# LA TEORIA DE LOS JUEGOS Y DEL COMPORTAMIENTO ECONOMICO

OSKAR MORGENSTERN *

SUMARIO: 1. — Introducción. 2. — Comportamiento "racional". 3. — Control de las variables. 4. — Similitud entre los juegos y la economía. 5. — Posibilidades de medir la "utilidad". 6. — El problema "minimax". 7. — Los juegos entre dos personas estrictamente determinados. 8. — Los juegos entre dos personas no estrictamente determinados. 9. — Primera explicación matemática. 10. — Ejemplos de juegos. 11. — Asociaciones de interés en los juegos. 12. — Juegos entre tres personas. 13. — Juegos entre n personas. 14. — Segunda explicación matemática. 15. — Integración y desintegración de los juegos; problema de sustitución. 16. — El jugador ficticio. 17. — El carácter estático y empírico deductivo de la teoría de los juegos.

## 1.

En el presente trabajo intentaré esbozar los lineamientos generales de la teoría de los juegos, que se propone construir nuevos cimientos de algunas cuestiones fundamentales de la teoría económica. Esta nueva teoría fue ampliamente desarrollada en mi *Theory of Games and economic Behavior,* [1] escrita en colaboración con JOHN NEUMANN.

Es dicha obra un voluminoso libro, en que abundan fórmulas de matemáticas superiores, muchas de las cuales no podrían sino muy difícilmente ser traducidas en un lenguaje común, simple y convincente. No obstante, trataré de explicar sus principios, con la esperanza de que mucho de lo que seguirá

* Profesor OSKAR MORGENSTERN, Doctor rerum politicarum de la Universidad de Viena; empezó su carrera como docente privado en la Universidad de Viena, actuando desde 1944 como profesor de Ciencias Económicas en la Universidad de Princeton. Director de varias revistas de especialidad, director del Economic Research Project, Office of Naval Research de la Universidad de Princeton desde 1948. Miembro de varios Institutos y asociaciones económicas de los EE. UU. Autor de *Wirtschaftsprognose, eine Untersuchung ihrer Voraussetzungen und Möglichkeiten.* Ed. Julius Springer. Viena, 1928; *Die Grenzen der Wirtschaftspolitik,* ibídem, 1934; *The limits of Economics,* ed W. Hodge and Co., Ltd., Londres, 1937; *Theory of Games and economic Behaviour,* en colaboración con JHON VON NEUMANN, Princeton University Press, Princeton, 1ª edición 1944, 2ª edición 1947, 3ª edición 1953; *On the Accuracy of Economic Observations,* Princeton University Press, Princeton 1950, tradución alemana Munich, 1951; *International Financial Transactions and Bussines Cycles,* National Bureau of Economic Research, Inc., Princeton University Press, Princeton 1956. Autor de numerosos artículos en varias revistas de especialidad, así como de contribuciones en obras colectivas.

1 Princeton, 1944; 2ª edición corregida, 1947, 641 págs.; véase también O. MORGENSTERN, Oliology, Monopolistic Competition and the Theory of Games, *American Economic Review,* tomo XXXVIII, 1948 y Demand Theory Reconsidered, *Quarterly Journal of Economics,* tomo LXII, 1948.

pueda ser compredido, al menos intuitivamente. No hemos recurrido a las matemáticas porque así se nos ocurrió, sino porque sólo mediante su empleo hemos podido establecer nuevos teoremas.

En lo que concierne a sus métodos, la teoría de los juegos contrasta enormemente con la práctica de las analogías físicas dominante en la ciencia económica, indistintamente se sirva del lenguaje común o de fórmulas matemáticas. Este contraste se debe no solamente a la distinta manera de concebir las cosas, sino también a que en los problemas típicamente económicos se dan situaciones, sin paralelo ni en la física en general, ni en la matemática en particular. Lo que vale aún para las ramas de la matemática, aplicables a la física y por esto también a la economía matemática. Son de índole completamente distinta, las matemáticas utilizadas en la teoría de los juegos. En ellas se plantean problemas y teoremas desconocidos en las matemáticas clásicas o en la física. Este hecho incrementa el interés por el tema e incita a nuevas investigaciones.

## 2.

Consideremos en primer lugar el problema del *comportamiento racional,* cuestión que hizo correr mucha tinta. De hecho, cualquier teoría económica representa un intento de contestar a la pregunta del comportamiento más conveniente. Cualquiera que sean las diferencias entre las varias escuelas económicas, todas parecen coincidir en reconocer que tanto el sujeto económico, como también la empresa, actúan racionalmente cuando tratan de asegurarse ganancias *máximas*. En otras palabras: todos tratan de alcanzar una determinada meta con un *minimum* de esfuerzo (por ej. esfuerzo en el trabajo) o de costo. La teoría debe exponer entonces las condiciones que conducen al máximum y al mínimum, respectivamente. En la cuestión del monopolio, ya estudiada por COURNOT, lo dicho se evidencia claramente; la cantidad a producir y el precio serán determinados rigurosamente, cuando la diferencia entre el costo y el ingreso total, es máxima. A tal fin es posible establecer reglas matemáticas precisas. En la competencia perfecta cada empresa, no pudiendo satisfacer sino una infinitamente pequeña parte de la demanda total, debe considerar los precios de sus productos como dados. Por consiguiente ella deberá recurrir a los medios de producción más baratos y procurar que los costos marginales coincidan con los precios. Esta es la clásica respuesta dada por la escuela matemática de Lausana, en la cuestión del equilibrio económico general.

En cada uno de estos dos casos, se describe pues, lo que se considera ser el "mejor" comportamiento del monopolista, respectivamente, de una empresa en la competencia perfecta. Si se apartan de este comportamiento, considerado óptimo para sus respectivas situaciones, sus intereses serán perjudicados, lo que por supuesto, nadie quiere, ya que lo que hipotéticamente persiguen es un máximum de ganancia. Resulta pues que el sujeto económico no puede obtener una utilidad máxima, sino a condición de distribuir su ingreso de una cierta manera, determinada por los precios y las necesidades. Este máximum de utilidad sólo se alcanza a condición de respetar la segunda ley de GOSSEN (o, al menos tratar de acercarse lo más posible a lo prescripto por ella); en otras palabras, sólo cuando las utilidades marginales de todas las necesidades fuesen de la misma magnitud, de manera que resulte imposible un incremento de utilidad por un eventual uso alternativo de bienes. Todo eso se puede expresar en fórmulas matemáticas detalladas.

Como además, es también posible valerse aún de la idea de equilibrio físico, todo parece en el más perfecto orden. Por lo tanto, la solución del problema consiste en encontrar un guarismo o una serie de guarismos, y como todos estos máxima existen en principio, ellos pueden ser calculados, aunque fuere con algunas dificultades. El objeto de una gran parte de la teoría económica es el de elaborar estas ideas fundamentales y aplicarlas a las varias esferas de la vida económica. En este empeño con fines prácticos como en general en la determinación del máximum o del mínimum, se ubicaron en el primer plano, los principios de la utilidad marginal, el ingreso marginal, el beneficio marginal, etc. En realidad, todas estas cosas son inseparables.

Mas, la validez de estos principios no se extiende sino a un número muy limitado de casos marginales o a hipótesis, todas en chocante contradicción con la realidad. Ya cuando después de la aparición de la teoría dipolista de COURNOT, se trató de estudiar la competencia monopólica, se tropezó con dificultades muy serias. Hace más de cien años que se discute esta teoría del dipolio, pero no se pudo encontrar una respuesta general satisfactoria. Luego —gracias a SRAFFA— se reconoció que la curva de la oferta colectiva no es aditiva, es decir, que los precios a los que una empresa hiciera oferta dependen de los fijados por otras empresas, y viceversa. [2] En la teoría posterior de la competencia monopólica vinculada a los nombre de CHAMBERLIN, ROBINSON y STACKELBERG, se trata de un número de oferentes relativamente restringido, el comportamiento de cada uno de los cuales debe ser tomado en cuenta, y esto porque el comportamiento de uno depende del comportamiento esperado y efectivo de todos los demás. Los métodos con los que han sido enfocados estos problemas fundamentales, son idénticos a los empleados para solucionar los problemas de la competencia perfecta o de la economía de Robinson Crusoe; principio marginal, determinación del máximum, cálculo diferencial (si por acaso se hubiera elegido el método analítico matemático, o aún el método gráfico que en parte resulta equivalente, pero menos eficaz).

La teoría de las varias formas económicas monopólicas, consiste en la discusión en torno a un sinnúmero de casos particulares, pero sin principio unificador. Es bastante fácil imaginarse siempre nuevas variantes en la situación de un mercado, y tratar después de encontrar nuevas soluciones particulares. Entre la teoría de la competencia perfecta y la de las formas monopólicas de mercado, hay un vacío que no se logró todavía llenar. En fin, se debe además indicar que el único sostén de la teoría de la competencia perfecta es la suposición de que a un mercado dado concurren un gran número de participantes, pero ella no indica ni siquiera aproximadamente, de qué número se trata. Se está arraigando la idea de que los grandes números tienen efecto simplificador; es esta una analogía con lo que ocurre en física, por ejemplo en la teoría estática de los gases.

[2] Dificultades similares surgen también con respecto a la curva de la demanda, como lo he expuesto en mi trabajo *Demand Theory Reconsidered*, loc. cit. Esto conduce a una revisión del concepto de la "elasticidad", etc.

## 3.

Hechas estas observaciones preliminares, quisiera caracterizar más de cerca una particularidad decisiva de todas las teorías que tratan del comportamiento racional; es la de que la recomendación de comportarse de una manera determinada para poder alcanzar el objetivo propuesto (como por ejemplo de un máximum de utilidad o de ganancia), parte de la suposición de que el individuo controla *todas las variables* de que depende el resultado de su comportamiento. En el caso de Robinson Crusoe, eso sí es manifiesto. Robinson tiene necesidades y dispone de ciertos conocimientos que le permiten aprovechar los elementos de su medio ambiente. Él controla todos los factores de que depende la satisfacción de sus necesidades. Claro que algunos fenómenos naturales, como por ejemplo la cosecha, no dependen de él directamente, sino sólo de modo estadístico-indirecto, pero por eso, su situación no se vuelve difícil. Lo que en realidad es decisivo en su caso, es que el éxito de su comportamiento no depende de una voluntad ajena. Las variables con las cuales opera, se pueden considerar *"variables muertas"*, [3] en oposición con las representadas o contenidas en los actos de comportamiento ajeno, que influyen desde afuera. Robinson por lo tanto, tiene que resolver un problema de máximum, muy claro y preciso. Por cierto que éste pudiera resultar desde el punto de vista técnico calculatorio muy difícil, como por ejemplo en el sistema comunista puro equivalente al sistema económico robinsoniano, en donde no existen operaciones de intercambio, sino sólo un plan económico central para todo el país. Allá sí que se puede hablar de utilidad marginal en el sentido tradicional. Pero solamente en este caso.

