, $b = \sqrt{3}/2$.

Cálculo de la derivada segunda de la función Ω .

Hemos deducido: $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} (x + \mu) - \frac{\mu}{\rho_2^3} (x + \mu + 1) + x$; entonces, la derivada segunda es:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{3(1-\mu)}{\rho_1^5} (x + \mu) \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - \frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{3\mu}{\rho_2^5} (x + \mu - 1) \rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + 1; \text{ y en el punto (a,b)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right)_{a,b} = (3-3\mu) \frac{1}{4} - 1 + \mu + 3\mu \frac{1}{4} - \mu + 1 = \frac{3}{4}, \text{ luego } \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right)_{a,b} = \frac{3}{4}.$$

Del mismo modo, $\frac{\partial \Omega}{\partial y} = -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} y - \frac{\mu}{\rho_2^3} y + y$,

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = \frac{3(1-\mu)}{\rho_1^5} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial y} y - \frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{3\mu}{\rho_2^5} \rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial y} y - \frac{\mu}{\rho_2^3} + 1,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right)_{a,b} = (3-3\mu) \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \mu + 3\mu \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \mu + 1 = \frac{9}{4}, \text{ luego } \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right)_{a,b} = \frac{9}{4},$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = \frac{3(1-\mu)}{\rho_1^5} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} y + \frac{3\mu}{\rho_2^5} \rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial y} y$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \right)_{a,b} = (3-3\mu) \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\mu \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \mu - \frac{3\sqrt{3}}{4} \mu, \text{ luego}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \right)_{a,b} = \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial x} \right)_{a,b} = \frac{3}{4} \sqrt{3} (1-2\mu)$$

Con los valores de las derivadas calculadas, hasta el segundo orden, reemplazamos los mismos en el sistema de ED (4.4a), entonces resulta:

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \frac{3}{4}\dot{\xi} - \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)\eta = 0$$

(4.6)

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)\xi - \frac{9}{4}\eta = 0$$

Las ecuaciones (4.6) forman un sistema de ED de segundos orden simultáneo, el cual admite una solución particular de tipo exponencial que nos permite escribir la solución general ¹. Las soluciones particulares son de la forma

$$\begin{aligned}\xi &= A e^{\sigma t} \\ \eta &= B e^{\sigma t}\end{aligned}\quad (4.7)$$

y sus derivadas son:

$$\dot{\xi} = \sigma A e^{\sigma t}, \quad \ddot{\xi} = \sigma^2 A e^{\sigma t}; \quad \dot{\eta} = \sigma B e^{\sigma t}, \quad \ddot{\eta} = \sigma^2 B e^{\sigma t}$$

Reemplazamos las funciones solución y sus derivadas en el sistema de ED (4.6) luego simplificamos, entonces resulta:

$$\begin{aligned}A \sigma^2 - 2 B \sigma - \frac{3}{4} A - \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) B &= 0 \\ B \sigma^2 + 2 A \sigma - \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) A - \frac{9}{4} B &= 0\end{aligned}$$

factoriando las constantes A y B, se tiene:

$$\begin{aligned}\left(\sigma^2 - \frac{3}{4}\right) A - \left[2\sigma + \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu)\right] B &= 0 \\ \left[2\sigma - \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu)\right] A + \left(\sigma^2 - \frac{9}{4}\right) B &= 0\end{aligned}$$

un sistema algebraico lineal y homogéneo respecto de las variables A y B, el cual admite una solución distinta de la trivial ($A = B = 0$) si el determinante de los coeficientes es nulo,

$$\begin{vmatrix} \sigma^2 - \frac{3}{4} & -\left[2\sigma + \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu)\right] \\ 2\sigma - \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) & \sigma^2 - \frac{9}{4} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante resulta,

$$\left(\sigma^2 - \frac{3}{4}\right) \left(\sigma^2 - \frac{9}{4}\right) + \left[2\sigma^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu)\right] \left[2\sigma^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu)\right] = 0.$$

una ecuación algebraica de cuarto grado.

¹ La solución general de una ED es combinación lineal de las soluciones particulares.

Resolviendo la ecuación algebraica respecto de σ , se tiene:

$$\sigma^4 - 3\sigma^2 + \frac{27}{16} + 4\sigma^2 - \frac{27}{16}(1 - 2\mu)^2 = 0$$

agrupando según potencias de σ , resulta:

$$\sigma^4 + \sigma^2 + \frac{27}{16} - \frac{27}{16}(1 - 4\mu + 4\mu^2) = 0$$

y finalmente se obtiene,

$$\sigma^4 + \sigma^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0 \quad (4.8)$$

cuya solución es: $\sigma^2 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{27}{4}\mu(1-\mu)}$. Notar que las raíces de esta ecuación son reales si el discriminante:

$$1 - 27\mu(1 - \mu) \geq 0, \text{ es decir, si: } 1 \geq 27\mu(1 - \mu), \text{ o también } 27\mu^2 - 27\mu + 1 \geq 0,$$

desigualdad que se satisface si μ adopta los valores:

$$\mu_1 = 0.9614791\dots, \quad \mu_2 = 0.0385209\dots$$

Por lo tanto, si μ está comprendido entre 0 y μ_2 , i.e., $0 < \mu < 0.038521$, la ecuación $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{27}{4}\mu(1-\mu)}$ toma valores reales y negativos. Entonces, σ^2 sólo posee valores reales y negativos, i.e., $\sigma^2 = -k^2$, luego las raíces son:

$$\sigma_1 = k i, \quad \sigma_2 = -k i$$

$$\sigma_3 = k_1 i, \quad \sigma_4 = -k_1 i$$

En consecuencia, la solución general de (4.6) es de la forma,

$$\xi = A_1 \cos k t + A_2 \sen k t + A_3 \cos k_1 t + A_4 \sen k_1 t$$

$$\eta = B_1 \cos k t + B_2 \sen k t + B_3 \cos k_1 t + B_4 \sen k_1 t$$

Es decir, una combinación lineal de las soluciones particulares.

Entonces, si suponemos que μ representa la masa de Júpiter, es decir $\mu = 9,5464 \times 10^{-4} \mathcal{M}_{\text{Sol}} \sim \frac{1}{1047.5167} \mathcal{M}_{\text{Sol}}$ resulta $(1 - \mu) = 0.999045\dots$ la masa del Sol ¹; luego, las raíces de la ecuación (4.8) son:

$$\sigma_1^2 = -0.00648040\dots \text{ y } \sigma_2^2 = -0.99351959\dots$$

¹ En la mayoría de los problemas teóricos se considera la masa del Sol como la unidad, $M_{\text{Sol}} = 1$ entonces, la masa de Júpiter es $M_{\text{Júpiter}} \cong 9.546387 \times 10^{-4} M_{\text{Sol}} \sim 0.001 M_{\text{Sol}}$, o también $\mu = 1/1047,5167 M_{\text{Sol}}$. Masa de Júpiter = $1,8987 \times 10^{27}$ kg.

Entonces se obtienen los siguientes valores de k y k_1 ¹,

$$k = 0.08050095 \dots, \quad k_1 = 0.996754 \dots$$

Recordar que el período de Júpiter es aproximadamente 11,86 años ($P_{\text{Júpiter}} \cong 11.8623$ años)².

Tener en cuenta que el sistema de unidades empleado en este análisis es con un período de Júpiter igual a 2π ($P_{\text{Júpiter}} = 2\pi$) por lo tanto, el período del primer valor de k es $\frac{2\pi}{k}$ y el del segundo es $\frac{2\pi}{k_1}$;

entonces, en el primer caso se tiene: $\frac{2\pi}{k} = \frac{1}{k} P_{\text{Júpiter}}$ y en el segundo caso: $\frac{2\pi}{k_1} = \frac{1}{k_1} P_{\text{Júpiter}}$.

Luego, para $k = 0.0805\dots$ resulta: $\frac{P_{\text{Júpiter}}}{k} = \frac{11,86}{0.080500} \sim 147,327$ años, valor que corresponde al

período de los Troyanos; y para el valor de k_1 se tiene: $\frac{11,86}{0.996754} = 11,8986 \sim 12$ años. Esto significa

que las coordenadas del cuerpo de masa m admiten dos períodos; uno, el mayor, del orden de 147 años denominado la *libración del troyano* y el otro, un período alrededor de 12 años, ligeramente mayor al período de Júpiter, el cual indica un desplazamiento del período del troyano respecto de Júpiter³.

Reseña.

En 1772 *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813), astrónomo, físico y matemático francés, demostró que tres cuerpos con masas m_1 , m_2 y m_3 pueden tener una configuración orbital estable bajo ciertas condiciones, ellas son: se debe cumplir que m_1 sea igual o mayor que cierto valor y que m_3 sea mucho menor que m_2 y m_1 (prácticamente nulo). Entonces, determinó la existencia de cinco puntos en el plano de la órbita de m_2 alrededor del cuerpo más masivo m_1 y luego, introduciendo un tercer cuerpo de masa m_3 despreciable respecto de m_1 y m_2 , demostró que éste permanece en equilibrio en dichos puntos. Estos puntos se denominaron posteriormente *puntos de Lagrange* (o *lagrangianos*) o *puntos de Libración*, y se representan por L_1 , L_2 , L_3 , L_4 y L_5 . En el caso del Sistema Solar, m_1 es la masa del Sol, m_2 la masa de un planeta y m_3 puede ser un satélite artificial, un asteroide o cualquier otro cuerpo con masa despreciable. Si consideramos el sistema Sol-Júpiter, los *puntos de Lagrange* están situados según se muestra en la Figura 24. Los puntos L_1 , L_2 y L_3 se encuentran en la dirección del radio vector que une al planeta con el Sol, mientras que L_4 y L_5 se ubican en los vértices de los triángulos equiláteros que forman el Sol y Júpiter y contienen la órbita del planeta. L_4 , es el punto Lagrangiano precedente, ya que antecede al planeta en su movimiento orbital y se halla a 60° por delante de su órbita, mientras que L_5 es el punto Lagrangiano situado detrás del planeta en su órbita, atrasado 60° .

Los puntos L_2 y L_3 están en los extremos del sistema m_1 - m_2 (v.g. Sol-Júpiter) y L_1 se encuentra entre las masas m_1 y m_2 , ver Figura 24. Si los cuerpos m_1 y m_2 son considerados como puntos de referencia, entonces el tercer cuerpo m_3 puede estar situado en cualquiera de los puntos de Lagrange y

¹ Los valores de k y k_1 se obtienen de σ_1 y σ_2 .

² El período orbital sidéreo de Júpiter es: 11,862 años terrestres de 365,256 días; datos: jpl.nasa.gov.

³ “*The Stability of the Solar System and of Small Stellar Systems*”; Editor Kozai, Y. Published on behalf of The International Astronomical Union, 1974. Reidel Publishing Company.

“*A Comparison of the Dynamical Evolution of Planetary Systems*”, Editor Dvorak, R & Ferraz-Mello, S. 2005; Springer.

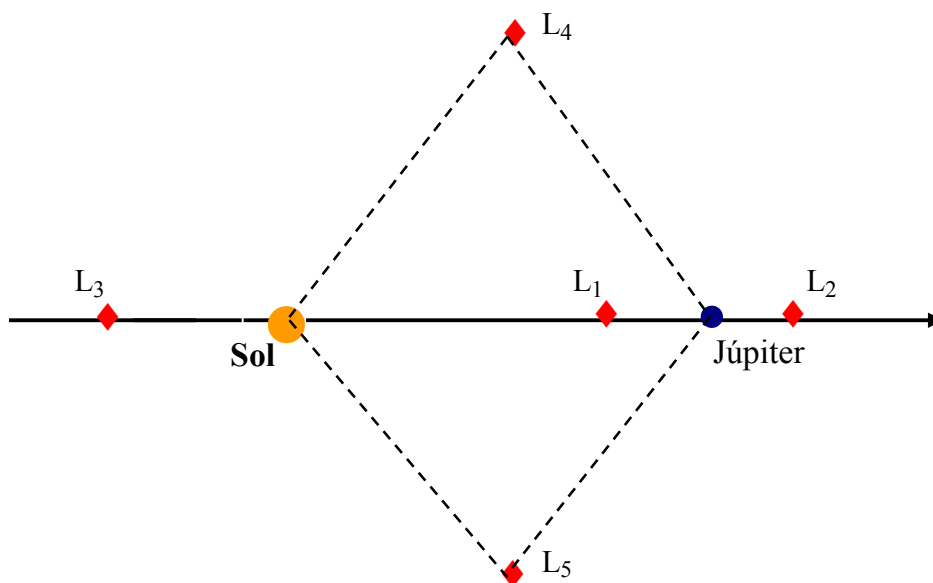


Fig. 24. Los cinco puntos de Lagrange. Teóricamente en estos puntos estaría en equilibrio un cuerpo con masa despreciable ($m \sim 0$). En la práctica sólo L_4 y L_5 son estables para un intervalo de tiempo suficientemente grande. El dibujo no es a escala.

la solución se denomina *estacionaria*. Es importante destacar que la solución es estacionaria si no se efectúan cambios de escala y no se alteran las distancias relativas. Además, el sistema m_1 - m_2 también rota en un plano respecto de su centro de masa con velocidad angular constante. Por lo tanto, el movimiento de una partícula infinitesimal ($m_3 \sim 0$), próxima a uno de los puntos de Lagrange, se dice que es *estable* sí, dado un desplazamiento y velocidad muy pequeños, la partícula oscila alrededor del punto L en un cierto intervalo de tiempo finito. Si se aparta del punto en cuestión, cuando el tiempo aumenta, entonces el movimiento es *inestable*. Matemáticamente decimos que la estabilidad del movimiento implica desplazamientos y velocidades acotadas, lo cual significa que son funciones acotadas del tiempo en la vecindad de uno de los puntos de equilibrio ¹.

NOTA: Joseph Louis Lagrange (bautizado como *Giuseppe Lodovico Lagrangia*), nació el 25 de enero de 1736 en Turín y falleció el 10 de abril de 1813; fue un destacado matemático, físico y astrónomo desarrollo su labor científica en Prusia y Francia. Lagrange trabajó para Federico II de Prusia, en Berlín, durante veinte años. Demostró el teorema del valor medio, desarrolló la mecánica Lagrangiana (Mecánica Analítica) y tuvo una importante contribución en la Mecánica Celeste ².

El interés por los puntos de Lagrange era puramente académico hasta que en el año 1906 el astrónomo alemán Max Wolf descubrió, en el Observatorio de Heidelberg, un asteroide que parecía comportarse como si oscilara alrededor del punto L_4 del sistema Sol-Júpiter. El asteroide recibió el nombre de Achilles (Aquiles) y fue el primero descubierto en un punto Lagrangiano. No tardaron en hallarse nuevos asteroides, tanto en L_4 como en L_5 en el sistema Sol-Júpiter. A todos ellos se los llamó asteroides Troyanos y recibieron nombres mencionados en la Iliada de Homero. Entonces, aquellos que

¹ Roy, A.E.; 1978, "Orbital Motion", págs. 119-125 y 149-154.

² Consultar: "The British Cyclopaedic of Biography".

pertenecían al grupo precedente (L_4) recibieron nombres de guerreros griegos, mientras que los siguientes (L_5) recibieron nombres de los que defendieron la ciudad de Troya. Ver Figura 26.

§ 4.3 Estabilidad y la Integral de Jacobi.

Conceptos: El movimiento de una partícula infinitesimal próxima a uno de los puntos de Lagrange (puntos L) es *estable*, en el sentido que si realizamos pequeñas variaciones en su posición y velocidad la partícula oscila en torno del punto L en estudio ¹.

Consideremos un sistema de ejes móviles en rotación $\{X,Y\}$ ²; supongamos que el Sol esta situado sobre el eje X cuya abscisa es μ y el planeta, ubicado sobre el mismo eje, tiene abscisa $(1-\mu)$ siendo además $(1-\mu)$ la masa del Sol y μ la masa del planeta. Entonces, un cuerpo de masa nula ($m \sim 0$) tiene coordenadas (x,y) en dicho sistema y sean, ρ_1 y ρ_2 las distancias al Sol y planeta respectivamente, luego se tiene:

$$\rho_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2, \quad \rho_2^2 = (x + \mu - 1)^2 + y^2.$$

Ver Figura 25.

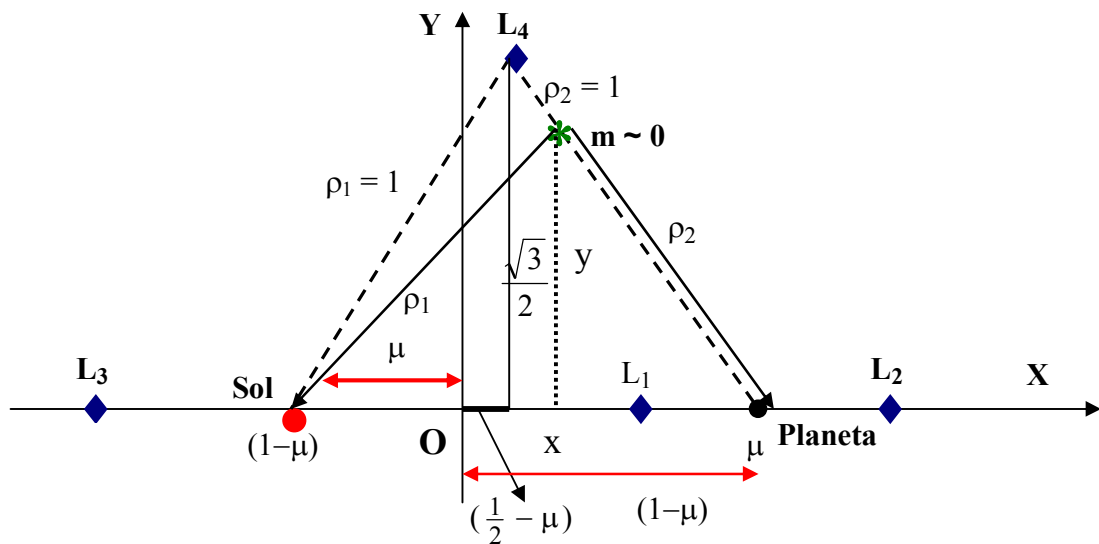


Fig. 25. El sistema de coordenadas $\{x,y\}$ rota con velocidad angular (ωt) respecto de un sistema fijo $\{\xi,\eta\}$, ver Fig. 21. L_4 es un punto equilátero de Lagrange correspondiente a las masas $(1-\mu)$ y μ . El cuerpo de masa infinitesimal m esta situado próximo a L_4 y sus coordenadas son (x,y) respecto del origen O. El gráfico no es a escala.

Notación de distancias: Distancia Origen-Sol = μ ; distancia Origen-planeta = $(1-\mu)$; distancia L_4 al Sol y planeta $\rho_1 = \rho_2 = 1$ (triangulo equilátero); coordenadas de L_4 respecto de O: $x = (\frac{1}{2} - \mu)$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; la distancia de la masa infinitesimal m al Sol es: $\rho_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2$ y al planeta μ es: $\rho_2^2 = (x + \mu - 1)^2 + y^2$. La distancia Sol-planeta = 1. Ver Figura 26, la posición de los Troyanos.

¹ Consultar: **Bhatia, N. P. & Szegő, G. P.**; 1970, “*Stability Theory of Dynamical Systems*”. Ed. Springer-Verlag.
² ver Fig. 21, pág. 70. También se lo suele nombrar *sistema sinódico*.

Ecuaciones de movimiento y su integral. Las ecuaciones diferenciales de movimiento del cuerpo m respecto de O [baricentro de las masas $(1-\mu)$ y μ], son las ecuaciones del problema restringido de tres cuerpos ó las ecuaciones de Hill ¹, y tienen la siguiente expresión

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{aligned} \right\} \Omega = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (4.4)$$

donde Ω representa la función de fuerza o función perturbadora.

Si multiplicamos la primera de las ecuaciones de Hill por \dot{x} y la segunda ecuación por \dot{y} y las sumamos miembro a miembro se obtiene,

$$\dot{x} \ddot{x} + \dot{y} \ddot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \dot{y}$$

El primer miembro de esta igualdad es: $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ y el segundo miembro es igual a $\frac{d \Omega}{dt}$, luego resulta:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{d \Omega}{dt}$$

e integrando miembro a miembro esta ecuación se tiene,

$$2 \Omega - C = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = V^2 \quad (4.9)$$

Expresión que representa la *integral de Jacobi*, donde V es el módulo de la velocidad y C una constante de integración. La función Ω fue introducida por Jacobi y tiene la forma de una *energía potencial* si incluimos la energía proveniente de la rotación del sistema de coordenadas $\{X, Y\}$, es decir el término $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Luego, la ecuación: $2 \Omega - C = V^2$ incluye la “función potencial” y la constante de integración C , determinando una *integral* de las ecuaciones de movimiento (4.4).

NOTA: La integral de Jacobi, es la única integral que se puede obtener en el problema restringido de tres cuerpos circular. Es importante destacar que esta integral se puede expresar, también, en función de las coordenadas y componentes de la velocidad en un sistema de coordenadas no rotante ², en este caso se obtiene:

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - 2(\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi}) = 2 \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) - C \quad (4.9a)$$

donde $\{\xi, \eta, \zeta\}$ son las coordenadas en un sistema de ejes no rotante. Consultar § 4.2.

¹ Consultar ecuaciones (4.4), pág. 72.

² Brouwer, D. & Clemence, G.; 1961, "Methods of Celestial Mechanics", pág. 255.

En consecuencia, la integral de Jacobi en un sistema de coordenadas 3D tiene la expresión:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2} - C \quad (4.10)$$

Algunas veces se la denomina “integral de la energía relativa”. Esta ecuación define las regiones prohibidas del movimiento del tercer cuerpo en un sistema rotante; si $V^2 < 0$ se obtendría una velocidad imaginaria, lo cual es físicamente irracional¹.

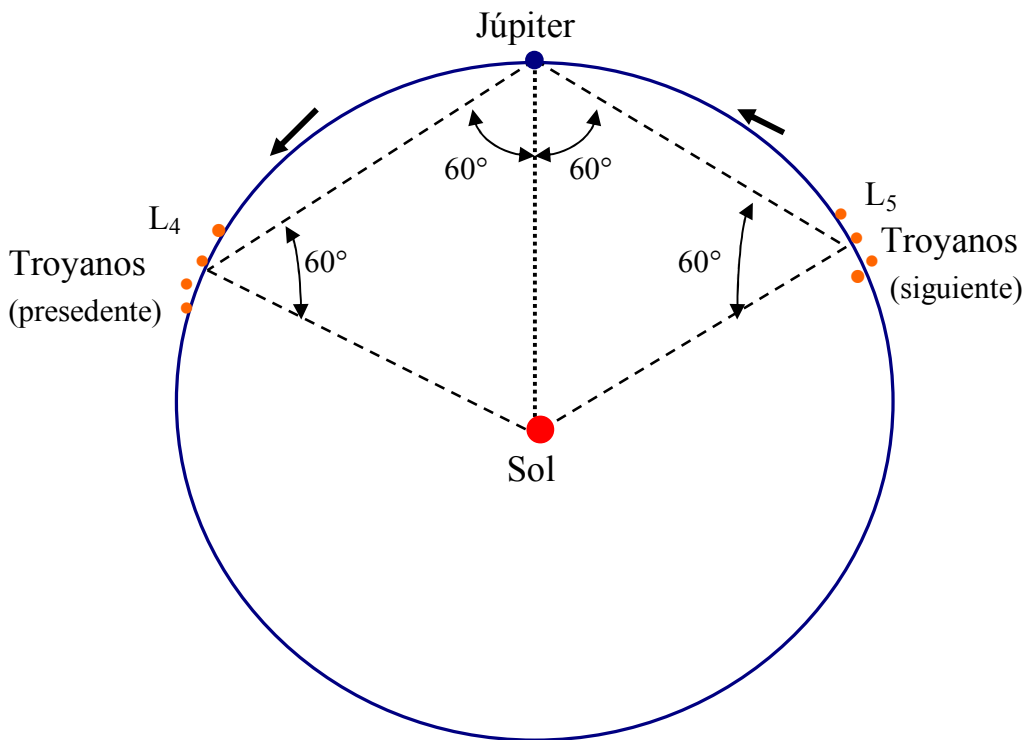


Fig. 26. Los asteroides Troyanos se hallan distribuidos alrededor del punto Lagrangiano L_4 (los griegos) y L_5 (los troyanos), es decir, a 60 grados delante y detrás de Júpiter, en el vértice del triángulo equilátero cuya base está definida por la línea Sol-Júpiter. El gráfico no es a escala.

§ 4.4 El criterio de Tisserand (1845-1896)².

Puede suceder que en ciertas ocasiones, un cometa tenga una aproximación a Júpiter o a algún otro planeta, generalmente los exteriores. Las consecuencias de este encuentro pueden producir un cambio drástico en los elementos de su órbita, i.e. resulta muy perturbada y en un nuevo paso heliocéntrico será muy difícil identificarlo, ya que la órbita se verá muy afectada. Por eso, a menos que el cometa haya sido observado visualmente ó que su órbita haya sido calculada numéricamente durante todo el período en cuestión, es casi imposible identificarlo después del encuentro planetario, a menos que alguna propiedad de su órbita heliocéntrica permanezca invariante durante la perturbación planetaria.

¹ Dvorak, R., 1989, “Intégrabilité du Problème Restreint Elliptique”; 385-403. Benest & Froeschle (eds.), Les Méthodes Modernes de la Mécanique Céleste, (Goutelas).

² Moulton, F. R.; 1970, “An Introduction to Celestial Mechanics”, págs.295-307.

Precisamente, una aplicación de la integral de Jacobi es el *criterio de Tisserand* para la identificación de cometas. Esta propiedad, descubierta por Tisserand ¹, considera que el sistema Sol-planeta-cometa es un ejemplo real y aproximado al problema restringido circular de tres cuerpos, donde el cometa representa a la partícula infinitesimal. El planeta más involucrado en estos problemas dinámicos es Júpiter, a causa a su gran masa ($\sim 10^{-3} \mathcal{M}_{\text{Sol}}$) y su distancia media al Sol (5.20 UA); además, aún cuando su órbita no es estrictamente circular, su excentricidad es suficientemente pequeña (~ 0.0484) y por eso está justificado despreciarla. Hemos estudiado que en la integral de Jacobi, aunque el cometa ($m \sim 0$) sea perturbado por Júpiter, la constante C [ver Ecs. (4.9) y (4.9a)] se conservará invariante; esta propiedad nos permite identificar al cometa.

En consecuencia, la integral de Jacobi permanece constante (o casi constante) durante todo el encuentro (antes y después del mismo): es decir, la constante C casi no varía. Si esta cantidad es calculada, utilizando los elementos de los dos cometas observados (antes y después de la perturbación) y se comprueba que son “aproximadamente” las mismas se concluye que ambos cometas son probablemente el mismo cuerpo; entonces, es conveniente realizar una integración numérica “step-by-step” para verificar estos cálculos ².

Para demostrar el criterio de Tisserand consideremos la integral de Jacobi en un sistema de coordenadas no rotante, ecuación (4.9a),

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - 2(\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi}) = 2 \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) - C$$

Es conveniente reemplazar las coordenadas y componentes de la velocidad por sus elementos orbitales. En el caso del sistema Sol-Júpiter el valor de $\mu \sim 10^{-3}$, de modo que el centro del Sol se puede considerar como el origen del sistema en vez del centro de masa, sin cometer un error apreciable. Sea r el radio vector heliocéntrico del cometa y h la constante de la ley de las áreas en el sistema Sol-cometa; y sean además, a , e , i el semieje mayor, la excentricidad y la inclinación del plano orbital del cometa con respecto a la órbita de Júpiter referida al Sol entonces, se tiene:

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \quad (\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi}) = h \cos i, \quad \text{donde } h^2 = a(1 - e^2)$$

Recordar que las unidades adoptadas son: $G(\mathcal{M}_{\text{Sol}} + \mathcal{M}_{\text{cometa}}) = 1$. Reemplazando en la integral de Jacobi resulta:

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - 2h \cos i = 2 \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) - C$$

y sustituyendo la constante de la ley de las áreas se obtiene,

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a} \sqrt{1 - e^2} \cos i = 2 \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) - C$$

¹ Consultar: *Bulletin Astronomique*; 1889, vol. VI, pág. 289; y “*Traité de Mécanique Céleste*”, 1896, vol. IV; pág. 203.

² Consultar: **Roy**, A. E.; 1978, “*Orbital Motion*”, págs. 129-130.

Además, como μ es pequeño podemos escribir,

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - 2 \sqrt{a} \sqrt{1-e^2} \cos i = \left(\frac{2}{r_1} - \frac{2\mu}{r_2} \right) - C \quad (4.11)$$

Consideraciones: Cuando el cometa está próximo a Júpiter, su radio vector r es casi igual a r_1 ; además, los elementos heliocéntricos del cometa son determinados cuando se encuentra lejos de Júpiter, por lo tanto podemos despreciar el segundo término del segundo miembro de la ecuación (4.11) por ser r_2 muy grande; entonces, la ecuación anterior toma la forma:

$$\frac{1}{2a} + \sqrt{a} \sqrt{1-e^2} \cos i = C'$$

donde C' es una constante.

Si los elementos orbitales correspondientes a los dos cometas son: a_0, e_0, i_0 y a_1, e_1, i_1 , entonces ellos estarán relacionados por la ecuación ¹,

$$\frac{1}{2a_0} + \sqrt{a_0} \sqrt{1-e_0^2} \cos i_0 = \frac{1}{2a_1} + \sqrt{a_1} \sqrt{1-e_1^2} \cos i_1 \quad (4.12)$$

Si esta ecuación se satisface, ambos elementos orbitales pertenecen al mismo cometa, expresión que describe el *criterio de Tisserand*. Recordemos que la unidad de longitud es la distancia Sol-Júpiter y la unidad de masa es la masa del Sol; además, la escala de tiempo está definida por una revolución de Júpiter entorno del Sol, con velocidad angular igual a la unidad. También debemos destacar que el criterio de Tisserand sólo es válido aproximadamente. Sin embargo, podemos decir que si sustituimos dos sistemas de elementos $\{a, e, i\}$ en (4.12) y resulta una desigualdad, es casi evidente que ellos no pertenecen a un mismo cometa. En resumen, el criterio de Tisserand es apropiado para identificar cometas ².

NOTA. Francois Felix **Tisserand** publicó su criterio en “*Note sur l’intégrale de Jacobi et sur son application à la théorie des comètes*”, Bulletin Astronomique, Tome VI, 1889; también esta desarrollado en su libro: “*Mécanique Céleste*”, Tomo IV, 1896. Asimismo, **Callandreau**, M.O. considero este criterio en “*Étude sur la théorie des comètes périodique*”, Annales de l’Observatoire de Paris, Mémoires, tome XX, 1892.

El criterio de Tisserand supone que la órbita de Júpiter es circular, lo cual no es estrictamente correcto; este efecto fue corregido por Callandreau teniendo en cuenta en el desarrollo en serie de la excentricidad la primera potencia, lo cual significó agregar un término conteniendo a la excentricidad como factor. Este término, a diferencia de los usados en el criterio de Tisserand, depende de la forma en que el cometa se aproxima a Júpiter.

¹ Por ser C' constante independiente de t .

² Consultar: **Brouwer**, D. & **Clemence**, G.M.; 1961, “*Methods of Celestial Mechanics*”, pág. 256-257.

Danby, J.M.A.; 1992, “*Fundamentals of Celestial Mechanics*”, pág. 254-255.

Szebehely, V.; 1967, “*Theory of Orbits*”, pág. 36, 586-587.

§ 4.5 Análisis de la integral de Jacobi.

Curvas de velocidad nula. Consideremos nuevamente la integral de Jacobi, ecuación (4.9). En un estudio dinámico, vinculado al problema restringido de tres cuerpos, es útil analizar las superficies o curvas límites de Hill, las cuales se obtienen igualando a cero la velocidad V del punto masa $m_3 \sim 0$, motivo por el cual se las suele llamar también *curvas de velocidad nula*¹.

Si en la integral de Jacobi,

$$2\Omega - C = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = V^2$$

hacemos $V = 0$, resulta

$$2\Omega - C = 0 \quad (4.13)$$

Expresión que define la ecuación de una superficie. La constante C queda determinada por las condiciones iniciales del problema, i.e., por la posición inicial (x_0, y_0) , lo cual permite conocer el valor numérico de Ω , es función de (x, y) y la velocidad inicial (\dot{x}_0, \dot{y}_0) .

Analicemos la superficie $2\Omega = C$. Puesto que Ω es función de (x, y) entonces, la constante C es también función de (x, y) ; la representación de la superficie en el plano $[x, y]$ se realiza utilizando las líneas de nivel. Entonces, nos preguntamos: ¿Qué sucede con esta función cuando la partícula m_3 se aproxima indefinidamente a las masas μ o $(1 - \mu)$ respectivamente?

Cuando la masa m_3 se aproxima al Sol resulta $\rho_1 \rightarrow 0$ por tanto: $\Omega \rightarrow \infty$; análogamente si $\rho_2 \rightarrow 0$, $\Omega \rightarrow \infty$, este resultado indica que la superficie tiene, en las masas μ o $(1 - \mu)$, puntos de infinitud.

Además, la función Ω tiene otro punto singular, corresponde al caso en que la masa m_3 se aleja indefinidamente respecto del baricentro de $(1 - \mu)$ y μ , entonces se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 \rightarrow \infty \\ \rho_2 \rightarrow \infty \end{array} \right\} x^2 + y^2 \rightarrow \infty.$$

Para obtener el mínimo de la superficie, i.e. el mínimo de C , es necesario derivar la ecuación (4.13) e igualarla a cero. Para ello, calculemos la derivada de C respecto de x e y , resulta:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho_2^3} (x + \mu - 1) + x = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3} y - \frac{\mu}{\rho_2^3} y + y = -y \left(\frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} - 1 \right) = 0$$

De la segunda ecuación se tiene: $\left(\frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} - 1 \right) \equiv 0$.

De la primera ecuación despejando x resulta la expresión:

¹ Recomendamos: **Marchal, C. & Bozis, G.**; 1982, *Celestial Mechanics* **26**, págs. 311-333.

$$-\frac{1-\mu}{\rho_1^3} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho_2^3} x + \mu \frac{(1-\mu)}{\rho_2^3} + x = 0; \text{ recordar que: } \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = x + \mu, \text{ reemplazando se tiene}$$

$$-\left(\frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} - 1\right)x - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} \mu + \mu \frac{(1-\mu)}{\rho_2^3} = 0; \text{ asimismo, hemos demostrado que:}$$

$$\left(\frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} - 1\right) \equiv 0; \text{ entonces resulta: } -\frac{1-\mu}{\rho_1^3} \mu + \mu \frac{(1-\mu)}{\rho_2^3} = (1-\mu) \mu \left[\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3} \right] = 0.$$

Como $(1-\mu) \mu \neq 0$, la igualdad se satisface si $\rho_1 = \rho_2$; luego, reemplazando en el paréntesis se tiene

$$\frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} - 1 = \frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_1^3} - 1 = \frac{1}{\rho_1^3} - 1 \equiv 0 \Rightarrow \rho_1^3 = 1 = \rho_2^3, \text{ por lo tanto, } \rho_1 = \rho_2 = 1.$$

En consecuencia, la igualdad $\rho_1 = \rho_2 = 1$ se satisface en el punto de libración L_4 ¹; luego, el mínimo corresponde al vértice L_4 perteneciente al triángulo equilátero formado por $(1-\mu)$, μ y m_3 (ver Figura 25, pág. 81).

El mínimo de C se obtiene de la expresión: $\Omega = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, donde reemplazamos

$\rho_1 = \rho_2 = 1, x = \frac{1}{2} - \mu, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ver Figura 25, entonces resulta,

$$C_{\min} = 2 \Omega_{\min} = 2 \left\{ (1-\mu) + \mu + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right] \right\}$$

$$C_{\min} = 2 + \frac{1}{4} - \mu + \mu^2 + \frac{3}{4} = 3 - \mu(1 - \mu)$$

por lo tanto, el C_{\min} es:

$$C_{\min} = 3 - \mu(1 - \mu).$$

Como se puede apreciar, C_{\min} es función de la masa μ del planeta considerado. La siguiente Tabla muestra valores de C_{\min} en función de μ ,

μ	C_{\min}
0,0001	2,9999
0,001	2,999
0,01	2,99
0,1	2,91
0,2	2,84

¹ El punto de libración L_4 , así como también L_5 , están determinados por $\rho_1 = \rho_2 = 1$.

Las propiedades de la igualdad (4.13) [ecuación de una superficie $z = f(x,y)$], pueden ser analizadas estudiando las curvas que se obtienen de la intersección de las superficies con el plano-XY. Estas curvas denominadas “curvas de velocidad cero”¹, corresponden al problema restringido de tres cuerpos en dos dimensiones. Su representación gráfica, en curvas de nivel, se muestran en las Figuras 28 y 29, las cuales representan la función Ω en el plano-XY, para distintos valores de μ . La Figura 28, presenta tres series de curvas cerradas (a,b,c) que circundan separadamente cada una de las dos masas y curvas cerradas que envuelven ambas masas, en los tres casos se indica el valor de la masa planetaria μ y de la constante C. En el gráfico a, una partícula de masa $m_3 \sim 0$ no puede escapar del interior de la curva cerrada próxima a μ o $(1-\mu)$; en cambio, en el gráfico b, si puede escapar a través del cuello de la curva que envuelve ambas masas². En la Figura 29, gráfico b, la partícula m_3 sólo se puede desplazar dentro de la curva cerrada. Los casos a y c son semejantes a los ejemplos a y b de la Figura 28. La Figura 27 nos muestra la estabilidad entorno de los puntos de libración L_4 y L_5 , donde la partícula puede orbitar; gráficamente representa el movimiento de los troyanos en el sistema Sol-Júpiter .

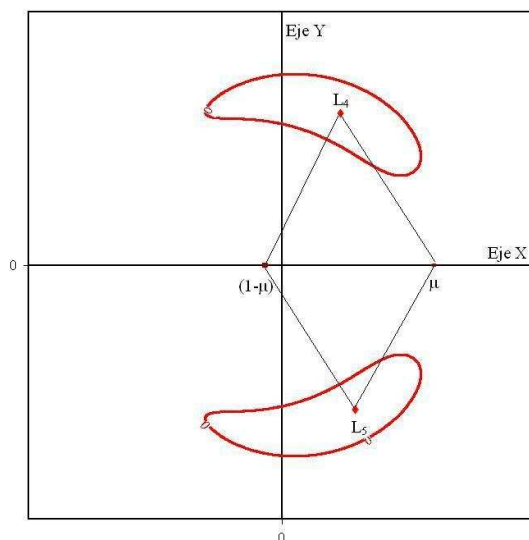


Fig. 27. Las órbitas de los asteroides Troyanos alrededor de los puntos de libración L_4 y L_5 . El movimiento no está restringido a los puntos lagrangianos, sino que se distribuyen a lo largo de una región, moviéndose dentro de ella en una combinación de períodos de 12 años y de 150 a 200 años. Gráfico no en escala.

NOTA: Hill, George William (1838-1914) fue el primer astrónomo en obtener estas curvas, estudiando el movimiento de la Luna al analizar las ecuaciones del problema restringido despreciando la excentricidad de la órbita de la Tierra; entonces, la integral de Jacobi tiene un valor que corresponde a una curva cerrada con una distancia máxima de 109695 radios ecuatoriales terrestres desde el centro de la Tierra.

Consultar: Wilson, C.; 2010, “*The Hill-Brown Theory of the Moon’s Motion*”. Ed. Springer.

¹ También llamadas “curvas de nivel de la función Ω ” o “curvas de equipotencial”.

² Transferencia de materia en el caso de estrellas binarias cercanas. Este resultado es muy importante en astrofísica.

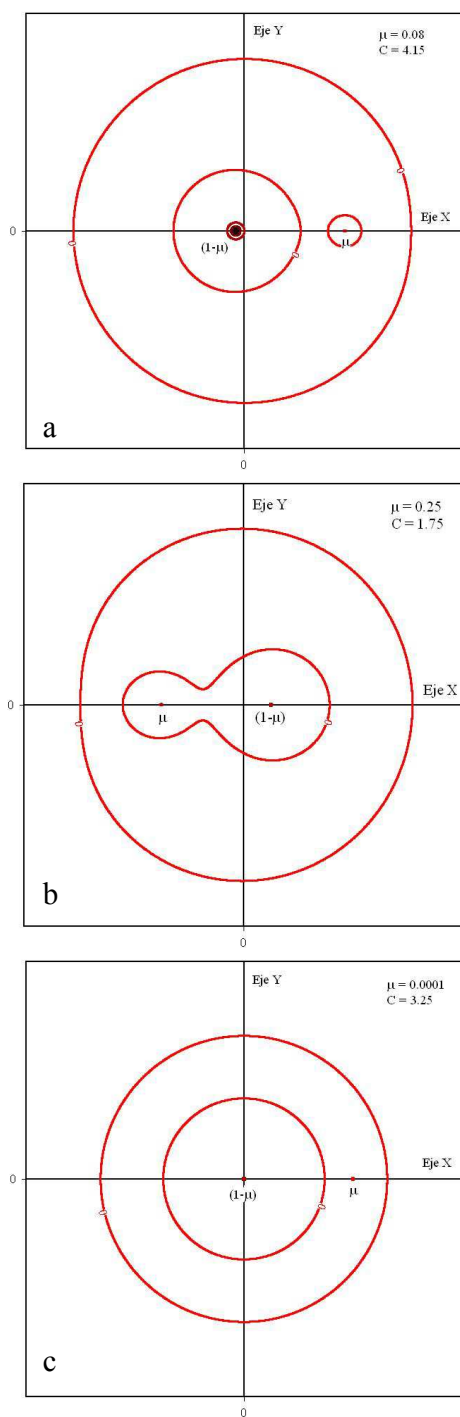


Fig. 28. Los tres gráficos muestran curvas de velocidad nula en el problema de tres cuerpos restringido; μ representa la masa del planeta estudiado. C es la constante de la integral de Jacobi. En el gráfico b, un cuerpo de masa nula, capturado por μ , puede ser capturado por $(1-\mu)$ o puede haber transferencia de materia como en el caso de estrellas binarias.

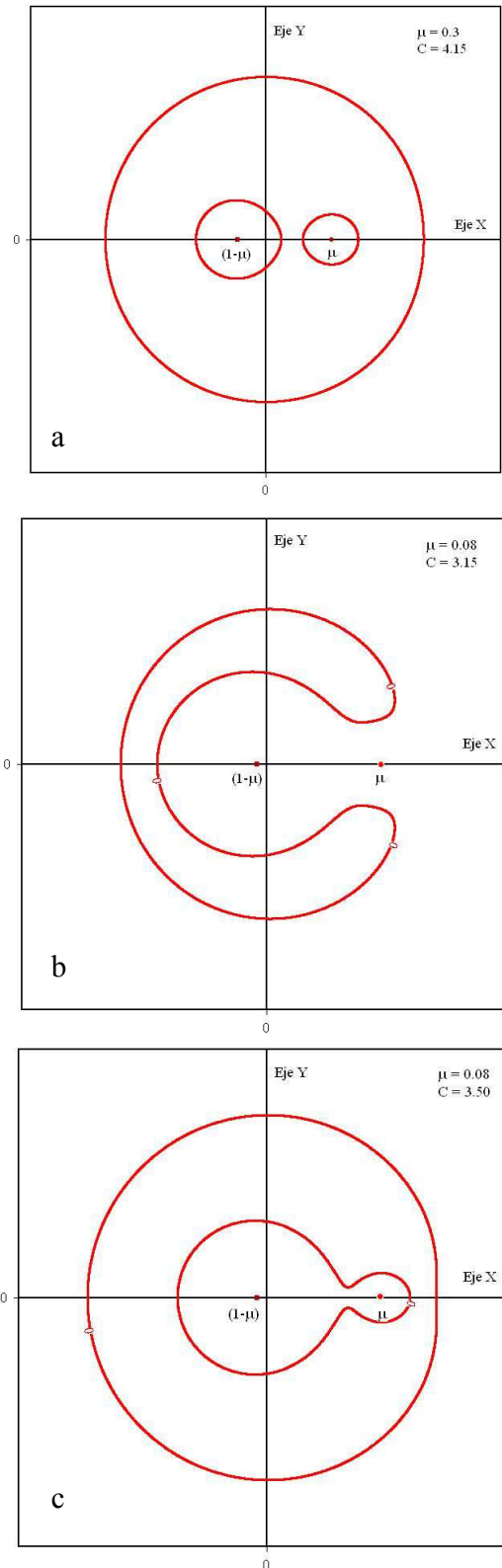


Fig. 29. El movimiento del cuerpo infinitesimal tiene lugar dentro del interior de los contornos de los ovoides, gráficos a y c. En b el contorno no encierra (aísla) a los cuerpos de masa finita; los valores de C son menores.

Una descripción muy detallada sobre la construcción de estas superficies y curvas de nivel se pueden hallar en:

Moulton, F. R.; 1914, “*An Introduction to Celestial Mechanics*”, págs. 281-290.

Szebehely, V.; 1967, “*Theory of orbits*”, págs. 159-200.

Aplicaciones Astronómicas. Los puntos de masa $m \sim 0$, situados en alguno de los cinco puntos de equilibrio o puntos de Lagrange L_1 , L_2 , L_3 , L_4 y L_5 , con velocidad cero, permanecen estables; por esta razón se los denomina *puntos estacionarios*¹. Estos cinco puntos, representan cinco soluciones particulares del problema restringido; que desde un punto de vista físico representan puntos donde las fuerzas actuantes sobre el tercer cuerpo, en un sistema rotante, están en equilibrio; entonces, como las soluciones son *estacionarias*, no hay movimiento relativo en el sistema rotante y por tanto, sólo son consideradas las fuerzas gravitacionales y centrífugas. Sin embargo, no solamente estos puntos de equilibrio son soluciones de las ecuaciones de movimiento sino que próximos a ellos existen otras familias de soluciones. “*La presencia de los puntos de libración L_4 y L_5 es considerada, generalmente, como un ejemplo de la importancia de las predicciones matemáticas*”. Lagrange demostró en 1772 la existencia de estas soluciones para el problema restringido considerando el sistema Sol-Júpiter y su comprobación fue en 1906 por el astrónomo alemán Max Wolf, cuando descubrió al primer asteroide Troyano en el punto L_4 , denominado 588 Achilles. Hasta julio de 2004 se conocían 1679 asteroides Troyanos, 1051 en L_4 y 628 en L_5 . Los telescopios espaciales han detectado asteroides del tipo Troyano muy pequeños, no observables con telescopios desde Tierra. El Troyano más grande es 624 Héctor, que mide 370×195 km. Sus órbitas están distribuidas a lo largo de curvas alargadas “forma de gota” como lo muestra la Figura 30, pág. 92. Sus movimientos son una combinación entre un periodo de 11,856525 años (Júpiter) y otro mas largo de 150 a 200 años.

Asteroides troyanos de Marte. El asteroide 5261 Eureka, descubierto el 20 de junio de 1990, es el primer asteroide troyano de Marte situado en el punto L_5 del sistema Sol-Marte. Desde entonces se han descubierto cuatro asteroides troyanos de este planeta, el último llamado 2007 NS2, fue descubierto por los astrónomos del Observatorio Astronómico de La Sagra, en Granada, España, en 2007. Es el tercer asteroide que ocupa el punto L_5 mientras que sólo uno, 1999 UJ7, esta en L_4 . Basándose en su brillo se estima su tamaño en un kilómetro de diámetro. El asteroide 2007 NS2 fue detectado en viejas imágenes de 1998, esta circunstancia permitió calcular con mayor precisión su órbita.

Asteroides troyanos de Neptuno. Neptuno también tiene asteroides troyanos. El primero fue descubierto en 2001 llamado 2001 QR 322. El segundo es 2004 UP10 que orbita delante de Neptuno en el punto lagrangiano L_4 . En junio de 2006 se descubrieron tres nuevos asteroides troyanos de Neptuno.

Se recomienda consultar: **MNRAS**, 2004, vol. 347, N° 3, págs. 833-836.

Bulletin of the American Astronomical Society, 2006, Vol. 38, pág. 564.

¹ Geométricamente, la anulación de las derivadas parciales de $f(x,y)$ en (x_0,y_0) significa que en el punto $[x_0,y_0, f(x_0,y_0)]$ el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ es paralelo al plano $\{X,Y\}$; entonces, se dice que (x_0,y_0) es un *punto estacionario* si las derivadas primeras existen y son nulas.

Concepto físico: Estado estacionario es cuando el estado del sistema se mantiene constante después de haber soportado cualquier efecto gravitatorio transitorio.

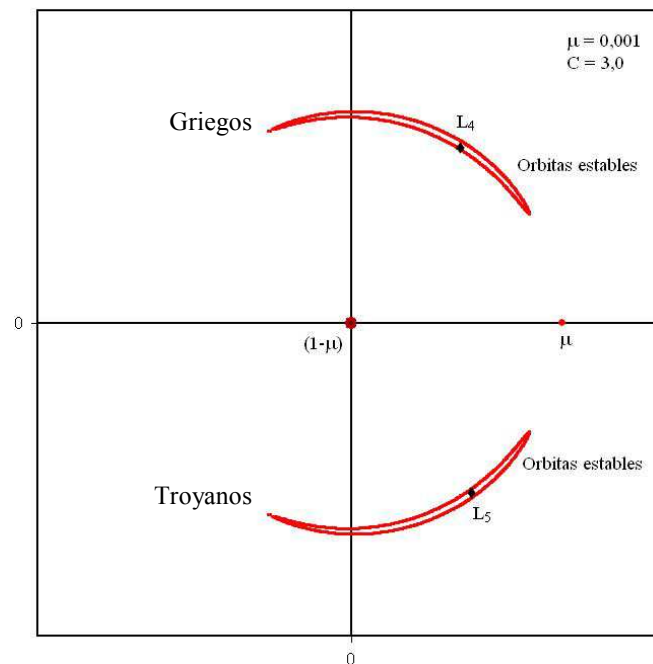


Fig. 30. Los asteroides con semieje mayor próximos a 5.2 UA son demonizados Griegos y Troyanos, tienen el mismo período orbital que Júpiter y se encuentran aproximadamente a 60° delante y detrás del planeta. Lagrange demostró que esta configuración orbital es estable, en primera aproximación. En el gráfico μ representa a Júpiter y $(1-\mu)$ al Sol; entorno de los puntos L_4 y L_5 orbitan esta clase de asteroides. $\mu \sim \mathcal{M}_{\text{Jupiter}}$. El origen del sistema el Sol.

Recomendamos los siguientes artículos:

Dvorak, R., Lhotka, C. et al. “The dynamics of inclined Neptune Trojans”. 2008, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 102, pág. 97-110.

Resumen: Investigaron zonas estables de asteroides troyanos ficticios en torno a los puntos de equilibrio de Lagrange de Neptuno en función del semieje mayor e inclinación. Analizaron la estabilidad de la región utilizando un mapa simpléctico del problema de tres cuerpos restringido circular y elíptico plano. El modelo dinámico para la integración numérica fue el sistema solar exterior con el Sol y los planetas Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. Para comprender la dinámica de la región en torno a L_4 y L_5 con los troyanos de Neptuno utilizaron ocho diferentes modelos dinámicos (desde el problema restringido elíptico hasta el sistema solar exterior completo con todos los planetas gigantes) y se compararon los resultados con respecto a la amplitud y la forma de la región estable. Se analiza la relación con las inclinaciones iniciales ($0^\circ < i < 70^\circ$) de las órbitas de los troyanos para los ocho modelos y mostraron la influencia primaria de Urano.

Nesvorný, D. and Dones, L.; “How Long-Lived Are the Hypothetical Trojan Populations of Saturn, Uranus, and Neptune?”, *Icarus*, Vol. 160, Issue 2, pag. 271-288.

Kortenkamp, S. J., Malhotra, R. and Michtchenko, T. “Survival of Trojan-type companions of Neptune during primordial planet migration”, *Icarus*, Vol. 167, Issue 2, pag. 347-359.

Capítulo 5

Una aplicación de las ecuaciones canónicas.

§ 5.1 Introducción y conceptos.

Aplicaremos los conceptos físicos y matemáticos de las ecuaciones canónicas al problema de dos cuerpos y luego al de n cuerpos.

La mayoría de los textos de Mecánica Analítica dedican capítulos al desarrollo de la dinámica de Lagrange y de Hamilton, a las ecuaciones canónicas, al método de Hamilton-Jacobi para abordar los problemas dinámicos, a la teoría de las transformaciones, etc.¹. Un estudio detallado sobre estos temas está fuera del alcance de este manuscrito, sin embargo, debido a su importancia y aplicación a la dinámica del Sistema Solar, daremos una breve reseña de sus principales propiedades. Recomendamos consultar los siguientes textos:

Arnold, V. I.; 1978, “*Mathematical Methods of Celestial Mechanics*”.

Boccaletti, D. & **Pucacco**, G.; 2004, “*Theory of Orbits*”.

Pollard, H.; 1966, “*Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*”.

Plummer, A. C.; 1960, “*An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*”.

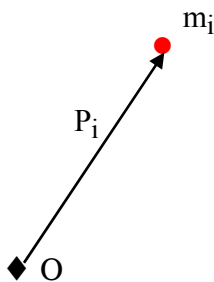
Smart, W. M.; 1953, “*Celestial Mechanics*”.

Sterne, T. E.; 1960, “*An Introduction to Celestial Mechanics*”.

Stiefel, E. L. & **Scheifele**, G.; 1971, “*Linear and Regular Celestial Mechanics*”.

Si indicamos con P_i el vector posición del punto masa m_i respecto de un origen arbitrario O , en un sistema de coordenadas inercial entonces, como hemos estudiado², las ecuaciones diferenciales de movimiento del problema de n cuerpos se pueden escribir de la forma,

$$m_i \ddot{P}_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = U_{P_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$



donde U la función potencial, depende sólo de las masas m_i y de los vectores de posición P_i . En particular, si se considera solamente dos cuerpos, cuyas masas son m_0 y m_1 respectivamente, las ecuaciones diferenciales del movimiento de una masa cualquiera respecto de la otra, en coordenadas cartesianas, tienen la forma:

¹ **Goldstein**, H.; 2006, “*Mecánica Clásica*”, Capítulos 8, 9, 10, 11.

Marion, J.B.; 2003; “*Dinámica clásica de las partículas y sistemas*”, Capítulo 7.

² Consultar § 3.2. págs. 29-32.

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{r^3} x = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{\mu}{r^3} y = 0$$

$$\ddot{z} + \frac{\mu}{r^3} z = 0$$

donde, $\mu = k^2 (m_0 + m_1)$, k constante de la gravitación de Gauss ¹; $\{x,y,z\}$ coordenadas cartesianas de m_1 respecto de m_0 y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Entonces, el sistema anterior de ED admite la forma:

$$\ddot{x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{r} \right), \quad \ddot{y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{r} \right), \quad \ddot{z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{r} \right) \quad (5.1)$$

La energía cinética T del sistema tiene la expresión,

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right)$$

Si definimos, $\dot{x} = X$, $\dot{y} = Y$, $\dot{z} = Z$, entonces T toma la forma:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (X^2 + Y^2 + Z^2)$$

por lo tanto, $\dot{x} = \frac{\partial T}{\partial X}$, $\dot{y} = \frac{\partial T}{\partial Y}$, $\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial Z}$; además, puesto que U sólo depende de las coordenadas

(x,y,z) resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial U}{\partial Z} = 0,$$

luego, podemos escribir

$$\dot{x} = \frac{\partial (T - U)}{\partial X}, \quad \dot{y} = \frac{\partial (T - U)}{\partial Y}, \quad \dot{z} = \frac{\partial (T - U)}{\partial Z}.$$

Definimos una nueva función, $H = T - U$ entonces, las ecuaciones anteriores toman la forma:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial X}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial Y}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial Z} \quad (5.2)$$

Por otra parte, si reemplazamos la función potencial, definida como $U = -\frac{\mu}{r}$, en las tres ecuaciones

(5.1), resulta,

¹ El valor de la constante gravitacional de Gauss $k = 0,01720209895$, si se eligen las siguientes unidades: la unidad de distancia es una UA, una masa del Sol como unidad de masa y 1 día = 86400 seg. como unidad de tiempo.

$$\ddot{x} = \dot{X} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \dot{Y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \dot{Z} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Además, la energía cinética T es función únicamente de las componentes de las velocidades entonces se tiene,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

luego, podemos escribir las siguientes igualdades:

$$\dot{X} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{Y} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{Z} = -\frac{\partial H}{\partial z} \quad (5.3)$$

En consecuencia, las seis ecuaciones diferenciales de primer orden (5.2) y (5.3) forman un sistema equivalente a las ED de segundo orden (5.1), correspondiente al problema de dos cuerpos; es decir, las ED de primer orden (5.2) y (5.3) son semejantes a las ecuaciones de movimiento (5.1) y se las denomina *ecuaciones canónicas de Hamilton*¹.

Resumiendo. El sistema de ecuaciones,

$$\ddot{x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{r} \right), \quad \ddot{y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{r} \right), \quad \ddot{z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{r} \right) \quad (5.4)$$

representa el movimiento relativo de dos cuerpos, en un sistema de coordenadas inercial. Si definimos la función, $H = T - U$, denominada *Hamiltoniano*, la cual depende de las coordenadas $\{x,y,z\}$ y de las componentes de la velocidad $\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$ y no del tiempo explícitamente, podemos entonces reemplazar el sistema de ED de segundo orden (5.4) por el siguiente sistema de ED de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial X}, & \dot{X} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial Y}, & \dot{Y} &= -\frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial Z}, & \dot{Z} &= -\frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Matemáticamente significa que hemos reemplazado tres ED de segundo orden (5.4) por seis ED de primer orden (5.5); los dos sistemas de ecuaciones son equivalentes, pues ambos requieren, para su solución, seis constantes arbitrarias.

¹ **Hamilton, William Rowan** (1805-1865), matemático y astrónomo británico, conocido sobre todo por sus trabajos en análisis vectorial y en óptica. Nació en Dublín, estudio en el Trinity College. En 1827, sin haber obtenido su título, fue nombrado Profesor de Astronomía, y al año siguiente Astrónomo Real. Hamilton pasó el resto de su vida trabajando en el Trinity College y en el Observatorio de Dunsink, cerca de Dublín. En el campo de la dinámica, introdujo las funciones de Hamilton, que expresan la suma de las energías cinética y potencial en un sistema dinámico, muy importante en el desarrollo y estudio de la teoría cuántica. Descubrió una forma matemática de operar pares de números reales. Esas reglas se usan en la actualidad para los números complejos. Descubrió los cuaterniones, antecesores de los vectores. Su obra monumental acerca de este tema es, "*Tratado sobre cuaterniones*", publicada en 1853.

Generalización para n cuerpos. Consideremos un sistema dinámico de n partículas respecto de un sistema de coordenadas inercial, cada una de ellas está definida por su masa m_i , sus coordenadas cartesianas $\{x_i, y_i, z_i\}$, y sus momentos: $m_i (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$, donde $i = 1, 2, \dots, n$; si representamos las coordenadas $\{x_1, y_1, z_1\}; \{x_2, y_2, z_2\}; \dots; \{x_n, y_n, z_n\}$ por: $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3n}$, y la cantidad de movimiento ¹: $m_1 v_1, m_2 v_2, \dots, m_n v_n$, por las expresiones: p_1, p_2, \dots, p_n , entonces nos quedan definidas nuevas variables: q_k y p_n donde $k = 1, 2, \dots, 3n$; las q_k representan las *coordenadas generalizadas* del sistema de n partículas y las cantidades p_n los *momentos conjugados generalizados*, ambas definiciones corresponden a las Mecánicas Lagrangiana y Hamiltoniana. Luego, las nuevas variables son:

$$\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_k\} \Rightarrow \text{coordenadas generalizadas; } (k = 1, 2, \dots, 3n)$$

$$\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\} \Rightarrow \text{momentos generalizados; } (n \text{ numero de partículas}).$$

Conceptos: Un concepto fundamental en la dinámica es el *punto material* o *partícula*, i.e., un cuerpo cuyas dimensiones pueden despreciarse cuando se describe su movimiento, esta posibilidad depende de las condiciones físicas del problema. Es por ello que se pueden considerar a los planetas como puntos materiales al estudiar su movimiento alrededor del Sol, pero no cuando se considera la rotación alrededor de su eje. La posición de un punto material en el espacio Euclidiano está determinada por su vector posición \mathbf{r} , cuyas componentes coinciden con sus coordenadas cartesianas x, y, z ; su velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \mathbf{r}'$. Por lo tanto, para definir la posición de n puntos materiales en el espacio \mathcal{R}^3 es necesario conocer n vectores de posición i.e., $3n$ coordenadas. En general, el número de “magnitudes independientes” que determinan, en forma unívoca, la posición de un sistema de puntos masa se denomina *número de grados de libertad* del sistema. En este caso el número de grados de libertad es $3N$. Estas magnitudes no son necesariamente las coordenadas cartesianas del punto; la elección del sistema de coordenadas depende, en general, de las condiciones físicas del problema. Luego, k magnitudes cualesquiera q_1, q_2, \dots, q_k definen completamente la posición de un sistema, con k grados de libertad, se denominan *coordenadas generalizadas* y sus derivadas q'_k *velocidades generalizadas*.

Por lo tanto, podemos resumir que en toda *formulación Lagrangiana* ², se utiliza el concepto de coordenadas y momentos generalizados ². Hasta ahora hemos estudiado los problemas dinámicos empleando explícitamente coordenadas cartesianas. Un sistema de n partículas, exento de ligaduras (o vínculos) ², tiene $3n$ coordenadas independientes o grados de libertad. Si existen ligaduras holónomas, expresadas por k ecuaciones, podemos utilizar éstas para eliminar k de las $3n$ coordenadas, restando por lo tanto, $(3n - k)$ coordenadas independientes que se pueden expresar introduciendo $(3n - k)$ nuevas variables independientes, representadas por: $q_1, q_2, \dots, q_{3n-k}$.

La formulación Lagrangiana nos permite reemplazar las ecuaciones de movimiento (segunda ley de Newton), donde están representadas las fuerzas y aceleraciones que actúan sobre cada partícula, cantidades vectoriales, por ecuaciones diferenciales donde sólo son utilizadas funciones escalares, como la energía cinética T y la energía potencial V.

¹ La *cantidad de movimiento lineal* se la representa por $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$; es un vector por ser \mathbf{v} un vector.

² Consultar: **Arnold**, V.I.; 1988, “*Dynamical Systems III*”, Capítulo 1. **Goldstein**, H.; 2006, “*Mecánica Clásica*”, Capítulo 1. **Landau**, L. D. & **Lifshitz**, E. M.; 2002, “*Mecánica*”, Capítulo 1.

La energía cinética en un sistema de n partículas, tiene la expresión:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

y, en función de los momentos generalizados p_j resulta,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{p_j^2}{m_j}$$

donde $k = n$ ¹; luego, la energía cinética T es una función cuadrática homogénea respecto de los p_j . Asimismo, la energía potencial U es función, únicamente, de las coordenadas generalizadas q_i , i.e.,

$$U = U(q_i)$$

Por lo tanto, las ecuaciones canónicas (5.5) para un sistema de n partículas, tienen la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde los q_i representan las coordenadas generalizadas, los p_i los impulsos generalizados ($i = 1, \dots, k$) y la función H el Hamiltoniano definido como $H = T - U$; donde $H = H[q_i(t), p_i(t)]$. Este sistema de ED de primer orden representa el movimiento de n cuerpos con k grados de libertad. El Hamiltoniano H, en un sistema conservativo, representa la energía total h del sistema dinámico y es igual a la energía cinética mas la energía potencia; donde $U = -\mu / r$.

Consideremos la ecuación de *Lagrange*², la cual tiene la expresión:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} = 0 \tag{5.7}$$

donde $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$; $i = 1, 2, \dots, n$.

La función L es el *Lagrangeano* del sistema, una función escalar que sólo contiene a q_i y \dot{q}_i ; nos indica que el estado dinámico del mismo esta completamente definido por sus coordenadas y velocidades. Si se conoce el Lagrangeano del sistema dinámico entonces, las ecuaciones (5.7) constituyen una relación entre las aceleraciones, las velocidades y las coordenadas es decir, representan las ecuaciones de movimiento del sistema de n partículas.

¹ Si no existen relaciones de vínculo o ligaduras entre las partículas, un sistema de n partículas tiene 3n grados de libertad.

² Goldstein, H.; 2006, "*Mecánica Clásica*", Cáp. 1 y 2.

Analicemos el teorema de *Hamilton-Jacobi*¹ según el cual, la solución del sistema de ecuaciones canónicas de Hamilton (5.6) es “un problema equivalente” al de resolver una EDP de primer orden. Hemos visto que la función de Hamilton está definida en términos de las coordenadas y momentos generalizados i.e., $H = T - U \equiv H(t, p_i, q_i)$ por lo tanto, la ecuación de Hamilton-Jacobi tiene la expresión,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) = 0 \quad (5.8)$$

donde $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$. En general, es una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden y de segundo grado. Supongamos que hemos hallado una *integral* de esta EDP, de la forma

$$S = S(t, q_i, \alpha_i) \quad (5.9)$$

Entonces, ésta función es, por definición, una *integral completa* de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi (5.8) y recibe el nombre de *función principal de Hamilton*.

El método canónico aplicado a un problema dinámico tiene por objeto estudiar transformaciones en sistemas de ecuaciones diferenciales. La finalidad de estas transformaciones es introducir cambios de variables, para transformar el sistema en uno más simple, a partir del cual es posible obtener una solución aplicando métodos analíticos elementales.

NOTA: La función (5.9) no es la única forma posible de solución de la ED (5.8); la expresión más general de la solución contiene una o más funciones arbitrarias en vez de constantes arbitrarias; por lo tanto, no existe, necesariamente, una única solución de la forma (5.9); entonces, puede haber varias soluciones completas para la ecuación dada. No obstante, lo importante en el desarrollo que sigue, es que exista una solución única². La integración de la ecuación (5.8) sólo nos da la dependencia de las coordenadas antiguas y el tiempo ya que, no es explícita la relación de S con las nuevas variables del movimiento, esta dependencia no se ha especificado aún y solo sabemos que han de ser constantes. Sin embargo, la “naturaleza de la solución” nos indica como hay que seleccionar las nuevas p_i ³.

La teoría de los sistemas dinámicos, en general sistemas conservativos y en particular los sistemas Hamiltonianos, tienen un rol muy importante en los *procesos dinámicos en general*, especialmente en las aplicaciones de la mecánica; la estructura fundamental es por lo general la Hamiltoniana la cual elimina efectos adicionales. La mecánica Hamiltoniana adquiere importancia a partir del siglo XVIII principalmente en Mecánica Celeste. Recomendamos los siguientes textos:

Arnold, V.I.; 1978, “*Mathematical Methods of Classical Mechanics*”, Ed. Springer-Verlag.

Arnold, V.I., **Kozlov**, V.V., **Neihstadt**, A.I.; 1988, “*Mathematical aspects of Classical and Celestial Mechanics*”, Ed. Springer-Verlag.

¹ **Goldstein**, H.; 2006, “*Mecánica Clásica*”, Cap. 10. **Arnold**, V.I.; 1988, “*Dynamical Systems III*”, pág. 124.

² **Courant**, R. & **Hilbert**, D.; 1962, “*Methods of Mathematical Physics*”. Vol. II, pág. 24-28.

³ **Goldstein**, H.; 2006, “*Mecánica Clásica*”, Capítulo 10, pág. 533-588.

MacKay, R.S., Meiss, J.D.;1987, “*Hamiltonian Dynamical Systems*”, a reprint selection Adam Hilger, IOP Publ.

Rasband, S.N.; 1990, “*Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*”, Ed. John Wiley

Las derivadas parciales de la función S con respecto a q_i definen los impulsos generalizados p_i , ver (5.8); además, si definimos

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \quad (5.10)$$

obtenemos un sistema de $2k$ ecuaciones con $2k$ funciones y $2k$ constantes arbitrarias; de la forma:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i} \\ \beta_i &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \end{aligned}$$

Entonces, este sistema nos permite determinar los q_i y p_i en función del tiempo y $2k$ constantes arbitrarias; vamos a demostrar que el sistema de $2k$ funciones, es decir, un sistema de la forma

$$\begin{cases} q_i = \varphi(t, \alpha_j, \beta_j) \\ p_i = \Phi(t, \alpha_j, \beta_j) \end{cases} \quad (5.11)$$

satisface el sistema canónico de Hamilton ¹ con solamente una hipótesis, a saber: que los impulsos generalizados (p_i) no sean dependientes, i.e., que el Jacobiano de los impulsos respecto de los α_j y β_j no sea idénticamente nulo. Para ello diferenciamos en forma total el sistema (5.10), resulta:

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j} \dot{q}_j \quad (5.12)$$

La derivada de β_i es nula (¿porqué?), i.e., $d\beta_i = 0$; además $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j} \equiv \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \right)$, pero

hemos visto que $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$, por lo tanto

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} = \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i};$$

entonces, el sistema de ecuaciones (5.12) toma la forma:

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i} \dot{q}_j \quad (5.13)$$

¹ Recomendamos dos textos muy clásicos en Mecánica Celeste:

Brouwer, D. & Clemence, G.M.; 1961, “*Methods of Celestial Mechanics*”, Capítulo XVII, pág. 530.

Szebehely, V.; 1967, “*Theory of Orbits*”, Capítulo 6 y 7.

Además, la integral completa (5.9) satisface idénticamente a la ecuación de Hamilton-Jacobi (5.8), entonces derivando respecto de α_i , se tiene:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (5.14)$$

como las coordenadas generalizadas q_i son funciones del tiempo y los impulsos generalizados p_i se los puede reemplazar en función de las α_i y β_i , podemos restar miembro a miembro (5.13) de (5.14), entonces resulta:

$$\sum_j \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i} = 0$$

si definimos $\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = X_j$, la suma anterior admite el siguiente desarrollo en serie de la forma:

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_i} X_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_i} X_2 + \frac{\partial p_3}{\partial \alpha_i} X_3 + \dots + \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i} X_k = 0$$

dado que el subíndice i toma los valores $i = 1, 2, \dots, k$, resulta un sistema de k ecuaciones algebraicas homogéneas con k incógnitas, cuya solución no trivial implica que el determinante de los coeficientes sea distinto de cero, por lo tanto

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_k} & \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_k} & \dots & \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_k} \end{vmatrix} = \frac{\partial (p_1 p_2 p_3 \dots p_k)}{\partial (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k)} \neq 0$$

Luego, si el determinante de los coeficientes no es idénticamente nulo significa que la única solución posible es: $X_1 = X_2 = X_3 = \dots = X_k = 0$; entonces resulta $\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0$, en consecuencia

se cumple que: $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, es decir, se verifica la primera de las igualdades (5.6).

Consideremos ahora el sistema de ecuaciones $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$, donde $i = 1, 2, \dots, k$, el cual define los impulsos generalizados; derivando respecto del tiempo t , donde S es reemplazado por la integral completa (5.9), resulta:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j$$

También podemos derivar la ecuación de Hamilton-Jacobi, (5.8), con respecto a los q_i , después de reemplazar en ella por la integral completa, resulta

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i}$$

restando miembro a miembro estas dos ecuaciones se tiene,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j - \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i}$$

Vamos a demostrar que los dos últimos sumandos son nulos; para ello recordemos que:

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \Rightarrow \frac{\partial p_j}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i}$$

Reemplazando en la primera suma, se tiene

$$\sum_j \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \dot{q}_j - \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i}$$

Además, hemos demostrado que $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$; por lo tanto, $\sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j - \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \equiv 0$

luego,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Con lo cual se prueba la validez del sistema de ecuaciones canónicas (5.6). La importancia de este sistema de ecuaciones es que nos permite resolver un conjunto de problemas relacionado con el tema de las perturbaciones planetarias.

Resumen: Un sistema de ecuaciones diferenciales es canónico si tiene la forma ¹

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_i}$$

La función F es el Hamiltoniano del sistema; el orden del sistema es 2n y tiene n grados de libertad.

¹ Landau, D.L. & Lifshitz, E.M.; 2002, "Mecánica", Vol. 1. pág. 177.

Brouwer, D. & Clemence, G.M.; 1961, "Methods of Celestial Mechanics", pág. 530,

§ 5.2 Aplicación al problema de dos cuerpos.

Consideremos un sistema dinámico formado por k puntos masa donde las fuerzas actuantes derivan de un potencial. Como hemos estudiado, el movimiento de los cuerpos puede ser descrito en coordenadas generalizadas, q_1, q_2, \dots, q_n ; entonces decimos que el sistema tiene n grados de libertad si no existen relaciones de vínculo (o ligaduras) entre las coordenadas.

En esta sección ilustraremos el método de Hamilton-Jacobi aplicado al problema de dos cuerpos (movimiento no perturbado).

El Hamiltoniano en el problema de dos cuerpos está definido por ¹,

$$H = T - U = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r}$$

donde $\mu = G (m_0 + m_1)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; r es la distancia de m_0 a m_1 .

