

Universidad Nacional de La Plata  
Facultad de Ciencias Exactas  
Departamento de Matemática

# **SOBRE GRAFOS CLIQUE CRÍTICOS**

Autor:

Gabriela S. Ravenna

Director:

Dra. Liliana Alcón

Tesis para obtener el título de  
DOCTOR EN CIENCIAS EXACTAS  
13 de Septiembre de 2019

# Agradecimientos

A mi directora Liliana por haberme aceptado sin conocerme para hacer la tesis de licenciatura y, más aún, por aceptarme para dirigirme en la tesis doctoral después de haberme conocido. A Marisa por haberme introducido en la Teoría de Grafos. Y a Mariela por meterme en este mundo increíble de las matemáticas.

A Miguel Pizaña, Fabio Protti y Claudia Linhares Sales por los trabajos realizados juntos. Al departamento de Matemática por haberme formado, por darme un lugar de trabajo y tantos amigos, que han sido de gran importancia en estos años.

A mis papás por haberme apoyado en cada uno de los trayectos.

A Rodri por acompañarme en todo y, más ahora, en la espera de Astor.

Para la realización de esta Tesis conté con una Beca de CONICET.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Definiciones y Resultados Generales</b>	<b>5</b>
2.1. Familias de conjuntos . . . . .	5
2.2. Grafos . . . . .	6
2.3. El Operador Intersección . . . . .	8
2.4. El Operador Clique . . . . .	9
2.4.1. Grafos clique críticos . . . . .	13
<b>3. Nuevos resultados sobre generadores críticos de un grafo clique</b>	<b>15</b>
<b>4. Generadores críticos de un completo</b>	<b>21</b>
4.1. Generadores críticos de $K_4$ . . . . .	23
4.2. Generadores críticos de $K_5$ . . . . .	27
4.2.1. Generadores críticos de $K_5$ con vértice universal. . . . .	28
4.2.2. Generadores críticos de $K_5$ sin vértice universal. . . . .	42
<b>5. Familias de grafos con único generador crítico</b>	<b>49</b>
<b>6. Sobre prohibidos minimales de <math>K^{-1}(K_p)</math>-libre)</b>	<b>61</b>
6.1. Cota para el orden y el número de estabilidad de un prohibido minimal de $K^{-1}(K_p)$ -libre). . . . .	63
6.2. Cota para el número clique de un prohibido minimal de $K^{-1}(K_p)$ -libre). . . . .	64
<b>7. Grafos clique Helly críticos</b>	<b>67</b>
7.1. Familia self-clique . . . . .	70
7.2. Familia 2-self-clique . . . . .	71
<b>8. Conclusiones</b>	<b>73</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Se llama completo de un grafo a un conjunto de vértices adyacentes entre sí; si un completo es maximal con respecto a la inclusión, se dice que es un clique del grafo.

Los cliques son estructuras especiales que naturalmente han despertado interés desde el mismo inicio de la Teoría de Grafos. Varios problemas *famosos*, como por ejemplo el problema de *coloración de un grafo*, o el problema de *satisfabilidad de una fórmula lógica*, se han vinculado y formulado en términos de los cliques de un grafo. Por otro lado, existe una gama de problemas motivados en el propio estudio de los cliques de un grafo. Particularmente haremos foco en el estudio del grafo que muestra la relación de intersección entre los cliques: el grafo clique.

Dado un grafo  $H$  obtenemos el grafo clique de él, (notado  $K(H)$ ) considerando un vértice por cada clique de  $H$  y haciendo dos vértices adyacentes si los correspondientes cliques tienen intersección no vacía. A  $H$  se lo llama generador del grafo  $K(H)$ .

*¿Todo grafo es el grafo clique de algún grafo?*

El artículo de más vieja data en el que se considera esta pregunta es el de Hamelink [15] donde se muestra que no todo grafo es grafo clique, y se da una condición suficiente para que un grafo sea grafo clique: que la familia de sus cliques tenga la propiedad de Helly (toda subfamilia mutuamente intersectante tiene intersección no vacía). A los grafos que satisfacen esta condición les llamaremos grafos clique Helly.

Posteriormente Roberts y Spencer [23], continuando con las ideas de Hamelink, encuentran una condición necesaria y suficiente para que un grafo sea grafo clique: que exista una familia de completos (no necesariamente los cliques) que cubra las aristas del grafo y que tenga la propiedad de Helly. A tales familias las llamaremos familias  $\mathcal{RS}$ . El problema de determinar la complejidad del reconocimiento de los grafos clique permaneció abierto por más de treinta años, surgiendo en tanto, varias publicaciones

al respecto [12, 13, 14]. En [2] se prueba que tal problema de reconocimiento es NP-completo; y en [3] que permanece siendo NP-completo aún restringido a la clase de los grafos split.

*¿Cuántos generadores tiene un grafo clique?*

La operación de agregar un vértice  $v$  a un grafo  $H$  y hacerlo adyacente a todos los vértices de un clique de  $H$  nos devuelve un nuevo grafo que tiene la misma imagen que  $H$  por  $K$ . Se puede concluir que si  $G$  es un grafo clique entonces hay infinitos grafos que generan  $G$ . Esto motiva la definición de generador crítico, que es un generador minimal respecto a la cantidad de vértices; es decir,  $H$  es generador crítico de  $G$  si  $K(H) = G$  y  $K(H - v) \neq G$  para todo  $v \in H$ . Es bien conocido que la cantidad de generadores críticos de un grafo clique es finita [10].

*¿Cuáles son aquellos grafos que tienen un único generador crítico?*

Ésta pregunta es formulada por primera vez por Escalante en [10], y posteriormente fue considerada por los autores Chong-Kean y Yee-Hock, en [19]. El problema de caracterizar los grafos clique con un único generador crítico permanece abierto.

*¿Cuáles son aquellos que generan un completo?*

Encontramos en la literatura el trabajo de Lucchesi, Picinin de Mello y Szwarcfiter [20] donde se describen los generadores críticos de un completo tales que no tienen vértice universal y son minimales en el sentido de que no contienen un subgrafo inducido sin vértice universal que genere un completo.

*Dado un entero positivo  $p$ , ¿cuáles son los grafos  $H$  tales que  $K(H)$  tiene un completo de tamaño  $p$ , pero  $K(H - v)$  no tiene un completo de tamaño  $p$  cualquiera sea el vértice  $v$ ?*

En otras palabras, ¿cuáles son los subgrafos prohibidos minimales para la familia  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$ ? Protti y Szwarcfiter estudiaron este problema en [22] y describieron mediante subgrafos prohibidos minimales las clases  $K^{-1}(K_3\text{-libre})$  y  $K^{-1}(K_4\text{-libre})$ .

*Dado un grafo  $G$  clique Helly, ¿existe un vértice  $v$  en  $G$  tal que  $G - v$  es también clique Helly?*

Dourado, Protti y Szwarcfiter se hicieron esta pregunta en [8] y conjeturaron que la respuesta era positiva, es decir, todo grafo clique Helly contiene un vértice tal que al removerlo se obtiene nuevamente un grafo clique Helly.

A lo largo de la tesis analizamos cada una de estas cuestiones y aportamos resultados originales sobre ellas. La tesis está organizada de la siguiente forma:

En el **Capítulo 2** damos definiciones básicas y resultados generales sobre familias de conjuntos, grafos y operadores.

En el **Capítulo 3** profundizamos en el estudio de los generadores de un grafo clique  $G$  y su relación con las familias  $\mathcal{RS}$  de ese grafo; particularmente consideramos los generadores críticos de  $G$ .

En el **Capítulo 4** damos la familia de todos los generadores críticos de  $K_4$  y la familia de todos los generadores críticos de  $K_5$ .

En el **Capítulo 5** caracterizamos los grafos  $K_4$ -libre y los grafos  $\{K_5, K_5 - e\}$ -libre que tienen un único generador crítico.

En el **Capítulo 6** acotamos el orden, el número clique y el número de estabilidad de un grafo  $G$  tal que  $K(G)$  tiene un  $K_p$  pero  $K(G - v)$  no tiene un  $K_p$  para todo  $v$  en  $G$ ; y utilizamos estos resultados para probar la finitud de la familia de prohibidos minimales de la familia  $K^{-1}(K_p$ -libre).

En el **Capítulo 7** respondemos negativamente a la conjetura de Dourado, Protti y Szwarcfiter, mostrando grafos clique Helly tales que al remover cualquier vértice dejan de serlo.



# Capítulo 2

## Definiciones y Resultados Generales

En este capítulo damos definiciones básicas y resultados generales sobre familias de conjuntos, grafos y operadores, que utilizaremos a lo largo de este trabajo y que son de uso corriente en Teoría de Grafos. El objetivo del mismo es presentar claramente, para comodidad del lector, la notación a utilizar y los resultados que damos por conocidos. No incluimos las demostraciones de éstos ya que figuran en la bibliografía citada.