Cuando varios individuos establecen relaciones recíprocas, la situación es fundamentalmente diferente; el punto de partida del acto de comportamiento de uno cualquiera de ellos, depende de variables que éste domina sólo parcialmente. Las demás variables dependen del comportamiento de los otros individuos. Pero, el resultado total depende de *todas* las variables juntas. Cada individuo persigue su propia ventaja máxima y los intereses de todos, o al menos de la mayoría de ellos, son opuestos. Esta situación no puede *de ninguna manera ser considerada como un problema de máxima,* cualesquiera que sean las limitaciones o condiciones del máximum que se pudiera imaginar. Estamos enfrentando una situación lógico-matemática, ignorada hasta ahora por las matemáticas y más aún por la teoría económica. Dicha situación no tiene nada común, ni con el cálculo de variables, ni con la teoría de las funciones, sino que se presenta como un *novum,* cuya naturaleza es puramente conceptual. Siendo así, tenemos pues que ver, si se puede resolver el problema de cómo un individuo o una empresa debe conducirse, para que pueda hablarse de comportamiento "racional". En lo que se refiere a este asunto, la palabra "racional" no

[3] O. MORGENSTERN, *Wirtschaftsprognose,* Viena, 1928, pág. 36. Este libro trata de una serie de problemas que indican la relación entre el comportamiento económico y los juegos. Véase también para las cuestiones teóricas del conocimiento, mi estudio: Vollkommene Voraussicht und wirtschaftliches Gleichgewicht, *Zeitschrift für Nationalökonomie,* 1935, tomo VI.

tiene aún ningún sentido. El sentido lo puede dar sólo una teoría capaz de abarcar todos los casos similares.

¿Qué significa el "mejor" comportamiento? Ya que las variaciones en el comportamiento individual se expresan en fluctuaciones de sus ventajas y desventajas, esta teoría deberá ser también "cuantitativa". Para la explicación cualitativa filosófica no hay solución posible. Por otra parte, como con el concepto de máximum —ya que tal máximum no existe y como tal es imposible de determinar— no se puede dar ningún paso adelante, es preciso buscar otros conceptos. En las situaciones en las cuales el resultado final de un acto de comportamiento depende no sólo de los actos efectivos ya ocurridos, sino también de los esperados; e igualmente en los casos referentes al grado de conocimiento sobre las intenciones y la información de los demás; en todas esas situaciones, no hay lugar ni para las analogías físicas, ni para los modelos. En física no hay nada que corresponda a tan típica situación de la economía. El espíritu de los economistas está dominado empero por el mundo conceptual de la física y de la matemática, dependiente y moldeada tras sus fines. Por esto nosotros debemos ver si podemos encontrar otro "modelo", capaz de reproducir fielmente la naturaleza del mundo económico y social, a la que hemos ya aludido.

## 4.

Tal modelo, lo ofrecen los *juegos de estrategia*, es decir aquellos juegos sociales, cuyo resultado no depende sólo —como en los juegos de azar— de la casualidad, sino también del comportamiento del jugador y, como sucede a menudo, también de una componente ocasional. Si pues, se imaginara una teoría y se demostrara que los fenómenos sociales y económicos pueden ser expresados por tales juegos, el camino es sencillo: hay que crear la teoría de los juegos y aplicarla después a los fenómenos que ella ha moldeado.[4]

Veamos ahora cuál es el *papel desempeñado por un modelo*; un modelo debe: 1) ser conforme a la realidad; 2) para que pueda ser manejado, no debe ser demasiado complicado; y 3) debe dar la posibilidad de ser expresado e interpretado matemáticamente. Estas son las condiciones que ordinariamente aseguran su eficacia. El primer punto quiere decir, que la realidad debe ser radicalmente simplificada, dado que en su abundancia y su diversidad, es impenetrable. Es exactamente lo que ocurre en la mecánica de NEWTON, donde los astros son considerados como si fueran una masa de puntos, prescindiendo del hecho de que, por ejemplo, sobre el globo terrestre hay también árboles. Los puntos 2) y 3) son impuestos por consideraciones de técnica científica y no requieren mayor discusión. Queda pues por considerar la cuestión de la similitud de los acontecimientos surgidos en los juegos sociales por un lado, con los de los fenómenos sociales y económicos por el otro. Esta cuestión puede ser resuelta sólo intuitivamente, como se hace en todos los casos en los que se

[4] La teoría de los juegos debe su origen y su desarrollo a J. VON NEUMANN, profesor de matemáticas del Institute for Advanced Study, Princeton. Su publicación originaria, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, apareció en *Mathematische Annalen,* 1928, tomo 100.

trata de modelos. En lo que sigue, voy a demostrar, que es fácil y natural identificar los juegos y los acontecimientos económicos, y de hecho mucho más natural que la identificación tan usual hoy (aunque no siempre manifestada) de la física y la economía. Esta idea se le ocurrió también a LEIBNIZ, pero él no la desarrolló hasta el final. Más todavía, aún en el lenguaje político y en el económico se hace uso de expresiones consagradas por el lenguaje del juego. Por ejemplo, todas las veces que se toman decisiones políticas o económicas, se habla de "juego arriesgado", de "gran puesta", de "reglas de juego del patrón oro", de *bluff*, o de jugar con "las cartas a la vista". En la vida de los negocios se habla a menudo de estrategia a usar en la competencia. Todo eso no es casualidad.

Esta semejanza se pone bien de manifiesto si uno se da cuenta de qué se trata en los juegos de estrategia: cada jugador desea ganar lo más posible; a menudo dispone de muy pocas informaciones; los naipes que recibe dependen del azar; además, debe tener en cuenta que los demás jugadores contestarán por sus propias tácticas a la suya y tratarán de descubrir sus intenciones, exactamente como lo hace él mismo; y finalmente el resultado del juego no depende del comportamiento de un solo jugador, sino de la totalidad de ellos y cada uno *no domina sino una parte de las variables* que en su totalidad determinan el conjunto. Todo lo dicho vale para el bridge, poker, skat o cualesquiera de los otros miles de juegos de naipes. El jugador, si quiere ganar, debe comportarse "racionalmente" y la teoría respectiva debe ser capaz de decirle lo que debe significar esto. A ella le incumbe dar normas de comportamiento que le aseguren el triunfo o le preserven de la derrota. Y como las ganancias y las pérdidas son magnitudes cuantitativas, todo eso debe ser susceptible de una expresión cuantitativa. Acto seguido, hay que contemplar la posibilidad de que el adversario pudiera comportarse de una manera "irracional", y en tal caso la teoría debiera ser capaz de mostrar si hay estrategia alternativa y cuál sería ésta. No cabe duda que todo lo que precede tiene aplicación inmediata en la economía, y en muchas situaciones sociológicas. La semejanza entre los juegos y la economía, es convincente. La actitud es definitiva si se trata de problemas económicos que hasta ahora no han recibido una solución satisfactoria, o la solución de los cuales aún no ha sido planteada, y que pueden ser explicados con la ayuda de la teoría de los juegos.

5.

Antes de continuar exponiendo la idea principal de esta teoría, quisiera llamar la atención sobre un hecho que presenta interés para el economista, piénsese lo que quiera de la teoría de los juegos: en el juego se puede ganar o perder. Si la apuesta es dinero, tanto la ganancia como la pérdida se valúan en números. Pero la teoría puede ser interpretada de manera que ganancias y pérdidas puedan ser expresadas en "utilidades", y esto permitió, a pesar de que se sostenía que la utilidad no es mensurable, que se le determinara un guarismo; de este modo la teoría de las curvas de indiferencia y de sus formas equivalentes se vuelve superflua. Nosotros lo hemos conseguido, partiendo del hecho bien conocido de que en realidad siempre se trata de *utilidades espera-*

*das.* Si así es, tenemos la posibilidad de construir un sistema sólido, axiomático, que tome en cuenta este hecho y que una la utilidad con la probabilidad de la realización de lo esperado. Estos axiomas, sobre los cuales no es menester entrar en detalles en este momento, se apoyan en los siguientes hechos: 1) que cada individuo tiene sus necesidades clasificadas en un orden riguroso, y 2) que está en situación de representarse una combinación de por lo menos dos de esas necesidades. En tales condiciones es posible hacer numéricamente "mensurable" la utilidad, es decir, representarla como función lineal, sin deber fijar un punto de origen cero, o una escala cualquiera. Todo eso se deduce de modo riguroso de los axiomas que por lo demás se dejan comprender fácilmente por vía intuitiva. (Su prueba se hace mediante la aplicación de la llamada sección de DEDEKIND). Con eso, no tenemos más necesidad de recurrir a las curvas de indiferencia, con todas sus dificultades y su fealdad. Se demostró, además, que la teoría de las curvas de indeferencia, no puede aún hacer la unión entre la utilidad esperada y la posibilidad de su realización. [5] Mas, como el contacto entre estas dos nociones es indispensable, y como no disponemos de otro recurso, por fuerza debemos recurrir a su representación numérica. Todo lo que precede fue sometido a una rigurosa demostración. La gran ventaja de esta teoría es que es susceptible de experimentaciones, que ya se efectuaron en gran escala. [6]

Todo eso presenta, sin duda alguna, enorme interés; mas, a pesar de ello, en nuestra teoría no desempeñan sino un papel de segundo orden. Nuestra teoría no se resentiría, aún si no se reconociera generalmente la posibilidad de medir la utilidad, porque, en todo caso, ella puede servir en aquellas situaciones, en que se dispone de cifras, es decir, cuando las ganancias están expresadas en dinero. Ahora bien, la mayoría de los acontecimientos económicos pertenece precisamente a esta clase, especialmente aquellos que, como la competencia monopólica, se han resistido tanto al tratamiento del análisis económico tradicional.

## 6.

Los juegos de estrategia son mucho más complicados que los juegos de azar (ruleta, baccarat, etc.). El estudio de los juegos de azar es antiguo, y como resultado de esto surgió la teoría de las probabilidades, sin la cual no hubiera sido posible el avance logrado por la ciencia contemporánea. Los jugadores se habían dirigido a los mejores matemáticos de sus tiempos, preguntando

[5] Esta observación se refiere al hecho de que sólo un concepto ordinal de utilidad (es decir, que la utilidad no puede ser medida), pudiera ser combinado con la probabilidad, pero eso no quiere decir que dicha combinación pone en evidencia la llamada "propiedad arquimediana". De aquí sigue que no se pueden dar curvas de indiferencia u otras representaciones gráficas continuas de la teoría de la utilidad. Vease: *Theory of Games and Economic Behaviour,* 2ª edición, págs. 630-632.

[6] Estas fueron llevadas a cabo por el estadístico F. MOSTELLER y el psicólogo P. NOGEE de la Universidad de Harvard. Las publicaciones aparecerán en el curso de este y del próximo año (1950).

cómo debían comportarse y cuáles serían sus oportunidades. De esa consulta resultó no sólo el asesoramiento práctico, sino también una nueva disciplina de las matemáticas. Los juegos de estrategia son mucho más difíciles que éstos, y es nuevamente menester amoldar y forjar herramientas conceptuales y matemáticas para poder dominarlos. Pero como no hay una matemática que corresponda especialmente a tales problemas, como por ejemplo el cálculo diferencial para la mecánica (estas dos disciplinas fueron desarrolladas por NEWTON y LEIBNIZ conjuntamente), necesitamos acudir a otras disciplinas de las matemáticas para su solución. Esperemos que pronto se harán en el dominio de las matemáticas, descubrimientos de la importancia del cálculo diferencial que permitan una exploración completa de la teoría de los juegos. Pero, aún sin eso, podemos elaborar nuestro asunto, recurriendo a los fundamentos combinatorios de las matemáticas. Esto es precisamente lo que ha ocurrido en la práctica. Al lado del cálculo combinatorio, desempeñan un papel importante la teoría de las clases infinitas [7] y la lógica matemática. Hay sin embargo indicios, según parece, de que se deberá acudir para tales fines, en importante medida también, a la topología. Todo esto muestra claramente que el carácter matemático de la teoría de los juegos y el de la actual economía matemática, son de índole completamente diferente.