Expresemos la ecuación de Hamilton en coordenadas esféricas $\{r, L, \lambda\}$, ver Figura 31, pág.103; donde

$$\begin{aligned} x &= r \cos L \cos \lambda \\ y &= r \cos L \sin \lambda \\ z &= r \sin L \end{aligned}$$

si derivamos, elevamos al cuadrado y sumamos resulta: $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2 \cos^2 L + r^2 \dot{L}^2$ luego, la energía cinética T tiene la forma

$$T = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2 \cos^2 L + r^2 \dot{L}^2).$$

Entonces, en este caso, las coordenadas generalizadas son:

$$q_1 = r, \quad q_2 = \lambda, \quad q_3 = L,$$

y los impulsos generalizados correspondientes:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}}, \quad p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{L}}, \quad (\text{¿porqué?})$$

por lo tanto,

$$p_1 = \dot{r}, \quad p_2 = r^2 \cos^2 L \dot{\lambda}, \quad p_3 = r^2 \dot{L},$$

luego, la energía cinética T tiene la forma:

$$T = \frac{1}{2} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2 \cos^2 L} + \frac{p_3^2}{r^2} \right)$$

¹ Si el Hamiltoniano H no contiene explícitamente el tiempo entonces, $H = \text{constante} = h$, i.e., *la energía total del sistema*.

² G es la constante de la gravitación universal; su valor es $G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. En el Sistema Solar la constante de la gravitación Gaussiana es $k = 0,01720209895$ en las unidades: UA, masa del Sol y día solar medio. m_0 y m_1 masa de los planetas.

Expresión que representa la energía cinética del problema de dos cuerpos en función de los impulsos generalizados en coordenadas polares.

La Figura 31 muestra las coordenadas polares (r, L, λ) y su relación con los elementos angulares que definen la órbita no perturbada.

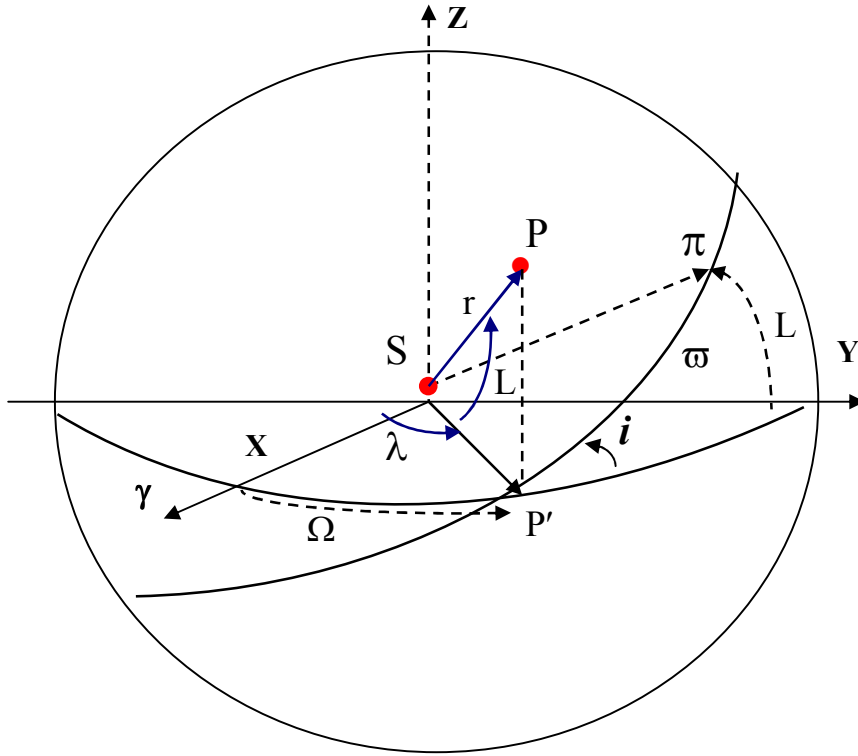


Fig. 31. $\{ r, L, \lambda \}$ coordenadas polares del planeta P respecto del Sol. γ la dirección al punto vernal. Ω nodo ascendente respecto de γ . i inclinación. π perihelio y ϖ longitud del perihelio se mide a partir de γ , donde $\gamma P' = \Omega$; $P'\pi = \omega$ y arco $\gamma P'\pi = \varpi$. $m_0 = M_{\text{Sol}}$ y m_1 masa del planeta P.

Entonces, el Hamiltoniano H toma la forma: $H = T - U = \frac{1}{2}(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2 \cos^2 L} + \frac{p_3^2}{r^2}) - \frac{\mu}{r}$; y

reemplazando en la ecuación (5.8) pág. 98 resulta,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2 \cos^2 L} + \frac{p_3^2}{r^2}) - \frac{\mu}{r} = 0 \tag{5.15}$$

Expresión que representa la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente al problema de dos cuerpos en coordenadas esféricas, la cual nos permite integrar las ecuaciones de movimiento. Como H no es una función explícita del tiempo, es posible efectuar una separación de variables; entonces, si recordamos que $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$, podemos escribir:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 L} \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial L} \right)^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\mu}{r} = 0 \quad (5.16)$$

Fórmula que simboliza la ecuación de Hamilton-Jacobi, cuya integral “completa”¹ deseamos hallar.

Si suponemos que $\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha_1$ y además, como los coeficientes de las derivadas parciales no contienen la coordenada λ entonces, podemos escribir:

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3 \lambda + S_1(r, L)$$

reemplazando en la ecuación (5.16) las derivadas de S respecto de r, λ y L, resulta

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{r^2 \cos^2 L} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial L} \right)^2 \right] - \alpha_1 - \frac{\mu}{r} = 0$$

separando las variables se tiene,

$$\frac{\alpha_3^2}{\cos^2 L} + \left(\frac{\partial S_1}{\partial L} \right)^2 = 2r^2 \left[\alpha_1 + \frac{\mu}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 \right]$$

Además, si suponemos que $S_1 = S_2(L) + S_3(r)$, podemos escribir el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 L} + \left(\frac{\partial S_2}{\partial L} \right)^2 &= \alpha_2^2 \\ 2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \left(\frac{\partial S_3}{\partial r} \right)^2 &= \frac{\alpha_2^2}{r^2} \end{aligned} \quad (5.17)$$

la última ecuación se puede escribir como:

$$\alpha_1 + \frac{\mu}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_3}{\partial r} \right)^2 = \frac{\alpha_2^2}{2r^2}.$$

De la primera ecuación de (5.17) se obtiene

$$\frac{\partial S_2}{\partial L} = \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 L}}$$

e integrando en ambos miembros resulta:

¹ El concepto de “integral completa” se refiere a una integral primera del movimiento, expresión analítica que permanece constante durante el mismo es decir, para todo t.

$$S_2 = \int_0^L \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 L}} \, dL$$

Del mismo modo, de la segunda ecuación de (5.17) se tiene,

$$\frac{dS_3}{dr} = \sqrt{2\alpha_1 + 2\frac{\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}, \text{ integrando resulta } \Rightarrow S_3 = \int_{r_1}^r \sqrt{2\alpha_1 + 2\frac{\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} \, dr,$$

por lo tanto, si el integrando: $2\alpha_1 + 2\frac{\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} = 0$, representa una ecuación algebraica de segundo grado en r , i.e., $2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2 = 0$, la cual tiene dos raíces reales; luego, si r_1 es la distancia del planeta al Sol cuando éste pasa por su perihelio, i.e.,

$$r_1 = a(1 - e)$$

entonces, podemos aplicar las formulas (5.10) pág. 99, de la Teoría de Hamilton-Jacobi, obteniendo el siguiente sistema de EDP:

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}, \quad \beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3},$$

donde la función S tiene el siguiente desarrollo:

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3 \lambda + \int_0^L \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 L}} \, dL + \int_{r_1}^r \sqrt{2\alpha_1 + 2\frac{\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} \, dr \quad (5.18)$$

Evaluación de las variables α_i .

Consideremos la ecuación algebraica $2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2 = 0$, donde las raíces r_1 y r_2 representan las distancias mínima y máxima del planeta al Sol, por lo tanto: $r_1 = a(1 - e)$ y $r_2 = a(1 + e)$; la ecuación algebraica se puede escribir de la forma,

$$r^2 + \frac{2\mu}{2\alpha_1} r - \frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1} = 0$$

donde los coeficientes satisfacen las relaciones entre las raíces r_1 y r_2 , por lo tanto se cumple que:

$$r_1 + r_2 = 2a = -\frac{2\mu}{2\alpha_1} = -\frac{\mu}{\alpha_1}$$

$$r_1 \cdot r_2 = a^2(1 - e^2) = \frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1}$$

Teniendo en cuenta estas dos igualdades es posible obtener α_1 y α_2 , resulta:

$$\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$$

Luego, sólo nos resta determinar el valor de α_3 .

Si aplicamos la fórmula (5.10) y la definición de S, ver (5.18), podemos hallar β_1 , entonces se tiene:

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \int_{r_1}^r \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} \right) dr - \frac{dr_1}{d\alpha_1} \left[\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} \right]_{r=r_1}$$

El último término es nulo, ¿porque?; por lo tanto se deduce:

$$\beta_1 = -t + \int_{r_1}^r \frac{2}{2\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} dr$$

ecuación que permite obtener el valor de β_1 ; entonces, si $r = r_1$, resulta $\beta_1 = -[t]$, luego:

$$\beta_1 = -[t], \text{ para } (r = r_1).$$

NOTA. La elección de los elementos orbitales depende del gusto personal y del problema astronómico a considerar ¹. En particular cuando la excentricidad es pequeña ($e \rightarrow 0$) el argumento del perihelio ω queda indeterminado, ó si la inclinación es casi nula ($i \rightarrow 0$) la longitud del nodo ascendente Ω no esta definida por lo tanto, es conveniente elegir otras cantidades para definir los elementos de la orbita. Sea $\varepsilon = \varpi + \chi$, donde $\varpi = \omega + \Omega$, y $\chi = -n t$, luego, $\varepsilon = \varpi - n t$ y por tanto, $n t + \varepsilon - \varpi = 0$ entonces resulta,

$$t = \frac{\varpi - \varepsilon}{n}.$$

Donde ε es la *longitud media de la época*, ϖ la *longitud del perihelio* y n el *movimiento medio*.

En consecuencia, el valor de $\beta_1 = \frac{\varepsilon - \varpi}{n}$, para $r = r_1$.

Cálculo de β_3 . Por definición

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \lambda + \int_0^L \frac{\left(\frac{-\alpha_3}{\cos^2 L} \right)}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 L}}} dL.$$

¹ López García, F.; 2004, "Dinámica del Sistema Solar", pág. 58.

Desarrollando el integrando se tiene,

$$\beta_3 = \lambda - \int_0^L \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 L}}} dL$$

si hacemos $L = 0$, resulta: $\beta_3 = \lambda$; además, si $L = 0$ implica $\lambda \equiv \Omega$, ver Figura 31, entonces se obtiene,

$$\beta_3 = \Omega.$$

Donde Ω representa la *longitud del nodo ascendente*.

Cálculo de β_2 . De la relación (5.10) obtenemos β_2 , luego

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \int_0^L \frac{2 \alpha_2}{2 \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 L}}} dL + \int_{r_1}^r \frac{\left(-\frac{2 \alpha_2}{r^2}\right)}{2 \sqrt{2 \alpha_1 + \frac{2 \mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} dr$$

Hemos analizado que la ultima integral es nula si $r_1 = a(1 - e)$, i.e., la menor distancia del planeta al Sol ó la distancia al perihelio, por lo tanto:

$$\beta_2 = \int_0^L \frac{2 \alpha_2}{2 \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 L}}} dL$$

En esta integral el radicando del denominador debe ser positivo (porqué ?), luego, $\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} \leq \cos^2 L$.

Además, para todos los puntos de la órbita se verifica $\cos^2 L \leq \cos^2 i$, ver Figura 31, entonces resulta: $-i \leq L \leq i$, y por tanto: $\alpha_3^2 = \alpha_2^2 \cos^2 i$, luego: $\alpha_3 = \alpha_2 \cos i$, reemplazando en el radicando de β_2 se tiene:

$$\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 L} = \alpha_2^2 - \frac{\alpha_2^2 \cos^2 i}{\cos^2 L} = \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 L} (\cos^2 L - \cos^2 i) \geq 0.$$

sustituyendo en la expresión para β_2 se obtiene:

$$\beta_2 = \int_0^L \frac{\alpha_2}{\frac{\alpha_2}{\cos L} \sqrt{\cos^2 L - \cos^2 i}} dL = \int_0^L \frac{d(\sin L)}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 L}} \quad 1$$

¹ Tener presente la relación trigonométrica: $\cos^2 L + \sin^2 L = 1$, $\cos^2 i + \sin^2 i = 1$ luego, $\cos^2 L = 1 - \sin^2 L$ y $\cos^2 i = 1 - \sin^2 i$ por lo tanto $\cos^2 L - \cos^2 i = \sin^2 i - \sin^2 L$. Además, $\cos L dL = d(\sin L)$.

El integrado se puede escribir de la forma:

$$\frac{d(\operatorname{sen} L)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 i - \operatorname{sen}^2 L}} = \frac{d\left(\frac{\operatorname{sen} L}{\operatorname{sen} i}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 L}{\operatorname{sen}^2 i}}}$$

Por lo tanto, la integral se resuelve en forma directa,

$$\beta_2 = \int_0^L \frac{d(\operatorname{sen} L)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 i - \operatorname{sen}^2 L}} = \int_0^L \frac{d\left(\frac{\operatorname{sen} L}{\operatorname{sen} i}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 L}{\operatorname{sen}^2 i}}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{\operatorname{sen} L}{\operatorname{sen} i} \right)$$

Entonces, teniendo en cuenta la Figura 31 (pág. 103), se deduce que: $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{\operatorname{sen} L}{\operatorname{sen} i} \right) = \varpi - \Omega = \omega$.

por ser: $\frac{\operatorname{sen} L}{\operatorname{sen} i} = \operatorname{sen}(\varpi - \Omega)$. Por lo tanto, resulta

$$\beta_2 = (\varpi - \Omega) \equiv \omega.$$

NOTA. La longitud del perihelio ϖ es la suma de la longitud del nodo ascendente Ω más el argumento del perihelio ω .

Resumen.

La formulación Hamiltoniana estudia el movimiento de un sistema dinámico en un intervalo de tiempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$, tal que la integral:

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n) = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

sea estacionaria, en el sentido que satisfacen las ecuaciones de *Euler* y *Lagrange*. Este enunciado es un principio fundamental de la dinámica, ya que contiene en forma simplificada las leyes de la mecánica; i.e., reemplaza la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$, y se fundamenta en tres razones matemáticas:

- i) Se supone que la fuerza $F(t, q, q')$ es función solo de q y admite un gradiente: $-V(q)$; de tal modo que, $F = F(q) = -dV(q)/dq$.
- ii) La variable velocidad q' se reemplaza por el momento $p = m q'$, luego $q' = p/m$
- iii) El Hamiltoniano del sistema dinámico se define como

$$H = H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$

Entonces, las ecuaciones de Hamilton tienen la forma:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \left(= \frac{p}{m} \right), \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \left(= -\frac{dV}{dq} \right).$$

donde, $p^2/2m$ es la energía cinética, $V(q)$ la energía potencial y H la energía total del sistema.

La *Mecánica Celeste Moderna* está íntimamente relacionada con la teoría de los sistemas Hamiltonianos. Actualmente, la mayoría de los estudios analíticos hacen un uso primordial de las técnicas de las perturbaciones aplicando el método de Hamilton; además, también se emplea en la correcta interpretación de los resultados de las simulaciones numéricas, los cuales requieren a menudo un buen conocimiento teórico de la dinámica del sistema. El uso de las variables canónicas es una herramienta poderosa para abordar distintos problemas en la *Mecánica Celeste Clásica* por ejemplo, el estudio de los sistemas dinámicos donde está presente el fenómeno de resonancia. La solución de las ecuaciones de *Hamilton-Jacobi* aplicando el método de separación de variables fue tratado, en forma muy extensa, en las memorias de **Hill**, **Poincaré**, **von Zeipel** y **Brouwer**.

Recomendamos los siguientes textos en idioma español:

Mahecha Gómez, J.; 2007, “*Mecánica clásica avanzada*”, Ed. Universidad de Antioquia.

Marion, J.B.; 2003, “*Dinámica clásica de las partículas y sistemas*”, Ed. Reverté. Capítulo 7 y 8.

Solé, R.V. & **Manrubia**, S.C.; 2001, “*Orden y caos en sistemas complejos. Aplicaciones*”, Ed. Universitat Politècnica de Catalunya. Cap. 17, pág. 565.

Yépez Mulia, E & **Yépez Martínez**, M.Y.; 2007, “*Mecánica Analítica*”, Ed. Universidad Nacional Autónoma de México.

§ 5.3 El método de variación de las constantes arbitrarias.

Introducción y conceptos.

Hemos estudiado en el ítem anterior el sistema de ecuaciones diferenciales canónicas de Hamilton, definidas como:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (5.19)$$

donde los q_i representan las coordenadas generalizadas y p_i los impulsos generalizados; el Hamiltoniano $H = T - U = H(t, q_i, p_i)$, es la energía total del sistema de partículas; el orden del sistema es $2k$ luego, el sistema tiene k grados de libertad. El conjunto de ED parciales (5.19) se resuelve si se conoce una integral completa S^1 , de la forma:

$$S = S(t, q_i, \alpha_i) \quad \alpha_i = K_i \text{ (const. arbitraria)}$$

solución de la ecuación diferencial de Hamilton-Jacobi: $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$, donde se supone que se han

reemplazado en H los impulsos generalizados $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ y precisamente, dicha solución resulta del

sistema de $2k$ ecuaciones obtenidas agregando a estas k ecuaciones diferenciales, las k ecuaciones que resultan de igualar las $\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$.

¹ También llamada “integral primera”.

Notar que estas dos ecuaciones permiten determinar p_i y q_i en función de las variables: t , α y β luego,

$$\begin{aligned}q_i &= \varphi_i(t, \alpha, \beta) \\ p_i &= \Phi_i(t, \alpha, \beta)\end{aligned}$$

NOTA: Recordar que $\alpha \equiv \alpha_i$ y $\beta \equiv \beta_i$.

Nos proponemos entonces, resolver el siguiente problema: supongamos primero que hemos hallado una solución del siguiente sistema de ecuaciones canónicas, de la forma ya especificada:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\tag{5.19}$$

entonces, nuestro propósito es hallar una solución al sistema de ED expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial (H - R)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial (H - R)}{\partial q_i}\end{aligned}\tag{5.20}$$

donde R es una función definida como $R = R(t, p, q)$.

Fundamentos del método. Dada una ecuación diferencial de orden superior con coeficientes constantes, el método de los *coeficientes indeterminados* es muy útil y recomendable para obtener una solución particular de la ED. Por el contrario, el método de *variación de las constantes* es adecuado para resolver ecuaciones lineales de orden superior con coeficientes variables.

Por lo tanto, la solución del sistema (5.20) requiere aplicar el método de *variación de las constantes arbitrarias*¹, el cual resulta muy adecuado para integrar ecuaciones diferenciales lineales con segundo miembro no nulo; en esencia el método es el siguiente:

Consiste en hallar una solución del sistema (5.20) la cual tiene la misma forma que la solución del sistema (5.19) pero, donde las constantes arbitrarias correspondientes a la solución del sistema (5.19) son ahora función de t a determinar es decir, si $q_i(t) = \varphi_i(t, \alpha, \beta)$ y $p_i(t) = \Phi_i(t, \alpha, \beta)$ son soluciones de (5.19) entonces, las soluciones de (5.20) tienen la forma,

$$\begin{aligned}q_i(t) &= \varphi_i[t, \alpha(t), \beta(t)] \\ p_i(t) &= \Phi_i[t, \alpha(t), \beta(t)]\end{aligned}\tag{5.21}$$

lo cual supone que las constantes α y β dependen de t . Calculemos primero las derivadas totales de $p_i(t)$ y $q_i(t)$ respecto de t y luego, reemplazamos las derivadas en el sistema (5.20), resulta:

¹ El método fue ideado por *Joseph Lagrange* en 1774.

Consultar: **Balanzat**, M.: 1977, "Matemática avanzada para la física", pág. 290. Ed. Eudeba.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{(v)} \left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_v} \frac{d\alpha_v}{dt} + \frac{\partial q_i}{\partial \beta_v} \frac{d\beta_v}{dt} \right] = \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial R}{\partial p_i}$$

y análogamente

$$\dot{p}_i = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_{(v)} \left[\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_v} \frac{d\alpha_v}{dt} + \frac{\partial p_i}{\partial \beta_v} \frac{d\beta_v}{dt} \right] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial q_i}.$$

En virtud del sistema de ecuaciones diferenciales (5.19) podemos escribir, $\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ y $\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, ya que $\frac{\partial q_i}{\partial t}$ y $\frac{\partial p_i}{\partial t}$ se calculan suponiendo que $\alpha = \beta = \text{constante}$; entonces, queda por demostrar:

$$\sum_{(v)} \left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_v} \dot{\alpha}_v + \frac{\partial q_i}{\partial \beta_v} \dot{\beta}_v \right] = -\frac{\partial R}{\partial p_i} \tag{5.22}$$

$$\sum_{(v)} \left[\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_v} \dot{\alpha}_v + \frac{\partial p_i}{\partial \beta_v} \dot{\beta}_v \right] = \frac{\partial R}{\partial q_i}$$

es decir, resulta un sistema de $2k$ ecuaciones diferenciales lineales con $2k$ incógnitas, a saber:

$$\left(\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3, \dots, \dot{\alpha}_k ; \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3, \dots, \dot{\beta}_k \right) \Rightarrow \left\{ \dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i \right\} \Rightarrow \text{incógnitas } (i = 1, \dots, k)$$

Este conjunto de variables representa las $2k$ incógnitas, cuya determinación y posterior integración nos permite conocer las constantes α y β en función de la variable t .

Es importante destacar que este sistema se puede resolver sin utilizar determinantes (porqué?). Para ello, si en la expresión que define R reemplazamos las funciones p y q por las ecuaciones (5.21), i.e., en función de las α y β , implica entonces que R también es función compuesta de dichas variables. Por lo tanto, es posible evaluar la derivada de R respecto de las α_j , resulta:

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_j} = \sum_{(\mu)} \left(\frac{\partial R}{\partial q_\mu} \frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial R}{\partial p_\mu} \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_j} \right)$$

Luego, si tenemos en cuenta el sistema (5.22) podemos calcular las derivadas de $\frac{\partial R}{\partial q_\mu}$ y $\frac{\partial R}{\partial p_\mu}$, entonces se tiene,

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_j} = \sum_{(\mu)} \left[\frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha_j} \sum_{(v)} \left(\frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_v} \dot{\alpha}_v + \frac{\partial p_\mu}{\partial \beta_v} \dot{\beta}_v \right) - \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_j} \sum_{(v)} \left(\frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha_v} \dot{\alpha}_v + \frac{\partial q_\mu}{\partial \beta_v} \dot{\beta}_v \right) \right]$$

Esta ecuación se puede escribir en forma abreviada, teniendo presente que las expresiones entre paréntesis son los Jacobianos ¹, por lo tanto resulta:

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_j} = \sum_{(v)} \left(\dot{\alpha}_v [\alpha_j \alpha_v] + \dot{\beta}_v [\alpha_j \beta_v] \right) \quad (5.23)$$

donde los corchetes tienen las expresiones:

$$[\alpha_j \alpha_v] = \sum_{(\mu)} \left(\frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha_j} \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_v} - \frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha_v} \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_j} \right) = \frac{\partial(q_\mu, p_\mu)}{\partial(\alpha_j, \alpha_v)} \quad (5.24)$$

$$[\alpha_j \beta_v] = \sum_{(\mu)} \left(\frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha_j} \frac{\partial p_\mu}{\partial \beta_v} - \frac{\partial q_\mu}{\partial \beta_v} \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_j} \right) = \frac{\partial(q_\mu, p_\mu)}{\partial(\alpha_j, \beta_v)} \quad (5.25)$$

Las ecuaciones (5.24) y (5.25) definen los “*famosos*” corchetes de Lagrange ², mediante los cuales podemos escribir:

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_j} = \sum_{(v)} \left(\dot{\alpha}_v [\beta_j \alpha_v] + \dot{\beta}_v [\beta_j \beta_v] \right) \quad (5.26)$$

Las ecuaciones (5.23) y (5.26) permiten calcular las variaciones de R respecto de las α_j y β_v . El siguiente paso es calcular los corchetes de Lagrange, para ello hacemos la siguiente consideración: si en la función $S = S(t, q, \alpha)$ reemplazamos los q por su expresión dada en (5.21) entonces, la función S toma la siguiente forma:

$$S = S[t, \varphi(t, \alpha, \beta), \alpha] = S'(t, \alpha, \beta)$$

por lo tanto, podemos calcular las derivadas de S' respecto de una cualquiera de las variables α_j ó β_j ,

$$\frac{\partial S'}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} + \sum_{(v)} \frac{\partial S}{\partial q_v} \frac{\partial q_v}{\partial \alpha_j}$$

$$\frac{\partial S'}{\partial \beta_j} = \sum_{(v)} \frac{\partial S}{\partial q_v} \frac{\partial q_v}{\partial \beta_j}$$

Pero hemos visto que, $\frac{\partial S}{\partial q_v} = p_v$, reemplazando en las ecuaciones anteriores resulta,

$$\frac{\partial S'}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} + \sum_{(v)} p_v \frac{\partial q_v}{\partial \alpha_j} \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial S'}{\partial \beta_j} = \sum_{(v)} p_v \frac{\partial q_v}{\partial \beta_j}$$

¹ En el cálculo vectorial, el jacobiano es una abreviación de la matriz jacobiana y su determinante es el Jacobiano; llamado así en honor al matemático Carl Gustav Jacobi.

² Se recomienda consultar: **McCuskey**, S.W.; 1963, “*Introduction to Celestial Mechanics*”, Cap. 6, págs. 128-142.

El sistema de ecuaciones (5.27) nos permite calcular los corchetes de Lagrange y además, vamos a demostrar que los mismos son nulos; i.e., $[\alpha_j, \alpha_v] = [\beta_j, \beta_v] = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} [\alpha_j, \alpha_v] &= \sum_{(\mu)} \left(\frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha_j} \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_v} - \frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha_v} \frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_j} \right) = \sum_{(\mu)} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_v} \left(p_\mu \frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(p_\mu \frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha_v} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_v} \sum_{(\mu)} p_\mu \frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_{(\mu)} p_\mu \frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha_v} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Teniendo en cuenta la primera de las ecuaciones (5.27), resulta

$$\sum_{(v)} p_v \frac{\partial q_v}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial S'}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}$$

y reemplazando en (5.28), se tiene

$$[\alpha_j, \alpha_v] = \frac{\partial}{\partial \alpha_v} \left[\frac{\partial S'}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\frac{\partial S'}{\partial \alpha_v} - \frac{\partial S}{\partial \alpha_v} \right] \equiv 0.$$

como se quería demostrar, entonces $[\alpha_j, \alpha_v] = 0$; del mismo modo podemos deducir $[\beta_j, \beta_v] = 0$; luego

$$[\alpha_j, \alpha_v] = 0$$

$$[\beta_j, \beta_v] = 0$$

Vamos a demostrar, a continuación, que los corchetes de Lagrange, $[\alpha_j, \beta_j] = -1$ y $[\alpha_j, \beta_v] = 0$.

Cálculo de,

$$[\alpha_j, \beta_v] = \sum_{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial \beta_v} \left(p_\mu \frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha_j} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(p_\mu \frac{\partial q_\mu}{\partial \beta_v} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial \beta_v} \sum_{(\mu)} p_\mu \frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_{(\mu)} p_\mu \frac{\partial q_\mu}{\partial \beta_v}$$

Si reemplazamos las sumas, por las expresiones dadas en el teorema anterior, ecuaciones (5.27) se tiene,

$$[\alpha_j, \beta_v] = \frac{\partial}{\partial \beta_v} \left(\frac{\partial S'}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{\partial S'}{\partial \alpha_v} \right) = -\frac{\partial}{\partial \beta_v} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \right) = -\frac{\partial \beta_j}{\partial \beta_\mu} = \begin{cases} 0 & j \neq v \\ -1 & j = v \end{cases}$$

entonces, $[\alpha_j, \beta_j] = -[\beta_j, \alpha_j] = -1$ y los restantes $[\alpha_j, \beta_v] \equiv 0$. Por lo tanto, reemplazando en las ecuaciones (5.5) y (5.8), deducimos que,

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_v &= \frac{\partial R}{\partial \beta_j} \\ \dot{\beta}_v &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_j}\end{aligned}\tag{5.29}$$

Sistema de ecuaciones diferenciales que representan la solución del sistema (5.22) es decir, la solución de Jacobi del problema de Lagrange aplicando la variación de las constantes arbitrarias.

Para un estudio más completo se recomienda:

Brouwer, D. & Clemente, G.; 1961, “*Methods of Celestial Mechanics*”, Cap. XI, pág. 273.

Roy, A.E.; 1978, “*Orbital Motion*”, Cap. 6, pág. 171.

Stiefel, E.L. & Scheifele, G.; 1971, “*Linear and regular Celestial Mechanics*”, Cap. IX, pág. 213.

Conceptos básicos del método: *Variación de las Constantes Arbitrarias*. En el problema de dos cuerpos los elementos orbitales no varían con el tiempo (porqué?). En consecuencia, las coordenadas y componentes de la velocidad nos permiten determinar, en forma unívoca, los seis elementos que definen la órbita en el espacio en un instante cualquiera. Por lo tanto, el número de cifras significativas de las coordenadas y componentes de la velocidad o de los seis elementos orbitales constituyen una base de datos que permiten fijar la órbita en el espacio, en cualquier instante, con cierta precisión.

La mayoría de los problemas dinámicos, relacionados con el movimiento de los cuerpos en el Sistema Solar tienen una característica común: que la aceleración producida por la atracción gravitacional del cuerpo principal es mucho mayor que la aceleración debida a una “perturbación” causada por otro cuerpo del sistema. Por ejemplo, en el caso de las órbitas planetarias la principal atracción es la que ejerce el Sol; en el caso del movimiento de un satélite natural la fuerza principal la ejerce el planeta; por lo tanto, es lógico considerar, en una primera aproximación, una órbita elíptica definida con respecto al Sol o a un planeta. Como el movimiento se realiza bajo la influencia de varios cuerpos que ejercen su atracción gravitacional, las coordenadas y componentes de la velocidad, en cualquier instante, pueden ser usadas para obtener un sistema de seis elementos orbitales. Estos son precisamente los elementos de la elipse que el cuerpo tendría si desde ese instante particular, las aceleraciones causadas por todos los “cuerpos perturbadores” dejan de actuar.

En el movimiento real i.e., cuando se consideran todos los cuerpos que integran el sistema dinámico, los elementos orbitales deducidos de las coordenadas y componentes de la velocidad, deben necesariamente variar con el tiempo. En vez de obtener directamente las coordenadas “perturbadas” mediante la solución de las ecuaciones diferenciales del movimiento, Ec. (3.2) pág. 30, es igualmente eficaz obtener primero los elementos orbitales en función del tiempo y luego, determinar las coordenadas a partir de los elementos orbitales hallados, aplicando las fórmulas básicas del movimiento elíptico.

Este es el fundamento de la aplicación del método de variación de las constantes arbitrarias en el problema de n cuerpos. Un procedimiento muy utilizado en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

En Mecánica Celeste este método es aplicado a un sistema de ecuaciones diferenciales de orden seis, el cual representa las ecuaciones de movimiento del cuerpo de masa m , escritas de la forma:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{x}}{r^3} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{x}}{r^3} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{x}}{r^3} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathbf{x}},$$

donde, $\mu = G (M_{\text{Sol}} + m)$ y \mathfrak{R} la función perturbadora. El segundo término del primer miembro, con signo cambiado, representa las componentes de la aceleración relativa producida por la masa central (Sol) situada en el origen de coordenadas. El segundo miembro representa las perturbaciones producidas por todas las otras fuerzas que afectan el movimiento (las perturbaciones son producidas por los otros cuerpos de masa m_i).

En el siguiente Capítulo “*Teoría Planetaria*” analizaremos y estudiaremos la forma analítica de resolver estas ecuaciones.

Capítulo 6

Teoría Planetaria.

§ 6.1 Evolución del conocimiento.

La Teoría Heliocéntrica afirma que la Tierra y los demás planetas giran alrededor del Sol; fue propuesta en la antigüedad por *Aristarco de Samos*, astrónomo y matemático griego, quien se basó en mediciones elementales en la distancia Tierra-Sol; determinando que el Sol tenía un tamaño mucho mayor que la Tierra. Por esta razón, Aristarco propuso que la Tierra giraba alrededor del Sol y no a la inversa, como sostenía la teoría geocéntrica de *Ptolomeo* e *Hiparco*, generalmente aceptada en esa época y en los siglos siguientes, acorde con la visión antropocéntrica imperante. Sin embargo, un milenio más tarde, en el siglo XVI, la teoría volvería a ser formulada, esta vez por *Nicolás Copérnico*, uno de los astrónomos más influyentes de la historia, con la publicación del libro *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, en 1543. La diferencia fundamental entre la propuesta de *Aristarco* en la antigüedad y la teoría de *Copérnico* es que éste último emplea cálculos matemáticos para sustentar su hipótesis. Precisamente a causa de este concepto, sus ideas marcaron el comienzo de lo que se conoce como la revolución científica, en el *Renacimiento*¹. No sólo hubo un cambio importantísimo en la astronomía, sino en las ciencias en general y particularmente en la cosmovisión de la civilización. A partir de la publicación de su libro y la refutación del sistema geocéntrico, defendido por la astronomía griega, la civilización rompe con la idealización del “saber irrefutable de la antigüedad” y comienza una nueva etapa, con mayor ímpetu, en busca del conocimiento científico.

Astrónomos de la antigüedad precursores de la Mecánica Celeste Clásica.

Heráclides Póntico (390 a. C.-310 a. C.)

Aristarco de Samos (310 a. C.-230 a. C.)

Claudio Ptolomeo (85-165)

Nicolás Copérnico (1473-1543)

Tycho Brahe (1546-1601)

Giordano Bruno (1548-1600)

Galileo Galilei (1564-1642)

Johannes Kepler (1571-1630)

¹ El **Renacimiento** es el nombre dado a un amplio movimiento cultural que se produjo en Europa Occidental en los siglos XV y XVI. Sus principales exponentes se hallan en el campo de las artes, aunque también se produjo una renovación en las ciencias, tanto naturales como humanas.

Comentario. El Renacimiento fue un movimiento espiritual de liberación, como si el hombre hubiese superado una etapa difícil, violenta, oscura en muchos aspectos e imprevistamente volviera a descubrir el Sol, la luz, los colores, la Naturaleza. Fue un movimiento en el cual las artes, la cultura, **las ciencias**, las letras, la propia vida de los pueblos experimentaran una revolución en busca de la Belleza y la Verdad. Las causas que lo motivaron fueron múltiples y diversas así como los factores que determinaron su aparición; algunos de tipo netamente material y otros, de índole religiosa o filosófica o científica. El concepto de propiedad individual fue la primera de las causas que permitieron la aparición de artistas y de pensadores.

§ 6.2 Teoría Planetaria ¹.

Consideremos un sistema de varios puntos masa m_i , e indiquemos con \mathbf{P}_i el vector posición de uno cualquiera de ellos en un sistema heliocéntrico, con origen en el Sol y denotemos con $\{x_i, y_i, z_i\}$ sus coordenadas cartesianas; ver Figura 32.

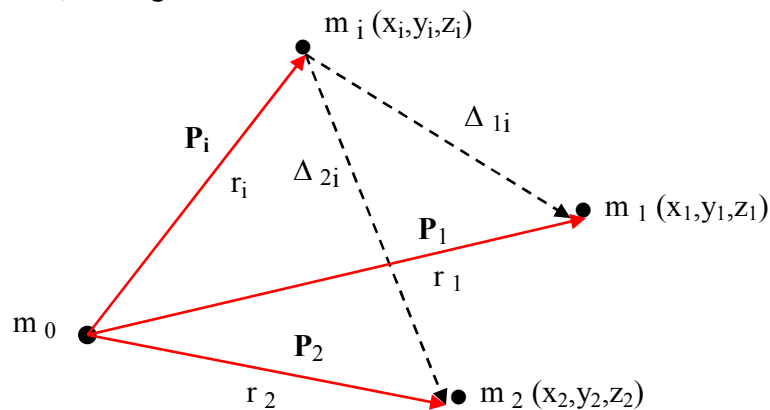


Fig. 32. En el Sistema Heliocéntrico el Sol (m_0) es el origen de coordenadas. La posición de los otros cuerpos m_i está referida a m_0 . \mathbf{P}_i es el vector posición de m_i respecto de m_0 , y r_i su módulo, $r_i = |\mathbf{P}_i|$. Donde, Δ_{ij} es la distancia mutua entre las masas m_j y m_i , $\Delta_{ij} = |\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j|$, ($i \neq j$).

NOTA: No todos los vectores \mathbf{P}_i deben ser necesariamente coplanares.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento del cuerpo m (cualquiera) en coordenadas relativas son:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\mu}{r^3} x = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \ddot{y} + \frac{\mu}{r^3} y = \frac{\partial R}{\partial y} \\ \ddot{z} + \frac{\mu}{r^3} z = \frac{\partial R}{\partial z} \end{cases} \quad (6.1)$$

¹ Consultar: **Brouwer**, D. & **Clemente**, G.M.; 1961, "Methods of Celestial Mechanics", pág. 398.

Brumberg, V.H.; 1974, "An Iterative Method of General Planetary Theory", págs. 139-155. En "The Stability of the Solar System and of Small Stellar System", Editor Kozai, Ed. D. Reidel.

Moulton, F.R.; 1970, "An Introduction to Celestial Mechanics", Capítulo IX y X.

donde, $\mu = k^2 (m_0 + m)$, $r_1 = |P_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $r_2 = |P_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$, etc.

$$\Delta_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}, \quad \Delta_2 = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2}, \text{ etc.}$$

y la función perturbadora R,

$$R = k^2 m_1 \left[\frac{1}{\Delta_1} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r_1^3} \right] + k^2 m_2 \left[\frac{1}{\Delta_2} - \frac{x x_2 + y y_2 + z z_2}{r_2^3} \right] + \dots$$

Además, la función potencial $U = \frac{\mu}{r}$ y la energía cinética $T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ definen la función de Hamilton $H = T - U$, la cual es función de las coordenadas y componentes de la velocidad.

Representamos las coordenadas (x, y, z) por (q_1, q_2, q_3) y sus velocidades $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ por (p_1, p_2, p_3) , entonces se verifica que¹:

$$\dot{q}_1 = \dot{x} = p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial p_1} = \frac{\partial (T - U)}{\partial p_1} = \frac{\partial (H - R)}{\partial p_1}$$

luego,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial (H - R)}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.2)$$

Análogamente, de la primera ecuación de movimiento de m, sistema (6.1), se obtiene

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial R}{\partial q_1} - \frac{\mu}{r^3} x = \frac{\partial R}{\partial q_1} + \frac{\partial \left(\frac{\mu}{r} \right)}{\partial x} = \frac{\partial (R - U)}{\partial q_1} = \frac{\partial (R - T + U)}{\partial q_1}$$

$$\dot{p}_1 = - \frac{\partial (H - R)}{\partial q_1},$$

luego,

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial (H - R)}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.3)$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales (6.1), que define el movimiento del cuerpo m, es equivalente a las seis ecuaciones canónicas (6.2) y (6.3); en otras palabras, las coordenadas y velocidades generalizadas del punto masa m satisfacen las ecuaciones (6.2) y (6.3) las cuales sustituyen a las ecuaciones (6.1)².

¹ Consultar: Ecuación (5.20) pág. 110.

² Consultar: "The Stability of the Solar System and Small Stellar Systems". IAU Symposium 62, 1974. Págs. 1-10 (J. Moser) y 139-156 (V.A. Brumberg). Y. Kozai (Ed.), D. Reidel Publishers.

Si la función perturbadora R es nula significa que todas las masas $m_i = 0$ (excepto m_0) entonces, el movimiento se reduce a un problema de dos cuerpos, el cual está definido por el sistema de ecuaciones diferenciales ¹:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\mu}{r^3} x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{\mu}{r^3} y = 0 \\ \ddot{z} + \frac{\mu}{r^3} z = 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

cuya solución hemos obtenido en forma cerrada ², dada por las expresiones:

$$\begin{aligned} x &= x(t, a, e, \varepsilon, \Omega, \varpi, i) \\ y &= y(t, a, e, \varepsilon, \Omega, \varpi, i) \\ z &= z(t, a, e, \varepsilon, \Omega, \varpi, i) \end{aligned}$$

donde las variables x, y, z son funciones del tiempo t y de seis constantes de integración que definen la forma de la órbita. Es el método clásico de resolver el sistema de ED (6.4) ³.

También, hemos resuelto este sistema aplicando el método de Jacobi, cuya solución se expresa de la forma:

$$\begin{aligned} q_i &= \varphi_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ p_i &= \Phi_i(t, \alpha_j, \beta_j) \end{aligned}$$

consultar Ec. (5.11) pág. 99; donde q_i y p_i son las coordenadas y momentos generalizados, para $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3$.

Además hemos hallado, ver § 5.2 (pág. 102), las relaciones entre las constantes α_i y β_i y los elementos elípticos, dichas expresiones son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\mu}{2a}, & \alpha_2 &= \sqrt{\mu a (1 - e^2)}, & \alpha_3 &= \alpha_2 \cos i \\ \beta_1 &= \frac{\varepsilon - \varpi}{n}, & \beta_2 &= \varpi - \Omega, & \beta_3 &= \Omega \end{aligned} \quad (6.5)$$

También hemos estudiado que si se conoce la solución del sistema (6.1) para $R = 0$, es posible hallar la solución del mismo problema para $R \neq 0$ (movimiento perturbado) empleando el método de *variación de las constantes arbitrarias de Lagrange*, el cual consiste en suponer que la solución del sistema (6.2) y (6.3) tiene la misma forma que la solución del sistema (6.1) [con $R = 0$] pero, donde las cantidades α_i y β_i en vez de ser constantes son funciones de la variable t entonces, la solución de los sistemas (6.2) y (6.3) es de la forma

$$\begin{aligned} q_i &= \varphi_i[t, \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)] \\ p_i &= \Phi_i[t, \alpha_j(t), \beta_j(t)] \end{aligned}$$

¹ Consultar ecuación (5.1), pág. 94.

² Consultar Capítulo 1.

³ Consultar: **Murray, C.D. & Dermott, S. F.**; 2001, "Solar System Dynamics", Capítulo 2.

para $i = 1,2,3$; y por tanto, las funciones $\alpha_i(t)$ y $\beta_i(t)$ quedan determinadas por el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{\alpha}_i(t) = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i(t) = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}$$

cuyo desarrollo es:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = \frac{\partial R}{\partial \beta_1} & \dot{\beta}_1 = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} \\ \dot{\alpha}_2 = \frac{\partial R}{\partial \beta_2} & \dot{\beta}_2 = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} \\ \dot{\alpha}_3 = \frac{\partial R}{\partial \beta_3} & \dot{\beta}_3 = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_3} \end{cases} \quad (6.6)$$

Sistema de ecuaciones diferenciales que define la teoría planetaria de Lagrange. Como en la práctica no se determinan las variables α_i y β_i sino los elementos elípticos del planeta entonces, es conveniente transformar este sistema en otro donde las incógnitas sean precisamente los elementos elípticos.¹

§ 6.3 Ecuaciones Planetaria de Lagrange.

Conceptos básicos. Hemos estudiado en el problema de dos cuerpos, que las coordenadas y componentes de la velocidad, en cualquier instante, permiten determinar un sistema único de seis elementos orbitales, los cuales definen la forma de la órbita y no varían con el tiempo. Por lo tanto, los elementos así obtenidos se conservan y el número de cifras significativas obtenidas para cada elemento permanece constante.

En la mayoría de los problemas analizados, el movimiento de los cuerpos en el Sistema Solar tiene una característica común: la aceleración causada por la atracción del cuerpo de mayor masa es la más importante respecto de las aceleraciones producidas por los otros miembros del Sistema sobre el cuerpo en consideración, denominadas “perturbaciones”. En las órbitas planetarias, la principal fuerza de atracción la ejerce el Sol; en el caso del movimiento de un satélite natural la principal fuerza es ejercida por el primario (planeta) y en un satélite artificial el primario es la Tierra. Por lo tanto, es lógico considerar una órbita elíptica descrita respecto del Sol o del primario, como una primera aproximación al movimiento; entonces, como éste se realiza bajo la influencia de los distintos cuerpos de atracción que conforman el Sistema, las coordenadas y componentes de la velocidad en cualquier instante pueden ser usadas para obtener un conjunto de seis elementos orbitales. Estos son precisamente los elementos de la órbita del cuerpo que tendría si en este instante particular las aceleraciones causadas por todos los cuerpos “perturbadores” dejan de actuar. Por lo tanto, en el movimiento real ² los elementos orbitales obtenidos a partir de las coordenadas y componentes de la velocidad deben necesariamente variar con el tiempo. Entonces, en vez de obtener directamente las “coordenadas perturbadas” mediante la solución de las ecuaciones diferenciales del movimiento es equivalente obtener primero los elementos orbitales en función del tiempo.

¹ Consultar: **Fitzpatrick, R.**; 2012, “*An Introduction to Celestial Mechanics*”, Ed. Cambridge University Press.

² Donde intervienen todos los cuerpos del Sistema.

Por lo tanto, las coordenadas del cuerpo perturbado se pueden calcular utilizando los elementos orbitales hallados, aplicando las fórmulas standard del problema de dos cuerpos en el movimiento elíptico ¹.

Teniendo en cuenta el sistema de ecuaciones (6.5), el cual relaciona α_v y β_v con los elementos orbitales, podemos expresar estos elementos en función de los α_v y β_v , entonces resulta:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\mu}{2\alpha_1}, & \Omega &= \beta_3, \\ e^2 &= 1 - \frac{\alpha_2^2}{\mu \left(-\frac{\mu}{2\alpha_1}\right)} = 1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}, & \varpi &= \beta_2 + \beta_3 \\ \cos i &= \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, & \varepsilon &= \sqrt{\frac{\frac{\mu}{-\mu^3}}{8\alpha_1^3}} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde $\mu = n^2 a^3$.

El siguiente paso es aplicar las formulas (6.6), pero previamente debemos conocer las derivadas de los elementos canónicos las cuales se obtienen de las expresiones (6.7), luego se tiene:

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\mu}{2a} \right) = \frac{\mu}{2a^2} \dot{a} = \frac{n^2 a^3}{2a^2} \dot{a} = \frac{n^2 a}{2} \dot{a} = \frac{\partial R}{\partial \beta_1}$$

Pero $\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_1} = n \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$, reemplazando resulta $\frac{n^2 a}{2} \dot{a} = n \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$, por lo tanto:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$$

Expresión que representa la primera de las ecuaciones diferenciales de la teoría de Lagrange ².

NOTA. El coeficiente de β_1 en la fórmula de ε , (6.7), es: $\sqrt{\frac{\frac{\mu}{-\mu^3}}{8\alpha_1^3}} = \sqrt{n^2} = n$, ya que $\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}$.

De la segunda ecuación del sistema (6.5) resulta $\alpha_2^2 = \mu a (1 - e^2)$, entonces derivando se tiene:

$$2\alpha_2 \dot{\alpha}_2 = \mu \dot{a} (1 - e^2) - 2\mu a e \dot{e}$$

¹ Consultar: **McCuskey**, S.W.; 1963, "Introduction to Celestial Mechanics", Cap. 3, pág. 38.

² **Roy**, A. E.; 1978, "Orbital Motion", págs. 171-177.

Luego,

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{\mu(1-e^2)}{2\alpha_2} \dot{a} - \frac{\mu a}{\alpha_2} \dot{e} = \frac{n^2 a^3 (1-e^2)}{2\sqrt{n^2 a^4 (1-e^2)}} \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{n^2 a^4 e}{\sqrt{n^2 a^4 (1-e^2)}} \frac{de}{dt}$$

simplificando resulta,

$$\dot{\alpha}_2 = \sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt}$$

De acuerdo a la segunda ecuación diferencial del sistema (6.6) se tiene, $\dot{\alpha}_2 = \frac{\partial R}{\partial \beta_2}$ por lo tanto,

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_2} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_2} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} \frac{\partial \varpi}{\partial \beta_2}$$

teniendo en cuenta la sexta y cuarta ecuación del sistema (6.7) resulta, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_2} = 1$, $\frac{\partial \varpi}{\partial \beta_2} = 1$; luego,

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{\partial R}{\partial \beta_2} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} = \sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt}$$

en consecuencia,

$$\frac{de}{dt} = \frac{-\frac{\partial R}{\partial \varpi} - \left(1 - \sqrt{1-e^2}\right) \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}}{\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}}$$

operando algebraicamente, resulta

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \sqrt{1-e^2} \frac{\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right)}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

Expresión que representa la segunda ecuación de la teoría planetaria de Lagrange.

Si sustituimos $e = \text{sen } \varphi$, la expresión anterior toma la forma:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\text{cotg } \varphi}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \text{cotg } \varphi \frac{2 \text{sen } \varphi/2}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

De la fórmula $\alpha_3 = \alpha_2 \cos i$, obtenida de la tercera ecuación de (6.5), derivando resulta

$$\dot{\alpha}_3 = \dot{\alpha}_2 \cos i - \alpha_2 \text{sen } i \frac{di}{dt}$$

Reemplazamos α_2 y $\dot{\alpha}_2$ por sus expresiones calculadas anteriormente se tiene:

$$\dot{\alpha}_3 = \left(\sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{n a^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt} \right) \cos i - \sqrt{\mu a (1-e^2)} \operatorname{sen} i \frac{di}{dt}$$

De acuerdo a la tercera ecuación del sistema (6.6) resulta,

$$\dot{\alpha}_3 = \frac{\partial R}{\partial \beta_3} = \frac{\partial R}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_3} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} \frac{\partial \varpi}{\partial \beta_3} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_3}$$

Entonces, igualando ambas expresiones se obtiene,

$$\left[\sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{n a^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt} \right] \cos i - \sqrt{\mu a (1-e^2)} \operatorname{sen} i \frac{di}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

donde las derivadas, $\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_3} = \frac{\partial \varpi}{\partial \beta_3} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_3} \equiv 1$, de acuerdo al sistema (6.7). El siguiente paso consiste

en reemplazar $\frac{de}{dt}$ por su desarrollo obtenido, ver “segunda ecuación de la teoría planetaria de Lagrange”, i.e.,

$$\frac{de}{dt} = - \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \sqrt{1-e^2} \frac{(1-\sqrt{1-e^2})}{n a^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$$

luego, sustituyendo esta derivada en la igualdad anterior, resulta:

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \sqrt{1-e^2} \cos i \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{n a^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \cos i \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\sqrt{1-e^2} (1-\sqrt{1-e^2})}{n a^2 n} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right] - \sqrt{\mu a (1-e^2)} \operatorname{sen} i \frac{di}{dt}.$$

agrupando y simplificando, se deduce:

$$n a^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i \frac{di}{dt} = \left[\sqrt{1-e^2} \cos i + (1-\sqrt{1-e^2}) \cos i - 1 \right] \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + (\cos i - 1) \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{\partial R}{\partial \Omega}$$

Despejando $\frac{di}{dt}$ se obtiene,

$$\frac{d i}{d t} = \frac{(\cos i - 1) \left[\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right]}{n a^2 \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} i} - \frac{1}{n a^2 \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}.$$

Y teniendo en cuenta relaciones trigonométricas, finalmente resulta:

$$\frac{d i}{d t} = \frac{-\operatorname{tang} \frac{i}{2}}{n a^2 \sqrt{1 - e^2}} \left[\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right] - \frac{1}{n a^2 \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}$$

Expresión que define la tercera ecuación de la teoría planetaria de Lagrange; notar que la variación de la inclinación respecto del tiempo depende de $\operatorname{tang}(i/2)$ y del $\operatorname{sen}(i)$, por lo tanto existen puntos singulares para $i = 0$ y π .

NOTA: $(\cos i - 1) = -2 \operatorname{sen}^2 \frac{i}{2}$; $\operatorname{sen} i = 2 \cos \frac{i}{2} \operatorname{sen} \frac{i}{2}$; luego,

$$\frac{(\cos i - 1)}{\operatorname{sen} i} = \frac{-2 \operatorname{sen}^2 \frac{i}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{i}{2} \cos \frac{i}{2}} = -\operatorname{tang} \frac{i}{2}.$$

Consideremos ahora los segundos miembros del sistema (6.6), pág.121, la primera ecuación es,

$$\dot{\beta}_1 = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_1},$$

donde $\beta_1 = \frac{\varepsilon - \varpi}{n}$, entonces $\dot{\beta}_1 = \frac{(\dot{\varepsilon} - \dot{\varpi}) n - (\varepsilon - \varpi) \dot{n}}{n^2} = \frac{(\dot{\varepsilon} - \dot{\varpi}) n - (\varepsilon - \varpi) \dot{n}}{\frac{\mu}{a^3}}$

recordar que $\dot{n} = -\frac{3}{2} \sqrt{\mu} a^{-5/2} \dot{a}$, reemplazando resulta

$$\dot{\beta}_1 = \frac{(\dot{\varepsilon} - \dot{\varpi}) n - (\varepsilon - \varpi) \frac{3}{2} n a^{3/2} a^{-5/2} \dot{a}}{n^2} = \frac{(\dot{\varepsilon} - \dot{\varpi})}{n} + \frac{3}{2} \frac{(\varepsilon - \varpi)}{n a} \dot{a}.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta las ecuaciones (6.7), vemos que α_1 esta relacionado con los siguientes elementos orbitales: a , e y ε , luego

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial R}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial R}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_1}$$

Cálculo de las derivadas de los elementos a , e y ε respecto de α_1 . Consideremos nuevamente el sistema (6.7), de la primera ecuación se tiene:

$$a = -\frac{\mu}{2\alpha_1}, \text{ luego } \frac{da}{d\alpha_1} = \frac{\mu}{2\alpha_1^2};$$

teniendo en cuenta la segunda ecuación

$$e^2 = 1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}, \text{ derivando resulta } \frac{de}{d\alpha_1} = \frac{\alpha_2^2}{\mu^2 e};$$

y finalmente, $\varepsilon = \sqrt{\frac{\mu}{-\mu^3}} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, luego $\frac{d\varepsilon}{d\alpha_1} = -\frac{12\alpha_1^2}{\mu\sqrt{-8\alpha_1^3}} \beta_1$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = \frac{\mu}{2\alpha_1^2} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\alpha_2^2}{\mu^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{12\alpha_1^2}{\mu\sqrt{-8\alpha_1^3}} \beta_1 \frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

Luego,

$$\dot{\beta}_1 = \frac{(\dot{\varepsilon} - \dot{\omega})}{n} + \frac{3}{2} \frac{(\varepsilon - \omega)}{na} \dot{a} = \frac{(\dot{\varepsilon} - \dot{\omega})}{n} + \frac{3}{2} \frac{(\varepsilon - \omega)}{na} \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = \frac{12\alpha_1^2}{\mu\sqrt{-8\alpha_1^3}} \beta_1 \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{\mu}{2\alpha_1^2} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\alpha_2^2}{\mu^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}$$

Entonces resulta,

$$\frac{(\dot{\varepsilon} - \dot{\omega})}{n} + \frac{3}{2} \frac{(\varepsilon - \omega)}{na} \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{12\alpha_1^2}{\mu\sqrt{-8\alpha_1^3}} \beta_1 \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{\mu}{2\alpha_1^2} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\alpha_2^2}{\mu^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}.$$

Donde el primer miembro representa $\dot{\beta}_1$ y el segundo miembro $-\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}$. Notar que en esta igualdad no

conocemos el valor de la derivada $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$; entonces, es conveniente calcular primero las derivadas de β_3

y β_2 , para ello tenemos en cuenta los sistemas (6.7) y (6.6) luego se obtiene:

$$\dot{\beta}_3 = \dot{\Omega} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_3}, \text{ pero } \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial R}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial \alpha_3} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2}} \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial R}{\partial i}$$

Por lo tanto, $\dot{\Omega} = \frac{1}{\alpha_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2}} \frac{\partial R}{\partial i} = \frac{1}{\alpha_2 \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i}$,

además, $\alpha_2 = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} = n a^2 \sqrt{1 - e^2}$, consultar (6.5); finalmente resulta,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{n a^2 \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i}.$$

Expresión que representa la variación respecto del tiempo del *nodo ascendente*, Ω . Notar que es inversamente proporcional al $\operatorname{sen} i$, por lo tanto para $i = 0$ no esta definido.

Cálculo de $\dot{\beta}_2$. Del sistema de ecuación (6.5), pág. 120, obtenemos $\beta_2 = \varpi - \Omega$, derivando respecto de t resulta,

$$\dot{\beta}_2 = \dot{\varpi} - \dot{\Omega} = \dot{\varpi} - \frac{1}{n a^2 \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i} = - \frac{\partial R}{\partial \alpha_2}.$$

De acuerdo a (6.7), pág. 122, obtenemos

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial R}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial R}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial \alpha_2} = \frac{2 \alpha_1 \alpha_2}{\mu^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\alpha_3}{\alpha_2^2} \frac{1}{\operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i};$$

Cálculo de $\frac{\partial e}{\partial \alpha_2}$. Recordemos que $e^2 = 1 - \frac{2 \alpha_1 \alpha_2^2}{\mu^2}$, derivando $2 e \frac{\partial e}{\partial \alpha_2} = \frac{4 \alpha_1 \alpha_2}{\mu^2}$ luego,

$$\frac{\partial e}{\partial \alpha_2} = \frac{2 \alpha_1 \alpha_2}{\mu^2 e}.$$

Para obtener $\frac{\partial i}{\partial \alpha_2}$ recordemos que $\alpha_3 = \alpha_2 \cos i$, entonces $\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \cos i$, derivando respecto de α_2

resulta, $-\frac{\alpha_3}{\alpha_2^2} = -\operatorname{sen} i \frac{\partial i}{\partial \alpha_2}$; luego, $\frac{\partial i}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{\operatorname{sen} i} \frac{\alpha_3}{\alpha_2^2}$, como se quería probar.

Por lo tanto, $\dot{\beta}_2 = \dot{\varpi} - \frac{1}{n a^2 \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i} = - \frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = - \frac{2 \alpha_1 \alpha_2}{\mu^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\alpha_3}{\alpha_2^2} \frac{1}{\operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i}$.

entonces, resulta: $\dot{\varpi} - \frac{1}{n a^2 \sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i} = - \frac{2 \alpha_1 \alpha_2}{\mu^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\alpha_3}{\alpha_2^2} \frac{1}{\operatorname{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i}$.

Y por tanto, se obtiene: $\dot{\varpi} = \frac{d\varpi}{dt} = \left[\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} - \frac{\alpha_3}{\alpha_2^2 \operatorname{sen} i} \right] \frac{\partial R}{\partial i} - \frac{2\alpha_1 \alpha_2}{\mu^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}$.

Finalmente, reemplazando las constantes α_2 , α_3 y μ por sus expresiones en función de los elementos elípticos, ver sistema de ecuaciones (6.5), resulta,

$$\dot{\varpi} = \frac{d\varpi}{dt} = \left[\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \right] \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e},$$

$$\dot{\varpi} = \frac{d\varpi}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} i} - \frac{\cos i}{\operatorname{sen} i} \right) \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e},$$

Luego, la variación de ϖ (*longitud del pericentro*) respecto del tiempo, tiene la expresión

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \operatorname{tang} \left(\frac{i}{2} \right) \frac{\partial R}{\partial i}.$$

Observar que para $i = \pi$ y $e \cong 1$, la igualdad no esta definida.

NOTA: $\frac{1}{\operatorname{sen} i} - \frac{\cos i}{\operatorname{sen} i} = \frac{1 - \cos i}{\operatorname{sen} i} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{i}{2}}{2 \cos \frac{i}{2} \operatorname{sen} \frac{i}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{i}{2}}{\cos \frac{i}{2}} = \operatorname{tang} \frac{i}{2}$.

Finalmente deduciremos la variación de la *longitud media de la época* ε ¹, $\frac{d\varepsilon}{dt}$. Para ello considere_ mos la relación $\beta_1 = \frac{\varepsilon - \varpi}{n}$, ver sistema (6.5) pág. 120; entonces, derivando en ambos miembros

resulta, $\dot{\beta}_1 = \frac{(\dot{\varepsilon} - \dot{\varpi})}{n} + \frac{3}{2} \frac{(\varepsilon - \varpi)}{na} \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{12 \alpha_1^2}{\mu \sqrt{-8 \alpha_1^3}} \beta_1 \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{\mu}{2 \alpha_1^2} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\alpha_2^2}{\mu^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}$,

consultar pág. 126. Luego,

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varpi} + n \left[\left(\frac{12 \alpha_1^2 \beta_1}{\mu \sqrt{-8 \alpha_1^3}} - 3 \frac{\varepsilon - \varpi}{n^2 a^2} \right) \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{\mu}{2 \alpha_1^2} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\alpha_2^2}{\mu^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \right]$$

¹ En el movimiento elíptico los elementos que definen la orbita son, generalmente, $\{a, e, i, \Omega, \omega, \text{tp}\}$ o su equivalente $\{a, e, i, \Omega, \varpi, \lambda_0\}$, donde λ_0 es la *longitud media* en el instante inicial. Otros parámetros orbitales son: *longitud verdadera* $w = \varpi + v$, y la *longitud media de la época* $\varepsilon = \varpi - nT$; donde T es la época.

Y reemplazando ϖ por su desarrollo, calculado anteriormente, resulta:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\text{tang}\left(\frac{i}{2}\right)}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + n \left[\left(3 \frac{\varepsilon - \varpi}{n^2 a^2} - 3 \frac{\varepsilon - \varpi}{n^2 a^2} \right) \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{2}{n^2 a} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{(1-e^2)}{n^2 a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \right].$$

Luego de simplificar y agrupar se obtiene,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{n^2 a} \frac{\partial R}{\partial a} + \sqrt{1-e^2} \frac{(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\text{tang}\left(\frac{i}{2}\right)}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}.$$

Expresión que representa la variación de la *longitud media de la época* en función de a, e, i .

Resumiendo: Las variaciones de los elementos elípticos $\{a, e, i, \Omega, \varpi, \varepsilon\}$ con respecto al tiempo, conociendo la función perturbadora R, son:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \sqrt{1-e^2} \frac{(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{-\text{tang}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left[\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right] - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \text{sen} i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \text{sen} i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \text{tang}\left(\frac{i}{2}\right) \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \sqrt{1-e^2} \frac{(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\text{tang}\left(\frac{i}{2}\right)}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Se recomienda consultar:

Brouwer, D. & Clemente, G. M.; 1961, “*Methods of Celestial Mechanics*”, Capítulo XI.

§ 6.4 Conceptos básicos del Método de Variación de las Constantes ¹.

Hemos analizado el movimiento de un planeta \mathbf{P} en torno del Sol, perturbado (en su órbita heliocéntrica) por un segundo planeta \mathbf{P}_1 , de masa m_1 . Entonces, la ecuación de movimiento del planeta \mathbf{P} , perturbado por \mathbf{P}_1 , tienen la expresión ², ver § 6.2,

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(M_{\text{Sol}} + m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = G m_1 \left(\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})}{\rho^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) \quad (6.9)$$

donde r y r_1 son los radios vectores heliocéntricos de los planetas \mathbf{P} y \mathbf{P}_1 respectivamente y ρ su distancia mutua:

$$\rho = [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) * (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})]^{1/2}.$$

G es la constante de la gravitación universal.

Además, la ecuación del movimiento heliocéntrico correspondiente al planeta \mathbf{P}_1 tiene la forma,

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + G(M_{\text{Sol}} + m_1) \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} = G m \left(\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{\rho^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (6.10)$$

Si suponemos, en primera aproximación, que los segundos miembros de las ecuaciones (6.9) y (6.10) son nulos, resulta entonces un problema de dos cuerpos, el cual sabemos resolver, consultar Capítulo 2. La solución para cada planeta es una órbita elíptica Kepleriana, no perturbada, respecto del Sol por lo tanto, cada órbita esta definida por sus seis elementos orbitales o constantes de integración.

También, hemos estudiado, Capítulo 2, que las coordenadas del planeta \mathbf{P} se pueden expresar en función de estos elementos orbitales y del tiempo, i.e.,

$$\begin{aligned} x &= f_1(a, e, i, \Omega, \omega, \tau, t) \\ y &= f_2(a, e, i, \Omega, \omega, \tau, t) \\ z &= f_3(a, e, i, \Omega, \omega, \tau, t) \end{aligned} \quad (6.11)$$

del mismo modo, las componentes de la velocidad del planeta \mathbf{P} se pueden formular:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{f}_1(a, e, i, \Omega, \omega, \tau, t) \\ \dot{y} &= \dot{f}_2(a, e, i, \Omega, \omega, \tau, t) \\ \dot{z} &= \dot{f}_3(a, e, i, \Omega, \omega, \tau, t) \end{aligned}$$

Expresiones similares corresponden al planeta \mathbf{P}_1 . Este análisis nos permite enunciar el siguiente método:

La solución del problema de dos cuerpos, Ecs. (6.4), requiere de seis constantes de integración que definen la forma de la órbita, en general una cónica. Además, si en el sistema dinámico está presente un tercer cuerpo o más, no es posible describir sus movimientos por cónicas que satisfaga las ED del movimiento, Ecs (6.1) (problema de n cuerpos). Porque?.

¹ Consultar: **Verhulst**, F.; 2000, “*Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*”; pág. 72,123,136.

Roy, A. E.; 1978, “*Orbital Motion*”; pág. 171-175.

² Masa del planeta m y masa del Sol M_{Sol} .

Sin embargo, las órbitas de los planetas alrededor del Sol continúan siendo elipses y su movimiento es Kepleriano no obstante, los elementos orbitales no son exactamente constantes, como en el problema de dos cuerpos, sino que sufren pequeñas variaciones con el tiempo llamadas *perturbaciones*; a pesar de ello, el movimiento sobre su órbita continúa siendo Kepleriano. El *método de variación de los parámetros*¹ supone que las constantes de integración en las ED del problema de dos cuerpos “son consideradas como variables” en la solución del problema perturbado. El método se basa en que la perturbación, en general, es pequeña y por tanto la función perturbadora, también lo es, ver Ecs. (6.8) pág. 129. Este método también se aplica para obtener la solución de problemas dinámicos similares.

El formulismo y la metodología fueron desarrollados íntegramente por *Lagrange* (1775) en su teoría planetaria y en las propiedades de los corchetes que llevan su nombre.

NOTA: Un desarrollo analítico del método y su aplicación se pueden hallar en:

McCuskey, S. W.; 1963, “*Introduction to Celestial Mechanics*”, Capítulo 6, págs.128-158.

Entonces, diferenciando las tres ecuaciones (6.11) resultan tres ED de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \quad (6.12)$$

donde α_i ($i = 1, \dots, 6$) representa cualquiera de los seis elementos orbitales. El método analítico y la formulación matemática fueron desarrollados en § 6.3 (pág. 121). Por lo tanto, las ecuaciones hasta ahora resueltas, problema de dos cuerpo, son las siguientes, Ecs. (6.4)²:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{r} = \nabla U_0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{r}_1 = \nabla_1 U_0' \quad (6.13)$$

donde el signo de derivada parcial, $\partial^2/\partial t^2$, indica que los elementos orbitales son constantes en las soluciones de estas ecuaciones. Estas soluciones representan las *órbitas osculadoras*³ de los dos planetas (no perturbados) y por tanto, en todo instante podemos suponer que:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \quad (6.14)$$

lo cual significa que los vectores velocidad, en el instante t , son conocidos diferenciando las formulas elípticas i.e., conservando constantes los valores instantáneos de los elementos orbitales como lo indica formalmente las expresiones (6.14). Entonces, la ecuación (6.12) toma la forma

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt} = 0 \quad (6.15)$$

expresiones similares para las variables y , z .

¹ Consultar: **MacMillan**, W. D.; 1936, “*Dynamics of Rigid Bodies*”, págs. 385-387.

² \mathbf{r} es el vector posición, función de las coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$. $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$.

³ Están en función o relacionadas con los *elementos osculadores*.

Por lo tanto, para cada planeta se tienen tres relaciones de la forma (6.15). El próximo paso es hallar la derivada, respecto de t , de la componente x en la ecuación (6.12), entonces resulta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \sum_{i=1}^6 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \right) \frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)$$

Operando se tiene:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{dx}{dt} \right) \frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)$$

Además, teniendo en cuenta (6.14) implica: $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t}$, luego,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento (6.9), del planeta \mathbf{P} , se puede escribir de la forma:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U = \nabla (U_0 + R) \quad (6.16)$$

$$\text{donde, } U_0 = G \frac{(M_{\text{Sol}} + m)}{r}; \quad R = G m_1 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{r \cdot r_1}{r_1^3} \right); \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Una expresión similar para el planeta \mathbf{P}_1 : $\ddot{\mathbf{r}}_1 = \nabla_1 U_1 = \nabla_1 (U_0' + R_1)$.

Entonces, la ecuación (6.16) admite la representación, en coordenadas cartesianas,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x},$$

y teniendo en cuenta, las ecuaciones (6.13), $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial U_0}{\partial x}$, podemos escribir que:

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad (6.17)$$

ecuaciones similares para las variables y , z .

Las ecuaciones (6.15) y (6.17)

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \frac{d \alpha_i}{d t} = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha_i} \frac{d \alpha_i}{d t} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

ídem para: y, \dot{y}, z, \dot{z} ; constituyen un sistema de seis ecuaciones diferenciales de primer orden el cual permite obtener la variación de los elementos elípticos respecto del tiempo, ver (6.8). *Lagrange*, en 1782, fue el primero en hallar esta transformación utilizando el *método de variación de los parámetros*.

El siguiente gráfico muestra el plano de la órbita del planeta **P** (no perturbado) y los elementos orbitales elípticos con respecto al Sol y al plano fundamental. Por lo tanto, la órbita esta determinada con respecto a un plano de referencia en este ejemplo la eclíptica. Los elementos orbitales corresponden a los elementos osculadores i.e., *no perturbados*.

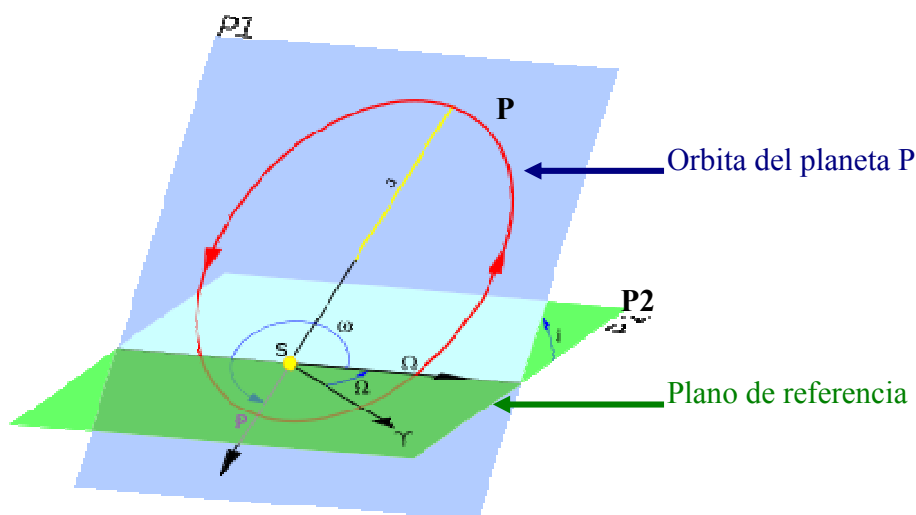


Gráfico. El plano P1 contiene la órbita de planeta **P** y P2 representa el plano de referencia. En el Sistema Planetario representa el plano de la eclíptica. Se indican los elementos elípticos de **P**. Consultar: http://es.wikipedia.org/wiki/Elementos_orbitales.

Nota histórica: El método de variación de los parámetros se remonta a los trabajos de Newton en su “Principia” al estudiar el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. Posteriormente el método fue usado por Jean Bernouilli en 1697 y por Euler en 1739 al analizar el movimiento oscilatorio considerando la ecuación $y'' + k^2y = f(t)$. Laplace escribió muchos artículos sobre este método, el cual fue desarrollado de forma completa por Lagrange en 1775.

Capítulo 7

*Desarrollo de la función perturbadora*¹.

§ 7.1 Conceptos generales.