### 2.1. Familias de conjuntos

Sea  $I$  un conjunto finito y no vacío. Una *familia de conjuntos* con *subíndices* en  $I$  es una secuencia finita de conjuntos finitos y no vacíos,  $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ . Los *miembros* de la familia son los conjuntos  $F_i$ . Los *elementos* de la familia son los elementos del conjunto  $\cup \mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} F_i$ , es decir son los elementos de los conjuntos  $F_i$ , miembros de  $\mathcal{F}$ . Notamos  $\mathcal{F} - F_j$  a la familia  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I, i \neq j}$ .

Dos familias  $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$  y  $\mathcal{A} = (A_j)_{j \in J}$  son *isomorfas* si existen dos biyecciones  $\alpha : I \rightarrow J$  y  $\beta : \cup \mathcal{F} \rightarrow \cup \mathcal{A}$  tales que  $\beta(F_i) = A_{\alpha(i)}$  para todo  $i \in I$ . Decimos que  $\mathcal{F}$  es una *subfamilia* de  $\mathcal{A}$ , y lo notamos  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ , si existe una aplicación  $\alpha : I \rightarrow J$ , inyectiva, tal que para todo  $i \in I$  se verifica que  $F_i = A_{\alpha(i)}$ . Es claro que si  $J' \subseteq J$ , entonces  $\mathcal{A}' = (A_j)_{j \in J'}$  es una subfamilia de  $\mathcal{A}$ .

Por otra parte,  $\mathcal{F} \cup \mathcal{M}$  indica la familia cuyos miembros son los miembros de  $\mathcal{F}$  y los miembros de  $\mathcal{M}$ .

Sean  $u$  y  $v$  elementos de la familia de conjuntos  $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ . Decimos que  $u$  está separado de  $v$  en  $\mathcal{F}$ , si existe  $i \in I$  tal que  $u \in F_i$  y  $v \notin F_i$ . Es fácil ver que

$$u \text{ está separado de } v \text{ en } \mathcal{F} \iff v \notin \bigcap_{i \in I/u \in F_i} F_i$$

Si  $u$  no está separado de  $v$  en  $\mathcal{F}$ , decimos que  $u$  está dominado por  $v$  en  $\mathcal{F}$  o bien que  $v$  domina a  $u$ . Los elementos  $u$  y  $v$  están separados si  $u$  está separado de  $v$  y  $v$  está separado de  $u$ . Dado un elemento  $u$  llamaremos  $F_u$  a la subfamilia formada por los miembros de  $\mathcal{F}$  que contienen a  $u$ . Un elemento  $u$  está separado en  $\mathcal{F}$  si está separado de todo otro vértice. Diremos que la familia  $\mathcal{F}$  es separadora si todo elemento está separado, o en otras palabras  $\mathcal{F}$  es separadora si y sólo si no hay en  $\mathcal{F}$  elementos dominados.

Son equivalentes

- $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$  es separadora;
- $\forall u, v \in \cup \mathcal{F}, \exists i \in I$  tal que  $u \in F_i$  y  $v \notin F_i$ ;
- $\forall u \in \cup \mathcal{F}, \{u\} = \bigcap_{i \in I/u \in F_i} F_i$ .

Una familia de conjuntos es mutuamente intersectante si todo par de miembros de la familia tiene intersección no vacía. La intersección total o intersección de una familia  $\mathcal{F}$  de conjuntos, es el conjunto intersección de todos sus miembros, el cual denotaremos mediante  $\cap \mathcal{F}$ . Se dice que una familia de conjuntos tiene la propiedad de Helly o bien que es una familia Helly si toda subfamilia mutuamente intersectante tiene intersección total no vacía.

## 2.2. Grafos

Un grafo simple  $G$  es un par  $(V(G), E(G))$ , donde  $V(G)$  es un conjunto finito no vacío, cuyos elementos se llaman vértices de  $G$  y,  $E(G)$  es un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de dos elementos de  $V(G)$ . Los elementos de  $E(G)$  se llaman aristas de  $G$ . Si  $e = \{x, y\}$  es una arista, se notará  $xy$ , siendo  $x$  e  $y$  los vértices extremos de  $e$ . Una arista  $e$  es incidente en un vértice  $x$  si  $x$  es un vértice extremo de  $e$ . El grado de un vértice  $v$  es la cantidad de aristas incidentes en él y lo notaremos  $d(v)$ . El vértice  $x$  es adyacente a  $y$  si  $xy$  es una arista de  $G$ ; en este caso también decimos que  $x$  e  $y$  son vecinos en  $G$ , y escribimos  $x \sim y$ .

El vecindario abierto de un vértice  $v$ , denotado mediante  $N(v)$ , es el conjunto de los vértices adyacentes a  $v$ . Es decir,  $N(v) = \{x \in V(G) : xv \in E(G)\}$ . El vecindario cerrado

del vértice  $v$  se define por  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ . Un vértice  $v$  es universal cuando  $N[v] = V(G)$ . Los vértices  $x, y \in V(G)$  son gemelos si son adyacentes y  $N[x] = N[y]$ ; y son falsos gemelos si no son adyacentes y  $N(x) = N(y)$ .

Diremos que dos grafos  $G$  y  $H$  son isomorfos si existe una biyección  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $xy \in E(G)$  si y sólo si  $f(x)f(y) \in E(H)$ .

Un grafo  $H$  es un subgrafo de  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ . Si  $V'$  es un subconjunto no vacío de  $V(G)$ , entonces el subgrafo de  $G$  inducido por  $V'$  es el subgrafo  $H$  con  $V(H) = V'$  y  $E(H)$  igual al conjunto de aristas de  $G$  que tienen ambos extremos en  $V'$ . El subgrafo inducido por  $V'$  es denotado por  $G[V']$  y también solemos decir que  $G$  tiene al grafo  $G[V']$  como subgrafo inducido. Si  $V' \subseteq V(G)$ ,  $G - V'$  es el grafo que se obtiene quitando a  $G$  los vértices pertenecientes a  $V'$  y las aristas incidentes en estos vértices. En otras palabras,  $G - V'$  es el subgrafo de  $G$  inducido por el conjunto  $V(G) - V'$ , es decir,  $G - V' = G[V(G) - V']$ . Si  $v \in V(G)$ , denotaremos por  $G - v$  al subgrafo inducido por  $V(G) - \{v\}$ .

Un camino de  $G$  es una sucesión finita  $[v_1, v_2, \dots, v_k]$  de vértices de  $G$  distintos entre sí tal que, para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $v_i v_{i+1} \in E(G)$ . Un vértice de grado uno en un camino se llama vértice extremo del camino. Se dice que  $k + 1$  es la longitud del camino y que éste conecta o une los vértices  $v_1$  y  $v_k$ . Un ciclo en  $G$  es una sucesión finita  $[v_1, \dots, v_k, v_{k+1}]$  de vértices de  $G$  con  $v_i \neq v_j$  para  $i \neq j$  e  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  y  $v_1 = v_{k+1}$  tal que, para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $v_{i-1} v_i \in E(G)$  y, además,  $v_k v_1 \in E(G)$ . La longitud del ciclo es  $k$ . Una cuerda de un camino o de un ciclo es una arista entre dos vértices no consecutivos. Un grafo es cordal si todo ciclo en  $G$  con al menos cuatro vértices tiene una cuerda.

Un grafo  $G$  se dice conexo si para cualquier par de vértices distintos de  $G$  existe un camino que los conecta. Una componente conexa de  $G$  es un subgrafo conexo maximal de  $G$ . En este trabajo se usarán grafos conexos salvo que se diga lo contrario.

Sean  $G$  y  $G'$  grafos. El grafo unión de  $G$  y  $G'$  es el grafo  $G \cup G'$  tal que

$$V(G \cup G') = V(G) \cup V(G') \quad \text{y} \quad E(G \cup G') = E(G) \cup E(G').$$

Un grafo  $G$  se dice completo si dos cualesquiera de sus vértices son adyacentes. Un subgrafo completo es un subgrafo que es un grafo completo. Un completo de un grafo  $G$  es un subconjunto  $C$  de  $V(G)$  tal que  $G[C]$  es un subgrafo completo. El tamaño de un completo es su cardinal. Diremos que un completo contiene a una arista, si los vértices extremos de la arista pertenecen al completo. Si  $C$  es un completo, el correspondiente subgrafo completo  $G[C]$  también se denotará  $C$ . Un triángulo de un

grafo  $G$  es un completo de  $G$  con tres vértices. Un clique de  $G$  es un completo de  $G$ , maximal respecto a la relación de inclusión de conjuntos. Mientras el contexto sea claro y no se preste a confusión llamaremos también completo de  $G$  a un subgrafo completo, y clique de  $G$  a un subgrafo cuyo conjunto de vértices es un clique.