En un juego de estrategia juegan un número cualquiera de jugadores queriendo cada uno de ellos ganar. Las reglas del juego determinan cuáles son las posibles jugadas para cada uno, en qué caso y cuándo interviene el azar y cuándo el juego debe considerarse terminado. Una vez terminado el juego, se decide (por ejemplo, un árbitro) a quién y cuánto tiene que pagar. Lo que se le debe a cada uno depende pues de las propias jugadas, de las hechas por los otros jugadores y de una componente de azar. Cada jugador puede elegir su jugada de entre un número cualquiera, de tal manera que la fortuna le favorezca o crea que le favorece. A menudo —aunque no siempre— no deja a los demás jugadores adivinar sus intenciones, pero le será —casi siempre— provechoso adivinar o tener informaciones de lo que los otros tienen intención de hacer. La suma de los varios pagos será cero, porque las ganancias del ganador son iguales a las pérdidas de los demás. (En la vida económica esta suma no es cero, dado que en un cambio ganan todos; pero ésta, como vamos a ver, se puede fácilmente tener en cuenta.)

Ahora bien, como cada jugador quiere que su ganancia sea el máximum de lo que se puede lograr, éste debe hacer todo lo posible para que las ganancias de los demás sean un mínimum. Tenemos pues a solucionar no un simple problema de máximum, sino uno de *Minimax* por decir así, de un carácter matemático totalmente diferente. En un juego entre dos personas solamente, los intereses de cada uno de ellos están en oposición absoluta, pero si hay más de dos jugadores, algunos de ellos pueden asociarse en una comunidad de intereses. Mas, esto no modifica en nada la opisición de un equipo frente a otro.

[7] *Mengenlehre,* de CANTOR.

La estrategia de cada jugador está pues dada por las jugadas que se propone hacer durante un juego. [8] Existe una demostración matemática muy complicada, que evidencia que todas las jugadas, de cada uno de los jugadores y su "teoría" general acerca de su comportamiento personal, pueden ser expresadas por una única cifra. Esta cifra caracteriza en condiciones suficientes su estrategia, es decir el número que identifica un plan estratégico en su totalidad. En algunos juegos el jugador no dispone sino de muy pocas estrategias alternativas, pero si sucede que elige la "mejor", se puede decir que se ha comportado "racionalmente". Mas, ¿cuál es la mejor estrategia? Evidentemente, aquella que cada uno de los jugadores quiere elegir como la "mejor" o sea la "mejor" para él.

## 7

Voy a examinar ahora el juego entre dos personas, juego en que se pueden distinguir dos clases: los juegos *estrictamente determinados,* y los que no lo son; y como los primeros son más simples, es de ellos que me voy a ocupar primeramente. En estos juegos hay siempre una estrategia, es decir una sucesión de jugadas que brindan a cada uno de los jugadores las mejores posibilidades, *independientemente de lo que va a hacer el otro,* y eso, aún en el caso de que cada adversario adivinara lo que el otro tuviera intención de hacer; pues no será de ningún provecho, para ninguno de los jugadores, lo que eventualmente supiera de las intenciones del otro. Tal situación particular en que se alcanzan las mejores posibilidades para los dos jugadores, se llama "punto de montura" *(Sattelpunkt)* de la función y esta posición nos describe cómo se desarrolla el juego y cuáles son los pagos definitivos. Mostrar que tal punto existe es asunto de la teoría, y su *aplicación práctica* consiste en calcularlo, indicando así al jugador la estrategia a que debe recurrir para asegurarse un máximum de ventajas. Un ejemplo aclarará lo dicho. Cada uno de los jugadores $A$ y $B$, dispone de tres estrategias, lo que da un total de nueve combinaciones posibles, como se puede ver en el cuadro que sigue:

TABLA 1

| A \ B | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | Líneas de mínima |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | 1 | 3 | 1 |
| $A_2$ | 2 | 5 | 2 | 2 |
| $A_3$ | 2 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| Columnas de máxima | 2 | 5 | 3 | |

[8] El "juego" es el conjunto de reglas. Un juego individual es una "partida", en donde se concretan las reglas abstractas. Un mal entendido no me parece posible, así que continúo hablando de "juego".

Las cifras positivas representan las ganancias de $A$, y las negativas sus pérdidas; pero, como la suma de los juegos es cero, estos mismos valores negativos representan las ganacias de $B$. Es decir que la ganancia máxima de $B$ es $1 = -(-1)$, y su pérdida máxima 5, lo que a su vez representa la ganancia máxima de $A$. Claro que $A$ y $B$ lucharán, el primero para obtener y $B$ para evitar tal resultado.

$A_1$ hasta $A_3$ representan las estrategias de $A$
$B_1$ hasta $B_3$ representan las estrategias de $B$.

El punto de intersección de las dos estrategias, determina quién y cuánto debe pagar. Si $A$ eligiera la estrategia $A_2$ esperando ganar 5, lo que se realizaría si $B$ eligiera la estrategia $B_2$, $A$ se equivocaría, porque $B$, adivinando la intención de $A$, recurrirá a la estrategia $B_1$ o $B_3$. La oportunidad $-(-1)$ que condujera a $B$ a la ganancia, no puede ser realizada por éste, ya que él debería elegir la estrategia $B_2$, mientras que $A$, la estrategia $A_3$, lo que $A$ no tiene ningún motivo para hacer. Vuélvanse las cosas como se quiera, $A$ elegirá siempre $A_2$ y $B$, elegirá $B_1$ lo que resultará en un pago de 2 de parte de $B$ al jugador $A$.

Este campo de la matriz[9] constituye el *punto de montura de la función, es decir el punto en el cual el máximum de las líneas de mínimo es igual al mínimum de las columnas de máxima.* Como más adelante vamos a ver, no todas las funciones que describen la marcha del juego tienen tal punto de montura. El ajedrez pertenece a la clase de juegos en que tal punto existe, pero ese juego es tan complicado, que hasta con la ayuda de las más modernas máquinas de calcular electrónicas, que hacen en un segundo 10.000 multiplicaciones de números de muchas cifras, no se puede aún calcular la mejor estrategia. En este caso no nos queda más que hacer, que jugar y tratar de acercarse a ella en modo empírico.

Se puede preguntar por qué el jugador $B$ habría de meterse en tal caso, si de conformidad con el esquema de más arriba, no tiene otra perspectiva que la de perder 2 puntos (excepto el caso en que su adversario cometiera un error, y jugara $A_3$, lo que es poco probable). La respuesta a tal pregunta se halla fuera de la teoría. Se pueden concebir situaciones en las que uno debe jugar sin poder proceder de otra manera. En este caso tiene aquí su mejor estrategia. Tales situaciones acaecen a menudo en la vida social y económica, y hemos ya dicho que los juegos sirven de modelo para tales acontecimientos.

## 8.

Los juegos (entre dos personas) *no estrictamente determinados,* son muy parecidos, pero más complicados. Su estudio nos lleva al fondo de la teoría. El caso más sencillo es el siguiente:

[9] Se trata aquí de la llamada matriz que describe la marcha general de la función. En la teoría de los juegos el cálculo de la matriz desempeña un papel importante.

TABLA 2

| A \ B | $B_1$ | $B_2$ | líneas de mínima |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | − 1 | − 1 |
| $A_2$ | − 1 | 1 | − 1 |
| columnas de máxima | 1 | 1 | |

Esta matriz es fácil de comprender. Cuando el primer jugador elige $A_1$, si el segundo estuviera enterado de tal elección del primero, elegiría $B_2$. Cuando el primero elige $A_2$, esperando que el segundo elija $B_2$, si el segundo conociera la elección del primero, elegiría $B_1$. Y así sucesivamente. No hay *punto de montura* que conduzca a una situación estacionaria; parece que en un juego de esta clase, la "mejor" estrategia no existe, ni tampoco un comportamiento "racional". Todo consiste en el hecho de adivinar la intención del adversario y, al mismo tiempo, ocultar la propia estrategia. ¿Quién no pensará en luchas de carteles, maniobras bursátiles, etc., sin hablar de situaciones militares? Puesto que es mucho más difícil y arriesgado adivinar la intención del adversario, que ocultar las propias intenciones, esto último será el objetivo principal del jugador.

Aquí interviene de modo decisivo el análisis matemático. Mientras en el primer ejemplo es fácilmente visible que hay un punto de montura, y en el segundo que no lo hay, el estudio matemático puede convencer de que también en estos juegos existe *siempre* una estrategia segura que es la "mejor" y que ésta puede ser determinada por métodos de cálculo. Esto es el objeto de la demostración fundamental y profunda que VON NEUMANN hizo ya en 1928 en su primera publicación.

*Existe siempre un punto de montura.* Con esto, todo juego (entre dos personas) no estrictamente determinado, se transforma en uno estrictamente determinado. Puesto que toda la teoría, también para más de dos jugadores, está basada en este hecho, es necesario conocer los principios que tienen importancia en esta demostración. Haré primero, una exposición literaria y, después, una breve exposición matemática de la argumentación; el lector no interesado puede pasar por alto la exposición matemática.

El principio a introducir es el siguiente: la preocupación principal del jugador debe ser la de ocultar sus propios planes. En una modalidad del juego "Cara o cruz", expuesto en la matriz de más arriba el interés de uno de los jugadores es que su moneda muestre el mismo lado que la de su adversario, porque así gana un punto; el otro jugador, en cambio, gana sólo en el caso de que las dos monedas muestren lados distintos. El que pueda adivinar lo que hará el otro, podrá asegurarle una ganancia. Como se sabe, toda persona de una inteligencia normal jugará este juego tirando su moneda y dejando al *azar* la decisión sobre el hecho de que caiga del mismo o del otro lado que la de su adversario. Cada uno de los dos jugadores procederá así. ¿Qué significa eso? El jugador en vez de elegir una estrategia *"pura"* o *"directa"* (es decir, decidir por sí mismo si debe ser cara o cruz), ha elegido una estrategia *"estadística"* o *"mixta"*.

Es importante comprender que este hecho *no* transforma el juego en un ordinario juego de azar. *El jugador* introdujo solamente un *procedimiento* estadístico que lo dispensa de decidir si se juega realmente según la estrategia $A_1$ *o* $A_2$. Su decisión se manifiesta por la *elección* de una intercalación estadística, que en este caso es 50 : 50, es decir él elige cara o cruz con una probabilidad del 50%. Si el jugador prefiriera otras probabilidades, por ejemplo 30: 70, saldría mal. En otros juegos las probabilidades óptimas no son las mismas que las arriba descriptas, y la teoría debe —y lo hace en realidad— posibilitar el cálculo de las probabilidades óptimas. La razón de la intercalación es la de garantizar el secreto, pues es imposible predecir qué caso concreto se presentará. No sabiendo ninguno de los jugadores cómo caerá su moneda, no hay peligro de divulgar su juego.

En los acontecimientos sociales y económicos tal comportamiento es característico. Cuando es ventajoso no proporcionar informaciones, pero sí obtenerlas, uno se vuelve evasivo, astuto, disimula, recurre a *bluffs*, etc., que no son sino otras tantas expresiones del hecho de que en esos casos se eligen estrategias estadísticas o mixtas. Por supuesto surge ahora la cuestión: ¿Cuáles son las óptimas estrategias estadísticas? La respuesta no puede ser adivinada, sino que debe ser calculada por un largo procedimiento y en base a la teoría general. Más adelante daré un ejemplo. Lo principal es por ahora que hay siempre un punto de montura.