Indiquemos con σ_i uno cualquiera de los elementos elípticos que definen la órbita del planeta de masa m ; las ecuaciones diferenciales que determinan la variación de estos elementos tienen la forma²,

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = F \left(\sigma_j, \frac{\partial R}{\partial \sigma_k} \right), \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (7.1)$$

siendo R , la función perturbadora, definida como:

$$R = G m_1 \left(\frac{1}{\Delta_1} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r_1^3} \right) + G m_2 \left(\frac{1}{\Delta_2} - \frac{x x_2 + y y_2 + z z_2}{r_2^3} \right) + \dots \quad (7.2)$$

Análogamente se pueden escribir las seis ecuaciones diferenciales de los elementos elípticos del planeta m_1 , perturbado en su movimiento por las masas m, m_2, m_3, \dots ; las seis ecuaciones del planeta m_2 , perturbado por las masas m, m_1, m_3 , etc. y así sucesivamente, ver Figura 32, pág.118. Entonces resultan ecuaciones similares a (7.1) y (7.2) para los n cuerpos.

Por simplicidad, en lo que sigue, vamos a considerar solamente tres cuerpos, a saber: el Sol, un planeta de masa m y un cuerpo perturbador m_1 ; en consecuencia, la función perturbadora se reduce a

$$R = G m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r_1^3} \right)$$

Para facilitar los desarrollos analíticos vamos a reemplazar m_1 por m' ; las coordenadas (x_1, y_1, z_1) por (x', y', z') y r_1 por r' . Los elementos elípticos del planeta m' están representados por σ'_i : $a', e', i', \Omega', \omega', \varepsilon'$, y sus seis ecuaciones diferenciales por la relación,

$$\frac{d\sigma'_i}{dt} = F' \left(\sigma'_j, \frac{\partial R'}{\partial \sigma'_k} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (7.3)$$

$$\text{donde, } R' = G m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x x' + y y' + z z'}{r'^3} \right). \quad (7.4)$$

¹ Consultar: Murray, C.D. & Dermott, S.F.; 2001, "Solar System Dynamics", Cap. 6.

² Consultar Ecuaciones (6.6) pág. 121 y (6.8) pág. 129.

Las dos funciones perturbadoras R y R' , tienen en común la *parte principal* $\frac{1}{\Delta}$; la designamos como $R_1 (= \frac{1}{\Delta})$, donde Δ es la distancia mutua entre m y m' ; ver Figura 33.

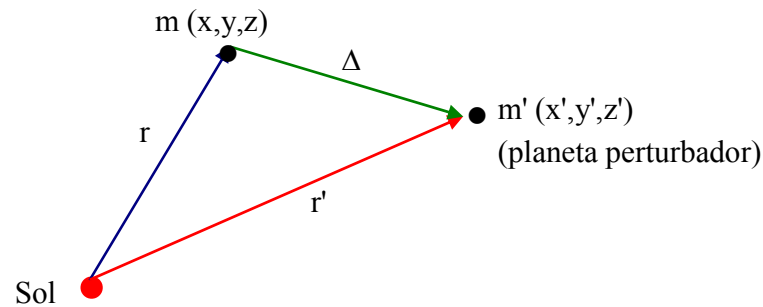


Fig. 33. Representación de la distancia mutua Δ entre los planetas m y m' . Origen el Sol.

Nos proponemos desarrollar la parte principal de la función perturbadora R_1 en series de potencias, lo cual nos permitirá obtener posteriormente las derivadas parciales que están presentes en las ecuaciones diferenciales (7.3) de los elementos elípticos. El ejemplo más simple es el estudio del movimiento de los satélites naturales. Para ello, consideremos el sistema Tierra-Luna-Sol¹, ver Figura 34.

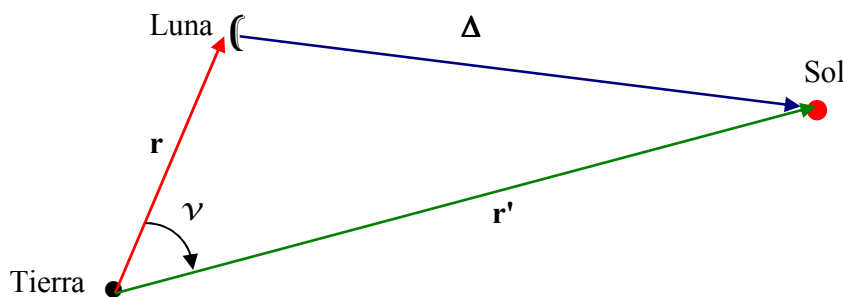


Fig. 34. Gráfico del sistema geocéntrico. La distancia mutua Luna-Sol es Δ y las distancias Tierra-Luna y Tierra-Sol son r y r' respectivamente. En este caso $\Delta \gg r$.

Representamos el movimiento de la Luna y del Sol en un sistema geocéntrico (origen en el centro de la Tierra); la distancia mutua Δ entre la Luna y el Sol es mucho mayor que la distancia Tierra-Luna igual a r ; la distancia Tierra-Sol es r' . Entonces, podemos calcular Δ en función de las distancias r y r' , teniendo en cuenta la Figura 34, resulta:

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos \nu = r'^2 \left[1 + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 - 2 \frac{r}{r'} \cos \nu \right]$$

¹ El origen de coordenadas es La Tierra.

Si definimos la inversa de la distancia mutua como: $R_1 = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r' \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2 \frac{r}{r'} \cos v}}$,

y además, hacemos el cambio de variables: $\left(\frac{r}{r'}\right) = z$, $\cos v = \mu$; entonces, el radicando de R_1 admite el desarrollo, en serie de potencias de z , de la forma:

$$\left(1 + z^2 - 2 z \mu\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{v=0}^{\infty} P_v(\mu) z^v, \text{ convergente para } |z| < 1.$$

Donde los $P_v(\mu)$ son los *polinomios de Legendre*¹.

Los polinomios de *Legendre* tienen el siguiente desarrollo en series de potencias de μ :

$$P_0(\mu) = 1$$

$$P_1(\mu) = \mu$$

$$P_2(\mu) = \frac{3}{2} \mu^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(\mu) = \frac{5}{2} \mu^3 - \frac{3}{2} \mu$$

etc.

Propiedades: El subíndice en cada polinomio indica el grado del mismo y además, son ortogonales entre si en el intervalo $[-1,1]$. En el estudio de la teoría del potencial relacionada con los cuerpos del Sistema Solar, los polinomios de *Legendre* tienen un rol importante, pues el potencial $V(r)$ se puede expresar en función de estos polinomios y por tanto resolver la ecuación de *Laplace*².

Como, $\cos v = \mu \leq 1$ entonces, $|P_n(\mu)| \leq 1$; además, por ser $\left(\frac{r}{r'}\right) \ll 1$, ya que $\frac{r}{r'} \cong \frac{1}{400}$; luego, la función R_1 admite la siguiente representación, en términos de los polinomios de *Legendre*:

$$R_1 = \frac{1}{r'} \sum_{v=0}^{\infty} P_v(\cos v) \left(\frac{r}{r'}\right)^v = \frac{1}{r'} + \frac{r}{r'^2} P_1(\cos v) + \frac{r^2}{r'^3} P_2(\cos v) + \frac{r^3}{r'^4} P_3(\cos v) + \dots$$

En la práctica, como $\frac{r}{r'} = \frac{1}{389,2}$, sólo se consideran los cuatro primeros términos del desarrollo.

NOTA: La distancia media Tierra – Luna es: $r = 384\,400$ Km.

Distancia media Tierra – Sol: $r' = 149\,597\,887$ Km.

$$\text{Luego, } \frac{r}{r'} \cong 0,002569\dots \cong \frac{1}{389,2}.$$

¹ Consultar **López García**, F.; 2008, “Curso Análisis Matemática III”, Capítulo 10, pág. 24, Ed. FCEfyN, UNSJ.

² **López García**, F.; 2008, “Curso Análisis Matemática III”, Capítulo 10, pág. 57.

§ 7.2 Aplicación al Sistema Planetario ¹.

Nos proponemos estudiar un problema real considerando los cuerpos del Sistema Solar con inclinaciones pequeñas y órbitas con poca excentricidad. Por lo tanto, analizaremos el desarrollo de $\frac{1}{\Delta}$ en el caso planetario.

Sea el origen de coordenadas el Sol, el plano $\{xy\}$ coincide con la eclíptica, el eje x dirigido desde el Sol al equinoccio o punto vernal γ ; sea i la inclinación del planeta m e i' la inclinación de m' ; además, G representa *nodo ascendente* de m respecto de m' y J la *inclinación mutua* entre las orbitas de ambos planetas.

En un instante cualquiera t , el radio vector r del planeta m corta el círculo máximo del plano de su orbita en M y el radio vector r' del planeta m' en M' (proyección sobre la esfera celeste); ver Figura 35.

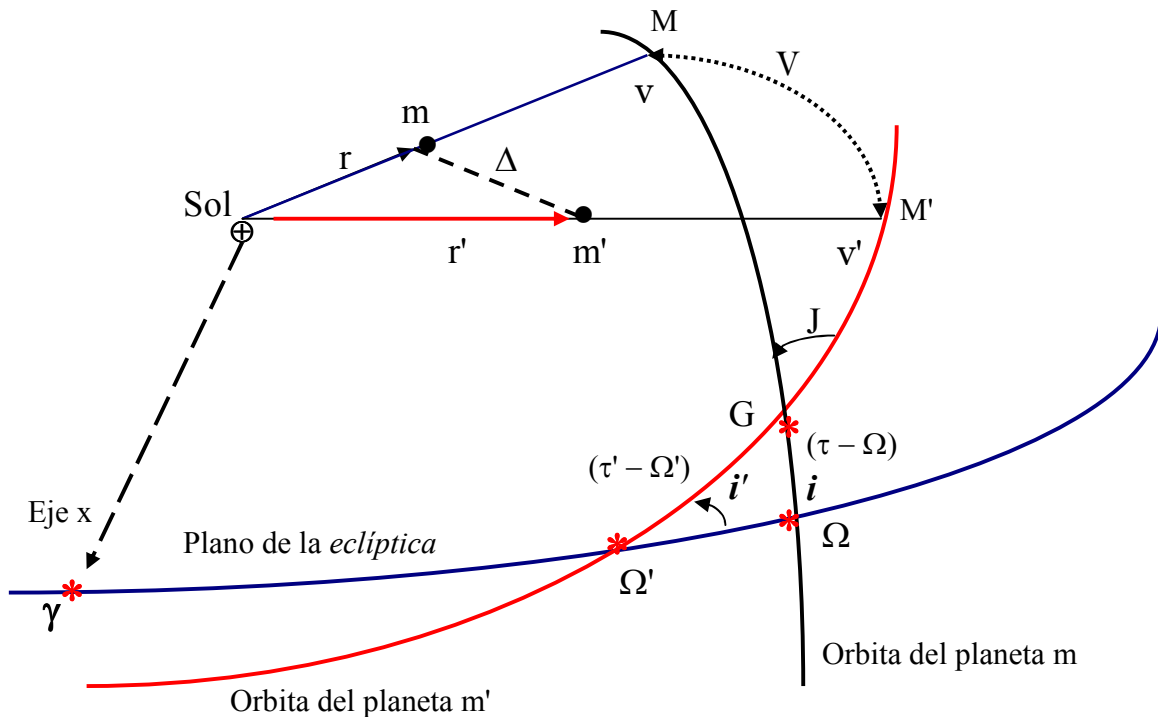


Fig. 35. Planos de las órbitas de los planetas m y m' respecto del plano fundamental $\{x,y\}$ la Eclíptica. La longitud verdadera v se mide desde γ hasta M , ídem para $v' = \gamma M'$.

Además suponemos que sus módulos satisfacen la desigualdad $r < r'$ e indiquemos con v y v' las longitudes verdaderas de m y m' respectivamente.

$$\text{Representemos con: } \tau = \gamma \Omega + \Omega G, \quad G M = v - \tau$$

$$\tau' = \gamma \Omega' + \Omega' G, \quad G M' = v' - \tau'$$

¹ Recomendamos: **Brouwer**, D., *Clemence*, G.; 1961, “*Methods of Celestial Mechanics*”, Academic Press.
Plummer, H. C.; 1960, “*An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*”, Dover Publications, Inc.
Smart, W.M.; 1960, “*Celestial Mechanics*”, Ed. Longmans.
Taff, L. G.; 1985, “*Celestial Mechanics: A Computational Guide for the Practitioner*”, John Wiley & Sons.

Entonces, la distancia mutua entre los planetas m y m' es: $\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos V$.

Teniendo en cuenta que: $\cos V = \cos (GM) \cos (GM') + \sin (GM) \sin (GM') \cos J$, y reemplazando por las expresiones angulares resulta: $\cos V = \cos (v - \tau) \cos (v' - \tau') + \sin (v - \tau) \sin (v' - \tau') \cos J$.

Si tenemos en cuenta la siguiente relación trigonométrica: $\cos J = 1 - 2 \sin^2 \frac{J}{2}$, y haciendo $\sin \frac{J}{2} = \eta$ se tiene: $\cos J = 1 - 2 \eta^2$; por otra parte, definimos $\sigma = v + \tau' - \tau$; luego resulta

$$\cos V = \cos (v - v' + \tau' - \tau) - 2 \eta^2 \sin (v - \tau) \sin (v' - \tau')$$

$$\cos V = \cos (\sigma - v') - 2 \eta^2 \sin (v - \tau) \sin (v' - \tau')$$

Entonces, podemos expresar Δ^2 de la forma

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos (\sigma - v') + 4 r r' \eta^2 \sin (v - \tau) \sin (v' - \tau')$$

donde τ y τ' resultan del triangulo esférico $\Omega\Omega'G$, ver Figura 35.

En el Sistema Planetario, en general, las excentricidades son pequeñas al igual que las inclinaciones y por tanto, el valor de J y η también resultan pequeños; estas consideraciones nos induce a desarrollar la función R_1 y por tanto $\frac{1}{\Delta}$, en serie de potencias de las variables η^2 , e , e' , de la forma:

$$R_1 = \sum A (\eta^2)^F e^H e'^{H'} \cos D$$

donde el argumento D es función de los elementos elípticos angulares y del tiempo: i , Ω , ω , ε y t . Además, la suma de los tres primeros términos de Δ^2 es un número positivo

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos (\sigma - v') > 0$$

y su mínimo es: $\Delta_0^2 = (r - r')^2$, luego, $\Delta^2 = \Delta_0^2 + 4 r r' \eta^2 \sin (v - \tau) \sin (v' - \tau')$ y por tanto

$$\frac{1}{\Delta} = [\Delta_0^2 + 4 r r' \eta^2 \sin (v - \tau) \sin (v' - \tau')]^{-\frac{1}{2}}$$

Factoreando resulta:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} \left(1 + 4 \frac{\eta^2 r r'}{\Delta_0^2} \sin (v - \tau) \sin (v' - \tau') \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta_0} (1 + X)^{-\frac{1}{2}}$$

donde: $|X| = 4 \frac{\eta^2 r r'}{\Delta_0^2} |\sin (v - \tau) \sin (v' - \tau')| \leq 4 \frac{\eta^2 r r'}{\Delta_0^2} \leq 4 \frac{\eta^2 r r'}{(r - r')^2} \ll 1$.

Luego, el factor $(1 + X)^{-\frac{1}{2}}$ se puede desarrollar en serie de potencias de X , por ser $|X| \ll 1$, de la forma:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} (1 + X)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta_0} \left(1 - \frac{1}{2} X + \frac{3}{8} X^2 - \dots \right), \text{ reemplazando resulta:}$$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{4 \eta^2 r r'}{\Delta_0^2} \sin(v - \tau) \sin(v' - \tau') + \frac{3}{8} \frac{16 \eta^2 r^2 r'^2}{\Delta_0^2} \sin^2(v - \tau) \sin^2(v' - \tau') - \dots \right)$$

Si suponemos que las excentricidades $e = e' = 0$, corresponden a órbitas circulares entonces, los radio vectores de los planetas m y m' se reducen a: $r = a$ y $r' = a'$, i.e., constantes.

Además, la *longitud verdadera*: $v = \varpi + w$, para $e = 0$ toma el valor $v_{e=0} = \varpi + M = l$, donde w representa la *anomalía verdadera* y l la *longitud media*; análogamente $v'_{e=0} = l'$. En consecuencia, las *longitudes verdaderas* son iguales a las *longitudes medias* para $e = 0$. Por lo tanto, la función $\frac{1}{\Delta}$ se reduce, en el caso circular ($e = e' = 0$), al siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\Delta} \right]_{e=e'=0} &= \left[a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos(l' - \lambda) \right]^{-\frac{1}{2}} - 2 \eta^2 a a' \left[a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos(l' - \lambda) \right]^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad \sin(l - \tau) \sin(l' - \tau) + 6 \eta^4 a^2 a'^2 \left[a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos(l' - \lambda) \right]^{-\frac{5}{2}} \sin^2(l - \tau) \\ &\quad \sin^2(l' - \tau) + \dots \end{aligned}$$

Nos ocuparemos ahora del desarrollo de cada uno de los términos.

El primer término $\left[a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos(l' - \lambda) \right]^{-\frac{1}{2}}$ es una función par respecto de $\cos(l' - \lambda)$, con período 2π por lo tanto, admite un desarrollo en serie trigonométrica de Fourier, en cosenos, el cual se puede escribir de la forma:

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n(l' - \lambda)$$

también admite el siguiente desarrollo si suponemos que $A_n = + A_{-n}$, luego

$$\left[a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos(l' - \lambda) \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cos n(l' - \lambda) \quad (7.5)$$

donde los coeficientes A_n son funciones de los *semi eje mayores* a y a' y por tanto, el desarrollo de Fourier es convergente si $a < a'$.

Análogamente, los demás términos admiten también desarrollos en series trigonométricas de la forma:

$$a a' \left[a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos(l' - \lambda) \right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \cos n(l' - \lambda) \quad (7.6)$$

y en forma similar,

$$a^2 a'^2 \left[a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos(l' - \lambda) \right]^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cos n(l' - \lambda) \quad (7.7)$$

donde el argumento $\lambda = \sigma = l + \tau' - \tau$.¹

Luego, todos los corchetes se pueden reemplazar por un desarrollo en serie trigonométrica y en consecuencia, las expresiones (7.1), (7.2) y (7.3); asimismo es posible representar los factores: $\sin(l - \tau) \sin(l' - \tau')$, por desarrollos en función de l' y λ , de la forma:

$$2 \sin(l - \tau) \sin(l' - \tau') = \cos(l - l' + \tau' - \tau) - \cos(l + l' - \tau' - \tau) = \cos(l' - \lambda) - \cos(\lambda + l' - 2\tau)$$

$$4 \sin^2(l - \tau) \sin^2(l' - \tau') = [1 - \cos 2(l - \tau)] [1 - \cos 2(l' - \tau')]$$

$$8 \sin^2(l - \tau) \sin^2(l' - \tau') = \frac{1}{2} - 2 \cos 2(l' - \tau') - 2 \cos 2(l - \tau) + \frac{1}{2} \cos 2(l - \tau + l' - \tau') + \frac{1}{2} \cos 2(l - \tau - l' + \tau').$$

Por lo tanto, cada uno de los términos de $\left[\frac{1}{\Delta} \right]_{e=e'=0}$ es una combinación lineal de cosenos que a

su vez cada uno de ellos se multiplica también por coseno; entonces, podemos abreviar el desarrollo escribiendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos v \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cos n(l' - \lambda) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cos [n(l' - \lambda) + v] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cos [n(l' - \lambda) - v] \end{aligned}$$

Si en la última suma reemplazamos n por $-n$, resulta que ésta es igual a la primera entonces, ambas sumas son iguales, luego se tiene

$$\frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cos [n(l' - \lambda) + v] + \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{-\infty} A_n \cos [n(l' - \lambda) + v] = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cos [n(l' - \lambda) + v]$$

¹ Recordar que $\sigma = v + \tau' - \tau$; si $e = 0$ entonces la anomalía verdadera v se convierte en la anomalía media l .

Entonces, el segundo término del desarrollo de $\left[\frac{1}{\Delta} \right]_{e=e'=0}$ definido como P_1 , admite el desarrollo:

$$\begin{aligned} P_1 &= -\eta^2 \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \cos n(l'-\lambda) [\cos(l'-\lambda) - \cos(l'-\lambda - 2\tau')] \\ &= -\eta^2 \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \cos(n+1)(l'-\lambda) + \eta^2 \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \cos[n(l'-\lambda) + l' + \lambda - 2\tau'] \\ &= -\frac{1}{2} \eta^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \cos(n+1)(l'-\lambda) + \frac{1}{2} \eta^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \cos[(n+1)(l'-\lambda) + 2\lambda - 2\tau'] \end{aligned}$$

Notar que, en la primera suma intercambiamos $(n+1) = n$, luego $n = n-1$; en la segunda suma realizamos la misma operación (o intercambio) y análogamente se opera con el tercer término, que contiene a η^4 , definido como P_2 . Finalmente, se obtiene el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\Delta} \right]_{e=e'=0} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cos n(l'-\lambda) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta^2 \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n-1} \cos n(l'-\lambda) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n-1} \cos [n(l'-\lambda) + 2\lambda - 2\tau'] \right] + P_2 + \dots \end{aligned}$$

Donde el término P_2 admite la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{3}{4} \eta^4 \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cos n(l'-\lambda) [2 - 2 \cos 2(l'-\tau') - 2 \cos 2(l-\tau) + \cos 2(l-\tau + l' - \tau') + \\ &\quad + \cos 2(l-\tau - l' + \tau')] \end{aligned}$$

Notar que: $\cos 2(l-\tau + l' - \tau') = \cos 2(\lambda + l' - 2\tau')$ y $\cos 2(l-\tau - l' + \tau') = \cos 2(l'-\lambda)$

Entonces,

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{3}{4} \eta^4 \frac{1}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ 2 C_n \cos n(l'-\lambda) - 2 C_n \cos [n(l'-\lambda) + 2(l'-\tau')] - 2 C_n \cos [n(l'-\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + 2(l-\tau)] + C_n \cos [n(l'-\lambda) + 2(\lambda + l' - 2\tau')] + C_n \cos [n(l'-\lambda) + 2(l'-\lambda)] \} \right] \end{aligned}$$

Aplicando el operador Σ , suma, término a término se tiene:

$$\begin{aligned}
 P_2 = & \frac{3}{4} \eta^4 \sum C_n \cos n(l' - \lambda) - \frac{3}{4} \eta^4 \sum C_n \cos [(n+2)(l' - \lambda) + 2\lambda - 2\tau'] - \\
 & - \frac{3}{4} \eta^4 \sum C_n \cos [n(l' - \lambda) + 2\lambda - 2\tau'] + \frac{3}{8} \eta^4 \sum C_n \cos [(n+2)(l' - \lambda) + 2\lambda - 2\tau'] \\
 & + \frac{3}{8} \eta^4 \sum C_n \cos [(n+2)(l' - \lambda)]
 \end{aligned}$$

NOTA: Las sumas anteriores son con respecto al índice n ; ahora cambiamos los índices de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{En la segunda suma:} & \quad n + 2 = n \Rightarrow n = n - 2 \\
 \text{En la cuarta suma:} & \quad n + 2 = n \Rightarrow n = n - 2 \\
 \text{En la quinta suma:} & \quad n + 2 = n \Rightarrow n = n - 2
 \end{aligned}$$

Entonces, la parte principal de la función perturbadora, cuando las órbitas tienen excentricidades nulas o muy próximas a cero, tiene la expresión:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{1}{\Delta} \right]_{e=e'=0} = & \sum M_n \cos [n(l' - \lambda)] + \sum N_n \cos [n(l' - \lambda) + 2\lambda - 2\tau'] \\
 & + \sum P_n \cos [n(l' - \lambda) + 4\lambda - 4\tau'] \\
 & + \sum Q_n \cos [n(l' - \lambda) + 6\lambda - 6\tau'] \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Los coeficientes admiten los siguientes desarrollos:

$$\begin{aligned}
 M_n = & \frac{1}{2} A_n - \frac{1}{2} \eta^2 B_{n-1} + \frac{3}{4} \eta^4 \left[C_n + \frac{1}{2} C_{n-2} \right] + \dots \\
 N_n = & \frac{1}{2} \eta^2 B_{n-1} - \frac{3}{4} \eta^4 \left[\frac{1}{2} C_{n-2} - C_n \right] + \dots \\
 P_n = & \frac{3}{8} \eta^4 C_{n-2} + \dots
 \end{aligned}$$

En definitiva, cuando $e = e' = 0$, la parte principal de la función perturbadora se puede expresar de la siguiente forma

$$\frac{1}{\Delta} = \sum K_{ij} \cos [i l' - j \lambda - (i - j) \tau'] \quad (7.8)$$

donde, un argumento cualquiera de la fórmula (7.8) tiene la expresión:

$$i(l' - \lambda) + h \lambda - h \tau' = i l' - (i - h) \lambda + h \tau' = i l' - j \lambda - (i - j) \tau'$$

siendo $h = -(i - j)$. Luego, para $e = e' = 0$, resulta la ecuación (7.8).

Notar que:

$$\begin{aligned} \text{para } h = 0, & \quad K_{ij} = M_i, \quad j = i \\ \text{para } j = i - 2, & \quad K_{ij} = N_i, \\ \text{para } j = i - 4, & \quad K_{ij} = P_i, \end{aligned}$$

§ 7.3 Desarrollo de la función perturbadora en series de potencias de e y e' .

En esta sección vamos a analizar el desarrollo de la parte principal de la función perturbadora $1/\Delta$ en serie de potencias de e y e' , i.e., cuando los elementos elípticos $a \neq r$ y $e \neq 0$.

Hemos analizado, consultar § 7.2, el desarrollo de $1/\Delta$ en serie de potencias de η^2 , considerando que $e = e' \equiv 0$, en cuyo caso $r = a$, $r' = a'$, $v = 1$ y $v' = l'$, i.e., “elementos orbitales constantes”; dicho desarrollo se puede escribir, como hemos visto, de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\Delta} = \sum K_{ij} \cos [i l' - j \lambda - (i - j) \tau'] \quad (7.8)$$

donde, τ' es la longitud media del nodo ascendente de m respecto de m' ; definido por el arco: $\gamma \Omega' + \Omega' G$ (ver Figuras 35, pág. 138) y $\lambda = 1 + \tau' - \tau$ (consultar pág. 141). El índice i , en la suma, varía desde $+\infty$ a $-\infty$ y los coeficientes K_{ij} adoptan los siguientes desarrollos¹:

Si $j = i$ entonces, $K_{ii} = M_i$, coeficiente que se puede expresar en serie de potencias de η^2 , donde el primer término es constante, cuyo desarrollo es de la forma:

$$M_i = \alpha_0 + \alpha_2 \eta^2 + \alpha_4 \eta^4 + \dots$$

Además: Si $j = i - 2$, entonces $K_{i,i-2} = N_i = \beta_2 \eta^2 + \beta_4 \eta^4 + \dots$

Si $j = i - 4$, entonces $K_{i,i-4} = P_i = \gamma_4 \eta^4 + \gamma_6 \eta^6 + \dots$

Los coeficientes $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4; \beta_2, \beta_4; \gamma_4, \gamma_6$, sólo dependen de los *coeficientes de Laplace*², es decir de los coeficientes de las series de Fourier de las siguientes funciones:

¹ Consultar pág. 143.

² Consultar: **Brouwer, D. & Clemence, G.**; 1961, “*Methods of Celestial Mechanics*”, págs. 471-476 y 495-502.

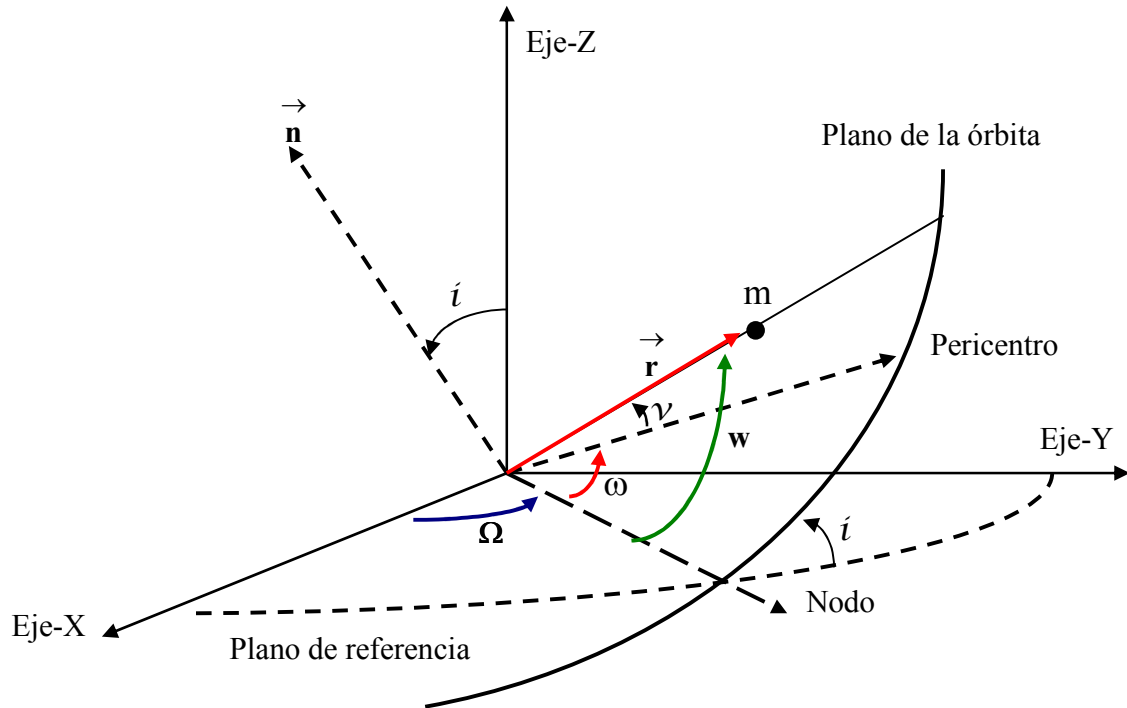


Fig. 36. Elementos angulares de la órbita. Ω = longitud del nodo ascendente. ω = argumento del perihelio. ϖ = longitud del pericentro. V = anomalía verdadera. w = longitud verdadera en la órbita. Además, la longitud excéntrica $\varepsilon = \varpi + E$ y la longitud media $\lambda = \varpi + M$.

$$\Gamma^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} A_i \cos i \theta$$

$$a a' \Gamma^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} B_i \cos i \theta$$

$$a^2 a'^2 \Gamma^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} C_i \cos i \theta$$

donde $\theta = l' - \lambda$, la función $\Gamma = a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos (l' - \lambda)$ y los coeficientes A_i, B_i, C_i son pares, i.e., $A_i = A_{-i}$. La Figura 36 muestra la definición de los elementos angulares de la órbita.

Para obtener el desarrollo de la parte principal de la función perturbadora en serie de potencias de e y e' , basta reemplazar en la ecuación (7.8) el semieje mayor a por r , a' por r' , l por v y l' por v' ; donde $r = a (1 + x)$ y $r' = a' (1 + x')$, las variables x y x' se anulan cuando $e = e' = 0$; análogamente para la longitud verdadera $v = l + y$, $v' = l' + y'$, implica $y = y' = 0$ para $e = e' = 0$.

El primer paso consiste en reemplazar a por r y a' por r' en los coeficientes del desarrollo de los K_{ij} que sólo depende de η^2 y de los coeficientes de Laplace ¹, los cuales a su vez sólo dependen de a y a' , luego se tiene,

¹ Consultar: **Brouwer, D. & Clemence, G.**; 1961, “*Methods of Celestial Mechanics*”, págs. 471-476 y 495-502.

$$K_{ij} = F(a, a')$$

Es decir, una función de a y a' para cada η^2 . Analicemos que clase de función es.

Para ello examinemos los coeficientes A_i, B_i, C_i, \dots , los cuales son funciones homogéneas respecto de los elementos a y a' , de grado menos uno (-1); también lo son los coeficientes M_i, N_i y P_i ; entonces podemos escribir,

$$F(ka, ka') = \frac{1}{k} F(a, a')$$

En efecto, un coeficiente cualquiera, por ejemplo B_i es función, como vimos anteriormente, de a y a' ; entonces, qué sucede matemáticamente si reemplazamos en la expresión (7.6), a por ka y a' por ka' , se tiene

$$ka ka' \left[k^2 a^2 + k^2 a'^2 - 2k^2 a a' \cos \theta \right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i(ka, ka') \cos i \theta$$

donde $\theta = l' - \lambda$; luego de simplificar e igualar coeficientes, resulta:

$$B_i(ka, ka') = \frac{1}{k} B_i(a, a')$$

Como se quería demostrar.

El siguiente paso consiste en desarrollar la expresión: $F[a(1+x), a'(1+x')]$ de la siguiente forma:

$$F[a(1+x), a'(1+x')] = \frac{1}{(1+x')} F\left(\frac{1+x}{1+x'} a, a'\right) = \frac{1}{(1+x')} F\left(a + a \frac{(x-x')}{(1+x')}, a'\right)$$

por simplicidad hacemos $(1+x') = k$, y definimos una cantidad $h = a \frac{x-x'}{1+x'}$; entonces, la expresión

anterior toma la forma: $\frac{1}{(1+x')} F(a+h, a')$, la cual se puede desarrollar en serie de potencias de la

variable h , que tiende a cero si $e = e' = 0$. Luego, el desarrollo en serie de Taylor es el siguiente:

$$\frac{1}{(1+x')} F\left(a + a \frac{(x-x')}{(1+x')}, a'\right) = \frac{1}{(1+x')} \left[F(a, a') + a \frac{x-x'}{1+x'} \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{1}{2!} a^2 \left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} + \dots \right]$$

Además, si definimos el primer miembro de esta igualdad por $K_{ij}(r, r')$ y desarrollados la suma del segundo miembro se tiene,

$$K_{ij}(r, r') = \frac{F(a, a')}{(1+x')} + a \frac{(x-x')}{(1+x')^2} \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{1}{2} a^2 \frac{(x-x')^2}{(1+x')^3} \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} + \dots$$

Para abreviar la notación definimos:

$$K_{ij}^{(0)} = F(a, a'), \quad K_{ij}^{(1)} = \frac{a}{1!} \frac{\partial F(a, a')}{\partial a}, \quad \dots, \quad K_{ij}^{(n)} = \frac{a^n}{n!} \frac{\partial^n F(a, a')}{\partial a^n}.$$

entonces, el desarrollo en serie anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$K_{ij}(r, r') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x')^n}{(1+x')^{n+1}} K_{ij}^{(n)}$$

donde los coeficientes $K_{ij}^{(n)}$ sólo dependen de a , de M_i , N_i , P_i , etc.; luego la parte principal de la función perturbadora, ecuación (7.4), admite el siguiente desarrollo

$$\frac{1}{\Delta} = \sum K_{ij}^{(n)} \frac{(x-x')^n}{(1-x')^{n+1}} \cos [i l' - j \lambda - (i-j) \tau' + i y' - j y]$$

Además, para simplificar, definimos $D = i l' - j \lambda - (i-j) \tau'$, entonces $\frac{1}{\Delta}$ toma la forma ¹:

$$\frac{1}{\Delta} = \sum \binom{n}{v} K_{ij}^{(n)} \frac{x^{n-v} x'^v}{(1-x')^{n+1}} \cos [D + i y' - j y]$$

Desarrollando la función coseno resulta

$$\frac{1}{\Delta} = \sum \binom{n}{v} K_{ij}^{(n)} \frac{x^{n-v} x'^v}{(1-x')^{n+1}} [\cos (i y' - j y) \cos D - \operatorname{sen} (i y' - j y) \operatorname{sen} D]$$

Luego,

$$\frac{1}{\Delta} = \sum \binom{n}{v} K_{ij}^{(n)} \frac{x^{n-v} x'^v}{(1-x')^{n+1}} \{ [\cos (i y') \cos (j y) + \operatorname{sen} (i y') \operatorname{sen} (j y)] \cos D - \\ - [\operatorname{sen} (i y') \cos (j y) - \cos (i y') \operatorname{sen} (j y)] \operatorname{sen} D \}$$

y finalmente,

$$\frac{1}{\Delta} = \sum \binom{n}{v} K_{ij}^{(n)} \left\{ \left[x^{n-v} \cos (j y) \frac{x'^v \cos (i y')}{(1+x')^{n+1}} + x^{n-v} \operatorname{sen} (j y) \frac{x'^v \operatorname{sen} (i y')}{(1+x')^{n+1}} \right] \cos D - \right. \\ \left. - \left[x^{n-v} \cos (j y) \frac{x'^v \operatorname{sen} (i y')}{(1+x')^{n+1}} - x^{n-v} \operatorname{sen} (j y) \frac{x'^v \cos (i y')}{(1+x')^{n+1}} \right] \operatorname{sen} D \right\} \quad (7.9)$$

¹ Recordar que nos interesa estudiar el caso en que la anomalía verdadera es igual a la anomalía media más un término correctivo debido a que la excentricidad no es nula entonces: $v = 1 + y$.

Se puede demostrar (ver Capítulo 2) que la expresión $(x^{(n-v)} \cos jy)$ admite un desarrollo en serie de Fourier, convergente, en función de la anomalía media M de la forma:

$$x^{n-v} \cos(jy) = \sum a \cos(\mu M)$$

$$x^{n-v} \operatorname{sen}(jy) = \sum b \operatorname{sen}(\mu M)$$

y análogamente,

$$\frac{x'^v \cos(iy')}{(1+x')^{n+1}} = \sum c \cos(\xi M')$$

$$\frac{x'^v \operatorname{sen}(iy')}{(1+x')^{n+1}} = \sum d \operatorname{sen}(\xi M')$$

donde los coeficientes: a , b , c , d , de las respectivas sumas dependen de los parámetros: j , n y v así como también, de las excentricidades e y e' de los planetas m y m' . El producto de dos coeficientes cualesquiera, uno del primer desarrollo por otro el segundo, se puede escribir de la siguiente forma:

$$a \times b = e^{\mu+2\rho} \varphi(e^2)$$

y análogamente con los coeficientes de las dos últimas sumas,

$$c \times d = e'^{\xi+2\rho'} \varphi(e'^2)$$

donde ρ y ρ' son números enteros positivos, i.e., $\rho \geq 0$ y $\rho' \geq 0$.

Con estas hipótesis y reemplazando todos los factores que aparecen entre llaves por sus desarrollos respectivos, ver Ec. (7.9), el corchete se puede escribir de la siguiente forma:

$$\left\{ \left[x^{n-v} \cos(jy) \frac{x'^v \cos(iy')}{(1+x')^{n+1}} + x^{n-v} \operatorname{sen}(jy) \frac{x'^v \operatorname{sen}(iy')}{(1+x')^{n+1}} \right] \cos D - \left[x^{n-v} \cos(jy) \frac{x'^v \operatorname{sen}(iy')}{(1+x')^{n+1}} - x^{n-v} \operatorname{sen}(jy) \frac{x'^v \cos(iy')}{(1+x')^{n+1}} \right] \operatorname{sen} D \right\} = \text{Factor}$$

luego, al desarrollar cada corchete tendremos ciertas sumas de productos de uno de los factores por el otro, es decir:

$$\begin{aligned} \text{Factor} = & \sum \left[a c \cos(\mu M) \cos(\xi M') + b d \operatorname{sen}(\mu M) \operatorname{sen}(\xi M') \right] \cos D - \\ & - \sum \left[a d \cos(\mu M) \operatorname{sen}(\xi M') - b c \operatorname{sen}(\mu M) \cos(\xi M') \right] \operatorname{sen} D \end{aligned}$$

Entonces, podemos expresar cada suma del siguiente modo,

$$\text{Factor} = \sum \left\{ \frac{1}{2} [a c \cos(\mu M + \xi M') + a c \cos(\mu M - \xi M') + b d \cos(\mu M - \xi M') - b d \cos(\mu M + \xi M')] \cos D - \frac{1}{2} [a d \sin(\mu M + \xi M') - a d \sin(\mu M - \xi M') - b c \sin(\mu M + \xi M') - b c \sin(\mu M - \xi M')] \sin D \right\}.$$

Multiplicamos cada término por $\cos D$ y $\sin D$ respectivamente y luego, agrupamos según argumentos comunes, entonces resulta:

$$\begin{aligned} \text{Factor} = \frac{1}{4} \sum \{ & a c \cos(D + \mu M + \xi M') + a c \cos(D - \mu M - \xi M') + \\ & + a c \cos(D + \mu M - \xi M') + a c \cos(D - \mu M + \xi M') + \\ & + b d \cos(D + \mu M - \xi M') + b d \cos(D - \mu M + \xi M') - \\ & - b d \cos(D + \mu M + \xi M') - b d \cos(D - \mu M - \xi M') + \\ & + a d \cos(D - \mu M - \xi M') - a d \cos(D + \mu M + \xi M') - \\ & - a d \cos(D - \mu M + \xi M') + a d \cos(D + \mu M - \xi M') - \\ & - b c \cos(D - \mu M - \xi M') + b c \cos(D + \mu M + \xi M') - \\ & - b c \cos(D - \mu M + \xi M') + b c \cos(D + \mu M - \xi M') \} \end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en factorizar coseno con argumentos iguales en consecuencia se tiene:

$$\text{Factor} = \frac{1}{4} \sum \{ (a c - b d - a d + b c) \cos(D + \mu M + \xi M') + (a c - b d + a d - b c) \cos(D - \mu M - \xi M') + (a c - b d + a d + b c) \cos(D + \mu M - \xi M') + (a c + b d - a d - b c) \cos(D - \mu M + \xi M') \}.$$

Notar que todos los términos que componen los coeficientes de los cosenos, i.e., a , b , c , d son funciones de e y e' simultáneamente y los argumentos de las funciones trigonométricas son de la forma $(D \pm \mu M \pm \xi M')$ en las cuatro combinaciones posibles respecto de los signos por lo tanto, podemos expresar el desarrollo del Factor de la forma:

$$\text{Factor} = \sum Q e^\alpha e'^\beta \cos [i l' - j \lambda - (i - j) \tau' \pm \mu M \pm \xi M'] \quad (7.10)$$

Recordemos que las anomalías medias de los planetas m y m' están expresadas por:

$$M = n t + \varepsilon - \varpi = l - \varpi, \quad y \quad M' = n' t + \varepsilon' - \varpi' = l' - \varpi'$$

luego, reemplazando en (7.10) resulta:

$$\text{Factor} = \sum Q e^\alpha e'^\beta \cos [i l' - j \lambda - (i - j) \tau' \pm \mu (l - \varpi) \pm \xi (l' - \varpi')]$$

Desarrollando se tiene,

$$\text{Factor} = \sum Q e^\alpha e'^\beta \cos [(i \pm \xi) l' - (j \mp \mu) \lambda \pm \mu (\tau - \tau' - \varpi) \mp \xi \varpi' - (i - j) \tau']$$

además, $\omega = \varpi + \tau' - \tau$, entonces,

$$\text{Factor} = \sum Q e^\alpha e'^\beta \cos [\sigma' l' - \sigma \lambda \mp \mu \omega \mp \xi \varpi' - (i - j) \tau'].$$

donde,

$$\sigma' = (i \pm \xi), \quad \sigma = (j \mp \mu)$$

$$\alpha = \mu + 2 \rho, \quad \beta = \xi + 2 \rho$$

y finalmente, el desarrollo de la parte principal de la función perturbadora $\frac{1}{\Delta}$, ecuación (7.8), tiene la forma:

$$\frac{1}{\Delta} = \sum \binom{n}{v} K_{ij}^{(n)} Q e^\alpha e'^\beta \cos [\sigma' l' - \sigma \lambda \mp \mu \omega \mp \xi \varpi' - (i - j) \tau']. \quad (7.11)$$

Hemos visto que los coeficientes $K_{ij}^{(n)}$ admiten desarrollos en serie de potencias de η^2 (consultar págs. 145 y 146), donde $\eta = \sin \frac{J}{2}$ siendo J el ángulo que forman las órbitas de m y m' en el punto G , ver Figura 35 (pág. 138). Luego, si los $K_{ij}^{(n)}$ se expresan en series de potencias de η^2 , entonces los términos en η^2

¿con que exponente multiplican a cada función coseno, en el desarrollo en serie ?;

O expresado de otro modo:

¿de que orden es, respecto de η^2 , el coeficiente general del desarrollo en serie de $\frac{1}{\Delta}$?;

por ejemplo,

para $j = i$, i.e., cuando en el argumento del coseno, el coeficiente de τ' es igual a cero el orden del coeficiente es cero.

si $j = i - 2$, i.e., cuando $i - j = 2$, el orden de K_{ij} es dos.

si $j = i - 4$, i.e., cuando $i - j = 4$, el orden de K_{ij} es cuatro.

etc.

Por lo tanto, el orden del coeficiente de η^2 , en el término general de éste desarrollo, es $(i - j)$ ó eventualmente si alguno de los coeficientes es nulo, el orden será $(i - j - N^\circ \text{ par})$; luego, la parte principal de la función perturbadora se puede expresar de la forma:

$$\frac{1}{\Delta} = \sum S \eta^F e^H e^{H'} \cos [\alpha \lambda + \alpha' l' + \beta \omega + \beta' \omega' - 2 \gamma \tau'] \quad (7.12)$$

La ecuación (7.12) es la expresión final del desarrollo de la función $\frac{1}{\Delta}$; donde los exponentes son:

$$H = |\mu|, \quad H' = |\xi|, \quad F = 2\gamma : \text{todas estas cantidades más un número par } \geq 0.$$

siendo

$$\begin{aligned} |\mu| = |\pm \mu| = |\beta| &\Rightarrow H = |\beta| + N^\circ \text{ par } \geq 0. \\ |\xi| = |\pm \xi| = |\beta'| &\Rightarrow H' = |\beta'| + N^\circ \text{ par } \geq 0. \end{aligned}$$

Por último, se demuestra que la suma de los coeficientes: $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' - 2\gamma = 0$, lo cual significa que: $-\sigma + \sigma' \mp \mu \mp \xi - (i - j) = 0$ y por tanto, $-(j \mp \mu) + (i \pm \xi) \mp \mu \mp \xi - (i - j) = 0$, además se cumple que $|\beta + \beta' - 2\gamma| \leq |\beta| + |\beta'| + 2\gamma = H + H' + F + (N^\circ \text{ par } \geq 0) = \text{orden del coeficiente}$, y como $|\alpha + \alpha'| = |\beta + \beta' - 2\gamma|$ entonces, el orden del coeficiente del término general del desarrollo de $\frac{1}{\Delta}$ es mayor o igual que el valor absoluto de la suma de los coeficientes de λ y l' del argumento.

NOTA. Recomendamos consultar:

Duriez, Luc; 1992, “*Le développement de la fonction perturbatrice*”, pág. 35. En “*Modern Methods in Celestial Mechanics*”, Editores Benest, D. et Froeschle, C.; Editorial Editions Frontières.

§ 7.4 Desarrollo de la parte complementaria de la función perturbadora.

Hemos estudiado, en el ítem anterior, que la parte principal de la función perturbadora se puede expresar de la forma, ver ecuación (7.8) pág. 144,

$$\frac{1}{\Delta} = \sum K_{ij} \cos [il' - j\lambda - (i - j)\tau'] \quad (7.8)$$

válida para $e = e' = 0$, donde $\lambda = l + \tau' - \tau$; para $i = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots, j = i, i-2, i-4, i-6, \dots$, además, τ y τ' representan la longitud del nodo ascendente de m y m' respectivamente. Entonces, los coeficientes K_{ij} tienen la forma,

$$\begin{aligned} K_{i,i} &= \alpha_0 + \alpha_2 \eta^2 + \alpha_4 \eta^4 + \dots = M_i \\ K_{i,i-2} &= \beta_2 \eta^2 + \beta_4 \eta^4 + \dots = N_i \\ K_{i,i-4} &= \gamma_4 \eta^4 + \dots = P_i \end{aligned}$$

Son polinomios de exponente par en η , donde los coeficientes α, β, γ , etc. son funciones homogéneas de grado (-1) respecto de a y a' .

También estudiamos el caso general es decir, con excentricidades no necesariamente nulas entonces, la parte principal de la función perturbadora tiene la expresión:

$$\frac{1}{\Delta} = \sum Q e^H e'^{H'} \eta^F \cos D \tag{7.12}$$

donde, el argumento $D = \alpha l + \alpha' l' + \beta \omega + \beta' \omega' - 2 \gamma \tau'$; $\omega = \varpi + \tau' - \tau$, ver ecuación (7.12) pág. 151; además, la suma de los coeficientes es igual a cero, i.e., $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' - 2 \gamma \equiv 0$, siendo γ un número entero positivo o nulo ($\gamma \geq 0$). Asimismo, los exponentes están determinados por las relaciones:

$$\begin{aligned} H &= |\beta| + N^\circ \text{ par } \geq 0. \\ H' &= |\beta'| + N^\circ \text{ par } \geq 0. \\ F &= 2 \gamma + N^\circ \text{ par}. \end{aligned}$$

y el orden del coeficiente general del desarrollo esta dado por: $H + H' + F = |\alpha + \alpha'| + (N^\circ \text{ par } \geq 0)$.

Nos vamos a ocupar ahora del desarrollo de la parte secundaria de la función perturbadora, i.e., el desarrollo de la función,

$$\frac{x x' + y y' + z z'}{r'^3} \Rightarrow \text{ parte complementaria de la función perturbadora de las masas } m \text{ y } m'.$$

donde $\{x, y, z\}$ son las coordenadas cartesianas del planeta m y $\{x', y', z'\}$ las coordenadas de m' .

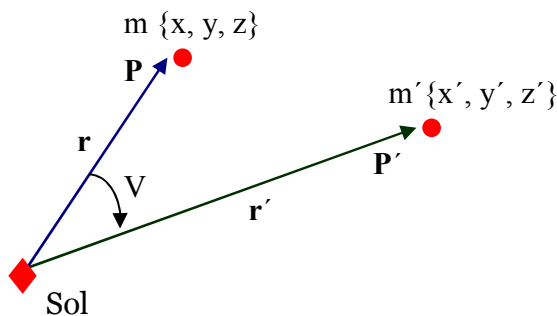


Fig. 37. \mathbf{P} y \mathbf{P}' son los respectivos radios vectores de m y m' respecto del Sol. V es el ángulo que forman ambos vectores y $|\mathbf{P}| = r$ y $|\mathbf{P}'| = r'$.

La parte complementaria se puede escribir en función del módulo de los vectores \mathbf{P} y \mathbf{P}' , de la forma:

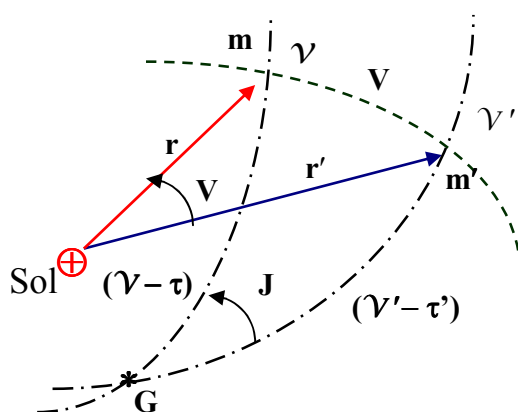
$$\begin{aligned} \frac{x x' + y y' + z z'}{r'^3} &= \frac{\vec{\mathbf{P}} \vec{\mathbf{P}'}}{|\mathbf{P}'|^3} = \frac{r r' \cos V}{r'^3} \\ &= \frac{r \cos V}{r'^2}. \end{aligned}$$

Donde $\vec{\mathbf{P}} \vec{\mathbf{P}'}$ es el producto escalar.

Por lo tanto, la componente secundaria de la perturbación que m' ejerce sobre m se puede expresar, escalarmente, en función de las distancias r , r' y el ángulo V que ellos forman entre sí, luego

$$\frac{x x' + y y' + z z'}{r^3} = \frac{r \cos V}{r'^2}$$

El coseno de V se puede calcular teniendo en cuenta la Figura 35, pág. 138. Los detalles se muestran en la Figura 38.



Lado $G m = (v - \tau)$ y $G m' = (v' - \tau')$; El ángulo en G que forman m y m' es igual a J . La distancia entre m y m' es el arco V . Luego, se cumple la relación.

$$\cos V = \cos (v - \tau) \cos (v' - \tau') + \sin (v - \tau) \sin (v' - \tau') \cos J$$

Fig. 38. El arco V en función de los arcos auxiliares. La longitud verdadera v y v' de m y m' respectivamente; la inclinación mutua, J , entre las órbitas; G es el nodo ascendente de m respecto de m' .

Para obtener el desarrollo de la parte complementaria de la función perturbadora, efectuamos el mismo procedimiento que para la parte principal i.e., con $e = e' = 0$, consultar § 7.2, pág. 138; por lo tanto, el término complementario admite el desarrollo ¹,

$$C_{e=e'=0} = \frac{a}{a'^2} [\cos (l - \tau) \cos (l' - \tau') + \sin (l - \tau) \sin (l' - \tau') \cos J]$$

Haciendo el cambio de variables: $\cos J = 1 - 2 \sin^2 \frac{J}{2}$, donde $\sin \frac{J}{2} = \eta$, entonces $\cos J = 1 - 2 \eta^2$;

luego se tiene:

$$C_{e=e'=0} = \frac{a}{a'^2} \left[\cos (l - l' + \tau' - \tau) - 2 \eta^2 \left\{ \frac{1}{2} \cos (l - l' + \tau' - \tau) - \frac{1}{2} \cos (l + l' - \tau' - \tau) \right\} \right]$$

recordar que $\lambda = l + \tau' - \tau$, luego resulta, después de simplificar:

$$C_{e=e'=0} = \frac{a}{a'^2} \left[(1 - \eta^2) \cos (l' - \lambda) + \eta^2 \cos (l' + \lambda - 2 \tau') \right]$$

¹ Recordar que cuando $e = 0$ entonces $v \equiv l$ (longitud media), pág. 140.

$$C_{e=e'=0} = \left[\left(\frac{a}{a'^2} - \frac{a}{a'^2} \eta^2 \right) \cos(I' - \lambda) + \frac{a}{a'^2} \eta^2 \cos(I' + \lambda - 2\tau) \right]$$

entonces, los dos últimos términos, contienen a η^2 , tienen la forma:

$$K_{ij} \cos [i I' - j \lambda - (i - j) \tau]$$

además, el primer término, en esta expresión general, con el argumento $(I' - \lambda)$ corresponde a los valores de $i = j = 1$; luego, el primer término del desarrollo de K_{ij} , tiene la representación:

$$K_{11} = \frac{a}{a'^2} \pm \frac{a}{a'^2} \eta^2$$

NOTA: El coeficiente K_{11} es un caso particular del coeficiente K_{ij} que hemos estudiado anteriormente, consultar págs. 144 y 145. Por lo tanto, si la parte complementaria de la función perturbadora, para el caso $e = e' = 0$, admite un desarrollo de la forma propuesta, ver ecuación (7.8) pág. 151, es lógico suponer que también admitirá, en el caso general, un desarrollo como el propuesto en la ecuación (7.12) pág. 152.

Vamos a demostrar que la parte complementaria, de la función perturbadora, carece de *términos seculares*, es decir de *términos no periódicos*¹. Dicha parte complementaria admite un desarrollo de la forma:

$$C = \sum P \cos [\alpha l + \alpha' l' - p(\varpi, \omega', \tau, \tau')]$$

o también,

$$C = \sum \left[A_{\alpha\alpha'}^* \cos(\alpha l + \alpha' l') + B_{\alpha\alpha'}^* \sin(\alpha l + \alpha' l') \right]$$

Si tenemos en cuenta que: $M = n t + \tau - \varpi = l - \varpi$; luego, $l = M + \varpi$, y $l' = M' + \varpi'$.

Por lo tanto,

$$C = \sum \left[A_{\alpha\alpha'} \cos(\alpha M + \alpha' M') + B_{\alpha\alpha'} \sin(\alpha M + \alpha' M') \right]$$

Esta expresión es una serie doble de Fourier en función de los múltiplos de la *anomalía media* M y M' ; cada término de la serie trigonométrica es una función periódica con periodo 2π ; por lo tanto, también lo es el desarrollo de C .

Ahora bien, decir que este desarrollo carece de términos seculares, es afirmar que el coeficiente $A_{00} \equiv 0$. Demostración: el coeficiente A_{00} tiene la siguiente expresión:

$$A_{00} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r \cos V}{r'^2} dM dM' = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} r dM \int_0^{2\pi} \frac{\cos V}{r'^2} dM' \quad (7.13)$$

¹ Al Dr. R. P. Cesco, mi profesor de Mecánica Celeste en el Observatorio Astronómico de la UNLP, año 1963, no le convencía la demostración de éste teorema.

En virtud de la integral de las áreas, se tiene: $r^2 \frac{dw}{dt} = \text{const.} = c$, además, como: $n dt = dM$ entonces, resulta: $r^2 dw = \frac{c}{n} dt = \frac{c}{n} dM$; análogamente $r'^2 dw' = \frac{c'}{r'} dM'$. Luego, reemplazando en las integrales que definen A_{00} se tiene,

$$A_{00} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{n'}{c'} \int_0^{2\pi} r dM \int_0^{2\pi} \cos V dw',$$

Entonces, para demostrar la hipótesis que $A_{00} \equiv 0$ basta probar que: $\int_0^{2\pi} \cos V dw' = 0$.

Hemos calculado el desarrollo de $\cos V$, pág. 153, reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos V dw' &= \int_0^{2\pi} [\cos(\nu - \tau) \cos(\nu' - \tau') + \sin(\nu - \tau) \sin(\nu' - \tau') \cos J] dw' = \\ &= \cos(\nu - \tau) \int_0^{2\pi} \cos(\nu' - \tau') dw' + \sin(\nu - \tau) \cos J \int_0^{2\pi} \sin(\nu' - \tau') dw' \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que: $\nu' = \varpi' + w'$, sustituyendo resulta,

$$\int_0^{2\pi} \cos V dw' = \cos(\nu - \tau) \int_0^{2\pi} \cos(\varpi' + w' - \tau') dw' + \sin(\nu - \tau) \cos J \int_0^{2\pi} \sin(\varpi' + w' - \tau') dw'$$

y teniendo en cuenta que: $\int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha = 0$ y $\int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha = 0$ entonces, las dos últimas integrales del desarrollo anterior son idénticamente nulas y por tanto, el coeficiente A_{00} [ecuación (7.13)] es nulo como se quería demostrar.

§ 7.5 Aplicación a la variación de los elementos elípticos.

Hemos estudiado que la variación de los elementos elípticos respecto del tiempo ¹, ecuaciones (6.8) pág. 129, para el planeta de masa m tienen la forma,

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

¹ Consultar § 6.3 Ecuaciones Planetarias de Lagrange, pág. 121.

Las ecuaciones (7.14) forman un sistema de seis ecuaciones diferenciales de primer orden; ídem para el planeta de masa m' , luego

$$\left. \begin{aligned} \frac{d a'}{d t} &= \frac{2}{n' a'} \frac{\partial R'}{\partial \varepsilon'} \\ \text{-----} & \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

donde R y R' representan la función perturbadora de m y m' respectivamente, definidas por las expresiones:

$$R = G m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x x' + y y' + z z'}{r'^3} \right)$$

$$R' = G m \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x x' + y y' + z z'}{r^3} \right)$$

Notar que en los sistemas (7.14) y (7.15) aparecen las derivadas de las funciones R y R' respecto de los elementos elípticos $\{a, e, i, \varepsilon, \Omega, \varpi\}$.

Por otra parte, hemos demostrado, en el ítem anterior, que la función perturbadora admite un desarrollo en serie múltiple de la forma,

$$R = \sum A \cos D, \quad R' = \sum A' \cos D$$

donde: $A = Q e^H e'^H \eta^F$; $Q(a, a')$; $D = \alpha l + \alpha' l' + \beta \omega + \beta' \omega' - 2 \gamma \tau$; $\omega = \varpi + \tau' - \tau$; $l = n t + \varepsilon$;

$$n^2 a^3 = \mu = G(1 + m).$$

Nos proponemos calcular $\frac{\partial R}{\partial a}$. Esta derivada aparece en la sexta ecuación diferencial del sistema

(6.8) pág. 129; recordemos que la variación de ε respecto de t , tiene la forma:

$$\frac{d \varepsilon}{d t} = - \frac{2}{n a} \frac{\partial R}{\partial a} + \sqrt{1-e^2} \frac{(1 - \sqrt{1-e^2})}{n a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\text{tang}\left(\frac{i}{2}\right)}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}$$

Idéntica expresión para $\frac{d \varepsilon'}{d t}$, donde se halla: $\frac{\partial R'}{\partial a'}$.

Debemos tener presente que la derivada de R respecto de a consta de dos partes, a saber:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) + t \frac{\partial R}{\partial l} \frac{\partial n}{\partial a} \quad (7.16)$$

Ya que $\frac{\partial R}{\partial n} = \frac{\partial R}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial n}$, pero $l = n t + \varepsilon$, luego $\frac{\partial R}{\partial n} = t \frac{\partial R}{\partial l}$.

Entonces, la variable independiente t (tiempo), que sólo estaba presente en el argumento D de los cosenos, aparece ahora como factor; en otras palabras, en forma de un término secular; este resultado produce un inconveniente pues t aumenta. Por lo tanto, es necesario hacer una transformación, para ello

recordemos que: $\frac{d n}{d t} = \frac{d n}{d a} \frac{d a}{d t}$; por otra parte: $\frac{d a}{d t} = \frac{2}{n a} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ [ver (6.8), pág.129]; luego,

$$\frac{d n}{d t} = \frac{2}{n a} \frac{d n}{d a} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{2}{n a} \frac{d n}{d a} \frac{\partial R}{\partial l}; \text{ despejando } \frac{d n}{d a} = \frac{n a}{2} \frac{1}{\frac{\partial R}{\partial l}} \frac{d n}{d t} \text{ y reemplazando en (7.16)}$$

resulta $\frac{\partial R}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) + t \frac{n a}{2} \frac{d n}{d t}$; expresión que sustituimos en la última de las ecuaciones (6.8) o su equivalente (7.14), entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d \varepsilon}{d t} &= - \frac{2}{n a} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{n a}{2} t \frac{d n}{d t} \right] + \dots \\ \frac{d \varepsilon}{d t} &= - \frac{2}{n a} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) - t \frac{d n}{d t} + \dots \\ \frac{d \varepsilon}{d t} + t \frac{d n}{d t} &= - \frac{2}{n a} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) + \dots \end{aligned} \tag{7.17}$$

NOTA: La expresión entre paréntesis $\left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)$ es la derivada obtenida diferenciando sólo los coeficientes de la función perturbadora respecto de a .

Otra forma de expresar (7.17). Si definimos: $d \varepsilon + t d n = d \varepsilon^{(1)}$ e integramos término a término resulta,

$$\varepsilon^{(1)} = \varepsilon + \int t d n = \varepsilon + n t - \int n d t$$

entonces, la ecuación (7.17) toma la forma:

$$\frac{d \varepsilon^{(1)}}{d t} = - \frac{2}{n a} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) + \dots$$

esta expresión es válida siempre que $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon + n t - \int n d t$. Además, como $l = n t + \varepsilon \equiv \varepsilon^{(1)} + \int n d t$ podemos escribir que: $l = \varepsilon^{(1)} + \rho$; suponiendo que $\rho = \int n d t$.

Consideremos nuevamente la sexta ecuación diferencial del sistema (6.8),

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \sqrt{1-e^2} \frac{(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\text{tang}\left(\frac{i}{2}\right)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}$$

si reemplazamos $\frac{\partial R}{\partial a}$ por la expresión hallada: $\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) + t \frac{na}{2} \frac{dn}{dt}$, resulta:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + t \frac{dn}{dt} = -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) + \sqrt{1-e^2} \frac{(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\text{tang}\left(\frac{i}{2}\right)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}$$

donde $\frac{d\varepsilon}{dt} + t \frac{dn}{dt} = \frac{d\varepsilon^{(1)}}{dt}$; luego, se mantiene la forma original pero, la derivada de R respecto de a , que aparece en el segundo miembro, debe calcularse derivando los coeficientes del desarrollo de R, dado por la expresión $R = \Sigma A \cos D$, donde $A = Q e^H e'^H \eta^F$ y $Q(a, a')$. Con esta advertencia, la sexta ecuación mantiene la misma forma, pero con letras de distinto significado; lo mismo podemos decir respecto de la sexta ecuación, correspondiente al planeta m' , en el sistema de ecuaciones (7.15), definida como:

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = -\frac{2}{n'a'} \frac{\partial R'}{\partial a'} + \dots$$

entonces, si $l' = \varepsilon'^{(1)} + \rho'$ resulta:

$$\frac{d\varepsilon'^{(1)}}{dt} = -\frac{2}{n'a'} \frac{\partial R'}{\partial a'} + \dots$$

Por lo tanto, el sistema de las doce ecuaciones diferenciales de primer orden de los elementos elípticos Ecs. (6.8) o su equivalente (7.14) y (7.15), que hemos deducido, pueden escribirse de la misma forma, pero con la función perturbadora R, para el primer sistema, expresada como:

$$R = \Sigma A \cos D$$

donde: $D = \alpha(\varepsilon + \rho) + \alpha'(\varepsilon' + \rho') + \beta\omega + \beta'\omega' - 2\gamma\tau$.

Y en forma similar para las ecuaciones diferenciales del segundo sistema, (7.15), correspondiente a la función perturbadora R' .

En consecuencia, para calcular las derivadas de R o R' , respecto de los elementos orbitales, se debe tener en cuenta lo siguiente,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) \text{ como definido anteriormente; además: } \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon^{(1)}}; \frac{\partial R}{\partial \varpi} = \frac{\partial R}{\partial \omega} \text{ y } \frac{\partial R}{\partial e} \text{ no varia.}$$

Aparecen dificultades en el cálculo de las siguientes derivadas: $\frac{\partial R}{\partial \Omega}$ y $\frac{\partial R}{\partial i}$;

Consultar: **Danby**, J.M.A.; 1992, “*Fundamentals of Celestial Mechanics*”, págs. 331-336.

McCuskey, S. W.; 1963, “*Introduction to Celestial Mechanics*”, págs. 142-149.

Perturbaciones de primer orden.

Si designamos con σ un elemento cualquiera de la órbita del planeta de masa m y con σ' un elemento cualquiera del planeta m' ; entonces, la variación de un elemento del planeta m o m' , se puede escribir de la forma ¹:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= m' F(\sigma_j, \sigma'_k, t) \\ \frac{d\sigma'}{dt} &= m F(\sigma_j, \sigma'_k, t) \end{aligned} \right\} \text{un sistema de 12 ecuaciones diferenciales.} \quad (7.18)$$

El sistema (7.18) esta formado por seis ecuaciones diferenciales de primer orden que corresponden a los seis elementos orbitales del planeta m y seis ED análogas del planeta m' . Como se puede apreciar, estas ecuaciones diferenciales dependen de uno o varios parámetros, representados por σ_j, σ'_k , entonces, por un *teorema de Poincaré* el cual enuncia que un sistema de ecuaciones diferenciales, función de uno o varios parámetros, se puede resolver analíticamente en series de potencias de los parámetros, de la forma ²:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_{10} m' + \sigma_{01} m + \sigma_{20} m'^2 + \sigma_{11} m m' + \sigma_{02} m^2 + \dots \quad (7.18a)$$

Si hacemos las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned} \sigma_{10} m' + \sigma_{01} &= \delta_1 \sigma_0, \\ \sigma_{20} m'^2 + \sigma_{11} m m' + \sigma_{02} m^2 &= \delta_2 \sigma_0 \end{aligned}$$

y reemplazamos resulta,

$$\sigma = \sigma_0 + \delta_1 \sigma_0 + \delta_2 \sigma_0 + \dots$$

análogamente, una expresión similar para el elemento σ' , i.e.,

$$\sigma' = \sigma'_0 + \delta_1 \sigma'_0 + \delta_2 \sigma'_0 + \dots$$

Por lo tanto, si la masa de los dos planetas es nula, $m = m' = 0$, las doce ecuaciones diferenciales (7.18) tienen por solución σ y σ' igual constantes; entonces, σ_0 y σ'_0 representan los *elementos osculadores* y los términos restantes son las *perturbaciones de ordenes sucesivas*; luego, la primera ecuación de (7.14)

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$$

¹ Consultar: **Smart**, W. M.; 1953, “*Celestial Mechanics*”, Capítulos 5 y 6.

² Desarrollo en serie de potencias de las masas.

admite una solución,

$$a = a_0 + \delta_1 a_0 + \delta_2 a_0 + \dots$$

en forma análogo para la excentricidad,

$$e = e_0 + \delta_1 e_0 + \delta_2 e_0 + \dots$$

y expresiones similares para los restantes elementos elípticos de la órbita.

Recordemos que la función perturbadora R admite un desarrollo en serie trigonométrica de la forma: $R = \Sigma A \cos D$, donde, $D = \alpha (\varepsilon + \rho) + \alpha' (\varepsilon' + \rho') + \beta \omega + \beta' \omega' - 2 \gamma \tau'$; $\omega = \varpi + \tau' - \tau$, y $\rho = \int n dt$. Además, podemos escribir que:

$$n = n_0 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0 + \dots$$

$$\rho = \rho_0 + \delta_1 \rho_0 + \delta_2 \rho_0 + \dots$$

donde ρ_0 (*término osculador*) está definido por: $\rho_0 = n_0 t$; asimismo, $n^2 a^3 = \mu$ luego, $n = \sqrt{\mu} a^{-\frac{3}{2}}$ y por tanto, $n_0 = \sqrt{\mu} a_0^{-\frac{3}{2}}$. Entonces, la relación $\frac{n}{n_0}$ admite el desarrollo,

$$\frac{n}{n_0} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-\frac{3}{2}} = \left[1 + \frac{\delta_1 a_0}{a_0} + \frac{\delta_2 a_0}{a_0} + \dots \right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Si definimos $\frac{\delta_1 a_0}{a_0} + \frac{\delta_2 a_0}{a_0} + \dots = X$ (es una cantidad muy pequeña) y reemplazamos en la expresión anterior resulta:

$$n = n_0 [1 + X.]^{-\frac{3}{2}} = n_0 \left[1 - \frac{3}{2} X + \frac{15}{8} X^2 + \dots \right]$$

sustituimos el valor de X , se obtiene,

$$n = n_0 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\delta_1 a_0}{a_0} + \frac{3}{2} \frac{\delta_2 a_0}{a_0} + \dots + \frac{15}{8} \left(\frac{\delta_1 a_0}{a_0} \right)^2 + \dots \right]$$

además, si definimos

$$\delta_1 n_0 = -\frac{3}{2} n_0 \frac{\delta_1 a_0}{a_0}; \quad \delta_2 n_0 = -\frac{3}{2} n_0 \frac{\delta_2 a_0}{a_0} + \frac{15}{8} n_0 \left(\frac{\delta_1 a_0}{a_0} \right)^2; \quad \text{etc.}$$

y reemplazamos en la expresión que define a ρ , i.e., en el desarrollo de:

$$\begin{aligned} \rho &= \int n dt = \int (n_0 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0 + \dots) dt = n_0 t + \int \delta_1 n_0 dt + \int \delta_2 n_0 dt + \dots = \\ &= \rho_0 + \delta_1 \rho_0 + \delta_2 \rho_0 + \dots \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \rho_0 &= n_0 t \\ \delta_1 \rho_0 &= \int \delta_1 n_0 dt \\ \delta_2 \rho_0 &= \int \delta_2 n_0 dt \\ &--- \end{aligned}$$

NOTA. Esta descripción elemental del método nos ha permitido obtener las *perturbaciones de primer orden y órdenes sucesivas*¹.

El siguiente paso es calcular la variación de un elemento elíptico cualquiera, definido como:

$$\frac{d\sigma_k}{dt} = \mu f(\sigma_j, t, \mu),$$

donde σ_k representa un elemento. Hemos estudiado que σ_k admite un desarrollo en serie de potencias de μ , ver ecuación (7.18a), de la forma,

$$\sigma_k = \sum_{(v)} \sigma_k^{(v)} \mu^v = \sigma_k^{(0)} + \sigma_k^{(1)} \mu + \sigma_k^{(2)} \mu^2 + \dots$$

siendo $\sigma_k^{(0)} = \text{const.}$; entonces, derivamos la expresión que define a σ_k , resulta:

$$\mu \frac{d\sigma_k^{(1)}}{dt} + \mu^2 \frac{d\sigma_k^{(2)}}{dt} + \dots = \mu f \left[\sigma_j^{(0)} + \sigma_j^{(1)} \mu + \dots, t, \mu \right]$$

Si la función f admite un desarrollo en serie de Taylor, se tiene

$$= \mu f \left(\sigma_j^{(0)}, t, \mu \right) + \mu^2 \frac{\partial f(\sigma_j^{(1)}, t, \mu)}{\partial \sigma_j} + \dots$$

e igualando coeficientes según potencias de μ , obtenemos las expresiones de los términos del desarrollo solicitado, i.e.,

$$\frac{d\sigma_k^{(1)}}{dt} = f \left(\sigma_j^{(0)}, t, \mu \right),$$

$$\frac{d\sigma_k^{(2)}}{dt} = \frac{\partial f(\sigma_j^{(1)}, t, \mu)}{\partial \sigma_j},$$

etc.