La familia de cliques de  $G$  se notará  $\mathcal{C}(G)$ . Los elementos de esta familia son los vértices de  $G$ . Decimos entonces que el vértice  $u$  está dominado por (separado de) el vértice  $v$ , si  $u$  está dominado por (separado de) el vértice  $v$  en  $\mathcal{C}(G)$ . Resulta entonces que  $u$  es un vértice dominado si existe otro vértice  $v$  tal que,

$$v \in \bigcap_{C \in \mathcal{C}(G), u \in C} C.$$

Un conjunto independiente o conjunto estable de  $G$  es un subconjunto de vértices de  $G$  tales que dos cualesquiera de ellos no son adyacentes entre sí. El tamaño de un conjunto estable es la cantidad de vértices que posee.

Como es usual,  $\omega(G)$  indica el tamaño máximo del clique de  $G$  y  $\alpha(G)$  el tamaño máximo de un conjunto independiente de  $G$ . Diremos que  $v$  es un vértice simplicial si  $N[v]$  es un completo.

**Teorema 2.2.1.** [7] *Sea  $G$  un grafo cordal. Entonces,  $G$  tiene un vértice simplicial. Si  $G$  no es completo, entonces tiene dos vértices simpliciales no adyacentes.*

Dado  $p \in \mathbb{N}$ , simbolizamos mediante  $P_p$ ,  $C_p$  y  $K_p$ , a un camino, ciclo y completo, respectivamente, con  $p$  vértices.

En general un grafo se dice  $H$  – libre si ninguno de sus subgrafos inducidos es isomorfo a  $H$ . En particular, un grafo se dice  $K_p$  – libre si ninguno de sus subgrafos es isomorfo a  $K_p$ , en otras palabras si sus cliques tienen tamaño a lo sumo  $p - 1$  (i.e.  $\omega(G) < p$ ).

## 2.3. El Operador Intersección

Sea  $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$  una familia de conjuntos, el grafo de intersección de  $\mathcal{F}$  es un grafo que refleja la relación de intersección entre los miembros de la familia, es decir, es un grafo que posee un vértice por cada miembro de la familia y dos vértices son adyacentes si y sólo si los correspondientes miembros tienen intersección no vacía. El operador intersección, que notamos  $L$ , hace corresponder a cada familia de conjuntos su grafo intersección. Formalmente definimos el grafo intersección  $L(\mathcal{F})$  de la familia

$\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$  como el grafo cuyo conjunto de vértices es  $I$ , y dos vértices distintos  $i$  y  $j$  son adyacentes si y sólo si  $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ . Diremos que el vértice  $i$  de  $L(\mathcal{F})$  es correspondiente al miembro  $F_i$  de  $\mathcal{F}$  y recíprocamente. En la siguiente proposición resumimos resultados básicos ya conocidos sobre el operador intersección.

**Proposición 2.3.1.** [11] *Vale que*

- $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} \implies L(\mathcal{F}') \subseteq L(\mathcal{F})$ .
- $L$  es *surjectivo pero no inyectivo*.
- $L$  restringido a la clase de las familias Helly y separadoras es *inyectivo*.

## 2.4. El Operador Clique

El grafo clique de  $G$  es el grafo de intersección de la familia de cliques de  $G$ , es decir es el grafo  $L(\mathcal{C}(G))$ .

El operador clique, que simbolizamos mediante  $K$ , hace corresponder a un grafo  $G$  su grafo clique, es decir

$$K(G) = L(\mathcal{C}(G)).$$

Cabe observar que como el grafo clique es grafo de intersección, tiene sentido hablar de la correspondencia entre los cliques de  $G$  y los vértices de  $K(G)$ .

Si **Clase** es una clase cualquiera de grafos, entonces  $K(\mathbf{Clase}) = \{K(G) : G \in \mathbf{Clase}\}$ . Diremos que la clase es fija para el operador clique si  $K(\mathbf{Clase}) = \mathbf{Clase}$ . Un grafo  $G$  es self clique si  $K(G) = G$  y es 2-self-clique si  $K^2(G) = K(K(G)) = G \neq K(G)$ .

Un grafo  $G$  se dice un grafo clique, si existe un grafo  $H$  tal que  $K(H) = G$ ; en otros términos, si  $G$  es el grafo clique de algún grafo  $H$ .

$K(\mathbf{Grafos})$  indica la clase de los grafos cliques, es decir la imagen mediante el operador clique de la clase de todos los grafos.

Los siguientes son resultados básicos, ya conocidos, sobre el operador clique.

**Proposición 2.4.1.** [11] *Vale que*

- Que  $G'$  sea un subgrafo de  $G$  no implica que  $K(G')$  sea un subgrafo de  $K(G)$ .
- Si  $G'$  es un subgrafo inducido de  $G \implies K(G')$  es un subgrafo de  $K(G)$ .
- $K$  no es *surjectivo*, ni *inyectivo*.

- $K$  restringido a la clase de los grafos cuya familia de cliques es Helly y separadora es *inyectivo*.

Como hemos mencionado, el operador clique no es un operador suryectivo, es decir

$$K(\mathbf{Grafos}) \subset \mathbf{Grafos} \text{ pero } K(\mathbf{Grafos}) \neq \mathbf{Grafos}.$$

El ejemplo más sencillo de un grafo que no es grafo clique es la Pirámide, representado en la Figura 2.1.

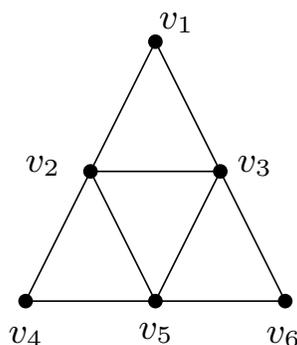


Figura 2.1: Pirámide.

El problema de reconocer los grafo clique se formula de la siguiente manera

Entrada: Un grafo  $G = (V(G), E(G))$ .

Pregunta: Existe un grafo  $H$  tal que  $K(H) = G$ ?

Este problema fue probado ser NP-completo en general; y aún restringido a la clase de grafos split [2, 3].

Una familia de completos de un grafo  $G$  es una familia de conjuntos  $(F_i)_{i \in I}$ , tal que para todo  $i \in I$ ,  $F_i$  es un completo de  $G$ . Diremos que la familia de completos  $(F_i)_{i \in I}$ ,  cubre las aristas  de  $G$  si para toda arista  $uv$  de  $G$  existe  $i \in I$  tal que  $\{u, v\} \subseteq F_i$ . Un cubrimientos por completos de un grafo  $G$  es una familia de completos de  $G$  que cubre las aristas de  $G$ . Una familia  $\mathcal{RS}$  de un grafo  $G$  es un cubrimiento por completos de  $G$  que tiene la propiedad de Helly.

A continuación enunciamos el teorema de Roberts y Spencer, que proporciona la caracterización de los grafos clique a la cual hemos hecho referencia anteriormente.

**Teorema 2.4.2.** (Roberts-Spencer)[23] *Un grafo  $G$  es un grafo clique si y sólo si existe una familia  $\mathcal{RS}$  de  $G$ .*

Un grafo  $G$  se dice grafo clique Helly, si la familia de cliques de  $G$ ,  $\mathcal{C}(G)$ , tiene la propiedad de Helly. Sea **Helly**, la clase de todos los grafos clique Helly.

Para cualquier grafo  $G$ ,  $\mathcal{C}(G)$  es un cubrimiento por completos de  $G$ , es claro entonces que si  $\mathcal{C}(G)$  tiene la propiedad de Helly, entonces  $\mathcal{C}(G)$  es una familia  $\mathcal{RS}$  de  $G$ , por lo tanto **Helly**  $\subseteq K(\mathbf{Grafos})$ . Más aún, en [10], Escalante demuestra que **Helly** es una clase fija para el operador clique,

$$\mathbf{Helly} = K(\mathbf{Helly}).$$

Por otra parte, Jayme Szwarcfiter da en [25] una caracterización de los grafos Helly que permite el reconocimiento eficiente de estos grafos.

Pertenecer a la clase **Helly** o a la clase  $K(\mathbf{Grafos})$  no son propiedades hereditarias para subgrafos inducidos. Un sencillo contraejemplo es el grafo clique Helly que se obtiene agregando a la Pirámide un vértice universal.

Los grafos clique Helly hereditarios fueron definidos por Prisner en [21] por la propiedad de que todo subgrafo inducido sea también clique Helly. Esta importante subclase de grafos clique Helly admite varias caracterizaciones, por ejemplo, la siguiente por subgrafos prohibidos inducidos minimales.

**Teorema 2.4.3.** [21] *Un grafo  $G$  es clique Helly hereditario si y sólo si no contiene ninguno de los grafos de la Figura 2.2 como subgrafo inducido.*

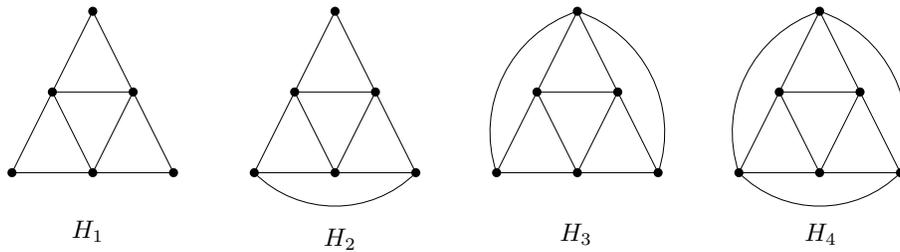


Figura 2.2: Subgrafos inducidos prohibidos de grafos clique Helly hereditarios.

