Uso de dispositivos móviles y de software matemático en la enseñanza por investigación

Viviana Angélica Costa

IMApEC, Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Argentina. NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro, Tandil, Argentina. Email: vacosta@ing.unlp.edu.ar

Resumen: En este trabajo se presenta un modo de estudiar Matemática y Física en forma conjunta concibiendo al alumno como un investigador. Se describe una actividad didáctica que se inicia con una pregunta que indaga sobre la relación entre la distancia a un foco luminoso y la luminiscencia que éste irradia. La actividad es desarrollada con estudiantes de un curso de Algebra Lineal en una Facultad de Ingeniería. Para el estudio del problema se modela matemáticamente un conjunto de datos experimentales medidos por los estudiantes con sus dispositivos móviles en un laboratorio de física. Luego usan el software GeoGebra para la resolución matemática mediante el Método de Mínimos Cuadrados. Finalmente se contrasta lo encontrado con la Ley Física de la Inversa del Cuadrado a la Distancia. La investigación se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico que propone introducir en el aula la Enseñanza por Investigación. La metodología adoptada es descriptiva y pretende mostrar que es posible llevar a cabo en un curso universitario de matemática este modo de enseñar, además de exhibir cómo el uso de dispositivos móviles, de software matemático y la tarea de modelar matemáticamente surgen naturalmente en estas situaciones.

Palabras clave: enseñanza por investigación, ciencias, dispositivos móviles, GeoGebra, enseñanza universitaria, enseñanza física.

Title: Use of smart phones and mathematical software in teaching by research

Abstract: In this article we present a way to study Mathematics and Physics as a whole, which conceives the student as a researcher. We describe a didactic activity that begins with a question that inquires about the relationship between the distance to a light source and the luminescence that radiates, developed with the students of a Linear Algebra course in a School of Engineering. To study the problem, a set of experimental data measured by students with their mobile devices in a physics laboratory is modeled mathematically. They use the GeoGebra software for mathematical resolution using the Least Squares Method. Finally, the mathematical model found is contrasted with the law of the inverse square. The research is framed in the Anthropological Theory of Didactics that proposes to introduce the Teaching of Research in the classroom. The methodology is descriptive and aims to show how it is possible to carry out in a university course of mathematics this way of teaching and show how the use of mobile devices, mathematical software and the task of mathematical modeling arise naturally when this teaching approach is proposed.

Keywords: research teaching, science, smart phones, GeoGebra, higher education, physic education.

Introducción

En general en carreras universitarias de ciencias e ingeniería los contenidos de matemática y de física se estudian en forma aislada, descontextualizada, mecánica y sin sentido, provocando desmotivación en los estudiantes y aprendizajes estancos. Estas son problemáticas comúnmente asociadas a pedagogías tradicionales de enseñanza y a las rígidas organizaciones curriculares propias de los sistemas universitarios, que impiden, muchas de las veces, implementar innovaciones educativas en las aulas que contemplen el uso de tecnologías de la comunicación y de la información y la interdisciplinaridad, entre otras, que se adapten a los nuevos tiempos tan cambiantes.

Estas cuestiones son mencionadas por varios investigadores que proponen como solución adoptar enfoques de enseñanza diferentes a los tradicionales (Godino, Batanero, Cañadas y Contreras 2015; Pozo, Pozo y Gómez Crespo, 1998).

En particular, Chevallard, creador de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) plantea introducir en el aula la *Enseñanza por Investigación* (EI) en el marco de la que denomina *Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo.* Esto lo propone hacer mediante la implementación en el aula de los dispositivos didácticos que denomina *Actividad de Estudio e Investigación* (AEI) y *Recorridos de Estudio y de Investigación* (REI) (Chevallard, 2013).

Las AEI y los REI parten de una pregunta llamada generatriz que se convierte en el eje del proceso de estudio de los contenidos que se pretenden reconstruir. Este nuevo enfoque y pedagogía de enseñanza está actualmente siendo experimentado y analizado en distintos niveles educativos. De tales investigaciones se han encontrado ventajas y desventajas, como así también de las condiciones que favorecerían el desarrollo de estos dispositivos. Algunas de las más recientes de estas investigaciones en el nivel universitario, pueden encontrarse en Costa, Arlego, y Otero (2014), Barquero, Bosch y Gascón (2011), Salgado, Otero, y Parra (2017), Llanos, Otero, Gazzola Bascougnet, Arlego (2015).

Por otro lado, en relación a la enseñanza de la ciencia, Acevedo-Díaz, García-Carmona, Aragón-Méndez, Oliva-Martínez (2017), afirman que una de las componentes claves de la naturaleza de la ciencia es el análisis de un fenómeno físico con el fin de comprenderlo y describirlo, para lo que proponen en la práctica científica la construcción de un modelo que permita abordar su estudio. Según Acevedo (2017), los modelos son instrumentos que adoptan formas distintas (modelos teóricos, icónicos, matemáticos, analógicos, heurísticos, entre otros muchos más), que además se utilizan a menudo como instrumentos para experimentar o explorar sobre teorías ya existentes.

Para la construcción de un modelo matemático que permita comprender cierto fenómeno físico, a menudo se realiza un experimento asociado al mismo y se registran mediciones de algunas variables que se convierten en un conjunto de datos. Es posible obtener las medidas mediante sensores, dispositivos capaces de dar una respuesta eléctrica a estímulos físicos externos.