Recordemos que la función perturbadora R admite el desarrollo: $R = \sum A \cos D = A_0 \cos D_0 + \dots$

donde, $A_0 = A (a = a_0, a' = a'_0, e = e_0, e' = e'_0, \eta = \eta_0)$ y,

$$D_0 = \alpha (\epsilon_0 + n_0 t) + \alpha' (\epsilon'_0 + n'_0 t) + \beta \omega_0 + \beta' \omega'_0 - 2 \gamma \tau_0.$$

¹ $\delta_1 \rho_0$ representa la perturbación de primer orden; $\delta_2 \rho_0$ representa la perturbación de segundo orden, etc.

Por lo tanto ¹,

$$\frac{d(\delta_1 a_0)}{dt} = \frac{2}{n_0 a_0} \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right)_0$$

$$\frac{d(\delta_1 e_0)}{dt} = - \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{n_0 a_0^2 e_0} \left(\frac{\partial R}{\partial \varpi} \right)_0 - \sqrt{1-e_0^2} \frac{1-\sqrt{1-e_0^2}}{n_0 a_0^2 e_0} \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right)_0 \quad (7.19a)$$

Entonces, se obtiene un sistema de seis ecuaciones diferenciales que dependen de los *elementos osculadores* a_0, e_0 , etc. y de la función perturbadora R ; análogamente, seis ecuación diferenciales para los elementos a'_0, e'_0, \dots , con la función perturbadora R' , luego

$$\frac{d(\delta_1 a'_0)}{dt} = \frac{2}{n'_0 a'_0} \left(\frac{\partial R'}{\partial \varepsilon'} \right)_0$$

$$\frac{d(\delta_1 e'_0)}{dt} = \text{-----} \quad (7.19b)$$

Además, como $\int \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right)_0 dt = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \int R_0 dt$, la integración de las ecuaciones diferenciales de los elementos elípticos, se obtienen mediante las integrales:

$$\int R_0 dt = \sum A_0 \int \cos D_0 dt,$$

Si multiplicamos y dividimos por: $\frac{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)}{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)}$, donde $(\alpha n_0 + \alpha' n'_0) \neq 0$, se tiene:

$$= \sum A_0 \int \cos D_0 dt \frac{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)}{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)} = \sum \frac{A_0}{\alpha n_0 + \alpha' n'_0} \text{sen } D_0.$$

Por lo tanto, la integración de la primera ecuación de (7.19a) resulta,

$$\int \frac{d(\delta_1 a_0)}{dt} dt = \delta_1 a_0 = \frac{2}{n_0 a_0} \int \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right)_0 dt = \frac{2}{n_0 a_0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \int R_0 dt =$$

$$= \frac{2}{n_0 a_0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left[\sum \frac{A_0}{\alpha n_0 + \alpha' n'_0} \text{sen } D_0 \right] = \frac{2}{n_0 a_0} \sum \frac{A_0}{\alpha n_0 + \alpha' n'_0} \alpha \cos D_0.$$

¹ Nos referimos a las perturbaciones de primer orden: $\delta_1 a_0; \delta_1 e_0$; etc. relacionadas con los *elementos osculadores*.

Luego,

$$\delta_1 a_0 = \frac{2}{n_0 a_0} \sum \frac{A_0}{\alpha n_0 + \alpha' n'_0} \alpha \cos D_0.$$

Expresión que permite determinar la *perturbación de primer orden* del semi eje mayor a . Del mismo modo se obtienen las *perturbaciones de primer orden* para los restantes elementos elípticos.

Si el denominador $\alpha n_0 + \alpha' n'_0 = 0$ entonces, $D_0 = \alpha \varepsilon_0 + \alpha' \varepsilon'_0 + \beta \omega_0 + \beta' \varpi'_0 - 2 \gamma \tau'_0 = \text{const.}$ y también $R_0 = \text{const.}$ en consecuencia,

$$\frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon_0} = 0, \text{ entonces resulta, } \frac{d a}{d t} = 0 \Rightarrow a = \text{const.}$$

Este resultado representa el *teorema de la invariabilidad de los semi ejes mayores*.

Términos seculares. Ejemplo. Calculemos la variación de la excentricidad respecto del tiempo, i.e., $\frac{d e}{d t}$. Hemos estudiado que, ver ecuación (6.8) pág. 129,

$$\frac{d e}{d t} = - \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{n_0 a_0^2 e_0} \left(\frac{\partial R}{\partial \varpi} \right)_0 - \sqrt{1-e_0^2} \frac{1 - \sqrt{1-e_0^2}}{n_0 a_0^2 e_0} \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right)_0$$

Si $\frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon_0} = 0$, y además $\frac{\partial R_0}{\partial \varpi_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \omega_0} = - \sum \beta A_0 \text{ sen } D_0$; entonces la variación $\delta_1 e_0$ tiene la expresión

$$\delta_1 e_0 = + \sum \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{n_0 a_0^2 e_0} \beta A_0 \int \text{sen } D_0 \, d t,$$

integrando resulta

$$\delta_1 e_0 = t \sum \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{n_0 a_0^2 e_0} \beta A_0 \text{ sen } D_0,$$

denominado *término secular*, ya que aparece el tiempo t como factor.

Por lo tanto, cada elemento elíptico admite el siguiente desarrollo:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 t + P. \tag{7.20}$$

es decir, consta de un término constante σ_0 , un término secular, proporcional al tiempo: $\sigma_1 t$; y un término periódico P .

§ 7.6 Teoría de las Perturbaciones Planetarias.

Resumen. Vamos a analizar el movimiento del planeta m entorno del Sol; sean $\{a, e, i, \Omega, \varpi, \varepsilon\}$ sus elementos elípticos; consideremos además, otro planeta m' cuyos elementos orbitales son $\{a', e', i', \Omega', \varpi', \varepsilon'\}$.

Hemos estudiado que el movimiento de m entorno del Sol, perturbado por el planeta m' , queda completamente determinado por un sistema de seis ecuaciones diferenciales en los elementos elípticos de m en cuyos segundos miembros aparece m' como factor y, ecuaciones análogas para el planeta m' ; consultar ecuaciones (7.18) pág. 159.

También hemos analizado que dichas ED se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\text{Seis ecuaciones para el planeta } m \left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = A \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{de}{dt} = B \frac{\partial R}{\partial \varpi} + C \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \text{-----} \end{array} \right. \quad (7.21)$$

y seis ecuaciones equivalentes para los elementos elípticos de m'

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da'}{dt} = A' \frac{\partial R'}{\partial \varepsilon'} \\ \text{-----} \end{array} \right.$$

en particular: $A = \frac{2}{na}, \quad B = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}, \quad C = -\sqrt{1-e^2} \frac{(1 - \sqrt{1-e^2})}{na^2 e}, \quad \dots$

Idem para $A', B', C', \text{ etc.}$

Además vimos, que la función perturbadora R tiene a la masa m' como factor y se puede expresar de la forma:

$$R = \sum N e^H e'^H \eta^F \cos D$$

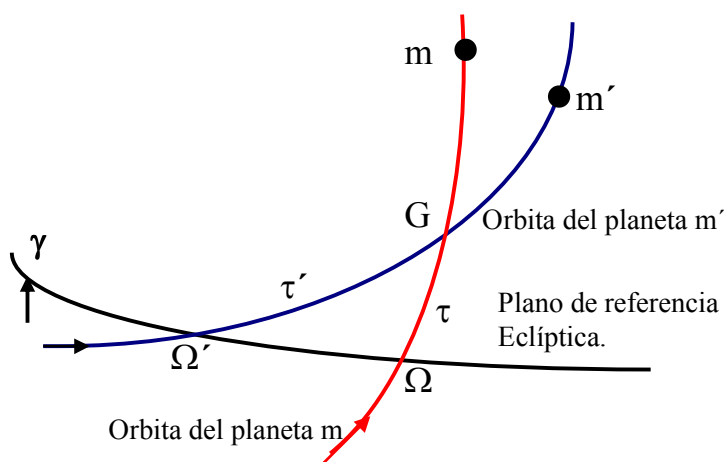
donde: $N = N\left(\frac{a}{a'}\right)$ asumiendo que $a < a'$; $\eta = \text{sen} \frac{J}{2}$; $D = \alpha \lambda + \alpha' \lambda' + \beta \omega + \beta' \varpi' - 2 \gamma \tau'$; donde

$\lambda = n t + \varepsilon + \tau' - \tau$; $\omega = \varpi + \tau' - \tau$. Siendo τ y τ' las longitudes en las orbitas de m y m' , del nodo ascendente de m respecto de m' ; ver Figura 39.

En el ítem anterior, estudiamos que la sexta ecuación diferencial del sistema (7.21) definida como ¹:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -A \frac{\partial R}{\partial a} + \dots$$

¹ Consultar ecuación (7.17) pág. 157.



NOTA: Los ángulos τ y τ' se definen como:

$$\tau' = \gamma \Omega' + \Omega' G$$

$$\tau = \gamma \Omega + \Omega G$$

τ y τ' son las longitudes en las órbitas de m y m' del nodo ascendente de m respecto de m' ; es decir la distancia γG . $(\tau' - \tau)$ es la diferencia en longitud entre el planeta m respecto del planeta m' .

Fig. 39. G es el punto de intersección de las órbitas de m y m' ; τ y τ' son las longitudes, en dichas órbitas, de los nodos ascendentes respecto de G.

aparece la derivada parcial de $\frac{\partial R}{\partial a}$, la cual se calcula a partir del desarrollo de la *función perturbadora* R ; teniendo en cuenta que a (semi eje mayor del planeta m) aparece implícitamente en N y explícitamente en D ¿ porqué ?.

Entonces, si calculamos $\frac{\partial R}{\partial a}$ aparece un *término secular* (proporcional al tiempo) ¹, el cual se puede eliminar reemplazando l y l' por las expresiones:

$$l = n t + \varepsilon = \int n dt + \varepsilon_1, \quad l' = n' t + \varepsilon' = \int n' dt + \varepsilon'_1. \tag{7.22}$$

Si indicamos con: $\rho = \int n dt$, y $\rho' = \int n' dt$; y luego reemplazamos en el argumento D se tiene

$$D = \alpha (\rho + \varepsilon_1 + \tau' - \tau) + \alpha' (\rho' + \varepsilon'_1) + \beta \omega + \beta' \omega' - 2 \gamma \tau'.$$

NOTA: Las variables ε_1 y ε'_1 no representan las *longitudes medias de la época*, sino que están determinadas por las relaciones (7.22).

Con la introducción de la variables ρ y ρ' el término secular se anula; entonces, las ecuaciones diferenciales que definen la variación de los elementos elípticos de los planetas m y m' conservan la misma forma pero las derivadas de $\frac{\partial R}{\partial a}$ y $\frac{\partial R'}{\partial a'}$ se deben calcular derivando *solamente los coeficientes de los cos D*, i.e., sin hacer variar los argumentos de los cosenos.

¹ Consultar ecuación (7.20) pág. 163.

Entonces, podemos resumir diciendo que cualquiera de las ecuaciones diferenciales de los elementos elípticos de m se puede escribir de la forma:

$$\frac{d\sigma}{dt} = m' F(\rho + \varepsilon, \rho' + \varepsilon', a, a', e, e', \dots) \quad (7.23)$$

donde σ representa a uno de los seis elementos. Una expresión similar para un elemento cualquiera del planeta m' , i.e.,

$$\frac{d\sigma'}{dt} = m F(\rho + \varepsilon, \rho' + \varepsilon', a, a', e, e', \dots)$$

Hemos analizado estos sistemas de ecuaciones diferenciales, los cuales se pueden resolver mediante el método de *Poincaré*¹, ya que las masas m y m' en el Sistema Solar son muy pequeñas (menor que $10^{-3} \mathcal{M}_{\text{Sol}}$) luego, las soluciones de estas ecuaciones, en serie de potencias de las masas perturbadoras, son convergentes al menos durante un intervalo de tiempo suficientemente grande.

¿Cómo se son estas soluciones?. En desarrollos en serie, de la forma:

$$\sigma = \sigma_0 + \delta_1 \sigma_0 + \delta_2 \sigma_0 + \dots \quad (7.24)$$

donde $\sigma_0 = \text{const.}$ ²; además, como hemos visto, las perturbaciones $\delta_n \sigma_0$ son funciones del tiempo.

Entonces, si reemplazamos los σ (elementos orbitales) en ambos miembros de (7.23) por el desarrollo propuesto (7.24), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta_1 \sigma_0) + \frac{d}{dt}(\delta_2 \sigma_0) + \dots = m' F(\rho_0 + \varepsilon_0 + \delta_1 \rho_0 + \delta_1 \varepsilon_0 + \dots; \rho'_0 + \varepsilon'_0 + \delta'_1 \rho'_0 + \delta'_1 \varepsilon'_0 + \dots \\ ; a_0 + \delta_1 a_0 + \dots; a'_0 + \delta'_1 a'_0 + \dots). \end{aligned}$$

Como hemos estudiado, es posible desarrollar el segundo miembro en un entorno de los elementos σ_0 (valor inicial) es decir, en torno de: $\rho_0 + \varepsilon_0, \rho'_0 + \varepsilon'_0, a_0, a'_0, \dots$; luego, dicho desarrollo tiene la forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta_1 \sigma_0) + \frac{d}{dt}(\delta_2 \sigma_0) + \dots = m' F(\rho_0 + \varepsilon_0, \rho'_0 + \varepsilon'_0, a_0, a'_0, \dots) + m' \left[\frac{\partial F}{\partial \rho_0} (\delta_1 \rho_0 + \delta_1 \varepsilon_0 + \dots) \right. \\ \left. + \frac{\partial F}{\partial \rho'_0} (\delta_1 \rho'_0 + \delta_1 \varepsilon'_0 + \dots) + \frac{\partial F}{\partial a_0} (\delta_1 a_0 + \dots) + \right. \\ \left. + \frac{\partial F}{\partial a'_0} (\delta_1 a'_0 + \dots) + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

¹ Consultar: **Verhulst**, F.; 2000, “*Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*”, pág. 122.

Marsden, J.E. & **Retin**, T.S.: 1999, “*Introduction to Mechanics and Symmetry*”, pág. 47.

² Es un elemento osculador de la órbita.

e identificando los coeficientes de las potencias homólogas de la masa m' resulta,

$$\frac{d}{dt}(\delta_1 \sigma_0) = m' F(\rho_0 + \varepsilon_0, \rho'_0 + \varepsilon'_0, a_0, a'_0, e_0, e'_0, \dots) \quad (7.25a)$$

Ídem para la masa m

$$\frac{d}{dt}(\delta_1 \sigma'_0) = m F'(\rho_0 + \varepsilon_0, \rho'_0 + \varepsilon'_0, a_0, a'_0, e_0, e'_0, \dots) \quad (7.25b)$$

Las ecuaciones diferenciales ¹ (7.25a) y (7.25b) permiten calcular y determinar las *perturbaciones de primer orden* de los elementos elípticos: $a, e, i, \Omega, \varpi, \varepsilon$; y análogamente para los elementos de m' .

Las ecuaciones diferenciales correspondientes a las *perturbaciones de segundo orden* en las masas son:

$$\frac{d}{dt}(\delta_2 \sigma_0) = m' \left[\frac{\partial F}{\partial \rho_0}(\delta_1 \rho_0 + \delta_1 \varepsilon_0) + \frac{\partial F}{\partial \rho'_0}(\delta_1 \rho'_0 + \delta_1 \varepsilon'_0) + \frac{\partial F}{\partial a_0}(\delta_1 a_0) + \frac{\partial F}{\partial a'_0}(\delta_1 a'_0) + \dots \right]$$

y una expresión similar para los elementos correspondientes de σ' ; del mismo modo, se definen ED semejantes para las sucesivas perturbaciones de orden superior.

Analicemos en primer lugar, las perturbaciones de primer orden, las cuales son como hemos estudiado, de la forma:

$$\frac{d}{dt}(\delta_1 \sigma_0) = m' F(\rho_0 + \varepsilon_0, \rho'_0 + \varepsilon'_0, a_0, a'_0, e_0, e'_0, \dots)$$

entonces, si reemplazamos en los segundos miembros, de esta ecuación diferencial, los elementos elípticos de m , a por a_0 , a' por a'_0 , e por e_0 , - - -; estas ecuaciones se pueden escribir de la forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\delta_1 a_0) = A_0 \frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon_0} \\ \frac{d}{dt}(\delta_1 e_0) = B_0 \frac{\partial R_0}{\partial \varpi} + C_0 \frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon_0} \\ \text{-----} \end{cases} \quad (7.26)$$

donde,

$$R_0 = \sum N \left(\frac{a_0}{a'_0} \right) e_0^H e'_0{}^H \eta_0^F \cos D_0 \quad (7.27)$$

y el argumento D_0 tiene la forma: $D_0 = \alpha(\rho_0 + \varepsilon_0 + \tau' - \tau) + \alpha'(\rho'_0 + \varepsilon'_0) + \beta \omega_0 + \beta' \varpi'_0 - 2 \gamma \tau'_0$.

¹ En realidad constituyen un sistema de seis ecuaciones diferenciales correspondiente a los seis elementos σ_i de la masa m , y en forma análoga para los seis elementos σ'_i de la masa m' ($i = 1, 2, \dots, 6$).

Expresiones análogas para las perturbaciones de primer orden correspondiente a los elementos del planeta m' perturbado por m .

Los coeficientes del sistema (7.26) tienen la forma: $A_0 = \frac{2}{n_0 a_0}$; $B_0 = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{n_0 a_0 e_0}$; etc.; donde suponemos que el producto $n_0 a_0$ está relacionado con la siguiente constante: $n_0 a_0 = k^2 (1+m)$, siendo k la constante de la gravitación de Gauss para el Sistema Solar ¹; 1 es la masa del Sol y m la masa del planeta expresada en masas solares.

Cálculo de las perturbaciones de n , movimiento medio. El sistema (7.25a) nos permite calcular las perturbaciones de a_0 ; recordemos que $a = a_0 + \delta_1 a_0 + \delta_2 a_0 + \dots$; y teniendo en cuenta la expresión $n^2 a^3 = \mu$ entonces, se tiene:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\mu} a^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\mu} [a_0 + \delta_1 a_0 + \delta_2 a_0 + \dots]^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}} \left[1 + \frac{\delta_1 a_0}{a_0} + \frac{\delta_2 a_0}{a_0} + \dots \right]^{-\frac{3}{2}}$$

desarrollando la expresión entre corchetes resulta,

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\delta_1 a_0}{a_0} + \frac{\delta_2 a_0}{a_0} + \dots \right) + \frac{15}{8} \left(\frac{(\delta_1 a_0)^2}{a_0^2} + \dots \right) + \dots \right]$$

además, n admite el siguiente desarrollo, según vimos en (7.24): $n = n_0 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0 + \dots$, por lo tanto, comparando los términos, de igual potencia, en cada desarrollo se tiene,

$$n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}}$$

$$\delta_1 n_0 = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}} \frac{\delta_1 a_0}{a_0} = -\frac{3}{2} \frac{n_0}{a_0} \delta_1 a_0$$

$$\delta_2 n_0 = -\frac{3}{2} \frac{n_0}{a_0} \delta_2 a_0 + \frac{15}{8} \frac{n_0}{a_0^2} \delta_2 a_0 + \dots$$

Este sistema de ecuaciones nos dice que conocida las perturbaciones del semieje mayor a es posible conocer y determinar las perturbaciones del movimiento medio n y por tanto, podemos calcular las perturbaciones de ρ ; recordar que $\rho = \int n dt$. Entonces, si $n = n_0 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0 + \dots$ y ρ admite el siguiente desarrollo: $\rho = \rho_0 + \delta_1 \rho_0 + \delta_2 \rho_0 + \dots = \int (n_0 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0 + \dots) dt$, igualando los términos correspondientes, resulta el siguiente sistema:

¹ El valor de $k = 0.01720209895\dots$ conocido como *constante Gaussiana*. Las unidades físicas son: la unidad de distancia la distancia Tierra-Sol; unidad de masa una masa solar y unidad de tiempo un día (86 400 seg.). Las dimensiones de k^2 son las mismas que la constante de la Gravitación G .

$$\rho_0 = \int n_0 dt = n_0 t$$

$$\delta_1 \rho_0 = \int (\delta_1 n_0) dt$$

$$\delta_2 \rho_0 = \int (\delta_2 n_0) dt$$

Expresiones similares para los elementos del planeta m'.

$$\rho'_0 = \int n'_0 dt = n'_0 t$$

$$\delta_1 \rho'_0 = \int (\delta_1 n'_0) dt$$

$$\delta_2 \rho'_0 = \int (\delta_2 n'_0) dt$$

Las perturbaciones de orden superior tienen expresiones similares. Notar que todas ellas dependen de las perturbaciones sucesivas de n_0 .

Consideremos nuevamente el sistema (7.26), si multiplicamos ambos miembros, de cada igualdad, por dt e integramos obtenemos,

$$\delta_1 a_0 = \int A_0 \frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon_0} dt = A_0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \int R_0 dt$$

$$\delta_1 e_0 = B_0 \frac{\partial}{\partial \varpi_0} \int R_0 dt + C_0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \int R_0 dt$$

En el desarrollo analítico de las perturbaciones, en cada una de ellas, aparece la integral $\int R_0 dt$, la cual es fácil de calcular; en efecto, teniendo en cuenta la relación (7.27) se tiene

$$\int R_0 dt = \sum N \left(\frac{a_0}{a'_0} \right) e_0^H e'_0{}^H \eta_0^F \int \cos D_0 dt$$

donde el integrando $\cos D_0$, se puede expresar de la forma:

$$\begin{aligned} \cos D_0 &= \cos [\alpha (n_0 t + \varepsilon_0 + \tau'_0 - \tau_0) + \alpha' (n'_0 t + \varepsilon'_0) + \beta \omega_0 + \beta' \varpi'_0 - 2\gamma \tau'] \\ &= \cos [(\alpha n_0 + \alpha' n'_0) t + \alpha (\varepsilon_0 + \tau'_0 - \tau_0) + \alpha' \varepsilon'_0 + \beta \omega_0 + \beta' \varpi'_0 - 2\gamma \tau'] \end{aligned}$$

y reemplazando en la integral resulta:

$$\int \cos D_0 dt = \int \cos [(\alpha n_0 + \alpha' n'_0) t + \alpha(\varepsilon_0 + \tau'_0 - \tau_0) + \alpha' \varepsilon'_0 + \beta \omega_0 + \beta' \varpi'_0 - 2\gamma \tau'] dt$$

$$\int \cos D_0 dt = \frac{1}{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)} \operatorname{sen} D_0.$$

NOTA: Expresión válida siempre que: $(\alpha n_0 + \alpha' n'_0) \neq 0$.

De este modo se pueden calcular las perturbaciones de primer orden de los elementos elípticos de las órbitas de los planetas m y m' respectivamente; entonces, habiendo evaluado la integral sólo resta derivar respecto del elemento orbital correspondiente; por lo tanto, las perturbaciones de primer orden se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta_1 a_0 &= A_0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left(\sum N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \frac{\operatorname{sen} D_0}{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)} \right) \\ \delta_1 e_0 &= B_0 \frac{\partial}{\partial \varpi_0} \left(\sum N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \frac{\operatorname{sen} D_0}{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)} \right) + \\ &+ C_0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left(\sum N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \frac{\operatorname{sen} D_0}{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)} \right). \\ \delta_1 i_0 &= \text{-----} \end{aligned}$$

Y expresiones análogas para los restantes elementos elípticos de m y m' . Por lo tanto, después de calcular las respectivas derivadas resulta,

$$\begin{aligned} \delta_1 a_0 &= A_0 \sum N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \alpha \frac{\cos D_0}{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)}. \\ \delta_1 e_0 &= B_0 \sum N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \beta \frac{\cos D_0}{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)} + \\ &+ C_0 \sum N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \alpha \frac{\cos D_0}{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)}. \\ \delta_1 i_0 &= \text{-----} \end{aligned} \tag{7.28}$$

Ecuaciones similares para los restantes elementos, i , Ω , ϖ , ε .

El sistema de ecuaciones (7.28), en total seis ED, constituye las fórmulas finales de las perturbaciones de primer orden. Como se puede apreciar, todas las perturbaciones son funciones periódicas del tiempo t , ya que: $\cos D_0$ es una función periódica de t con período 2π . Debemos destacar que estas fórmulas son válidas si: $(\alpha n_0 + \alpha' n'_0) \neq 0$.

Cálculo de las perturbaciones de primer orden de los elementos elípticos ¹.

Hemos estudiado anteriormente que $l = n t + \varepsilon = \varepsilon^{(1)} + \int n dt$; entonces, si definimos $\int n dt = \rho$ resulta $l = \varepsilon^{(1)} + \rho$. Recordemos que $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon + \int t dn = \varepsilon + n t - \int n dt$, donde ε es la longitud media de la época. Entonces, es posible calcular las perturbaciones en longitud conociendo las perturbaciones de primer y segundo orden del movimiento medio n .

$$\begin{aligned} \delta_1 \rho_0 &= \int (\delta_1 n_0) dt = -\frac{3}{2} \frac{n_0}{a_0} \int (\delta_1 a_0) dt = \\ &= -\frac{3}{2} \frac{n_0}{a_0} \int A_0 \sum N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \alpha \frac{\cos D_0}{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)} dt = \\ &= -\frac{3}{2} \frac{n_0}{a_0} \sum A_0 N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \frac{\alpha}{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)} \int \cos D_0 dt. \text{ Luego} \\ \delta_1 \rho_0 &= -\frac{3}{2} \frac{n_0}{a_0} \sum A_0 N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \frac{\alpha}{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)^2} \text{sen } D_0. \end{aligned}$$

Expresión que representa la perturbación de primer orden de ρ relacionado con n y a su vez con l . Es necesario analizar el caso en que el denominador $(\alpha n_0 + \alpha' n'_0) = 0$, ó que alcance valores muy pequeños. Supongamos primero que $(\alpha n_0 + \alpha' n'_0) \equiv 0$; identidad que sólo se satisface si $\alpha = \alpha' = 0$ (*porque?*); entonces, el argumento D_0 toma la forma: $D_0 = \beta \omega_0 + \beta' \varpi'_0 - 2 \gamma \tau'_0$; y por tanto, la variación de la perturbación de $\delta_1 a_0$ tiene la expresión ²:

$$\frac{d}{dt}(\delta_1 a_0) = A_0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} [\sum N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \cos(\beta \omega_0 + \beta' \varpi'_0 - 2 \gamma \tau'_0)] \equiv 0,$$

ya que no es función de ε . Luego, resulta: $[\delta_1 a_0]_{\alpha=\alpha'=0} = 0$.

En forma análoga podemos estudiar la variación $(\delta_1 e_0)$ derivando la segunda ecuación de (7.28), entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta_1 e_0) &= B_0 \frac{\partial}{\partial \omega_0} \left\{ \sum N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \cos(\beta \omega_0 + \beta' \varpi'_0 - 2 \gamma \tau'_0) \right\} + \\ &+ C_0 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \left\{ \sum N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \cos(\beta \omega_0 + \beta' \varpi'_0 - 2 \gamma \tau'_0) \right\}. \end{aligned}$$

Luego,

¹ Consultar: **Brouwer, D. & Clemence, G.M.**; 1961, “*Methods of Celestial Mechanics*”, págs. 291-298.

² Consultar primera ecuación de (7.28).

$$\frac{d}{dt}(\delta_1 e_0) = -B_0 \sum N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \beta \sin(\beta \omega_0 + \beta' \varpi'_0 - 2\gamma \tau'_0)$$

Integrando resulta,

$$[\delta_1 e_0] = -B_0 t \sum N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \beta \sin(\beta \omega_0 + \beta' \varpi'_0 - 2\gamma \tau'_0)$$

ó también,

$$[\delta_1 e_0] = M t.$$

Este resultado nos dice que las perturbaciones de primer orden de los elementos orbitales elípticos son proporcionales al tiempo; excepto el caso del semi eje mayor a .

§ 7.7 Perturbaciones en el Sistema Planetario.

En el ítem anterior vimos que los elementos elípticos de un planeta de masa m , $\{a, e, i, \Omega, \varpi, \varepsilon\}$, perturbado en su movimiento alrededor del Sol por otro planeta de masa m' y elementos elípticos $\{a', e', i', \Omega', \varpi', \varepsilon'\}$ pueden expresarse, en primera aproximación respecto de las masas, de la forma:

$$\sigma = \sigma_0 + \lambda \sigma_0 t + \Sigma \text{ términos periódicos.}$$

$$\sigma' = \sigma'_0 + \lambda \sigma'_0 t + \Sigma \text{ términos periódicos.}$$

donde $\lambda_{a_0} = 0$ y $\lambda_{a'_0} = 0$ (*porque?*). Es decir, el coeficiente λ para el semi eje mayor a , del planeta m , es nulo y análogamente para a' ; por lo tanto, los semi ejes mayores carecen de términos seculares, en primera aproximación, respecto de las masas, *Teorema de Laplace*¹. Luego, todos los elementos orbitales, excepto a , contienen términos seculares, proporcionales a t , de primer orden con respecto a las masas. Este enunciado constituye el primer teorema sobre la estabilidad del Sistema Solar y fue demostrado, hasta el segundo orden en las excentricidades, por *Laplace* en 1773².

También hemos estudiado, que entre los términos periódicos pueden existir algunos con períodos muy largos, los cuales producen, principalmente en las longitudes medias, desigualdades o perturbaciones apreciables. Además vimos que la perturbación de primer orden δ_1 en la longitud media ρ_0 del planeta m se puede escribir de la forma:

$$\delta_1 \rho_0 = -\frac{3}{a_0} \sum N_0 e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \frac{\alpha}{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)^2} \sin D_0.$$

donde $D_0 = \alpha(\rho_0 + \varepsilon_0) + \alpha'(\rho'_0 + \varepsilon'_0) + \beta \omega + \beta' \varpi' - 2\gamma \tau'$; y $\rho_0 = n_0 t$; $\rho'_0 = n'_0 t$.

Analicemos, en primer lugar, el denominador; si $(\alpha n_0 + \alpha' n'_0) = 0$ ó toma valores muy próximos a cero entonces, puede ocurrir que $\alpha = \alpha' = 0$ ó que exista una relación de proporcionalidad entre los coeficientes α y α' y los movimientos medios n_0 y n'_0 ; i.e., $\alpha'/\alpha \sim n_0/n'_0$.

¹ **Arnold, V. I., Kozlov, V. V. & Neishtadt, A. I.**; 2006, “*Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*”, Capítulo 6, pág. 261.

Brouwer, D. and Clemence, G. M.; 1961, “*Methods of Celestial Mechanics*”; Capítulo XVI, págs. 507-529.

² Memoria presentada en la *Academia de Ciencias de Paris*.

Por lo tanto, si el denominador $(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)$ es un número muy pequeño, el coeficiente del término periódico correspondiente a $\delta_1 \rho_0$ puede alcanzar valores significativos, tal es el caso para los planetas Júpiter y Saturno. En efecto,

para Júpiter: $n_0 = 299''.13$, y

para Saturno: $n'_0 = 120''.45$

entonces, la relación:

$$5n'_0 - 2n_0 = 3''.99 \cong 4'' \cong 0.000\ 019 \sim 1.9 \times 10^{-5} \text{ rad.},$$

donde $\alpha = -2$ y $\alpha' = 5$, en consecuencia, $\frac{1}{(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)} \sim 5.26 \times 10^4$.

Este resultado demuestra que el cociente puede alcanzar valores muy grandes.

Entonces, ¿de que “orden” es el coeficiente del término periódico correspondiente?

El orden está determinado por la suma de los *exponentes* de los distintos factores, a saber:

$$H + H' + F \geq |\alpha + \alpha'| = |-2 + 5| \geq 3.$$

Por lo tanto, el orden del coeficiente es mayor ó igual que 3, aún cuando las excentricidades de Júpiter y Saturno son pequeñas ¹, este coeficiente es grande y por consiguiente, la perturbación puede ser muy importante y significativa. Así por ejemplo,

Para Júpiter la perturbación de largo período es del orden: $\overline{\delta_1 \rho_0} \sim 20' \text{ sen } D_0$;

y para Saturno: $\overline{\delta_1 \rho'_0} \sim 48' \text{ sen } D_0$.

entonces, en este caso, $D_0 = (5n'_0 - 2n_0) t + \dots$

Además, el período T^* correspondiente del término: $\text{sen } D_0$ es:

$$T^* = \frac{2\pi}{(5n'_0 - 2n_0)} = \frac{\left(\frac{2\pi}{n_0}\right)}{(5n'_0 - 2n_0)} = \frac{n_0}{(5n'_0 - 2n_0)} T_{\text{Jup}} \cong \frac{299''}{4''} T_{\text{Jup}} \sim 75 T_{\text{Jup}} \sim 900 \text{ años}^2.$$

NOTA: Los valores adoptados son aproximados, a los efectos de obtener un orden de magnitud en las cantidades.

Es importante señalar que no sólo para valores de $\alpha = -2$ y $\alpha' = 5$ es pequeña la cantidad definida por: $(\alpha n_0 + \alpha' n'_0)$; también la diferencia: $29n_0 - 72n'_0 = 2''.37 = 1.15 \times 10^{-5} \text{ rad.}$ resulta un valor muy pequeño.

¹ Las excentricidades son: $e_{\text{Jup}} \cong 0,0484$ y $e_{\text{Sat}} \cong 0,0555$.

² Recordar que $(5n'_0 - 2n_0) \sim 4''$ y el cociente $299''.13 / 3''.99 = 74,9699 \sim 75$. El período orbital de Júpiter es: $T_{\text{Jup}} = 11, 8592 \text{ yr.}$ Luego, $75 \times T_{\text{Jup}} \cong 889,44 \text{ años.}$

Este valor produciría “*aparentemente*” una perturbación aún mayor que la anterior sin embargo, este caso afortunadamente no ocurre porque el orden del coeficiente es: $H + H' + F \geq |\alpha + \alpha'| \geq 43$ y por tanto, un valor muy pequeño para: $e_0^H e_0^{H'} \eta_0^F \sim 1,1 \times 10^{-56}$ luego, la perturbación carece de interés astronómico y práctico.

El término secular en la función perturbadora. Clasificadas de este modo las perturbaciones de primer orden, sólo nos queda la duda acerca de la existencia de las perturbaciones seculares en los elementos elípticos, si es real ó simplemente debido al método de integración que hemos adoptado; porque podría ocurrir que hallada la solución del sistema de ecuaciones diferenciales de los elementos elípticos, por un proceso infinito, dicho término secular aparente fuese el primer término de un desarrollo de la forma:

$$\sigma = \sigma_0 + \sum \text{términos periódicos} + m' t - \frac{(m' t)^3}{3!} + \frac{(m' t)^5}{5!} - \dots$$

Notar que: el desarrollo en serie de potencias de $(m' t)$ es la representación de la función: $\text{sen}(m' t)$.

Se puede demostrar que si la excentricidad y la inclinación de la órbita del planeta m es pequeña entonces, σ admite el desarrollo enunciado; es decir:

$$\sigma = \sigma_0 + \sum \text{términos periódicos} + \text{sen}(m' t).$$

Vamos a resolver el problema suponiendo que solamente son tres los cuerpos del Sistema Solar, a saber: Júpiter, Saturno y el Sol ¹. La idea consiste en considerar, en la parte secular de la función perturbadora y por tanto la parte secular de $\frac{1}{\Delta}$, los términos de segundo orden en las excentricidades e inclinaciones de las órbitas. La parte secular, como hemos estudiado ², tiene la forma:

$$\left[\frac{1}{\Delta} \right] = \sum N e^H e'^{H'} \eta^F \cos(\beta \omega + \beta' \varpi' - 2 \gamma \tau').$$

donde, $\alpha = \alpha' = 0$ y $N = N \left(\frac{a}{a'} \right)$ siendo a el semieje mayor de Júpiter y a' de Saturno. Además, los coeficientes y exponentes satisfacen las relaciones:

$$\begin{aligned} -\infty &\leq \beta < +\infty, & H &= |\beta| + n^\circ \text{ par} \geq 0 \\ -\infty &< \beta' \leq +\infty, & H' &= |\beta'| + n^\circ \text{ par} \geq 0 \\ 0 &< \gamma \leq +\infty, & F &= 2\gamma + n^\circ \text{ par} \geq 0 \\ \beta + \beta' - 2\gamma &= 0, \end{aligned}$$

Por lo tanto, la parte secular de $\frac{1}{\Delta}$, hasta los términos de segundo orden, tiene la expresión:

$$\left[\frac{1}{\Delta} \right] = N_0 + N_1 e^2 + N_2 e'^2 + N_3 \eta^2 + N_4 e e' \cos(\omega - \varpi').$$

¹ El método que vamos a desarrollar en completamente general.

² Consultar Ecuac. (7.12), pág. 151.

En el último término los valores del argumento son: $\beta = 1, \beta' = -1, \gamma = 0$. Recordar que $\omega = \varpi + \tau' - \tau$, entonces, el desarrollo anterior, que corresponde a la parte secular de la función perturbadora, toma la forma:

$$\left[\frac{1}{\Delta} \right] = N_0 + N_{12} (e^2 + e'^2 - 4\eta^2) + N_4 e e' \cos (\varpi - \varpi' + \tau' - \tau). \quad (7.29)$$

donde:

$$\begin{aligned} N_0 &> 0 \\ N_1 &= N_2 = N_{12} \\ N_3 &= -4 N_2 \\ N_4 &< 0. \end{aligned}$$

El próximo paso es demostrar que el argumento $(\tau' - \tau)$ es de “segundo orden” respecto de las inclinaciones; para ello consideremos la expresión:

$$\begin{aligned} e e' \cos (\varpi - \varpi' + \tau' - \tau) &= e e' [\cos (\varpi - \varpi') \cos (\tau' - \tau) - \sin (\varpi - \varpi') \sin (\tau' - \tau)] = \\ &= e e' \cos (\varpi - \varpi') \left[1 - \frac{(\tau' - \tau)^2}{2!} + \dots \right] - \\ &- e e' \sin (\varpi - \varpi') \left[(\tau' - \tau) - \frac{(\tau' - \tau)^3}{3!} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Notar que hemos desarrollado seno y coseno de $(\tau' - \tau)$ en series de potencias.

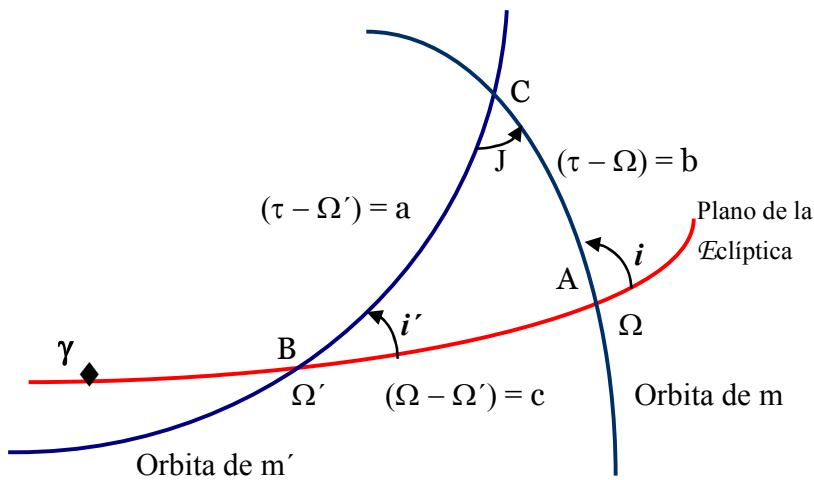
Relaciones entre lados y ángulos. Consideremos las orbitas de m y m' respecto del plano de la eclíptica, ver Figura 40.

Teniendo en cuenta las relaciones trigonométrías entre lados y ángulos, se tiene:

$$\begin{aligned} \cos \frac{c}{2} \sin \frac{a-b}{2} &= \sin \frac{a}{2} \sin \frac{A-B}{2}; \quad \cos \frac{c}{2} \cos \frac{a-b}{2} = \sin \frac{c}{2} \sin \frac{A+B}{2}, \text{ luego} \\ \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} &= \operatorname{tg} \frac{c}{2} \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}}. \end{aligned}$$

Además, los ángulos (elementos orbitales) verifican las relaciones:

$$\frac{A-B}{2} = \frac{180^\circ - i - i'}{2} = 90^\circ - \frac{i + i'}{2}; \quad \frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ + i' - i}{2} = 90^\circ - \frac{i - i'}{2}.$$



Recordar:

Ω y Ω' longitud del nodo ascendente.

$$\tau = \gamma\Omega + \Omega C$$

$$\tau' = \gamma\Omega' + \Omega' C$$

i e i' = inclinación de las órbitas.

Fig. 40. La Figura muestra la relación entre los lados y ángulos para las órbitas de los planetas m y m' , respecto al plano de la eclíptica.

A partir de expresiones trigonométricas entre los lados y ángulos, podemos escribir las siguientes relaciones ¹, ver Figura 40,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\tau' - \tau}{2} + \frac{\Omega - \Omega'}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega - \Omega'}{2}\right) \frac{\cos \frac{i + i'}{2}}{\cos \frac{i - i'}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\tau' - \tau}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega - \Omega'}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\tau' - \tau}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega - \Omega'}{2}\right)}.$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\tau' - \tau}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\Omega - \Omega'}{2}\right) \left[\frac{\cos\left(\frac{i + i'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{i - i'}{2}\right)} - 1 \right]}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\Omega - \Omega'}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{i + i'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{i - i'}{2}\right)}} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\Omega - \Omega'}{2}\right) \left[\cos \frac{i + i'}{2} - \cos \frac{i - i'}{2} \right]}{\cos \frac{i - i'}{2} + \operatorname{tg} \frac{\Omega - \Omega'}{2} \cos \frac{i + i'}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\tau' - \tau}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\Omega - \Omega'}{2} [-2 \operatorname{sen} i \operatorname{sen} i']}{\cos \frac{i - i'}{2} + \operatorname{tg} \frac{\Omega - \Omega'}{2} \cos \frac{i + i'}{2}};$$

entonces, esta igualdad prueba que:

¹ Consultar: Spiegel, M. R.; 1998, "Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas". Ed. McGraw-Hill.

$\frac{\tau' - \tau}{2} \sim A_{i'}$, por lo tanto, $(\tau - \tau')$ es de segundo orden en las inclinaciones como se quería demostrar ¹.

¿Porqué es de segundo orden en las inclinaciones ?.

Recordar que: $\text{sen } i = i - \frac{i^3}{3!} + \dots$, y $\text{sen } i' = i' - \frac{i'^3}{3!} + \dots$; por lo tanto: $\text{sen } i \text{ sen } i' = i i' + \dots$

NOTA: Recomendamos el artículo del Prof. Luc Duriez,

Duriez, L.; 1990, “*Le développement de la fonction perturbatrice*”, págs. 35-62.
Modern Métodos in Celestial Mechanics, Goutelas (Francia), Ed. Frontières.

Además, a partir del mismo triángulo esférico, ver Figura 40, resulta:

$$\cos J = \cos i \cos i' + \text{sen } i \text{ sen } i' \cos (\Omega - \Omega') \tag{a}$$

vamos a demostrar que el cos J se puede expresar de la forma:

$$\cos J = 1 - \text{tg}^2 i - \text{tg}^2 i' + \text{tg } i \text{ tg } i' \cos (\Omega - \Omega')$$

Recordemos que:

$$\text{sen } i = \frac{\text{tg } i}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 i}} = \text{tg } i - \frac{1}{2} \text{tg}^3 i + \dots,$$

$$\cos i = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 i}} = 1 - \frac{1}{2} \text{tg}^2 i + \dots;$$

ídem para i' ; luego, reemplazando en la ecuación (a) se tiene,

$$\cos J = (1 - \frac{1}{2} \text{tg}^2 i) (1 - \frac{1}{2} \text{tg}^2 i') + \text{tg } i \text{ tg } i' \cos (\Omega - \Omega')$$

y por tanto,

$$\cos J = 1 - \frac{1}{2} \text{tg}^2 i - \frac{1}{2} \text{tg}^2 i' + \text{tg } i \text{ tg } i' \cos (\Omega - \Omega').$$

expresión que se puede escribir como:

$$2 (1 - \cos J) = 2 \left[\frac{1}{2} \text{tg}^2 i + \frac{1}{2} \text{tg}^2 i' - \text{tg } i \text{ tg } i' \cos (\Omega - \Omega') \right]$$

recordemos (ver pág. 153) que: $\text{sen } \frac{J}{2} = \eta$, luego: $\cos J = 1 - 2 \eta^2$, y por tanto $(1 - \cos J) = 2 \eta^2$.

Entonces, $2 (1 - \cos J) = 4 \eta^2$; luego, la ecuación anterior resulta:

¹ Consultar: **Morbidelli, A.**; 2002, “*Modern Celestial Mechanics*”, págs. 39-57.

Brouwer, D. & Clemence, G. M.; 1961, “*Methods of Celestial Mechanics*”, págs. 507-515.

$$2(1 - \cos J) = 4\eta^2 = 4 \sin^2 \frac{J}{2} = 2 \left[\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 i + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 i' - \operatorname{tg} i \operatorname{tg} i' \cos(\Omega - \Omega') \right]$$

luego, reemplazando $4\eta^2$ en la ecuación (7.29) toma la forma:

$$\left[\frac{1}{\Delta} \right] = N_0 + N_{12} [e^2 + e'^2 - \operatorname{tg}^2 i - \operatorname{tg}^2 i' + 2 \operatorname{tg} i \operatorname{tg} i' \cos(\Omega - \Omega')] + \\ + N_4 e e' \cos(\varpi - \varpi') \quad (7.30)$$

Expresión que representa la parte secular de la función perturbadora hasta el segundo orden en las inclinaciones.

§ 7.8 Análisis cuando la excentricidad e inclinación son pequeñas.

En el Sistema Solar, en general, los valores de e y de i son pequeños, de modo que alguno de los denominadores en las ecuaciones que representan la variación de los elementos elípticos, ver (6.8) pág. 129, tienden también a ser pequeños. Esta dificultad se puede evitar (o regularizar) haciendo las siguientes sustituciones:

Si e es pequeño hacemos:

$$\begin{cases} h = e \operatorname{sen} \varpi \\ k = e \operatorname{cos} \varpi \end{cases}$$

y por tanto,

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k} \\ \frac{dk}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} \end{cases} \quad (7.31a)$$

análogamente, cuando i es pequeña se puede demostrar que las siguientes variables regularizan las ecuaciones (6.8), entonces se tiene:

$$\begin{cases} p = \operatorname{tg} i \operatorname{sen} \Omega \\ q = \operatorname{tg} i \operatorname{cos} \Omega \end{cases}$$

y sus derivadas,

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial q} \\ \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial p} \end{cases} \quad (7.31b)$$

Recomendamos:

Roy, A. E.; 1978, "Orbital Motion", pág. 203. Ed. Adam Hilger Ltd.

Danby, J. M. A.; 1992, "Fundamentals of Celestial Mechanics", pág. 337. Ed. Willmann-Bell, Inc.

Expresiones análogas para las ecuaciones diferenciales de los elementos elípticos del planeta m' ,

$$\begin{cases} h' = e' \sin \varpi' \\ k' = e' \cos \varpi' \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dh'}{dt} = \frac{1}{n' a'^2} \frac{\partial R'}{\partial k'} \\ \frac{dk'}{dt} = -\frac{1}{n' a'^2} \frac{\partial R'}{\partial h'} \end{cases} \quad (7.32a)$$

$$\begin{cases} p' = \text{tg } i' \sin \Omega' \\ q' = \text{tg } i' \cos \Omega' \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dp'}{dt} = \frac{1}{n' a'^2} \frac{\partial R'}{\partial q'} \\ \frac{dq'}{dt} = -\frac{1}{n' a'^2} \frac{\partial R'}{\partial p'} \end{cases} \quad (7.32b)$$

Nos proponemos revolver los sistemas (7.31a,b) y (7.32a,b) cuando en la *función perturbadora* R se consideran solamente los términos seculares hasta el segundo orden en las excentricidades e inclinaciones. Para ello analicemos las partes seculares de la función perturbadora i.e., $[R]$; con lo cual no obtendremos las funciones h, k, h', k' , sino las partes seculares de dichas funciones representada por $[h], [k], [h'], [k']$; ya que, la “parte secundaria” de la función perturbadora carece de términos seculares.

Recordemos que la parte secular de la función perturbadora, correspondiente al planeta de masa m , esta caracterizada por:

$$[R] = m' \left[\frac{1}{\Delta} \right]$$

y la parte secular de m' es:

$$[R'] = m \left[\frac{1}{\Delta} \right]$$

donde hemos supuesto que la constante de Gauss es igual a uno ($G = 1$).

NOTA: La parte principal de la función perturbadora correspondiente al movimiento del planeta de masa m entorno del Sol, perturbado por el planeta de masa m' , posee, como hemos analizado, una parte secular; luego, la parte secular de $\frac{1}{\Delta}$ (ver pág.174), admite un desarrollo en serie múltiple de la forma:

$$\left[\frac{1}{\Delta} \right] = \sum N e^H e'^H \eta^F \cos (\beta \omega + \beta' \varpi' + - 2 \gamma \tau')$$

siendo $\omega = \varpi + \tau' - \tau$.

En particular, si despreciamos, en este desarrollo, los términos de grado igual o mayor a cuarto en las excentricidades e inclinaciones, se obtienen expresiones reducidas de la forma, ver pág. 174.

$$\left[\frac{1}{\Delta} \right] = N_0 + N_1 e^2 + N_2 e'^2 + N_3 \eta^2 + N_4 e e' \cos (\omega - \varpi') \quad (7.33)$$

donde, $N_1 = N_2 = N_{12} \geq 0$; $N_3 = -4 N_{12}$; $N_4 \geq 0$.

Nos proponemos regularizar ¹ las ecuaciones diferenciales del movimiento en el caso en que la excentricidad ó inclinación se anulen o tomen valores muy pequeños, para ello se introducen las funciones auxiliares (7.31a,b) y (7.32a,b) correspondientes al planeta m y al planeta perturbador m'.

Por lo tanto, el objetivo es resolver estos dos sistemas de ED que son independientes entre si, cuando en ellos se reemplaza la función perturbadora por sus partes seculares, limitadas a sus primeros términos ²; entonces, la ecuación (7.33) toma la forma ³:

$$\left[\frac{1}{\Delta} \right] = N_0 + N_{12} \left[h^2 + k^2 + h'^2 + k'^2 - p^2 - q^2 - p'^2 - q'^2 + 2(pp' + qq') \right] + N_4 (h h' + k k')$$

Luego, en los sistemas (7.31a) y (7.32a) reemplazamos R por la parte principal, entonces resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d[h]}{dt} &= \frac{1}{na^2} \frac{\partial[R]}{\partial k}, & \frac{d[h']}{dt} &= \frac{1}{n'a'^2} \frac{\partial[R']}{\partial k'} \\ \frac{d[k]}{dt} &= -\frac{1}{na^2} \frac{\partial[R]}{\partial h}, & \frac{d[k']}{dt} &= -\frac{1}{n'a'^2} \frac{\partial[R']}{\partial h'} \end{aligned} \quad (7.34)$$

Donde, las derivadas de la parte principal de R, correspondiente a los términos seculares, tienen los siguientes desarrollos:

$$\frac{\partial[R]}{\partial k} = m' \frac{\partial \left[\frac{1}{\Delta} \right]}{\partial k} = m' (2 N_{12} k + N_4 k') = 2 m' N_{12} k + m' N_4 k'.$$

$$\frac{\partial[R]}{\partial h} = m' \frac{\partial \left[\frac{1}{\Delta} \right]}{\partial h} = m' (2 N_{12} h + N_4 h') = 2 m' N_{12} h + m' N_4 h'.$$

$$\frac{\partial[R']}{\partial k'} = m' \frac{\partial \left[\frac{1}{\Delta} \right]}{\partial k'} = m' (2 N_{12} k' + N_4 k) = 2 m' N_{12} k' + m' N_4 k.$$

$$\frac{\partial[R']}{\partial h'} = m' \frac{\partial \left[\frac{1}{\Delta} \right]}{\partial h'} = m' (2 N_{12} h' + N_4 h) = 2 m' N_{12} h' + m' N_4 h'.$$

¹ Regularizar significa realizar un cambio de variable para evitar un denominador nulo o que tienda a valores muy pequeños.

² Significa, que se desprecian los términos de orden cuatro o mayores en las excentricidades e inclinaciones; esto se ha hecho explícitamente al reducir las ecuaciones diferenciales a sus primeros términos.

³ Introduciendo las nuevas funciones: h, k, h', k', p, q, p', q'.

El siguiente paso es reemplazar los desarrollos obtenidos de [R], correspondiente a la parte secular, en el sistema de ecuaciones (7.34), entonces resulta

$$\begin{aligned} \frac{d[h]}{dt} &= \alpha k + \alpha' k', & \alpha &= \frac{2 m' N_{12}}{n a^2}, \\ \frac{d[k]}{dt} &= -\alpha h - \alpha' h', & \alpha' &= \frac{m' N_4}{n a^2}, \\ \frac{d[h']}{dt} &= \beta' k' + \beta k, & \beta &= \frac{m N_4}{n' a'^2}, \\ \frac{d[k']}{dt} &= -\beta' h' - \beta h, & \beta' &= \frac{2 m N_{12}}{n' a'^2}, \end{aligned} \tag{7.35}$$

Este es un sistema “reducido” de ecuaciones diferenciales de primer orden, en cuyos segundos miembros aparecen las funciones incógnitas (k, h, k', h'), pero restringido solamente a la parte secular. Como nuestro propósito es obtener las *perturbaciones seculares de primer orden respecto de las masas*, para simplificar la notación, eliminamos los corchetes del primer miembro.

Si admitimos el teorema de Poisson ¹, respecto de la invariabilidad de los semiejes mayores de las orbitas planetarias i.e., a y a' ; entonces, los movimientos medios n y n' carecen de términos seculares; luego, los coeficientes α, α', β y β' pueden considerarse constantes hasta el segundo orden respecto de las masas puesto que los coeficientes N_{12} y N_4 solo depende de la razón de los semiejes.

Por lo tanto, se deducen las siguientes consideraciones:

α y α' son constantes y además, por ser $N_{12} > 0$ (positivo) implica que $\alpha > 0$.

También, por ser $N_4 < 0$ se deduce que $\alpha' < 0$.

Análogamente se puede deducir que $\beta' > 0$ y $\beta < 0$.

Teniendo en cuenta estas observaciones, vamos a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, (7.35). Para ello introducimos variables complejas de la siguiente forma:

$$X = k + i h, \quad X' = k' + i h'.$$

derivando se tiene,

$$\dot{X} = \dot{k} + i \dot{h} = -\alpha h - \alpha' h' + i(\alpha k + \alpha' k') = i\alpha \left(k - \frac{h}{i} \right) + i\alpha' (k' + i h')$$

Además, por ser $\frac{1}{i} = -i$, entonces $-\frac{h}{i} = i h$, luego resulta: $\dot{X} = i\alpha X + i\alpha' X'$, (c)

¹ En 1773 Laplace publicó un teorema, posteriormente perfeccionado por Poisson hasta el segundo orden en las masas perturbadoras, donde demostraba que el Sistema Solar es estable en el sentido que cada planeta esta permanentemente restringido al interior de su propio anillo esférico; dos anillos planetarios nunca se intersectan. Este teorema demuestra que las variaciones en los semiejes mayores son puramente periódicos.

Derivando nuevamente la expresión anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}\ddot{X} - i\alpha \dot{X} &= i\alpha' X' = i\alpha' \left(\dot{k}' + i\dot{h}' \right) = i\alpha' [-\beta' h' - \beta h + i(\beta' k' + \beta k)] = \\ &= -i\alpha' \beta' h' - i\alpha' \beta h - \alpha' (\beta' k' + \beta k) = \\ &= -\alpha' \beta' (k' + ih') - \alpha' \beta (k + ih).\end{aligned}$$

Luego,
$$\ddot{X} - i\alpha \dot{X} = -\alpha' \beta' X' - \alpha' \beta X.$$

Además, teniendo en cuenta la ecuación (c) resulta: $X' = \frac{\dot{X} - i\alpha X}{i\alpha'}$, y reemplazando en la igualdad anterior, se tiene:

$$\ddot{X} - i\alpha \dot{X} = -\alpha' \beta' \frac{\dot{X} - i\alpha X}{i\alpha'} - \alpha' \beta X = i\beta' \dot{X} + \alpha\beta' X - \alpha' \beta X$$

finalmente, agrupando obtenemos

$$\ddot{X} - i(\alpha + \beta') \dot{X} - (\alpha\beta' - \alpha'\beta) X = 0.$$

Una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes complejos, donde la función incógnita $X(t)$ también es compleja la cual admite una solución del tipo exponencial: $X = e^{i\sigma t}$, cuyas derivadas son: $\dot{X} = i\sigma e^{i\sigma t}$; $\ddot{X} = -\sigma^2 e^{i\sigma t}$. Reemplazando estas derivadas en la ED, resulta:

$$-\sigma^2 e^{i\sigma t} - i(\alpha + \beta') i\sigma e^{i\sigma t} - (\alpha\beta' - \alpha'\beta) e^{i\sigma t} = 0, \text{ simplificando se tiene}$$

$$-\sigma^2 + (\alpha + \beta') \sigma - (\alpha\beta' - \alpha'\beta) = 0, \text{ y por tanto}$$

$\sigma^2 - (\alpha + \beta') \sigma - (\alpha\beta' - \alpha'\beta) = 0$; es decir, una ecuación algebraica de segundo grado en σ , cuyas dos raíces son reales ya que el discriminante es positivo, en efecto:

$$\frac{(\alpha + \beta')^2}{4} + \alpha'\beta - \alpha\beta' = \frac{(\alpha + \beta')^2 + 4\alpha'\beta - 4\alpha\beta'}{4} = \frac{1}{4} \left[(\alpha - \beta')^2 + 4\alpha'\beta \right] > 0$$

Entonces, las dos raíces σ_1 y σ_2 son reales luego, las dos soluciones particulares toman la forma:

$$X = e^{i\sigma_1 t}, \quad X = e^{i\sigma_2 t}$$

y por tanto, la solución general es:

$$X(t) = M e^{i\sigma_1 t} + N e^{i\sigma_2 t},$$

donde las constantes arbitrarias M y N también son complejas, definidas como:

$$M = \rho_1 e^{ic_2}, \quad N = \rho_2 e^{ic_2}$$

Por lo tanto, la solución general es de la forma

$$X = \rho_1 e^{i(\sigma_1 t + c_1)} + \rho_2 e^{i(\sigma_2 t + c_2)}. \quad (d)$$

Expresión que representa la solución buscada. Los exponentes σ_1 y σ_2 dependen de los coeficientes α , β , α' y β' ; las constantes c_1 y c_2 son arbitrarias. Por lo tanto, es posible calcular X' , ver ecuación (c) pág. 181, teniendo en cuenta la solución (d).

Nos proponemos ahora hallar las funciones h y k considerando la relación: $X = k + i h$, definida en la pág. 181. Para ello reemplazamos la solución hallada de X , luego

$$k + i h = \rho_1 [\cos(\sigma_1 t + c_1) + i \sin(\sigma_1 t + c_1)] + \rho_2 [\cos(\sigma_2 t + c_2) + i \sin(\sigma_2 t + c_2)]$$

entonces,

$$h = \rho_1 \sin(\sigma_1 t + c_1) + \rho_2 \sin(\sigma_2 t + c_2) \quad (e)$$

$$k = \rho_1 \cos(\sigma_1 t + c_1) + \rho_2 \cos(\sigma_2 t + c_2)$$

Hemos definido, ver (7.31a) pág. 178, que $h = e \sin \varpi$ y $k = e \cos \varpi$, entonces:

$$e^2 = h^2 + k^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 \rho_1 \rho_2 \cos[(\sigma_1 - \sigma_2)t + (c_1 - c_2)] \quad (7.36)$$

Esta ecuación nos dice que la excentricidad e , del planeta de masa m , es una función periódica del tiempo, t ; donde, σ_1 y σ_2 están definidos por los parámetros: α , β , α' y β' y las constantes: ρ_1 , ρ_2 , c_1 y c_2 dependen de las condiciones iniciales. Entonces, el período de e está dado por la expresión:

$$\text{Periodo } [e] = \frac{2\pi}{\sigma_1 - \sigma_2},$$

Resumiendo: la excentricidad e es una función periódica del tiempo t , con periodo $T = \frac{2\pi}{\sigma_1 - \sigma_2}$.

Los valores máximos y mínimos de e son:

$$e^2 \text{ máximo es: } e^2 < (\rho_1 + \rho_2)^2.$$

$$e^2 \text{ mínimo es: } e^2 > (\rho_1 - \rho_2)^2$$

por lo tanto, $(\rho_1 - \rho_2)^2 < e^2 < (\rho_1 + \rho_2)^2$.

Ejemplo. Si m es la masa de Júpiter y m' la masa de Saturno, resulta: $\sigma_1 = 22'$; $\sigma_2 = 3',4$; los valores de σ_1 y σ_2 se obtienen de la ecuación algebraica de segundo grado en σ , pág. 182; entonces, el periodo de $e \cong 70.000$ años.

En forma completamente análoga se puede obtener un desarrollo semejante para las inclinaciones de las orbitas de los planetas.

Sin embargo, no se obtiene el mismo resultado cuando analizamos la *longitud del nodo ascendente*, Ω ó la *longitud del perihelio*, ϖ . En efecto, hemos definido, ver (7.31a) pág. 178, las cantidades h y k ; y además, si tenemos en cuenta el sistema (e), pág. 183, resulta:

$$h = e \operatorname{sen} \varpi = \rho_1 \operatorname{sen} (\sigma_1 t + c_1) + \rho_2 \operatorname{sen} (\sigma_2 t + c_2)$$

$$k = e \operatorname{cos} \varpi = \rho_1 \operatorname{cos} (\sigma_1 t + c_1) + \rho_2 \operatorname{cos} (\sigma_2 t + c_2)$$

Por lo tanto, $\operatorname{tg} \varpi = \frac{h}{k} = \frac{\rho_1 \operatorname{sen} T_1 + \rho_2 \operatorname{sen} T_2}{\rho_1 \operatorname{cos} T_1 + \rho_2 \operatorname{cos} T_2}$; donde $T_1 = \sigma_1 t + c_1$ y $T_2 = \sigma_2 t + c_2$; entonces,

derivando respecto de t , se obtiene:

$$\frac{1}{\operatorname{cos}^2 \varpi} \dot{\varpi} = \frac{1}{k^2} [(\sigma_1 \rho_1 \operatorname{cos} T_1 + \sigma_2 \rho_2 \operatorname{cos} T_2)(\rho_1 \operatorname{cos} T_1 + \rho_2 \operatorname{cos} T_2) + (\rho_1 \operatorname{sen} T_1 + \rho_2 \operatorname{sen} T_2)(\sigma_1 \rho_1 \operatorname{sen} T_1 + \sigma_2 \rho_2 \operatorname{sen} T_2)].$$

Operando en ambos factores y agrupando resulta:

$$\dot{\varpi} = \frac{d\varpi}{dt} = \frac{\operatorname{cos}^2 \varpi}{k^2} [\sigma_1 \rho_1^2 + \sigma_2 \rho_2^2 + \sigma_1 \rho_1 \rho_2 \operatorname{cos} T_1 \operatorname{cos} T_2 + \sigma_2 \rho_1 \rho_2 \operatorname{cos} T_1 \operatorname{cos} T_2 + \sigma_2 \rho_1 \rho_2 \operatorname{sen} T_1 \operatorname{sen} T_2 + \sigma_1 \rho_1 \rho_2 \operatorname{sen} T_1 \operatorname{sen} T_2].$$

Teniendo en cuenta el desarrollo de: $\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$, finalmente resulta:

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\operatorname{cos}^2 \varpi}{k^2} \{ \sigma_1 \rho_1^2 + \sigma_2 \rho_2^2 + (\sigma_1 + \sigma_2) \rho_1 \rho_2 \operatorname{cos} [(\sigma_1 - \sigma_2) t + (c_1 - c_2)] \}$$

Expresión que demuestra que $\dot{\varpi}$ tiene signo constante y es positivo, por lo tanto ϖ es una función creciente del tiempo t .

Una síntesis del desarrollo de la función perturbadora.

Hemos analizado y desarrollado en el Capítulo 3 el “complejo problema” de tres cuerpos, a fin de obtener una solución cerrada; esta dificultad se origina cuando interactúan, gravitacionalmente, más de dos cuerpos con masa finita. También estudiamos que la dinámica del problema de dos cuerpos se puede resolver íntegramente; sin embargo, el problema de n -cuerpos ($n > 2$) es insoluble en el sentido de obtener expresiones analíticas que permitan describir el comportamiento de todos los cuerpos, para todo instante, no se pueden obtener salvo en casos muy especiales.

Hemos estudiado, ver § 3.6, que el movimiento de un planeta en el Sistema Solar está determinado por una ED vectorial de la forma ¹:

$$\vec{r}'' + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{F}$$

donde \vec{F} , la fuerza perturbadora, es el gradiente de una función potencial U i.e. $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$; la cual está definida como $U = U_0 + R$, siendo U_0 la función potencial adecuada al problema de dos cuerpos y R la función potencial correspondiente a los cuerpos restantes cuyas masas interactúan con el Sistema. El efecto de R (también llamada función perturbadora) es, por lo general, al menos un orden de magnitud menor que el de U_0 . Si esto se verifica entonces, los métodos de *perturbación general o especial* pueden ser utilizados para obtener el “futuro” comportamiento dinámico del cuerpo, con el grado de exactitud deseado. Por el contrario, si R no es un orden de magnitud menor que U_0 , resultado que puede ocurrir en una aproximación cercana de un cometa con Júpiter o en cierto escenario de un viaje Tierra-Luna, entonces es aconsejable utilizar los métodos de “*perturbaciones especiales*” ².

La mayoría de las teorías sobre “perturbaciones generales” consideran que la órbita de dos cuerpos (Sol-planeta) que corresponde a U_0 varía lentamente cuando los efectos gravitacionales de R no son importantes en magnitud, por lo tanto, estas teorías procuran obtener expresiones analíticas para la variación de los elementos orbitales debido a la poca influencia de R (perturbación de los restantes cuerpos) válido en un cierto intervalo de tiempo. Si los elementos de la órbita, supongamos una elipse, son $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0$ y τ_0 en el instante t_0 , entonces la órbita es una *elipse osculadora* y los elementos que la definen representan los *elementos osculadores* en el instante t_0 . Notar que la velocidad del planeta en el instante t_0 , en la *elipse osculadora*, es igual a su velocidad en la órbita real.

Sin embargo, a causa de la presencia de R los elementos en un tiempo futuro t_1 serán: $a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \omega_1$ y τ_1 y las diferencias $(a_1 - a_0), (e_1 - e_0)$, etc. representan las *perturbaciones* que sufren dichos elementos en el intervalo $(t_1 - t_0)$. Es evidente la dependencia entre las perturbaciones de los elementos orbitales y las perturbaciones en las coordenadas y componentes de la velocidad. Si las fórmulas que definen el movimiento de dos cuerpos, ver Capítulo 2, son usadas para obtener la posición $\{x, y, z\}$ y velocidad $\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$ en el instante t_1 a partir de los elementos osculadores en el instante t_0 , estos valores difieren de las correspondientes cantidades $\{x', y', z'\}$ y $\{\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'\}$ calculadas para el instante t_1 a partir de los elementos osculadores en ese instante; entonces las diferencias $(x - x')$, etc. representan las perturbaciones en las coordenadas, ídem para las velocidades.

La posibilidad de usar la solución (una sección cónica) del problema de dos cuerpos como una órbita intermedia se basa en su aproximación, al menos por un tiempo considerable, a la órbita real del cuerpo. Numerosos intentos analíticos y numéricos se han realizado con el fin de utilizar la órbita aproximada a la órbita real considerando a ésta como una órbita intermedia. Un excelente ejemplo es la teoría de la Luna propuesta por G. W. Hill (1838-1914); ver Capítulo 8.

NOTA. Consultar: **Wilson**, Curtis; 2010, “*The Hill-Brown Theory of the Moon’s Motion*”, Ed. Springer

¹ Consultar: **Roy**, A. E.; 1978, “*Orbital Motion*”, Capítulo 6, pág. 156.

² Recomendamos: **Roy**, A. E.; 1978, “*Orbital Motion*”, Capítulo 7, pág. 197.

En el caso de un satélite artificial es posible elegir, como una primera aproximación, una órbita que esta más distante de la descripción exacta del movimiento que una simple elipse Kepleriana.

Las perturbaciones generales son útiles no solamente para dar futuras posiciones del planeta, sino también porque ellas permiten descubrir ó detectar una fuente (cuerpos físicos) de ciertas perturbaciones observables; esto se deba a que en varias partes de la función perturbadora están presentes explícitamente expresiones analíticas. Por ejemplo, el descubrimiento de la forma de pera de la Tierra por **O'Keefe et al.**¹ fue hecha de un estudio de las perturbaciones de largo período de la órbita del Satélite 1958 (β_2) debido al tercer armónico en el potencial gravitacional de la Tierra.

Recomendamos:

Beutler, G.; 2005, "*Methods of Celestial Mechanics*", Ed. Springer-Verlag

De Pater, I. & Lissauer, J.; 2010, "*Planetary Sciences*", Ed. Cambridge University Press.

Dvorak, R. & Lhotka, Ch.; 2013, "*Celestial Dynamics. Chaoticity and Dynamics of Celestial Systems*", Ed. Wiley-VCH.

Murray, C.D. & Dermott, S.F.; 2001, "*Solar System Dynamics*", Ed. Cambridge University Press.

¹ **O'Keefe, J. A., Eckels, A. y Squieres, R. K.**; 1959, *Astronomical. Journal* **64**, pág. 245.

Capítulo 8

La Teoría de la Luna de Hill.

§ 8.1 Conceptos generales y ecuaciones de movimiento.

Consideremos el problema restringido de tres cuerpos en el plano es decir, un sistema de coordenadas cartesianas $\{x,y\}$ en rotación, con origen en el baricentro que determinan los cuerpos “el Sol” con masa $(1-\mu)$ y el planeta Tierra con masa μ . El grafico 41 muestra esta configuración.

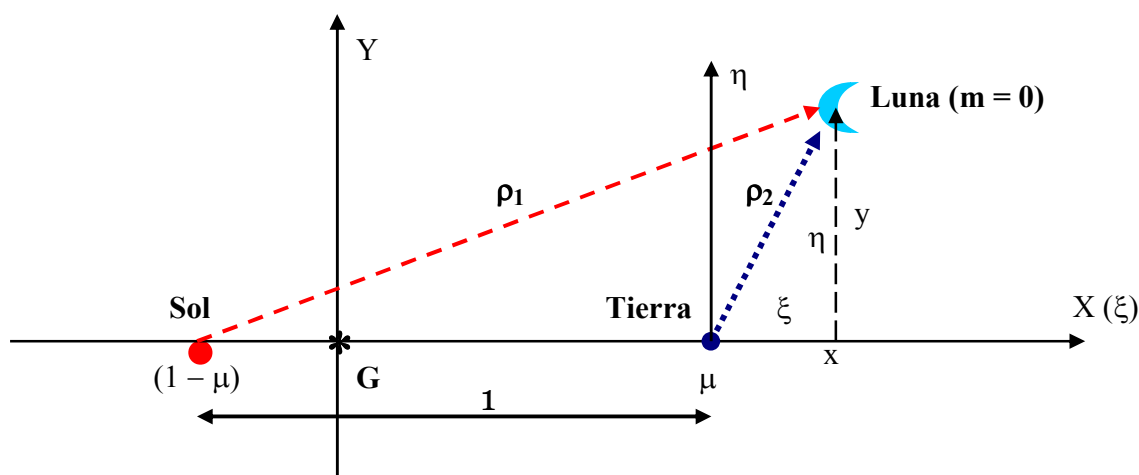


Figura 41. En el plano $\{X,Y\}$ graficamos la posición del Sol [masa = $(1-\mu)$] y del planeta Tierra ($m = \mu$). La distancia Sol-Tierra es igual a la unidad. El punto G representa el baricentro de las masas $(1-\mu)$ y μ . Sean $\{x, y\}$ las coordenadas, en un instante t , del punto masa $m = 0$ respecto del sistema $\{X,Y\}$.

La posición del Sol respecto del centro de masa G, plano $[X,Y]$ es: $\{\mu,0\}$ y la posición de la Tierra también respecto de G, en el mismo plano, es $\{(1-\mu),0\}$; luego las coordenadas del Sol son: $\{\mu,0\}$ y de la Tierra $\{(1-\mu),0\}$. La velocidad angular del punto masa μ respecto del Sol, es igual a uno; además, $\{x,y\}$ representan las coordenadas, en un cierto instante t , del punto masa $m = 0$. Indiquemos con ρ_1 y ρ_2 las distancias de los puntos $(1-\mu)$ y μ al punto de masa nula; entonces, las ecuaciones diferenciales del movimiento de este cuerpo ($m = 0$) respecto del baricentro G son, en coordenadas cartesianas:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{aligned} \right\} \text{ donde, } \Omega = \frac{(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

NOTA: Consultar Capítulo 4, ecuación (4.4), pág. 72.