Es fácil probar los siguientes lemas sobre los cuales volveremos en varias oportunidades:

**Lema 2.4.4.** [13] *Sea  $\mathcal{F}$  una familia  $\mathcal{RS}$  de  $G$ . Una arista  $xy$  de  $G$  es un miembro de  $\mathcal{F}$  si y sólo si  $\{x, y\}$  es un clique de  $G$ .*

**Lema 2.4.5.** [13] Sea  $G$  un grafo clique, entonces  $G$  es clique Helly hereditario si y sólo si  $G$  no tiene como subgrafo inducido al grafo  $A$  o al grafo  $B$  de la Figura 2.3.

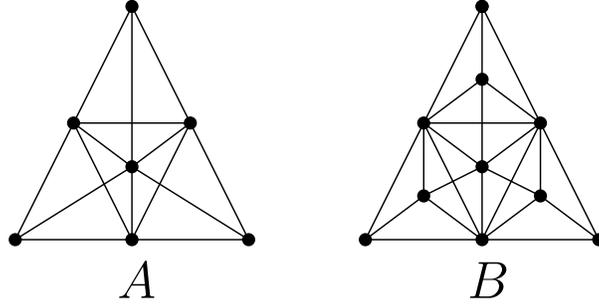


Figura 2.3: Grafos  $A$  y  $B$ .

**Lema 2.4.6.** [23] Si  $C$  es un clique de  $G$  de tamaño menor o igual que tres, y  $\mathcal{F}$  es una familia  $\mathcal{RS}$  de  $G$ , entonces  $C$  es un miembro de  $\mathcal{F}$ , por lo tanto,

$$\text{si } G \in \mathbf{K}_4 - \text{libre, entonces } G \in K(\mathbf{Grafos}) \iff G \in \mathbf{Helly}.$$

Si  $G$  es un grafo,  $K^{-1}(G)$  es la imagen inversa de  $G$  por el operador clique, es decir el conjunto de todos los grafos  $H$  tales que  $K(H) = G$ . Si **Clase** es una clase de grafos  $K^{-1}(\mathbf{Clase}) = \{K^{-1}(G), G \in \mathbf{Clase}\}$ .

Es claro que  $G \in K(\mathbf{Grafos})$  si y sólo si  $K^{-1}(G) \neq \emptyset$ , y, por otra parte, si  $K^{-1}(G) \neq \emptyset$ , entonces  $K^{-1}(G)$  contiene una cantidad infinita de grafos no isomorfos entre sí.

El siguiente resultado permite obtener los grafos en la imagen inversa por el operador  $K$  de un grafo clique dado, a partir de ciertas familias  $\mathcal{RS}$  del grafo en cuestión, las familias  $\mathcal{RS}$ -separadoras.

Una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora de un grafo  $G$  es una familia  $\mathcal{RS}$  que además es separadora.

**Teorema 2.4.7.** [13] Sean  $G$  y  $H$  grafos. Entonces  $G = K(H)$  si y sólo si  $H$  es el grafo intersección de una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora de  $G$ .

En el siguiente teorema se muestra una forma de obtener una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora de un grafo  $G$  a partir de una familia  $\mathcal{RS}$  de ese mismo grafo. Ésta podría no ser la única forma.

**Teorema 2.4.8.** [13] Sea  $\mathcal{F}$  una familia  $\mathcal{RS}$  de  $G$ . Si para todo  $v \in V(G)$ , tal que  $\mathcal{F}_v \subseteq \mathcal{F}_u$ , se agrega  $\{v\}$  a  $\mathcal{F}$  se obtiene una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora de  $G$ .

### 2.4.1. Grafos clique críticos

Sea  $H$  un grafo y  $v$  un vértice de  $H$ . Diremos que  $v$  es un vértice superfluo si  $K(H-v) = K(H)$ , caso contrario diremos que  $v$  es crítico. Un grafo  $H$  es clique crítico, o simplemente crítico si todos sus vértices son críticos.

Sean  $H$  y  $G$  grafos. Diremos que  $H$  es un generador de  $G$  si  $K(H) = G$ . Y diremos que  $H$  es un generador crítico de  $G$  si  $H$  es crítico y generador de  $G$ . En otras palabras, un generador crítico de  $G$  es un grafo perteneciente a  $K^{-1}(G)$  minimal respecto a la remoción de vértices.

En el siguiente corolario se caracterizan los grafos críticos.

**Corolario 2.4.9.** [1] *Un grafo  $H$  es crítico si y sólo si para cada vértice  $v$  de  $H$  existen cliques  $C_1$  y  $C_2$  de  $H$  satisfaciendo al menos una de las siguientes dos condiciones:*

1.  $\{v\} = C_1 - C_2$ , o

2.  $\{v\} = C_1 \cap C_2$ .



# Capítulo 3

## Nuevos resultados sobre generadores críticos de un grafo clique

En vista del Teorema 2.4.7, sabemos que para obtener un generador de un grafo clique  $G$  se debe aplicar el operador intersección a una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora de  $G$ . En este capítulo analizaremos qué condiciones deben pedirse a esa familia  $\mathcal{RS}$ -separadora para que el generador de  $G$  obtenido por el operador intersección sea crítico. El siguiente lema complementa el resultado dado en el Teorema 2.4.7.

**Lema 3.0.1.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia de conjuntos completos de  $G$  con la propiedad de Helly. Si  $L(\mathcal{F})$  es un generador de  $G$ , entonces  $\mathcal{F}$  es separadora y cubre las aristas de  $G$ , i.e.  $\mathcal{F}$  es una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora de  $G$ .*

**Demostración:** Primero observemos que si  $C$  es un clique de  $L(\mathcal{F})$ , entonces existe una subfamilia mutuamente intersectante de  $\mathcal{F}$ , digamos  $\mathcal{F}_C$ , tal que  $C = L(\mathcal{F}_C)$ . Además, como  $\mathcal{F}$  tiene la propiedad de Helly, existe algún vértice de  $G$ , digamos  $v_C$ , tal que  $\mathcal{F}_C \subseteq \mathcal{F}_{v_C}$ , y como  $C$  es un clique debe darse la igualdad. Claramente, cliques diferentes de  $L(\mathcal{F})$  tendrán que corresponder con diferentes vértices de  $G$ . Por otro lado, como  $L(\mathcal{F})$  es un generador de  $G$ , tenemos que el número de cliques de  $L(\mathcal{F})$  es exactamente el número de vértices de  $G$ , implicando que la aplicación  $C \mapsto v_C$  es uno a uno, esto significa que si  $u$  y  $v$  son vértices distintos de  $G$ , entonces  $\mathcal{F}_u$  y  $\mathcal{F}_v$  definen diferentes cliques de  $L(\mathcal{F})$ .

Ahora, con el fin de obtener una contradicción, supongamos que existen vértices  $u \neq v$  de  $G$  tales que  $u \in \cap \mathcal{F}_v$ . Luego  $\mathcal{F}_v$  es una subfamilia de  $\mathcal{F}_u$ , contradiciendo el

análisis anterior. Por lo tanto,  $\mathcal{F}$  es separadora.

Finalmente, como  $L(\mathcal{F}) = H$  es un generador de  $G$ , por Teorema 2.4.7, existe  $\mathcal{F}'$  familia  $\mathcal{RS}$ -separadora de  $G$  tal que  $L(\mathcal{F}') = H$ . Luego  $L(\mathcal{F}) = L(\mathcal{F}')$  y por la Proposición 2.3.1, el operador intersección restringido a la clase de las familias Helly y separadoras es inyectivo. Por lo tanto,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$  y esto implica que  $\mathcal{F}$  debe cubrir las aristas de  $G$ .  $\square$

La siguiente definición será utilizada para caracterizar las familias que a través del operador intersección nos devuelven generadores críticos. Diremos que una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora es minimal si ninguna subfamilia propia es una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora.