Posteriormente, es viable analizar matemáticamente los datos obtenidos con el objetivo de establecer el modelo funcional que los relacione que se basará en la situación física que se esté estudiando, pudiendo ser del estilo lineal, exponencial, potencial o sinusoidal, entre otros. En ciencia, es común realizar este análisis matemático con la ayuda de un software que permita ingresar los datos obtenidos experimentalmente, dar la gráfica en un sistema de coordenadas seleccionado, y realizar los cálculos necesarios para obtener el modelo funcional.

Tal modelo es posible encontrarlo mediante un planteo matemático adecuado y su resolución mediante, entre otros, el denominado Método de Mínimos Cuadrados. Este es un método del Cálculo Numérico, rama de la matemática encargada de diseñar algoritmos para, a través de números y reglas matemáticas simples, simular procesos matemáticos más complejos aplicados a procesos del mundo real. Los fundamentos del Método de Mínimos Cuadrados se basan en conceptos del Álgebra Lineal, tales como son los Sistemas de Ecuaciones Lineales, Espacio Vectoriales, Normas de Vectores y Proyección Ortogonal (Lay, 2007; Strang, 2006). Según Strang, el Algebra Lineal es el "caballo de batalla" de las matemáticas aplicadas modernas y destaca que los cursos de estas ramas de la matemática deberían contener, entre otros temas, el de Mínimos Cuadrados. En caso contrario, asegura que se estaría fuera de contacto con la realidad. Estos libros se basan en los nuevos enfoques en cuanto a la enseñanza del Algebra Lineal que proponen para una mejora en el aprendizaje, apartarse de la abstracción y acercarse a los conceptos de un modo concreto basado en matrices e interpretaciones geométricas (Carlson, Johnson, Lay, and Porter, 1993).

Siguiendo a Chevallard en el marco de la TAD, de las ideas de modelo de Acevedo-Díaz y de los nuevos enfoques de enseñanza del Algebra Lineal, se diseña, implementa y describe una Actividad de Estudio e Investigación para la enseñanza conjunta de conceptos de Algebra Lineal, Cálculo Numérico y Óptica. El objetivo de la propuesta es que durante el proceso de estudio de la AEI se manifiesten características propias de la investigación en ciencia y del uso de, dispositivos móviles y de software matemático, de un modo natural.

La AEI diseñada es implementada en un curso de matemática en una Facultad de Ingeniería y el proceso de estudio se inicia con una pregunta del campo de la Óptica: *¿Qué relación existe entre la intensidad que llega a un receptor y la distancia a la que se encuentra de la fuente?* Esta pregunta parte de la noción evidente que a medida que nos alejamos de una fuente luminosa, la intensidad disminuye. La cuestión es investigar sobre cuál es el modelo funcional que las relaciona y verificarlo experimentalmente.

A continuación, se presentan las nociones básicas del marco teórico, necesarias para esta investigación, el marco conceptual que explica los conceptos a estudiar en el desarrollo de la AEI y la metodología utilizada para describir tal proceso. Luego se describe la AEI en torno a las preguntas y respuestas parciales que se presentaron durante el desarrollo, y finalmente se presentan las conclusiones.

Fundamentación teórica

Teoría Antropológica de lo Didáctico

Este trabajo se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) planteada por Yves Chevallard (2009, 2013, 2015) que parte de concebir a la matemática y al hacer matemática como una actividad humana antropológica y ha definido con precisión los fenómenos denominados: monumentalización del saber y pérdida de sentido de las preguntas que se estudian en la escuela o en la universidad.

Con monumentalización se refiere a la semejanza que tiene el estudio de los contenidos matemáticos en las instituciones educativas, con la visita de monumentos, en el sentido que son objetos ya creados, que se los venera y muchas veces sin sentido. Por pérdida de sentido se identifica al fenómeno que refiere al estudio de los contenidos curriculares sin saber muchas de las veces en respuesta a cuáles preguntas se estudian, están aislados y sin conexión con otros temas.

Con el propósito de enfrentar estos fenómenos la TAD propone un cambio en los modos de enseñar. Pasando de una enseñanza tradicional, en la que el profesor es el único transmisor de conocimiento y el alumno receptor, a la denominada Enseñanza por Investigación (EI). Este nuevo modo de enseñar pretende introducir en el aula ciertos gestos y dialécticas en los alumnos propios a los de un investigador (Otero, Fanaro, Córica, Llanos, Sureda, Parra, 2013).

Para llevar al aula la EI, la TAD propone hacerlo a través de un dispositivo didáctico que denomina Actividad de Estudio y de Investigación (AEI). Las AEI se inician con una pregunta generatriz y el proceso de estudio se organiza en torno a ella con el objetivo de aportar una respuesta. Durante el proceso, tal como lo haría un investigador, se plantean hipótesis, surgen preguntas derivadas, respuestas parciales, hay ayudas del profesor, de libros y de internet, entre otros.

La pregunta generatriz es seleccionada por el profesor y debe poseer la propiedad de generar la formulación de numerosas preguntas derivadas que den sentido y una razón de ser a los contenidos a estudiar. Para dar respuesta a tales preguntas, se construirán determinados conceptos y elementos de una teoría matemática (u otra) para realizar la tarea. Esto es contrario a lo realizado desde un enfoque monumentalista, donde los conceptos se construyen *per se*, muchas de las veces sin saber para qué o cuál tarea o problema resuelven.

Además, para la viabilidad de las AEI, es necesario que se den cambios en los roles de los alumnos, pasando de una actitud en general pasiva a una actitud activa y colaborativa, donde el saber sea algo por descubrir, en vez de ser una mera información que el profesor les facilita sin debate ni discusión.

Método de Mínimos Cuadrados

El Método de Mínimos Cuadrados (Lay, 2007) se utiliza en el estudio de la ciencia y la ingeniería para ajustar un conjunto de pares de puntos que pueden provenir de observaciones (x_i,y_i) para $i=1,..n$.