## 9.

*Primera explicación matemática.* El resultado (los pagos) de un juego entre dos personas puede ser representado por una función: $H(\tau_1,\tau_2)$ en la cual $\tau_1$ representa la simple estrategia del primero, y $\tau_2$ la simple estrategia del segundo jugador. $H_1(\tau_1,\tau_2)$ es el resultado para el primero, $H_2(\tau_1\tau_2)$ para el segundo jugador. Puesto que es un juego cuya suma es igual cero, tenemos

$$H_1(\tau_1,\tau_2)+H_2(\tau_1,\tau_2) \equiv 0$$

Si ponemos $H_1(\tau_1,\tau_2) \equiv H(\tau_1,\tau_2)$, el primer jugador quiere aumentar $H(\tau_1,\tau_2)$ al máximum, mientras que el segundo quiere reducirlo al mínimum. Lo que significa que son max. $\tau_1 H_1(\tau_1,\tau_2) =$ max. $\tau_1 H(\tau_1,\tau_2)$ y max. $\tau_2 H_2(\tau_1,\tau_2) =$ min. $\tau_2 H(\tau_1,\tau_2)$. Cada jugador controla sólo "su" variable $\tau_1$ respectivamente $\tau_2$; el resultado depende sin embargo, de ambas variables.

La determinación estricta del juego significa que la función $H(\tau_1,\tau_2)$ tiene un punto de montura, es decir que

$$\text{max. } \tau_1 \text{ min. } \tau_2 H(\tau_1,\tau_2) = \text{min. } \tau_2 \text{ max. } \tau_1 H(\tau_1,\tau_2)$$

Esto es el caso descripto en la Tabla I, donde a un máximum de columnas (2) corresponde un mínimum de líneas (2).

H es una función totalmente ilimitada, y eso no es el caso que cada función tiene un punto de montura.

La introducción de estrategias estadísticas se hace de manera que los jugadores, en vez de elegir directamente las estrategias puras

$$\tau_1 = 1, \ldots . \beta_1 \text{ y } \tau_2 = 1, \ldots \ldots \beta_2$$

eligen cifras $\xi_{\tau_1} \ldots\ldots \xi_{\beta_1}$ y $\eta_{\tau_2} \ldots\ldots \eta_{\beta_2}$ en los cuales

$$\xi_{\tau_1} \geqq 0, \quad \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \xi_{\tau_1} = 1$$

$$\eta_{\tau_2} \geqq 0, \quad \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \eta_{\tau_2} = 1 .$$

Estas son las características de las probabilidades. En consecuencia, obtenemos los vectores $\vec{\xi} = [\xi_1 \ldots\ldots \xi_{\beta_1}]$ y $\vec{\eta} = [\eta_1 \ldots\ldots \eta_{\beta_2}]$.

Lo que permite reemplazar la función arbitraria $H(\tau_1,\tau_2)$ por una mucho más especial, a saber: el fin matemático esperado del juego:

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1} \eta_{\tau_2} .$$

Esta expresión dice claramente que cada jugador, en vez de $\tau_1$ y $\tau_2$, elige $\vec{\xi}$ y $\vec{\eta}$. Tenemos ahora sólo la función $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$.

J. VON NEUMANN mostró ya en 1928 que tales formas bilineares tienen siempre un punto de montura, es decir siempre

$$\max_{\vec{\xi}} . \ \min_{\vec{\eta}} . \ K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} . \ \max_{\vec{\xi}} . \ K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

Es un teorema matemático profundo y de gran importancia. La primera demostración fue difícil, pero fue poco a poco simplificada, utilizando especialmente las propiedades de los cuerpos convexos. Nos llevaría demasiado lejos ocuparnos de eso.

La segunda explicación matemática, continuará la presente, utilizando la función $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ de un modo extensivo y decisivo para el juego entre *n* personas, lo que conducirá a una gran unificación de la teoría.

## 10.

Además del ejemplo de "cara y cruz" podrían citarse otros innumerables y mucho más complicados, pero el espacio no lo permite. De un interés extraordinario sería el póker, que pueden jugar dos o más jugadores. En este juego el *bluff* desempeña un gran papel. En éste, la tentativa intencionada del jugador es, no sólo no dejar al adversario entrever su posición, sino de inducirlo a error, es decir, simular a menudo una posición fuerte cuando en realidad prevalece una posición débil. Es sorprendente que la teoría puede demostrar que el *bluff* más que nada, no es agresivo sino defensivo y que, para poder tener éxito con él, por lo general, al hacer un *bluff*, uno tiene que dejarse atrapar de vez en cuando. Para todo esto se pueden encontrar expresiones y teoremas matemáticos exactos. Se sabe que en economía como en política, nos encontramos muy a menudo con la práctica del *bluff*, lo que demuestra que aquí se trata de fenómenos, en que las estrategias estadísticas juegan un papel importante. Lo mismo vale para las operaciones militares. En este sector se puede llegar a muchas revelaciones que lleven a resultados inesperados, obtenidos no sólo por medio de la aplicación del sano juicio o de la experiencia militar. En todos estos casos, como también en el juego de "cara y cruz", resulta que un desvío de la mejor estrategia posible tiene consecuencias graves. Esto puede provocar que el adversario sea obligado a aprovechar su óptima estrategia aún en el caso de que se le ocurriera desviarse de su *óptimun*. Puede parecer paradójico a primera vista, pero esto es la consecuencia estricta de la teoría. La misma demuestra también lo que es un "error" —una correlación necesaria para una visión clara del comportamiento "racional".

Un juego complicado es la morra, en el cual cada uno de los participantes levanta uno, dos o tres dedos y al mismo tiempo tiene que indicar la suma de los dedos mostrados por él y su adversario. Esto conduce a nueve estrategias posibles. La teoría demuestra que lo más seguro es indicar siempre la cifra cuatro y variar las propias jugadas de tal forma que en cada doce turnos el jugador levante cinco veces un dedo, cuatro veces dos dedos y tres veces tres dedos. Haciendo uso de esta estrategia mixta, por lo menos no se puede perder por más que haga el adversario.

Es evidente que el antagonismo entre dos empresarios puede ser representado en tal forma. Cuanto mayor es el número de las estrategias a disposición de ellos, tanto más complicada será la tarea de encontrar las probabilidades de su utilización. En esta oportunidad se pondrá de manifiesto que algunas posibilidades pueden ser descuidadas del todo; a pesar de esto, el cálculo resulta ser una tarea tan grande que no puede ser dominada sin la ayuda de las máquinas de calcular electrónicas. Esto es ciertamente el caso en que uno de ellos dispone de alrededor de 50 probabilidades y el otro de 100, lo que quizá no son cifras demasiado elevadas. No me extrañaría si dentro de uno o dos decenios las grandes concentraciones industriales determinaran su política mediante tales procedimientos de cálculo. Sería interesante seguir de cerca las consecuencias sociales provocadas por tal procedimiento.

Un ejemplo sencillo de otra esfera, completamente ajena a la nuestra, muestra la extraordinaria amplitud práctica de la teoría. La conocida novela de Conan Doyle *"El último problema"*, en la cual Sherlock Holmes es acosado por el profesor Moriarty y donde se desarrolla una persecución que deja abiertas tan sólo dos posibilidades: evasión o muerte. Esta situación la he descripto originariamente como modelo de una situación económica y he señalado el carácter de juego del problema .[10] La teoría demuestra que Sherlock Holmes,

[10] *Wirtschaftsprognose*, Viena, 1938, págs. 98 y sgts.

al salir de Londres ya estaba muerto en un 48%. Este juego es una variedad algo complicada de "cara o cruz", pero falta aquí espacio para entrar en mayores detalles.

Los problemas que suscita el juego entre dos personas con la suma cero, son de naturaleza muy profunda. Aunque está comprobado que hay una solución para cualquier juego de esta índole, queda todavía muchísimo por hacer. Por ejemplo, es menester elaborar buenos procedimientos de cálculo que permitan resolver rápidamente también casos complicados. Ya se han iniciado investigaciones al respecto, y los resultados son muy alentadores.

Aparte de esto, son posibles muchas aplicaciones de carácter completamente distinto. Así A. WALD demostró que el problema fundamental de la estadística corresponde a un juego de dos personas, que el estadista está jugando con la naturaleza. De tal manera puede penetrarse en la naturaleza de la estadística en forma mucho más fácil y clara.[11] Se están preparando otras aplicaciones en la esfera del planeamiento económico.

## 11.

Examinaré ahora el *juego entre n-participantes, con suma cero.* Tampoco en este caso se puede dar más que una idea general, ya que al agregarse más jugadores, se complican más y más los conceptos y se producen situaciones siempre nuevas y a menudo sorprendentes, las que no se dejan describir fácilmente, aún sirviéndonos del instrumental matemático; lo que quisiera evitar aquí. A continuación, prefiero concentrarme en el concepto y ocuparme menos de ejemplos. La estructura matemática se trazará brevemente en (14). Veremos que las ideas tradicionales de "equilibrio" y de "soluciones" tienen que ceder a conceptos completamente nuevos.

Los nuevos fenómenos ya aparecen cuando intervienen tres jugadores. Aún aquí pronto se presentan relaciones que pueden ser interpretadas en lo económico mucho más directamente que en el caso del juego de dos personas. Tratándose de tres jugadores, no existe desde luego un antagonismo de intereses de todos contra todos (como necesariamente lo es en el caso de dos jugadores), ya que dos de ellos encontrarán ventajoso aliarse contra el tercero, el cual de este modo caerá vencido. Tal alianza se realizará únicamente si los dos participantes llegan a un entendimiento entre sí sobre la distribución de las ganancias obtenidas en conjunto. La teoría debe pues explicar bajo qué condiciones se formarán coaliciones y qué clase de distribuciones de ganancias son posibles. Esto nos lleva de inmediato al problema de la estabilidad de los diferentes esquemas de distribución.

[11] Statistical Decision Functions which Minimize the Maximum Risk, *Annals of Mathematics*, tomo 46, 1945; después aparecieron otras publicaciones de varios autores.

Es evidente que la *formación de coaliciones* es un fenómeno económico común. Piénsese en los carteles, sindicatos, cooperativas, etc. Tales asociaciones se llevan a cabo cuando pueden ofrecer a los participantes más ventajas que las que éstos podrían conseguir por sí mismos. No todos los que quieren participar en esta coalición consiguen ser efectivamente admitidos. Tienen que pagar a menudo indemnizaciones, tasas, etc.. Todo esto se manifiesta en los juegos en los cuales puede obtenerse una ventaja, al formar una unión. Tales juegos denominados *juegos esenciales* en contraste con los "no esenciales" donde una coalición no ofrece ventaja alguna a los participantes. Los casos interesantes (y difíciles) pertenecen a la primera categoría. Es precisamente el caso de la *complementariedad* del valor, la cual, por ejemplo, es determinada en cada combinación productiva. En este caso *no hay una suma de los valores,* es decir, la suma de los valores que se consigue mediante la coalición como tal, es mayor que la suma de los valores de los factores individuales tomados por separado. La repartición del valor total de la combinación de los factores participantes (jugadores) es exactamente el problema de la asignación (imputación), tal como ya lo había planteado inicialmente la teoría austríaca. Como es sabido, hasta la fecha no hay solución general para este problema. La teoría de los juegos ofrece una respuesta nueva y satisfactoria tanto conceptual como también matemáticamente.

Las ventajas de las combinaciones de factores en la producción vuelven a aparecer en los consorcios económicos y se manifiestan allí como una tendencia hacia el monopolio. Ya ADAM SMITH reconoció (y condenó) la tendencia del comercio a "conspirar". En la historia económica americana abundan las tentativas del gobierno para disolver los grandes trusts y evitar y castigar las *conspiraciones* contra el público.