**Lema 3.0.2.** *Sea  $G$  un grafo clique. Si  $H$  es un generador crítico de  $G$ , entonces existe una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora minimal de  $G$ , digamos  $\mathcal{F}$ , tal que  $H = L(\mathcal{F})$ . Y recíprocamente, si  $\mathcal{F}$  es una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora minimal de  $G$ , entonces  $L(\mathcal{F})$  es un generador crítico de  $G$ .*

**Demostración:** Probemos la implicación directa. Por Teorema 2.4.7, sabemos que existe  $\mathcal{F}$  familia  $\mathcal{RS}$ -separadora de  $G$  tal que  $H = L(\mathcal{F})$ . Veamos que  $\mathcal{F}$  es minimal. Por Proposición 2.3.1, si  $\mathcal{F}'$  es una subfamilia propia de  $\mathcal{F}$ , entonces  $L(\mathcal{F}')$  es un subgrafo propio inducido de  $L(\mathcal{F})$  y como  $L(\mathcal{F})$  es crítico  $L(\mathcal{F}')$  no es un generador de  $G$ . Luego, por el Teorema 2.4.7,  $\mathcal{F}'$  no es una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora, lo que prueba que  $\mathcal{F}$  no admite una subfamilia propia  $\mathcal{RS}$ -separadora de  $G$ , por lo tanto  $\mathcal{F}$  es una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora minimal.

Para probar la implicación recíproca, sea  $\mathcal{F}$  una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora minimal de  $G$ . Por Teorema 2.4.7,  $L(\mathcal{F}) = H$  es un generador de  $G$ , resta probar que  $H$  es crítico. Supongamos, con el fin de obtener una contradicción, que  $H$  tiene un vértice superfluo  $v$ . Sea  $F$  el miembro de  $\mathcal{F}$  correspondiente a  $v$  por el operador intersección  $L$ , tenemos que  $K(L(\mathcal{F} - F)) = K(L(\mathcal{F}) - v) = G$ , i.e.  $L(\mathcal{F} - F)$  es un generador de  $G$ . Como  $\mathcal{F} - F$  es una familia de conjuntos completos de  $G$  con la propiedad de Helly, entonces, por Lemma 3.0.1,  $\mathcal{F} - F$  es una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora de  $G$ , lo que contradice el hecho de que  $\mathcal{F}$  es una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora minimal.  $\square$

Resulta entonces que buscar generadores críticos de  $G$  es equivalente a buscar familias  $\mathcal{RS}$ -separadoras minimales de  $G$ .

Una familia  $\mathcal{RS}$  es minimal si ninguna subfamilia propia es también una familia  $\mathcal{RS}$ . Observar que aún cuando cualquier familia  $\mathcal{RS}$ -separadora es una familia  $\mathcal{RS}$ , ser

una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora minimal no implica ser una familia  $\mathcal{RS}$  minimal.

**Ejemplo:** Sea  $G$  un grafo completo con  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$  y sea

$$\mathcal{F} = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1\}, \{v_3\}\}.$$

Si se remueve  $\{v_1, v_2, v_3\}$  dejamos de cubrir la arista  $v_1v_3$ . Si removemos cualquiera de los otros miembros, dejamos de separar algún vértice, pero no dejamos de cubrir. Por esto,  $\mathcal{F}$  resulta  $\mathcal{RS}$ -separadora minimal, pero no  $\mathcal{RS}$  minimal.

El siguiente resultado es similar al Teorema 2.4.8 pero para familias  $\mathcal{RS}$  minimales y  $\mathcal{RS}$ -separadoras minimales.

**Lema 3.0.3.** *Si  $\mathcal{F}$  es una familia  $\mathcal{RS}$  minimal de un grafo  $G$  y  $N_{\mathcal{F}}$  es el conjunto de vértices de  $G$  que no están separados por  $\mathcal{F}$ , entonces  $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup (\{v\})_{v \in N_{\mathcal{F}}}$  es una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora minimal de  $G$ .*

**Demostración:** Es claro que  $\mathcal{F}'$  es cubridora pues contiene a  $\mathcal{F}$ . Es Helly pues  $\mathcal{F}$  lo es y no podría dejar de serlo por agregar unitarios. Es separadora porque se agregan exactamente los unitarios correspondientes a vértices no separados por  $\mathcal{F}$ . Y por último, veamos que es minimal. Si se remueve de  $\mathcal{F}'$  algún miembro que pertenece también a  $\mathcal{F}$  se deja de cubrir y si se remueve alguno de los unitarios se deja de separar ese vértice.  $\square$

En lo que sigue, mostramos una forma de descomponer un grafo en vista al estudio de sus generadores. Dado un grafo  $G$ , sea  $\Gamma$  la relación binaria definida sobre  $E(G)$  de la siguiente manera:

$$e\Gamma e' \text{ si y sólo si existe algún triángulo } T \text{ de } G \text{ tal que } e \text{ y } e' \text{ son aristas de } T.$$

La clausura transitiva reflexiva  $\Gamma^*$  de  $\Gamma$  es una relación de equivalencia sobre  $E(G)$ . Las clases de equivalencia de  $\Gamma^*$  definen una partición de las aristas de  $G$ . Sean  $G_1, \dots, G_k$  los subgrafos de  $G$  inducidos por las clases de equivalencia de  $\Gamma^*$ . Es claro que su unión es el grafo  $G$  y que son mutuamente disjuntos por aristas. Notaremos  $\Gamma_G$  a la familia de grafos  $G_1, \dots, G_k$ .

**Teorema 3.0.4.** *Un grafo  $G$  es un grafo clique si y sólo si cada miembro  $G_i$  de  $\Gamma_G$  es un grafo clique. Además, las familias  $\mathcal{RS}$  minimales de  $G$  están en correspondencia con la unión de las familias  $\mathcal{RS}$  minimales de cada  $G_i$ . Entonces, si algún  $G_i$  tiene*

más de una familia  $\mathcal{RS}$  minimal,  $G$  tiene más de una familia  $\mathcal{RS}$  minimal y por lo tanto, más de un generador crítico.

**Demostración:** Si  $G$  es un grafo clique, entonces existe  $\mathcal{F}$  familia  $\mathcal{RS}$  de  $G$ . Para un miembro dado  $G_i$  de  $\Gamma_G$ , sea  $\mathcal{F}_i$  la subfamilia de  $\mathcal{F}$  formada por los miembros que cubren las aristas de  $G_i$ . Es fácil ver que  $\mathcal{F}_i$  es una familia  $\mathcal{RS}$  de  $G_i$ , entonces  $G_i$  es un grafo clique. Para probar la recíproca, asumamos que cada  $G_i \in \Gamma_G$  es un grafo clique y sea  $\mathcal{F}_i$  una familia  $\mathcal{RS}$  de  $G_i$ . Mostraremos que la familia  $\mathcal{F}$  igual a la unión de las familias  $\mathcal{F}_i$  es una familia  $\mathcal{RS}$  de  $G$ . Se deduce directamente que los miembros de  $\mathcal{F}$  son conjuntos completos y cubren las aristas de  $G$ , por lo que sólo resta ver que tiene la propiedad de Helly. Sea  $\mathcal{F}'$  una subfamilia mutuamente intersectante de  $\mathcal{F}$ . Si todos los miembros de  $\mathcal{F}'$  pertenecen a  $\mathcal{F}_i$  para algún  $i$ , entonces  $\mathcal{F}'$  tiene intersección total no vacía. Entonces asumamos que hay dos miembros de  $\mathcal{F}'$  de diferentes familias  $\mathcal{F}_i$ , digamos sin pérdida de generalidad que  $C_1 \in \mathcal{F}_1$  y  $C_2 \in \mathcal{F}_2$ . Luego,  $|C_1 \cap C_2| = 1$  porque  $C_1$  y  $C_2$  no comparten una arista (recordemos que  $G_1$  y  $G_2$  son disjuntos por aristas).

Llamemos  $x$  al único vértice en la intersección. Si existe un miembro  $C$  de  $\mathcal{F}'$  tal que  $x \notin C$ , como  $\mathcal{F}'$  es mutuamente intersectante, entonces hay vértices  $y \in C \cap C_1 \neq \emptyset$  y  $z \in C \cap C_2 \neq \emptyset$ . Los vértices  $x$ ,  $y$  y  $z$  inducen un triángulo en  $G$  lo que contradice el hecho de que  $C_1 \in \mathcal{F}_1$  y  $C_2 \in \mathcal{F}_2$ . Por lo tanto,  $\mathcal{F}'$  tiene intersección total distinta de vacío, lo que implica que  $\mathcal{F}$  es Helly.

Por último, la correspondencia uno a uno deviene de que los  $G_i$  son disjuntos por aristas. Resulta que si algún  $G_i$  tiene dos familias  $\mathcal{RS}$  minimales diferentes,  $G$  tiene al menos dos familias  $\mathcal{RS}$  minimales diferentes; así, aplicando el Lema 3.0.3,  $G$  admite dos familias  $\mathcal{RS}$ -separadoras minimales distintas, por Lema 3.0.2,  $G$  tiene al menos dos generadores críticos distintos.  $\square$

Una arista  $xy$  de un grafo  $G$  se dice multiclique si existen cliques  $C_1$  y  $C_2$  de  $G$  tales que  $\{x, y\} \subseteq C_1 \cap C_2$ , es decir, es una arista cubierta por al menos dos cliques de  $G$ .