Para el caso que se suponga que existe una relación funcional lineal entre los valores (x, y) dada por:

$$f(x)=m\ x + k$$

se procede a establecer para cada observación la relación siguiente:

$$y_i = k + m\ x_i$$

obteniéndose un sistema rectangular de n ecuaciones lineales con dos incógnitas m y k. Siendo el objetivo encontrar estos parámetros.

En general este tipo de sistema de ecuaciones lineales resulta ser sobre-determinado e incompatible sin solución, en este caso es posible encontrar la mejor solución en el término de Mínimos Cuadrados recurriendo a conceptos del Algebra Lineal.

Para esto, se escribe el sistema de ecuaciones lineales anterior en forma matricial:

$$A.X=B$$

donde A es una matriz de n filas y dos columnas, X el vector de las incógnitas (m y k) con dos filas y una columna, y B el término independiente con n filas y una columna, que resulta de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible en el caso que B sea combinación lineal de las columnas de la matriz A. En caso contrario se busca un vector X^* de R^n tal que minimice la norma del vector error A.X-B:

$$\|A.X\text{-}B\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\,f(x_i)\text{-}y_i)^2}.$$

El vector X^* que minimiza esta norma es aquel tal que $A.X^*$ sea la proyección ortogonal sobre el espacio de las columnas de A, es decir tal que:

$$(B - A.X^*) \text{ sea ortogonal a } A.Y,\ \forall Y \in R^n.$$

Por lo tanto, el producto escalar de tales vectores columnas debe cumplir lo siguiente:

$$< A.Y,\ B–A.X^*>=0 \qquad \forall\ Y \in R^n.$$

En forma matricial se obtiene:

$$(Y^tA^t).(B–A.X^*)=0 \qquad \forall\ Y \in R^n.$$

Entonces

$$Y^t.(A^t.B - A^t.A.X^*)=0 \qquad \forall\ Y \in R^n$$

de lo que se deduce que:

$$(A^t.A).\ X^* = (A^t.B).$$

Al sistema de ecuaciones anterior se lo denomina *sistema de ecuaciones normales*. En el caso en que la matriz A tenga sus columnas linealmente independientes, la matriz $A^t.A$ es no singular, y entonces la solución de las ecuaciones normales es única e igual a:

$$X^* = (A^t.A)^{-1}.\ (A^t.B).$$

Una vez hallados los parámetros m y k, es posible estimar para cada x_i los valores $f(x_i)$ y obtener el vector error e y su norma:

$$e = A.X^* - B, \quad \left\| A.X^* - B \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2}.$$

Fenómeno Físico

La luz es un fenómeno físico de vital importancia para la vida en el planeta, y la ciencia lo estudia en una rama de la física que es la Óptica. En esta rama se estudia no sólo la luz sino también todos los efectos y fenómenos con ella relacionados.

Uno de tales fenómenos existentes es el que relaciona la intensidad luminosa que emite un foco con la distancia del receptor al mismo. Este fenómeno es conocido como Ley de la Inversa del Cuadrado que, en condiciones ideales, es decir para una onda esférica generada por una fuente luminosa puntual que transporta energía en el vacío, postula que la intensidad "I" es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia "d" a la que se encuentra el foco. Es decir que para una constante A que dependerá de las características de la fuente se cumple:

$$I = A / d^2.$$

La variable I se mide comúnmente en luxes (lx) unidad derivada del Sistema Internacional de Unidades para la iluminancia o nivel de iluminación y la distancia d usando el sistema métrico decimal.

Esta misma Ley del Cuadrado Inverso también la verifican otros fenómenos físicos cuya intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro donde se originan. Por ejemplo, la ley gravitacional y las fuerzas electroestáticas, entre otras.

Metodología

La metodología de la investigación es descriptiva y pretende mostrar en el marco teórico y conceptual presentado, cómo es posible implementar en un curso universitario de Matemática la AEI propuesta. Además, poner de manifiesto el modo natural en que surgen el uso de dispositivos móviles, el uso de un software matemático, y el modelado matemático de un problema real cuando se propone este modo de estudiar.

La AEI se implementa en un grupo con 50 alumnos de entre 19 y 20 años de edad, que cursan una materia de matemática del tercer semestre de la Facultad de Ingeniería de la UNLP (FI UNLP). Los contenidos de esta asignatura son los relativos al Algebra Lineal y los aspectos principales, tanto metodológicos y didácticos de la misma, pueden encontrarse en Costa y Rossignoli (2017).

La materia tiene una duración semestral, y esta actividad se propone en la última etapa del curso después de haber estudiado la mayoría de los contenidos, a saber: sistemas de ecuaciones lineales, matrices, operaciones entre matrices, propiedades y determinante, espacios vectoriales, transformaciones lineales, diagonalización de matrices y ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de segundo orden y sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.

Los contenidos de física que han estudiado los alumnos al momento académico en que se realiza la AEI se corresponden con los de Mecánica Clásica y de Electromagnetismo. En particular, conocen la Ley del Cuadrado Inverso, para el campo gravitatorio y para las fuerzas electroestáticas, de los que no realizan laboratorios para experimentar estos fenómenos.

La pregunta con la que se inicia la AEI es *¿Qué relación existe entre la intensidad que llega a un receptor y la distancia a la que se encuentra de la fuente?* Los conceptos matemáticos a estudiar a partir de esta pregunta se corresponden con, el Método de Mínimos Cuadrados, que es un contenido de la asignatura de matemática mencionada, y con los conceptos físicos que subyacen al problema propuesto, que se corresponden con nociones de Óptica y más en particular con Fotometría, que en el currículo de la carrera se estudian en un semestre posterior.