## 12.

Los conceptos fundamentales y los teoremas más importantes del juego entre n— participantes con suma cero ($n \geq 3$) serán mejor aclarados por un ejemplo. En la segunda explicación matemática (14) se proporcionarán las formulaciones matemáticas exactas. El caso más sencillo es el del juego entre tres personas, donde cada jugador sólo trata de asociarse con uno de los otros jugadores; el jugador que no alcanza este objetivo pierde un punto en la coalición. La ganancia de coalición tiene que ser distribuída entre los otros dos participantes. ¿Existe una distribución de ganancias bien definida y cuál es ésta? Por supuesto se pueden concebir un sinnúmero de posibilidades de distribución. Pero prevalece la sensación de que no todas pueden ser tomadas en cuenta. ¿Cuáles coaliciones se formarán y cuál es la "mejor" estrategia para cada uno?

Aparentemente existen sólo tres coaliciones posibles: *A* y *B, A* y *C, B* y *C.* Yo sostengo ahora que los únicos esquemas de distribución que de la infinidad de posibilidades pueden ser consideradas seriamente, son los tres siguientes: (Lo que "seriamente" significa se aclarará a continuación):

TABLA 3

| Coaliciones | Jugadores | A | B | C | |
|---|---|---|---|---|---|
| | A, B | ½ | ½ | −1 | $\rightarrow \alpha$ |
| | A, C | ½ | −1 | ½ | $\rightarrow \beta$ |
| | B, C | −1 | ½ | ½ | $\rightarrow \gamma$ |

Este cuadro se lee fácilmente: él indica cómo se distribuyen las ganancias en caso de formarse una de las tres coaliciones. Si se pregunta cuál es la mejor de las tres combinaciones, la respuesta es que tal no existe. Los tres esquemas de distribución son de una manera u otra "idénticos". En cada uno pierde naturalmente otro jugador; de los que ganan en dos juegos distintos, uno está en mejor situación en un juego que en el otro, pero para el otro es indiferente si pertenece a una o a la otra distribución de ganancias. Por ejemplo, en la coalición *A, B,* pierde *C;* en *A, C* pierde *B,* el cual entonces preferiría la coalición *A, B.* Pero para *A* es *indiferente,* pues en las dos coaliciones se encuentra en la misma ventaja, recibiendo ½. Lo mismo vale *mutatis mutandis* comparando todas las demás posibilidades. Si existiera una *distribución óptima,* es de suponer que los jugadores darían preferencia a ésta ante todas las demás posibilidades. Pero no existe una distribución óptima en este juego, el cual, como ya se mostró más arriba, es un *juego esencial,* por producirse una ventaja de la coalición. (El jugador que prefiere jugar solo o queda solo, recibe —1, es decir pierde una unidad). Es pues una de las leyes fundamentales de la teoría de los juegos, que los juegos esenciales *siempre* tengan una variedad de *asignaciones* o esquemas de distribución, los cuales en conjunto representan la *solución. Ninguna asignación por sí sola es la solución.* Tampoco ninguna es mejor, quiere decir, más deseable que la otra. Hablando técnicamente, las asignaciones no forman una cantidad "completamente" ordenada, *de facto,* ni siquiera una cantidad "parcialmente" ordenada (en el sentido matemático) un hecho extraordinariamente notable, que tiene vasto alcace para conceptos como el del "máximum social" y otros que desempeñan un papel importante en la *Economía del bienestar.*

En el cuadro II se muestran tres asignaciones. Pero evidentemente hay una infinidad de otras. Esto parece opuesto a lo sostenido más arriba, que las tres asignaciones nombradas son las únicas que pueden ser tomadas en consideración seriamente. Supongamos que el jugador Nº 1 tenga un privilegio en las reglas del juego de tal modo, que en caso de pertenecer a la coalición vencedora, tendrá que recibir $E, O < E < ½$. El perdedor no puede perder sino solamente 1. Por lo visto ,la distribución sería la siguiente: ½+ε, ½–ε, –1. Esta posible asignación es indudablemente mejor que la segunda (1) en cuadro II para dos jugadores; en vez de ½ y –1, los primeros perciben ½+ε y ½–ε, respectivamente. Preferirán pues este arreglo y podemos decir que esta asignación (llamámosla $\vec{\delta}$) *domina* a la otra llamada $\vec{\beta}$. (Las asignaciones pertenecientes al cuadro III que se lee de arriba abajo, las denominamos $\vec{\alpha}$ $\vec{\beta}$ $\vec{\gamma}$). Dominar significa pues tener una preferencia bien definida. Parece que para el jugador privilegiado todo anda bien en este juego. Pero no es ese el caso: el segundo jugador no tiene motivo alguno para ponerse con el primero bajo estas condiciones, pero entrará de pronto en coalición con el tercero, lo cual lleva a la asignación $\vec{\gamma}$, en donde el segundo y el tercero de los jugadores están en mejor situación que en $\vec{\delta}$. Por consiguiente $\vec{\gamma}$ domina a la asignación $\vec{\delta}$. El jugador privilegiado puede pues contar con ser siempre vencido si se aferra a su privilegio. Ofrecerá pues a los otros jugadores una *compensación*, que corresponda exactamente a $\varepsilon$. Entonces y tan sólo entonces, tiene perspectivas de ser tomado en consideración por los demás, como participante en la coalición. Tales combinaciones son muy comunes en la vida económica. Son los precios ofrecidos para ser tomados en cuenta para una transacción halagüeña. Sin embargo la teoría tiene ahora que determinar cuándo y en qué monto se presentan estas compensaciones; es este un problema que la teoría actual todavía no supo plantear, y menos aún solucionar.

## 13.

Hemos establecido pues una proposición importante. Las asignaciones $\vec{\alpha}$ $\vec{\beta}$ $\vec{\gamma}$ en cuadro III constituyen en conjunto la *solución* del juego entre tres personas. *Ninguna* de estas asignaciones pertenecientes a la solución, domina a otra asignación perteneciente también a la solución. Pero cada una de ellas puede ser dominada por una asignación *no* perteneciente a la solución. Si esto ocurre como por ejemplo en el caso de $\vec{\delta}$ que domina a $\vec{\beta}$ entonces hay *siempre* una asignación perteneciente a la solución (en este caso $\vec{\gamma}$) la cual, a su vez, domina la asignación dominante $\vec{\delta}$. Procediendo así, se hace imposible la realización de la asignación perturbadora, pues cada uno de los jugadores por su parte busca la ventaja óptima y la encuentra en $\vec{\gamma}$. Las asignaciones pertenecientes a la solución no son comparables entre sí (quiere decir, como está dicho, no son completamente ordenadas); es indiferente cual se realizará y la teoría no puede pronosticar cuál se producirá efectivamente. (Esto tiene consecuencias interesantes para la teoría del conocimiento, pero no es éste el lugar para entrar en detalles al respecto). Ninguna asignación perteneciente a la solución, tomada sola, es estable; cada una puede ser perturbada desde afuera. Pero cada asignación perteneciente a la solución es amparada por las otras asignaciones alternativas no realizadas, las cuales por su parte pertenecen también a la solución.

Lo que fue mostrado aquí para el juego entre tres personas vale también en general: todos los juegos esenciales entre *n*-personas tienen soluciones de esta índole; únicamente los juegos no esenciales tienen una sola asignación óptima, que domina a las demás, la cual por su parte no es dominada por ninguna. Pero son casos sin importancia, tanto práctica como teóricamente. La realidad demuestra que pueden ser explicadas por medio del instrumental conceptual expuesto más arriba. Denominamos una solución también un standard de comportamiento *(standard of behaviour)*, al cual los jugadores (la sociedad o la economía) tienen que someterse si quieren subsistir. Todo comportamiento conforme es estable, pero hay divergencias dentro de un standard de comportamiento. La variedad de asignaciones hace evidente que puede haber diferentes distribuciones de ingresos dentro del mismo sistema, todas compatibles entre sí; es evidente pues que los intentos habituales de encontrar un óptimo social simplemente definido, tienen que fracasar.

Nuevas investigaciones sobre el juego entre $n$-personas han establecido que una solución puede abarcar también una infinidad de asignaciones. Esto suena peor de lo que es en realidad, por ejemplo, puede significar nada más, que las distribuciones pueden variar continuamente entre un límite superior y uno inferior. Además, muchos juegos tienen más de una solución (cada una componiéndose naturalmente de una variedad de asignaciones). Esto significa en la interpretación dada más arriba, que hay otros tantos tipos de comportamiento, los cuales, si bien tomados por separado son compatibles en sí mismo, en conjunto son incompatibles (contradictorios) entre sí. Las reglas del juego son dadas por las condiciones físicas bajo las cuales se desarrolla la economía. Las soluciones representan lo que los hombres pueden alcanzar bajo estas condiciones: es bien sabido que el mismo ambiente físico posibilita la creación de sistemas muy diferentes y divergentes. Pero estos son ya formas complicadas de la teoría que no pueden ser tratadas aquí.

En (6) se mencionó el haber comprobado, que cada juego entre dos personas con la suma cero, tiene una solución que puede determinarse matemáticamente. Todavía no existe prueba alguna de que cada juego entre $n$-personas con la suma cero, tenga solución. Esta prueba universal será de gran significado matemático. Pero se comprobó que cada juego entre $n$-personas, incluyendo juegos con cualquier número de personas, investigado hasta ahora, tiene al menos una solución. Pues es de suponer que un día la prueba general podrá ser suministrada. VON NEUMANN está firmemente convencido de que esto se logrará. Una vez obtenida la prueba, la misma será también comprobación de la existencia de soluciones, que se podrán hallar matemáticamente. El economista debe tener presente que aquí se trata de un problema formulado con precisión y que se sabe exactamente cuáles son los puntos no resueltos. En la teoría económica actual no es tan claro dónde se separa lo conocido de lo desconocido.

## 14.

*Segunda explicación matemática.* Un juego entre $n$-personas, $\Gamma$ de suma cero, se compone de una cantidad $I$ de $n$-jugadores, la cual se subdivide en dos cantidades parciales S y $-$S, y todos los jugadores $k$ cooperan. Así nace un juego entre dos personas. Tenemos entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) \equiv 0, \quad \tau_k = 1, \ldots, \beta_k \text{ para } k = 1, \ldots, n.$$

El jugador compuesto 1′ controla todas las estrategias $\tau k$ en S: $\tau^s$, 2′ tiene todos $\tau k$ en $-$S: $\tau^{-s}$

$$H(\tau^s, \tau^{-s}) = \sum_{k \text{ en } S} H_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) = -\sum_{k \text{ en } -S} H_k(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

El paso a las estrategias mixtas se cumple exactamente como arriba para los $\vec{\xi}$ y $\vec{\eta}$ y de la misma manera obtenemos

$$\text{Minimax} = \text{Maximin} = v(S).$$

Ahora introducimos explícitamente la *función característica* $v(S)$. En ella se basa toda la teoría del juego entre *n*-personas. Ella fija todas las asignaciones, incluso las compensaciones que tienen que ser pagadas dentro de cada coalición. Dicho en otras palabras: las asignaciones de $v(S)$ son determinadas por las e $v(T)$, representando $T$ las otras coaliciones opuestas a $S$. la función $v(S)$ es una *función cuantitativa numérica,* quiere decir, que sus variables son *cantidades* que se dejan expresar en números enteros.

Sus características primordiales son

1) $v(\Theta) = 0$
2) $v(-S) = -v(S)$
3) $v(S \cup T) \geqq v(S) + v(T)$ en caso de que $S \cap T = \Theta$.