**Corolario 3.0.5.** *Sea  $Q$  un clique de tamaño al menos cuatro de un grafo clique  $G$ . Si  $Q$  no tiene aristas multicliques, entonces  $G$  tiene más de una familia  $\mathcal{RS}$  minimal y, en consecuencia, más de un generador crítico.*

**Demostración:** Observar que si  $Q$  no tiene aristas multicliques, entonces  $Q$  es uno de los grafos  $G_i \in \Gamma_G$ . Como los grafos completos de tamaño al menos cuatro tienen más de una familia  $\mathcal{RS}$  minimal, la demostración se desprende del Teorema 3.0.4.  $\square$

**Lema 3.0.6.** *Sea  $Q$  un clique de tamaño al menos cuatro de un grafo clique  $G$ . Si  $Q$  tiene aristas multicliques y son todas incidentes en un mismo vértice, entonces  $G$  tiene más de una familia  $\mathcal{RS}$  minimal, y, en consecuencia, más de un generador crítico.*

**Demostración:** Sea  $\mathcal{F}$  una familia  $\mathcal{RS}$  minimal, sabemos que existe porque  $G$  es grafo clique por el Teorema 2.4.2. Veamos que todas las aristas de  $Q$  están cubiertas por completos incluidos en  $Q$ . Esto es evidente para aquellas aristas de  $Q$  que no son multicliques. Sea  $uv$  una arista multiclique y supongamos que no está cubierta por un completo contenido en  $Q$ . Sea  $F$  un completo de  $\mathcal{F}$  que la cubre. Como  $Q$  es un clique y  $F$  no está contenido en  $Q$ , existe un vértice  $w \in Q - F$ . La arista  $uw$  no es multiclique, luego debe ser cubierta con un completo  $F'$  de  $\mathcal{F}$  incluido en  $Q$ . Observar que  $F \cap F' = \{u\}$ , pues si  $h \neq u$  pertenece a la intersección, entonces  $h \in Q$ , con lo cual la arista  $hu$  es multiclique y no es incidente en  $v$ . Por otro lado, el completo  $F''$  de  $\mathcal{F}$  que cubre la arista  $vw$  es mutuamente intersectante con  $F$  y  $F'$ , luego, por la propiedad de Helly de  $\mathcal{F}$ ,  $F''$  debe contener a  $u$ . Resulta que  $F''$  es un completo incluido en  $Q$  cubriendo a  $uv$ , en contradicción con lo supuesto. Hemos probado que toda arista de  $Q$  debe cubrirse con algún completo incluido en  $Q$  (podría ser el mismo  $Q$ ).

Exhibiremos dos familias  $\mathcal{RS}$  minimales de  $G$ . Sea  $\mathcal{F}'$  la familia que se obtiene removiendo de  $\mathcal{F}$  los completos contenidos en  $Q$  y agregando  $Q$ . Veamos que  $\mathcal{F}'$  es una familia  $\mathcal{RS}$  minimal de  $G$ . Si  $Q$  era un miembro de  $\mathcal{F}$ , entonces  $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$  y no hay nada que probar. Asumamos entonces que  $Q$  no es miembro de  $\mathcal{F}$ . Que  $\mathcal{F}'$  es cubridora es claro. Veamos que es minimal. Si  $\mathcal{F}' - F$  sigue siendo cubridora, es claro que  $F \neq Q$ ; entonces, como  $\mathcal{F} - F$  no es cubridora, existe una arista  $xy$  tal que el único miembro de  $\mathcal{F}$  que la cubre es  $F$  y que, además, está cubierta por  $Q$ . Esto implica que  $xy$  es una arista de  $Q$ , luego por el análisis anterior,  $F$  está contenido en  $Q$ , contradiciendo la definición de  $\mathcal{F}'$ . Ahora veamos que  $\mathcal{F}'$  es Helly. Tomemos una subfamilia  $\mathcal{G}$  mutuamente intersectante de  $\mathcal{F}'$ . Si  $\mathcal{G}$  no contiene a  $Q$ , entonces es también una subfamilia de  $\mathcal{F}$ , por lo tanto, tiene intersección total no vacía. Si  $Q \in \mathcal{G}$ , supongamos con el fin de obtener una contradicción, que la intersección total de  $\mathcal{G} = \{Q, F_1, \dots, F_n\}$  es vacía. Como las únicas aristas multicliques de  $Q$  inciden en  $v$ ,  $|F_i \cap Q| = 1$  o  $v \in F_i \cap Q$ . Por lo que, si la intersección total de  $\mathcal{G}$  es vacía, alguno de los  $F_i$  no contiene a  $v$ , supongamos sin pérdida de generalidad que es  $F_1$  y que  $Q \cap F_1 = \{v_1\}$ . Luego, debe existir algún  $F_i$  que no contenga a  $v_1$ , digamos  $F_2$  que intersecta a  $Q$  en algún vértice, digamos  $v_2$ . Sea  $T$  el completo incluido en  $Q$  que pertenece a  $\mathcal{F}$  y cubre a  $v_1v_2$ .  $T, F_1, F_2$  tienen intersección vacía lo que es una

contradicción pues esos completos están en  $\mathcal{F}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{F}'$  es Helly.

Sean  $x, y, z$  vértices de  $Q$  distintos de  $v$  y sean  $F_1 = Q - x$ ,  $F_2 = Q - y$  y  $F_3 = Q - z$  completos de  $G$ . Veamos que  $\mathcal{F}'' = (\mathcal{F}' - Q) \cup \{F_1, F_2, F_3\}$  es una familia  $\mathcal{RS}$  minimal de  $G$ . Es claro que  $\mathcal{F}''$  es cubridora. Veamos que es minimal. Si  $\mathcal{F}'' - F$  sigue siendo cubridora,  $F \neq F_i$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$  (pues  $F_1$  es el único completo cubriendo  $yz$ ,  $F_2$  el único cubriendo  $xz$  y  $F_3$  el único cubriendo  $xy$ ). Resulta que  $F$  es un miembro de  $\mathcal{F}'$ ; luego, como  $\mathcal{F}'$  es minimal,  $\mathcal{F}' - F$  no es cubridora. Entonces existe una arista  $uw$  con  $u \neq v$  y  $w \neq v$  tal que el único miembro que la cubre es  $F$  y en  $\mathcal{F}''$  la debe cubrir también alguno de los  $F_i$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Esto es una contradicción pues  $uw \in Q$  y  $F$  es un completo no contenido en  $Q$ . Luego,  $\mathcal{F}''$  es minimal. Por último, veamos que  $\mathcal{F}''$  es Helly. Tomemos una subfamilia  $\mathcal{G}$  mutuamente intersectante de  $\mathcal{F}''$ . Si  $\mathcal{G}$  no contiene ni a  $F_1$  ni a  $F_2$  ni a  $F_3$ , entonces es también una subfamilia de  $\mathcal{F}'$  y podemos asegurar que tiene intersección total no vacía. Supongamos entonces que en  $\mathcal{G}$  hay uno, dos o tres de ellos. Si  $\mathcal{G}$  tiene intersección total de vacía, entonces existe un completo en  $\mathcal{G}$  que no contiene a  $v$ , digamos  $F_4$ . Luego,  $|F_4 \cap Q| = 1$ . Sea  $\{v_1\} = Q \cap F_4$ . Y debe existir en  $\mathcal{G}$  un completo que no contenga a  $v_1$ , digamos  $F_5$ . Luego,  $Q, F_4, F_5$  pertenecen a  $\mathcal{F}'$  y tienen intersección total no vacía lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $\mathcal{F}''$  es Helly. Se concluye entonces, que  $G$  tiene dos familias  $\mathcal{RS}$  minimales distintas y, por lo tanto, más de un generador crítico.  $\square$

# Capítulo 4

## Generadores críticos de un completo

En este capítulo estudiamos los generadores críticos de un grafo completo  $K_p$ , para un entero positivo  $p$ .

En la literatura encontramos el trabajo [20] de Lucchesi, Picinin de Mello y Szwarcfiter relativo a los generadores de un completo. El siguiente teorema es un resultado de dicho trabajo. En él también se muestra que el reconocimiento de los grafos que son generadores de un completo es CO-NP-completo.

**Teorema 4.0.1.** [20] *Un grafo sin vértice universal es generador de un completo y minimal (en el sentido de que no contiene un subgrafo sin vértice universal que genere un completo) si y sólo si es isomorfo a  $Q_{2n+1}$  para algún entero positivo  $n$ . Donde  $Q_n$  es el grafo tal que:*

- $V(Q_n) := \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .
- $Q_n[\{v_1, v_2, \dots, v_n\}] \simeq \bar{C}_n$ .
- para cada  $i, 1 \leq i \leq n$ ,  $N[u_i] = V(Q_n) - v_i$ .

En la Figura 4.1 se muestran los complementos de los dos primeros miembros de la familia mencionada en el teorema.