Para analizar el funcionamiento y eficacia de la AEI propuesta se presenta una descripción de esta en torno a las preguntas derivadas y a las respuestas parciales construidas por los estudiantes. Tal análisis es habitual en investigaciones enmarcadas en la TAD.

Para ello el profesor a cargo del curso, en este caso el mismo investigador, registra el proceso de estudio durante el tiempo que dura la AEI, mediante notas, fotos y las producciones parciales de los estudiantes. En especial considera para la descripción, los trabajos finales realizados por los estudiantes, en grupos de no más de tres, en el que plasman toda la actividad por ellos realizada, y que además se constituye luego en una herramienta para ser evaluados sobre el tema de estudio.

Resultados

La AEI se inicia con la pregunta relativa a la Óptica: *¿Qué relación existe entre la intensidad que llega a un receptor y la distancia a la que se encuentra de la fuente?*

Del debate entre los alumnos, surgen las primeras preguntas derivadas:

¿Qué se entiende por intensidad luminosa?

¿Cómo se mide la intensidad luminosa?

¿Cuáles son las unidades en las que se mide la intensidad luminosa?

La primera tarea es la búsqueda de información acerca del fenómeno físico en estudio, en internet y en un libro de Óptica de la Biblioteca de la Facultad, para dar respuesta a esas preguntas y se extrae la información necesaria. Resumen lo siguiente.

La intensidad luminosa se refiere a la energía por unidad de tiempo irradiada por cualquier fuente lumínica (lámpara de filamento incandescente, tubo fluorescente, arco entre electrodos de carbono, metales en fusión, etc), y se mide en watts.

La medición en watts no es adecuada para medir la sensación de luminosidad percibida por el ojo humano, en primer lugar, porque no toda la energía de una fuente luminosa se convierte en luz visible, y en segundo lugar porque el ojo no es igualmente sensible a todas las longitudes de onda. La cantidad similar al flujo radiante pero que tiene en cuenta esos factores se denomina flujo luminoso (F), y se mide en lúmenes (lm).

Un lumen se define como la cantidad de luz emitida por una superficie de 1/60 cm^2 de platino en fusión (alrededor de 1770 ^0C) y comprendida en un ángulo sólido de un estereorradián (sr). Como ejemplo, una lámpara incandescente de 40W tiene un flujo luminoso de unos 500 lm, y un tubo fluorescente de 40W tiene uno de 2300 lm.

Cuando el flujo luminoso proveniente de una fuente incide sobre una superficie (A), se dice que la misma está iluminada, y el flujo luminoso por unidad de superficie (F/m^2) se denomina iluminancia (E). La unidad es el lux, equivalente a un lumen por metro cuadrado:

$$1 \text{ lux} \equiv 1 \text{ lm/m}^2 \quad E = F/A \text{ (con F incidiendo a 90º sobre A).}$$

Si se imagina a la fuente luminosa en el centro de una esfera, una pequeña área de la esfera subtiende un ángulo sólido definido por $\Omega=A/R^2$. Si por esta área pasa un flujo luminoso F, se define la intensidad luminosa en la dirección del área como $I=F/\Omega$. La unidad de medida de I es la candela (cd) equivalente a un lumen por estereorradián:

$$1 \text{ cd} \equiv 1 \text{ lm/sr}$$

Hay que prestar atención al hecho de que la iluminancia decrece con el cuadrado de la distancia entre el foco luminoso y la superficie iluminada.

Esta etapa de la AEI ocupa el tiempo de casi toda una clase. En una etapa siguiente, el profesor del curso propone ser ayudados por profesores de Física de la misma Facultad y asistir con los alumnos a un laboratorio de física con el propósito de contrastar experimentalmente las respuestas a las preguntas que ellos habían encontrado en los libros de texto y en internet.

El experimento consiste en medir la luminiscencia (en lux) entregados por una fuente puntual. Los alumnos se distribuyen en grupos más pequeños (no más de tres alumnos) para realizar las mediciones. Cada subgrupo obtendrá un conjunto de pares de datos. Para ello, disponen en una mesa del laboratorio que ha sido oscurecido, una lámpara pequeña que simula una fuente puntual (foco). Luego colocan una cinta métrica sobre la mesa con el cero en el foco. Posteriormente usan los sensores disponibles en sus dispositivos móviles, colocados sobre la cinta métrica y perpendicularmente al foco, miden los valores de la luminiscencia a diferentes distancias en intervalos de 5 centímetros en la parte más próxima y de 10 centímetros a medida que se alejaban del foco (Figura 1).

Pueden usar los sensores de sus dispositivos móviles a partir de la descarga de una aplicación gratuita llamada: *Physics Toolbox Suite* (Figura 2), que permite a los usuarios exportar los datos para su posterior análisis en una hoja de cálculo. En particular el sensor del dispositivo que se utiliza se llama comúnmente luxómetro. Mide los niveles de luz en el ambiente, sirve para ajustar el brillo de la pantalla, para ahorrar batería o es utilizado por aplicaciones que son útiles para los fotógrafos.

Figura 1.- Estudiantes realizando el experimento con dispositivos móviles.