*Explicación*: Es el símbolo de una cantidad "vacía" *(leere);* (1) indica entonces que una coalición carente de socios no recibe nada. (2) indica que se trata de un juego entre dos personas de suma cero. (3) indica lo siguiente: el valor de una coalición compuesta de $S$ y $T$ es mayor o igual a los valores que tienen las coaliciones S y $T$ tomadas por sí solas. ( $\cup$ es símbolo de una suma, es decir, de todos los elementos que pertenecen a «*S*» o a «*T*». Es condición secundaria que $S$ y $T$ no puedan tener elementos en común. ( $\cap$ es símbolo del promedio cuantitativo, es decir, de aquellos elementos a los cuales pertenecen $S$ como $T$). Queda aquí expresamente descartado que un jugador pertenezca simultáneamente a ambos. Este carácter (3) es de un significado importantísimo: [12] si vale el signo $>$, se trata de complementariedad de valores; si vale $=$, entonces se trata de un juego no esencial, es decir, los participantes de la coalición no tienen ventaja alguna en su unión y pueden alcanzar lo mismo procediendo individualmente. Son los juegos esenciales los que interesan mayormente y que tienen un significado económico directo. Es notable que la función característica está en condiciones de determinar el juego entre *n*-personas.

Doy ahora la fórmula exacta de la *definición general* ya explicada en (13):

(1) Una *asignación* consiste en *n*- números $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$ con los atributos siguientes:

[12] Y también de gran interés para el matemático profesional; se trata aquí de una generalización de un teorema importante de la teoría volumétrica general.

(a) $\alpha_i \geqq v((i))$, para $i = 1 \ldots n$

(b) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$,

(c) $\vec{\alpha} = [\alpha_1 \ldots \alpha_n]$

(2) S, una sub-cantidad de *I* es *efectiva* para $\vec{\alpha}$ si

$$\sum_{i \text{ en } S} \alpha_i \leqq v(S).$$

(3) Una asignación $\vec{\alpha}$ domina a una asignación $\vec{\beta}$ : $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$, en caso de existir una *S*, así que

(a) *S* no es vacía

(b) *S* es efectivo para $\vec{\alpha}$

(c) $\alpha_i > \beta_i$ para todas *i* en S

(4) Una *solución* es una cantidad *V* de asignaciones, de tal manera que:

(a) ninguna $\vec{\beta}$ en *V* es dominada por $\vec{\alpha}$ perteneciente también a *V*;

(b) cada $\vec{\beta}$ no contenida en *V* es dominada por $\vec{\alpha}$ que pertenece a *V*, o (a) y (b) expresadas en forma equivalente;

(c) los elementos V son exactamente aquellas asignaciones que no son dominadas por elemento alguno que pertenezca también a *V*.

*Explicación*: Todo lo esencial fue dicho ya en (13), así que puedo ser aquí breve.

En (1) (a) dice que una $\alpha_i$, esto es, un pago al jugador *i*, no tiene que ser tomado en cuenta en la asignación $\vec{\alpha}$, excepto si este pago fuera por lo menos tan grande como lo que él puede procurarse individualmente, es decir, recibe $v((i))$ (*i* está entre paréntesis por tratarse de una cantidad que tan sólo consiste de *i*).

(b) la suma del juego es cero

(c) una asignación es un vector con los *n*-componentes de los pagos individuales.

En (2) una coalición S puede ser tomada en cuenta tan sólo si ofrece más o por lo menos lo mismo que los jugadores en S pueden obtener individualmente.

En (3) (a) y (b) son ahora completamente inteligibles: (c) significa que cada jugador tiene que estar mejor en S (en $\vec{\alpha}$) que en $\vec{\beta}$. En (13) fue demostrado que esto es válido (en aquel ejemplo) para $\vec{\delta}$, pero no para las tres asignaciones $\vec{\alpha}$ $\vec{\beta}$ $\vec{\gamma}$ del cuadro III, las cuales pues, no se dominan recíprocamente, de manera alguna. Al pasar de $\vec{\alpha}$ a $\vec{\beta}$, en el cuadro III, un jugador es indiferente, porque percibe en ambos ½, otro está en contra porque desmejora su situación de ½ a −1, y tan sólo un jugador está en favor, porque su situación se mejora de −1 a ½. No es suficiente para dominar. Lo mismo vale para todos los demás pasos.

En (4) el concepto de la *solución* ya fue expuesto y explicado extensamente. Aquí tenemos la expresión matemática exacta de lo expresado más arriba en forma literaria. Digámoslo, que (c) muestra una tendencia cíclica que reside profundamente en la naturaleza de la materia. Esto es la verdadera causa que hace tan difícil encontrar la solución y al mismo tiempo es, lo que hará que el descubrimiento de la solución que se busca todavía, tenga carácter trascendental. La intransitividad de las asignaciones hace difícil un óptimo social. Como se ha dicho, las mismas son acíclicas, lo que conduce a consecuencias interesantes, que sin embargo no pueden ser abarcadas aquí.

## 15.

Ya tenemos ahora nociones y definiciones precisas y hemos podido echar una mirada en la estructura de la teoría. Para darnos cuenta de cómo van las cosas cuando hay más de tres jugadores que intervienen en el juego, debemos primeramente ver, cuáles son las situaciones económicas creadas por la intervención de 4, 5, 6, ... etc., jugadores. Tal programa, no puede ser desarrollado en este estudio. En la obra antes mencionada se le han dedicado algunos centenares de páginas, sin que su discusión sea completa. Nos conformaremos pues, con sólo algunas alusiones a ello y más adelante se hará mención de algunas aplicaciones económicas específicas. Una de las más notables propiedades de esta teoría (como de toda otra teoría puramente matemática) es que: 1) nos conduce a resultados que nunca hemos pensado en buscar, y 2) algunos de esos resultados ni siquiera podrían ser expresados en palabras (como por ejemplo la teoría de los *quanta*, en física). He aquí un ejemplo para el primer caso.

Volvamos una vez más al juego de tres personas. Supongamos esta vez, que uno de los jugadores, *C*, es "tabú", es decir que no hay posibilidad de coligarse con él, ni para *A*, ni para *B*; *C* será siempre adversario, y como ni *A*, ni *B*, pueden separar sus intereses, parece que los dos ganarán exactamente 1 punto, que *C* perderá. Pero la teoría demuestra rigurosamente que esta primera suposición no corresponde a la realidad: *C*, no puede ser despojado de todo lo que posee, es decir, no puede perder siempre 1, sino que de esta cantidad, una porción c, comprendida entre $-1$ y ½, es decir: $-1 \leqq c < \frac{1}{2}$, le es asignada por los otros dos. Claro que, dado que nadie puede coligarse con él, él no puede influir la estrategia del juego. Esta clase de juegos, en que se *discrimina* a uno de los jugadores, tiene importancia especial; es el modelo de las situaciones económicas en las cuales, como vamos a mostrar en (16), se pasa de los juegos de suma cero, a juegos de sumas variables. La discriminación es además un fenómeno muy frecuente en la organización social; y la teoría de los juegos, debemos subrayarlo, es capaz de tener en cuenta este hecho. No es difícil traer ejemplos de sistemas sociales que aunque estriban en el principio de casta u otros similares, otorgan no obstante, cierta protección a las clases sociales desfavorecidas.

Llevando estas investigaciones más y más adelante, se llega a la integración y desintegración de los juegos. Esto quiere decir que los juegos aunque simultáneos pero jugados de modo totalmente independientes uno del otro, pueden ser concebidos como un fenómeno único. Es este un hecho sorprendente, pues si bien no es ignorado en la física, nunca hubiéramos podido esperar que se ponga de manifiesto también aquí. Así, para tomar un ejemplo, determinados sistemas mecánicos, digamos en la Tierra y en Marte, podrían ser concebidos primeramente como absolutamente separados e independientes, y después no obstante, como un sistema unitario. A esto corresponde la consideración aislada de las economías de dos Estados cualesquiera, y después su enfoque de conjunto mediante la contemplación del comercio internacional.

Sólo estudiando la integración de los juegos, podemos librarnos de las limitaciones que conducen a una suma cero e introducir una *suma constante*, mayor que cero. Y esto solamente se puede lograr si se introduce en el juego, un factor foráneo que o bien ofrece regalos a los jugadores, o bien les impone un tributo. Cualquiera que fuera el significado empírico de tal suposición, ella permite perfeccionar sensiblemente la metodología de los juegos. Estos artificios nos ayudan a forjar una "nueva" teoría del juego de *n*-personas, teoría que está estrechamente conectada con la expuesta más arriba, pero que, para llegar a los casos de sumas variales, tan importantes para la economía, requiere forzosamente una interferencia. (En otro artículo voy a describir una aplicación detallada; por el momento, no hago aquí más que bosquejar sus rasgos fundamentales).

Otro grupo importante de juegos, es aquel en que se llega a la formación de mayorías. Estos juegos se llaman *"juegos simples"*. De entre ellos podemos destacar uno, en el cual todas las soluciones son conocidas, a pesar del gran número de jugadores que participan. Su característica es la de que siempre hay "un jugador principal", que siempre gana cuando encuentra por lo menos un solo aliado, y que siempre pierde cuando los demás jugadores se coligan contra él. Este juego traza jalones hacia la solución del problema del monopolio, que por la manera de tratarlo de COURNOT, no pudo ser solucionado completamente. En efecto, este no tuvo en cuenta que los compradores pueden coligarse entre sí contra el monopolista. Tampoco puede esta teoría dominante, determinar los límites exactos de los varios descuentos y otros favores que los monopolistas pueden otorgar en secreto, sea a compradores individuales, sea a grupos de ellos, para fraccionar el mercado en pequeños mercados parciales y lograr de esta manera una mayor absorción del mismo. La solución del juego en el que interviene un "jugador principal", que esta vez no se deja ya exponer en forma literaria, nos da una idea de lo que pudiera ser la respuesta al problema del monopolio.

Como en (11) me he referido ya varias veces a la importancia y la complejidad del problema de la complementariedad del valor, y como he mencionado ya que la función característica puede representar con exactitud esa complementariedad, voy a añadir aquí algunas palabras más sobre el asunto de la *substitución*. Los economistas están todos de acuerdo en que, si un bien cualquiera está dividido en varias unidades perfectamente substituibles entre sí, cada unidad tiene y debe tener el mismo valor que los demás. Pero, como ya se ha visto, eso *no* sucede siempre. Hay juegos simples, que tienen un buen sentido económico (reunión de dos o más unidades en una combinación productiva) y a las unidades de los cuales, a pesar de su perfecta substituibilidad no se le puede atribuir ningún valor, menos aún un valor igual. Ellas reciben sus valores respectivos por puras relaciones aritméticas. Estos casos se vuelven más interesantes todavía, porque para algunos de ellos se pueden establecer ecuaciones tan numerosas como las incógnitas existentes y no obstante no tienen solución. La economía teórica se dio por conforme con el hecho de que había tantas ecuaciones cuantas incógnitas y concluyó que de este modo, por supuesto matemáticamente inadecuado, se daría una solución al problema. Aquí tenemos pues un ejemplo contrario (ejemplo que en matemáticas sería todavía más fácil de presentar); al mismo tiempo, dicho ejemplo trae nueva luz al problema de la sustitución. Sin duda, esto debe conducirnos a revisar nuestras ideas acerca de la naturaleza de las relaciones económicas. Es difícil mantener la creencia en la tesis de la determinación simple de la economía. Es evidente que existe una complejidad de relaciones y condiciones mucho más grande de lo que hasta ahora, siguiendo a la doctrina dominante, estamos dispuestos a admitir.