Los vectores posición ρ_1 y ρ_2 representan, respectivamente, las distancias desde el Sol y la Tierra a la Luna. La posición de la Luna respecto del baricentro G es $\{x,y\}$. Vamos a realizar una traslación de ejes porque nuestro interés es estudiar el movimiento del punto $m = 0$ en un entorno de la masa μ , i.e., nos interesa estudiar el movimiento de la Luna respecto de la Tierra; por esta razón modificamos el origen de coordenadas. Los ejes coordenados del nuevo sistema, denominado geocéntrico, por ser la Tierra el nuevo centro de coordenadas, los designamos con $\{\xi,\eta\}$ entonces, las coordenadas de la Luna respecto del centro de la Tierra son: $\{\xi,\eta\}$; luego, ξ y η están definidas como, ver Fig. 41:

$$\begin{aligned}\xi &= x + \mu - 1 \\ \eta &= y\end{aligned}$$

por lo tanto, las distancias ρ_1 y ρ_2 tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\rho_1^2 &= (x + \mu)^2 + y^2 \\ \rho_2^2 &= (x + \mu - 1)^2 + y^2.\end{aligned}$$

también se pueden expresar en función de ξ y η , de la forma:

$$\begin{aligned}\rho_1^2 &= (\xi + 1)^2 + \eta^2 \\ \rho_2^2 &= \xi^2 + \eta^2.\end{aligned}$$

en consecuencia, la relación entre las coordenadas en ambos sistemas $\{x,y\}$ y $\{\xi,\eta\}$ es:

$$x^2 + y^2 = (\xi + 1 - \mu)^2 + \eta^2.$$

Entonces, teniendo en cuenta estas igualdades, las ecuaciones diferenciales de movimiento del cuerpo m *no varían en su forma*, es decir,

$$\left. \begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\end{aligned} \right\} \text{ donde, } \Omega = \frac{(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2} \left[(\xi + 1 - \mu)^2 + \eta^2 \right] \quad (8.1)$$

Notar que las ED de movimiento conservan su forma, si bien las variables son otras y están referidas al centro de la Tierra.

Nos proponemos estudiar el movimiento de m entorno de μ por lo tanto, podemos suponer que las coordenadas ξ y η son muy pequeñas en comparación con las coordenadas x e y , i.e., $\{\xi,\eta\} \ll \{x,y\}$; entonces, se puede despreciar en primera aproximación, en la función perturbadora Ω , los términos de orden superior al segundo en las distancias. Para ello hacemos una permutación en la notación, cambiamos $\{\xi,\eta\}$ por $\{x,y\}$ por lo tanto, las ecuaciones (8.1) toman la forma:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \end{aligned} \right\} \Omega = \frac{(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2} \left[(x+1-\mu)^2 + y^2 \right] \quad (8.2)$$

donde:

$$\rho_1^2 = (x+1)^2 + y^2; \quad \rho_2^2 = x^2 + y^2;$$

$$\Omega = (1-\mu) \left[1 + 2x + x^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \mu \left[x^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left[(1-\mu)^2 + 2(1-\mu)x + x^2 + y^2 \right]$$

Como las nuevas coordenadas del cuerpo m son {x,y}, posición de la Luna respecto de la Tierra, resulta $|x| \ll 1, |y| \ll 1$, ¿porqué?. Entonces, si hacemos $2x + x^2 + y^2 = X$, la función Ω toma la forma:

$$\Omega = (1-\mu) \left[1 + X \right]^{-\frac{1}{2}} + \mu \left[x^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (1-\mu)^2 + (1-\mu)x + \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

Desarrollando el binomio $\left[1 + X \right]^{-\frac{1}{2}}$, la expresión anterior resulta:

$$\Omega = (1-\mu) \left[1 - \frac{1}{2} (2x + x^2 + y^2) + \frac{3}{8} (2x + x^2 + y^2)^2 + \dots \right] + \mu \left[x^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (1-\mu)^2 + \frac{1}{2} (x^2 + y^2).$$

Despreciando los términos superiores al segundo orden en las distancias y designando con U a la función perturbadora Ω , se tiene:

$$U = (1-\mu) - (1-\mu)x - \frac{1}{2} (1-\mu) (x^2 + y^2) + \frac{3}{2} (1-\mu) x^2 + \mu \left[x^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (1-\mu)^2 + (1-\mu)x + \frac{1}{2} (x^2 + y^2).$$

Simplificando,

$$U = \text{Const.} + \frac{3}{2} (1-\mu) x^2 + \frac{1}{2} \mu (x^2 + y^2) + \mu \left[x^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

El próximo paso es calcular: $\frac{\partial \Omega}{\partial x} \equiv \frac{\partial U}{\partial x}$ y $\frac{\partial \Omega}{\partial y} \equiv \frac{\partial U}{\partial y}$.

Cálculo de las derivadas de U respecto de x e y.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3(1-\mu)x + \mu x - \frac{1}{2}\mu(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = 3(1-\mu)x + \mu x - \mu x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \mu y - \frac{1}{2}\mu(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = \mu y - \mu y(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Recordar que en estas fórmulas las variables $\{x,y\}$ son las coordenadas de m respecto de un sistema con origen en el punto μ (la Tierra), ver Figura 41. Además, este sistema de coordenadas es paralelo al sistema anterior con origen en el baricentro Sol-Tierra. Entonces, las ecuaciones de movimiento de m respecto de μ , ver (8.2), toman la forma:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = 3(1-\mu)x + \mu x - \mu x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \mu y - \mu y(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{\partial U}{\partial y} \end{cases} \quad (8.3)$$

Es un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden simultáneo. Resumiendo, (8.3) representa las ecuaciones de movimiento del cuerpo m (masa = 0) respecto de un sistema de coordenadas con origen en el cuerpo de masa μ^1 ; luego, el movimiento se realiza en el plano $[x,y]$.

Con el objeto de simplificar la forma de las ecuaciones (8.3) hacemos un cambio “adecuado” en las unidades de longitud y de masa, con las siguientes proporciones:

$$\text{para la longitud} \rightarrow \frac{1}{\alpha}, \quad \text{para la unidad de masa} \rightarrow \frac{1}{\beta}, \quad \text{para la unidad de tiempo} \rightarrow \frac{1}{1}.$$

luego, el cambio de variables consiste: $\mu \rightarrow \mu\beta, \quad x \rightarrow x\alpha,$
 $(1-\mu) \rightarrow (1-\mu)\beta, \quad y \rightarrow y\alpha$

por lo tanto, las ecuaciones diferenciales del movimiento toman la forma:

$$\begin{cases} \alpha \ddot{x} - 2\alpha \dot{y} = 3\beta(1-\mu)\alpha x + \beta\mu\alpha x - \beta\mu\alpha x(\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \alpha \ddot{y} + 2\alpha \dot{x} = \beta\mu\alpha y - \beta\mu\alpha y(\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2)^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Dividimos ambas ecuaciones por α y factoriamos $\frac{1}{\alpha^3}$. Además, como la masa μ es muy pequeña ²

respecto de la masa $(1-\mu)$ y el valor absoluto de x e y también son muy pequeños entonces, los términos $(\beta\mu x)$ y $(\beta\mu y)$ se pueden despreciar, recordar que hemos dividido por α ; luego, se tiene:

¹ Consultar: **Szebehely**, V.; 1967, “*Theory of Orbits*”, Capítulos 1, 9 y 10.

² La masa de la Tierra $\mu \cong 3 \times 10^{-6} \mathcal{M}_{\text{Sol}}$.

$$\beta (1 - \mu) = 1 \rightarrow \beta = \frac{1}{(1 - \mu)} ; \quad \frac{\beta \mu}{\alpha^3} = 1 \rightarrow \alpha = \sqrt[3]{\beta \mu} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{(1 - \mu)}}.$$

Entonces, las ecuaciones diferenciales de movimiento (8.3) toman la forma:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = 3x - x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{\partial U^*}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = -y(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{\partial U^*}{\partial y} \end{cases} \quad (8.4)$$

donde la función potencial U^* tiene la expresión: $U^* = \frac{3}{2}x^2 + (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$.

El sistema de ED (8.4) representa las ecuaciones límite del problema del movimiento de la Luna de Hill; en general, se lo menciona como el caso límite de Hill correspondiente al problema restringido de los tres cuerpos. Consultar: **Szebehely, V.**; 1967, “*Theory of Orbits*”, Capítulo 1 y págs. 602-620.

Breve Reseña Histórica. En 1877, G. W. **Hill**¹ publica un artículo sobre el movimiento del perigeo de la Luna (posición en la órbita Lunar más próxima a la Tierra), donde obtiene las *primeras soluciones periódicas del problema de tres cuerpos*, posterior al descubrimiento de Lagrange relacionado con las *soluciones de equilibrio relativo* en 1772. El problema que investigó Hill era la discrepancia entre los valores calculados teóricamente para el movimiento del perigeo Lunar y los valores obtenidos de la observación. En este trabajo, Hill halló primero una solución periódica y luego dedujo las ecuaciones de variación, teniendo en cuenta sólo la primera potencia en la excentricidad Lunar; obtuvo así un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de cuarto orden con coeficientes periódicos. Utilizando las integrales conocidas² y realizando una serie de transformaciones, simplificó el sistema a una sola ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma³:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \Phi \varphi = 0 \quad (a)$$

donde φ es la desviación normal de la Luna respecto de su órbita intermedia y Φ es una función que sólo depende de la posición relativa de la Luna con referencia al Sol. La función Φ se puede expresar como una serie de Fourier:

$$\Phi = C_0 + C_1 \cos(2t) + C_2 \cos(4t) + \dots = \sum_{j=0} C_j \cos[(2j)t] = \sum_{j=0} C_j \zeta^{2j} \quad (b)$$

¹ **Hill, G.W.** “*On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon*”. Publicado en Cambridge U.S.A., 1877 y reimpresso en *Acta Mathematica*, **8**, 1886.

² Integral de la energía, del momento angular y de las áreas.

³ Consultar: **Szebehely, V.**; 1967, “*Theory of Orbits*”, págs. 603 y 629.

donde $\zeta = \exp(i t)$ y $C_i = C_{-i}$, por lo tanto, la ecuación (a) toma la forma:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \varphi \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j \zeta^{2j} = 0 \quad (c)$$

Ecuación diferencial conocida como *ecuación de Hill*.

NOTA. La ecuación de Hill puede considerarse como una representación generalizada de la ecuación de Mathieu:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + (a + b \cos 2 t) \varphi = 0$$

hallada por Mathieu, en 1868, analizando el movimiento de membranas elásticas con frontera elíptica.

Asimismo, la ecuación de Hill es un caso particular de la ED de Ince-Hill,

$$(1 + a \cos 2x) \frac{d^2 y}{dx^2} + b \operatorname{sen} ex \frac{dy}{dx} + (c + d \cos 2x) y = 0$$

La ecuación de Ince-Hill es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes periódicos que depende de cuatro parámetros: a, b, c, d . Uno de los motivos de interés de esta ecuación reside en que es útil en las ecuaciones variacionales vinculadas a problemas de Mecánica Celeste. Con frecuencia el parámetro a representa la excentricidad. Precisamente, una de las motivaciones iniciales fue el estudio de la estabilidad de la solución en numerosos problemas dinámicos. Este estudio no es simple desde el punto de vista analítico. Además, la ecuación de *Ince-Hill* es, en general, una ecuación poco estudiada. La ecuación de Ince-Hill posee singularidades regulares, también llamadas de tipo Fuchs.

La Teoría de la Luna esta relacionada con el estudio analítico del movimiento de la Luna; en general, la teoría Lunar consiste en plantear y comprender el movimiento de la Luna bajo la atracción gravitacional de la Tierra y el Sol, donde sólo se consideran estos tres cuerpos como puntos masa. Sin embargo, el tratamiento completo del movimiento de la Luna requiere la inclusión de los efectos debido a la atracción de los otros planetas sobre la Tierra y la Luna, así como también los efectos de la no esfericidad de estos dos cuerpos.

Referencias.

- Brown**, E. W.; 1960, "*An Introductory Treatise on the Lunar Theory*". Ed. Dover Publications.
- Brouwer**, D. & **Clemence**, G. M.; 1961, "*Methods of Celestial Mechanics*", Cap. XII, pág. 308. Ed. Academic Press Inc.
- Courant**, R. & **Hilbert**, D.; 1962, "*Methods of Mathematical Physics*", vol II. Ed. Wiley
- Hill**, G.W., "*Researches in the Lunar Theory*," American Journal of Mathematics, Vol. I, 1878, pág. 129–147.
- Poincaré**, H.; 1899, "*Leçons de Mécanique Céleste*", Vol. 2, Parte 2. Ed. Gauthier-Villars.
- Roy**, A. E.; 1978, "*Orbital Motion*", Cap. 9, pág. 246. Ed. Adam Hilger Ltd.

§ 8.2 Solución periódica de las ecuaciones de movimiento de la Luna.

Las ecuaciones de movimiento de la Luna estudiadas por Hill ¹ admiten la integral de las fuerzas vivas, la cual es fácil de obtener, multiplicando la primera ecuación de (8.4) por \dot{x} y la segunda por \dot{y} , luego sumamos ambas ecuaciones entonces resulta:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2 U + h$$

la *integral de la energía*, donde U es la función potencial y h la constante de la energía.

Nos proponemos ahora hallar una solución periódica del sistema de ecuaciones (8.4), lo cual significa obtener una función periódica con período τ , donde $\tau = 2\pi m$; siendo m un número pequeño (para el sistema Tierra-Luna m es del orden: $m \cong 0.08$).

Para determinar la solución periódica vamos a suponer que x es una función par del tiempo, i.e., $x(t) = x(-t)$ e y una función impar del tiempo: $y(t) = -y(-t)$ ². Además, en un semi-período la función x(t) cambia en $-x(t)$ y la función y(t) en $-y(t)$, luego

$$x(t) = -x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)$$

$$y(t) = -y\left(t + \frac{\tau}{2}\right)$$

donde $\frac{\tau}{2} = \pi m$.

Por su condición de periodicidad la función x(t) admite un desarrollo en serie de Fourier, de la forma ³:

$$x(t) = \sum_v A_v \cos\left(v \frac{\tau}{m} t\right) = -\sum_v A_v \cos\left[\frac{v}{m} (t + \pi m)\right] = -\sum_v A_v \cos\left(\frac{v}{m} t\right) \cos(v\pi).$$

entonces, los coeficientes con v impar son los que verifican los requisitos anteriores, de acuerdo a la definición de función par e impar. Por lo tanto, la función x(t) admite el desarrollo

$$x(t) = \sum_{v=0}^{\infty} A_v \cos(2v+1) \frac{t}{m}.$$

una expresión análoga para la variable y(t),

$$y(t) = \sum_v B_v \sin\left(v \frac{\tau}{m} t\right) = -\sum_v B_v \sin\left(\frac{v}{m} t\right) \cos(v\pi)$$

y finalmente resulta,

$$y(t) = \sum_{v=0}^{\infty} B_v \sin(2v+1) \frac{t}{m}.$$

¹ Meyer, K.R.; 1999, "Periodic Solutions of the N-Body Problem", Cap. 11, pág. 120. Ed. Springer-Verlag.

² En este caso la variable t (tiempo) es siempre positiva.

³ Consultar: López García, F.; 1995, "Curso Análisis Matemático III", Cáp. 2. Ed. FCEFyN, UNSJ.

Los A_v y B_v son los coeficientes de Fourier ¹. Supongamos ahora que,

$$\begin{cases} a_v = \frac{1}{2}(A_v + B_v) \\ a_{-v-1} = \frac{1}{2}(A_v - B_v) \end{cases} \Rightarrow A_v = a_v + a_{-v-1}, \quad B_v = a_v - a_{-v-1}.$$

Reemplazando los coeficientes A_v y B_v , en los desarrollos de x e y , se obtiene:

$$x(t) = \sum_{v=0}^{\infty} (a_v + a_{-v-1}) \cos(2v+1) \frac{t}{m} = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \cos(2v+1) \frac{t}{m} + \sum_{v=0}^{\infty} a_{-v-1} \cos(2v+1) \frac{t}{m}$$

Hacemos un cambio de índices, sea $-(v+1) = \mu$; luego, $v = -\mu - 1$, sustituyendo resulta:

$$x(t) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \cos(2v+1) \frac{t}{m} + \sum_{v=-1}^{-\infty} a_{\mu} \cos(-2\mu+1) \frac{t}{m}$$

Si reemplazamos μ por v y además, como $\cos(-2\mu - 1) \equiv \cos(2\mu + 1)$, finalmente se tiene:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_v \cos(2v+1) \frac{t}{m}.$$

Una expresión similar para $y(t)$,

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_v \operatorname{sen}(2v+1) \frac{t}{m}.$$

Las expresiones de $x(t)$ e $y(t)$ nos sugieren introducir variables complejas de la forma:

$$\begin{aligned} u &= x + i y \\ v &= x - i y \end{aligned} \tag{8.5}$$

luego de reemplazar se obtiene

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_v \left[\cos(2v+1) \frac{t}{m} + i \operatorname{sen}(2v+1) \frac{t}{m} \right] \\ v(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_v \left[\cos(2v+1) \frac{t}{m} - i \operatorname{sen}(2v+1) \frac{t}{m} \right] \end{aligned}$$

Desarrollos que también admiten la forma exponencial ²,

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_v e^{(2v+1) i \frac{t}{m}}, \quad v(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_v e^{-(2v+1) i \frac{t}{m}}.$$

¹ Consultar: **López García**, F.; 1995, "Curso de Análisis Matemático III", Cáp. 2. Ed. FCEFyN, UNSJ.

² Recordar la fórmula de Euler: $e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \operatorname{sen} \alpha$.

En la segunda ecuación, relacionada con v , definimos: $-(2v + 1) = (2\mu + 1) \Rightarrow -1-1- 2\mu = 2v$, luego: $2v = -2(\mu+1)$; sustituyendo resulta:

$$v = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{-\mu-1} e^{(2\mu+1) i \frac{t}{m}}, \text{ y permutando } \mu \text{ por } v, \text{ se tiene: } v = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{-v-1} e^{(2v+1) i \frac{t}{m}}.$$

El cambio de índices nos permite “buscar” una solución, para las expresiones de u y v , de la forma:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_v \zeta^{2v+1} \\ v &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_{-v-1} \zeta^{2v+1} \end{aligned} \right\} \zeta = e^{i \frac{t}{m}} = \exp\left(i \frac{t}{m}\right) \quad (8.6)$$

entonces, teniendo en cuenta las ecuaciones (8.5), pág. 194, podemos expresar x e y de la forma:

$$x = \frac{u + v}{2}, \quad y = \frac{u - v}{2i};$$

además, las derivadas de u y v son:

$$\dot{u} = \dot{x} + i \dot{y}, \quad \dot{v} = \dot{x} - i \dot{y}; \quad \ddot{u} = \ddot{x} + i \ddot{y}, \quad \ddot{v} = \ddot{x} - i \ddot{y}.$$

por último, reemplazando las nuevas variables en el sistema de ED (8.4), pág. 191, multiplicando por (+i) la segunda ecuación y sumando obtenemos la siguiente ecuación diferencial para u :

$$\ddot{u} - 2(\dot{y} - i \dot{x}) = 3 \frac{u+v}{2} - (u v)^{\frac{3}{2}} (\dot{x} + i \dot{y}); \text{ pero: } -2(\dot{y} - i \dot{x}) = 2i \left(\dot{x} - \frac{1}{i} \dot{y} \right) = 2i \dot{u},$$

resulta, entonces, la primera de las ecuaciones transformadas:

$$\ddot{u} + 2i \dot{u} = \frac{3}{2} (u + v) - \frac{u}{(u v)^{\frac{3}{2}}}.$$

Procediendo en idéntica forma, multiplicamos la segunda ecuación de (8.4) por (-i) y sumando se obtiene:

$$\ddot{v} - 2i \dot{v} = \frac{3}{2} (u + v) - \frac{v}{(u v)^{\frac{3}{2}}},$$

la cual representa la segunda ecuación transformada del sistema (8.4).

En consecuencia, el sistema de ecuaciones diferenciales del problema de la Luna de Hill (8.4), tiene la siguiente expresión, en las nuevas coordenadas:

$$\begin{aligned}\ddot{u} + 2i\dot{u} &= \frac{3}{2}(u+v) - \frac{u}{(uv)^{\frac{3}{2}}}, \\ \ddot{v} - 2i\dot{v} &= \frac{3}{2}(u+v) - \frac{v}{(uv)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\quad (8.7)$$

y la integral de la energía, toma la forma:

$$\dot{u}\dot{v} = \frac{3}{4}(u+v)^2 + 2(uv)^{\frac{1}{2}} - h; \quad (8.8)$$

donde h es la constante de integración.

Finalmente, para formular las ecuaciones de movimiento de la Luna y su integral primera hacemos un cambio de variable independiente introduciendo el operador D , definido como:

$$D \equiv \zeta \frac{d}{d\zeta}, \quad \text{luego,} \quad Du = \zeta \frac{du}{d\zeta}.$$

entonces, vamos a expresar las derivadas primeras y segunda de las variables u y v en función de este operador:

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt}; \quad \text{de acuerdo a (8.6):} \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{i}{m}\zeta, \quad \text{luego} \quad \dot{u} = \frac{i}{m}\zeta \frac{du}{d\zeta} = \frac{i}{m} Du.$$

y la derivada segunda:

$$\ddot{u} = \frac{i}{m} \frac{d}{dt} \left(\zeta \frac{du}{d\zeta} \right) = \frac{i}{m} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{du}{d\zeta} \right) \frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{i}{m} \right)^2 \zeta \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{du}{d\zeta} \right) = -\frac{1}{m^2} D^2 u$$

Expresiones similares se obtienen para v .

Luego, si reemplazamos las derivadas $\dot{u}, \ddot{u}, \dot{v}$ y \ddot{v} en función del operador D en el sistema (8.7) y en la ecuación (8.8) resulta:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{m^2} D^2 u + 2i \frac{i}{m} Du &= \frac{3}{2}(u+v) - \frac{u}{(uv)^{\frac{3}{2}}}, \\ -\frac{1}{m^2} D^2 v - 2i \frac{i}{m} Dv &= \frac{3}{2}(u+v) - \frac{v}{(uv)^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{i}{m} \cdot \frac{i}{m} Du Dv &= \frac{3}{4}(u+v)^2 + \frac{2}{(uv)^{\frac{1}{2}}} - h.\end{aligned}$$

Si en este sistema de ED multiplicamos todas las ecuaciones por (m^2) y por (-1) y pasamos todos los términos al primer miembro entonces, el sistema anterior toma la forma:

$$\left. \begin{aligned} D^2 u + 2 m D u + \frac{3}{2} m^2 (u + v) - m^2 \frac{u}{(u v)^{\frac{3}{2}}} &= 0. \\ D^2 v - 2 m D v + \frac{3}{2} m^2 (u + v) - m^2 \frac{v}{(u v)^{\frac{3}{2}}} &= 0. \\ D u D v + \frac{3}{4} m^2 (u + v)^2 + \frac{2 m^2}{(u v)^{\frac{1}{2}}} &= m^2 h = C. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

Este sistema de ED nos permite analizar el movimiento de un cuerpo de masa nula (la Luna) entorno del planeta de masa μ (la Tierra), en el problema restringido de tres cuerpos; en este análisis el sistema dinámico está formado por Sol-Tierra-Luna.

Por último, vamos a eliminar el término $\frac{u}{(u v)^{\frac{3}{2}}}$; para ello utilizamos la integral de la energía,

tercera ecuación del sistema (8.9); hacemos primero las siguientes consideraciones:

$$D(u v) = \zeta \frac{d(u v)}{d \zeta} = \zeta v \frac{d u}{d \zeta} + \zeta u \frac{d v}{d \zeta} = v \zeta \frac{d u}{d \zeta} + u \zeta \frac{d v}{d \zeta} = v D u + u D v.$$

$$D^2(u v) = D[u D v + v D u] = D u D v + u D^2 v + D v D u + v D^2 u, \text{ agrupando se tiene:}$$

$$D[u D v + v D u] = u D^2 v + v D^2 u + 2 D u D v. \text{ También podemos escribir:}$$

$$D u D v = D^2(u v) - D u D v - u D^2 v - v D^2 u. \text{ Luego: } D[u D v - v D u] = u D^2 v - v D^2 u. \quad (d)$$

Por lo tanto, la integral de la energía [tercera ecuación de (8.9)] toma la forma:

$$\begin{aligned} D u D v &= C - \frac{3}{4} m^2 (u + v)^2 - \frac{2 m^2}{(u v)^{\frac{1}{2}}} = D^2(u v) - D u D v - \\ &- u \left[2 m D v - \frac{3}{2} m^2 (u + v) + m^2 \frac{v}{(u v)^{\frac{3}{2}}} \right] - v \left[-2 m D u - \frac{3}{2} m^2 (u + v) + m^2 \frac{u}{(u v)^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned}$$

Desarrollando los dos últimos términos, resulta:

$$\begin{aligned} D^2(u v) - D u D v - 2 m u D v + \frac{3}{2} m^2 u (u + v) - m^2 \frac{u v}{(u v)^{\frac{3}{2}}} + 2 m v D u + \frac{3}{2} m^2 v (u + v) - \\ - m^2 \frac{u v}{(u v)^{\frac{3}{2}}} &= D^2(u v) - D u D v - 2 m (u D v - v D u) + \frac{3}{2} m^2 (u + v)^2 - 2 m^2 (u v)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= C - \frac{3}{4} m^2 (u + v)^2 - \frac{2 m^2}{(u v)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Entonces, si tenemos en cuenta los dos últimos miembros del desarrollo anterior:

$$D^2(uv) - Du Dv - 2m(u Dv - v Du) + \frac{3}{2}m^2(u+v)^2 - 2m^2(uv)^{-\frac{1}{2}} = C - \frac{3}{4}m^2(u+v)^2 - \frac{2m^2}{(uv)^{\frac{1}{2}}}.$$

simplificando, resulta:

$$D^2(uv) - Du Dv - 2m(u Dv - v Du) + \frac{9}{4}m^2(u+v)^2 = C. \quad (8.10)$$

Procediendo en forma análoga respecto de la expresión (d): $D[u Dv - v Du] = u D^2 v - v D^2 u$, se tiene:

$$D[u Dv + v Du] = u D^2 v - v D^2 u = u \left[2m Dv - \frac{3}{2}m^2(u+v) + m^2 \frac{v}{(uv)^{\frac{3}{2}}} \right] - v \left[-2m Du - \frac{3}{2}m^2(u+v) + m^2 \frac{v}{(uv)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

finalmente, operando en los dos últimos términos, obtenemos:

$$D[u Dv - v Du] = 2m D(uv) - \frac{3}{2}m^2(u-v)^2$$

y por tanto,

$$D[u Dv - v Du - 2m uv] + \frac{3}{2}m^2(u-v)^2 = 0. \quad (8.11)$$

Las dos expresiones, (8.10) y (8.11), serán utilizadas en el siguiente ítem.

§ 8.3 Cálculo de los coeficientes a_v y a_{-v-1} .

En el párrafo anterior hemos deducido las ecuaciones diferenciales del movimiento en un entorno del planeta μ (problema restringido de tres cuerpos), consultar sistema (8.9); las cuales, eliminando los términos: $\frac{u}{(uv)^{\frac{3}{2}}}$ y $\frac{v}{(uv)^{\frac{3}{2}}}$, en la primera y segunda ecuación, se transforman en el siguiente sistema

de ED:

$$\begin{cases} D^2(uv) - Du Dv - 2m(u Dv - v Du) + \frac{9}{4}m^2(u+v)^2 = C \\ D[u Dv - v Du - 2m uv] + \frac{3}{2}m^2(u^2 - v^2) = 0 \\ Du Dv + \frac{3}{4}m^2(u+v)^2 + 2m^2(uv)^{-\frac{1}{2}} = m^2 h = C \end{cases} \quad (8.12)$$

donde el operador D tiene la expresión: $D = \zeta \frac{d}{d\zeta}$; siendo ζ la nueva variable independiente definida como: $\zeta = \exp\left(i \frac{t}{m}\right)$; el período de revolución del satélite, de masa nula, entorno del planeta de masa μ , es $\tau = 2 \pi m$. La Figura 42 describe el movimiento del cuerpo de masa $m = 0$ entorno del cuerpo de masa μ perturbado por $(1 - \mu)$.

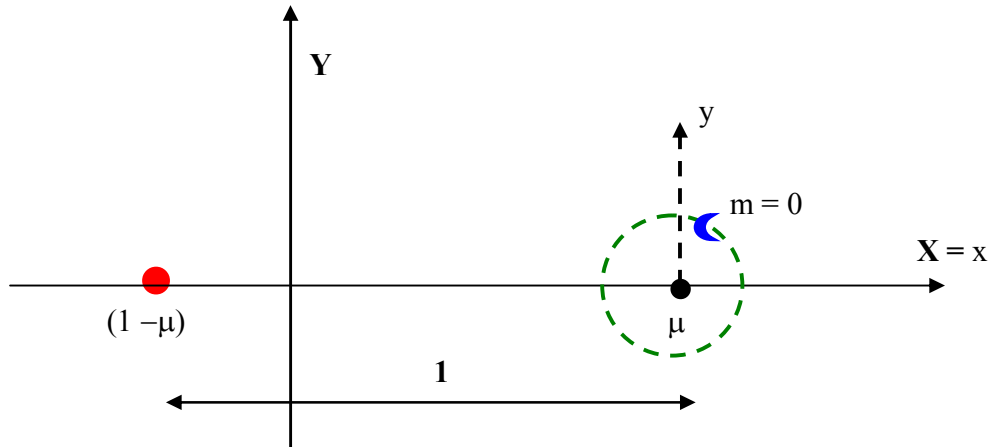


Figura 42. El gráfico muestra el movimiento del cuerpo de masa nula entorno del cuerpo de masa μ perturbado por el cuerpo de masa $(1 - \mu)$.

Además, habíamos supuesto que la solución buscada, las funciones u y v , se pueden expresar en series de potencias de la variable ζ , (consultar (8.6), pág. 195), de la forma:

$$u = \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v \zeta^{2v+1}, \quad v = \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_{-v-1} \zeta^{2v+1}$$

donde: $u = x + i y$, $v = x - i y$. Consultar Ecs. (8.5), pág. 194.

Nos proponemos ahora hallar los coeficientes a_v y a_{-v-1} de los respectivos desarrollos de las funciones u y v . Para ello debemos calcular: u^2 , v^2 , uv , Du , Dv , etc.

Por ejemplo:

$$u^2 = \sum_v a_v \zeta^{2v+1} \sum_{\mu} a_{\mu} \zeta^{2\mu+1} = \sum_v \sum_{\mu} a_{\mu} a_v \zeta^{2(v+\mu+1)} = \sum_{(v)} \sum_{(\xi)} a_v a_{\xi-v-1} \zeta^{2\xi}$$

donde $\xi = \mu + v + 1$. Por lo tanto,

$$u^2 = \sum_{(v)} \sum_{(\xi)} a_v a_{\xi-v-1} \zeta^{2\xi}.$$

Análogamente se calcula el producto $u.v$,

$$u.v = \sum_v a_v \zeta^{2v+1} \sum_{\mu} a_{-\mu-1} \zeta^{2\mu+1} = \sum_v \sum_{\mu} a_v a_{-\mu-1} \zeta^{2\xi}$$

donde: $\xi = v + \mu + 1$; $-\mu - 1 = v - \xi$. Luego,

$$u.v = \sum_{(v)} \sum_{(\xi)} a_v a_{v-\xi} \zeta^{2\xi} = \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} a_v a_{v-\xi} \zeta^{2\xi}.$$

Cálculo de: v^2 ,

$$v^2 = \sum_v a_{-v-1} \zeta^{2v+1} \sum_{\mu} a_{-\mu-1} \zeta^{2\mu+1} = \sum_{(v)} \sum_{(\mu)} a_{-v-1} a_{-\mu-1} \zeta^{2\xi} = \sum_{(v)} \sum_{(\xi)} a_{-v-1} a_{v-\xi} \zeta^{2\xi}$$

haciendo: $-v - 1 = \eta$; $v = -\eta - 1$, y reemplazando resulta:

$$v^2 = \sum_{(\eta)} \sum_{(\xi)} a_{\eta} a_{-\eta-1-\xi} \zeta^{2\xi}; \text{ permutando el subíndice } \eta \text{ por } v, \text{ se tiene:}$$

$$v^2 = \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} a_v a_{-\xi-v-1} \zeta^{2\xi}.$$

Cálculo de las derivadas: Du y Dv ,

$$Du = \zeta \frac{d}{dt} u = \zeta \frac{d}{dt} \sum_v a_v \zeta^{2v+1} = \zeta \sum_v (2v+1) a_v \zeta^{2v}$$

$$Du = \sum_v (2v+1) a_v \zeta^{2v+1}.$$

$$Dv = \zeta \frac{d}{dt} v = \zeta \frac{d}{dt} \sum_v a_{-v-1} \zeta^{2v+1} = \zeta \sum_v (2v+1) a_{-v-1} \zeta^{2v}$$

$$Dv = \sum_v (2v+1) a_{-v-1} \zeta^{2v+1}.$$

Cálculo de las expresiones: $u Dv$ y $v Du$,

$$\begin{aligned} u Dv &= \sum_v a_v \zeta^{2v+1} \sum_{\mu} (2\mu+1) a_{-\mu-1} \zeta^{2\mu+1} = \\ &= \sum_{(v)} \sum_{(\mu)} (2\mu+1) a_v a_{-\mu-1} \zeta^{2\xi} = \\ &= \sum_{(v)} \sum_{(\xi)} (2\xi-2v-1) a_v a_{v-\xi} \zeta^{2\xi}, \quad \text{luego} \end{aligned}$$

$$u Dv = \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} (2\xi - 2v - 1) a_v a_{-\xi+v} \zeta^{2\xi}.$$

Cálculo de: $v Du$:

$$\begin{aligned} v Du &= \sum_{(\mu)} a_{-\mu-1} \zeta^{2\mu+1} \sum_{(v)} (2v+1) a_v \zeta^{2v+1} = \\ &= \sum_{(v)} \sum_{(\mu)} (2v+1) a_v a_{-\mu-1} \zeta^{2\xi} = \sum_{(v)} \sum_{(\xi)} (2v+1) a_v a_{v-\xi} \zeta^{2\xi} \end{aligned}$$

luego,

$$v Du = \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} (2v+1) a_v a_{v-\xi} \zeta^{2\xi}.$$

Cálculo del producto:

$$D(u.v) = \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} 2\xi a_v a_{v-\xi} \zeta^{2\xi}.$$

Cálculo de:

$$Du.Dv = \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} (2v+1) (2\xi - 2v - 1) a_v a_{v-\xi} \zeta^{2\xi}.$$

Cálculo de:

$$D^2(u.v) = \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} 4\xi^2 a_v a_{v-\xi} \zeta^{2\xi}.$$

Cálculo de:

$$u Dv - v Du = \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} (2\xi - 4v - 2) a_v a_{v-\xi} \zeta^{2\xi}.$$

Finalmente, aplicamos estos resultados a las dos primeras ecuaciones del sistema (8.12), pág. 198, resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{(\xi)} \left\{ \sum_{(v)} \left[4\xi^2 - (2v+1)(2\xi - 2v - 1) - 2m(2\xi - 4v - 2) + \frac{9}{4}m^2 \right] a_v a_{v-\xi} + \right. \\ \left. + \frac{9}{4}m^2 [a_{\xi-v-1} + a_{-\xi-v-1}] a_v \right\} \zeta^{2\xi} = C \end{aligned}$$

$$\sum_{(\xi)} \left\{ \sum_{(v)} [4\xi(\xi - 2v - 1) - 4m\xi] a_v a_{v-\xi} + \frac{3}{2}m^2 [a_{\xi-v-1} - a_{-\xi-v-1}] a_v \right\} \zeta^{2\xi} \equiv 0$$

En la primera ecuación los coeficientes de todos los términos son nulos, excepto el término independiente que es igual a C; en la segunda ecuación, en el primer miembro, los coeficientes de todos los términos deben ser idénticamente nulos. ¿Porqué?

Por lo tanto, podemos escribir el siguiente sistema de ecuaciones:

Para $\xi = 0$ se obtiene:

$$\sum_{(v)} \left\{ \left[(2v+1)^2 + 4m(2v+1) + \frac{9}{2} m^2 \right] a_v^2 + \frac{9}{2} m^2 a_v a_{-v-1} \right\} = C \quad (8.12a)$$

Y, para todos los valores de $\xi \neq 0$, el sistema adopta la expresión general:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{(v)} \left\{ \left[4\xi^2 - (2v+1)(2\xi-2v-1) - 4m(\xi-2v-1) + \frac{9}{2} m^2 \right] a_v a_{v-\xi} + \frac{9}{4} m^2 [a_{\xi-v-1} + a_{-\xi-v-1}] a_v \right\} = 0 \\ \sum_{(v)} \left\{ [4\xi(\xi-2v-1) - 4m\xi] a_v a_{v-\xi} + \frac{3}{2} m^2 [a_{\xi-v-1} - a_{-\xi-v-1}] a_v \right\} = 0 \end{array} \right.$$

A fin de tener fórmulas mas sencillas multiplicamos la primera de estas igualdades por dos y la segunda ecuación por tres, luego sumamos y después restamos miembro a miembro ambas ecuaciones, el resultado es el siguiente:

La suma de ambas ecuaciones es:

$$\sum_v \left\{ \left[4\xi^2 - 2(2v+1)(2\xi-2v-1) - 8m(\xi-2v-1) + 9m^2 + 12\xi(\xi-2v-1) - 12m\xi \right] a_v a_{v-\xi} + 9m^2 a_{\xi-v-1} a_v \right\} = 0. \quad (8.13a)$$

$$\sum_v \left\{ \left[4\xi^2 - 2(2v+1)(2\xi-2v-1) - 8m(\xi-2v-1) + 9m^2 - 12\xi(\xi-2v-1) + 12m\xi \right] a_v a_{v-\xi} + 9m^2 a_{-\xi-v-1} a_v \right\} = 0. \quad (8.13b)$$

Para abreviar, al primer corchete lo denominamos $A_{v\xi}$ y al segundo corchete lo designamos $B_{v\xi}$, luego resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{(v)} A_{v\xi} a_v a_{v-\xi} + 9m^2 \sum_{(v)} a_v a_{\xi-v-1} = 0 \\ \sum_{(v)} B_{v\xi} a_v a_{-v-\xi} + 9m^2 \sum_{(v)} a_v a_{-\xi-v-1} = 0 \end{array} \right.$$

Estas dos ecuaciones constituyen un sistema de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas porque tanto ξ como v varían desde 0 a ∞ . Notar que las ecuaciones son validas para todo $\xi \neq 0$.

Por simplicidad, vamos a separar en dos los términos en la primera serie y lo mismo hacemos en la segunda ecuación, de la forma:

$$A_{0\xi} a_0 a_{-\xi} + \sum_{(v) \neq 0} A_{v\xi} a_v a_{v-\xi} + 9m^2 \sum_{(v)} a_v a_{\xi-v-1} = 0 \quad (8.14)$$

$$B_{0\xi} a_0 a_{-\xi} + \sum_{(v) \neq 0} B_{v\xi} a_v a_{v-\xi} + 9m^2 \sum_{(v)} a_v a_{-\xi-v-1} = 0 \quad (8.15)$$

luego, multiplicamos la primera ecuación por $B_{0\xi}$ y la segunda por $A_{0\xi}$ y restando miembro a miembro resulta:

$$\sum_{v \neq 0} (A_{v\xi} B_{0\xi} - A_{0\xi} B_{v\xi}) a_v a_{v-\xi} + 9m^2 \sum_v (B_{0\xi} a_{\xi-v-1} - A_{0\xi} a_{-\xi-v-1}) a_v = 0$$

a los fines del cálculo, es conveniente separar en la primera suma el término $v = \xi$, entonces se tiene:

$$(A_{\xi\xi} B_{0\xi} - A_{0\xi} B_{\xi\xi}) a_0 a_\xi + \sum_{\substack{v \neq 0 \\ \neq \xi}} (A_{v\xi} B_{0\xi} - A_{0\xi} B_{v\xi}) a_v a_{v-\xi} + 9m^2 \sum_v (B_{0\xi} a_{\xi-v-1} - A_{0\xi} a_{-\xi-v-1}) a_v = 0 \quad (8.16)$$

Si definimos, $[\xi v] = \frac{A_{0\xi} B_{v\xi} - A_{v\xi} B_{0\xi}}{A_{\xi\xi} B_{0\xi} - A_{0\xi} B_{\xi\xi}}$; e introducimos las siguientes abreviaciones:

$$C_{\xi\xi} = A_{\xi\xi} B_{0\xi} - A_{0\xi} B_{\xi\xi} \neq 0. \quad [\xi] = -9 \frac{B_{0\xi}}{C_{\xi\xi}}; \quad (\xi) = 9 \frac{A_{0\xi}}{C_{\xi\xi}}; \quad C_\xi = \frac{a_\xi}{a_0}.$$

entonces, si en la ecuación (8.16) dividimos previamente por: $A_{\xi\xi} B_{0\xi} - A_{0\xi} B_{\xi\xi}$ y desarrollamos la última suma en dos términos, el resultado es:

$$C_\xi = \sum_{\substack{v \neq 0 \\ \neq \xi}} [\xi v] C_v C_{v-\xi} + m^2 [\xi] \sum_{(v)} C_v C_{\xi-v-1} + m^2 (\xi) \sum_{(v)} C_v C_{-\xi-v-1}. \quad (8.17)$$

Fórmula fundamental de recurrencia, mediante la cual es posible el cálculo de los coeficientes C_v y por tanto, podemos obtener los coeficientes $a_v (= a_0 C_v)$.

Analicemos este resultado con un Ejemplo: Las expresiones para $A_{0\xi}$ y $B_{0\xi}$ se obtienen a partir de las ecuaciones (8.13a) y (8.13b), haciendo $v = 0$, resulta:

$$A_{0\xi} = 4 \xi^2 - 2(2\xi-1) - 8m(\xi-1) + 9m^2 + 12 \xi(\xi-1) - 12m \xi.$$

$$B_{0\xi} = 4 \xi^2 - 2(2\xi-1) - 8m(\xi-1) + 9m^2 - 12 \xi(\xi-1) + 12m \xi.$$

El siguiente paso consiste en determinar la diferencia: $A_{0\xi} B_{v\xi} - A_{v\xi} B_{0\xi}$ y por tanto el denominador $C_{\xi\xi} = A_{\xi\xi} B_{0\xi} - A_{0\xi} B_{\xi\xi} \neq 0$, lo cual nos permite calcular $[\xi v]$ y además evaluar las expresiones $[\xi]$ y (ξ) , entonces resulta:

$$[\xi v] = \frac{A_{0\xi} B_{v\xi} - A_{v\xi} B_{0\xi}}{A_{\xi\xi} B_{0\xi} - A_{0\xi} B_{\xi\xi}} = -\frac{v}{\xi} \frac{4\xi^2 + 4\xi - 2 + 4v(\xi - 1) + 4m(\xi - v - 1) + m^2}{4\xi^2 - 2 - 4m + m^2}. \quad (8.18a)$$

$$[\xi] = \frac{3}{16} \frac{-4\xi^2 + 8\xi + 2 + m(8 + 4\xi) + 9m^2}{\xi^2(8\xi^2 - 2 - 4m + m^2)}. \quad (8.18b)$$

$$(\xi) = -\frac{3}{16} \frac{20\xi^2 - 16\xi + 2 + m(8 - 20\xi) + 9m^2}{\xi^2(8\xi^2 - 2 - 4m + m^2)}. \quad (8.18c)$$

Con estas definiciones estamos en condiciones de calcular la fórmula de recurrencia (8.17) donde ξ toma los valores 1 y -1, luego se tiene:

Para $\xi = 1$.

$$C_1 = \sum_{\substack{v \neq 0 \\ \neq 1}} [1 v] C_v C_{v-1} + m^2 [1] \sum_{(v)} C_v C_{-v} + m^2 (1) \sum_{(v)} C_v C_{-v-2}.$$

Para $\xi = -1$.

$$C_{-1} = \sum_{\substack{v \neq 0 \\ \neq -1}} [-1 v] C_v C_{v+1} + m^2 [-1] \sum_{(v)} C_v C_{-v-2} + m^2 (-1) \sum_{(v)} C_v C_{-v}.$$

Expresiones que nos permiten desarrollar la fórmula de recurrencia (8.17), la cual toma la forma:

$$\begin{aligned} C_1 = & [1,2] C_2 C_1 + [1,-1] C_{-1} C_{-2} + [1,3] C_3 C_2 + [1,-2] C_{-2} C_{-3} + \dots + \\ & + [1] m^2 [1 + 2 C_1 C_{-1} + 2 C_2 C_{-2} + 2 C_3 C_{-3} + \dots] + \\ & + (1) m^2 [2 C_{-2} + C_1 C_{-3} + C_2 C_{-4} + C_{-1}^2 + C_{-3} C_1 + \dots] \end{aligned}$$

$$\text{donde } 1 \equiv C_0^2 \equiv \left(\frac{a_0}{a_0} \right)^2.$$

Los a_v y por tanto, los C_v son coeficientes en las series de potencias (8.6) y (8.17), consultar págs. 195 y 203; entonces, es conveniente por razones de convergencia, que los términos de las respectivas series tiendan a cero lo más rápidamente posible (esto es importante!).

Vamos a analizar si este “criterio” nos permite determinar el valor (u orden de magnitud) de estos coeficientes. Como m es un número muy pequeño ¹, $m \cong 0,08$, investiguemos si es posible determinar los coeficientes de modo que C_1 y C_{-1} se conserven del orden de m^2 y los restantes factores sean de orden mayor en pequeñez a m^2 , en cuyo caso el producto $C_1 \cdot C_2$ será de orden superior a dos; análogamente $C_1 \cdot C_{-2}$ y también $C_1 \cdot C_{-1}$; entonces, en primera aproximación se tiene,

$$C_1 = [1] m^2,$$

y análogamente

$$C_{-1} = (-1) m^2.$$

Examinemos el orden del error; para ello consideremos la expresión de los coeficientes:

$$C_2 = \sum_{\substack{v \neq 0 \\ \neq 2}} [2,v] C_v C_{v-2} + [2] m^2 \sum_v C_v C_{-v+1} + (2) m^2 \sum_v C_v C_{-v-3}.$$

$$C_{-2} = \sum_{\substack{v \neq 0 \\ \neq -2}} [-2,v] C_v C_{v+2} + [-2] m^2 \sum_v C_v C_{-v-3} + (-2) m^2 \sum_v C_v C_{-v+1}.$$

Desarrollando las sumas de cada término de C_2 resulta:

$$C_2 = [2,1] C_1 C_{-1} + [2,3] C_3 C_1 + \dots + [2,-1] C_{-1} C_{-3} + \dots + [2] m^2 \{ 2 C_1 + C_2 C_{-1} + C_{-2} C_1 + \dots \} + (2) m^2 \{ 2 C_{-3} + \dots \}.$$

entonces, el coeficiente C_2 desarrollado hasta el cuarto orden, tiene la expresión:

$$C_2 = [2,1] C_1 C_{-1} + 2 [2] m^2 C_1.$$

Del mismo modo calculamos C_{-2} , se tiene:

$$C_{-2} = [-2,1] C_1 C_3 + [-2,2] C_2 C_4 + \dots + [-2,-1] C_{-1} C_1 + [-2] m^2 \{ 2 C_{-3} + 2 C_1 C_{-4} + 2 C_{-1} C_{-2} + \dots \} + (-2) m^2 \{ 2 C_1 + C_{-1} C_2 + C_2 C_{-1} + \dots \}$$

entonces, el coeficiente C_{-2} desarrollado hasta el cuarto orden tiene la forma:

$$C_{-2} = [-2,-1] C_{-1} C_1 + 2 (-2) m^2 C_1.$$

En consecuencia, un coeficiente $C_{\pm \xi}$ es del orden de $m^{2\xi}$ para $\xi > 0$; i.e.,

$$C_{\pm \xi} = \mathbf{O} (m^{2\xi}), \quad \text{para } \xi > 0. \tag{8.19}$$

Este resultado prueba que los coeficientes no solo están acotados sino también que tienden a cero.

¹ Consultar § 8.2, pág. 193.

Los coeficientes se pueden determinar mediante el *método de aproximaciones sucesivas*¹, del siguiente modo:

Primero se calculan los coeficientes C_1 y C_{-1} hasta el quinto orden respecto del parámetro m , utilizando la siguiente expresión, $C_1 = [1] m^2$; el factor $[1]$ se obtiene de (8.18b), pág. 204, haciendo $\xi = 1$ entonces resulta:

$$[1] = \frac{3}{16} \frac{6 + 12m + 9m^2}{6 - 4m + m^2}, \text{ luego } C_1 = \frac{3}{16} \frac{6m^2 + 12m^3 + 9m^4}{6 - 4m + m^2}, \text{ si efectuamos el cociente se tiene,}$$

$$C_1 = \frac{3}{16} \left(m^2 + \frac{8}{3} m^3 + \frac{28}{9} m^4 + \frac{44}{27} m^5 + \dots \right) = \frac{3}{16} m^2 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{7}{12} m^4 + \frac{11}{36} m^5 + \dots;$$

Del mismo modo podemos calcular $C_{-1} = (-1) m^2$; el factor (-1) resulta de la ecuación (8.18c), i.e.,

$$(-1) = -\frac{3}{16} \frac{6 - 12m + 9m^2}{6 - 4m + m^2}, \text{ luego } C_{-1} = -\frac{3}{16} \frac{6m^2 - 12m^3 + 9m^4}{6 - 4m + m^2}, \text{ efectuando el cociente}$$

$$\text{resulta: } C_{-1} = -\frac{3}{16} \left(m^2 - \frac{4}{3} m^3 + \frac{11}{18} m^4 + \dots \right) = -\frac{3}{16} m^2 + \frac{12}{48} m^3 - \frac{11}{96} m^4 + \dots.$$

Observar que los coeficientes de las potencias de m son todos menores que uno.

NOTA: Hemos estudiado la solución periódica del sistema de ED del problema del movimiento de la Luna de Hill, ver sistema de ecuaciones (8.4) pág. 191, la cual es de la forma:

$$u = \sum_{(v)} a_v \zeta^{2v+1}, \quad v = \sum_{(v)} a_{-v-1} \zeta^{2v+1}.$$

consultar (8.6) pág. 195. Introduciendo estas dos series en las ecuaciones diferenciales del movimiento hallamos un sistema de infinitas ecuaciones el cual nos permite determinar los coeficientes C_v y por tanto, los a_v i.e.,

$$C_1 = \frac{a_1}{a_0}, \quad C_{-1} = \frac{a_{-1}}{a_0}, \quad C_2 = \frac{a_2}{a_0}, \quad \text{etc.}, \text{ el coeficiente genérico } C_v = \frac{a_v}{a_0}.$$

También vimos que al sustituir estos dos desarrollos en serie en las ecuaciones de movimiento y aplicando el principio de identidad se obtiene una relación que proviene del hecho que el término independiente de estas series no es cero sino C y esta dado por²,

$$\sum_{(v)} \left\{ \left[(2v+1)^2 + 4m(2v+1) + \frac{9}{2} m^2 \right] a_v^2 + \frac{9}{2} m^2 a_v a_{-v-1} \right\} = C$$

¹ Consultar: **Michavila F. & Gavete L.**; 1992, "Programación y Cálculo Numérico", Ed. Reverté.

² Consultar ecuación (8.12a) pág. 202.

Además, al definir los coeficientes C_v demostramos que el orden de un C_v cualquiera es igual a $m^{|2v|}$ ¹. Con estos resultados, nos proponemos ahora interpretar las constantes a_0 , m y C ².

Si en la última igualdad dividimos ambos miembros por a_0^2 resulta:

$$\sum_{(v)} \left\{ \left[(2v+1)^2 + 4m(2v+1) + \frac{9}{2} m^2 \right] \frac{a_v^2}{a_0^2} + \frac{9}{2} m^2 \frac{a_v}{a_0} \frac{a_{-v-1}}{a_0} \right\} = \frac{C}{a_0^2}, \text{ luego}$$

$$\frac{C}{a_0^2} = \sum_{(v)} \left\{ \left[(2v+1)^2 + 4m(2v+1) + \frac{9}{2} m^2 \right] C_v^2 + \frac{9}{2} m^2 C_v C_{-v-1} \right\}$$

desarrollamos la suma teniendo presente que $C_0 = 1$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{C}{a_0^2} = & \left(1 + 4m + \frac{9}{2} m^2 \right) C_0^2 + \frac{9}{2} m^2 C_0 C_{-1} + \left(9 + 12m + \frac{9}{2} m^2 \right) C_1^2 + \frac{9}{2} m^2 C_1 C_{-2} + \\ & + \left(1 - 4m + \frac{9}{2} m^2 \right) C_{-1}^2 + \frac{9}{2} m^2 C_{-1} C_0 + \dots \end{aligned}$$

luego, agrupamos según los coeficientes C_v , resulta:

$$\begin{aligned} \frac{C}{a_0^2} = & 1 + 4m + \frac{9}{2} m^2 + 9 m^2 C_{-1} + \left(9 + 12m + \frac{9}{2} m^2 \right) C_1^2 + \left(1 - 4m + \frac{9}{2} m^2 \right) C_{-1}^2 + \\ & + 9 m^2 C_1 C_{-2} + \dots \end{aligned}$$

El siguiente paso en este desarrollo consiste en reemplazar $C_1, C_{-1}, C_2, C_{-2}, \dots$ en función de m , consultar (8.17) pág. 203, para ello agrupamos los términos según las potencias creciente de m obteniendo:

$$C = a_0^2 \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v m^v = a_0^2 \left[1 + 4m + \frac{9}{2} m^2 - \frac{1147}{128} m^4 + \dots \right]$$

Recordar que la constante C se puede obtener, también, de la expresión de la integral de la energía:

$$Du Dv + \frac{3}{4} m^2 (u+v)^2 + \frac{2 m^2}{(uv)^{\frac{1}{2}}} = m^2 h = C.$$

Si dividimos toda esta igualdad por a_0^2 resulta:

¹ Ver ecuación (8.19), pág. 205.

² C es la constante que aparece en el sistema de ED (8.9), pág. 197; está relacionada con la integral de la energía h . En cambio, los C_v son coeficientes de las series de potencias que están asociados con los coeficientes a_v de la solución propuesta, ver Ec. (8.6) pág. 195.

$$C = a_0^2 \left[\frac{Du Dv}{a_0^2} + \frac{3}{4} m^2 \left(\frac{u}{a_0} + \frac{v}{a_0} \right)^2 + 2 \frac{m^2}{a_0^3} \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{a_0}} \sqrt{\frac{v}{a_0}}} \right]$$

Desarrollamos cada uno de los términos,

$$\frac{Du Dv}{a_0^2} = \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} (2v+1)(2\xi-2v-1) \frac{a_v}{a_0} \frac{a_{v-\xi}}{a_0} \zeta^{2\xi}; \quad \frac{u^2}{a_0^2} = \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} \frac{a_v}{a_0} \frac{a_{\xi-v-1}}{a_0} \zeta^{2\xi},$$

$$\frac{v^2}{a_0^2} = \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} \frac{a_v}{a_0} \frac{a_{-\xi-v-1}}{a_0} \zeta^{2\xi}; \quad \frac{uv}{a_0^2} = \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} \frac{a_v}{a_0} \frac{a_{v-\xi}}{a_0} \zeta^{2\xi},$$

Solo nos resta calcular el cociente: $\frac{1}{\sqrt{\frac{u}{a_0}} \sqrt{\frac{v}{a_0}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{uv}{a_0^2}}} = \left(\sum_{(\xi)} \sum_{(v)} C_v C_{v-\xi} \zeta^{2\xi} \right)^{-\frac{1}{2}} =$

$$= \left[\sum_{(v)} C_v^2 + \sum_{(v)} C_v C_{v-1} \zeta^2 + \sum_{(v)} C_v C_{v+1} \zeta^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[1 + C_1^2 + C_{-1}^2 + \dots + (C_{-1} + C_1 + C_{-1} C_{-2} + \dots) \zeta^2 + (C_1 + C_1 C_2 + C_{-1} + \dots) \zeta^{-2} + \dots \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

NOTA: El desarrollo en serie de $u.v$ se puede hallar en la pág. 200. Recordar que ξ toma los valores cero, +1 y -1.

Luego, la igualdad anterior tiene la forma del desarrollo en serie de $(1+X)^{-\frac{1}{2}}$; por lo tanto ¹,

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{uv}{a_0^2}}} = 1 - \frac{1}{2} \left[C_1^2 + C_{-1}^2 + \dots + (C_{-1} + C_1 + C_{-1} C_{-2} + \dots) \zeta^2 + (C_1 + C_1 C_2 + C_{-1} + \dots) \zeta^{-2} + \dots \right] + \frac{3}{8} \left[C_1^2 + C_{-1}^2 + \dots + (C_{-1} + C_1 + C_{-1} C_{-2} + \dots) \zeta^2 + (C_1 + C_1 C_2 + C_{-1} + \dots) \zeta^{-2} + \dots \right]^2 + \dots$$

¹ El desarrollo en serie de potencias de $(1+X)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} X + \frac{3}{8} X^2 + \dots$

Si reemplazamos los coeficientes C_v por sus desarrollos se obtiene una serie de potencias en función de ζ^2 ; por lo tanto, podemos enunciar que:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{uv}{a_0^2}}} = P_1(\zeta^2).$$

Un resultado similar se obtiene si consideramos los productos: $\frac{uv}{a_0^2}$, $\frac{u^2}{a_0^2}$ y $\frac{v^2}{a_0^2}$ hallados anteriormente; entonces, como expresión definitiva nos queda que C esta dado por la ecuación:

$$C = \frac{2m^2}{a_0} P_1(\zeta^2) + a_0^2 P_2(\zeta^2)$$

En consecuencia, tenemos dos expresiones para C; una en función de potencias de m y la otra en serie de potencias de ζ^2 , luego podemos escribir la siguiente identidad

$$a_0^2 \sum_v \alpha_v m^v \equiv \frac{2m^2}{a_0} P_1(\zeta^2) + a_0^2 P_2(\zeta^2)$$

notar que esta identidad debe verificarse para todo ζ ; además como $\zeta = e^{it}$ entonces $\zeta = 1$ para $t = 0$. Por lo tanto:

$$\sum_v \alpha_v m^v = \frac{2m^2}{a_0^3} P_1(1) + P_2(1)$$

en consecuencia,

$$a_0^3 = \frac{2m^2 P_1(1)}{\sum_v \alpha_v m^v - P_2(1)}, \Rightarrow a_0 = \sqrt[3]{\frac{2m^2 P_1(1)}{\sum_v \alpha_v m^v - P_2(1)}}$$

finalmente,

$$a_0 = m^{\frac{2}{3}} [\beta_0 + \beta_1 m + \beta_2 m^2 + \dots] = m^{\frac{2}{3}} [1 - \frac{2}{3} m + \frac{7}{18} m^2 + \dots],$$

entonces, a_0 se expresa por una serie de potencias de m. Luego, conocido a_0 se puede reemplazar dicho valor en la expresión que define $C = a_0^2 \left[1 + 4m + \frac{9}{2} m^2 - \frac{1147}{128} m^4 + \dots \right]$, consultar pág. 207, luego, se tiene:

$$C = m^{\frac{4}{3}} [\beta_0 + \beta_1 m + \beta_2 m^2 + \dots]^2 \left[1 + 4m + \frac{9}{2} m^2 - \frac{1147}{128} m^4 + \dots \right]$$

$$\text{Y por tanto, } C = m^{\frac{4}{3}} \left[1 - \frac{2}{3} m + \frac{7}{18} m^2 + \dots \right]^2 \left[1 + 4 m + \frac{9}{2} m^2 - \frac{1147}{128} m^4 + \dots \right]$$

efectuando el producto de ambas series, resulta:

$$C = m^{\frac{4}{3}} \left[1 + \frac{8}{3} m + \dots \right]$$

donde
$$a_0 = m^{\frac{2}{3}} \left[1 - \frac{2}{3} m + \dots \right].$$

Una vez determinada la expresión de a_0 podemos obtener los coeficientes a_v , ya que $a_v = a_0 C_v$; donde los C_v son valores conocidos.

En síntesis, podemos hallar a_0 a partir de su desarrollo en serie y los C_v aplicando la ecuación (8.17) y luego, calcular los a_v . Entonces, estamos en condiciones de expresar las variables u y v en series de potencias de ζ , en función de los a_v de la forma ¹:

$$u = a_0 \zeta + a_1 \zeta^3 + a_2 \zeta^5 + \dots + a_{-1} \zeta^{-1} + a_{-2} \zeta^{-3} + a_{-3} \zeta^{-5} + \dots$$

$$v = a_{-1} \zeta + a_{-2} \zeta^3 + a_{-3} \zeta^5 + \dots + a_0 \zeta^{-1} + a_1 \zeta^{-3} + a_2 \zeta^{-5} + \dots$$

además, las coordenadas x e y tienen la expresión:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_v \cos(2v+1) \frac{t}{m}, \quad y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_v \operatorname{sen}(2v+1) \frac{t}{m};$$

consultar pág. 194; desarrollamos estas fórmulas hasta sus primeros ordenes, se tiene:

$$x(t) = a_0 \cos\left(\frac{t}{m}\right) + a_1 \cos\left(3\frac{t}{m}\right) + \dots$$

$$y(t) = a_0 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{m}\right) + a_1 \operatorname{sen}\left(3\frac{t}{m}\right) + \dots$$

Si en estos desarrollos consideramos sólo la primera aproximación, podemos despreciar los términos $a_1 \cos\left(3\frac{t}{m}\right)$ y $a_1 \operatorname{sen}\left(3\frac{t}{m}\right)$ por ser a_1 un coeficiente de segundo orden y m muy pequeño, luego

$$\begin{cases} x(t) = a_0 \cos \frac{t}{m} \\ y(t) = a_0 \operatorname{sen} \frac{t}{m} \end{cases}$$

¹ Consultar ecuaciones (8.6) pág. 195.

Entonces, el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra es un movimiento periódico con período $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$. La representación gráfica en coordenadas geocéntricas se muestra en la Figura 43.

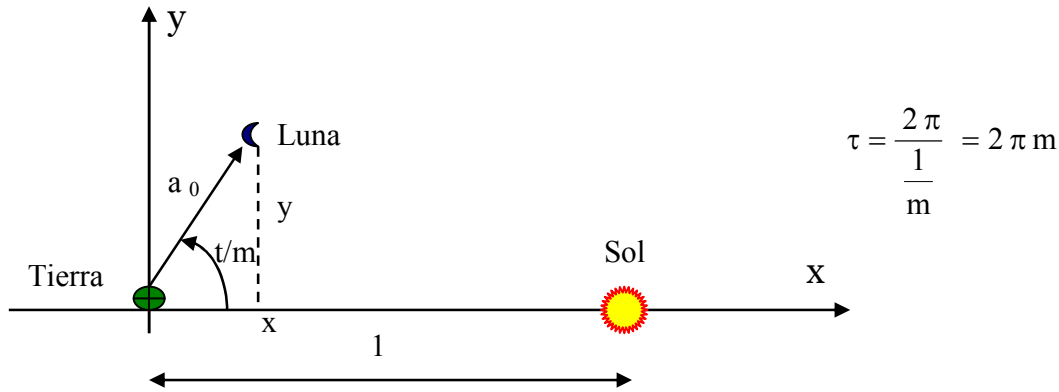


Fig. 43. Representación del movimiento de la Luna respecto de la Tierra. El movimiento es periódico, a_0 es constante; en primera aproximación el Sol no perturba el movimiento de la Luna.

NOTA. Este resultado nos dice que, en primera aproximación, el Sol no perturba el movimiento de la Luna respecto de la Tierra por lo tanto, el modelo del movimiento corresponde a un problema de dos cuerpos.

§ 8.4 Ecuaciones de movimiento en un sistema en rotación (sinódico).

Nos proponemos estudiar el movimiento de la Luna respecto de un sistema de coordenadas fijo $\{\xi, \eta\}$ con origen en la Tierra y consideremos, en relación a estos ejes, un sistema en rotación $\{x, y\}$ con origen también en la Tierra, cuyo eje-x esta dirigido “constantemente” hacia el Sol; suponemos además, que este eje-x gira alrededor del origen (la Tierra) con velocidad angular constante e igual a uno ¹. Entonces, respecto de este sistema en rotación, la Luna describe una circunferencia cuyas coordenadas $\{x, y\}$ son funciones periódicas del tiempo t . Asimismo, las coordenadas $\{\xi, \eta\}$ de la Luna respecto del sistema en reposo, llamado *sistema sidéreo*, están definidas por las expresiones:

$$\begin{aligned} \xi &= a_0 \cos(n_L t) \\ \eta &= a_0 \sin(n_L t) \end{aligned}$$

donde n_L representa el movimiento medio de la Luna y a_0 la distancia Tierra-Luna. La Figura 44 muestra los respectivos sistemas de coordenadas y las posiciones de la Luna y el Sol respecto del origen, la Tierra.

Hemos estudiado que las fórmulas de transformación del sistema sidéreo al sistema en rotación (sinódico) son ²:

$$\begin{cases} \xi = x \cos t - y \sin t \\ \eta = x \sin t + y \cos t \end{cases}$$

¹ El movimiento medio del Sol $n_{Sol} = 1$.

² Transformación de coordenadas de un sistema fijo a un sistema en rotación con el mismo origen.

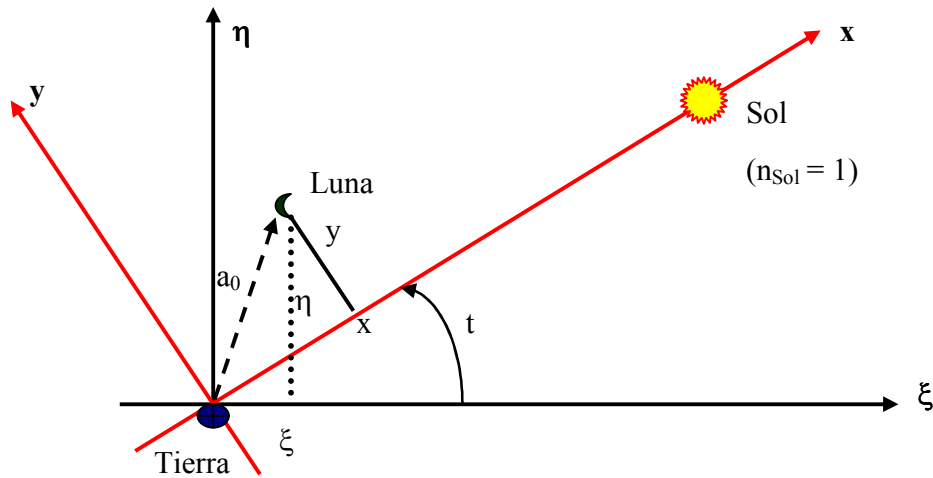


Fig. 44. Representación de los sistemas de coordenadas fijo $\{\xi, \eta\}$, denominado "sistema sidéreo" y del sistema de coordenadas en rotación $\{x, y\}$ "sistema sinódico". El eje-x está siempre en dirección al Sol. Las coordenadas de la Luna respecto de ambos sistemas se indican con (ξ, η) y (x, y) respectivamente.

Reemplazando ξ, η, x e y por sus valores se tiene:

$$a_0 \cos(n_L t) = a_0 \cos \frac{t}{m} \cos t - a_0 \sin \frac{t}{m} \sin t = a_0 \cos \left(1 + \frac{1}{m}\right) t$$

$$a_0 \sin(n_L t) = a_0 \cos \frac{t}{m} \sin t + a_0 \sin \frac{t}{m} \cos t = a_0 \sin \left(1 + \frac{1}{m}\right) t$$

simplificando, resulta el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \cos(n_L t) = \cos \left(1 + \frac{1}{m}\right) t \\ \sin(n_L t) = \sin \left(1 + \frac{1}{m}\right) t \end{cases}$$

comparando los argumentos se deduce:

$$n_L = 1 + \frac{1}{m}, \Rightarrow m = \frac{1}{n_L - 1}, \text{ si } n_L = \frac{n}{n'}, \text{ entonces: } m = \frac{1}{\frac{n}{n'} - 1} = \frac{n'}{n - n'}$$

$$m = 0,08084 \ 89 \dots$$

donde n representa el movimiento medio de la Luna y n' el movimiento medio del Sol. El periodo de la Luna $P_L = 27^d,321662$ (sidéreo) y el del Sol $P_{Sol} = 365^d,256363$ (sidéreo), entonces $n = 0,2299 \ 7083 \dots$ y $n' = 0,01720 \ 2124 \dots$ respectivamente.

Cálculo de la ecuación del Centro.

Sean r y v las coordenadas polares de la Luna en el sistema sidéreo, en un instante cualquiera t ; entonces:

$$x = r \cos(v - t)$$

$$y = r \sin(v - t).$$

Definimos la longitud media de la Luna como l_L ; las condiciones iniciales, para $t = 0$, suponen que el eje- ξ y el eje- x coinciden, lo cual implica que el Sol y la Luna están alineados sobre el eje- ξ ; consultar gráfico aclaratorio pág. 240. Además, sea n_L el movimiento medio de la Luna cuando se considera que el movimiento medio del Sol es igual a uno, entonces resulta: $n_L t = l_L$.

Si tenemos en cuenta otras unidades entonces, el movimiento medio del Sol es n' y el movimiento medio de la Luna es n , luego se tiene ¹:

$$n_L t = l_L = \frac{n}{n'} t$$

y por tanto, podemos escribir:

$$\begin{aligned} r \cos (v - l_L) &= r \cos [v - l_{Sol} - (l_L - l_{Sol})] = r \cos (v - l_{Sol}) \cos (l_L - l_{Sol}) + r \operatorname{sen}(v - l_{Sol}) \operatorname{sen} (l_L - l_{Sol}) \\ &= x \cos (l_L - l_{Sol}) + y \operatorname{sen} (l_L - l_{Sol}). \end{aligned}$$

$$r \operatorname{sen} (v - l_L) = r \operatorname{sen} [v - l_{Sol} - (l_L - l_{Sol})] = x \operatorname{sen} (l_L - l_{Sol}) - y \cos (l_L - l_{Sol}).$$

donde l_{Sol} es la longitud media del Sol. Si reemplazamos las longitudes medias por sus expresiones i.e., $l_L = \frac{n}{n'} t$, y $l_{Sol} = 1$, los desarrollos anteriores toman la forma:

$$r \cos (v - l_L) = x \cos \left(\frac{n}{n'} - 1\right) t + y \operatorname{sen} \left(\frac{n}{n'} - 1\right) t.$$

$$r \operatorname{sen} (v - l_L) = x \operatorname{sen} \left(\frac{n}{n'} - 1\right) t - y \cos \left(\frac{n}{n'} - 1\right) t.$$

el paréntesis $\left(\frac{n}{n'} - 1\right) = \frac{n - n'}{n'} = \frac{1}{m}$; luego, se tiene:

$$r \cos (v - l_L) = x \cos \frac{t}{m} + y \operatorname{sen} \frac{t}{m}.$$

$$r \operatorname{sen} (v - l_L) = x \operatorname{sen} \frac{t}{m} - y \cos \frac{t}{m}. \tag{8.20}$$

para la definición de m consultar § 8.2, pág. 193.

El paso siguiente es determinar la *ecuación del centro* ², es decir: $\theta = v - l_L$; para ello debemos reemplazar las coordenadas x e y , así como también: $\operatorname{sen} \frac{t}{m}$, $\cos \frac{t}{m}$, por sus desarrollos, resulta:

$$x = \frac{u + v}{2}, \quad y = \frac{u - v}{2i}.$$

¹ Definiciones: movimiento medio $n = 2 \pi / \text{Periodo}$; longitud media $l = \varpi + n (t - t_0) = \varpi + M$; donde $\varpi = \Omega + \omega$, ϖ es la longitud del perihelio, Ω longitud del nodo ascendente y ω argumento del perihelio. Consultar Capítulo 2.

² La ecuación del centro se define como: $v - M$, “anomalía verdadera menos anomalía media”. Si los dos cuerpos están sobre el mismo eje- x , la “longitud media” coincide con la “anomalía media”.