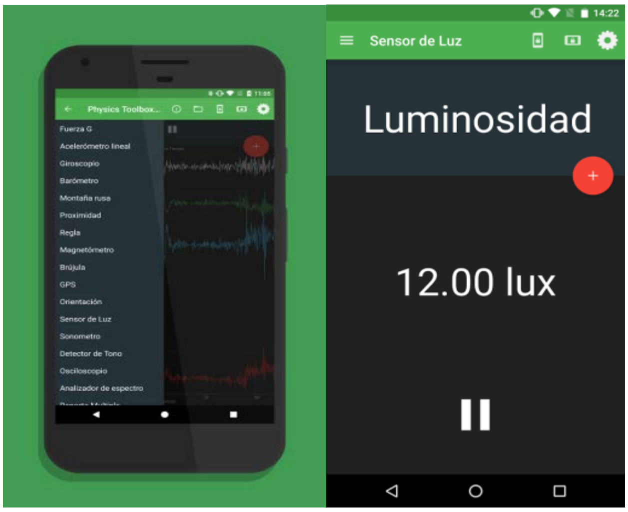


Figura 2.- Aplicación *Physics Toolbox Suite*. Fuente: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.chrystianvieyra.physicstoolboxsuite&hl=es_419

Cada uno de los subgrupos de alumnos, deciden cuántos pares de datos registrar, según varían la distancia. En promedio registraron entre 10 y 15 pares de datos (distancia, lux). Observaron que, a partir de una cierta distancia lejana al foco, la intensidad cambia en menor medida. Por ejemplo, un grupo encuentra los datos que se muestran en la Tabla 1.

Nº	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
D[m]	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.2	1.4	1.6
L [Lx]	980	825	600	454	412	277	219	166	131	102	93	66	52	41

Tabla 1.- Pares de datos, distancia y luminosidad a una fuente puntual.

En una etapa posterior, en el aula de clase de matemática, los alumnos distribuidos en pequeños grupos y munidos de computadoras personales, procesan sus datos y los vuelcan en la planilla de la Hoja de Cálculo de GeoGebra, software matemático libre de múltiple plataforma.

Realizan un gráfico de los datos, usando la herramienta Crea Lista de Puntos. Uno de los grupos de alumnos registró la siguiente lista de datos que grafican en un sistema de coordenadas en la Vista Gráfica del GeoGebra. En el eje de abscisas, colocan la variable distancia en metros y en el eje de ordenadas la luminiscencia, en lux (Figura 3).

Luego, a modo de verificar que los datos experimentales se corresponden con la Ley Física del Cuadrado del Inverso, surge la pregunta:

¿Los pares de datos encontrados a qué tipo de modelo funcional se ajustan? ¿Senoidal: f(x)=A sen(mx+b)? ¿Exponencial: $f(x)=k.e^{mx}$*? ¿Potencial:* $f(x)=k.x^{m}$*? ¿Lineal: f(x)=A x+ B? ¿Cómo se realiza un ajuste de pares de datos?*

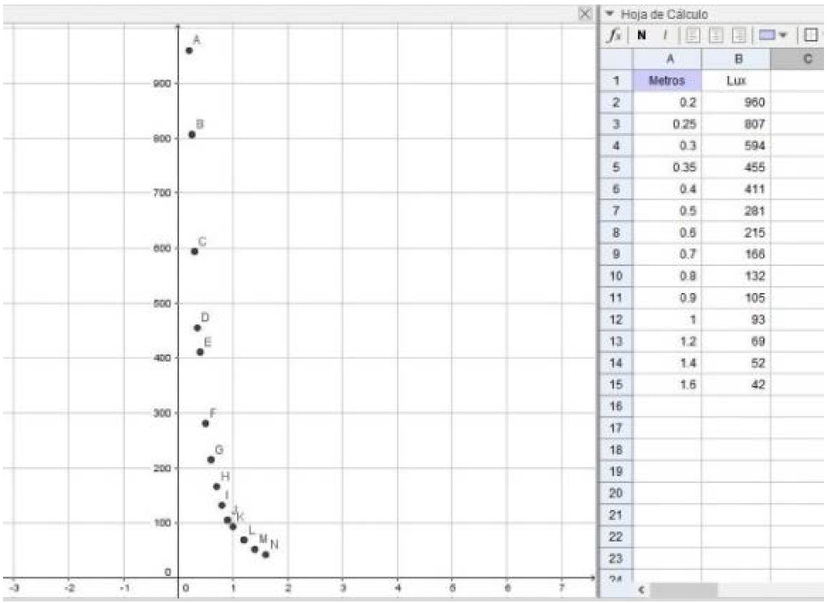


Figura 3.- Gráfico de datos experimentales en GeoGebra. Vista Gráfica y Hoja de Cálculo.

A partir de observar los gráficos que obtienen, todos los grupos coinciden en que las variables pueden relacionarse mediante el modelo matemático de estilo potencial:

$$f(x)= k\, x^{m}.$$

En el caso que se obtenga un valor para m cercano a menos dos, estaría verificándose la ley física del fenómeno experimentado.

Una vez establecido el modelo, el objetivo es estimar k y m. Dado que la función elegida no es lineal, proceden a linealizar la función f(x) aplicando logaritmo natural a ambos términos de la igualdad, obteniendo:

$$\ln(f(x))= \ln(k) + m \ln(x).$$

Graficando con la ayuda de GeoGebra con los ejes en escala logarítmica, observan que los datos siguen un patrón lineal lo cual indicaría que la selección de la función sería la adecuada (Figura 4).