## 16.

A pesar del hecho de que hasta ahora, la teoría de los juegos tuvo aplicaciones económicas sólo en una escala modesta, la exposición de estas necesita mucho más detalles, de los que pueden darse en el marco del presente estudio. Eso vamos a hacerlo más tarde. Por el momento, voy a conformarme con trazar los rasgos fundamentales de los casos más importantes y reservar para más tarde los detalles, para los cuales deberá acudirse por lo menos a la representación gráfica.

Una primera cuestión sería la de cómo podríamos librarnos de la limitación que nos imponen las sumas iguales a cero. Tal limitación corresponde fielmente a los juegos sociales, en los que uno gana exactamente lo que el otro pierde. Pero no es este el caso en las situaciones económicas, tales como por ejemplo el cambio, en el que como se sabe, cada una de las partes debe ganar, porque de lo contrario, el cambio no tendría razón de ser. La situación se aclara aún más en el caso de la producción. Ahora bien, para que sea posible concebir el cambio en término de juegos, es menester acudir a juegos de suma mayor que cero, y aún de suma variable. Pareciera que todo lo que hemos dicho acerca de los juegos de suma cero, no tiene ya valor alguno, y que deberíamos rehacer todo de pies a cabeza.

Pero la siguiente consideración de orden matemático, nos saca rápidamente de la dificultad: cada juego entre $n$-personas de suma distinta a cero, puede ser equiparado a un juego entre $n + 1$ personas de suma cero. Para tal fin se acude a un *jugador ficticio,* que si bien no ejerce influencia alguna sobre las estrategias de los (verdaderos) jugadores, soporta en cambio integralmente las pérdidas que corresponden a las ganacias de los verdaderos jugadores. Claro está que en la realidad no hay tal jugador; lo hemos introducido sólo por su conveniencia matemática. Utilizamos aquí el mismo método que se utiliza generalmente en el caso de un problema insoluble: se trata de reducirlo a un problema ya solucionado. Es evidente que esto no da siempre resultado, pero sí en este caso.

Traducido al lenguaje formal, esto significa, que el juego $\Gamma$ entre $n$-personas de suma cero y con la función que representa los pagos $H(\tau_1 \ldots \tau_n)$ puede ser reemplazado por el juego $\bar{\Gamma}$, donde introducimos al jugador ficticio $n + 1$, escribiendo:

$$H_{n+1}(\tau_1, \ldots, \tau_n) = -\sum_{i=1}^{n} H_i(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

El juego $\bar{\Gamma}$ no es sino la "prolongación" hasta la suma cero, del juego $\Gamma$. Las únicas soluciones de $\bar{\Gamma}$, que pueden ser consideradas como soluciones de $\Gamma$ son las que toman en cuenta el hecho de que el jugador ficticio no puede tener ni aún indirectamente influencia alguna sobre el juego. Resulta empero que una solución $\bar{V}$ de $\bar{\Gamma}$ es al mismo tiempo solución de $\Gamma$, solamente en el caso en que para una asignación $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ equivale en V: $\alpha_{n+1} = V(n + 1)$.

Consideramos ahora el caso clásico del *monopolio bilateral*, caracterizado por el hecho de que un oferente enfrenta a un solo comprador, que a su vez no puede comprar sino solamente a ese mismo oferente. Se trata de una sola unidad $A$ de un bien dado. Si $u$ es el valor que el vendedor atribuye a $A$, y $v$ el valor que el comprador atribuye al mismo, debemos tener $v > u$ para que el cambio sea posible. Tanto el sano juicio común como la doctrina dominante nos muestran que el precio $p$ debe estar entre $u$ y $v$. La teoría de los juegos llega exáctamente al mismo resultado. Esto es satisfactorio, ya que aquí se trata de un caso tan simple que su solución puede entreverse sin la necesidad de recurrir a teorías. Se trata pues de una confirmación de la teoría cuando el resultado de todo un aparato teórico y matemático (en este caso inútil) coincide con el resutado obtenido por el simple sano juicio. Pero cuando se trata de casos más complicados, como hemos ya mencionado, una teoría científica discrepará muy pronto de lo que se pudiera considerar "natural" o "evidente", si es permitido hablar de tal cosa en semejantes casos.

Ahora bien, en seguida que se dispone de varias unidades del bien de cambio, se pone de manifiesto una diferencia. La doctrina dominante indiferentemente de si radica en los escritos de Böhm-Bawerk o de otros autores más recientes, muestra que se cambiarán un determinado número de esas unidades y que el margen dentro del cual podrá oscilar el precio es mucho más *estrecho*. Este fenómeno siempre se pone de nuevo de manifiesto cuando, además incrementa el número de los participantes en el mercado. La teoría de los juegos coincide con estas opiniones en un solo punto: el número de las unidades que se colocan en un cambio de dos, es el mismo que el determinado por la teoría dominante. Pero el precio es diferente. Aquí enpiezan ya a separarse los caminos. Esto nos permite prever que con el tiempo se establecerán profundas diferencias entre la teoría de los juegos y la teoría ortodoxa. El fundamento de la tesis de estrechez del margen de los precios, sostenida por la teoría dominante, radica en el hecho de que esta parte del supuesto de un precio *único* para todas las unidades cambiadas. La teoría de los juegos, al contrario, es mucho más general y admite premios, descuentos, etc., instituídos a gusto del empresario, que eliminan el precio único y determinan la formación de un precio medio sobre la base de un margen de oscilación mucho más amplio. Esta generalización es también mucho más realista, ya que las negociaciones referentes al cambio de un mayor número de unidades de un bien, son mucho más complicadas que las referentes a una sola unidad del mismo. Y eso vale aún para el caso en que se trata de sólo dos participantes en el cambio.

Consideremos ahora el caso de un *monopolista* que vende a *dos compradores*. Anteriormente hemos mostrado que por intervenir en un juego un nuevo jugador, se producen nuevas e importantes situaciones. Esto ocurre también en nuestro caso. Supongamos que el vendedor 1, vende la unidad $A$ sea al comprador 2, sea al comprador 3. El valor de $A$ para 1 es $u$, para 2 es $v$, y para 3 es $w$, valores que entre ellos están relacionados así: $u < v \leq w$.

Es evidente que el comprador 3 se encuentra en mejor posición que los demás y por consiguiente adquirirá a $A$. De conformidad con la doctrina general, el precio se establecerá dentro del estrecho margen entre la valoración del comprador más poderoso y del de fuerza inmediatamente menor. La teoría de los juegos reconociendo todo esto, va más allá y nos presenta un otro caso aún más plausible: una *alianza* entre el jugador más poderoso y el de fuerza inmediatamente menor. Aquél convence a éste (que en todo caso no puede comprar $A$) de no presentarse en el mercado, para no hacer subir el precio; ofreciéndole en cambio una compensación, para el cálculo de la cual hay reglas precisas; también su influencia sobre el precio se puede calcular exactamente. Mientras la tesis tradicional de la falta de colaboración entre los compradores, conduce a un muy estrecho margen de los precios, se ve ahora que hay también otras posibilidades que tienen como base, precisamente la colaboración de los compradores. Es fácil comprender que la misma idea puede ser aplicada en muchos otros casos. Así, por ejemplo, el Punto de COURNOT determina sólo incompletamente el precio monopolístico, porque allí también debiera tomarse en cuenta las posibles alianzas entre los compradores. Se comprende pues, porque no tiene gran importancia la cómoda idea de que con un creciente número de participantes en un mercado (compradores y vendedores) el precio tiende hacia límites más estrechos.

Volviendo una vez más al caso de tres participantes (un monopolista y dos compradores), debemos observar que al venderse más de una unidad de un bien ofrecido por vendedor, surgen otras complicaciones. Su exposición no es posible en el marco de este artículo; voy a hacerlo más tarde. Este caso pudiera ser explicado por algunos gráficos, pero esto necesita más espacio.

## 17

El estudio de casos aún más complicados es extremadamente difícil y conduce a teoremas matemáticos muy complicados. Cuando discutimos en (15) el papel de la sustitución, tuvimos la oportunidad de hacernos una idea de lo que significa eso. Debemos ahora preguntarnos si es todavía posible tomar en cuenta la formación de coaliciones, cuando el número de los compradores y de los vendedores, crece de tal manera, que al final se trata de millones. Claro está que en tal caso será muy difícil que las personas logren ponerse individualmente en contacto, pesar todas las ventajas y desventajas posibles, tomar decisiones, etc. Pero, por otro lado, hay que observar que los sindicatos, que tienen a menudo millones de miembros actúan no obstante en común, se ponen de acuerdo sobre los fines a seguir, declaran paros, etc. Igualmente, hay cooperativas, asociaciones de empresarios, carteles, etc. Por consiguiente el crecimiento en el número no circunscribe forzosamente la posibilidad de formar coaliciones. Además, no se debe olvidar que los grandes números no tienen eficacia, si hay limitaciones locales.[13]

Quisiera también decir algo referente al carácter *estático* de la teoría de los juegos. Como hoy está de moda forjar teorías "dinámicas", pudiera eso constituir acaso un defecto de nuestra teoría. No veo ninguna necesidad de recurrir a compromisos: las teorías dinámicas deben seguir a las estáticas, nunca precederlas. La teoría estática dominante como ya se ha mostrado, se equivoca en algunas cuestiones decisivas. Debemos además añadir que la teoría de los juegos no enseña que en el sector social, la diferencia entre estática y dinámica, es de una naturaleza totalmente distinta que la existente en la física. No se debe olvidar que la teoría, explica por ejemplo, el juego de póker. Ahora bien, difícilmente se podría imaginar algo "más dinámico" que el póker, con todas las expectativas que provoca, con sus jugadas y contrajugadas, sus *bluffs* y la oscilación del factor aleatorio. Por más que se nos pidiera elaborar una teoría dinámica no hay que dejarse engañar. La ciencia debe afilar su herramienta no para satisfacer vagos deseos, sino para elaborar sus problemas.

Finalmente es de interés observar que la teoría de los juegos es *empírico inductiva.* Dado su carácter eminentemente matemático, esto puede sorprender. Sin embargo es fácil ver que todos los casos estudiados hasta ahora, se fundan en la observación directa. Evidentemente que a la larga, esta base se hará cada vez más estrecha. Por esto será menester intensificar los esfuerzos en el terreno de la observación planteada. El material acumulado por la teoría tradicional tiene para nuestros fines una utilidad limitada, pues ha sido elaborado y medido a la luz de los conceptos y métodos elaborados para fines de esa teoría. La investigación empírica realizada bajo el impulso de la teoría tradicional trabajó su material en la perspectiva de conceptos como equilibrio, costes marginales, etc., que en la teoría de los juegos tienen un papel diferente si es que tienen alguno. Por esto el trabajo empírico será muy difícil y de muy larga duración;[14] pero algunos trabajos iniciales podrán pronto ser puestos en marcha. El espacio de que dispongo no me permite tratar más de cerca este aspecto empírico. Séame permitido sólo mencionar que VON NEUMANN y yo, estamos convencidos de que la observación económica debe ser desarrollada con mucho mayor empeño, si se quiere que la

[13] Estas dudas y otras parecidas han sido discutidas en mi artículo Economics and the Theory of Games, *Kyklos,* Berna, III, tomo 4, págs. 294 y sgts.