Además,

$$\zeta = e^{i\frac{t}{m}} = \cos\frac{t}{m} + i \operatorname{sen}\frac{t}{m}; \quad \text{luego} \quad \begin{cases} \cos\frac{t}{m} = \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{t}{m} = \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2i} \end{cases}$$

luego, las expresiones: $r \cos \theta$ y $r \operatorname{sen} \theta$, ecuación (8.20), toman la forma:

$$\begin{aligned} r \cos \theta &= \frac{u+v}{2} \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} + \frac{u-v}{2i} \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2i} = \frac{1}{4} \left[(u+v)(\zeta + \zeta^{-1}) - (u-v)(\zeta - \zeta^{-1}) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[2u\zeta^{-1} + 2v\zeta \right] = \frac{1}{2} \left[u\zeta^{-1} + v\zeta \right]. \end{aligned}$$

del mismo modo calculamos: $r \operatorname{sen} \theta$, resulta,

$$\begin{aligned} r \operatorname{sen} \theta &= \frac{u+v}{2} \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2i} - \frac{u-v}{2i} \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} = -\frac{1}{4} i \left[-2u\zeta^{-1} + 2v\zeta \right] = \frac{1}{2} i \left[u\zeta^{-1} + v\zeta \right] \\ &= \frac{1}{2} i \left[u\zeta^{-1} - v\zeta \right]. \end{aligned}$$

entonces, haciendo el cociente entre las dos expresiones, se tiene:

$$\operatorname{tg} \theta = i \frac{(u\zeta^{-1} - v\zeta)}{(u\zeta^{-1} + v\zeta)}; \quad i \operatorname{tg} \theta = -\frac{u\zeta^{-1} - v\zeta}{u\zeta^{-1} + v\zeta}.$$

recordemos la identidad trigonométrica:

$$\begin{aligned} \frac{1+i \operatorname{tg} \theta}{1-i \operatorname{tg} \theta} &= e^{2i\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = \frac{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}. \\ e^{2i\theta} &= \frac{1 - \frac{u\zeta^{-1} - v\zeta}{u\zeta^{-1} + v\zeta}}{1 + \frac{u\zeta^{-1} - v\zeta}{u\zeta^{-1} + v\zeta}} = \frac{u\zeta^{-1} + v\zeta - u\zeta^{-1} + v\zeta}{u\zeta^{-1} + v\zeta + u\zeta^{-1} - v\zeta} = \frac{2v\zeta}{2u\zeta^{-1}}; \end{aligned}$$

Donde u y v representan la solución buscada y tienen la forma:

$$u = \sum_v a_v \zeta^{2v+1}; \quad v = \sum_v a_{-v-1} \zeta^{2v+1};$$

consultar ecuación (8.6) pág. 195: reemplazando resulta:

$$e^{2i\theta} = \frac{\sum a_{-v-1} \zeta^{2v+2}}{\sum_v a_v \zeta^{2v}}, \text{ hacemos el siguiente cambio de subíndice:}$$

$$-(v+1) = \xi; \quad 2(v+1) = -\xi \quad \text{y} \quad \zeta_1 = \frac{1}{\zeta}, \text{ luego}$$

$$e^{2i\theta} = \frac{\sum_v a_\xi \zeta_1^{2\xi}}{\sum_v a_v \zeta^{2v}} = \frac{\sum_v a_v \zeta_1^{2v}}{\sum_v a_v \zeta^{2v}};$$

Si aplicamos logaritmo natural en ambos miembros, se tiene

$$2i\theta = \ln \left\{ \sum a_v \zeta_1^{2v} \right\} - \ln \left\{ \sum a_v \zeta^{2v} \right\},$$

dividimos el segundo miembro por a_0 , implica que:

$$2i\theta = \ln \left\{ \sum \frac{a_v}{a_0} \zeta_1^{2v} \right\} - \ln \left\{ \sum \frac{a_v}{a_0} \zeta^{2v} \right\},$$

como $\frac{a_v}{a_0} = C_v$, consultar pág. 203, resulta:

$$2i\theta = \ln \left\{ \sum C_v \zeta_1^{2v} \right\} - \ln \left\{ \sum C_v \zeta^{2v} \right\},$$

El desarrollo de: $\ln \left\{ \sum C_v \zeta_1^{2v} \right\} = \ln \left\{ 1 + C_1 \zeta_1^2 + C_{-1} \zeta^{-2} + C_2 \zeta_1^4 + C_{-2} \zeta^{-4} + \dots \right\}$

recordar que: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \int_0^x \frac{dx}{(1+x)}$;

el desarrollo de $\frac{1}{(1+x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$; luego,

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+x)} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \dots) dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Por lo tanto, el desarrollo de:

$$\begin{aligned} \ln \left\{ \sum C_v \zeta_1^{2v} \right\} &= C_1 \zeta_1^2 + C_{-1} \zeta^{-2} + C_2 \zeta_1^4 + C_{-2} \zeta^{-4} - \dots - \frac{1}{2} [C_1 \zeta^2 + C_{-1}^2 \zeta^{-4} + \\ &\quad + 2 C_1 C_{-1} + \dots] = \\ &= -C_1 C_{-1} + C_1 \zeta_1^2 + C_{-1} \zeta_1^{-2} + (C_2 - \frac{1}{2} C_1^2) \zeta^4 + (C_{-2} - \frac{1}{2} C_1^2) \zeta^{-4} + \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Una expresión análoga se tiene para el segundo término (el sustrayendo), luego la fórmula:

$$2i\theta = \ln \left\{ \sum C_v \zeta_1^{2v} \right\} - \ln \left\{ \sum C_v \zeta^{2v} \right\}$$

admite el desarrollo

$$\begin{aligned} 2i\theta &= -C_1 C_{-1} + C_1 \zeta_1^2 + C_{-1} \zeta_1^{-2} + \dots - (-C_1 C_{-1} + C_1 \zeta^2 + C_{-1} \zeta^{-2} + \dots) \\ &= C_1 (\zeta^{-2} - \zeta^2) + C_{-1} (\zeta^2 - \zeta^{-2}) + \dots \end{aligned}$$

dividiendo ambos miembros por $2i$, resulta:

$$\theta = C_1 \frac{\zeta^{-2} - \zeta^2}{2i} + C_{-1} \frac{\zeta^2 - \zeta^{-2}}{2i} + \dots$$

Además, hemos estudiado, consultar pág. 214, que: $\text{sen} \frac{t}{m} = \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2i}$; luego,

$$\theta = -C_1 \text{sen} \left(2 \frac{t}{m} \right) + C_{-1} \text{sen} \left(2 \frac{t}{m} \right) + \dots$$

y por tanto,

$$\theta = v - l_L = A_2 \text{sen} \left(2 \frac{t}{m} \right) + A_4 \text{sen} \left(4 \frac{t}{m} \right) + \dots$$

donde los coeficientes A_2, A_4, \dots dependen solamente de los C_v ; significa que los A_v se expresan en series de potencias de m , de la forma

$$A_2 = \frac{11}{8} m^2 + \frac{13}{16} m^3 + \dots$$

Recordar que A_{2v} es del orden de (m^{2v}) ; asimismo los C_v son también del orden de (m^{2v}) , ver (8.19) pág. 205.

El primer término del desarrollo de θ es: $A_2 \sin\left(2\frac{t}{m}\right)$, representa la *variación de la longitud* de la Luna; el período de la variación es 14,75.

§ 8.5 Fórmulas de Hill suponiendo que el movimiento medio del sistema sinódico es distinto de uno.

Nos proponemos deducir las formulas de Hill suponiendo que el movimiento medio del sistema de coordenadas sinódico n' , es distinto de la unidad, i.e., $n' \neq 1$. Para ello, consideremos un sistema de coordenadas sidéreo fijo $\{X,Y\}$ y el sistema sinódico (en rotación) $\{\xi,\eta\}$; sean $(1-\mu)$ la masa del Sol y (μ) la masa de la Tierra; ver Figura 45¹.

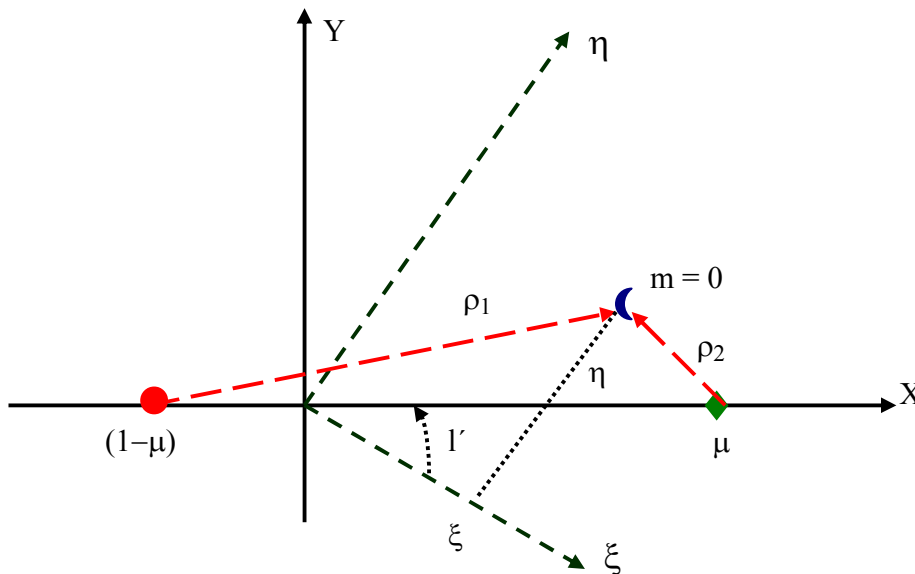


Fig. 45. $\{X,Y\}$ representa el sistema sidéreo y $\{\xi,\eta\}$ el sistema sinódico. $(1-\mu)$ es la masa del Sol y μ la masa de la Tierra; $m = 0$ es la masa de la Luna. ρ_1 y ρ_2 representan las distancias del Sol a la Luna y de la Tierra a la Luna.

Las distancias desde la masa $(1-\mu)$ y (μ) a la Luna [masa $m = 0$] son ρ_1 y ρ_2 respectivamente. Sea $l' = n' t + \varepsilon'$; donde: l' es la longitud media, n' el movimiento medio y ε' la longitud media de la época de la Luna respecto del sistema fijo $\{X,Y\}$.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento del cuerpo de masa m , en coordenadas $\{\xi, \eta\}$ son²:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= -\frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} &= -\frac{\partial U}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} U = \frac{(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \tag{8.21}$$

¹ Notar que hemos cambiado la nomenclatura de los ejes sidéreo y sinódico.

² Consultar pág. 71.

La relación entre los dos sistemas de coordenadas es:

$$\begin{cases} \xi = x \cos l' - y \operatorname{sen} l' \\ \eta = x \operatorname{sen} l' + y \cos l' \end{cases} \quad \begin{cases} x = \xi \cos l' + \eta \operatorname{sen} l' \\ y = -\xi \operatorname{sen} l' + \eta \cos l' \end{cases}$$

Nos proponemos deducir las ecuaciones de movimiento en el sistema sidéreo. Para ello debemos calcular las siguientes derivadas: \dot{x} , \dot{y} , \ddot{x} e \ddot{y} :

$$\dot{x} = \dot{\xi} \cos l' + \dot{\eta} \operatorname{sen} l' - n' \xi \operatorname{sen} l' + n' \eta \cos l' = \dot{\xi} \cos l' + \dot{\eta} \operatorname{sen} l' + n' y$$

$$\dot{y} = -\dot{\xi} \operatorname{sen} l' + \dot{\eta} \cos l' - n' \xi \cos l' - n' \eta \operatorname{sen} l' = -\dot{\xi} \operatorname{sen} l' + \dot{\eta} \cos l' - n' x$$

Calculo de las derivadas segundas:

$$\ddot{x} = \ddot{\xi} \cos l' + \ddot{\eta} \operatorname{sen} l' + n' \dot{y} - n' \dot{\xi} \operatorname{sen} l' + n' \dot{\eta} \cos l'.$$

$$\ddot{x} = \ddot{\xi} \cos l' + \ddot{\eta} \operatorname{sen} l' + 2 n' \dot{y} + n'^2 x.$$

$$\ddot{y} = -\ddot{\xi} \operatorname{sen} l' + \ddot{\eta} \cos l' - n' \dot{x} - n' \dot{\xi} \cos l' - n' \dot{\eta} \operatorname{sen} l'.$$

$$\ddot{y} = -\ddot{\xi} \operatorname{sen} l' + \ddot{\eta} \cos l' - 2 n' \dot{x} + n'^2 y.$$

El siguiente paso consiste en reemplazar los valores de $\ddot{\xi}$ y $\ddot{\eta}$ obtenidos en el sistema de ecuaciones (8.21), luego se tiene

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cos l' + \frac{\partial U}{\partial \eta} \operatorname{sen} l' + 2 n' \dot{y} + n'^2 x.$$

$$\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} \operatorname{sen} l' + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cos l' - 2 n' \dot{x} + n'^2 y.$$

Agrupando, podemos escribir:

$$\ddot{x} - 2 n' \dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} + n'^2 x.$$

$$\ddot{y} + 2 n' \dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} + n'^2 y$$

También se pueden expresar como:

$$\ddot{x} - 2 n' \dot{y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[U + \frac{1}{2} n'^2 (x^2 + y^2) \right]$$

$$\ddot{y} + 2 n' \dot{x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[U + \frac{1}{2} n'^2 (x^2 + y^2) \right]$$

Si definimos una nueva función potencial U^* , el sistema anterior se puede escribir de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2n'\dot{y} &= \frac{\partial U^*}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n'\dot{x} &= \frac{\partial U^*}{\partial y} \end{aligned} \right\} U^* = U + \frac{1}{2}n'^2(x^2 + y^2), \quad \text{donde } U = \frac{(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}.$$

Por lo tanto, la nueva función potencial es: $U^* = \frac{(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}n'^2(x^2 + y^2)$.

Si designamos a U^* por U , entonces resulta:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2n'\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n'\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \right\} U = \frac{(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}n'^2(x^2 + y^2). \quad (8.22)$$

Este sistema de ED representa el movimiento del cuerpo de masa $m = 0$ en el sistema de coordenadas sidéreo $\{X, Y\}$; ver Figura 45, pág. 217.

El siguiente paso es analizar el movimiento del cuerpo de masa m en un sistema sinódico con origen en la Tierra, masa $= \mu$. La Figura 46, muestra el nuevo escenario dinámico en el plano.

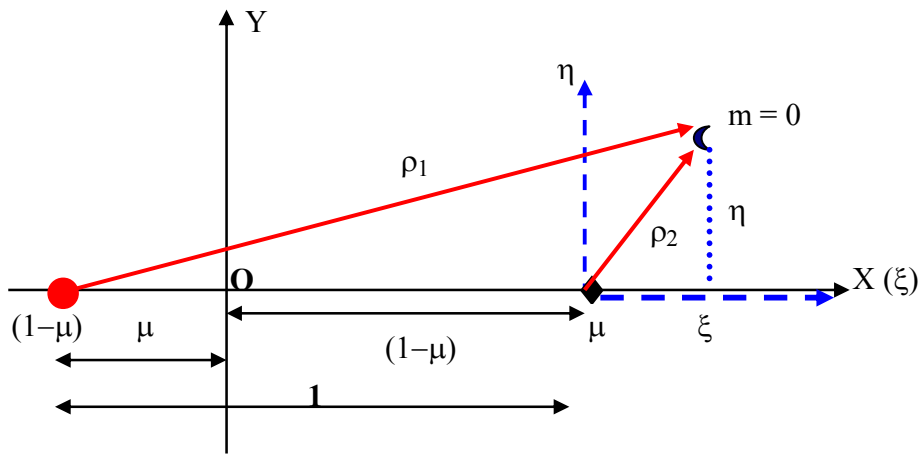


Fig. 46. El punto O es el origen del sistema sidéreo $\{X, Y\}$ y coincide con el baricentro de los cuerpos de masa $(1-\mu)$ y μ , cuya distancia mutua es la unidad. La distancia de la masa μ al origen O es $(1-\mu)$ y la distancia de la masa $(1-\mu)$ respecto de O es μ ; las distancias de $(1-\mu)$ y μ al cuerpo de masa m son ρ_1 y ρ_2 respectivamente. El sistema $\{\xi, \eta\}$ tiene su origen en la masa μ .

Las coordenadas de la Luna son: en el sistema sidéreo $\{x, y\}$ y $\{\xi, \eta\}$ en el sistema con origen en la masa μ ; luego, $x = \xi + (1-\mu)$, $y = \eta$; por lo tanto: $\xi = x + \mu - 1$, $\eta = y$. Definimos $\rho_2 = r$.

Las distancias ρ_1 y ρ_2 admiten, en ambos sistemas de coordenadas, las expresiones:

$$\rho_1^2 = [\mu + x]^2 + y^2, \quad \rho_2^2 = \xi^2 + \eta^2 = [x + \mu - 1]^2 + y^2.$$

Además, si la constante de Gauss $k \equiv 1$, resulta $n'^2 = (1-\mu)$; *porqué?*¹.

Teniendo en cuenta las relaciones entre las variables (ξ, η) y (x, y) entonces, las derivadas de ξ y η coinciden con las x e y ; luego, si suponemos que: $\xi = x$ y $\eta = y$, la cantidad $(\xi^2 + \eta^2)$ cambia en $(x^2 + y^2)$ y finalmente en: $[(x + 1 - \mu)^2 + y^2]$.

NOTA: Este cambio de variables lo hemos realizado para utilizar directamente las ecuaciones de movimiento (8.22).

Teniendo presente estas consideraciones, las ecuaciones diferenciales del movimiento de m entorno del cuerpo de masa μ son:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2n'\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n'\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \right\} U = \frac{(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}n'^2[(x+1-\mu)^2 + y^2], \quad (8.23)$$

donde las distancias mutuas están definidas como: $\rho_1^2 = (1+x)^2 + y^2$; $\rho_2^2 = x^2 + y^2 = r^2$.

Vamos a desarrollar la función potencial U hasta los términos de segundo orden en x e y , i.e., hasta x^2, y^2 :

$$U = (1-\mu) \left[(1+x)^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \mu \left[x^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}n'^2 [(x+1-\mu)^2 + y^2].$$

desarrollando las potencias resulta:

$$U = (1-\mu) \left[1 + 2x + x^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}n'^2 [x^2 + 1 + \mu^2 + 2x - 2x\mu - 2\mu + y^2],$$

agrupando,

$$U = (1-\mu) \left[1 + 2x + x^2 + y^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}n'^2 [x^2 + y^2 + 2x(1-\mu) + (1-\mu)^2],$$

entonces, si desarrollamos los exponentes hasta la potencia dos y agrupando, se tiene:

$$U = (1-\mu) \left[1 - \frac{1}{2}(2x + x^2 + y^2) + \frac{3}{8}(4x^2 + \dots) \right] + \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}n'^2 [x^2 + y^2 + 2x(1-\mu) + (1-\mu)^2]$$

$$U = C - (1-\mu)x + n'^2(1-\mu)x + (1-\mu)x^2 + \frac{1}{2}n'^2x^2 - \frac{1}{2}(1-\mu)y^2 + \frac{1}{2}n'^2y^2 + \frac{\mu}{r} + \dots$$

¹ Recordar que: $k^2(m_0 + m_1) = a^3 n^2$. Luego, si $(m_0 + m_1) = (1-\mu)$ y $a = 1$ resulta $n^2 = (1-\mu)$.

Recordemos que $n'^2 = (1-\mu)$, reemplazando resulta:

$$U = C - (1-\mu)x + (1-\mu)^2 x + (1-\mu)x^2 + \frac{1}{2}(1-\mu)x^2 - \frac{1}{2}(1-\mu)y^2 + \frac{1}{2}(1-\mu)y^2 + \frac{\mu}{r},$$

simplificando, se tiene:

$$U = C + (1-\mu)x [(1-\mu) - 1] + \frac{3}{2}(1-\mu)x^2 + \frac{\mu}{r},$$

y finalmente,

$$U = C + (\mu - 1)\mu x + \frac{3}{2}(1-\mu)x^2 + \frac{\mu}{r}.$$

Ecuación que define la función potencial U ; la cual usaremos en el sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento (8.23), luego:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n'\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} = -\mu(1-\mu) + 3(1-\mu)x - \frac{\mu}{r^3}x \\ \ddot{y} + 2n'\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\mu}{r^3}y \end{cases}$$

finalmente, el sistema de ED toman la forma,

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n'\dot{y} - 3n'^2x = -\frac{\mu}{r^3}x \\ \ddot{y} + 2n'\dot{x} = -\frac{\mu}{r^3}y \end{cases} \quad (8.24)$$

esta forma de escribir las ED del movimiento de m (la Luna) respecto del cuerpo de masa μ (la Tierra) se denominan *forma canónica*.

NOTA: Hemos omitido el término $\mu(1-\mu)$ por ser muy pequeño, del orden de 3×10^{-6} ,¹.

Introducimos ahora una nueva variable independiente τ , definida como:

$$\tau = I_{Luna} - I_{Sol} = nt + \varepsilon - n't - \varepsilon' = (n - n')(t - t_0).$$

además,

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}, \quad \text{donde } x' = \frac{dx}{d\tau}; \text{ luego, } \dot{x} = x'(n - n'), \quad \ddot{x} = x''(n - n')^2.$$

Teniendo en cuenta estas nuevas definiciones reemplazamos en las ED (8.24), resulta:

$$\begin{cases} x''(n - n')^2 - 2n'y'(n - n') - 3n'^2x = -\frac{\mu}{r^3}x \\ y''(n - n')^2 + 2n'x(n - n') = -\frac{\mu}{r^3}y \end{cases}$$

¹ Recordar que μ es la masa de la Tierra: $\mu = 2,9899 \times 10^{-6} \mathcal{M}_{Sol}$.

Dividiendo ambos miembros por $(n - n')^2$ y haciendo $\frac{n'}{(n - n')} = m$; resulta,

$$\begin{cases} x'' - 2m y' - 3m^2 x = -\frac{1}{(n - n')^2} \frac{\mu}{r^3} x \\ y'' + 2m x' = -\frac{1}{(n - n')^2} \frac{\mu}{r^3} y \end{cases}$$

Si definimos $\frac{\mu}{(n - n')^2} = \kappa$ y reemplazamos, se tiene:

$$\begin{cases} x'' - 2m y' - 3m^2 x = -\frac{\kappa}{r^3} x \\ y'' + 2m x' = -\frac{\kappa}{r^3} y \end{cases} \quad (8.25)$$

Introducimos variables complejas como lo hicimos anteriormente, consultar pág. 195, de la forma:

$$u = x + i y, \quad v = x - i y, \quad \zeta = e^{i\tau}, \quad D = \zeta \frac{d}{d\zeta}; \quad \text{donde: } x = \frac{u + v}{2}, \quad y = \frac{u - v}{2i}.$$

entonces, multiplicamos la segunda ecuación de (8.25) por i , y la sumamos a la primera resulta:

$$u'' - 2m(y' - i x') - 3m^2 x = -\frac{\kappa}{r^3} u; \quad \text{factoriando (i) se tiene:}$$

$$u'' + 2m i u' - \frac{3}{2} m^2 (u + v) = -\frac{\kappa}{r^3} u = -\kappa u (u v)^{\frac{3}{2}}; \quad (8.25a)$$

ya que: $r^2 = x^2 + y^2 = u v$; luego, $r^3 = (u v)^{\frac{3}{2}}$. Procediendo del mismo modo, restamos la primera de la segunda ecuación, multiplicamos por i y luego factoriando i resulta:

$$v'' - 2m i v' - \frac{3}{2} m^2 (u + v) = -\kappa u (u v)^{\frac{3}{2}}; \quad (8.25b)$$

en consecuencia, las dos últimas ecuaciones (8.25 a,b) reemplazan al sistema de ED (8.25).

La integral de la energía se obtiene multiplicando la primera ecuación de (8.25) por x' y la segunda por y' , luego se suma, obteniendo:

$$x' x'' + y' y'' - 3m^2 x x' = -\frac{\kappa}{r^3} (x x' + y y')$$

ecuación que se puede escribir de la forma:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (x'^2 + y'^2) - \frac{3}{2} m^2 \frac{\partial(x^2)}{\partial \tau} = -\frac{\kappa}{r^3} \frac{\partial}{\partial \tau} (x^2 + y^2) \quad (8.26)$$

el segundo miembro de esta ecuación admite la expresión:

$$-\frac{\kappa}{r^3} \frac{\partial}{\partial \tau} (x^2 + y^2) = -2 \frac{\kappa}{r^3} r r' = 2 \kappa \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{r} \right);$$

Por lo tanto:
$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (x'^2 + y'^2) - \frac{3}{2} m^2 \frac{\partial(x^2)}{\partial \tau} = 2 \kappa \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{r} \right);$$

integrando miembro a miembro, resulta:

$$(x'^2 + y'^2) - 3 m^2 x^2 = \frac{2 \kappa}{r};$$

luego, la integral de la energía admite la siguiente la expresión, en función de las variables u y v:

$$u' v' - \frac{3}{4} m^2 (u + v)^2 = 2 \kappa (u v)^{\frac{1}{2}} - h;$$

donde h es la constante de la energía.

Las ED del movimiento en función de las variables complejas u y v (8.25 a,b) son:

$$\begin{aligned} u'' + 2 m i u' - \frac{3}{2} m^2 (u + v) &= -\kappa u (u v)^{\frac{3}{2}} \\ v'' - 2 m i v' - \frac{3}{2} m^2 (u + v) &= -\kappa v (u v)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Introduciendo nuevamente variables complejas, consultar pág. 195, se tiene:

$$\zeta = e^{i\tau}; \quad D = \zeta \frac{d}{d\zeta}; \quad u' = \frac{du}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\tau} = i D u; \quad u'' = -D^2 u; \quad \text{etc.}$$

luego, con esta nomenclatura, reemplazamos en las ED del movimiento y en la integral de la energía, resultando:

$$\left\{ \begin{aligned} -D^2 u - 2 m D u - \frac{3}{2} m^2 (u + v) &= -\kappa u (u v)^{\frac{3}{2}} \\ -D^2 v + 2 m D v - \frac{3}{2} m^2 (u + v) &= -\kappa v (u v)^{\frac{3}{2}} \\ -D u D v - \frac{3}{4} m^2 (u + v)^2 &= 2 \kappa (u v)^{\frac{1}{2}} - h \end{aligned} \right.$$

Es conveniente multiplicar en cada ED por (-1) en ambos miembros, entonces el sistema anterior toma la forma:

$$\begin{cases} D^2 u + 2 m D u + \frac{3}{2} m^2 (u+v) = \kappa u (u v)^{-\frac{3}{2}} \\ D^2 v - 2 m D v + \frac{3}{2} m^2 (u+v) = \kappa v (u v)^{-\frac{3}{2}} \\ D u D v + \frac{3}{4} m^2 (u+v)^2 = -2 \kappa (u v)^{-\frac{1}{2}} + h \end{cases} \quad (8.27)$$

También es útil, por razones de cálculo, eliminar el factor $(u v)^{-\frac{3}{2}}$; para ello debemos calcular:

$$D(u v) = v D u + u D v.$$

$$D(u D v + v D u) = u D^2 v + v D^2 u + 2 D u D v.$$

$$D(u D v - v D u) = u D^2 v - v D^2 u.$$

además, de la segunda ecuación deducimos que:

$$D u D v = D(u D v + v D u) - u D^2 v - v D^2 u - D u D v = -2 \kappa (u v)^{-\frac{1}{2}} + h - \frac{3}{4} m^2 (u+v)^2;$$

teniendo en cuenta la última ecuación del sistema (8.27); luego, se tiene:

$$D(u D v + v D u) - D u D v = u D^2 v + v D^2 u - 2 \kappa (u v)^{-\frac{1}{2}} + h - \frac{3}{4} m^2 (u+v)^2;$$

reemplazando $D^2 u$ y $D^2 v$ por sus expresiones dadas en el sistema (8.27), resulta:

$$\begin{aligned} D(u D v + v D u) - D u D v &= -2 \kappa (u v)^{-\frac{1}{2}} + h - \frac{3}{4} m^2 (u+v)^2 + u [\kappa v (u v)^{-\frac{3}{2}} + 2 m D v - \\ &\quad - \frac{3}{2} m^2 (u+v)] + v [\kappa u (u v)^{-\frac{3}{2}} - 2 m D u - \frac{3}{2} m^2 (u+v)] = \\ &= 2 m [u D v - v D u] - m^2 (u+v) \left[\frac{3}{4} (u+v) + \frac{3}{2} u + \frac{3}{2} v \right] + \\ &\quad + 2 \kappa u v (u v)^{-\frac{3}{2}} - 2 \kappa (u v)^{-\frac{1}{2}} + h. \end{aligned}$$

además, recordemos que:

$$m^2 (u+v) \left[\frac{3}{4} (u+v) + \frac{3}{2} u + \frac{3}{2} v \right] = m^2 (u+v) \frac{9}{4} (u+v) = \frac{9}{4} m^2 (u+v)^2,$$

$$2 \kappa u v (u v)^{-\frac{3}{2}} - 2 \kappa (u v)^{-\frac{1}{2}} \equiv 0;$$

Luego, resulta la expresión:

$$D(u Dv + v Du) - 2m(u Dv - v Du) - Du Dv + \frac{9}{4} m^2 (u + v)^2 = h.$$

y finalmente, reemplazando $(u Dv - v Du)$ y $Du Dv$ por sus desarrollos, se tiene:

$$\begin{aligned} D(u Dv + v Du) &= u \left[\kappa v (u v)^{-\frac{3}{2}} + 2m Dv - \frac{3}{2} m^2 (u + v) \right] - \\ &\quad - v \left[\kappa v (u v)^{-\frac{3}{2}} - 2m Du - \frac{3}{2} m^2 (u + v) \right] = \\ &= 2m(u Dv + v Du) - \frac{3}{2} m^2 (u + v)(u - v). \end{aligned}$$

entonces resulta:

$$D(u Dv + v Du) - 2m(u Dv + v Du) + \frac{3}{2} m^2 (u^2 - v^2) = 0.$$

ecuación que reemplaza a las dos primeras ED del sistema (8.27).

§ 8.6 La Evección de la Luna.

Conceptos: La **evección**¹ es una variación en la longitud de la Luna originada por un cambio en la excentricidad de la órbita lunar, la cual afecta “periódicamente” el movimiento de la misma; esta perturbación está en relación directa con la posición o longitud del Sol y fue descubierta por *Ptolomeo*. Hemos estudiado que el sistema Tierra-Luna se halla sujeto a permanentes cambios, motivados por la atracción gravitacional del Sol, en consecuencia, la órbita del satélite de la Tierra experimenta cambios periódicos o variaciones, entre las que figura la *evección*. Esta perturbación esta asociada a dos fenómenos observacionales: un desplazamiento del perigeo de la órbita Lunar y una variación de su excentricidad, cuyo valor oscila entre 0,045 y 0,065. El período de la evección es de 31 días, 19 horas y 26 minutos, y su amplitud, positiva o negativa, de 1° 16'.

NOTA: Una excelente reseña sobre las perturbaciones, analizando “consideraciones geométricas” y el significado de las mismas, se puede hallar en el libro de **Moulton**, F.R.; 1970, “*An Introduction to Celestial Mechanics*”, págs. 321–334, donde se detalla como dos cuerpos esféricos que se mueven bajo la influencia de su mutua atracción gravitacional describen una sección cónica con respecto a su centro de masa como origen. Además, si existe un medio resistente al movimiento o si uno de los cuerpos es de forma “elíptica”², o si hay un tercer cuerpo actuando sobre los dos en consideración, o si existe cualquier “fuerza externa” actuando sobre ellos, distinta de su atracción mutua, entonces, sus órbitas dejarán de ser secciones cónicas exactas.

¹ Consultar: **Brouwer**, D. & **Clemence**, G.M.; 1961, “*Methods of Celestial Mechanics*”, pág. 326.

Danby, J.M.A.; 1992, “*Fundamentals of Celestial Mechanics*”, pág. 379.

Roy, A.E.; 1978, “*Orbital Motion*”, pág. 248.

² Un cuerpo con tres ejes de inercia: \mathbf{I}_x , \mathbf{I}_y , \mathbf{I}_z .

Consideraciones geométricas sobre las perturbaciones. Hemos estudiado el caso donde las componentes de las coordenadas y velocidades de los cuerpos son conocidas para un instante definido t_0 , entonces el problema de los dos cuerpos se puede resolver en forma cerrada y por tanto, el movimiento de los mismos queda totalmente determinado, verificando la *ley de las áreas*. Luego, las diferencias entre las componentes de las coordenadas y las velocidades, en las orbitas reales, con las que tenían los cuerpos inicialmente en t_0 son atribuidas a las *perturbaciones*.

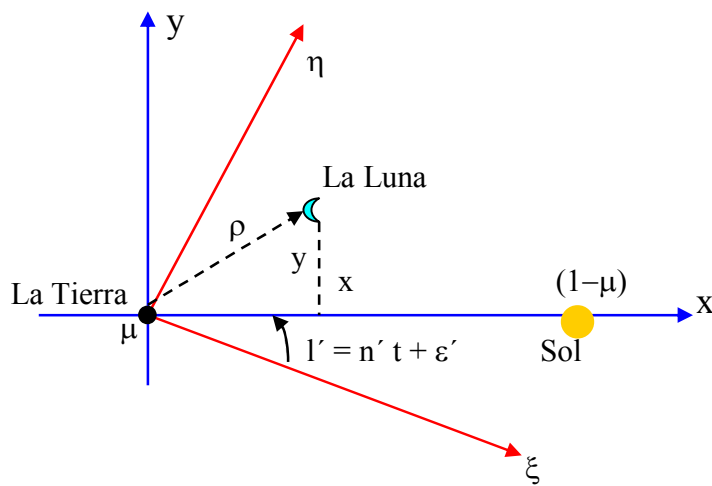
Distintos métodos de cálculo han sido propuestos para evaluar las perturbaciones, dependiendo estos de algún punto de vista diferente que puede ser conveniente en un caso particular. De todos ellos los más frecuentemente usados son dos: el *Método de Variación de las Coordenadas* y el *Método de Variación de los Elementos*, también conocido como *Variación de los Parámetros* ó *Variación de las Constantes de Integración*. Asimismo, es posible deducir los elementos orbitales a partir de una construcción gráfica i.e., calcular las perturbaciones sobre la Luna moviéndose alrededor de la Tierra, originadas estas por la acción del Sol y los planetas. La fuerza perturbadora esta definida por tres componentes rectangulares: i) la componente ortogonal, es perpendicular al plano de la órbita, considerada positiva cuando esta dirigida hacia el polo norte de la eclíptica; ii) la componente tangencial, está en la línea de la tangente y es positiva cuando actúa en la dirección del movimiento; iii) la componente normal, es perpendicular a la tangente y es considerada positiva cuando esta dirigida hacia el interior de la órbita. Cada una de estas componentes ejerce efectos perturbadores sobre los elementos elípticos que definen la trayectoria de la Luna. También ejercen efectos perturbadores la presencia de un medio resistente o la no esfericidad del cuerpo central, en este caso la Tierra.

Estas consideraciones geométricas permiten interpretar el efecto de la *evección de la Luna*.

Referencias antiguas:

- a) Astronomía Accurata or the Royal Astronomer and Navigator.
Containing New Improvements in Astronomia, Chronology and Navigation
Particularly New and Correct Solar and Lunar Tables.
By Robert Heath,
London, Printer for the Author, **1760**, pág. 370.
- b) Harvard College Libraly.
History of the Inductive Sciences.
By William Whewell, D.D.
Master of Trinity College, Cambridge.
London: John W. Parker and Son: **1857**.
Book III. History of Greek Astronomy, Section b; pág. 163.
Ptolomy's Discovery of Evection.

En el ítem anterior dedujimos las formulas de Hill, las cuales están referidas a un sistema de coordenadas *sinódico* {X,Y}, el cual gira alrededor de la Tierra (masa = μ) en el plano de la eclíptica definido por el sistema de coordenadas *sidéreo* { ξ,η }, ver Figura 47.



NOTA: El eje $\{\mu \vec{X}\}$ está constantemente dirigido hacia el Sol cuya masa es $(1-\mu)$ y su longitud media es: $l' = n' t + \epsilon'$.

Fig. 47. El sistema de coordenadas sinódico {X,Y} tiene su origen en el punto masa μ (La Tierra) y tiene un movimiento de rotación respecto del sistema sidéreo { ξ,η }, también con origen en μ , situado en el plano de la eclíptica. El Sol permanece sobre el eje-x.

También demostramos que las coordenadas (x,y) de la Luna, en un instante cualquiera, satisfacen un sistema de dos ecuaciones diferenciales simultaneas de segundo orden; además, si se introducen nuevas funciones, definidas como: $u = x + i y$; $v = x - i y$, donde la variable independiente τ es: $\tau = (n - n') (t - t_0)$ entonces, el sistema se transforma en otro, también de dos ED simultaneas de segundo orden en las variables dependientes u y v, donde la variable independiente es τ ; por último, si se introduce una nueva variable independiente, definida como:

$$\zeta = e^{i\tau}, \quad \text{y el operador } D = \zeta \frac{d}{d\zeta}.$$

el sistema de ED mencionado anteriormente se transforma en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} D^2 u + 2 m D u + \frac{3}{2} m^2 (u + v) = \frac{\kappa}{r^3} u \\ D^2 v - 2 m D v + \frac{3}{2} m^2 (u + v) = \frac{\kappa}{r^3} v \\ D u D v + \frac{3}{4} m^2 (u + v)^2 + 2 m^2 (u v) \frac{1}{2} = C \end{cases} \quad (8.28)$$

donde: $m = \frac{n'}{n - n'}$; siendo: n' y n los movimientos medios del Sol y la Luna respectivamente ¹.

¹ Consultar ecuaciones (8.27) pág. 224.

Las ecuaciones (8.28) admiten, como lo demostramos en el ítem anterior, soluciones de la forma:

$$\begin{cases} u = \sum a_v \zeta^{2v+1} = a_0 \sum c_v \zeta^{2v+1} \\ v = \sum a_{-v-1} \zeta^{2v+1} = a_0 \sum c_{-v-1} \zeta^{2v+1} \end{cases} \quad (8.29)$$

donde los coeficientes a_0 , c_v y c_{-v-1} son funciones únicamente de m .

Notar que esta solución contiene solamente dos constantes arbitrarias, a saber: n y t_0 , las cuales aparecen en las siguientes variables: τ , u , v y ζ ; y por tanto, el sistema (8.29) no es la solución general del problema del movimiento de la Luna ya que, la solución general debe contener cuatro constantes arbitrarias (porqué?)¹.

Por lo tanto, nos proponemos hallar dicha solución general; para ello indiquemos con δu y δv las respectivas perturbaciones en las variables u y v , lo cual implica que la variable u se incrementa en δu y la variable v se incrementa en δv .

Indiquemos con ρ la distancia Tierra-Luna en el movimiento no-perturbado: $\rho^2 = x^2 + y^2 = uv$ (ver Figura 47); entonces, la distancia en el movimiento perturbado tendrá la expresión:

$$r^2 = (u + \delta u)(v + \delta v) = uv + u\delta v + v\delta u + \delta u\delta v = \rho^2 + u\delta v + v\delta u = r^3.$$

donde hemos despreciado el término de segundo orden ².

Por hipótesis las funciones u y v satisfacen las condiciones anteriores, sistema (8.29), y puesto que tanto u como v corresponden a las soluciones de la órbita intermedia, la primera de las ecuaciones (8.28), se puede escribir:

$$D^2 u + 2m Du + \frac{3}{2} m^2 (u + v) = \kappa \frac{u}{\rho^3} \quad (8.30)$$

si ahora introducimos las perturbaciones δu y δv , resulta:

$$D^2 (u + \delta u) + 2m D(u + \delta u) + \frac{3}{2} m^2 (u + v + \delta u + \delta v) = \frac{\kappa}{r^3} (u + \delta u);$$

y restando miembro a miembro esta ecuación de la anterior, se obtiene:

$$D^2 (\delta u) + 2m D(\delta u) + \frac{3}{2} m^2 \delta u + \frac{3}{2} m^2 \delta v = \frac{\kappa}{r^3} (u + \delta u) - \kappa \frac{u}{\rho^3},$$

el segundo miembro se puede escribir de la siguiente forma:

¹ Un sistema de dos ED de segundo orden es equivalente a cuatro ED de primer orden, cuya solución contiene cuatro constantes de integración o constantes arbitrarias.

² El término de segundo orden no considerado es: $\delta u \delta v$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\kappa}{\rho^3} \left[\frac{\rho^3}{r^3} (u + \delta u) - u \right] &= \frac{\kappa}{\rho^3} \left[\frac{1}{(\rho^2 + u \delta v + v \delta u)^{3/2}} (u + \delta u) - u \right] = \\
 &= \frac{\kappa}{\rho^3} \left[\left(1 + \frac{u \delta v + v \delta u}{\rho^2} \right)^{-3/2} (u + \delta u) - u \right] = \\
 &= \frac{\kappa}{\rho^3} \left[\left(1 - \frac{3}{2} \frac{u \delta v + v \delta u}{\rho^2} + \dots \right) (u + \delta u) - u \right] = \\
 &= \frac{\kappa}{\rho^3} \left[u + \delta u - \frac{3}{2} \frac{u^2 \delta v}{\rho^2} - \frac{3}{2} \frac{u v \delta u}{\rho^2} - u \right] = \\
 &= \frac{\kappa}{\rho^3} \left[-\frac{1}{2} \delta u - \frac{3}{2} \frac{u}{v} \delta v \right] = -\frac{1}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \left[\delta u + 3 \frac{u}{v} \delta v \right].
 \end{aligned}$$

recordar que $\rho^2 = u v$. Por lo tanto, las perturbaciones δu y δv deben satisfacer la siguiente ecuación:

$$D^2(\delta u) + 2 m D(\delta u) + \frac{3}{2} m^2 \delta u + \frac{3}{2} m^2 \delta v = -\frac{1}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \left[\delta u + 3 \frac{u}{v} \delta v \right].$$

Como hemos visto¹ el operador D es lineal entonces, la ecuación anterior se puede escribir de la forma:

$$\left(D^2 + 2 m D + \frac{3}{2} m^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \right) \delta u + \left(\frac{3}{2} m^2 + \frac{3}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \frac{u}{v} \right) \delta v = 0. \quad (8.31)$$

Ecuación que todavía se puede expresar en otra forma “simbólica”; si X representa a δu entonces podemos representar el operador del siguiente modo:

$$D X = D \zeta (\zeta^{-1} X) = \zeta^{-1} X D \zeta + \zeta D(\zeta^{-1} X) = \zeta [D(\zeta^{-1} X) + \zeta^{-1} X] = \zeta [(D + 1) (\zeta^{-1} X)]$$

del mismo modo,

$$\begin{aligned}
 D^2 X &= D\{\zeta [(D + 1) (\zeta^{-1} X)]\} = \zeta (D + 1) (\zeta^{-1} X) + \zeta (D^2 + D) (\zeta^{-1} X) \\
 &= \zeta [(D^2 + 2 D + 1) (\zeta^{-1} X)] \\
 D^2 X &= \zeta [(D + 1)^2 (\zeta^{-1} X)]
 \end{aligned}$$

¹ Consultar pág. 197.

Luego, reemplazamos en la ecuación (8.30) la nueva definición del operador D , entonces resulta:

$$\zeta (D+1)^2 (\zeta^{-1} \delta u) + 2 m \zeta (D+1) (\zeta^{-1} \delta u) + \left(\frac{3}{2} m^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \right) \delta u + \left(\frac{3}{2} m^2 + \frac{3}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \frac{u}{v} \right) \delta v = 0$$

multiplicando toda la ecuación por ζ^{-1} , se tiene:

$$\left[(D+1)^2 + 2 m (D+1) + \frac{3}{2} m^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \right] \zeta^{-1} \delta u + \zeta^{-2} \left[\frac{3}{2} m^2 + \frac{3}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \frac{u}{v} \right] \zeta \delta v = 0,$$

y finalmente,

$$\left[(D+1+m)^2 + \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \right] \zeta^{-1} \delta u + \zeta^{-2} \left[\frac{3}{2} m^2 + \frac{3}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \frac{u}{v} \right] \zeta \delta v = 0. \quad (8.32)$$

NOTA: Este tema esta muy bien tratado en el libro de **Tisserand**, François; 1889-1896, “*Traite de Mécanique Céleste*”, Tomo III, pág. 27. Paris, Gauthier-Villars.

Después de un proceso muy extenso y tedioso se puede probar que las perturbaciones admiten la siguiente forma:

$$\frac{\zeta^{-1} \delta u}{a_0} = \zeta^c e^{-\omega i} \sum_{-\infty}^{\infty} e_v \zeta^{2v} + \zeta^{-c} e^{\omega i} \sum_{-\infty}^{\infty} f_v \zeta^{2v};$$

$$\frac{\zeta \delta v}{a_v} = \zeta^{-c} e^{\omega i} \sum_{-\infty}^{\infty} e_v \zeta^{-2v} + \zeta^c e^{-\omega i} \sum_{-\infty}^{\infty} f_v \zeta^{-2v};$$

donde c es una constante determinada y ω es una de las cuatro constantes arbitrarias que necesitábamos y la agregamos a las ya deducidas: (n, t_0, ω) . El siguiente paso consiste en reemplazar $\zeta^{-1} \delta u$ y $\zeta \delta v$ por sus desarrollos; para ello tengamos presente la ecuación (8.30),

$$u \frac{\kappa}{\rho^3} = D^2 u + 2 m D u + \frac{3}{2} m^2 (u + v)$$

y de la igualdad (8.32) definimos,

$$\frac{1}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} + \frac{1}{2} m^2 = \sum_v M_v \zeta^{2v},$$

$$\zeta^{-2} \left[\frac{3}{2} m^2 + \frac{3}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \frac{u}{v} \right] = \frac{3}{2} \frac{m^2}{\zeta^2} + \frac{3}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \frac{u \zeta^{-1}}{v \zeta} = \sum_v N_v \zeta^{2v}$$

Luego, el primer término del primer miembro de (8.32) admite el desarrollo:

$$\begin{aligned} (D+1+m) \zeta^{-1} du &= (D+1+m) \left(a_0 e^{-\omega i} \sum_v e_v \zeta^{2v+c} + a_0 e^{\omega i} \sum_v f_v \zeta^{2v-c} \right) = \\ &= a_0 e^{-\omega i} \sum_v (2v+c+m+1) e_v \zeta^{2v+c} + \\ &+ a_0 e^{\omega i} \sum_v (2v-c+m+1) f_v \zeta^{2v-c} . \end{aligned}$$

y el operador cuadrático:

$$\begin{aligned} (D+1+m)^2 \zeta^{-1} du &= a_0 e^{-\omega i} \sum_v (2v+c+m+1)^2 e_v \zeta^{2v+c} + \\ &+ a_0 e^{\omega i} \sum_v (2v-c+m+1)^2 f_v \zeta^{2v-c} . \end{aligned}$$

Por otra parte, el segundo y tercer término del primer miembro de (8.32) admiten el desarrollo en serie:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \right) \zeta^{-1} du &= \sum_v M_v \zeta^{2v} \left[a_0 e^{-\omega i} \sum_v e_v \zeta^{2v+c} + a_0 e^{\omega i} \sum_v f_v \zeta^{2v-c} \right] = \\ &= a_0 e^{-\omega i} \sum_{(\mu)} \sum_{(v)} M_v e_\mu \zeta^{2v+2\mu+c} + \\ &+ a_0 e^{\omega i} \sum_{(\mu)} \sum_{(v)} M_v f_\mu \zeta^{2v+2\mu-c} . \end{aligned}$$

donde en las sumas entre corchetes hemos permutado v por μ ; entonces si hacemos $v + \mu = \xi$, se tiene:

$$\left(\frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \right) \zeta^{-1} du = a_0 e^{-\omega i} \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} M_v e_{\xi-v} \zeta^{2\xi+c} + a_0 e^{\omega i} \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} M_v f_{\xi-v} \zeta^{2\xi-c}$$

Operando del mismo modo, se obtiene un desarrollo en serie para el segundo término de (8.32):

$$\zeta^{-2} \left[\frac{3}{2} m^2 + \frac{3}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \frac{u}{v} \right] \zeta \delta v = \sum_{(v)} N_v \zeta^{2v} \left[a_0 e^{\omega i} \sum_{(v)} e_v \zeta^{-2v-c} + a_0 e^{-\omega i} \sum_{(v)} f_v \zeta^{-2v+c} \right]$$

cambiamos el signo de $(-v)$ por (v) y luego en μ , como en el caso anterior, se tiene:

$$\zeta^{-2} \left[\frac{3}{2} m^2 + \frac{3}{2} \frac{\kappa}{\rho^3} \frac{u}{v} \right] \zeta \delta v = a_0 e^{\omega i} \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} N_v e_{v-\xi} \zeta^{2\xi-c} + a_0 e^{-\omega i} \sum_{(\xi)} \sum_{(v)} N_v f_{v-\xi} \zeta^{2\xi+c}$$

Entonces, reemplazamos en la ecuación (8.32) los desarrollos en serie obtenidos para cada uno de sus términos; previamente en los desarrollos mencionados hemos permutado ξ en v y v en ξ , de modo que a_0 se elimina. Luego, la ecuación (8.32) admite la siguiente expresión en serie de potencias:

$$\sum_{(v)} \left\{ e^{-\omega i} \left[(2v + c + m + 1)^2 e_v + \sum_{(\xi)} (M_\xi e_{v-\xi} + N_\xi f_{\xi-v}) \right] \zeta^{2v+c} \right\} + \\ + \sum_{(v)} \left\{ e^{\omega i} \left[(2v - c + m + 1)^2 f_v + \sum_{(\xi)} (M_\xi f_{v-\xi} + N_\xi e_{\xi-v}) \right] \zeta^{2v-c} \right\} = 0,$$

si aplicamos el principio de identidad de la serie de potencias¹, resulta:

$$(2v + c + m + 1)^2 e_v + \sum_{(\xi)} (M_\xi e_{v-\xi} + N_\xi f_{\xi-v}) = 0$$

$$(2v - c + m + 1)^2 f_v + \sum_{(\xi)} (M_\xi f_{v-\xi} + N_\xi e_{\xi-v}) = 0.$$

las cuales constituyen un sistema de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas; el sistema fue resuelto por Hill y su solución se obtuvo aplicando el método de aproximaciones sucesivas², citado anteriormente, ver pág. 198. Procediendo del mismo modo que en la determinación de las constantes a_v vamos a separar los términos que contengan $\xi = 0$. Entonces, podemos escribir:

$$[(2v + c + m + 1)^2 + M_0] e_v + N_0 f_{-v} + \sum_{(\xi \neq 0)} (M_\xi e_{v-\xi} + N_\xi f_{\xi-v}) = 0 \quad (a)$$

$$N_0 e_{-v} + [(2v - c + m + 1)^2 + M_0] f_v + \sum_{(\xi \neq 0)} (M_\xi f_{v-\xi} + N_\xi e_{\xi-v}) = 0 \quad (b)$$

si en la última ecuación permutamos el subíndice (v) por $(-v)$, resulta:

$$N_0 e_v + [(2v + c - m - 1)^2 + M_0] f_{-v} + \sum_{(\xi \neq 0)} (M_\xi f_{-v-\xi} + N_\xi e_{\xi+v}) = 0 \quad (c)$$

Luego, las ecuaciones (a) y (c) nos permiten eliminar los factores f_{-v} y e_{-v} , y por lo tanto, podemos obtener los coeficientes e_v y f_v de todos los desarrollos de las expresiones anteriores, ver pág. 231.

En particular, para el subíndice $v = 0$ las ecuaciones (a) y (c) toman la forma:

¹ Si una serie de potencias es idénticamente nula entonces, cada coeficiente de la serie es también nulo.

² Consultar: **Apostol**, T. M.; 2006, "Calculus", Vol. 2, pág. 279. Ed. Reverté S.A.

$$\begin{cases} [(c+m+1)^2 + M_0] e_0 + N_0 f_0 + \sum_{\xi \neq 0} (M_\xi e_{-\xi} + N_\xi f_\xi) = 0 \\ N_0 e_0 + [(c-m-1)^2 + M_0] f_0 + \sum_{\xi \neq 0} (M_\xi f_{-\xi} + N_\xi e_\xi) = 0 \end{cases} \quad (d)$$

siguiendo el mismo procedimiento que utilizamos para determinar los a_v , dividimos ambas ecuaciones del sistema (d) por e_0 entonces, este coeficiente se puede considerar arbitrario y por tanto, se pueden determinar las relaciones $\frac{e_v}{e_0}$ y $\frac{f_{-v}}{e_0}$; donde e_0 es la cuarta constante arbitraria.

Si se realizan los cálculos indicados se analiza primero si v es un numero positivo, entonces los cocientes $\frac{e_{-v}}{e_0}$ y $\frac{f_v}{e_0}$ son del orden de: $O(m^{(2v-1)})$; mientras que: $\frac{e_v}{e_0}$ y $\frac{f_{-v}}{e_0}$ son del orden de: $O(m^{(2v)})$. Por lo tanto, si en el sistema de ecuaciones (d) despreciamos todos los términos de orden superior al primero, dicho sistema toma la forma:

$$\begin{cases} [(c+m+1)^2 + M_0] e_0 + N_0 f_0 = 0 \\ N_0 e_0 + [(c-m-1)^2 + M_0] f_0 = 0 \end{cases}$$

en consecuencia, si el determinante de las incógnita e_0 y f_0 es cero, podemos concluir que:

$$\frac{f_0}{e_0} = - \frac{N_0}{(c-m-1)},$$

y de la anulación del determinante de los coeficientes resulta que:

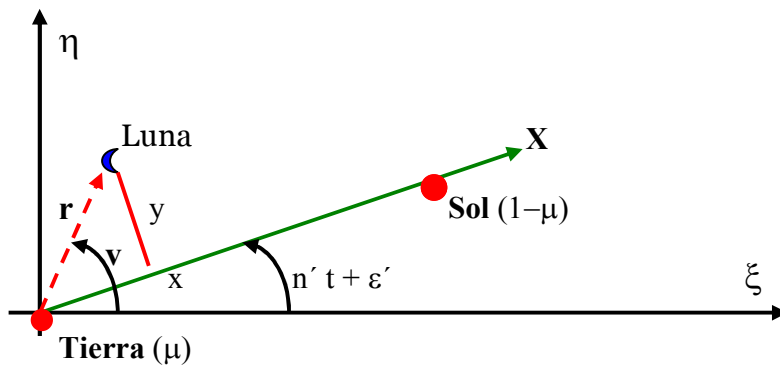
$$c = 1 + m - \frac{4}{15} m^2.$$

luego, se obtiene:

$$\begin{aligned} f_0 &= -3(1 - m^2) e_0. & e_{-1} &= -\frac{45}{8} m e_0. \\ f_1 &= \frac{15}{8} m e_0. \end{aligned}$$

recordar que e_0 es una de las cuatro constantes arbitrarias.

Entonces, una vez hallados los coeficientes $e_{\pm v}$ y $f_{\pm v}$, estamos en condiciones de escribir las perturbaciones de la Luna respecto del sistema de coordenadas sidéreo, en el plano de la eclíptica, con la Tierra como origen, ver Figura 48.



\mathbf{r} radio vector de la Luna
 v longitud verdadera de la Luna.
 l_L : longitud media de la Luna.
 l_{Sol} : longitud media del Sol.

Fig. 48. El sistema de coordenadas $\{\xi, \eta\}$ representa el sistema sidéreo. El eje X esta siempre en la dirección Tierra-Sol. El origen del sistema es la Tierra con masa μ . Masa del Sol $(1-\mu)$.

Las coordenadas sinódicas de la Luna son:

$$x = r \cos (v - l_{Sol}); \quad y = r \sin (v - l_{Sol}).$$

luego, aplicando el procedimiento empleado en la pág. 213, se tiene:

$$r \cos (v - l_L) = r \cos [v - l_{Sol} - (l_L - l_{Sol})] = x \cos (l_L - l_{Sol}) + y \sin (l_L - l_{Sol}).$$

$$r \sin (v - l_L) = y \cos (l_L - l_{Sol}) - x \sin (l_L - l_{Sol}).$$

pero, por otra parte: $(l_L - l_{Sol}) = (n - n')(t - t_0) = \tau$; finalmente resulta:

$$r \cos (v - l_L) = x \cos \tau + y \sin \tau,$$

$$r \sin (v - l_L) = y \cos \tau - x \sin \tau.$$

Hemos introducido la variable independiente: $\zeta = e^{i\tau}$; y hemos demostrado que:

$$\sin \tau = \frac{e^{i\tau} - e^{-i\tau}}{2i} = \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2i},$$

$$\cos \tau = \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2};$$

además:

$$\begin{cases} u = x + iy \\ v = x - iy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u + v}{2} \\ y = \frac{u - v}{2i} \end{cases};$$

también, habíamos hallado que: $i \operatorname{tg} (v - l_L) = i \operatorname{tg} \theta$; y por tanto:

$$e^{2i\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = \frac{u \zeta^{-i}}{v \zeta} \quad (e)$$

Indiquemos ahora con $\delta\theta$ las perturbaciones en la longitud, entonces se tiene:

$$e^{2i(\theta+\delta\theta)} = \frac{u+\delta u}{v+\delta v} \frac{\zeta^{-1}}{\zeta}, \tag{f}$$

dividiendo miembro a miembro las relaciones (f) y (e), resulta:

$$e^{2i\delta\theta} = \frac{1+\frac{\delta u}{u}}{1+\frac{\delta v}{v}},$$

luego, aplicando logaritmos en ambos miembros, se tiene:

$$2i\delta\theta = \ln\left(1+\frac{\delta u}{u}\right) - \ln\left(1+\frac{\delta v}{v}\right) \cong \frac{\delta u}{u} - \frac{\delta v}{v}. \tag{g}$$

Entonces, podemos calcular la perturbación en longitud; para ello recordemos que¹:

$$u = a_0 \sum_v c_v \zeta^{2v+1} = a_0 (c_0 \zeta + \dots) \cong a_0 \zeta$$

$$v = a_0 \sum_v c_{-v-1} \zeta^{2v-1} = a_0 (c_0 \zeta^{-1} + \dots) \cong a_0 \zeta^{-1}.$$

donde $c_0 = 1$. También necesitamos calcular las siguientes expresiones:

$$\frac{\zeta^{-1} du}{a_0} = e^{-\omega i} (e_0 \zeta^c + e_{-1} \zeta^{c-2}) + e^{\omega i} (f_0 \zeta^{-c} + f_1 \zeta^{2-c})$$

$$\frac{\zeta dv}{a_0} = e^{\omega i} (e_0 \zeta^{-c} + e_{-1} \zeta^{2-c}) + e^{-\omega i} (f_0 \zeta^c + f_1 \zeta^{c-2}).$$

luego, reemplazamos en la perturbación $\delta\theta$, ecuación (g), los valores hallados de $u, v, \delta u, \delta v$; resulta:

$$\delta\theta = \frac{1}{2i} [e^{-\omega i} (e_0 \zeta^c + e_{-1} \zeta^{c-2}) + e^{\omega i} (f_0 \zeta^{-c} + f_1 \zeta^{2-c}) - e^{-\omega i} (f_0 \zeta^c + f_1 \zeta^{c-2}) - e^{\omega i} (e_0 \zeta^{-c} + e_{-1} \zeta^{2-c})].$$

donde: $\zeta = e^{i\tau}$, $\zeta^c = e^{ic\tau}$, $\zeta^{2-c} = e^{i\tau(2-c)}$; reemplazando en la ecuación anterior se tiene:

$$\delta\theta = \frac{1}{2i} [e_0 e^{i(\tau c - \omega)} + e_{-1} e^{i(\tau(c-2) - \omega)} + f_0 e^{-i(\tau c - \omega)} + f_1 e^{-i(\tau(c-2) - \omega)} - f_0 e^{i(\tau c - \omega)} - f_1 e^{i(\tau(c-2) - \omega)} - e_0 e^{-i(\tau c - \omega)} - e_{-1} e^{-i(\tau(c-2) - \omega)}]$$

¹ Consultar pág. 215.

Factoriando los coeficientes $(e_0 - f_0)$ y $(e_{-1} - f_1)$ resulta:

$$\delta\theta = (e_0 - f_0) \frac{e^{i(\tau c - \omega)} - e^{-i(\tau c - \omega)}}{2i} + (e_{-1} - f_1) \frac{e^{i[(c-2)\tau - \omega]} - e^{-i[(c-2)\tau - \omega]}}{2i},$$

y desarrollando los términos exponenciales se obtiene:

$$\delta\theta = (e_0 - f_0) \operatorname{sen}(\tau c - \omega) + (e_{-1} - f_1) \operatorname{sen}[(c-2)\tau - \omega]$$

el último término: $(e_{-1} - f_1) \operatorname{sen}[(c-2)\tau - \omega] \Rightarrow$ define la **evección de la Luna**.

El valor del coeficiente: $(e_{-1} - f_1) = -\frac{15}{2} m e_0 = -\frac{15}{4} m e = 1^\circ 16' 27''$; donde $e_0 = \frac{e}{2}$.

además, $(e_0 - f_0) = \frac{e}{2} + 3 \frac{e}{2} = 2e$.

Definiciones.

Las irregularidades más importantes en la órbita de la Luna a consecuencia de las variaciones en los elementos orbitales son: la *Eveccion*, la *Ecuación Anual*, la *Variación* y la *Irregularidad paraláctica*.

La evección.

La **evección** es la mayor desigualdad producida por la acción del Sol en la rotación mensual de la Luna alrededor de la Tierra. Esta perturbación tiene una amplitud de $1^\circ 16'$, y un período de: 31,8 días de acuerdo a la *Teoría de la Luna de Brown* (1896), quien analizó y explicó en forma detallada todos los métodos que habían sido empleados en el estudio del movimiento de la Luna, incluyendo una completa referencia y muchas ilustraciones¹. La eveccion es la mayor perturbación periódica en la longitud de la Luna. Esta variación fue descubierta por Hiparco y minuciosamente investigada por Ptolomeo. Es importante destacar que en el estudio de la *teoría planetaria* existen muchos ejemplos de pequeños términos, en la función perturbadora, que producen grandes variaciones en la longitud².

Conceptos: La evección es una perturbación que afecta periódicamente el movimiento de la Luna y está relacionada con la posición o longitud del Sol. Los cambios debidos de la *atracción solar* sobre el sistema Tierra-Luna son causantes de que la órbita de este satélite experimente deformaciones periódicas, entre las cuales figura la evección. Ésta consiste de un desplazamiento del perigeo de dicha órbita y de una variación de su excentricidad, cuyo valor oscila entre 0,045 y 0,065. El período de la evección es de 31 días, 19 horas y 26 minutos y su amplitud, positiva o negativa, de $1^\circ 16' 26''$.⁴ Esta variación en la longitud lunar es causada por una modificación en la excentricidad de la órbita lunar. La corrección por **Evección** depende de $\Delta\lambda = \lambda_{\text{Luna}} - \lambda_{\text{Sol}}$, diferencia entre las longitudes de la Luna y del Sol y de la anomalía media lunar M_{Luna} según la expresión: $Ev = 1.2739 \operatorname{sen}(2\Delta\lambda - M_{\text{Luna}})$ ³.

¹ Brown, E. W.; 1960, "An Introductory Treatise on the Lunar Theory", Ed. Dover Publications.

² Danby, J.M.A.; 1992, "Fundamentals of Celestial Mechanics", págs. 377-379.

³ Brouwer, D. & Clemence, G.M.; 1961, "Methods of Celestial Mechanics", págs. 326-328.

Ecuación anual.

La órbita de la Tierra es una elipse, por lo tanto su distancia al Sol experimenta considerables variaciones; cuando esta distancia es mayor (afelio) su efecto es disminuir la acción perturbadora del Sol sobre la Luna y en particular, puede aumentar el período mensual en más de una hora; este efecto se conoce como: *Perturbación del Período*. En consecuencia, cuando la Tierra se desplaza desde su perihelio al afelio, la perturbación que aumenta la longitud del mes se hace cada vez menor es decir, la longitud de mes se hace más corta o también, el movimiento angular de la Luna se acelera. Mientras que, cuando la Tierra se desplaza desde el afelio al perihelio, el movimiento de la Luna será, por un razonamiento análogo, retrasado. Esta variación define la *Ecuación Anual* cuyo valor es ligeramente mayor que 11'; fue descubierta a partir de observaciones por Tycho Brahe, alrededor de 1590¹.

Entonces, la desigualdad en la longitud lunar originada por la variación en la distancia Sol-Tierra a causa del movimiento elíptico de ésta origina la **ecuación anual**, la cual depende de la anomalía media del Sol: M_{Sol} y su valor es $EA = 0.1858 \sin(M_{\text{Sol}})$, su amplitud es 11' 9" y su periodo un año anomalístico.

Variación.

Una de las principales perturbaciones en el movimiento de la Luna es la *variación*² causada por la acción del Sol y su efecto es distorsionar la órbita de la Luna, de forma aproximadamente elíptica, donde la Tierra ocupa el centro de la misma; esta perturbación es perpendicular a la línea trazada entre la Tierra y el Sol. La *variación* tiene un período de medio mes sinódico y se manifiesta sobre la longitud eclíptica de la Luna en casi dos tercios de grado, exactamente por: $2370'' \sin(2D)$, donde D es la elongación media de la Luna medida desde el Sol.

En síntesis: La *variación* se debe al movimiento de la Luna en el campo gravitatorio del Sol, pues experimenta más atracción cuando está en novilunio que cuando está en el plenilunio. La corrección a aplicar es $V = 0^{\circ}.6583 \sin 2(\lambda_L - \lambda_S)$ siendo λ_L la longitud lunar corregida por avance del perigeo, evección, ecuación anual, etc. Su periodo es medio mes sinódico. Esta perturbación sobre el movimiento de la Luna no depende de la excentricidad de su órbita; la misma puede ser explicada fácilmente suponiendo que el movimiento no perturbado de la Luna es un círculo es decir, que la aceleración debida a la atracción de la Tierra esta exactamente balanceada a la aceleración centrífuga. Por lo tanto, no hay componente tangencial en este punto pero si una componente normal negativa grande. El resultado es que la fuerza que tiende hacia la Tierra esta acotada y la órbita es menos curva en ese punto que un círculo. En consecuencia, la Luna retrocede una cierta distancia desde la Tierra en cuadratura que en la orbita circular.

La *variación* es considerada una perturbación muy importante en los desarrollos de la Teoría de la Luna.

Nota: El coeficiente $2370'' \sim 39',5 \sim 0^{\circ}.6583 \sim (2/3) 1^{\circ}$.

¹ Consultar: Moulton, F. R.; 1970, "An Introduction to Celestial Mechanics", pág. 348.

² Consultar: Danby, J.M.; 1992, "Fundamentals of Celestial Mechanics", págs. 379-380.

Moulton, F.R.; 1970, "An introduction to Celestial Mechanics", págs. 350-352.

La variación fue descubierta por Tycho Brahe a partir de observaciones realizadas alrededor de 1590. Posteriormente Newton explicó la causa de esta fuerza en su *Principia* por un método directo y elegante que mereció los elogios de Laplace ¹.

Desigualdad paraláctica.

Desigualdad paraláctica. Es una desigualdad en el movimiento de la Luna que depende del argumento $\sigma = (n' - n)t + \lambda_{\text{Luna}} - \lambda_{\text{Sol}}$, cuyo período es igual a la revolución sinódica ². El efecto de los términos de la fuerza perturbadora, sobre la órbita de la Luna, es una deformación sobre la misma en el sentido que el radio de curvatura de la trayectoria perturbada es mayor en Luna Nueva que en Luna Llena y la órbita, por lo tanto, no está centrada sino que su centro está desplazado hacia el Sol.

Debido a la deformación de la órbita, la paralaje de la Luna disminuye en 1" cerca de Luna Nueva y aumenta una cantidad igual en la Luna Llena. La variación correspondiente a la distancia a la Tierra es, en media, de ± 110 km.

La observación de ocultaciones de estrellas por la Luna proporciona el valor del coeficiente con mucha precisión ya que la desigualdad paraláctica retrasa las ocultaciones en $3^m 48^s$ en cuarto creciente y las adelanta otro tanto en cuarto menguante.

Igual que en la perturbación anterior (tal vez sea la misma irregularidad) origina que la Luna se retrase, en promedio 4 minutos, al llegar al primer cuarto y se adelante otro tanto al llegar al último cuarto. Mediante cálculos se determina que el efecto de este adelanto o atraso hace que la distancia al Sol es 389 veces la distancia a la Tierra y de aquí resulta un valor para 1UA= 149.5 millones de Km.

Comentarios sobre la ecuación de Hill.

En 1877, G. W. Hill publica un artículo ³ sobre el movimiento del perigeo de la Luna (punto en la órbita de la Luna más próximo a la Tierra) donde aparecen las primeras soluciones periódicas del problema de tres cuerpos, con posterioridad al descubrimiento de Lagrange de las *soluciones de equilibrio relativo* en 1772. Existía una discrepancia entre los valores calculados teóricamente para el movimiento del perigeo lunar y sus valores derivados de la observación. En este trabajo, Hill determinó primero una solución periódica y luego dedujo las ecuaciones de variación, teniendo en cuenta hasta la primera potencia en la excentricidad lunar. Obtuvo un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de cuarto orden con coeficientes periódicos. Utilizando integrales conocidas y realizando una serie de transformaciones redujo el sistema a una sola ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$\frac{d^2 \omega}{dt^2} + \Phi \omega = 0 \quad (h)$$

¹ Consultar: Moulton, F. R.; 1970, "An Introduction to Celestial Mechanics", pág. 350.

² La *revolución sinódica* es el intervalo entre dos conjunciones sucesivas de la Luna (Luna nueva) y el Sol. Su duración es de 29.5305883 días = $29^d 12^h 44^m 2^s.8$, es la *lunación* que regula las fases de la Luna y los eclipses. Constituye el *mes* de los antiguos calendarios lunares.

³ Hill, G.W. "On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon". Reprinted, with some additions, from a paper published at Cambridge U.S.A., 1877. *Acta mathematica*. 8. 1886.

donde ω es la desviación normal de la Luna respecto a la órbita intermedia, y Φ sólo depende de la posición relativa de la Luna con referencia al Sol. Φ puede ser expresada como una serie de Fourier:

$$\Phi = \theta_0 + \theta_1 \cos 2t + \theta_2 \cos 4t + \dots = \sum_j \theta_j \zeta^{2j}$$

donde $\zeta = \exp(i t)$ y $\theta_j = \theta_{-j}$, por tanto la ecuación (h) admite la expresión:

$$\frac{d^2 \omega}{dt^2} + \omega \sum_{j=-\infty}^{\infty} \theta_j \zeta^{2j}$$

conocida como la *ecuación de Hill*. La ecuación de Hill puede ser considerada como una expresión generalizada de la ecuación de Mathieu

$$\frac{d^2 \omega}{dt^2} + (a + b \cos 2t) \omega = 0.$$

introducida por Mathieu en 1868 estudiando el movimiento de membranas elásticas con “frontera elíptica”. A su vez, la ecuación de Hill es un caso particular de la ecuación de Ince-Hill:

$$(1 + a \cos 2x) \frac{d^2 y}{dx^2} + b \sin 2x \frac{dy}{dx} + (c + d \cos 2x) y = 0 \quad (i)$$

La ecuación de Ince-Hill (i) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes periódicos que depende de 4 parámetros a; b; c y d y tiene además, singularidades regulares, también llamadas del “tipo Fuchs”. Uno de los motivos de interés en estudiar esta ecuación reside en que aparece en ecuaciones variacionales relacionadas con problemas de la Mecánica Celeste. Con frecuencia el parámetro a representa la excentricidad e de la órbita. La importancia de la ecuación de Ince-Hill radica en que todos los casos conocidos de ecuaciones del tipo Hill con coeficientes analíticos, con problemas de “coexistencia resueltos”, son casos particulares de esta ecuación de cuatro parámetros, entendiéndose por “coexistencia” la presencia de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación con periodo $\frac{1}{4}$ y $2\frac{1}{4}$. Además es la ecuación más general para la cual se puede aplicar el método de *Ince* con relaciones de recurrencia. La ecuación de *Ince-Hill* es una ecuación poco estudiada en general, aunque casos particulares de ella se presentan en ecuaciones variacionales ligadas a problemas de Mecánica Celeste. Precisamente, el estudio de la estabilidad de la solución de (i) para numerosos problemas de la dinámica es el interés que despierta esta ecuación. Su estudio no resulta nada sencillo desde el punto de vista analítico.

Un comentario. El estudio del movimiento de la Luna es uno de los problemas más difíciles de la Mecánica Celeste debido a que es el cuerpo perturbador, el cual posee la masa preponderante, es el Sol esto hace que la órbita que describe la Luna alrededor de la Tierra se aparte mucho de una órbita Kepleriana y en consecuencia la teoría de la Luna se debe construir de modo distinto a la teoría que explica el movimiento de los planetas.

Desde la antigüedad se conocían empíricamente ciertas desigualdades tales como la ecuación del centro planteada por **Hiparco**, la evección introducida por **Ptolomeo**, la corrección por variación estudiada por **Tycho Brahe** y la ecuación anual. Pero era imposible detectar otras desigualdades no despreciables, aunque menos importantes, las cuales se superponían a las principales desigualdades; estas se pusieron de manifiesto cuando se estudió la teoría del movimiento de la Luna analíticamente.

Órbita de la Luna entorno de la Tierra la cual ocupa el centro de la elipse.