Luego, hacen el cambio de variables en $f(x)= k\ x^{m}$:

$$\begin{cases} Y=\ln(f(x)) \\ X=\ln(x) \\ K=\ln(k) \end{cases}$$

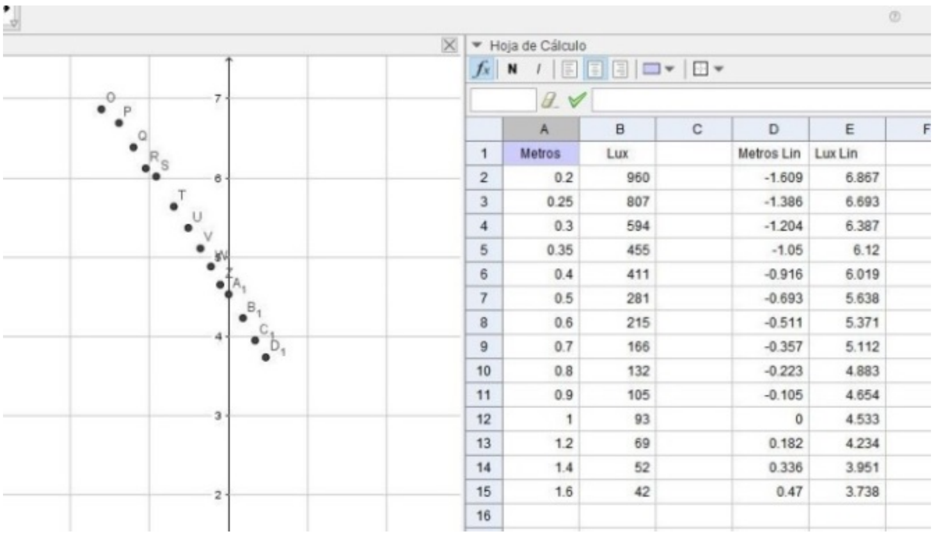
y obtienen el modelo lineal:

$$Y = K + m\,X$$

que en forma matricial resulta de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \ln(x_n) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} K \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \vdots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}.$$

No perdiendo el objetivo que es el de resolver el sistema de ecuaciones lineales, los grupos de alumnos, intentan hacerlo mediante diversas técnicas por ellos conocidas. Entre estas están las técnicas de sustitución o método de Gauss haciendo operaciones elementales entre las filas de la matriz ampliada. Esto lo hacen, sin antes verificar la compatibilidad o incompatibilidad de tal sistema, no habituados a hacer tales cálculos cuando se trata de un sistema de ecuaciones lineales rectangular con una cantidad considerable de ecuaciones (10 o más ecuaciones). Una de estas posibilidades podría haber incluido el cálculo del rango de la matriz del sistema y del rango de la matriz ampliada, que en el caso de ser iguales el sistema resultaría compatible, o el análisis de la pertenencia del vector del término independiente al espacio columna de la matriz del sistema. Con GeoGebra podrían haber explorado esto usando el comando EscalonadaReducida.



	A	B	C	D	E
1	Metros	Lux		Metros Lin	Lux Lin
2	0.2	960		-1.609	6.867
3	0.25	807		-1.386	6.693
4	0.3	594		-1.204	6.387
5	0.35	455		-1.05	6.12
6	0.4	411		-0.916	6.019
7	0.5	281		-0.693	5.638
8	0.6	215		-0.511	5.371
9	0.7	166		-0.357	5.112
10	0.8	132		-0.223	4.883
11	0.9	105		-0.105	4.654
12	1	93		0	4.533
13	1.2	69		0.182	4.234
14	1.4	52		0.336	3.951
15	1.6	42		0.47	3.738
16					

Figura 4.- Hoja de Cálculo y Vista Gráfica en GeoGebra.

Algunos alumnos, realizan operaciones algebraicas entre dos cualquiera de las ecuaciones, obteniendo m y k. Luego reemplazan en las demás ecuaciones y encuentran que no se verifican las igualdades. También observan del gráfico en escala doble logarítmica que por cualesquier par de puntos que allí seleccionen y tracen una recta, esa recta no pasa por los demás puntos.

Concluyen que el sistema es incompatible. Es decir que no existe un valor de m y de k que hagan que el producto de la matriz por el vector sea igual al término independiente. Esto genera incertidumbre en el grupo al no contar con herramientas por ellos conocidas que dé "solución exacta" al sistema de ecuaciones lineales.

Entonces surge la pregunta:

¿Cómo encontrar la mejor "solución" a un sistema rectangular de ecuaciones lineales incompatible?

Para esto se investiga y se estudia el Método de Mínimos Cuadrados, en el marco del Algebra Lineal, tal como se mencionó en una sección anterior. Una vez realizado el estudio de este tema, que ocupa el tiempo de toda una clase, sólo resta aplicar el método al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \ln(x_n) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} K \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \vdots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}$$

En GeoGebra, usan el comando CreaMatriz para obtener las matrices del sistema anterior de los datos cargados en la vista de Hoja de Cálculo. Realizan todos los cálculos matriciales necesarios en la Vista Algebraica y mediante los comandos Traspone(Matriz) e Inversa(Matriz) y resuelven el sistema de ecuaciones normales que en este caso resulta ser:

$$\begin{pmatrix} K \\ m \end{pmatrix} = (A^t.A)^{-1}.(A^t.B), \text{ con } A= \begin{pmatrix} 1 & \ln(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \ln(x_n) \end{pmatrix} \text{ y } B= \begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \vdots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}$$

Finalmente recordando que ln(K)=k, obtienen los valores de los parámetros. Algún grupo encuentra $m = -1.545$ y $k = e^{4.52}$, presentan entonces el modelo funcional que además grafican en la Vista Algebraica:

$$f(x) = 90.58\ x^{-1.75}.$$

Parte del proceso en GeoGebra se muestra en la Figuras 5.