[14] Véase mi trabajo: *On the Accuracy of Economic Observations,* Princeton, 1950.

teoría logre hacer realmente grandes descubrimientos. Abrigamos la esperanza de que la teoría de los juegos, con sus métodos cuantitativos, sea el más adecuado medio para resolver el problema del "comportamiento racional", para dar con ello a la teoría económica, una base sólida.*

---

* La bibliografía sobre "La teoría de los juegos" se encuentra en las páginas 485 a 492. (*Nota de la dirección*).

## DIE THEORIE DER SPIELE UND DES WIRTSCHAFTLICHEN VERHALTENS

### Zusammenfassung

Die Schwierigkeiten, mit denen die herrschenden Wirtschaftstheorie zu kämpfen hat, sind durch die Anwendung physikalischer Analogien entstanden. Die Wirtschaftstheorie setzt voraus, dass das Individuum die Gesamtheit der Variablen kontrolliert, was jedoch nur in einer Robinsonwirtschaft der Fall ist. Viel natürlicher und zutreffender ist die Analogie der Wirtschaftsvorgänge mit den strategischen Spielen, da man neben anderen Ähnlichkeiten, bei beiden gemeinsame charakteristische Merkmale findet, die in der Physik nicht vorkommen. Beim Poker, Skat und anderen strategischen Spielen hängt das Endergebnis nicht vom Verhalten des einzelnen, sondern von dem aller Spieler ab, denn jeder Beteiligte kontrolliert nur einen Teil der Variablen, die in ihrer Gesamtheit das Spiel entscheiden.

Man unterscheidet das Zwei-Personenspiel, in dem die Interessen der Spieler in absolutem Gegensatz stehen, und das $n$-Personenspiel. In dem Zwei-Personenspiel seinerseits unterscheidet man: eindeutig determinierte Spiele und solche die es nicht sind. In den eindeutig determinierten Spielen gibt es immer eine beste Strategie für beide Spieler gleichgültig was der Gegner tut. Eine solche eigentümliche Lage nennt man der Sattelpunkt der Funktion, in dem das Maximum der Zeilen-Minima der Matrize gleich dem Minimum der Kolonnen-Maxima ist. In den nicht eindeutig determinierten Spielen gibt es keinen sichtbaren Sattelpunkt. Trotzdem hat VON NEUMANN im Jahre 1928 durch eine eingehende mathematische Analyse bewiesen, dass es auch in diesem Falle eine beste Strategie gibt und dass diese festgesetzt werden kann. Diese ist gerade die für wirtschaftliche und soziale Vorgänge typische Strategie. Die strategischen $n$-Personenspiele werfen ein Licht auf das Problem der Koalitionen (Kartelle, Syndikate, Kooperativen, usw.) und auf das bis heute noch nicht gelöste Problem der Zurechnung, und somit auf das Grundproblem der *Welfare Economics.* Als Fundamentalgesetz der Theorie der Spiele gilt, dass es nur in den unwesentlichen Spielen (in denen sich durch Bildung einer Koalition keinerlei Vorteil nachweisen lässt) eine einzige beste Zurechnung gibt. In den wesentlichen Spielen (wo eine Koalition jedem Mitglied Vorteile bietet) gibt es verschiedene Zurechnungen, von denen keine für sich allein die beste Lösung bietet. Gerade diese letzten sind theoretisch und praktisch von grösstem Interesse.

Durch weitere Forschung gelangt man zur Zusammensetzbarkeit und Zerlegbarkeit der Spiele. So kann man von der Beschränkung auf die Summe Null loskommen und eine Summe, die grösser ist als Null, einführen, ja sogar zu variablen Spielsummen gelangen, die den Wirtschaftsvorgängen entsprechen. Durch dieses Verfahren, mit Hilfe eines einfachen mathematischen Kuntsgriffes, kann man unter anderem auch wichtige Verbesserungen der herrschenden Monopoltheorie durchführen.

## LA THEORIE DES JEUX ET DU COMPORTEMENT ECONOMIQUE


### Résumé

Les difficultés contre lesquelles luttent les théories économiques dominantes sont dues aux analogies avec la physique auxquelles on recourt. En effet, on suppose que l'individu a sous son contrôle toutes les variables économiques, ce qui ne correspond à la réalité que dans l'économie robinsonienne. Beaucoup plus appropriée et naturelle est l'analogie entre les jeux stratégiques et le comportement économique, vu que en dehors de beaucoups de ressemblances entre les deux, on y recontre un trait commun qu'on ne trouve pas en physique. En poker, en Skat ou n'miporte quel autre jeu de stratégie, le résultat du jeu ne dépend pas du comportement d'un seul des partenaires, mais de celui de tous, vu que chacun d'eux ne contrôle qu'une partie des variables, qui dans leur ensemble décident le jeu.

Il faut distinguer entre les jeux de stratégie dans lesquels interviennent seulement deux joueurs et ceux dans lesquels interviennent $n$-personnes. Les jeux entre deux personnes se divisent de leur côté en: jeux strictement déterminés et ceux qui ne le sont pas. Dans les jeux strictement déterminés il y a toujours une stratégie qui offre aux deux joueurs les meilleures possibilités, indépendamment de ce que l'adversaire fait. Cette position particulière s'appelle "point de selle", c'est à dire le point où dans la matrice le maximum des lignes des minima est égal au minimum des colonnes des maxima. Dans les jeux qui ne sont pas strictement déterminés il n'y a pas de point de selle visible. Cependant, l'étude mathématique faite par VON NEUMANN en 1928, prouva que pour cette catégorie de jeux il y a aussi une stratégie qui est la meilleure et qui peut être déterminée. C'est justement celle-ci la stratégie typique des évènements sociaux et économiques. Les jeux de stratégie à $n$-personnes représentent le problème des coalitions (cartels, syndicats, coopératives, etc.) et celui de l'assignation, qui jusqu'à présent n'ont pas été solutionnés d'une manière générale, et avec eux, les problèmes fondamentaux du *Welfare Economics*, L'auteur explique una loi fondamentale de la théorie des jeux, selon laquelle seulement dans les jeux non essentiels (ceux dans lesquels une coalition n'offre aucun avantage aux participants) il y aurait une seule assignation qui serait la meilleure. Dans les jeux essentiels, (ceux dans lesquels une coalition offre des avantages) on trouve toujours une variété d'assignations, mais aucune d'elles ne représente à elle seule la meilleure solution. Ce sont précisément ces dernières qui intéressent du point de vue pratique et théorique.

En poussant l'investigation plus avant, on arrive à l'intégration et la désintégration des jeux. C'est seulement ainsi qu'on parvient à se libérer des limitations imposées par les sommes égales à zéro et qu'on arrive à des jeux dont la somme est majeure que zéro et même à des sommes variables, qui correspondent aux situations économiques. Par ce moyen et grâce à un simple artifice de calcul on arrive, entre autres, à introduire d'importantes corrections à la théorie dominante du monopole.


## THEORY OF GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR


### Summary

If the various economic theories have so many difficulties to strive against, this is partly due to the fact that they have adopted analogies with physics. Indeed, all of them take it for granted that the individual is able to control all economic variables. This is not and cannot be true, except in a pure Robinson-economy. Much more appropriate and natural is to operate with the similarity existing between economic life and games

of strategy, as both have a trait in common, which cannot be found in physics. In poker, skat or any other game of strategy, the final result does not depend on the behavior of one of the players, but is a component of the behavior of all players, as each dominates only a part of the variables, the totality of which decides the final result.

We have to distinguish between the two-person zero-sum games, in which the interests of the players are exactly opposite ,and the *n*-person games. Further, the two-person games are divided in strictly determined games and those non strictly determined. In the first there is always an optimal strategy for both players, whatever the opponent does. This peculiar situation is called the saddle point of the function, viz, the point where in the matrix the maximum of the row minima is equal to the minimum of the column maxima. In the non strictly determined games no visible saddle point exists. Nevertheless, in 1928 VON NEUMANN proved in his mathematical study, that even in this kind of games there is to be found an optimal strategy, which can be determined. This is just the kind of strategy which is to be met with in social and economic life. The *n*- person games throw a light on the problems of coalitions (cartels, syndicates, cooperatives, etc.) as well as on the problem of imputation, which up to now have not found a general solution and so approaches the fundamental problem of welfare economics. One of the fundamental laws of the theory of games in that only in the inessential games (those in which a coalition does not offer any advantage to the participants) is it possible to find an imputation which can be considered to be the best. In the essential games (in which a coalition is always advantageous) there are several imputations, none of which can be considered as the optimum solution. These last ones are of great practical and theoretical interest.

Pushing the investigation further, we reach the stage of the composition and decomposition of the games. By doing so we are able to drop the zero-sum restriction of the games and arrive at games with a sum different from zero or even at games whose sums are variable, which brings the theory into closer contact with economic situations. By such practice, which can be furthered by some easy mathematical tricks, we are able to amend the dominating theory of monopolies.

## TEORIA DEI GIOCHI E DEL COMPORTAMENTO ECONOMICO

### Riassunto

Le difficoltà con le quali lotta la teoria economica dominante si devono all'uso delle analogie fisiche. In effetto essa opera con la supposizione che l'individuo controlli la totalità delle variabili economiche, fatto che solo è valido nella economia Robinsoniana.

Molto più adeguata e naturale è l'analogia dei fenomeni economici con i giochi di strategia, dacchè oltre ad altre somiglianze, incontriamo in tutte e due il carattere comune che non si presenta in fisica: in poker, skat o in qualsiasi altro gioco di strategia il resultado del gioco, non dipende del comportamento di un solo giocatore, ma della totalità degli stessi, dacchè ognuno non domina che una parte delle variabili, che nella loro totalità determinano il complesso.

Bisogna distinguere il gioco strategico tra due persone, caso nel quale gli interessi di ognuno stanno in opposizione assoluta, e il gioco strategico tra n-persone. Nel gioco tra due persone a sua volta si possono distinguere: i giochi strettamente determinati e i giochi che non lo sono. Nei giochi strettamente determinati vi è sempre una strategia ottima per i due giocatori, indpendentemente da quello che farà l'altro. Tales situazione particolare, si chiama "punto di sella" della funzione, cioè il punto della matrice nel quale il massimo delle linee di minima è uguale al minimo delle colonne di massima. Nei giochi

non strettamente determinati non vi è punto di sella visibile. Con tutto ciò, lo studio matematico effettuato per NEUMANN nel 1928 comprovò che anche in questi giochi, esiste sempre una migliore strategia, e che può essere determinata.

E precisamente questa la strategia tipica negli avvenimenti sociali ed economici. I giochi strategici di n-participanti, ilumina il problema delle coalizioni (cartelli, sinacati, cooperative, etc.) e il problema della atribuzione fino ad oggi senza soluzione generale, e con questo i problemi fondamentali del *Welfare Economics*. In effetto si mostra come una legge fondamentale della teoria dei giochi, che solo i giochi non essenziali (dove una coalizione non offre vantaggio alcuno ai partecipanti) hanno una sola assegnazione ottima. In cambio i giochi essenziali (dove una coalizione offre vantaggi) sempre presentano varietà d iatribuzioni, nessuna delle quali, per se stessa, rappresenta la soluzione ottima.

Sono precisamente questi ultimi quelle che interessano praticamente e teoricamente.

Continuando e spingendo le investigazione, si arriva alla integrazione e alla disintegrazione dei giochi. Solo in quetso modo potremo liberarci dalla limitazione che ci impongono le somme uguali a zero, e ricorrere a giochi di somme maggiori a zero, e anche di somme variabili, che corrispondono fedelmente alle situazioni economiche. Mediante questo procedimento, effettuato mercè un semplice artifizio matematico, si raggiungono tra le altre, importanti correzioni alla teoria dominante del monopolio.