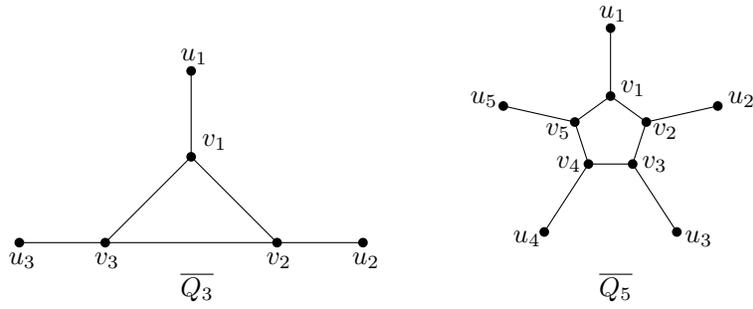


Figura 4.1: Grafos  $\overline{Q}_3$  y  $\overline{Q}_5$ .

Un problema relacionado con los anteriores es el de caracterizar la clase de grafos  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$ , es decir, la imagen inversa por el operador clique de la clase de grafos con número clique a lo sumo  $p-1$ . Dado que la clase es hereditaria, es posible caracterizarla por subgrafos inducidos prohibidos minimales.

Protti y Szwarcfiter, en el trabajo [22], describieron las familias de subgrafos inducidos prohibidos minimales de  $K^{-1}(K_3\text{-libre})$  y de  $K^{-1}(K_4\text{-libre})$ .

**Teorema 4.0.2.** [22] *Un grafo  $G$  está en  $K^{-1}(K_3\text{-libre})$  si y sólo si  $G$  no contiene como subgrafo inducido ninguno de los grafos de la Figura 4.2.*

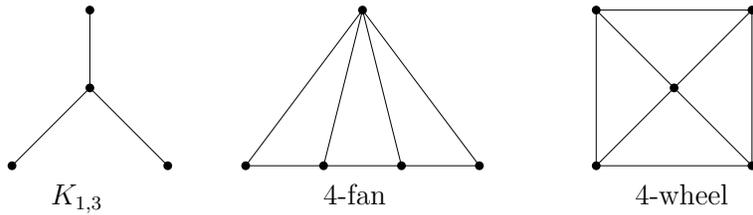


Figura 4.2: Prohibidos minimales de  $K^{-1}(K_3\text{-libre})$ .

**Teorema 4.0.3.** [22] *Un grafo  $G$  está en  $K^{-1}(K_4\text{-libre})$  si y sólo si  $G$  no contiene como subgrafo inducido ninguno de los grafos de la Figura 4.3.*

La siguiente Proposición muestra la relación entre los subgrafos prohibidos minimales de la familia  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$  y los generadores críticos de  $K_p$ .

**Proposición 4.0.4.** *Si  $G$  es un generador crítico de  $K_p$ , entonces es un subgrafo prohibido minimal de  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$ .*

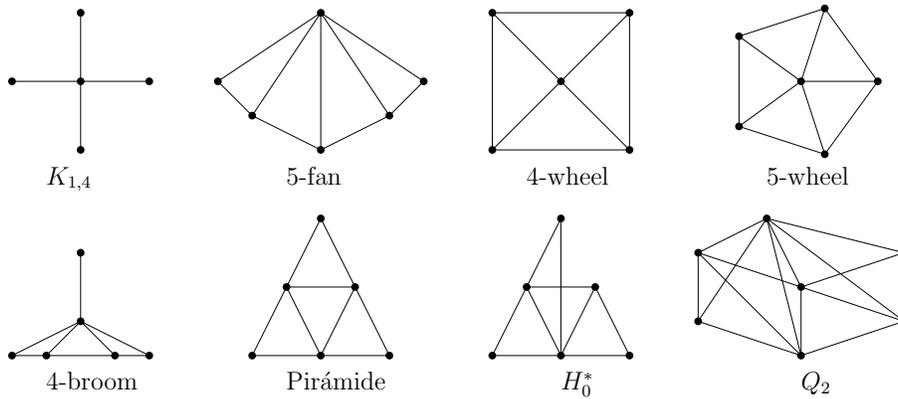


Figura 4.3: Prohibidos minimales de  $K^{-1}(K_4\text{-libre})$ .

**Demostración:** Si  $G$  es un generador crítico de  $K_p$ , entonces  $K(G)$  tiene un  $K_p$  y  $K(G - v)$  no tiene un  $K_p$  para todo  $v$  en  $G$ , luego  $G$  es un subgrafo prohibido minimal de  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$ .  $\square$

Es fácil ver que la recíproca no vale en general. Por ejemplo, el grafo 5-wheel de la Figura 4.3 es un prohibido minimal de la clase  $K^{-1}(K_4\text{-libre})$ , pero no es un generador crítico de  $K_4$ .

En el Capítulo 6 probaremos que para cualquier  $p$ , la familia de prohibidos minimales de la clase  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$  es finita.

En vista de la Proposición 4.0.4, los generadores críticos de  $K_3$  son los grafos de la figura 4.2 cuya imagen por el operador clique es un  $K_3$ .

**Teorema 4.0.5.** *Los generadores críticos de  $K_3$  son los grafos de la Figura 4.2 excepto el grafo 4-wheel.*

Análogamente los generadores críticos de  $K_4$  son los grafos de la Figura 4.3 cuya imagen por el operador clique es un  $K_4$ . En la siguiente sección daremos una nueva prueba de este resultado. Luego determinaremos todos los generadores críticos de  $K_5$ .

## 4.1. Generadores críticos de $K_4$

**Teorema 4.1.1.** *Los generadores críticos de  $K_4$  son los grafos de la Figura 4.3 excepto el 5-wheel.*

**Demostración:** Primero determinaremos las familias  $\mathcal{RS}$  minimales del grafo  $K_4$ . Por Lema 2.4.4, los miembros de una tal familia tendrán al menos tres vértices. Luego, la familia consistirá de solo el mismo  $K_4$  o sus miembros serán todos triángulos. En este caso, dos triángulos no son suficientes para cubrir todas las aristas; y en cambio, tres triángulos cualesquiera lo hacen.

Resulta que hay dos familias  $\mathcal{RS}$  minimales de  $K_4$ . Si  $V(K_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , se tienen las siguientes familias, sin pérdida de generalidad:

$$\mathcal{F} = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\};$$

$$\mathcal{G} = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}\}.$$

Analizaremos, a continuación, qué completos deben agregarse en cada caso para obtener una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora minimal.

– Familia  $\mathcal{F}$ . Observar que ninguno de los vértices está separado.

- Separando a cada vértice con un unitario se tiene la siguiente familia:

$$\mathcal{F}_1 = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}\}.$$

- Con completos de tamaño a lo sumo dos (aristas). Empecemos por la menor cantidad de aristas posibles. Agregando una sola arista ningún vértice queda separado del resto, por lo tanto, tenemos que agregar los cuatro completos unitarios y no obtenemos una familia minimal. En cambio, agregando dos aristas con un vértice en común, separamos ese vértice que las encuentra, supongamos sin pérdida de generalidad que ese vértice es  $v_1$ . Los vértices restantes los separamos con los completos unitarios.

$$\mathcal{F}_2 = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}\}.$$

Ahora, si una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora minimal tiene sólo tres aristas para separar vértices es necesario que no tengan las tres un vértice común, si no sólo estaremos separando ese vértice y habrá que agregar los otros tres completos unitarios, por lo tanto, esa familia no es minimal. Luego, tomamos tres aristas que no tengan un vértice en común, sean  $e_1, e_2, e_3$ . También se puede ver que estas tres aristas no pueden formar un triángulo sino no se obtiene una familia Helly. Teniendo en cuenta estas dos cosas se tiene que  $e_1, e_2, e_3$  deben formar un camino en  $K_4$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el camino es  $e_1 e_2 e_3 = v_1, v_2, v_3, v_4$ .

Resulta que  $v_2, v_3$  se separan con estas aristas y agregamos  $\{v_1\}, \{v_4\}$  para separar los vértices restantes:

$$\mathcal{F}_3 = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1\}, \{v_4\}\}.$$

Si se agregan a  $\mathcal{F}$  cuatro aristas. Sabemos que no pueden formar un triángulo. Si tomamos tres aristas con un vértice común, la cuarta arista formará un triángulo con dos de las anteriores, entonces este caso no es posible. Resulta que las cuatro aristas deben formar un  $C_4$  y se obtiene la familia

$$\mathcal{F}_4 = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}\}.$$

- Agregando completos de tamaño tres. Comencemos agregando sólo uno, sin pérdida de generalidad  $\{v_1, v_2, v_3\}$ . El triángulo solo no separa ningún vértice, pero si tomamos una arista que contenga a  $v_4$  y a  $v_i$  con  $i \in \{1, 2, 3\}$  se separa el vértice  $v_i$ . Los vértices restantes continuamos separándolos con completos unitarios.

$$\mathcal{F}_5 = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}\}.$$

Agreguemos dos triángulos, supongamos sin pérdida de generalidad,  $\{v_1, v_2, v_3\}$  y  $\{v_2, v_3, v_4\}$ .