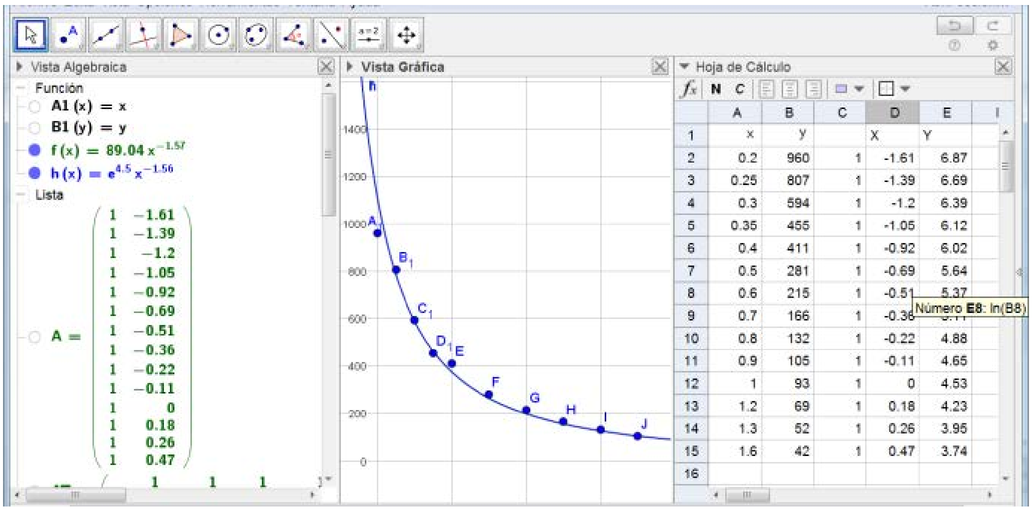


Figura 5.- Cálculos en GeoGebra. Vistas Algebraica, Vista Gráfica y Vista Hoja de Cálculo.

Luego calculan los valores de f(x) para los x por ellos encontrados, el vector error (y-f(x)) y su norma. Uno de los grupos obtiene el conjunto de datos que se muestran en la Tabla 2.

Nº	x[m]	y [Lx]	f(x)	error=y-f(x)
1	0.2	980	1125.7	-145.7
2	0.25	825	793.7	31.2
3	0.3	600	596.6	3.3
4	0.35	454	468.7	-14.7
5	0.4	412	380.2	31.7
6	0.5	277	268.1	8.8
7	0.6	219	201.5	17.4
8	0.7	166	158.3	7.6
9	0.8	131	128.4	2.5
10	0.9	102	106.8	-4.8
11	1	93	90.5	2.4
12	1.2	66	68.1	-2.1
13	1.4	52	53.4	-1.4
14	1.6	41	43.3	-2.3

Tabla 2.- Pares de datos, distancia y luminosidad a una fuente puntual. Valores ajustados. Vector error.

Usan el comando SumaErroresCuadrados de GeoGebra aplicado a la lista de puntos del vector error, para obtener su cuadrado de la norma dos. Obtienen:

$$\left\| A.X^{*}\text{-}B \right\| = 11.05.$$

Concluyen que este modelo potencial encontrado se correspondería en condiciones ideales (laboratorio totalmente oscurecido, sensores calibrados, entre otros) con el de:

$$f(x) = k\, x^{-2}.$$

Donde la constante *k* dependería de las características físicas de la fuente y significaría cuán intensa es su luz.

Luego, a modo de validar la función de ajuste hallada por el Método de Mínimos Cuadrados, comparan con la que arroja el comando de GeoGebra AjustePotencia, encontrando por supuesto la coincidencia. También alguno de los grupos de alumnos usa el comando AjusteExp y obtienen el ajuste de los datos por una función exponencial:

$$f(x) = 1038.38\, e^{-2.26}$$

Para este ajuste calculan la norma del vector error y obtienen:

$$\left\| A.X^{*}\text{-}B \right\| = 417.39,$$

observando que se obtiene un error mayor al anterior lo cual valida el modelo potencial.

En conclusión, los alumnos contrastaron, de un modo sencillo, el fenómeno físico experimentado con la Ley del Cuadrado Inverso de la Distancia. Es decir, que para una onda de luz que se propaga desde una fuente puntual en todas direcciones por igual, la intensidad de la misma disminuye de manera inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Ya que, a distancias suficientemente grandes de los emisores de luz, estos pueden ser vistos como fuentes puntuales. Por ejemplo, si se considera una fuente de luz pequeña y se hacen mediciones de la intensidad lumínica a una distancia d y a una distancia 2d, en el primer caso la intensidad es $[(1/d) / (1/2d)]^2$ es cuatro veces mayor que en el segundo.

Conclusiones

En este trabajo se presentó una Actividad de Estudio y de Investigación que permite construir los conceptos del Método de Mínimos Cuadrados conjuntamente con elementos básicos de Óptica en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Para la búsqueda y validación de respuestas al problema propuesto sobre *¿Qué relación existe entre la intensidad que llega a un receptor y la distancia a la que se encuentra de la fuente?* los alumnos participantes realizaron tareas tales como:

a) Medir y registrar correctamente datos experimentales.

b) Proponer un modelo funcional que ajuste los datos.

c) Estudiar un modelo no lineal mediante el Método de Mínimos Cuadrados.

d) Analizar datos experimentales mediante el método de Mínimos Cuadrados.

e) Validar el modelo funcional encontrado con la teoría física subyacente.

Además, para llevar a cabo esas tareas los alumnos utilizaron tecnología al alcance de la mayoría de ellos como son los sensores disponibles en los dispositivos móviles que les sirvió para medir las magnitudes de luminosidad que emitía un foco. Experiencias de laboratorio como la presentada en este trabajo, son de reciente implementación en el proceso educativo y tienen por objetivo, entre otros, el de atraer el interés y la motivación de los estudiantes (Sans, Gea-Pinal, Giménez, Esteve, Solbes, Monsoriu, 2016).