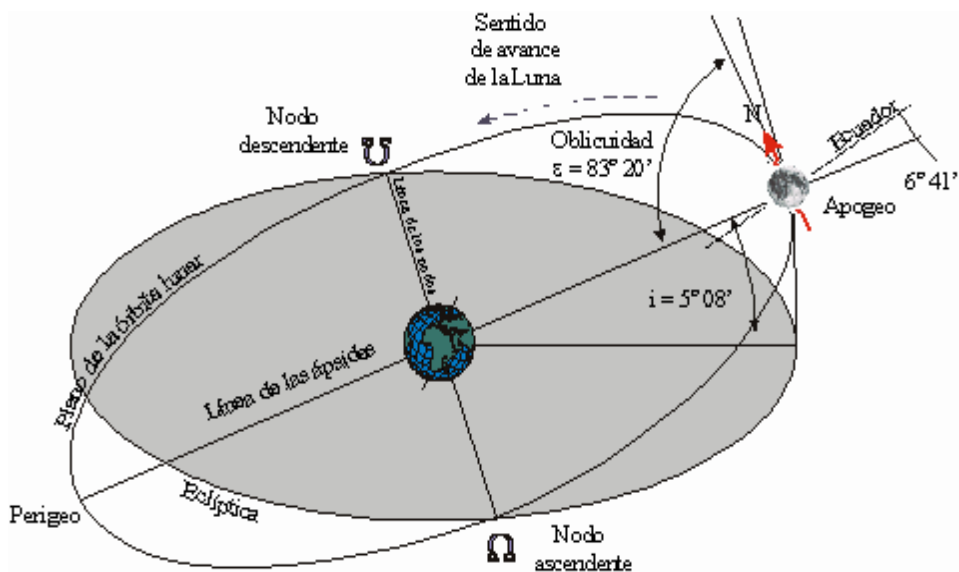


Gráfico. Plano de la órbita de la Luna respecto del plano de la orbita de la Tierra, la eclíptica. Se indican los ángulos de referencia.

Gráfico aclaratorio correspondiente a la pág. 213.

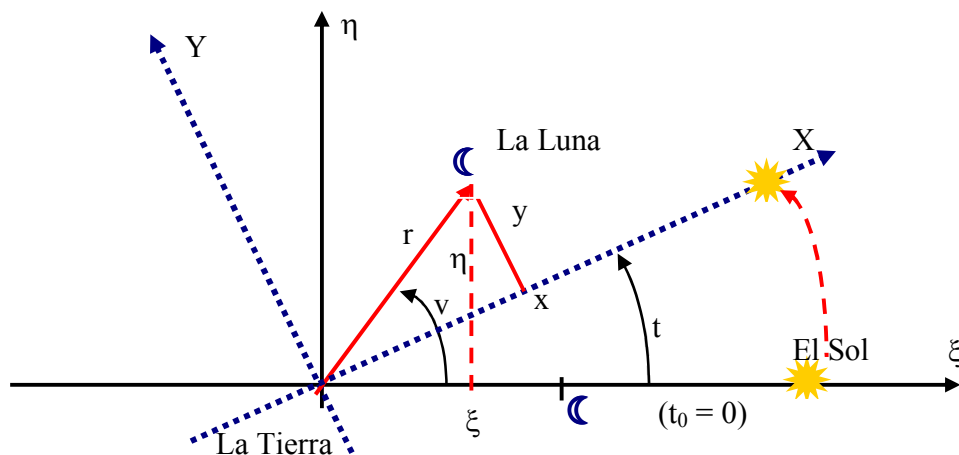


Gráfico. Se representa el sistema sidéreo $\{\eta, \xi\}$ y el sistema móvil $\{X, Y\}$. Para $t = 0$ el eje- X y el eje- ξ coinciden, i.e. el Sol y la Luna están alineados.

Capítulo 9

Singularidades en el problema de tres y n -cuerpos.

§ 9.1 Introducción y conceptos generales.

Un caso especial de la ley de gravitación de Newton es cuando la fuerza que actúa entre las partículas tiende a infinito o cuando la distancia entre ellas tiende a cero ¹ entonces, se produce una gran aproximación o *colisión* entre los cuerpos, i.e. $\mathbf{r}_{ij} \Rightarrow$ cero; por lo tanto, las ecuaciones diferenciales del movimiento presentan *singularidades* ². Corresponde señalar que existe una diferencia significativa entre el movimiento de los cuerpos celestes “naturales” ³ y los cuerpos artificiales (naves o satélites espaciales), la misma se debe a que “grandes aproximaciones” ocurren, con frecuencia, en los últimos objetos mientras que en los primeros puede suceder pero rara vez o en determinadas condiciones. Las implicancias de esta situación se explican analizando las propiedades del campo de fuerzas gravitacional; cuando éstas aumentan continuamente las fuerzas actuantes, entre las partículas, se incrementan y la distancia entre los cuerpos se aproxima a cero.

Además, el espacio físico donde se realizan las experiencias numéricas requiere a menudo de órbitas que relacionen dos cuerpos celestes. Por supuesto, las órbitas reales no pasan a través de los puntos de “*singularidad*” pues antes de que esto ocurra la trayectoria termina en el punto de impacto entre el objeto de prueba y la superficie del cuerpo celeste. Sin embargo, en el problema de tres cuerpos este impacto puede ocurrir en la singularidad, ya que los cuerpos participantes son puntos masa; por lo tanto, en un sentido físico, las singularidades nunca son obtenidas mediante colisiones en la Mecánica Celeste clásica. Esto implica que tanto en los cálculos numéricos como en su aspecto conceptual, las singularidades en el problema de tres cuerpos son de suma importancia.

En consecuencia, las fuerzas que actúan sobre el tercer cuerpo así como también su velocidad, aumentan a medida que el cuerpo se aproxima a la vecindad de uno de los “primarios” entonces, el “*paso tabular*” en una integración numérica debe ser significativamente menor en esta región, próxima a una colisión, a fin de obtener resultados confiables.

Los conceptos fundamentales de singularidad, en el campo matemático, están relacionados o asociados con la existencia de la solución de ecuaciones diferenciales ².

Como las singularidades se producen en las colisiones éstas no son de carácter *esencial*, entonces ellas pueden ser “evitadas” mediante una apropiada elección de la variable independiente.

¹ La fuerza gravitatoria \mathbf{F} es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa a los cuerpos.

² Kaplan, W.; 1986, “*Matemáticas Avanzada*”, págs. 111, 113, 116, 592, 656. Ed. Addison-Wesley.

³ Planetas, satélites naturales, asteroides, cometas, exoplanetas, cúmulos estelares, etc.

Realizada esta elección se detectan los siguientes casos:

- La existencia de la solución ha sido determinada por una elección arbitraria de las condiciones iniciales (evitando la colisión).
- Las soluciones en los puntos singulares se pueden estudiar analíticamente.
- Las soluciones pueden ser determinadas antes, durante y después de la colisión.
- Las aproximaciones “muy cercanas” pueden tratarse con métodos muy precisos tanto analíticos como numéricos.

En este Capítulo analizaremos los resultados obtenidos del estudio de las singularidades en las ED del movimiento del problema de tres cuerpos.

§ 9.2 Colisión y regularización.

Hemos analizado en el Capítulo 3 ¹ el movimiento de n partículas P_i ($i = 1, \dots, n$) en un espacio Euclidiano de tres dimensiones, si $\{x_i, y_i, z_i\}$ representan las coordenadas del punto masa P_i en un sistema de coordenadas cartesiano, donde las masas $m_i > 0$ y la distancia entre los puntos masa P_i y P_j es: $r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$. También estudiamos que, en un sistema adecuado de unidades, la función potencial para la ley de atracción gravitacional de Newton es:

$$U = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

por lo tanto, las ecuaciones de movimiento del problema de n -cuerpos toman la forma abreviada ², consultar pág. 31:

$$m \ddot{q} = U_q$$

donde U_q es la derivada parcial de la función potencial U respecto de la coordenada generalizada q ; este sistema de ED de segundo orden se puede escribir de la forma:

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = \frac{U_q}{m} \end{cases} \quad (a)$$

es decir, un sistema de $6n$ ED de primer orden respecto de las variables q y v , funciones del tiempo t . Por lo tanto, las condiciones iniciales, para un tiempo real $t = t_0$, están dadas por $q(t_0)$ y $v(t_0)$.

Luego, el problema dinámico de n -cuerpos consiste en describir el “comportamiento” de todas las soluciones de las ecuaciones de movimiento (a), con condiciones iniciales arbitrarias “preasignadas”.

NOTA: A pesar de los esfuerzos realizados por numerosos y famosos matemáticos y astrónomos en los últimos 200 años, el problema para $n > 2$ permanece hasta ahora sin resolver.

¹ Capítulo 3, pág. 29: “El problema de n -cuerpos”.

² Hemos suprimido los subíndices i, j , por simplicidad y por tanto el signo Σ .

Reseña histórica. En 1858, *G. Dirichlet* comunicó a su amigo *L. Kronecker* haber descubierto un método general para el tratamiento de los problemas dinámicos; el método no consistía en una integración directa de las ED del movimiento, sino de una aproximación a la solución del problema del tipo “step by step”; i.e., obtener la solución mediante aproximaciones sucesivas. También mencionó en otra conversación, que él había conseguido demostrar la estabilidad del Sistema Planetario. Sin embargo, Dirichlet falleció poco después sin dejar un documento escrito sobre estos descubrimientos, y nada más se conoce sobre este método ¹. *Weierstrass* sospechaba que era cuestión de usar desarrollos en serie de potencias, él se esforzó en hallar la solución correspondiente al problema de n -cuerpos, así como también sus alumnos *Kovalevsky*, *S.* y *Mittag-Leffler*, *G.* quienes tuvieron el mismo propósito ².

A sugerencia de Mittag-Leffler, el rey de Suecia y Noruega estableció un premio para la solución del problema; i.e., hallar un desarrollo en serie de las coordenadas de los n cuerpos válido para todo t . En 1889 el premio fue adjudicado a *H. Poincaré*, aunque él tampoco pudo resolver el problema propuesto; a pesar de eso, su esfuerzo fue premiado ³ ya que sus investigaciones contenían una gran cantidad de ideas originales las cuales fueron de gran importancia y utilidad para los desarrollos futuros de la dinámica y sirvió como un estímulo para otras ramas de las matemáticas. Finalmente, 20 años después, el problema propuesto fue resuelto por *Sundman* ⁴, pero para el caso particular $n = 3$. La principal dificultad, en obtener un resultado “exitoso”, es cuando se incluye la colisión entre dos cuerpos y se aplican ciertas restricciones en las condiciones iniciales. Sundman evitó esta limitación introduciendo una nueva variable independiente τ en lugar del tiempo t , de modo que la variable t y las coordenadas generalizadas q_i continuaban siendo funciones regulares de τ aún cuando los cuerpos colisionaran. De este modo Sundman consiguió obtener desarrollos en serie para t y q_i en potencias de τ . Este importante resultado será analizado en forma extensa en el siguiente ítem. Desafortunadamente esta solución no se puede aplicar para el caso $n > 3$.

Hemos estudiado que el problema dinámico de n -cuerpos admite sólo 10 integrales algebraicas o constantes del movimiento, de las cuales seis integrales corresponden al centro de masa con seis constantes de integración; tres integrales del momento angular con tres constantes de integración y la integral de la energía con una constante de integración h . Luego, con la ayuda de estas diez integrales podemos eliminar diez coordenadas q_i y v_i de las ecuaciones de movimiento y por tanto, reducir el orden del sistema a uno de: $(6n - 10)$ ED de primer orden; consultar Capítulo 3, pág. 29.

Las seis integrales del centro de masa del problema de n -cuerpos demuestran que el mismo se desplaza con movimiento uniforme y rectilíneo i.e., se mueve en una línea recta con velocidad constante; luego, si trasladamos el origen de coordenadas al centro de masa las ecuaciones de movimiento permanecen invariables. Además, *H. Bruns* (1887-1888) demostró un interesante teorema: *la no existencia de otras integrales algebraicas en el sistema de ED (a), distintas de las diez integrales mencionadas, por lo tanto, cualquier otra integral algebraica de (a) es una combinación de las diez integrales conocidas; luego el sistema (a) solo admite 10 integrales algebraicas.*

¹ Siegel, C.L. & Moser, J.K.; 1971, “Lectures on Celestial Mechanics”, pág. 20. Ed. Springer-Verlag.

² Mittag-Leffler, G.; 1912, “Zur Bibliographie von Weierstrass”. Acta Math. 35, pág. 29-65.

³ Poincaré, H; 1890, “Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique”, Acta Math. 13, pág. 1-271.

⁴ Sundman, K. F.; 1913, “Mémoire sur le problème des trois corps”. Acta Math. 36, pag. 105-179.

Desafortunadamente, la demostración del teorema de Bruns es muy extensa ¹.

El siguiente teorema, muy importante, fue demostrado por Sundman (a él se le atribuye) ya que, si bien era conocido por Weierstrass éste no dejó ninguna demostración escrita. El enunciado del Teorema es el siguiente:

Si en un instante cualquiera t , los n -cuerpos de un sistema dinámico, colisionan simultáneamente en un punto entonces, las tres constantes del vector momento angular deben ser nulas.

NOTA: Como el centro de masa se encuentra en el origen del sistema de coordenadas, una colisión de los n -cuerpos sólo puede ocurrir en el origen O .

Biografía.

Dirichlet, Johann; nació en Alemania, 13/02/1805 y falleció 5/05/1859. Fue un gran matemático al que se le atribuye la definición moderna y "formal" de función. Ocupó la cátedra dejada por Gauss tras su muerte. Sus aportes más relevantes se centraron en el campo de la teoría de números, prestando especial atención al estudio de las series, y en particular a las series de Fourier. Su primera publicación fue una demostración particular del teorema de Fermat, para el caso $n=5$ y más adelante la completó también para $n=14$. Aplicó las funciones analíticas al cálculo de problemas aritméticos y estableció criterios de convergencia para las series. En el campo del análisis matemático perfeccionó la definición y concepto de función, y en la mecánica teórica se centró en el estudio del equilibrio de sistemas y en el concepto de potencial newtoniano.

Kronecker, Leopold; nació en Polonia el 7 de diciembre de 1823 y falleció en Berlín el 29 de diciembre de 1891. Matemático alemán. En 1845 se doctoró en la Universidad de Berlín y en ese año propuso su teoría de números, dando una formulación especial a las unidades en ciertos campos numéricos algebraicos. Su maestro fue P. G. *Dirichlet*. Matemático y lógico, Kronecker sostenía que la aritmética y el análisis debían estar fundados en los números enteros prescindiendo de los irracionales e imaginarios. También contribuyó al concepto de continuidad, dando la forma de los números irracionales en los números reales. En 1850 publicó un artículo *Sobre la solución de la ecuación general de quinto grado*, donde resolvía la ecuación usando teoría de grupos.

Weierstrass, Kart; nació en Ostenfelde el 31 de octubre de 1815 y falleció en Berlín el 19 de febrero de 1897. Se lo cita como el "creador del análisis moderno". Weierstrass dió las definiciones actuales de continuidad, límite y derivada de una función, que actualmente usamos. Esto le permitió demostrar un conjunto de teoremas que estaban entonces sin demostrar como el teorema del valor medio, el teorema de Bolzano-Weierstrass y el teorema de Heine-Borel. También realizó aportes en el concepto sobre convergencia de series, en la teoría de funciones periódicas, funciones elípticas, convergencia de productos infinitos, cálculo de variaciones, análisis complejo, etc.

Mittag-Leffler, Magnus Gustaf; nació en Estocolmo el 16 de marzo de 1846 y falleció el 7 de julio de 1927. Fue un gran matemático sueco. Fundó la revista matemática *Acta Mathematica* (1882). Su legado matemático son: la Función de Mittag-Leffler y el Teorema de Mittag-Leffler.

Bruns, Heinrich; nació en Berlín el 4 de septiembre de 1848 y falleció el 23 de septiembre 1919 en Leipzig. Después de graduarse, fue contratado como calculista en el Observatorio de Pulkovo, cerca de San Petersburgo, Rusia. En 1873 Bruns dejó Pulkovo y ocupó un puesto de observador en el Observatorio de Dorpat, Estonia. Después de tres años en Dorpat, Bruns fue nombrado profesor de Matemáticas en la Universidad de Berlín, donde permaneció hasta 1882. Sus contribuciones al problema de tres cuerpos fueron muy importantes y en 1887 demostró que las únicas integrales algebraicas son diez y están en función de las coordenadas y velocidades.

¹ *Bruns*, H.; (1887-1888), "Über die Integrale des Vielkörper-Problems". Acta Math. 11, págs. 25-96.

§ 9.3 Teorema de Weierstrass - Sundman.

Aunque el teorema general relacionado con las singularidades en ED fue enunciado por *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass*¹ en el siglo XIX, en realidad su importancia fue puesta en evidencia por *Karl Frithiof Sundman*², en una serie de trabajos realizados en el periodo 1906-1909; quien a su vez lo perfeccionó con sus investigaciones acerca de la singularidades en las ED del problema de tres cuerpos en 1912. En esta sección analizaremos la posibilidad que, en un sistema de n-partículas, dos de ellas colisionen.

Hemos estudiado, Capítulo 3, que las ecuaciones que definen el movimiento del problema de n-cuerpos (n = 3 o más) es un sistema de 3n ecuaciones diferenciales de segundo orden en coordenadas cartesianas; por lo tanto, se necesitan 6n constantes de integración para definir el comportamiento dinámico de las partículas y demostramos que de estas 6n integrales sólo diez se pueden hallar, expresadas en forma algebraica. Además, si designamos con R_i el vector posición del punto masa m_i , respecto del baricentro G en un sistema de puntos materiales, ver Figura 49, entonces las ED de movimiento del problema de tres cuerpos admiten la forma:

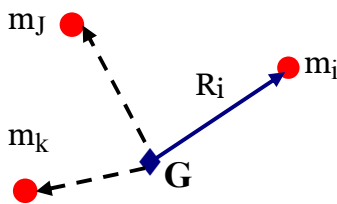


Fig. 49. El punto G representa el baricentro del sistema de n-puntos masa y R_i el radio vector del punto masa m_i respecto de G.

$$\{ m_i \ddot{R}_i = U_{R_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9.1)$$

donde la función potencial U es:

$$U = k^2 \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + k^2 \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + k^2 \frac{m_2 m_3}{r_{23}}$$

NOTA: U_{R_i} es el gradiente de la función potencial U en la dirección R_i .

El sistema de ED (9.1) admite las integrales de la energía: $T - U = h$; donde, $T = \frac{1}{2} \sum_{(i)} m_i \dot{R}_i^2$, y

la integral de las Áreas, expresada como: $\sum_{(i)} m_i R_i \times \dot{R}_i = C$; donde R_i y \dot{R}_i son los vectores de posición y velocidad de los puntos masa e $i = 1, 2, 3$.

Entonces, nos proponemos estudiar una igualdad y una desigualdad que serán muy útiles en nuestro análisis e investigación respecto de las colisiones y la regularización en ED.

El momento de inercia I en un sistema de puntos masa se define como: $I = \sum_{(i)} m_i R_i^2$.

¹ Consultar Bibliografía, pág. 244. Matemático alemán a quien se suele citar como el “padre del Análisis Matemático moderno”.

² Nació el 28 de octubre de 1823 y falleció el 28 de septiembre de 1949. Matemático finlandés quien empleo métodos analíticos para probar la existencia de una solución en serie infinita y convergente del problema de tres cuerpos; también publicó trabajos relacionados con los métodos de regularización en 1912; hizo un gran aporte a la Mecánica Celeste.

Su derivada primera tiene la forma: $\frac{1}{2} \dot{I} = \sum_{(i)} m_i R_i \dot{R}_i$; y derivando nuevamente resulta:

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = \sum_{(i)} m_i \dot{R}_i^2 + \sum_{(i)} m_i R_i \ddot{R}_i = 2T + \sum_{(i)} R_i U_{R_i}.$$

Notar que el potencial U es una función homogénea de grado (-1) respecto de las coordenadas; luego, la suma del último miembro i.e., del producto de las coordenadas por la derivada respecto de dicha función U es igual, en virtud del *teorema de Euler*, al grado de dicha función multiplicada por ella, por lo tanto:

$$\sum_{(i)} R_i U_{R_i} = -U$$

entonces se tiene: $\frac{1}{2} \ddot{I} = 2T - U = T + h = U + 2h$, y finalmente

$$\boxed{\ddot{I} = 2T + 2h = 2U + 4h} \quad \text{Fórmula de Lagrange.}$$

Vamos a estudiar una desigualdad fundamental a partir de la ecuación: $\frac{1}{2} \dot{I} = \sum_{(i)} m_i R_i \dot{R}_i$ (9.2)

además, si tenemos presente la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*: $(\sum a_i b_i)^2 \leq \sum a_i^2 \sum b_i^2$; el segundo miembro de (9.2) se puede escribir de la forma:

$$\sum_{(i)} m_i R_i \dot{R}_i \leq \sum \sqrt{m_i} |R_i| \sqrt{m_i} \frac{R_i \dot{R}_i}{|R_i|},$$

entonces, elevando al cuadrado la ecuación (9.2) admite el desarrollo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \dot{I}^2 &= \left(\sum m_i R_i \dot{R}_i \right)^2 = \left(\sum \sqrt{m_i} |R_i| \sqrt{m_i} \frac{R_i \dot{R}_i}{|R_i|} \right)^2 \leq \sum m_i R_i^2 \sum m_i \frac{(R_i \dot{R}_i)^2}{R_i^2} \\ &= I \sum m_i \frac{(R_i \dot{R}_i)^2}{R_i^2}; \text{ luego,} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \dot{I}^2 \leq I \sum m_i \frac{(R_i \dot{R}_i)^2}{R_i^2}.$$

Este resultado nos dice que la variación del momento de inercia \dot{I} se mantiene acotada. Consideremos ahora la integral del momento angular y procedemos del mismo modo; sea

$$\sum_{(i)} m_i R_i \times \dot{R}_i = C$$

donde C es la constante del vector momento angular C . Elevando al cuadrado ambos miembros resulta:

$$C^2 = \left(\sum m_i \mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i \right)^2 \leq \left(\sum \sqrt{m_i} |\mathbf{R}_i| \sqrt{m_i} \frac{\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i}{|\mathbf{R}_i|} \right)^2 \leq I \sum m_i \frac{(\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i)^2}{R_i^2}$$

luego,

$$C^2 \leq I \sum m_i \frac{(\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i)^2}{R_i^2}.$$

Entonces, si sumamos miembro a miembro estas dos desigualdades, resulta:

$$\frac{1}{4} \dot{I}^2 + C^2 \leq I \sum m_i \frac{(\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i)^2 + (\mathbf{R}_i \dot{\mathbf{R}}_i)^2}{R_i^2} \tag{9.3}$$

Desigualdad muy importante para la siguiente demostración.

Las coordenadas cartesianas del vector posición \mathbf{R}_i son $\{x_i, y_i, z_i\}$ y del vector velocidad $\dot{\mathbf{R}}_i \{ \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i \}$, por lo tanto, el producto vector de ambos es:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i)^2 &= \left(\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ x_i & y_i & z_i \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{z}_i \end{vmatrix} \right)^2 = \begin{vmatrix} y_i & z_i \\ \dot{y}_i & \dot{z}_i \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_i & z_i \\ \dot{x}_i & \dot{z}_i \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i \end{vmatrix}^2 = \\ &= \left(y_i \dot{z}_i - \dot{y}_i z_i \right)^2 + \left(x_i \dot{z}_i - \dot{x}_i z_i \right)^2 + \left(x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i \right)^2 = y_i^2 \dot{z}_i^2 + z_i^2 \dot{y}_i^2 - \\ &- 2 y_i z_i \dot{y}_i \dot{z}_i + x_i^2 \dot{z}_i^2 + \dot{x}_i^2 z_i^2 - 2 x_i z_i \dot{x}_i \dot{z}_i + x_i^2 \dot{y}_i^2 + \dot{x}_i^2 y_i^2 - \\ &- 2 x_i y_i \dot{x}_i \dot{y}_i . \end{aligned}$$

y su producto escalar es:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_i \dot{\mathbf{R}}_i)^2 &= \left(x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i + z_i \dot{z}_i \right)^2 = x_i^2 \dot{x}_i^2 + y_i^2 \dot{y}_i^2 + z_i^2 \dot{z}_i^2 + 2 x_i y_i \dot{x}_i \dot{y}_i + 2 x_i z_i \dot{x}_i \dot{z}_i + \\ &+ 2 y_i z_i \dot{y}_i \dot{z}_i . \end{aligned}$$

Si sumamos ambos productos, se tiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i)^2 + (\mathbf{R}_i \dot{\mathbf{R}}_i)^2 &= x_i^2 \dot{x}_i^2 + y_i^2 \dot{y}_i^2 + z_i^2 \dot{z}_i^2 + x_i^2 \dot{y}_i^2 + \dot{x}_i^2 y_i^2 + x_i^2 \dot{z}_i^2 + \dot{x}_i^2 z_i^2 + \\ &+ y_i^2 \dot{z}_i^2 + z_i^2 \dot{y}_i^2; \text{agrupando resulta:} \end{aligned}$$

$$\left(\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i \right)^2 + \left(\mathbf{R}_i \dot{\mathbf{R}}_i \right)^2 = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = R_i^2 \dot{R}_i^2 = \sigma.$$

Con este resultado reemplazamos en la ecuación (9.3), entonces resulta:

$$\frac{1}{4} \dot{I}^2 + C^2 \leq I \sum m_i \frac{(\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i)^2 + (\mathbf{R}_i \dot{\mathbf{R}}_i)^2}{R_i^2} = I \sum m_i \dot{R}_i^2.$$

Por definición de energía cinética: $\sum m_i \dot{R}_i^2 = 2 T$; luego la desigualdad anterior toma la forma:

$$\frac{1}{4} \dot{I}^2 + C^2 \leq 2 I T = I (\ddot{I} - 2 h);$$

donde hemos tenido en cuenta la fórmula de Lagrange (pág. 146), por lo tanto

$$\frac{1}{4} \frac{\dot{I}^2}{I} + \frac{C^2}{I} \leq (\ddot{I} - 2 h)$$

y finalmente resulta:

$$\boxed{\ddot{I} - 2 h - \frac{1}{4} \frac{\dot{I}^2}{I} \geq \frac{C^2}{I}}, \quad (9.4)$$

Desigualdad muy importante, conocida como la *desigualdad de Sundman*.

Definición: Consideremos tres cuerpos de masa m_1, m_2, m_3 ; diremos que tienden a una colisión simultánea ¹ para t tendiendo a cierto valor t_c , si las tres distancias $|\mathbf{R}_i| \rightarrow 0$ ($i=1,2,3$) para $t \rightarrow t_c$; en este caso se cumple que $r_{ij} \rightarrow 0$ para $t \rightarrow t_c$; notar que $|\mathbf{R}_i| = r_i$ y $r_{ij} = |\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i|$.

Teorema (importante).

Nos proponemos ahora demostrar el teorema de *Weierstrass-Sundman* ², el cual establece la condición necesaria para que exista una colisión simultánea.

Para ello vamos a estudiar la siguiente función:

$$Q(t) = -2 h \sqrt{I} + \frac{\frac{1}{4} \dot{I}^2 + C^2}{\sqrt{I}} \quad (9.5)$$

Derivando respecto de t , resulta:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= -2 h D(\sqrt{I}) + \frac{\frac{1}{2} \dot{I} \ddot{I} \sqrt{I} - (\frac{1}{4} \dot{I}^2 + C^2) D(\sqrt{I})}{I} \\ \dot{Q}(t) &= D(\sqrt{I}) \left[\ddot{I} - 2 h - \frac{1}{4} \frac{\dot{I}^2}{I} - \frac{C^2}{I} \right] \end{aligned}$$

¹ Siegel, C.L. & Moser, J.K.; 1971, "Lectures on Celestial Mechanics", págs. 69-77.

² Saari, D. G.; 2005, "Collisions, Rings and Other Newtonian N-Body Problems", pág. 147. Ed. American Mathematical Society.

donde, $\ddot{I} - 2h - \frac{1}{4} \frac{\dot{I}^2}{I} - \frac{C^2}{I} \geq 0$ [ver (9.4)]; entonces, el término entre corchetes es mayor o igual que cero. Esta conclusión significa que $\dot{Q}(t)$ no puede tener distinto signo que la derivada de \sqrt{I} , luego,

$$\text{Sg}[\dot{Q}(t)] \text{ no puede ser } \neq \text{Sg}[D(\sqrt{I})]^1$$

El significado de este resultado es el siguiente: si una de las funciones, $\dot{Q}(t)$ ó \sqrt{I} crece la otra función no puede decrecer ya que, las derivadas de ambas funciones deben tener signos iguales y no distintos. Entonces, si los tres cuerpos colisionan, para un instante $t = t_c$, los módulos de los respectivos vectores posición $|R_i| \rightarrow 0$ y por tanto, $I \rightarrow 0$; además, como los $r_{ij} \rightarrow 0$ la función potencial $U \rightarrow +\infty$ para $t \rightarrow t_c$; entonces, si $U \rightarrow +\infty$, la derivada $\ddot{I} \rightarrow +\infty$ para $t \rightarrow t_c$. Ver Figura 50.

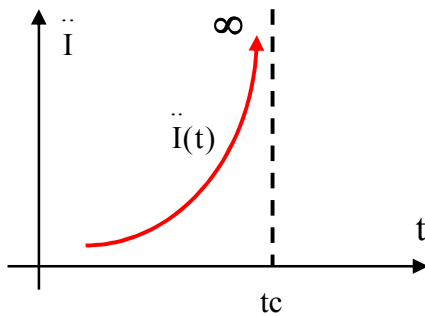


Fig. 50. Si la variable $t \rightarrow t_c$, el potencial $U \rightarrow +\infty$ y la función $\ddot{I} \rightarrow +\infty$.

En consecuencia, por ser \ddot{I} positiva, \dot{I} será una función creciente para t muy próxima a t_c ; pero si \dot{I} es una función creciente para t próxima a t_c entonces, \dot{I} es una función positiva o nula. Luego, \dot{I} no cambia de signo en cierto entorno de t_c . Pero si \dot{I} no cambia de signo significa que la función I es monótona para $t \rightarrow t_c$. En resumen, $0 < I \rightarrow 0$, para $t \rightarrow t_c$, por lo tanto I es monótona.

En consecuencia, I es una función monótona decreciente y por tanto $Q(t)$ no puede ser monótona creciente. Luego, $Q(t)$ es constante o monótona decreciente entonces, $Q(t)$ tiene un límite para $t \rightarrow t_c$ que no puede ser $+\infty$, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow t_c} Q(t) = l \neq +\infty$$

En consecuencia, nos preguntamos: ¿podrá tender a $-\infty$ para $t \rightarrow t_c$?

El primer sumando de $Q(t)$, ver (9.5), tiende a cero y el segundo es positivo por lo tanto, no puede tender a $-\infty$; luego,

$$\lim_{t \rightarrow t_c} Q(t) = \lim_{t \rightarrow t_c} \frac{\frac{1}{4} \dot{I}^2 + C^2}{I} = l \text{ (límite finito)}$$

pero el cociente se puede escribir: $\frac{1}{4} \frac{\dot{I}^2}{I} + \frac{C^2}{I} \geq \frac{C^2}{I}$, esta cantidad tiende a un límite finito l .

¹ Sg representa la función signo.

Concluimos entonces que el cociente $\frac{C^2}{I}$ es una función acotada y por tanto podemos escribir:

$\frac{C^2}{I} \leq K \Rightarrow C^2 \leq K I$; luego $C^2 = 0$. Esta conclusión es una condición necesaria de colisión simultánea i.e., que la *integral de las áreas sea nula*.

Pregunta: ¿Podría ocurrir una colisión simultánea con el andar indefinido del tiempo, sea nulo o no el vector momento angular ?

Respuesta: En ningún caso es posible una colisión simultánea para $t \rightarrow \pm \infty$.

Demostración:

En efecto, supongamos que existe colisión simultánea para $t \rightarrow +\infty$, entonces tendríamos:

$$\left. \begin{array}{l} I \rightarrow 0 \\ \ddot{I} \rightarrow +\infty \\ I \rightarrow +\infty \end{array} \right\} t \rightarrow +\infty;$$

además, $\ddot{I} \geq M$, para $t \geq t_1$. Por otra parte:

$$\int_{t_1}^t \ddot{I} dt = \dot{I}(t) - \dot{I}(t_1) \geq \int_{t_1}^t M dt = M(t - t_1) \geq N (t > t_1).$$

del mismo modo:
$$\int_{t_2}^t \dot{I} dt = I(t) - I(t_2) \geq \int_{t_2}^t [N + \dot{I}(t_1)] dt = [N + \dot{I}(t_1)](t - t_2).$$

luego, $I(t) \rightarrow +\infty$ para $t \rightarrow +\infty$; Por lo tanto, esta conclusión contradice nuestra hipótesis.

§ 9.4 Colisión Binaria.

Consideremos un sistema de dos cuerpos con sólo un grado de libertad ¹, formado por el Sol de masa m_0 y un planeta de masa m_1 , ver Figura 51.

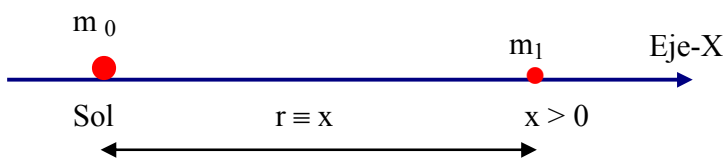


Fig. 51. Sistema de dos cuerpos, Sol y planeta con un grado de libertad. La posición de m_1 respecto del Sol esta dada por el vector \mathbf{r} cuyo modulo es x .

El planeta tiene masa m_1 y además satisface la relación de masas: $m_0 + m_1 = 1$, donde $m_1 \ll m_0$ (masa del Sol). m_1 se mueve sobre el eje-x.

¹ Consultar: Stiefel, E.L. & Scheifele, G.; 1971, "Linear and Regular Celestial Mechanics", pág. 13.

La ecuación de movimiento de m_1 respecto de m_0 tiene la forma: $\ddot{x} + \frac{x}{r^3} = 0$ ¹; como $r \equiv x$ resulta,

$\ddot{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ es decir, una ED de segundo orden con coeficientes constantes la cual admite una integral

primera. Si multiplicamos por \dot{x} se tiene: $\dot{x} \ddot{x} = -\frac{x}{x^2}$, e integrando: $\frac{1}{2} \dot{x}^2 = \frac{1}{x} + h$, se obtiene una

integral primera. Entonces,

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{x} = 0 \\ \frac{1}{2} \dot{x}^2 = \frac{1}{x} + h \end{cases} \quad (9.6)$$

constituyen el sistema de ED que definen el movimiento de m_1 respecto de m_0 y su *integral primera* o *integral de la energía*, en un espacio unidimensional; h es la constante de la energía.

Si $x \rightarrow 0$ para $t \rightarrow t_c$, se produce una colisión entre las masas m_0 y m_1 entonces, en este caso, la velocidad $\dot{x} \rightarrow \infty$ por lo tanto, para $x \rightarrow 0$ las ecuaciones de movimiento (9.6) presentan una *singularidad*.

Para evitar esta *singularidad* es conveniente reemplazar la variable dependiente x por ξ^2 ($x = \xi^2$) y la variable independiente t por otra variable independiente τ , definida por la relación:

$$\tau = A \int_0^t \frac{dt}{r}, \text{ donde } A = \text{const.} \text{ Luego, } d\tau = A \frac{dt}{r}, \text{ por lo tanto: } t = \int_0^\tau \frac{r}{A} d\tau.$$

Además, las derivadas de x en función de ξ tienen la expresión: $\dot{x} = 2\xi \dot{\xi}$; $\ddot{x} = 2\dot{\xi}^2 + 2\xi \ddot{\xi}$;

donde las derivadas de ξ respecto de τ tomen la forma: $\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{A}{r} \frac{d\xi}{d\tau}$;

$$\ddot{\xi} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{A}{r} \frac{d\xi}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} = \frac{A}{r} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{A}{r} \frac{d\xi}{d\tau} \right) = \frac{A}{r} \left[\frac{A}{r} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - \frac{A}{r^2} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\xi}{d\tau} \right];$$

recordar que: $r = x = \xi^2$, luego, $\frac{dr}{d\tau} = \frac{d\xi^2}{d\tau} = 2\xi \frac{d\xi}{d\tau}$; por lo tanto:

$$\ddot{\xi} = \frac{A^2}{r^2} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - \frac{A^2}{r^3} 2\xi \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2.$$

Podemos ahora reemplazar, en el sistema de ecuaciones (9.6), las derivadas de x en función de t por sus equivalentes en ξ en función de τ , entonces resulta:

¹ Recordar que $\mu = k^2 (m_0 + m_1) = 1$; porque estamos analizando un problema teórico.

$$\begin{cases} 2 \left(\frac{A}{r} \frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + 2 \xi \left[\frac{A^2}{r^2} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2 \xi \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{\xi^4} = 0 \\ \frac{1}{2} 4 \xi^2 \frac{A^2}{r^2} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{\xi^2} + h \end{cases}$$

Desarrollamos la primera ecuación y luego reemplazamos r por ξ^2 entonces se tiene:

$$2 \frac{A^2}{r^2} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + 2 \frac{A^2}{r^2} \xi \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 4 \frac{A^2}{r^3} \xi^2 \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\xi^4} = 0$$

$$2 \frac{A^2}{\xi^4} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + 2 \frac{A^2}{\xi^4} \xi \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 4 \frac{A^2}{\xi^6} \xi^2 \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\xi^4} = 0$$

Multiplicando toda la ecuación por ξ^4 , resulta:

$$2 A^2 \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + 2 A^2 \xi \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 4 A^2 \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + 1 = 0$$

Simplificando, se obtiene: $2 A^2 \xi \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2 A^2 \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + 1 = 0.$ (9.7)

Ecuación diferencial que reemplaza a la primera ecuación de movimiento en (9.6), expresada en las nuevas coordenadas ξ , en función de τ , con lo cual se ha evitado la singularidad cuando $x \rightarrow 0$; este método matemático se denomina *regularización*¹.

Aplicando el mismo procedimiento a la integral de la energía, segunda ecuación en (9.6), se obtiene:

$$2 \xi^2 \frac{A^2}{\xi^4} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{\xi^2} + h;$$

Multiplicando por ξ^2 , resulta:

$$2 A^2 \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 = 1 + h \xi^2, \Rightarrow -2 A^2 \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + 1 = -h \xi^2,$$

esta última igualdad la reemplazamos en los dos últimos términos de la ecuación (9.7), entonces se tiene:

$$2 A^2 \xi \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - h \xi^2 = 0,$$

y finalmente: $\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - \frac{h}{2 A^2} \xi = 0,$ (9.8)

¹ Consultar: **Stiefel**, E.L. & **Scheifele**, G.; 1971, "Linear and Regular Celestial Mechanics", págs. 11-17.

Es decir, una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea ¹, donde h es la constante de la integral de la energía. Ambas ecuaciones se pueden resolver en forma cerrada, de acuerdo a los valores de h y A. Para ello analicemos el signo de la constante h:

- Si h es negativo \Rightarrow el movimiento es elíptico.
- h es positivo \Rightarrow el movimiento es hiperbólico.
- h es cero \Rightarrow ξ es una función lineal de τ .

Entonces, $h < 0 \Rightarrow \xi = A^* \operatorname{sen} \sqrt{\frac{-h}{2}} \tau$.

$h > 0 \Rightarrow \xi = A^* \operatorname{senh} \sqrt{\frac{h}{2}} \tau$.

$h = 0 \Rightarrow \xi = A^* \tau$.

donde A* es una constante arbitraria.

Luego, teniendo en cuenta que $r = x = \xi^2$, se obtienen las siguientes relaciones, en función de τ ²:

$$r = x = A^2 \operatorname{sen}^2 \sqrt{\frac{-h}{2}} \tau = \frac{A^2}{2} \left(1 - \cos 2\sqrt{\frac{-h}{2}} \tau \right), \quad \text{para } h < 0,$$

$$r = x = A^2 \operatorname{senh}^2 \sqrt{\frac{h}{2}} \tau = \frac{A^2}{2} \left(\cosh 2\sqrt{\frac{h}{2}} \tau - 1 \right), \quad \text{para } h > 0,$$

$$r = x = A^2 \tau^2, \quad \text{para } h = 0.$$

Por lo tanto, a partir de la expresión: $t = \int_0^\tau r \, d\tau$, podemos calcular t en función de τ conociendo los

valores de r para cada signo de h. Entonces se tiene:

Para $h < 0$ resulta: $t = \int_0^\tau \frac{A^2}{2} \left(1 - \cos 2\sqrt{\frac{-h}{2}} \tau \right) d\tau = \frac{A^2}{2} \left[\tau - \frac{1}{2\sqrt{\frac{-h}{2}}} \operatorname{sen} 2\sqrt{\frac{-h}{2}} \tau \right]$

$$t = \frac{A^2}{4\sqrt{\frac{-h}{2}}} \left[2\sqrt{\frac{-h}{2}} \tau - \operatorname{sen} 2\sqrt{\frac{-h}{2}} \tau \right];$$

si definimos: $E = 2\sqrt{\frac{-h}{2}} \tau$, expresión que depende de τ , podemos entonces escribir que:

¹ Recordar que: $h / 2 A^2$ es constante independiente del signo de h.

² Donde definimos $A^2 \equiv A^{*2}$.

$$t = \alpha^2 (E - \text{sen } E), \quad \text{y por tanto,} \quad x = \beta^2 (1 - \cos E).$$

Fórmulas fundamentales que nos permiten expresar t y x en función de τ , cuando el valor de la constante h es negativo ($h < 0$). Los coeficientes α y β son constantes.

Si h es positivo ($h > 0$), resulta:

$$t = \frac{A^2}{2} \int_0^\tau \left(\cosh 2\sqrt{\frac{h}{2}} \tau - 1 \right) d\tau = \frac{A^2}{2} \left[\frac{1}{2\sqrt{\frac{h}{2}}} \sinh 2\sqrt{\frac{h}{2}} \tau - \tau \right]$$

$$t = \frac{A^2}{4\sqrt{\frac{h}{2}}} \left[\sinh 2\sqrt{\frac{h}{2}} \tau - 2\sqrt{\frac{h}{2}} \tau \right],$$

definiendo: $E = 2\sqrt{\frac{h}{2}} \tau$, y reemplazando se obtiene:

$$t = \alpha_1^2 (\sinh E - E); \quad \text{luego:} \quad x = \beta_1^2 (\cosh E - 1).$$

Por último, si $h = 0$, resulta:

$$t = A^2 \int_0^\tau \tau^2 d\tau = \frac{A^2}{3} \tau^3; \quad \text{si definimos: } E = \tau, \text{ se tiene:}$$

$$t = \alpha_2^2 E^3; \quad \text{luego: } x = \beta_2^2 E^2.$$

NOTA: En los tres casos considerados la variable x admite un desarrollo en serie cuyo primer término es del orden de τ^2 , mas términos de orden superior¹, i.e.,

$$x = \beta_2 \tau^2 + \beta_4 \tau^4 + \dots,$$

y para t :

$$t = \alpha_3 \tau^3 + \alpha_5 \tau^5 + \dots.$$

Luego, en todos los casos:

$$x = E^2 \sum_{(v)} a_v E^v,$$

$$t = E^3 \sum_{(v)} b_v E^v, \quad (\text{donde } v = 0, \dots, n).$$

notar que las series de potencias de E^v son convergentes para todo E , por tratarse del desarrollo de *funciones trascendentes enteras*.

Para obtener una relación entre las variables x y t (x en función de t) eliminamos el parámetro E entre las dos últimas igualdades, entonces se obtiene la siguiente expresión:

¹ Recordar que: $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots$; luego: $1 - \cos x \cong x^2/2! + \dots$; ídem para $\cosh x$.

$$x = \sqrt[3]{t^2} \sum_{(v)} C_v (\sqrt[3]{t})^v, \quad (v = 0, \dots, n) \tag{9.9}$$

Cuyo desarrollo es: $x = C_0 \sqrt[3]{t^2} + \dots$; donde $C_0 \neq 0$, es una constante.

Si t es pequeño, es decir, si los dos cuerpos están muy próximos implica, en primera aproximación:

$$x \sim C_0 \sqrt[3]{t^2} \rightarrow 0, \quad \text{y su derivada: } \dot{x} \sim \frac{2}{3} C_0 t^{-\frac{1}{3}} \rightarrow \infty, \quad \text{cuando } t \rightarrow 0.$$

Aclaraciones. Consideremos la función definida por la ecuación (9.9) entonces, podemos suponer que x es una variable compleja, luego es posible formular que:

$$x = x(t) = x_1(t) + i x_2(t) \rightarrow \text{es una función compleja.}$$

Además, si t es pequeño, es decir en las proximidades de m_0 , a valores opuestos de t ($\pm t$) corresponden los mismos valores de x además, si los puntos masa m_0 y m_1 son “completamente elásticos” implica que la partícula m_1 , que colisiona con m_0 , se refleja sobre si misma. Esta situación se define como eyección.

En general, la igualdad $x = x(t)$ es una función analítica *no uniforme*; es una “función triforme”¹, pero se puede uniformizar mediante una superficie de *Riemann de tres hojas*².

Entonces, para t real y pequeño corresponden valores reales de x porque los C_v son reales³ y, para valores grandes de t , la función $x(t)$ se obtiene mediante la *prolongación analítica* sobre una de las hojas de la superficie de Riemann; esta prolongación analítica puede considerarse también como la *prolongación dinámica* del problema.

Consultar: Levinson, N. & Redheffer, R.; 2003, “Curso de Variable Compleja”; págs. 397-401.

Ampliando conceptos. El vector momento angular C esta definido como el producto $\mathbf{P} \times \dot{\mathbf{P}}$, siendo \mathbf{P} el vector que determina la posición del planeta de masa m respecto de un origen fijo O ; consultar Cáp. 2, pág. 8, ecuación (2.4). Si el movimiento se realiza en el plano $\{x,y\}$, tiene la expresión, en coordenadas cartesianas: $x y' - y x' = C$ (escalar); donde x', y' son las componentes de la velocidad.

Si $C = 0$ el movimiento es rectilíneo luego, podemos suponer que el mismo tiene lugar a lo largo del eje- x entonces, $y(t) \equiv 0$ y por tanto $r^2 = x^2 + y^2 = |x|^2 \Rightarrow r = |x|$. En consecuencia, las ecuaciones del movimiento, se reducen a:

$$\ddot{x} + x |x|^{-3} = 0, \tag{9.10}$$

y la integral de la energía:
$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = |x|^{-1} + h, \tag{9.11}$$

¹ Si z es una variable compleja, a la función $\sqrt[3]{z}$ le corresponden tres valores distintos; ver definición de función multiforme. Consultar: Kaplan, W.; 1986, “Matemáticas Avanzadas”, Cáp. 11, págs. 559-654.

² Ídem págs. 624-628.

³ NOTA: ya que $x(t)$ se puede considerar definida por la expresión: $C_0 \sqrt[3]{t^2}$, para $t \sim \pm 0$ y $t \neq 0$.

Supongamos que la masa en reposo se encuentra en el origen de coordenadas, la cual atrae a la partícula en movimiento con una fuerza que decrece cuando la distancia $|x|$ aumenta. Se demuestra, sin una integración explícita de (9.10), que toda solución $x = x(t)$ de la ED (9.10) con sólo un grado de libertad, debe tender a cero cuando t tiende a un *adecuado* valor finito de t , sea este t_0 ; esto significa que ningún movimiento es posible sin una colisión entre las dos partículas. Luego, la ED algebraica (9.10) tiene una singularidad en el punto $x = 0$ y toda solución de esta ED pasa a ser singular en $t = t_0$ si la solución $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_0$. En efecto, teniendo en cuenta la integral (9.11) se puede verificar que $|\dot{x}| \rightarrow \infty$ cuando $|x| \rightarrow 0$ ¹.

Además, como vimos anteriormente, se demuestra que la anomalía excéntrica E es una variable de regularización local, la cual permite evitar la singularidad de la función analítica $x(t)$ cuando $t \rightarrow t_0$.

Si el vector momento angular es nulo, i.e. $C = 0$, esta caracterizado por: $e = 1$ (ya que, por definición de excentricidad $e^2 = 1 + 2hC^2$), el cual corresponden a los casos elíptico e hiperbólico donde $h < 0$ ó $h > 0$ respectivamente; y por $p = 0$ en el caso parabólico donde $h = 0$ (siendo $p = C^2 \geq 0$ si $h = 0$).

Entonces, la solución en función de la anomalía excéntrica E es:

$$\begin{cases} x = a(\cos E - 1) & \text{elipse : } h < 0 \\ x = a(\cosh E - 1) & \text{hiperbólico : } h > 0 \\ x = -\frac{1}{2} E^2 & \text{parabólico : } h = 0 \end{cases} \quad (9.12)$$

Si t_0 es una constante de integración, implica que:

$$\begin{cases} t - t_0 = \sqrt{a^3} (E - \operatorname{sen} E) : & h < 0 \\ t - t_0 = \sqrt{-a^3} (\operatorname{senh} E - E) : & h > 0 \\ t - t_0 = \frac{E^3}{6} & : h = 0 \end{cases} \quad (9.13)$$

Si analizamos estas ecuaciones observamos que existe una colisión para $E = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, si $h < 0$; o solamente para $E = 0$ si $h \geq 0$. Por razones de periodicidad es suficiente considerar sólo el caso $E = 0$; ídem cuando $h > 0$. Elegimos el origen del eje- t tal que $t = 0$ corresponde a $E = 0$, por ejemplo que $t_0 = 0$ entonces, las ecuaciones de los sistemas (9.12) y (9.13) se pueden escribir, en los tres casos, de la forma:

$$x = E^2 P_1(E), \quad t = E^3 P_2(E);$$

donde $P_j(E)$ representa, para $j = 1, 2$, una serie de potencias de E la cual converge para todo E y además, tiene coeficientes reales y un término constante no-nulo $P_j(0) \neq 0$. Por lo tanto, mediante la eliminación local de E , en el punto $E = 0$ ($t = 0$) y para $|t|$ suficientemente pequeño resulta:

$$x(t) = \sqrt[3]{t^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt[3]{t^n} \quad (9.14)$$

¹ Consular: Stiefel, E.L. & Scheifele, G.; 1971, "Linear and Regular Celestial Mechanics", págs. 11-17.

donde la constante $c_0 \neq 0$ y

$$c_n \begin{cases} < \\ = 0. \\ > \end{cases}$$

Este resultado implica que $x(t)$ tiene igual signo tanto para valores positivos como para valores negativos de t si es pequeño; por ej. la partícula que se mueve sobre el eje- x es reflejada por la colisión (o a través de la colisión) por la partícula que esta en reposo en $x = 0$. Entonces, la trayectoria de la partícula es reflejada a un estado en el cual la velocidad $x'(t)$ es infinita, ya que de (9.14) se obtiene:

$$|\dot{x}(t)| \sim |t|^{-\frac{1}{3}} \rightarrow \infty, \quad \text{para } t \rightarrow 0.$$

La descripción precisa de este escenario matemático es el siguiente:

Consideremos a E y t como variables complejas (las cuales están eventualmente limitadas a ser reales). Entonces, $x = x(t)$ es una función analítica de t , pues $x(t)$ es obtenida por eliminación de E entre las funciones enteras (9.12) y (9.13) de E . De acuerdo a (9.14), la función analítica $x(t)$ tiene en $t = 0$ un punto de ramificación algebraica en el cual tres hojas de la superficie de Riemann se juntan ¹. Sigue también de (9.14) que, si $t \neq 0$ es real y pequeño, $x(t)$ es real sobre exactamente una de las tres hojas, si $t \rightarrow -0$ ó $t \rightarrow +0$; i.e. si el estado de movimiento es antes o después de la colisión. Por lo tanto, si $0 \neq t \sim \pm 0$, entonces $x(t)$ tiene una singularidad a través de la cual es exactamente posible una prolongación analítica real. Esta única rama real de la prolongación analítica puede ser considerada como definiendo una prolongación dinámica del problema.

Se recomienda consultar:

Siegel, C.L. & Moser, J.K.; 1971, “*Lectures on Celestial Mechanics*”, págs. 26-42.

Arnold, V.I. (Ed.), 1988, “*Dynamical Systems III*”, págs. 55-64.

En los textos y artículos citados en este Capítulo se describen los principales fundamentos, dificultades y métodos de la *Mecánica Clásica* vinculados con los problemas de colisión y regularización de las ED del movimiento de dos y tres cuerpos, orientados y analizados en su aspecto matemático.

§ 9.5 El teorema de Weierstrass-Sundman para el caso de n-cuerpos.

Consideremos tres cuerpos con masas m_1, m_2 y m_3 y sean R_1, R_2 y R_3 sus vectores de posición baricéntricos ² por lo tanto, el momento de inercia I del sistema es igual a:

$$I = \sum_{(i)} m_i R_i^2, \quad (i = 1, 2, 3).$$

¹ Consultar: **Cohn, H.**; 1980, “*Conformal Mapping on Riemann Surfaces*”, Ed. Dover Publications Inc.

Farkas, H. M. & Kra, I.; 1992, “*Riemann Surfaces*”, Ed. Springer-Verlag.

Dierkes, U., Hildebrandt, S. & Sauvigny, F.; 2010, “*Minimal Surfaces*”, Ed. Springer-Verlag.

² En un sistema de coordenadas baricéntrico se satisfacen las siguientes relaciones algebraicas:

$m_1 R_1 + m_2 R_2 + m_3 R_3 = 0$; y también: $m_1 R'_1 + m_2 R'_2 + m_3 R'_3 = 0$.

Si indicamos con $M = \sum_{(i)} m_i$ la suma de las masas, podemos escribir idénticamente que:

$$M I = M(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2) - m_1 R_1 (m_1 R_1 + m_2 R_2 + m_3 R_3) - \\ - m_2 R_2 (m_1 R_1 + m_2 R_2 + m_3 R_3) - m_3 R_3 (m_1 R_1 + m_2 R_2 + m_3 R_3). \quad (9.15)$$

Es fácil demostrar que el producto $M I$ se puede expresar:

$$M I = m_1 m_2 (R_1 - R_2)^2 + m_2 m_3 (R_2 - R_3)^2 + m_1 m_3 (R_1 - R_3)^2. \quad (9.15a)$$

ya que desarrollando estos cuadrados se obtiene (9.15).

Consideremos ahora la energía cinética del sistema:

$$2 T = m_1 \dot{R}_1^2 + m_2 \dot{R}_2^2 + m_3 \dot{R}_3^2.$$

análogamente, podemos escribir:

$$2 M T = M (m_1 \dot{R}_1^2 + m_2 \dot{R}_2^2 + m_3 \dot{R}_3^2) - m_1 \dot{R}_1 (m_1 \dot{R}_1 + m_2 \dot{R}_2 + m_3 \dot{R}_3) - \\ - m_2 \dot{R}_2 (m_1 \dot{R}_1 + m_2 \dot{R}_2 + m_3 \dot{R}_3) - m_3 \dot{R}_3 (m_1 \dot{R}_1 + m_2 \dot{R}_2 + m_3 \dot{R}_3).$$

luego, con un razonamiento similar al anterior resulta:

$$2 M T = m_1 m_2 (\dot{R}_1 - \dot{R}_2)^2 + m_2 m_3 (\dot{R}_2 - \dot{R}_3)^2 + m_1 m_3 (\dot{R}_1 - \dot{R}_3)^2. \quad (9.16)$$

Vamos a demostrar ahora una desigualdad que nos será útil posteriormente; para ello consideremos la igualdad de Lagrange: $\ddot{I} = 2 U + 4 h$, ver pág. 246; y nos proponemos demostrar que:

$$\left(\ddot{I} - 4 h \right) \sqrt{I} \geq m_0 > 0.$$

La función potencia U en el problema de tres cuerpos tiene la expresión:

$$U = \frac{m_1 m_2}{|R_2 - R_1|} + \frac{m_1 m_3}{|R_3 - R_1|} + \frac{m_2 m_3}{|R_3 - R_2|},$$

donde hemos supuesto, por sencillez, que la constante de Gauss es igual a uno, i.e., $k^2 = 1$.

Si indicamos con ρ_{ij} la distancia entre los puntos masa m_i y m_j ¹ y en virtud de la expresión $M I$ que relaciona las masas y sus distancias, ver (9.15a), entonces $M I$ es mayor o igual que $m_i m_j \rho_{ij}^2$, luego

$$M I \geq m_i m_j \rho_{ij}^2$$

por lo tanto, podemos formular que:

¹ Hemos reemplazado $|R_j - R_i|$ por ρ_{ij} .

$$\rho_{ij} \leq \sqrt{\frac{M}{m_i m_j}} \sqrt{I}.$$

además, como el potencial U es esencialmente una función positiva, se tiene

$$U \geq \frac{m_1 m_2}{\sqrt{\frac{M}{m_1 m_2}} \sqrt{I}} + \frac{m_1 m_3}{\sqrt{\frac{M}{m_1 m_3}} \sqrt{I}} + \frac{m_2 m_3}{\sqrt{\frac{M}{m_2 m_3}} \sqrt{I}} = \frac{1}{\sqrt{I}} \frac{m_0}{2}.$$

donde: $\frac{m_0}{2} = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{\frac{M}{m_1 m_2}}} + \frac{m_1 m_3}{\sqrt{\frac{M}{m_1 m_3}}} + \frac{m_2 m_3}{\sqrt{\frac{M}{m_2 m_3}}}$; recordar que: $\rho_{ij} = |R_j - R_i|$.

luego, en virtud de la igualdad de Lagrange, pág. 246, resulta: $\ddot{I} - 4h = 2U \geq \frac{m_0}{\sqrt{I}}$, y por tanto:

$$\left(\ddot{I} - 4h \right) \sqrt{I} \geq m_0 > 0.$$

como se quería demostrar ¹. Una aplicación de esta desigualdad es la fórmula asintótica que a continuación vamos a deducir.

Supongamos que para $t \rightarrow t_c$, los tres cuerpos colisionan simultáneamente, en este caso hemos analizado que $I \rightarrow 0$ para $t \rightarrow t_c$ por lo tanto, el vector momento angular del sistema es cero: $\bar{C} = 0$; consideremos la función auxiliar:

$$Q(t) = -2h \sqrt{I} + \frac{\frac{1}{4} \dot{I}^2 + C^2}{\sqrt{I}}, \tag{9.17}$$

ver ecuación (9.5) pág. 248; entonces, si $C^2 = 0$ la expresión Q(t) se reduce a:

$$Q(t) = -2h \sqrt{I} + \frac{1}{4} \frac{\dot{I}^2}{\sqrt{I}}, \tag{9.17a}$$

además, hemos visto que: $\lim_{t \rightarrow t_c} Q(t) = l$ (número finito) y nos proponemos demostrar que $l > 0$; para

ello multipliquemos ambos miembros de (9.17a) por $2\sqrt{I}$, luego: $2Q(t)\sqrt{I} = -4hI + \frac{1}{2}\dot{I}^2$;

derivando ambos miembros respecto de t resulta:

$$\frac{d}{dt}(2Q(t)\sqrt{I}) = -4h\dot{I} + \dot{I}\ddot{I} = (-4h + \ddot{I})\dot{I}.$$

multiplicando por dt e integrando en ambos miembros se obtiene:

¹ Consultar: Siegel, C. & Moser, J.; 1971, "Lectures on Celestial Mechanics", págs. 49-57.

$$\left[2 Q(t) \sqrt{I} \right]_{t_0}^t = 2 Q(t) \sqrt{I(t)} - 2 Q(t_0) \sqrt{I(t_0)} = \int_{t_0}^t (\ddot{I} - 4h) \dot{I} dt.$$

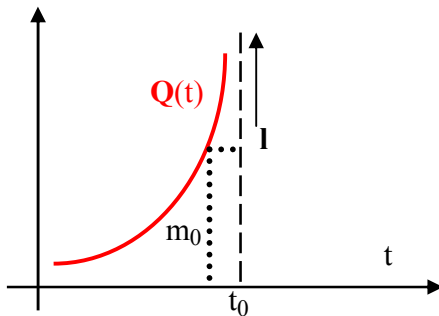
entonces, podemos escribir que:

$$\left| 2 Q(t) \sqrt{I} \right| = \left| \int_{t_0}^t (\ddot{I} - 4h)(\pm \dot{I}) dt \right| \geq \left| \int_{t_0}^t m_0 \frac{(\pm \dot{I})}{\sqrt{I}} dt \right| = m_0 2\sqrt{I}.$$

luego,

$$\boxed{|Q(t)| \geq m_0 > 0.}$$

Gráficamente la función Q(t) es creciente; ver Grafico 52.



Por lo tanto, esta conclusión prueba que:

$$\lim_{t \rightarrow t_c} Q(t) \text{ debe ser positivo.}$$

$$\text{Recordar que: } \ddot{I} - 4h \geq \frac{m_0}{\sqrt{I}}.$$

Fig. 52. Representación asintótica de la función Q(t).

En consecuencia, $\lim_{t \rightarrow t_0} Q(t) = l (> 0) = \lim \frac{1}{4} \frac{\dot{I}^2}{\sqrt{I}}$; y finalmente: $\boxed{\frac{1}{4} \lim \frac{\dot{I}^2}{\sqrt{I}} = l > 0.}$

En conclusión, si la variable t está muy próxima a t₀ ó también si |t - t₀| < δ entonces, podemos escribir la expresión asintótica,

$$\boxed{\frac{\dot{I}^2}{\sqrt{I}} \sim 4l.}$$

por lo tanto, $\dot{I}^2 \sim 4l \sqrt{I}$, pero: $\dot{I}^2 = \left(\frac{dI}{dt}\right)^2 \sim 4\sqrt{I} l$, luego: $\frac{dI}{dt} \sim 2 \sqrt{l} I^{\frac{1}{4}}$; despejando se

tiene, $dI \sim 2 \sqrt{l} I^{\frac{1}{4}} dt$, y finalmente: $I^{-\frac{1}{4}} dI \sim 2 \sqrt{l}$; expresión que podemos integrar, entonces

resulta: $\frac{4}{3} I^{\frac{3}{4}} \sim 2 \sqrt{l} (t - t_0)$, ó también:

$$\boxed{I \sim \kappa (t - t_0)^{\frac{4}{3}}}$$

Fórmula asintótica muy importante.

siendo $\kappa = \left[\frac{3}{2} \sqrt{1} \right]^{4/3}$ una constante.

Nos proponemos ahora estudiar las *colisiones binarias* en el caso del *problema de tres cuerpos*; para ello consideremos las masas m_0 , m_1 y m_2 y analicemos la perturbación del movimiento elíptico de m_0 y de m_1 debido a la influencia de m_2 ¹ en el caso en que las distancias de m_2 a m_0 y m_1 estén acotadas “inferiormente” en un cierto intervalo de tiempo; es decir, para $t \in (t_1, t_2)$ además, las distancias ρ_{02} y ρ_{12} se conservan superiores a cierto número α , por lo tanto:

$$\rho_{02}, \rho_{12} > \alpha > 0.$$

La ecuación diferencial de movimiento, en forma vectorial, de m_1 perturbado por m_2 en un sistema heliocéntrico ², donde m_0 es el Sol (origen fijo) es (ver Figura 53):

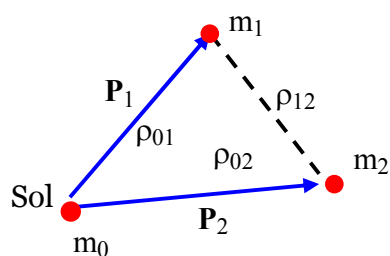


Fig. 53. Configuración de tres cuerpos en el plano; los vectores de posición \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 y sus distancias mutuas ρ_{01} , ρ_{02} y ρ_{12} .

$$\ddot{\mathbf{P}}_1 + (m_0 + m_1) \frac{\mathbf{P}_1}{|\mathbf{P}_1|^3} = \mathbf{R} = m_2 \left(\frac{\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1}{\rho_{12}^3} - \frac{\mathbf{P}_2}{|\mathbf{P}_2|^3} \right).$$

Si multiplicamos ambos miembros de esta ED por $\dot{\mathbf{P}}_1$, se tiene

$$\dot{\mathbf{P}}_1 \ddot{\mathbf{P}}_1 + (m_0 + m_1) \frac{\mathbf{P}_1 \dot{\mathbf{P}}_1}{|\mathbf{P}_1|^3} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{P}}_1, \tag{9.18}$$

y multiplicando por \mathbf{P}_1 , también ambos miembros, resulta:

$$\mathbf{P}_1 \ddot{\mathbf{P}}_1 + (m_0 + m_1) \frac{1}{|\mathbf{P}_1|} = \mathbf{R} \mathbf{P}_1, \tag{9.19}$$

Notar que la ecuación (9.18) se puede escribir de la forma:

$$D \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{P}}_1^2 - \frac{(m_0 + m_1)}{|\mathbf{P}_1|} \right] = \mathbf{R} \dot{\mathbf{P}}_1, \tag{9.18a}$$

Si a la expresión entre corchetes la definimos como: $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{P}}_1^2 - \frac{(m_0 + m_1)}{|\mathbf{P}_1|} = g$ (escalar); entonces, la igualdad anterior toma la forma:

$$\dot{g} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{P}}_1 \tag{9.18b}$$

además, teniendo en cuenta que: $D \left(\frac{1}{2} \mathbf{P}_1^2 \right) = \mathbf{P}_1 \cdot \dot{\mathbf{P}}_1$, resulta: $D^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{P}_1^2 \right) = \dot{\mathbf{P}}_1^2 + \mathbf{P}_1 \ddot{\mathbf{P}}_1$; por lo tanto, la ecuación (9.19), toma la forma:

$$D^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{P}_1^2 \right) - \dot{\mathbf{P}}_1^2 + \frac{(m_0 + m_1)}{|\mathbf{P}_1|} = \mathbf{R} \mathbf{P}_1$$

¹ Los cuerpos m_0 y m_1 son perturbados por m_2 , estas perturbaciones modifican la órbita de m_1 respecto de m_0 .
² Recordar que hemos supuesto que la constante de Gauss es igual a la unidad.

Vamos a demostrar ahora dos desigualdades que serán muy útiles en el análisis de las colisiones binarias.

Si P , Q y R son tres vectores arbitrarios, su producto vector es: $(P \times Q) \times R = (P \cdot R) Q - (P \cdot Q) R$.

Si definimos $P = P_1$, $Q = \dot{P}_1$ y $R = P_1$, entonces resulta: $(P_1 \times \dot{P}_1) \times P_1 = P_1^2 \dot{P}_1 - (P_1 \cdot \dot{P}_1) P_1$; pero,

$$P_1 \cdot \dot{P}_1 = D\left(\frac{1}{2} P_1^2\right) = D\left(\frac{1}{2} |P_1|^2\right) = |P_1| \frac{d|P_1|}{dt},$$

luego, reemplazando en el producto vector se tiene:

$$\begin{aligned} (P_1 \times \dot{P}_1) \times P_1 &= |P_1|^2 \dot{P}_1 - |P_1| \frac{d|P_1|}{dt} P_1 = |P_1| \left(|P_1| \dot{P}_1 - \frac{d|P_1|}{dt} P_1 \right) = \\ &= |P_1|^3 \frac{\left(|P_1| \dot{P}_1 - \frac{d|P_1|}{dt} P_1 \right)}{|P_1|^2} = |P_1|^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{P_1}{|P_1|} \right). \end{aligned}$$

por lo tanto, deducimos que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P_1}{|P_1|} \right) = \frac{(P_1 \times \dot{P}_1) \times P_1}{|P_1|^3}.$$

si tomamos módulos en ambos miembros resulta:

$$\left| \frac{d}{dt} \frac{P_1}{|P_1|} \right| = \left| \frac{(P_1 \times \dot{P}_1) \times P_1}{|P_1|^3} \right| \leq \frac{|P_1 \times \dot{P}_1| |P_1|}{|P_1|^3}.$$

luego,

$$\boxed{\left| \frac{d}{dt} \frac{P_1}{|P_1|} \right| \leq \frac{|P_1 \times \dot{P}_1|}{|P_1|^2}} \quad \text{Desigualdad que será muy útil.}$$

La segunda desigualdad la vamos a deducir a partir de la derivada del producto vector de la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (P_1 \times \dot{P}_1) &= P_1 \times \ddot{P}_1 = P_1 \times \left[R - \frac{(m_0 + m_1)}{|P_1|^2} P_1 \right] = P_1 \times R \\ &= m_2 P_1 \times \left(\frac{P_2 - P_1}{\rho_{12}^3} - \frac{P_2}{\rho_{02}^3} \right) = m_2 \left(\frac{1}{\rho_{12}^3} - \frac{1}{\rho_{02}^3} \right) P_1 \times P_2; \end{aligned}$$

Por lo tanto, el módulo del primer miembro es menor o igual al módulo del vector del segundo miembro, luego se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} (P_1 \times \dot{P}_1) \right| &\leq m_2 \left| \frac{1}{\rho_{12}^3} - \frac{1}{\rho_{02}^3} \right| |P_1| |P_2| = \\ &= m_2 \left| \frac{1}{\rho_{12}} - \frac{1}{\rho_{02}} \right| \left| \frac{1}{\rho_{12}^2} + \frac{1}{\rho_{02}^2} + \frac{1}{\rho_{12} \rho_{02}} \right| |P_1| |P_2|, \end{aligned}$$

tener en cuenta que: $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$. Además, por ser: $\rho_{12} > \alpha$, resulta:

$$\frac{1}{\rho_{02}} < \frac{1}{\alpha}, \quad \text{y también} \quad \frac{1}{\rho_{12}} < \frac{1}{\alpha};$$

luego, el último miembro toma la forma:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} (P_1 \times \dot{P}_1) \right| &\leq 3 \frac{m_2}{\alpha^2} \left| \frac{1}{\rho_{12}} - \frac{1}{\rho_{02}} \right| |P_1| |P_2| = 3 \frac{m_2}{\alpha^2} \left| \frac{1}{|P_2 - P_1|} - \frac{1}{|P_2|} \right| |P_1| |P_2| = \\ &= 3 \frac{m_2}{\alpha^2} \frac{|P_2| - |P_2 - P_1|}{|P_2 - P_1| |P_2|} |P_1| |P_2| \leq 3 \frac{m_2}{\alpha^3} (|P_2| - |P_2 - P_1|) |P_1|. \end{aligned}$$

$$\left| \frac{d}{dt} (P_1 \times \dot{P}_1) \right| \leq 3 \frac{m_2}{\alpha^3} |P_1|^2, \quad \text{y por tanto:} \quad \boxed{\left| \frac{d}{dt} (P_1 \times \dot{P}_1) \right| \leq \text{Const. } P_1^2.}$$

donde: $\text{Const.} = 3 \frac{m_2}{\alpha^3} > 0$; y además,

$$\left. \begin{aligned} |P_1| = |P_2 - (P_2 - P_1)| &\geq |P_2| - |P_2 - P_1| \\ &\geq |P_2 - P_1| - |P_2| \end{aligned} \right\} \geq ||P_1| - |P_2 - P_1||$$

Definición: Diremos que en el problema de tres cuerpos, dos cualesquiera de ellos, por ejemplo m_0 y m_1 , tienen una colisión binaria en el instante t_c si:

Por una parte la distancia $|P_1|$ (ver Fig. 53) tiende a cero ($|P_1| \rightarrow 0$) para $t \rightarrow t_c$; y por otra parte, las distancias mutuas ρ_{02} y ρ_{12} se conservan acotadas inferiormente en cierto entorno del instante de colisión t_c ; luego $\rho_{02}, \rho_{12} > \alpha$.

Nos proponemos demostrar que en este caso se verifican las siguientes desigualdades:

$$1^\circ) \quad \left| P_1 \times \dot{P}_1 \right| \rightarrow 0, \quad \text{para } t \rightarrow t_0.$$

$$2^\circ) \quad \frac{1}{2} |P_1| \dot{P}_1^2 \rightarrow (m_0 + m_1), \quad \text{para } t \rightarrow t_0.$$

$$3^\circ) \quad \frac{d^2 \left(\frac{1}{2} P_1^2 \right)}{dt^2} |P_1| \rightarrow (m_0 + m_1), \quad \text{para } t \rightarrow t_0.$$

NOTA: $t_0 \equiv t_c$ (instante de colisión).

Si se cumple la segunda de estas desigualdades, resulta: $|\dot{P}_1|^2 = \dot{P}_1^2 \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow t_0$; por el contrario, si no tendiera a $+\infty$, entonces sería: $|\dot{P}_1|^2 \leq k$, $\therefore \frac{1}{2} |P_1| |\dot{P}_1|^2 \leq \frac{1}{2} |P_1| k \rightarrow 0$; lo cual contradice la segunda desigualdad. Por lo tanto, si se cumple esta desigualdad, se tiene:

$$|P_1| |\dot{P}_1| |\dot{P}_1| \leq M \Rightarrow |P_1| |\dot{P}_1| \leq \frac{M}{|\dot{P}_1|} \rightarrow 0; \text{ donde } M \text{ es una cota y recordar que } |\dot{P}_1| \rightarrow +\infty.$$

Luego, $|P_1| |\dot{P}_1| \rightarrow 0$, para $t \rightarrow t_0$, entonces $|P_1 \times \dot{P}_1| \leq |P_1| |\dot{P}_1| \rightarrow 0$, con lo cual se satisface la primera desigualdad.