Asimismo, utilizaron el software GeoGebra para el análisis matemático de los datos obtenidos experimentalmente, descubriendo toda su potencialidad para realizar el ajuste.

También, desde el punto de los procesos de estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, la búsqueda de respuestas a la pregunta dada, rompe y provoca en los estudiantes un cambio en sus prácticas habituales del estudio usual propuesto (en general) en los cursos de Algebra Lineal en los cuales sólo se abordan (usando papel y lápiz) sistemas de dos o tres ecuaciones (como mucho) con dos o tres incógnitas. Donde además, usualmente en el caso de ser el sistema incompatible, no se hace más nada con el problema.

Estos recursos tecnológicos, dispositivos móviles y software matemático, muchas de las veces son vedados en el aula o incorporados al proceso de estudio en forma forzada. En cambio, al implementar una AEI con una pregunta adecuada, el empleo de ellos surge de manera casi natural.

Además, los dispositivos móviles son familiares a la gran mayoría de los jóvenes y permitiría acortar la brecha entre la ciencia como un objeto abstracto de estudio reservado para unos pocos y la ciencia como una apasionante aventura presente en todos los aspectos de la vida.

En resumen, esta investigación muestra que es posible la implementación de Actividades de Estudio e Investigación en ciertos momentos de los procesos educativos y con preguntas generatrices adecuadas, que permitan la manifestación de actitudes propias de la investigación. Además, lo presentado aquí serviría como modelo para otros profesores que busquen implementar este tipo de propuestas.

Por último, la misma pregunta generatriz es posible presentarla en otros contextos, incluso en escuela secundaria. En ese caso, el ajuste de los pares de datos sería posible hallarlo utilizando los comandos de Ajuste que dispone GeoGebra, en vez del estudio del Método de Mínimos Cuadrados que requiere del conocimiento de conceptos del Algebra Lineal.

También la pregunta generatriz, podría ser presentada en forma más general y dar lugar al estudio de otros fenómenos físicos que cumplen la misma Ley del Cuadrado Inverso de la Distancia, cuya intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro donde se originan, que tiene su sustento en consideraciones estrictamente geométricas. Por ejemplo, la misma Ley podría ser aplicada a diversos fenómenos: fuentes puntuales de fuerzas de gravitación, campo eléctrico y sonido o radiación. En particular, por ejemplo, se podría preguntar si el campo de sonido en una habitación en la cual se coloca un altavoz en el centro, sigue la ley del inverso del cuadrado (Nave, 2005). Esto último, también podría experimentarse utilizando los sensores disponibles en los dispositivos móviles usando el sonómetro. Todos estos son temas de continuo debate en física y de interés en la ciencia, siendo este punto donde radica en parte la propuesta didáctica presentada.

Agradecimientos

A los profesores de la Cátedra de Física III de la Facultad de Ingeniería de la UNLP, Dra. Tebaldi Myrian Cristina e Ing. Juana Gallego Sagastume, por su colaboración en el diseño y realización de la actividad experimental. A la Secretaria de Ciencia y Técnica de la UNLP por el apoyo económico recibido a través del proyecto de investigación con referencia I 11-915.

Referencias bibliográficas

Acevedo-Díaz, J. A., García-Carmona, A., del Mar Aragón-Méndez, M., y Oliva-Martínez, J. M. (2017). Modelos científicos: significado y papel en la práctica científica-Scientific models: meaning and role in scientific practice. *Revista científica*, *3*(30), 155-166.

Barquero, B., Bosch, M., y Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 339-352.

Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., y Porter, A.D. (1993). The linear algebra curriculum study group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 41-46.

Costa, V. A., Arlego, M., y Otero, M. R. (2014). Enseñanza del cálculo vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. *Revista de formación e innovación educativa universitaria*, *7*(1), 20-40.

Costa, V. A., y Rossignoli, R. (2017). Enseñanza del Algebra Lineal en una Facultad de Ingeniería: aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería, 12*(23), 49-55.

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. [Online] Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 161-182.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, 173-187.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R., Contreras, J. M. (2015). Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Actas Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica, Universidad de la Sabana*, 249-269.

Lay D. C. (2007). *Algebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson Educación.

Llanos, V. C., Otero, M. R., Gazzola Bascougnet, M. P., y Arlego, M. J. F. (2015). Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) co-disciplinares a la Física y la Matemática con profesores en formación en la Universidad; Asociación de Profesores de Física de la Argentina. *Revista Enseñanza de la Física*, *27*(11), 251-258.

Nave, C. R. (2005). HyperPhysics. Report, ECE dept. Georgia State University.

Otero, M. R., Fanaro, M. A., Córica, A. R., Llanos, V. C., Sureda, P., Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de Matemática*. Buenos Aires: Editorial Dunken.

Pozo Municio, J. I., Pozo, J. I. y Gómez Crespo, M. A. (1998). *Aprender y enseñar ciencia: del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. Madrid: Ediciones Morata.

Salgado D. P., Otero M. R., y Parra, V. (2017). Gestos didácticos en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación en el nivel universitario relativo al cálculo: el funcionamiento de las dialécticas. *Perspectiva Educacional*, *56*(1), 1-25.

Sans, J. A., Gea-Pinal, J., Giménez, M. H., Esteve, A. R., Solbes, J., y Monsoriu, J. A. (2016). Determining the efficiency of optical sources using a smartphone's ambient light sensor. *European Journal of Physics*, *38*(2), 025301.

Strang, G. S. (1982). Algebra lineal y sus aplicaciones. México: Fondo Educativo Interamericano.