Consideremos la tercera desigualdad. La ecuación de movimiento de m_1 perturbado por m_2 se puede escribir de la forma:

$$|P_1| \frac{d^2 \left(\frac{1}{2} P_1^2 \right)}{dt^2} - |P_1| \dot{P}_1^2 + \frac{(m_0 + m_1)}{|P_1|} |P_1| = (R \cdot P_1) |P_1| \rightarrow 0, \text{ para: } t \rightarrow t_0.$$

En consecuencia, se satisfacen las tres desigualdades enunciadas.

NOTA: Recomendamos, para un estudio más detallado sobre la solución general del problema de tres cuerpos, dos publicaciones de mi Profesor el Dr. R. P. Cesco, la primera: 1961, “*Some Theorems and Results in the three-Body Problem*”, Proceedings of the International Meeting on Problems of Astrometry and Celestial Mechanics, Observatorio Astronómico UNLP, págs. 81-92; y la segunda: 1963, “*Sobre la Solución General del Problema de los Tres Cuerpos*”; Serie Astronómica, Tomo XXV, N° 4, Observatorio Astronómico de la UNLP.

Conclusiones sobre la solución “*función teórica*” del problema de tres cuerpos propuesta por Sundman en una serie de publicaciones aparecidas en Acta Soc. Sc. Fennicae y reproducidas en Acta Matemática 36, pág. 105, 1913.

A partir de los resultados mencionados citaremos los cinco más importantes.

1°). La generalización para el sistema de ED del problema de tres cuerpos, respecto de la propiedad de las ED lineales, en virtud de la cual el único punto singular posible de la solución deben ser puntos singulares de las ecuaciones, pero no recíprocamente.

2°). Si la solución del sistema de ED tiene una singularidad en el instante $t = t_0$ entonces, la función $r = \text{Mín}(r_{12}, r_{23}, r_{13})$ debe tender a cero cuando $t \rightarrow t_0$; donde las funciones $r_{\mu\nu}$ representan las distancias mutuas. Luego, se deduce una condición para las colisiones y el siguiente teorema: *para que se produzca una colisión simultánea es necesario que el vector momento angular sea nulo, $\mathbf{C} = 0$.*

3°). En el caso de una colisión binaria, la variable independiente τ , definida como:

$$\tau = \int_{t_0}^t \frac{dt}{r}; \text{ regulariza las ED del movimiento siendo la integral convergente.}$$

4°). Teorema fundamental: *Si el vector momento angular \mathbf{C} no es igual a cero entonces, las coordenadas y el tiempo son funciones analíticas de la variable de regularización τ , denominada el pseudo-tiempo, en toda una franja infinita del plano complejo τ , definida por $-\infty < \text{Re}(\tau) < \infty$ y $|\text{Im}(\tau)| < \delta$, donde δ depende sólo de las masas y las condiciones iniciales.*

5°). La *definición* de una prolongación analítica real del movimiento después del instante de una colisión binaria, con una “precisa” diferencia entre las trayectorias de colisión, i.e. las trayectorias antes de las colisiones y las trayectorias de “eyección”, es decir, las trayectorias después de la colisión. Además, se demuestra que los sucesivos instantes $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ de las colisiones binarias no pueden agruparse en un instante finito t^* es decir, si la secuencia de tales datos es infinita entonces se tiene que: $t^* = \lim_{v \rightarrow \infty} t_v \Rightarrow \infty$.

Finalmente Sundman desarrolló, mediante transformaciones de Poincaré, una representación conforme de la franja mencionada anteriormente, del plano- τ en un círculo unidad en otro plano- ω . Mediante esta transformación Sundman formuló la solución de este problema es decir, las coordenadas y el tiempo en series de potencias de ω convergentes en un círculo de radio unidad $|\omega| < 1$ correspondiente al intervalo $|\text{Re}(\omega)| < 1$ del eje real $-\infty < t < +\infty$.

En el trabajo citado el Dr. Cesco pregunta: ¿Cuáles son las razones por las cuales estos resultados “tan elegantes” de Sundman, donde las investigaciones de los mas célebres astrónomos y matemáticos fracasaron durante casi dos siglos, han sido solo conocidos, como dijo Siegel¹, por un pequeño círculo, a pesar de las simplificaciones señaladas por Levi-Civita, Hadamard, Birkoff y otros?

Esta pregunta está relacionada con la escéptica mirada sostenida por la mayoría de los astrónomos, basada en ciertos cálculos de Belorizky según los cuales las clásicas series divergentes son, para propósitos prácticos, más útiles que las series convergentes dadas por Sundman².

¹ Siegel, C. L.; 1956, “Vorlesungen über Himmelsmechanik”, Ed. Springer-Verlag.

² Chazy, J.; 1952, “L’intégration du problème des trios corps par Sundman, et ses conséquences”, Bulletin Astronomique, XVI, pág. 177.

Los argumentos utilizados por Belorizky ¹ en sus cálculos no son, sin embargo, muy convincentes a causa de:

1º). En vez de analizar la convergencia de las series de Sundman en la franja del plano- τ , Belorizky estudió las series obtenidas aplicando la transformación de Poincaré, demostrando realmente que esta transformación es completamente innecesaria para la solución numérica del problema de tres cuerpos.

2º). Puesto que en el ejemplo usado por Belorizky, una solución particular equilátera de Lagrange, las colisiones binarias no pueden ocurrir, entonces el uso de la variable de regularización es innecesario. Belorizky encontró, para este caso, que la variable de regularización es de la forma $\tau = A t$ (A es una constante) así como también que las series de potencias en τ son tan rápidamente convergentes como el desarrollo en serie de Taylor de la función: $\sin(A^{-1} \tau)$.

Teorema de Sundman para un colapso total. Analizaremos en esta sección la posibilidad que el sistema de partículas “sufra un colapso total”; significa que todas las partículas pueden colisionar simultáneamente para un tiempo finito o infinito.

Consideremos las expresiones:

$$M I = m_0 m_1 (R_1 - R_2)^2 + m_1 m_2 (R_2 - R_3)^2 + m_0 m_2 (R_1 - R_3)^2$$

$$2 M T = m_0 m_1 (\dot{R}_1 - \dot{R}_2)^2 + m_1 m_2 (\dot{R}_2 - \dot{R}_3)^2 + m_0 m_2 (\dot{R}_1 - \dot{R}_3)^2,$$

(ver (9.15a) y (9.16) pág. 258). Recordar que R_i ($i = 1,2,3$) representa los vectores de posición baricéntricos de los puntos masa m_i . Además la igualdad escalar: $\dot{g} = R \dot{P}_1$, [ver (9.18b), pág. 261]

donde $\frac{1}{2} \dot{P}_1^2 - \frac{(m_0 + m_1)}{|P_1|} = g$, siendo P_1 el vector posición de m_1 respecto de la masa m_0 , en el sistema de coordenadas heliocéntrico, donde m_0 es fijo (Sol), y R es la función perturbadora definida, para el caso de tres cuerpos, como:

$$R = m_2 \left(\frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|^3} - \frac{P_2}{|P_2|^3} \right).$$

También hemos demostrado, segunda desigualdad pág. 264, que

$$\frac{1}{2} |P_1| \dot{P}_1^2 \Rightarrow (m_0 + m_1), \text{ cuando } t \rightarrow t_c; \text{ con lo cual se cumple que:}$$

$$|\dot{P}_1| < \frac{k}{\sqrt{|P_1|}}.$$

En consecuencia nos falta demostrar que: $|R| \Rightarrow 0$, lo cual implica: $|R| < k_1 |P_1|$.

¹ Belorizky, D.; 1933, “Recherches sur l’application pratique des solutions générales du problème des trois corps”, Journal des Observateurs, XVI, pág. 109.

Demostración: $|R \dot{P}_1| \leq |R| |\dot{P}_1| < k_1 |P_1| \frac{k}{\sqrt{|P_1|}} = k k_1 \frac{|P_1|}{\sqrt{|P_1|}} = C \sqrt{|P_1|} \Rightarrow 0$.

Por lo tanto, $|R \dot{P}_1| \Rightarrow 0$ para $t \rightarrow t_c$, c.q.d.

Por otra parte, de acuerdo a la definición de la función perturbadora R podemos escribir:

$$\begin{aligned} |R| &= m_2 \left| \left(\frac{1}{|P_2 - P_1|^3} - \frac{1}{|P_2|^3} \right) P_2 - \frac{P_1}{|P_2 - P_1|^3} \right| \leq \\ &\leq m_2 \left(\left| \frac{1}{|P_2 - P_1|^3} - \frac{1}{|P_2|^3} \right| |P_2| + \frac{|P_1|}{|P_2 - P_1|^3} \right) = \\ &= m_2 \left| \frac{1}{|P_2 - P_1|} - \frac{1}{|P_2|} \right| \left(\frac{1}{|P_2 - P_1|^2} + \frac{1}{|P_2|^2} + \frac{1}{|P_2 - P_1| |P_2|} \right) |P_2| + \\ &\quad + \frac{m_2}{|P_2 - P_1|^3} |P_1|. \end{aligned}$$

Recordemos que (ver pág. 263):

$$\frac{1}{|P_2 - P_1|^2} < \frac{1}{\alpha^2}; \quad \frac{1}{|P_2|^2} < \frac{1}{\alpha^2}; \quad \frac{1}{|P_2 - P_1| |P_2|} < \frac{1}{\alpha^2}; \quad \frac{1}{|P_2 - P_1|^3} < \frac{1}{\alpha^3},$$

siendo α una constante. Además, por definición de colisión binaria se tiene:

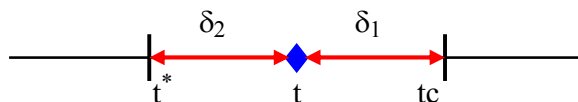
$$|P_1| \rightarrow 0, \text{ para } t \rightarrow t_c; \text{ y } |P_2 - P_1| > \alpha.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |R| &\leq \frac{3}{\alpha^2} m_2 \left| \frac{1}{|P_2 - P_1|} - \frac{1}{|P_2|} \right| |P_2| + \frac{m_2}{\alpha^3} |P_1| = \\ &= \frac{3 m_2}{\alpha^3} \left| \frac{|P_2| - |P_2 - P_1|}{|P_2 - P_1| |P_2|} \right| |P_1| + \frac{m_2}{\alpha^3} |P_1| < 4 \frac{m_2}{\alpha^3} |P_1| \end{aligned}$$

ya que podemos escribir: $|P_1| = |P_2 - (P_2 - P_1)| \geq |P_2| - |P_2 - P_1|$
 $\geq ||P_2| - |P_2 - P_1||$
 $\geq |P_2 - P_1| - |P_2|$

Luego, de acuerdo a la definición de \dot{g} (ecuación 9.18b), queda demostrado que $\dot{g} \rightarrow 0$ para $t \rightarrow t_c$ entonces, nos queda por demostrar que g tiende a un límite finito; en consecuencia si $\dot{g} \rightarrow 0$ resulta que $g \rightarrow l$ para $t \rightarrow t_c$. Gráficamente significa:



Demostración: Por definición $\int_{t^*}^t \dot{g} dt = g(t) - g(t^*)$; entonces $|g(t) - g(t^*)| = \left| \int_{t^*}^t \dot{g} dt \right| \leq \int_{t^*}^t |\dot{g}| dt$,

además hemos estudiado que $\dot{g} \rightarrow 0$ para $t \rightarrow t_c$; de modo que si t y t^* están muy próximos a t_c resulta:

$$\int_{t^*}^t |\dot{g}| dt < \varepsilon |t - t^*|, \text{ ya que } |g(t) - g(t^*)| < \varepsilon |t - t^*| \text{ y por tanto implica que: } \begin{cases} |t - t_c| < \delta_1 \\ |t^* - t| < \delta_2 \end{cases}$$

Luego resulta: $\lim_{t \rightarrow t_c} g(t) = l$ (límite finito) y por tanto se cumple que:

$$\frac{1}{2} |P_1| \dot{P}_1^2 \Rightarrow (m_0 + m_1), \text{ cuando } t \rightarrow t_c.$$

Vamos a analizar ahora: La variable de regularización de Sundman-Levi Civita ¹.

Sea $|P_1| = r$ para $t \rightarrow t_c$; luego, la expresión asintótica: $|P_1| \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} P_1^2 \right) \sim (m_0 + m_1)$ tiene la forma:

$$r \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) = (m_0 + m_1).$$

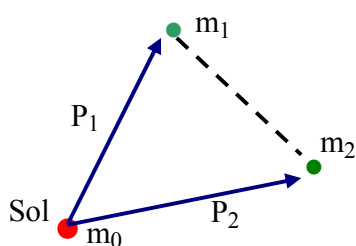


Fig. 54. Configuración del problema de tres cuerpos. m_0 representa el Sol. P_1 y P_2 determinan las distancias heliocéntricas a m_1 y m_2 .

Entonces podemos desarrollar la ED de la forma:

$$\frac{1}{2} r \frac{d^2}{dt^2} (r^2) = \frac{1}{2} r \frac{d}{dt} \left(\frac{dr^2}{dt} \right) = \frac{1}{2} r \frac{d}{dr} \left(\frac{dr^2}{dt} \right) \frac{dr}{dt}$$

pero $\frac{1}{2} r \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4} \frac{dr^2}{dt}$ entonces se tiene:

$$\frac{1}{4} \frac{dr^2}{dt} \frac{d}{dr} \left(\frac{dr^2}{dt} \right) = \frac{1}{8} \frac{d}{dr} \left(\frac{dr^2}{dt} \right)^2 = (m_0 + m_1),$$

por lo tanto: $\frac{d}{dr} \left(\frac{dr^2}{dt} \right)^2 = 8 (m_0 + m_1).$

Entonces, despejando: $d \left(\frac{dr^2}{dt} \right)^2 = 8 (m_0 + m_1) dr$; e integrando en ambos miembros resulta:

¹ Belbruno, Edward; 2004, "Capture Dynamics and Chaotic Motions in Celestial Mechanics", Princeton University Press.

$\left(\frac{dr^2}{dt}\right)^2 = 8(m_0 + m_1)r$; también podemos expresar esta ecuación de la forma:

$$\frac{dr^2}{dt} = k\sqrt{r}; \text{ donde } k = \sqrt{8(m_0 + m_1)}$$

pero $\frac{dr^2}{\sqrt{r}} = 2r \frac{dr}{\sqrt{r}} = 2\sqrt{r} dr$, luego reemplazando resulta: $\frac{dr^2}{\sqrt{r}} = 2\sqrt{r} dr = k dt$, (a)

NOTA: recordar que: $\int x^n dx = \frac{1}{(n+1)} x^{n+1} \Rightarrow d\left(\frac{1}{(n+1)} x^{n+1}\right) = x^n dx$.

Entonces, integrando en ambos miembros de (a), entre t y t_c , se tiene:

$$2 \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} r^{\frac{3}{2}} = k(t - t_c) \Rightarrow r^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} k(t - t_c) \Rightarrow r = k_1(t - t_c)^{2/3},$$

Este resultado indica que r es proporcional a: $t^{2/3}$; donde: $k_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} [8(m_0 + m_1)]^{\frac{1}{3}}$. Luego,

$$r = k_1(t - t_c)^{2/3}$$

Por lo tanto, la distancia entre las masas m_0 y m_1 , próximas a una colisión, es proporcional a $(t - t_c)^{2/3}$ entonces, estamos ahora en condiciones de demostrar que la variable de regularización de Sundman-Levi Civita esta definida, en el caso de colisiones binarias, por la expresión:

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{r}$$

Y nos proponemos demostrar que:

$$\lim_{t \rightarrow t_c} \tau \Rightarrow \text{número finito.}$$

es decir, significa que τ esta acotado. La variable τ es un pseudo-tiempo.

Para demostrar este teorema analicemos la integral:

$$\int_0^{t_c} \frac{dt}{r} = \lim_{t^* \rightarrow t_c} \int_0^{t^*} \frac{dt}{r} = \int_0^{t^*} \frac{dt}{r} + \int_{t^*}^{t_c} \frac{dt}{r}.$$

Notar que $\int_0^{t^*} \frac{dt}{r}$ para t^* distinto de t_c existe y esta acotada; por lo tanto, solo nos resta probar que la segunda integral tiende un limite finito.

$$\int_{t^*}^{t_c} \frac{dt}{r} \sim \int_{t^*}^{t_c} \frac{dt}{k_1 (t-t_c)^{2/3}} = \frac{1}{k_1} \int_{t^*}^{t_c} \frac{dt}{(t-t_c)^{2/3}} = 3 \frac{1}{k_1} |t-t_c|^{1/3} \Big|_{t^*}^{t_c} \Rightarrow \text{tiende a un limite}$$

finito. Luego, la integral $\int_0^{t_c} \frac{dt}{r}$ existe.

Coordenadas de Jacobi.

Introduzcamos ahora las coordenadas de Jacobi ¹ en las ED de movimiento de los tres cuerpo; el gráfico, ver Figura 55, representa las coordenadas de Jacobi. Sea P_1 el vector posición de m_1 respecto de m_0 y P el vector posición de m_2 respecto del baricentro G de las masas m_0 y m_1 .

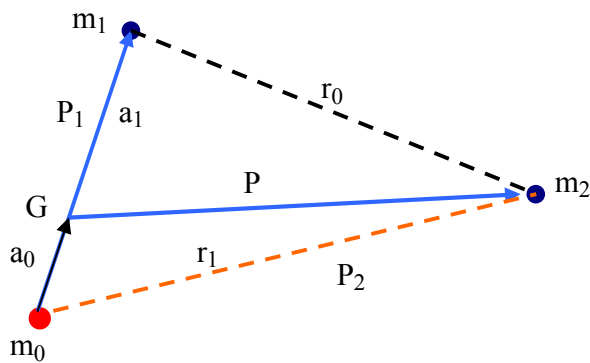


Fig. 55. Sistema de coordenadas de Jacobi. El vector P_1 es la posición de m_1 respecto de m_0 y P el vector posición de m_2 respecto del centro de masa G de m_0 y m_1 .

Los vectores P_1 y P definen las coordenadas de Jacobi; P_1 representa la posición de la masa m_1 respecto de m_0 y P la posición de m_2 respecto del centro de masa G de m_0 y m_1 . La posición del centro de masa G respecto de m_0 es a_0 y la posición de m_1 respecto de G es a_1 luego, $a_0 + a_1 = P_1$. Las ED de movimiento del problema de tres cuerpos en coordenadas heliocéntricas P_1 y P_2 en el plano, con $k^2 = 1$ (constante de Gauss) son:

$$\begin{cases} \ddot{P}_1 + \frac{(m_0 + m_1)}{|P_1|^3} P_1 = R^{(1)} \\ \ddot{P}_2 + \frac{(m_0 + m_2)}{|P_2|^3} P_2 = R^{(2)} \end{cases} \quad (9.20)$$

Donde $R^{(1)}$ y $R^{(2)}$ representan la función perturbadora definida por las expresiones:

$$R^{(1)} = m_2 \left(\frac{(P_2 - P_1)}{|P_2 - P_1|^3} - \frac{P_2}{|P_2|^3} \right)$$

$$R^{(2)} = m_1 \left(\frac{(P_1 - P_2)}{|P_2 - P_1|^3} - \frac{P_1}{|P_1|^3} \right)$$

¹ Consultar § 3.9, pág. 61.

Pollard, H.; 1966, "Mathematical Introduction to Celestial Mechanics" pag. 47.

Además, si indicamos con a_0 y a_1 la distancia de m_0 y m_1 al baricentro G , se tiene:

$$a_0 = \frac{m_1}{m_0 + m_1}, \quad a_1 = \frac{m_0}{m_0 + m_1};$$

donde: $a_0 + a_1 = 1$ para $t = 0$; definición válida para el instante inicial. Luego, para un instante t cualquiera resulta:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{m_0 G} &= a_0 P_1 = a_0 R \\ \overrightarrow{m_1 G} &= a_1 P_1 = a_1 R, \quad \text{donde } R \equiv P_1. \end{aligned}$$

además, si indicamos con: $r = |R| = |P_1|$; $r_1 = |P_2|$; $r_0 = |P_2 - P_1|$ para un instante t cualquiera entonces, el sistema de ED (9.20) se puede escribir de la forma:

$$\begin{cases} \ddot{R} + \frac{(m_0 + m_1)}{r^3} R = m_2 \left(\frac{P_2 - R}{r_0^3} - \frac{P_2}{r_1^3} \right) \\ \ddot{P}_2 + \frac{(m_0 + m_2)}{r_1^3} P_2 = m_1 \left(\frac{R - P_2}{r_0^3} - \frac{R}{r^3} \right) \end{cases} \quad (9.21)$$

Además, teniendo en cuenta la definición de las coordenadas de Jacobi, R y P , ver Figura 55, podemos eliminar la coordenada P_2 (sistema heliocéntrico) de la forma:

$$a_0 R + P = P_2 \Rightarrow P = P_2 - a_0 R \Rightarrow \ddot{P} = \ddot{P}_2 - a_0 \ddot{R}$$

donde las aceleraciones, en forma vectorial, \ddot{P}_2 y \ddot{R} están expresadas (o representadas) por el sistema de ED (9.21), reemplazando

$$\ddot{P}_2 = m_1 \left(\frac{R - (a_0 R + P)}{r_0^3} - \frac{R}{r^3} \right) - \frac{(m_0 + m_2)}{r_1^3} (a_0 R + P),$$

desarrollando el primer término del segundo miembro: $R - a_0 R = (1 - a_0) R = a_1 R$, reemplazando resulta:

$$\ddot{P}_2 = m_1 \left(\frac{a_1 R}{r_0^3} - \frac{P}{r_0^3} - \frac{R}{r^3} \right) - \frac{(m_0 + m_2)}{r_1^3} (a_0 R + P)$$

agrupamos ahora según los vectores R y P , se tiene:

$$\ddot{P}_2 = m_1 \left(\frac{a_1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} - \frac{a_0 (m_0 + m_2)}{m_1 r_1^3} \right) R - \left(\frac{m_1}{r_0^3} + \frac{(m_0 + m_2)}{r_1^3} \right) P. \quad (I)$$

Ecuación diferencial de segundo orden que describe el movimiento de m_2 respecto de m_0 expresada en función de las coordenadas de Jacobi, definidas por P y R ¹.

¹ Recordar que el vector R (coordenadas de Jacobi) representa al vector P_1 (en coordenadas Heliocéntricas).

Analicemos la ecuación de movimiento de m_1 respecto de m_0 definida por la primera ED del sistema (9.21):

$$\ddot{\mathbf{R}} = m_2 \left[\frac{(a_0 \mathbf{R} + \mathbf{P} - \mathbf{R})}{r_0^3} - \frac{(a_0 \mathbf{R} + \mathbf{P})}{r_1^3} \right] - \frac{(m_0 + m_1)}{r^3} \mathbf{R};$$

donde hemos reemplazado la coordenada heliocéntrica \mathbf{P}_2 en función de las coordenadas de Jacobi \mathbf{P} y \mathbf{R} , luego:

$$\ddot{\mathbf{R}} = m_2 \left[\frac{(a_0 - 1)\mathbf{R} + \mathbf{P}}{r_0^3} - \frac{(a_0 \mathbf{R} + \mathbf{P})}{r_1^3} \right] - \frac{(m_0 + m_1)}{r^3} \mathbf{R},$$

multiplicando ambos miembros por a_0 , se tiene:

$$a_0 \ddot{\mathbf{R}} = a_0 m_2 \left[\frac{(a_0 - 1)\mathbf{R} + \mathbf{P}}{r_0^3} - \frac{(a_0 \mathbf{R} + \mathbf{P})}{r_1^3} \right] - a_0 \frac{(m_0 + m_1)}{r^3} \mathbf{R},$$

recordemos que: $a_0 = \frac{m_1}{(m_0 + m_1)}$, luego $a_0(m_0 + m_1) = m_1$ por lo tanto, el segundo término toma la

forma: $a_0 \frac{(m_0 + m_1)}{r^3} \mathbf{R} = \frac{m_1}{r^3} \mathbf{R}$, reemplazando se tiene:

$$a_0 \ddot{\mathbf{R}} = a_0 m_2 \left[\frac{(a_0 - 1)\mathbf{R} + \mathbf{P}}{r_0^3} - \frac{(a_0 \mathbf{R} + \mathbf{P})}{r_1^3} \right] - \frac{m_1}{r^3} \mathbf{R}. \quad (\text{II})$$

También hemos deducido que: $\ddot{\mathbf{P}} = \ddot{\mathbf{P}}_2 - a_0 \ddot{\mathbf{R}}$, expresión que relaciona la aceleración del vector heliocéntrico \mathbf{P}_2 con los vectores aceleración, en coordenadas de Jacobi, de \mathbf{R} y \mathbf{P} . Luego, si reemplazamos los desarrollos de $\ddot{\mathbf{P}}_2$ y $a_0 \ddot{\mathbf{R}}$ obtenidos previamente, ver Ecs. (I) y (II) resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{P}} = m_1 \left(\frac{a_1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} - \frac{a_0(m_0 + m_2)}{m_1 r_1^3} \right) \mathbf{R} - \left(\frac{m_1}{r_0^3} + \frac{(m_0 + m_2)}{r_1^3} \right) \mathbf{P} - \\ - a_0 m_2 \left[\frac{(a_0 - 1)\mathbf{R} + \mathbf{P}}{r_0^3} - \frac{(a_0 \mathbf{R} + \mathbf{P})}{r_1^3} \right] + \frac{m_1}{r^3} \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Notar que el término $\pm \frac{m_1}{r^3} \mathbf{R}$ se elimina (porqué?). Por lo tanto, cuando m_1 se aproxima a m_0 , es decir

cuando $r \rightarrow 0$, la ED de movimiento de m_1 o sea $\ddot{\mathbf{P}}$ no presenta singularidad; entonces, podemos escribir:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{P}}) = \vec{\mathbf{Q}}} \quad \text{Primera ecuación de Sundman} \quad (9.22)$$

Expresión que define la primera ecuación de Sundman cuando existe una aproximación entre dos cuerpos; notar que el vector \vec{Q} es combinación lineal de los vectores P y R y tiene la expresión:

$$\begin{aligned} \vec{Q} = m_1 \left(\frac{a_1}{r_0^3} - \frac{a_0(m_0+m_2)}{m_1 r_1^3} \right) \vec{R} - \left(\frac{m_1}{r_0^3} + \frac{(m_0+m_2)}{r_1^3} \right) \vec{P} - \\ - a_0 m_2 \left[\frac{(a_0-1)R+P}{r_0^3} - \frac{(a_0 R+P)}{r_1^3} \right]. \end{aligned} \quad (III)$$

Consideremos ahora la primera ecuación del sistema (9.21), pág. 271, reemplacemos P_2 por $P + a_0 R$ i.e., $P_2 = P + a_0 R$, luego resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{R} + \frac{(m_0+m_1)}{r^3} R = m_2 \left[\frac{a_0 R+P-R}{r_0^3} - \frac{a_0 R+P}{r_1^3} \right] = \\ = m_2 \left[\frac{(a_0-1)R+P}{r_0^3} - \frac{a_0 R+P}{r_1^3} \right] \end{aligned}$$

recordar que: $a_0 + a_1 = 1$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \ddot{R} + \frac{(m_0+m_1)}{r^3} R = m_2 \left[-\frac{a_1 R}{r_0^3} + \frac{P}{r_0^3} - \frac{a_0 R}{r_1^3} - \frac{P}{r_1^3} \right] = \\ = -m_2 \left(\frac{a_1}{r_0^3} + \frac{a_0}{r_1^3} \right) R + m_2 \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) P. \end{aligned}$$

entonces, podemos escribir que:

$$\ddot{R} + \frac{(m_0+m_1)}{r^3} R = \vec{S} \quad (9.23)$$

donde el vector \vec{S} es combinación lineal de los vectores \vec{R} y \vec{P} y tiene la forma:

$$S = m_2 \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) P - m_2 \left(\frac{a_1}{r_0^3} + \frac{a_0}{r_1^3} \right) R.$$

Por lo tanto, las ecuaciones (9.22) y (9.23) constituyen el sistema de ED de movimiento del problema de tres cuerpos en coordenadas de Jacobi ¹.

¹ Consultar: **Roy**, A. E.; 1978, "Orbital Motion", págs. 152-153 y 412-414.

Introducimos, ahora, una nueva variable independiente denominada el pseudo tiempo τ definido como: $\tau = \int_0^t \frac{dt}{r}$ por lo tanto: $d\tau = \frac{dt}{r}$; entonces para $t \rightarrow t_c$ resulta $r \rightarrow 0$ significa que hay una colisión; en consecuencia, la velocidad y la aceleración en función de la nueva variable independiente τ , resultan:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}. \quad (\text{a})$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right) \cdot \frac{d\tau}{dt} + \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\tau}{dt} \right) = \\ &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right) \cdot \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\tau}{dt} \right) = \frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} \cdot \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right), \end{aligned}$$

recordar que: $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{r}$, pero $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \dot{r}$, luego

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{r^2} \frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} - \frac{1}{r^2} \dot{r} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}. \quad (\text{b})$$

además, si definimos $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{x}'$ y $\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = \mathbf{x}''$, entonces la velocidad y aceleración en función de la nueva variable independiente τ resulta:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{1}{r} \mathbf{x}'.$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{r^2} \mathbf{x}'' - \frac{1}{r^2} \dot{r} \mathbf{x}'.$$

y por tanto, la ecuación (9.22), pág. 272, toma la forma: $\frac{1}{r} \frac{d}{d\tau} (\dot{\mathbf{P}}) = \vec{Q}$, luego

$$\boxed{\left(\dot{\mathbf{P}} \right)' = \frac{d}{d\tau} (\dot{\mathbf{P}}) = r \vec{Q}} \quad (9.24)$$

Expresión que define una función analítica, denominada *primera ecuación de Sundman*. Esta ED representa el movimiento de m_2 con respecto a G, centro de masa de m_0 y m_1 , en coordenadas de Jacobi en función de la variable independiente τ . Como vimos [ecuación (III) pág. 274] la función Q esta definida en términos de las coordenadas de Jacobi R y P.

Asimismo, de acuerdo a lo formulado en (b), resulta la siguiente expresión para $\ddot{\mathbf{R}}$:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \mathbf{R}}{d\tau^2} - \frac{1}{r^2} \dot{r} \frac{d\mathbf{R}}{d\tau}.$$

Recordar que esta derivada segunda representa la aceleración de m_1 respecto de m_0 en coordenadas de Jacobi. Luego, reemplazando en la ecuación (9.23) resulta:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d^2 \mathbf{R}}{d\tau^2} - \frac{\dot{r}}{r^2} \frac{d\mathbf{R}}{d\tau} + \frac{(m_0 + m_1)}{r^3} \mathbf{R} = \mathbf{S}$$

operando se tiene:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{d\tau^2} - \dot{r} \frac{d\mathbf{R}}{d\tau} + \frac{(m_0 + m_1)}{r} \mathbf{R} = r^2 \mathbf{S},$$

luego:

$$\boxed{\mathbf{R}'' = \dot{r} \mathbf{R}' - \frac{(m_0 + m_1)}{r} \mathbf{R} + r^2 \mathbf{S}. \quad (9.25)}$$

Segunda ecuación vectorial deducida por Sundman; es una ecuación diferencial de segundo orden que representa el movimiento de m_1 respecto de m_0 , en coordenadas de Jacobi ¹, perturbado por m_2 , la perturbación esta representada por el término que contiene a \mathbf{S} .

Por lo tanto, las ecuaciones (9.24) y (9.25) denominadas *ecuaciones de Sundman*, en forma vectorial, están expresadas en función de la nueva variable independiente τ , definida como el pseudo-tiempo; estas ecuaciones están regularizadas en el sentido que evitan la singularidad cuando $r \rightarrow 0$.

NOTA: Recomendamos para un estudio detallado sobre las ecuaciones de Sundman y Levi-Civita:

Cesco, R. P.; 1963, "Sobre la Solución General del Problema de los Tres Cuerpos", Serie Astronómica, Tomo XXV, N° 4. Observatorio Astronómico, UNLP.

Comentario: Una visión particular. El problema de los dos cuerpos es un modelo matemático que permite describir el movimiento de dos masas puntuales aisladas completamente i.e., no hay otros cuerpos que interactúen, lo cual significa no considerar otras posibles interacciones tales como las fuerzas electromagnéticas, fuerzas aerodinámicas (resistencia y sustentación), fuerzas de repulsión (presión de radiación), etc. Por lo tanto, no se tiene en cuenta otro tipo de variaciones o "alteraciones", sólo se consideran las fuerzas de atracción gravitacional; sin embargo, a pesar de la idealización del problema, su solución nos permite obtener resultados muy similares al problema real; los astrónomos utilizan frecuentemente esta solución para estudiar el movimiento de un planeta alrededor del Sol, de un satélite en torno de un planeta, o de estrellas binarias que giran respecto de su baricentro, etc. En otras palabras, los resultados obtenidos constituyen una buena aproximación al movimiento real del sistema.

¹ Consultar: **Laskar, J.**; 1989, "Systèmes de Variables et Eléments", págs. 72-77. Les Methodes Modernes de la Mecanique Celeste. Ed. Frontières.

Esto se debe a dos circunstancias: primero, que el problema de dos cuerpos genera ecuaciones diferenciales que son completamente integrables, es decir, las ecuaciones admiten una solución analítica y cerrada, lo cual es muy importante considerando que el problema de tres o más cuerpos no admite soluciones analíticas en forma cerrada; segundo, el problema de dos cuerpos constituye en sí una excelente aproximación para describir el movimiento en la mayoría de los cuerpos celestes, conocido como el problema de n-cuerpos. Por ejemplo, en el caso del Sistema Solar, al estudiar el movimiento de un cometa alrededor del Sol, se pueden aplicar los resultados del problema de dos cuerpos considerando que: entre el cometa y el Sol sólo hay vacío y que la única fuerza existente es la atracción gravitacional, admitiendo entonces que los restantes planetas no están presentes y que ambos objetos son perfectamente esféricos con distribución de masa uniforme entonces, es válida la teoría de la gravitación de Newton; estas suposiciones permiten una excelente aproximación para la predicción de la posición del cometa en función del tiempo, o al menos en una primera aproximación, pues en la realidad, conforme transcurre el tiempo la diferencia *observación menos calculo*, i.e., (O–C) comienza a hacerse cada vez mas grande y por tanto, el modelo lentamente empieza a arrojar resultados que no corresponden a la observación. La razón es evidente: los planetas existen y por tanto influyen gravitacionalmente sobre el cometa; la curvatura del espacio originada por la masa del Sol ocasiona ligeras perturbaciones en el movimiento del cometa; además, al pasar cerca del Sol, los cometas experimentan bruscas eyecciones de masa, convirtiéndose en esos instantes en objetos semi-autopropulsados, experimentando fuerzas semejantes a las que se generan en un cohete.

Resumiendo, se concluye que, estrictamente hablando, las trayectorias de los planetas alrededor del Sol no son elipses, pero que en primera aproximación si lo son. Además, en el caso de los planetas del Sistema Solar ocurre algo que es muy importante: casi toda la masa del Sistema esta concentrada en el Sol. El planeta de mayor masa es Júpiter, cuya valor es $\sim 10^{-3}$ la masa del Sol; por lo tanto, al considerar la masa total de los demás planetas ésta no llega a ser la masa de Júpiter. Este dato, en términos prácticos, significa que al estudiar del movimiento de un planeta cualquiera, de masa m , alrededor del Sol (con masa m_0), podemos emplear, en primera aproximación, los resultados del problema de los dos cuerpos, con lo que estaríamos suponiendo que los restantes planetas “casi” no influyen en el movimiento del planeta en consideración por ser la suma de las otras masas muy pequeñas con respecto a m_0 . Pero en periodos de tiempo muy grandes los planetas de masa m_i tienen un rol muy importante sobre el movimiento del planeta m , y decimos entonces que dichos planetas “perturban” a m . La elipse que describe la trayectoria, en el espacio, de dicho planeta seria “ligeramente diferente” en tamaño y orientación espacial con respecto al tiempo.

Consideremos el caso de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra; en este sistema hay que considerar la presencia del Sol, pues la atracción gravitacional de éste es significativa sobre el satélite. Este caso es un problema de tres cuerpos (si admitimos que la atracción gravitacional de los planetas cercanos es despreciable). El problema de los tres cuerpos se puede formular en función de ecuaciones diferenciales con origen espacial en el baricentro del sistema o con centro en uno de dichos cuerpos. Lo “desafortunado” es que desde los tiempos de Newton, quien fue el primero en tratar de encontrar la solución de dichas ecuaciones, nadie ha podido hallar una solución analítica *completamente general* y

cerrada del problema. Los astrónomos y matemáticos recurren entonces a métodos que consisten en “*soluciones aproximadas*”¹, las cuales se expresan en series infinitas y convergentes.

En el caso particular del estudio del movimiento de la Luna, un modo de abordar el problema consiste en considerarlo, en primera aproximación, como el de dos cuerpos (Tierra y Luna) anulando la presencia del Sol. El modelo propuesto es útil sólo para unos pocos días pues a medida que transcurre el tiempo es evidente que la teoría no coincide con la observación. Es obvio que el Sol influye gravitacionalmente sobre la Luna y en consecuencia interviene en la orientación y la forma de la órbita la cual varía progresivamente con el tiempo. Las técnicas matemáticas “de aproximación” tratan de tener en cuenta como es la perturbación del Sol sobre la Luna para todo t . Este es un proceso que involucra una cantidad importante de cálculos matemáticos y métodos numéricos.

El problema se dificulta aun mas cuando uno de los cuerpos tiene una gran aproximación con otro, entonces, este fenómeno se manifiesta en las ED presentando una singularidad cuyo significado físico es una colisión entre dos cuerpos. Por lo tanto, el estudio de las colisiones binarias también tiene gran importancia pues nos permite analizar el comportamiento de los cuerpos antes y después de tal aproximación o colisión. Para resolver este problema se introduce una nueva variable independiente la cual nos permite evitar la singularidad en las ecuaciones de movimiento y también ayuda a describir el movimiento de ambos cuerpos cuando existe una gran aproximación entre ellos.

Algunos conceptos y consideraciones: Hemos estudiado, en Capítulos anteriores, que el movimiento de tres cuerpos en el espacio euclidiano 3D tiene nueve grados de libertad y esta representado por un sistema de EDs de orden 18. Si consideramos el centro de masa de los tres cuerpos como el origen de coordenadas, las ecuaciones de movimiento se reducen a un orden 12, el cual se obtiene utilizando las 6 integrales del centro de masa. Asimismo, haciendo uso de las tres integrales del vector momento angular \mathbf{C} y la integral de la energía H (escalar) podemos reducir el orden del sistema de ED a ocho. Estas 10 integrales o constantes del movimiento se denominan *integrales de Euler*. Además de estas integrales conocidas están la eliminación del *nodo* (Ω) por el método de Jacobi y del tiempo t . Por lo tanto, el orden del sistema de EDs del movimiento puede ser reducido a 6. Vimos también, que las integrales *Eulerianas* son expresiones algebraicas con respecto a las coordenadas y los momentos (velocidades).

El método más elemental para resolver EDs consiste en hallar integrales primeras independientes y constantes en el tiempo, donde el número de las mismas es igual al orden de las EDs en cuestión. Por lo tanto, el estudio y análisis, en forma completa y cerrada, del problema de tres cuerpos requiere conocer seis integrales independientes más. Sin embargo, Bruns demostró que no existen otras integrales algebraicas además de las mencionadas. *Painlevé* amplió los conceptos de este teorema y fundamentó la no existencia de integrales algebraicas con respecto a los momentos solamente. En consecuencia, hallar más integrales no es posible. El procedimiento usual para resolver estas EDs es hacer uso de un proceso “no algebraico” de aproximaciones sucesivas denominado *teoría de perturbaciones* donde se considera que uno o dos de los cuerpos tienen masas muy pequeñas o despreciables. Entonces, el problema general de tres cuerpos, con masas finitas, se reduce a la solución de un “problema restringido” de tres cuerpos.

¹ *Szebehely, V.*; 1967, “*Theory of Orbits*”, Capítulos 1 y 2. Ed. Academic Press.

Sin embargo, la solución en serie de potencias de la función perturbadora y en series trigonométricas con funciones lineales del tiempo como argumento, utilizadas en la teoría de las perturbaciones ordinarias, no son uniformemente convergente y por lo tanto no representa la solución, aunque describen el comportamiento del movimiento para un intervalo de tiempo finito dentro del grado de exactitud de las observaciones realizadas, es decir, es “semi-convergente” en el sentido de *Poincaré*. Este método matemático es realmente eficiente para la predicción de las efemérides planetarias ¹.

Sin embargo, los astrónomos necesitan conocer la evolución dinámica de los cuerpos celestes para un intervalo de tiempo muy grande o predecir su posición en el futuro; entonces, puede ocurrir que dos o tres cuerpos colisionen entre sí o que los elementos orbitales varíen mucho con el tiempo y por tanto la configuración del sistema de tres cuerpos comienza a ser muy diferente; también puede suceder que uno o dos cuerpos se alejen indefinidamente o que estos cuerpos reproduzcan las mismas órbitas periódicamente o si ellos permanecen en un espacio acotado ocupando un volumen finito, limitando las dimensiones de las orbitas, este caso se conoce como *estabilidad en el sentido de Poisson*. Para resolver estos problemas los teoremas mencionados de Bruns y Poincaré no son aplicables y en cambio, los teoremas del “punto fijo” ² y el “teorema ergódico” en topología de Poincaré ³ permiten obtener mejor información sobre el comportamiento dinámico del movimiento, para un intervalo de tiempo muy prolongado. Por esta razón es que aparece la aproximación topológica, propuesta por Poincaré, como un modo de resolver el problema de tres cuerpos.

Regularización. Una función analítica y de x definida como $f(x, y) = 0$ no es, en general una función regular de x ; supongamos entonces que x es función de otra variable t , de modo que y se transforma en una función regular de t . Este proceso es denominado *regularización*, método que ha sido estudiado por Poincaré, Klein, Koebe y otros en el estudio de las funciones analíticas. El problema consiste en regularizar la función definida por las EDs. En este caso aparecen, además de las singularidades en las funciones desconocidas, en función de la variable independiente (en general dependen de t), las singularidades en las funciones incógnitas en función de las constantes de integración. Las primeras son denominadas singularidades “permanentes” y las últimas singularidades “móviles”.

Según el teorema de existencia de *Cauchy* respecto de la solución de una ED, si $f(x, y)$ es una función regular en los puntos $x = a$, $y = b$, entonces existe una integral $y(x)$, que es regular e igual a b en $x = a$, para la ED: $dy/dx = f(x, y)$.

En relación a las EDs de movimiento del problema de tres cuerpos, *Poincaré* obtuvo el siguiente resultado:

Sean T y U la energía cinética y la energía potencial del sistema de tres cuerpos y C el vector momento angular. Supongamos que las singularidades están definidas por la expresión $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$; donde $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ son las coordenadas de Jacobi de los puntos masa m_1 y m_2 y sea P el punto masa en movimiento. Entonces, ó bien P tiende a un punto definido por una distancia finita con una velocidad definida y finita, ó la menor de las cantidades $1/T$, $1/C$, y F tienden a cero cuando t tiende a un valor finito t_0 .

¹ Hagihara, Y.; 1960, Summer Institute in Dynamical Astronomy. Yale University Observatory

² Granas, A. & Dugundji, J.; 2003. “Fixed Point Theory”, Ed. Springer-Verlag.

³ “Dynamical Systems, Ergodic Theory and Applications”, Encyclopadia of Mathematical Sciences, Dynamical Systems II, Volume 2. Editores: J. Fröhlich, S.P. Novikov & D. Ruelle. Ed. Springer-Verlag, 2000.

Si el punto masa P tiene sólo puntos singulares aislados y U es una función uniforme de P y además, U/C^2 es menor que un valor definido por los valores mas grandes de C^2 , entonces P debe necesariamente tender a una posición limite definida cuando t tiende a t_0 . Asimismo, si las coordenadas son regulares entre dos líneas rectas paralelas a una distancia d sobre ambos lados del eje real en el plano complejo t , las coordenadas pueden ser desarrolladas dentro de un círculo de radio r en el plano complejo de U , tal que:

$$x = (1 - e^{\lambda t}) / (1 + e^{\lambda t}). \quad (a)$$

Por el contrario, si las coordenadas son regulares para valores reales de t , entonces las coordenadas se pueden desarrollar en series de polinomios, de la forma:

$$x_i(t) = P_0(t) + P_1(t) + \dots + P_n(t) + \dots \quad (b)$$

Las EDs del problema de tres cuerpos no son regulares, si y solo si cualquiera de las distancias r_0 , r_1 o r_2 (de m_0 , m_1 y m_2 , en coordenadas de Jacobi) o todas tienden a cero. Luego:

- (a) Si las tres distancias son mayores que un número positivo α , entonces las coordenadas pueden ser desarrolladas de la forma (a).
- (b) Si $\rho(t)$ es la menor de las tres distancias mutuas r_0 , r_1 , r_2 , y tampoco tienden a cero cuando $t \rightarrow \infty$, entonces el movimiento es regular para todo t y las coordenadas pueden ser desarrolladas en series de polinomios (b).
- (c) Si uno de los r_0 , r_1 , r_2 tiende a cero, es decir si dos de los tres cuerpos colisionan, entonces el movimiento puede ser “calculado” para todo t antes del instante de la colisión t_1 .

Por lo tanto, cual es la condición para que exista una colisión ?.

Painlevé demostró que las EDs debían ser trascendente i.e., no algebraica; y los requisitos son:

- (1) La condición explícita fue dada por *Levi-Civita* para el problema restringido de tres cuerpos.
- (2) Y por *Bisconcini*¹ para el problema general de tres cuerpos.
- (3) El problema fue resuelto en forma íntegra por *Sundman*². El demostró que la solución puede ser analíticamente continua después de la colisión si las tres componentes del vector momento angular C del sistema no es simultáneamente cero, entonces podemos asignar un limite inferior a las dos mayores de las tres distancias mutuas y , en tal caso las coordenadas y las distancias mutuas de los tres cuerpos y el tiempo se pueden desarrollar en series de potencias convergentes respecto de la *variable* τ .

Estas series convergentes representan el movimiento en su totalidad para todo valor de t , exista o no una colisión. Además, *Sundman* calculó el radio de convergencia de esta series y demostró que puede ocurrir una colisión simultanea de los tres cuerpos si y solo si las tres componentes del vector momento angular son simultáneamente nulas.

Con este trabajo, *Sundman* abrió una nueva era en la Mecánica Celeste Clásica.

¹ **Bisconcini**, G.; 1906, Acta Mathematica, pág. 49, N° 30.

² **Sundman**, K. F.; 1907, Acta Soc. Sci. Fennicae N° 34; 1908 N° 35 y 1912, “Memoire sur le probleme de trios corps, Acta Matematica” 36, págs. 105–179.

Para aquellos lectores que estén interesados en estos problemas de colisión recomendamos:

Sundman, K. F.: *Memoire sur le probleme de trois corps*, *Acta Mathematica* 36 (1912): 105–179.

Hagihara, Y.; 1960, “*Topological Approach to the Three Body Problem*”, Summer Institute in Dynamical Astronomy, Yale University Observatory.

El método de regularización, nociones.

Una característica importante de la ley de la gravitación de Newton es que la fuerza actuante entre las partículas tiende a infinito cuando la distancia entre ellas tiende a cero. Además, el concepto de “punto masa” es totalmente matemático y por tanto, en la práctica, las “singularidades” nunca se alcanzan, ya que las superficies de los cuerpos que colisionan tomarían contacto antes que esto ocurra. Sin embargo, cuando se realizan investigaciones ó trabajos numéricos es conveniente considerar los cuerpos celestes como puntos masa y las singularidades son entonces de gran importancia. Además, cuando un cuerpo se aproxima mucho a otro (por ejemplo, en el pericentro de una orbita muy excéntrica), la velocidad relativa se incrementa. Esta situación origina necesariamente una considerable reducción en la longitud del paso de integración utilizado en un proceso numérico. En general, son más útiles los métodos con paso de integración múltiple y más eficientes cuando el problema requiere solo un mínimo en la velocidad entonces, es necesario dividir en dos o duplicar el tamaño del paso tabular durante la integración numérica ¹.

Las singularidades que resultan de las colisiones de dos o más cuerpos, no son de carácter esencial y pueden ser eliminadas mediante la elección apropiada de la variable independiente, generalmente el tiempo. Este proceso es conocido como regularización. Es la diferencia que distingue un trabajo de investigación en Mecánica Celeste Clásica de uno sobre aplicaciones modernas; es probablemente el tema más importante para aquellos investigadores que trabajan en el campo de la dinámica espacial. Varios autores han dedicado tiempo y esfuerzo al estudio de este evento y particularmente *Victor Szebehely* ha dedicado un excelente libro al tratamiento de la regularización en el problema restringido de tres cuerpos ². También, se debe mencionar el libro de *Stiefel y Scheifele* ³ quienes desarrollaron en forma completa y extensa el proceso de linealización de las ecuaciones de movimiento así como también su regularización. El método consiste en reemplazar la variable física temporal t por un pseudo-tiempo ó tiempo ficticio τ definido como $dt = r^n d\tau$, donde n es un valor a determinar y r la distancia radial entre los centros de los dos cuerpos. NOTA: si $n = 1$ la variable τ es equivalente a la anomalía excéntrica y si $n = 2$, τ es equivalente a la anomalía verdadera.

Stiefel en 1970 ⁴ haciendo $n = 1$ y linealizando las ecuaciones de movimiento para el problema de dos-cuerpos halló, al comparar estos resultados con los métodos estándar, un aumento en la exactitud de los mismos obtenidos al regularizar las ecuaciones de movimiento. Este y otros resultados demuestran que el concepto de regularización es de gran importancia en la solución numérica de varios

¹ Recomendamos: **Vetterling**, W., **Teukolsky**, S., **Press**, W. & **Flannery**, B.; 1994, “*Numerical Recipes Example Book*” (Fortran). Ed. Cambridge University Press.

² **Szebehely**, V.; 1967, “*Theory of Orbits*”, Capitulo 3. Ed. Academic Press.

³ **Stiefel**, E. & **Scheifele**, G.; 1971, “*Linear and regular Celestial Mechanics*”, Ed. Springer-Verlag.

⁴ **Stiefel**, E.; 1970, *Celestial Mechanics* 2, pág. 274.

y distintos problemas en Mecánica Celesta. *Heggie*¹, en 1971, analizó también el método de regularización utilizando el potencial o la energía cinética como una función de regularización del tiempo, la cual resulta adecuada para sistemas de dos o más cuerpos. Para encuentros de dos cuerpos en línea recta no es tan útil como el método de regularización de *Kustaanheimo-Stiefel*², pero es más eficaz en situaciones más complejas. Además, *Lecar*³ señaló que la integración numérica de las EDs regularizadas emplea menos tiempo de cálculo, casi la mitad, cuando no se regularizan las ecuaciones de movimiento, para demostrarlo utilizó un sistema de 25 cuerpos.

El método de regularización propuesto y desarrollado por *Kustaanheimo-Stiefel*⁴ consiste en transformar las ecuaciones de movimiento; por ejemplo, en el caso del problema de dos cuerpos:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

donde el vector \vec{r} depende de las coordenadas $\{x, y, z\}$; entonces el sistema de EDs son regularizadas transformando el vector \vec{r} en otro vector $\vec{\rho}$ el cual depende de una nueva variable independiente τ definida por la relación:

$$\frac{dt}{d\tau} = r \tag{i}$$

luego, las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\frac{d^2 \rho}{d\tau^2} + \omega \rho = 0. \tag{ii}$$

Esta ecuación de movimiento no presenta una singularidad cuando $\vec{r} \rightarrow 0$. Ambas ecuaciones diferenciales (i) y (ii) representan el movimiento de dos cuerpos y están definidas como ecuaciones diferenciales lineales armónicas. Este método se puede aplicar al estudio de un movimiento perturbado, principalmente al problema de n-cuerpo en sistemas dinámicos estelares.

NOTA: Tanto μ como ω son constantes que dependen de las unidades de masa y distancia adoptadas. Sugerimos consultar el siguiente trabajo:

Waldvogel, J.; 2007, “*Fundamentals of Regularization in Celestial Mechanics and Linear Perturbation Theories*”. Seminar for Applied Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology ETH, CH-8092 Zurich.

¹ *Heggie*, D. C.; 1971, *Astrophysics Space Science*, 14, pág. 35.

² *Kustaanheimo*, P. & *Stiefel*, E.; 1965, “*Perturbation theory of Keplerian motion based on Spinor regularization*”, *J. Math.* 218, pág. 204.

³ *Lecar*, M.; 1968, “*Bulletin Astronomy*”, 3, pág. 91.

⁴ Conocido como transformación KS.

§ 9.7 Epílogo. La Mecánica Celeste no sólo es una rama de la Astronomía sino que está muy vinculada con la Mecánica Analítica, las Ecuaciones Diferenciales, las Series de Potencias o las Series Trigonómicas así como también de los Conceptos de la Física y tiene como objetivo primordial el estudio teórico y analítico del movimiento de los cuerpos celestes sometidos a los efectos de las fuerzas gravitacionales que ejercen estos cuerpos masivos entre ellos.

Los fundamentos de la Mecánica Celeste Clásica están basados en la Ley de la Gravitación Universal propuesto por *Isaac Newton* (1643-1727). Se inicia estudiando el problema de dos cuerpos conocido como el “*problema de Kepler*” y luego se amplía el conocimiento analizando el movimiento de los planetas alrededor de Sol, de los satélites naturales y el cálculo de las orbitas de cometas y asteroides entorno del Sol.

El primero en formular expresiones matemáticas relacionadas con el movimiento de los planetas fue *Johannes Kepler* (1571-1630) conocidas como las *leyes de Kepler* (Capítulo 1, pág.1), basándose básicamente en las observaciones de *Tycho Brahe* (1546-1601), las cuales le permitieron deducir las tres leyes que llevan su nombre y rigen el movimiento de los planetas en torno del Sol.

En consecuencia, la Mecánica Celeste tiene como objetivo el estudio y el análisis teórico y numérico de las ecuaciones de movimiento del problema de n-cuerpos ($n = 2, 3, \dots$) las cuales están basadas en los principios de la Mecánica Clásica; si bien ésta es una rama de la física que se sustenta de un sinnúmero de técnicas desarrolladas en campos como las ecuaciones diferenciales, la geometría diferencial, el análisis complejo y la topología, por mencionar algunas, el objetivo de estos apuntes es presentar y desarrollar matemáticamente las ideas fundamentales aplicando los principios básicos del Análisis Matemático, el Algebra Lineal y las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Un estudio completo del movimiento de los cuerpos celestes sometidos a las fuerzas actuantes en el universo requiere el conocimiento de: las fuerzas Newtonianas y relativistas debidas al Sol, planetas, satélites, asteroides; el efecto de la radiación solar; presión de radiación; efecto Poynting-Robertson; efecto Yarkovsky; sublimación de gases; la Interacción con el medio: viento solar y frenado gaseoso; Campos magnéticos: fuerzas de Lorente, Colisiones, etc.; con el Sol (o planeta) como masa puntual mas las perturbaciones.

Breve Reseña Histórica.

Kepler fue el primero en estudiar las leyes que describen las órbitas a partir de observaciones reales del movimiento de Marte apoyadas, en gran parte, en observaciones astronómicas realizadas por Tycho Brahe. Años después, Newton desarrolló su ley de gravitación basándose en el trabajo de Kepler. Introdujo la idea que el movimiento de los objetos celestes, como los planetas, el Sol y la Luna y el movimiento de objetos en la Tierra, como las manzanas que caen de un árbol, podían ser descritas por una misma ley física. En este sentido él unificó la dinámica celeste y terrestre y es por eso que su Ley de Gravitación se llama Universal. Utilizando la ley de Newton de la gravitación, se pueden demostrar las leyes de Kepler para el caso de una órbita circular. Las órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas involucran cálculos más complejos pero viables y de fácil desarrollo.

En el caso de la órbita de dos cuerpos aislados, por ejemplo el Sol y la Tierra (un modelo ideal), hallar la posición del planeta en su trayectoria, para un instante cualquiera, requiere conocer previamente la posición y velocidad de la Tierra en un instante inicial, se lo conoce como el problema de dos cuerpos y está totalmente resuelto es decir, hay un conjunto de fórmulas que permiten determinar la trayectoria. Si el número de cuerpos involucrados es tres o más el problema no está resuelto. La solución del problema de n-cuerpos conociendo sus posiciones, masas y velocidades, no está resuelto en la Mecánica Celeste (el problema consiste en hallar sus posiciones para un instante cualquiera). Sólo en determinadas simplificaciones y condiciones el problema tiene una solución particular. Así mismo, el movimiento de tres cuerpos solo se puede resolver en algunos casos especiales; por ejemplo, el movimiento de la Luna perturbado por el Sol y la Tierra representa la dificultad de este tipo de problema y fue una preocupación para muchos astrónomos durante siglos.

En resumen: la Mecánica Celeste es una rama de la Astronomía y la Dinámica que tiene por objetivo el estudio de los movimientos de los cuerpos celestes sometidos a los efectos gravitatorios que ejercen sobre él otros cuerpos celestes. Se utilizan los principios de la física conocidos como Mecánica Clásica (Ley de la Gravitación Universal de Isaac Newton). Estudia el movimiento de dos cuerpos, conocido como problema de Kepler, el movimiento de los planetas alrededor del Sol, de sus satélites y el cálculo de las órbitas de cometas y asteroides.

La Mecánica Celeste comenzó hace más de 300 años con la “Principia” de Isaac Newton en 1687. El nombre de "Mecánica Celeste" es más reciente. Newton sugirió que el campo de fuerzas debe ser denominado "mecánica racional." El término "dinámica" fue propuesto un siglo después por Gottfried Leibniz y Pierre-Simon Laplace propuso la expresión "Mecánica Celeste". Debemos destacar que estudios anteriores plantearon el problema de las posiciones planetarias y estos eran conocidos quizás hace 2000 años o más, por los astrónomos babilónicos.

LA GRECIA ANTIGUA.

Los “antiguos” filósofos griegos analizaron el movimiento de los cuerpos celestes y propusieron numerosas estructuras geométricas para comprender el movimiento de los planetas. Estos modelos utilizaban las relaciones entre el movimiento circular uniforme con centro en la tierra; los conceptos filosóficos de esa época son una prueba de los argumentos físicos sobre los movimientos circulares. Un referente de los antiguos astrónomos griegos es Aristarco de Samos, quien sugirió un modelo heliocéntrico del universo y trató de medir la distancia entre la Tierra y el Sol. En el siglo dos antes de Cristo el astrónomo babilónico Seleuco de Seleucia trató de probar esta teoría heliocéntrica a través de un razonamiento geométrico, el cual está relacionado con el fenómeno de las mareas. Él demostró correctamente que es causada por la atracción de la Luna y determinó que la altura de las mareas depende de la posición de la Luna con respecto al Sol. También pudo determinar los fundamentos en un modelo geométrico considerando la teoría heliocéntrica y desarrollar métodos para calcular las posiciones planetarias con este modelo, posiblemente utilizando métodos trigonométricos que estaban

disponibles en ese tiempo, años después los utilizo *Copérnico*. Además, en el siglo II, se fabricó la máquina *Antikythera*¹. Este instrumento calcula mecánicamente las posiciones de los cuerpos celestes "con referencia a la posición del observador en la superficie de la tierra".

CLAUDIO PTOLOMEO.

Claudio Ptolomeo astrónomo, astrólogo, geógrafo y matemático greco-egipcio, nació próximo al año 100 después de Cristo, en los comienzos del Imperio Romano. Escribió varios libros sobre astronomía; el más importante de ellos fue el *Almagesto* (siglo II d. C.) el cual sigue siendo el libro más importante en la "astronomía geométrica", pronosticando muchos eventos astronómicos. Ptolomeo divulgó los conceptos astronómicos formulados por sus antecesores griegos, principalmente Hiparco, El catálogo de estrellas de Hiparco se puede hallar en el *Almagesto* de Ptolomeo, libro VII y VIII. Aunque Ptolomeo afirmaba ser el autor, muchas evidencias indican que Hiparco fue su verdadero creador. El catálogo contiene las posiciones de 850 estrellas en 48 constelaciones. Las posiciones de las estrellas están dadas en coordenadas eclípticas "universales" y parecen estar relacionadas directa o indirectamente con los datos y parámetros obtenidos por los astrónomos babilonios. Aunque Ptolomeo se basó principalmente en el trabajo de Hiparco, propuso una idea, el "equant", que parece ser adecuada, ya que mejoró considerablemente la precisión en las posiciones "pronosticadas" de los planetas. Aunque el modelo del *Almagesto* es de gran precisión, el mismo se basó únicamente en principios y modelos geométricos. En su estudio e investigación planetaria Ptolomeo propuso una estructura física del universo así como también las causas de los movimientos de los cuerpos celestes.

JOHANNES KEPLER.

Johannes Kepler fue el primero en relacionar exactamente la astronomía geométrica predecible, que había sido fundamental desde Ptolomeo a Copérnico, con los conceptos físicos para construir una nueva astronomía, basada en los procesos físicos celestes. Sus investigaciones permitieron predecir las leyes modernas que gobiernan las órbitas planetarias, el cual desarrolló con los principios físicos y las observaciones planetarias hechas por Tycho Brahe. El modelo de Kepler mejoró fundamentalmente la precisión en las predicciones del movimiento planetario, años antes que Isaac Newton desarrollara su ley de la gravitación. Esto permitió que las leyes de Kepler, del movimiento planetario, dieran lugar a un estudio más detallado del Sistema Solar y su comportamiento dinámico.

ISAAC NEWTON.

A Isaac Newton se le atribuye introducir la idea que el movimiento de los objetos en el espacio, como los planetas, el Sol y la Luna, y el movimiento de los objetos en la Tierra como las balas de cañón y las manzanas que caen del árbol, se podían describir por el mismo concepto físico. En este sentido Newton unificó la dinámica celeste y terrestre. Usando la ley de Newton de la gravitación universal se puede probar las leyes de Kepler, para el caso de una órbita circular es simple. Para órbitas elípticas implican cálculos más complejos, lo que Newton incluyó en su *Principia*.

¹ **Antikythera:** El dispositivo **Antikythera** es la computadora analógica de la antigüedad diseñada para predecir las posiciones de los astros y los eclipses (hasta diecinueve años) con aplicaciones a la astrología y al calendario y pronosticar también la fecha exacta de los eclipses.

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE.

Después de Newton, Joseph Louis Lagrange [25/I/1736 Turín, Italia; 10/IV/1813 París, Francia] físico, matemático y astrónomo italiano naturalizado francés, intentó resolver el problema de los tres cuerpos, analizó la estabilidad de las órbitas planetarias y descubrió la existencia de los puntos de “Lagrange” (puntos de equilibrio). También reformuló los principios de la *mecánica clásica*, haciendo hincapié en la energía más que en la fuerza y desarrolló un método para utilizar una sola ecuación en coordenadas polares para describir cualquier órbita, incluso aquellos que son parabólica e hiperbólica. Esto es útil para evaluar el comportamiento de los planetas y cometas y otros objetos, también es muy útil para el cálculo de trayectorias espaciales.

SIMON NEWCOMB.

Simon Newcomb fue un astrónomo canadiense-estadounidense que revisó la tabla de posiciones lunares de Peter Andreas Hansen. En 1877, ayudado por George William Hill, vuelve a calcular todas las “principales constantes astronómicas”. A partir de 1884, proyectó con el astrónomo irlandés A. M. W. Downing un plan para resolver la gran confusión internacional sobre este tema. En 1886 asistió a una conferencia de normalización de constantes en París, el consenso internacional es que todas las efemérides deberían basarse en los cálculos realizados por Newcomb. En una nueva conferencia internacional realizada 1950 se ratificó las constantes de Newcomb como estándar internacional.

ALBERT EINSTEIN.

Albert Einstein demuestra la presesión anómala del perihelio de Mercurio en un artículo publicado en 1916, basado en el postulado que la gravedad no es una fuerza sino un campo creado por la presencia de una masa en el espacio-tiempo: la Teoría General de la Relatividad. Esto motivo que los astrónomos reconocieran que la mecánica newtoniana no proporciona la máxima precisión. En 1974 se observaron pulsares binarios cuyas órbitas no sólo requiere el uso de la relatividad general para su explicación, sino que también su evolución demuestra la existencia de la radiación gravitacional. En 1921 obtuvo el Premio Nobel de Física.

BIBLIOGRAFIA Recomendada.

“*An Elementary Treatise on the Lunar Theory*”, **H. Godfray** (Macmillan, London UK, 1853).

“*An Introductory Treatise on the Lunar Theory*”, **E.W. Brown** (Cambridge University Press, Cambridge UK, 1896).

“*Lectures on the Lunar Theory*”, **J.C. Adams** (Cambridge University Press, Cambridge UK, 1900)

“*An Introduction to Celestial Mechanics*”, **F.R. Moulton**, 2nd Revised Edition (Macmillan, New York NY, 1914).

“*Dynamics*”, **H. Lamb**, 2nd Edition (Cambridge University Press, Cambridge UK, 1923).

“*Celestial Mechanics*”, **W.M. Smart** (Longmans, London UK, 1953).

“*An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*”, **H.C. Plummer** (Dover, New York NY, 1960)

“*Methods of Celestial Mechanics*”, **D. Brouwer**, and **G.M. Clemence** (Academic Press, New York NY, 1961).

“*Orbital Motion*”, **A.E. Roy** (Wiley, New York NY, 1978).

“*Solar System Dynamics*”, **C.D. Murray** and **S.F. Dermott** (Cambridge University Press, Cambridge UK, 1999).

Bibliografía.

- Apostol**, T. M.; 2006, “*Calculus*”, Ed. Reverté.
- Arnold**, V. I.; 1989, “*Mathematical Methods of Celestial Mechanics*”, Ed. Springer-Verlag.
- Arnold**, V. I.; 1987, “*Dynamical Systems III*”, Ed. Springer-Verlag.
- Arnold**, V., **Kozlov**, V., **Neishtadt**, A.; 2006, “*Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*”. Ed. Springer-Verlag.
- Balanzat**, M.; 1994, “*Matemática avanzada para la física*”, Ed. Eudeba.
- Barrow-Green**, J.; 1997, “*Poincaré and the Three Body Problem*”. History of Mathematics, Vol. 11. Ed. American Mathematical Society.
- Belbruno**, E.; 2004, “*Capture Dynamics and Chaotic Motion in Celestial Mechanics*”, Ed. Princeton University Press.
- Bhatia**, N. P. & **Szegö**, G. P.; 1970, “*Stability of Dynamical Systems*”, Ed. Springer-Verlag.
- Brouwer**, D. & **Clemence**, G.; 1961, “*Methods of Celestial Mechanics*”, Ed. Academic Press Inc.
- Brumberg**, V. H.; 1974, “*An Iterative Method of General Planetary Theory*”, págs. 139-155. Proceeding of the International Astronomical Union.
- Brown**, E. W.: 1960, “*An Introductory Treatise on the Lunar Theory*”, Ed. Dover Publications.
- Bruns**, H.; 1887, “*Über die Integrale des Vielkörper-Problems*”, Acta Mathematica, Vol. XI.
- Boccaletti**, D. & **Pucacco**, G.; 2004, “*Theory of Orbits*”. Ed. Springer.
- Courant**, R & **Hilbert**, D; 1964, “*Methods of Mathematical Physics*”, Vol. II. SIAM Review.
- Danby**, J.M.A.; 1992. “*Fundamentals of Celestial Mechanics*”. Ed. Willmann-Bell Inc.
- Duriez**, Luc; 1992, “*Le développement de la fonction perturbatrice*”, pag. 35-92. “Modern Methods In Celestial Mechanics” Editores Benest, D. et Froeschle, C.; Ed. Editions Frontières.
- Dvorak**, R.; 1989, “*Intégrabilité du Problème Restreint Elliptique*”. Benest & Froeschle (eds.), Les Méthodes Modernes de la Mécanique Céleste, (Goutelas).
- Fitzpatrick**, R.; 2012, “*An introduction to Celestial Mechanics*”, Ed. Cambridge University Press
- Goldstein**, H.; 1987, “*Mecánica Clásica*”. Ed. Reverté.
- Hill**, G. W.; 1877, “*On the part of the motion of the Lunar perigee which is a function of the mean motion of the Sun and Moon*”, Ed. Cambridge U.S.A.
- Lagrange**, J. L.; 1873, “*Collected Works*”, Paris, Gauthier-Villars, Vol. VI.
- Landau**, L. D. & **Lifshitz**, M.; 1969, “*Mechanics*”, Ed. Pergamon Press Ltd.
- López García**, F.; 2004, “*Introducción a la Dinámica del Sistema Solar*”. Ed. FCEFYN, UNSJ.
- López García**, F.; 2008, “*Curso Análisis Matemática III*”, Capítulo 10, Ed. FCEFYN, UNSJ.

- Marchal, C.;** 1990, "*The Three-Body Problem*", Ed. Elsevier.
- Marion, J. B.;** 1998, "*Dinámica clásica de las partículas y sistemas*". Ed. Reverté.
- MacMillan, W. D.;** 1936, "*Dynamics of Rigid Bodies*", Ed. Dover Publications.
- Marsden, J. E. & Ratiu, T. S.;** 1999, "Introduction to Mechanics and Symmetry", Ed. Springer-Verlag.
- McCuskey, S. W.;** 1963, "*Introduction to Celestial Mechanics*", Ed. Addison-Wesley.
- Meyer, K. R.;** 1999, "*Periodic Solutions of the N-Body Problem*", Ed. Springer-Verlag.
- Meyer, K. R., Hall, G. R., Offin, D.;** 2009, "*Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*", Ed. Springer.
- Michavila, F. & Gavete, L.;** 1992, "Programación y Cálculo Numérico" Ed. Reverté.
- Morbidelli, A.;** 2002, "*Modern Celestial Mechanics*", Ed. Taylor & Francis
- Moulton, F. R.;** 1970, "*An Introduction to Celestial Mechanics*", Ed. Dover Publications, Inc.
- Moulton, F. R.;** 1970, "*An Introduction to Celestial Mechanics*", Ed. Dover Publications, Inc.
- Murray, C. D. & Dermott, S. F.;** 2001, "*Solar System Dynamics*", Ed. Cambridge University Press
- Plummer, H. C.;** 1960, "*An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*", Ed. Dover .
- Poincaré, H.;** 1892, "*Les Methodes Nouvelle de la Mecanique Céleste*", Paris, Gauthier-Villars.
- Poincaré, H.;** 1905, "*Leçons de Mécanique Céleste*", Vol. 2. Ed. Gauthier-Villars.
- Pollard, H.;** 1966, "*Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*", Ed. Prentice-Hall Inc.
- Roy, A. E.;** 1978, "*Orbital Motion*", Ed. Adam Hilger Ltd.
- Saari, D. G.;** 2005, "*Collisions, Rings and other Newtonian N-Body Problems*", Ed. American Mathematical Society.
- Siegel, C.L. & Moser, J.K.;** 1995, "*Lectures on Celestial Mechanics*". Ed. Springer-Verlag.
- Smart, W. M.;** 1953, "*Celestial Mechanics*". Ed. Longmans, Green and Co.
- Spiegel, M. R.;** 1998, "*Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas*". Ed. McGraw-Hil.
- Siegel, C. L. & Moser, J. K.;** 1971, "*Lectures on Celestial Mechanics*", Ed. Springer-Verlag.
- Sterne, T. E.;** 1960, "*An Introduction to Celestial Mechanics*". Ed. Interscience Publishers.
- Stiefel, E. L. & Scheifele, G.;** 1971, "*Linear and Regular Celestial Mechanics*", Ed. Springer-Verlag.
- Stoer, J. & Bulirsch, R.;** 2002, "*Introduction to Numerical Analysis*", Ed. Springer.

-
- Sundman**, K. F.; 1907, “*Recherches sur le problème des trois corps*”. Acta Soc. Sci. Fennicae, N° 34.
- Sundman**, K. F.; 1913, “*Mémoire sur le problème des trois corps*”, Acta Math. 36.
- Sundman**, K. F.; 1909, “*Nouvelles recherches sur le problème des trois corps*”, Acta Soc. Sci. Fennicae 35.
- Szebehely**, V.; 1967, “*Theory of Orbits*”, Ed. Academic Press.
- Taff**, L.G.; 1985, “*Celestial Mechanics: A Computational Guide for the Practitioner*”, Ed. John Wiley & Sons.
- Tisserand**, F.; 1889, “*Traité de la Mécanique Céleste*”, (Paris, Ed. Gauthier-Villars).
- Valtonen**, M. & **Karttunen**, H.; 2006, “*The Three-Body Problem*”, Ed. Cambridge University Press.
- Verhulst**, F.; 2000, “*Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*”, ED. Springer.
- Whittaker**, E.T.; 1988, “*Analytical Dynamics of Particles*”, Ed. Cambridge University Press.
- Whittaker**, E.T.; 1959, “*A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*”. Ed. Cambridge University Press.
- Wilson**, C.; 2010, “*The Hill-Brown Theory of the Moon’s Motion*”, Ed. Springer.
- Wintner**, A.; 1941, “*The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*”, Ed. Princenton University Press.