Hasta allí esos triángulos no separan ningún vértice. Pensamos de manera similar a lo hecho en  $\mathcal{F}_5$ . La arista  $\{v_1, v_4\}$  no puede estar en la familia si no ésta no es Helly y la arista  $\{v_2, v_3\}$  no participaría en la separación de ningún vértice, pues es justo la intersección entre los dos triángulos. Tomemos una arista cualquiera de las restantes supongamos  $\{v_1, v_2\}$ . En este caso,  $v_2$  queda separado,  $\{v_1, v_3\}$  queda fuera de la familia porque sino no es Helly,  $\{v_2, v_4\}$  no separaría nada nuevo; por ende también queda fuera de la familia; y si agregamos  $\{v_3, v_4\}$  separamos también  $v_3$ . Entonces obtenemos la siguiente familia:

$$\mathcal{F}_6 = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1\}, \{v_4\}\}.$$

Es fácil ver que esta familia es minimal y que si en lugar de tomar  $\{v_1, v_2\}$ , comenzamos tomando otra de las aristas,  $v_1v_3$ ,  $v_2v_4$ , o  $v_3v_4$  obtenemos una familia isomorfa a la dada.

El caso en que tomamos tres triángulos para separar los vértices no nos otorga una familia minimal pues estaríamos cubriendo todo el  $K_4$  nuevamente. Luego, no hay más familias  $RS$ -separadoras minimales que tengan a  $\mathcal{F}$  como subfamilia.

- Familia  $\mathcal{G}$ . Observar que  $v_1$  ya está separado.
- Separando los vértices restantes con completos unitarios se tiene la siguiente familia:

$$\mathcal{F}_7 = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}\}.$$

Veamos si hay otra forma de separar los vértices distintos de  $v_1$ . Si se agrega otro triángulo o una arista que no contenga a  $v_1$  se obtiene una familia no Helly y si se agrega una arista que contenga a  $v_1$  no se separa ningún vértice nuevo. Luego, la expuesta arriba es la única familia  $RS$ -separadora minimal que contiene a  $\mathcal{G}$  como subfamilia.

Finalmente, observamos que:

$$\begin{aligned} L(\mathcal{F}_1) &= K_{1,4}; \\ L(\mathcal{F}_2) &= 4 - \text{broom}; \\ L(\mathcal{F}_3) &= 5 - \text{fan}; \\ L(\mathcal{F}_4) &= 4 - \text{wheel}; \\ L(\mathcal{F}_5) &= H_0^*; \\ L(\mathcal{F}_6) &= Q_2; \\ L(\mathcal{F}_7) &= \text{Pirámide}. \end{aligned}$$

□

Observar que los generadores críticos de  $K_3$  son todos los subgrafos inducidos prohibidos minimales de  $K^{-1}(K_3\text{-libre})$  excepto el 4-wheel, y que los generadores críticos de  $K_4$  son todos los subgrafos inducidos prohibidos minimales de  $K^{-1}(K_4\text{-libre})$  excepto el 5-wheel. Resulta natural preguntarse si esto sucede para los generadores críticos de  $K_p$  para cada  $p$ , es decir, si los generadores críticos de  $K_p$  son los subgrafos inducidos prohibidos minimales de  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$  excepto el grafo  $(p+1)$ -wheel.

La respuesta es negativa, es decir, existen prohibidos minimales de  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$  distintos de  $(p+1)$ -wheel, los cuales no son generadores críticos de  $K_p$ .

Más aún, no necesariamente los prohibidos minimales de  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$  son generadores de un completo, tal como lo muestra el ejemplo de la Figura 4.4.

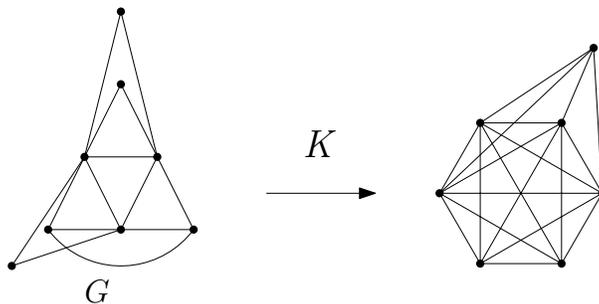


Figura 4.4:  $G$  es un prohibido minimal de  $K^{-1}(K_6\text{-libre})$  y no genera un grafo completo.

## 4.2. Generadores críticos de $K_5$

Visto lo complejo de encontrar las familias  $\mathcal{RS}$ -separadoras minimales en un grafo tan pequeño como  $K_4$ , resulta inviable seguir con este procedimiento para completos con mayor cantidad de vértices. Por esto, para determinar los generadores críticos de  $K_5$ , haremos una partición de casos como muestra el esquema de la Figura 4.5.

# GENERADORES CRÍTICOS DE $K_5$

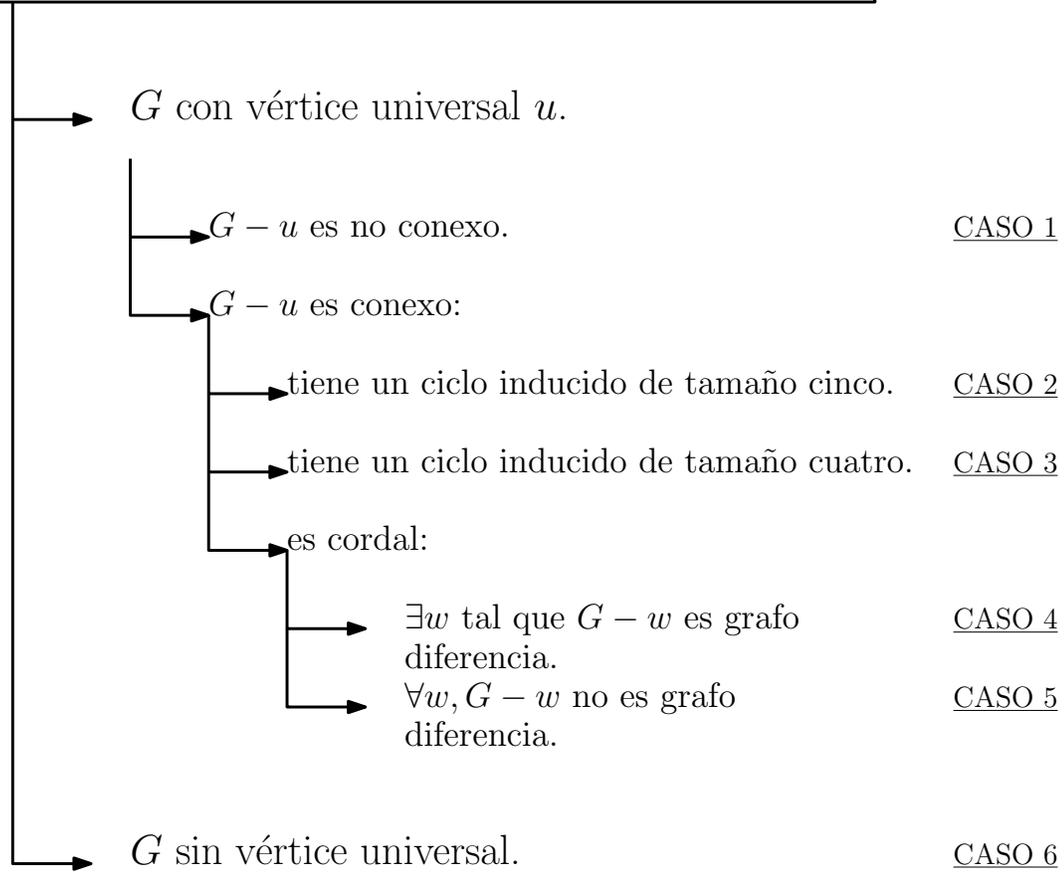


Figura 4.5: Partición de los generadores críticos de  $K_5$ .

## 4.2.1. Generadores críticos de $K_5$ con vértice universal.

Utilizaremos los siguientes resultados generales.

**Observación 1.** Si  $G$  tiene un vértice universal  $u$  y  $\mathcal{C}(G) = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_p\}$ , entonces  $\mathcal{C}(G - u) = \{Q_1 - u, Q_2 - u, \dots, Q_p - u\}$ .

**Observación 2.** Si  $G$  es un generador crítico de un grafo  $H$ , entonces para todo  $S \subseteq V(G)$ ,  $G - S$  no es un generador crítico de  $H$ .

**Lema 4.2.1.** Sea  $G$  con un vértice universal  $u$ . Si  $G$  es un generador crítico de  $K_p$ , entonces todo vértice de  $G$  excepto  $u$  es una diferencia exacta entre dos cliques de  $G$  (y

en consecuencia, también de dos cliques de  $G - u$ ), y  $G - u$  tiene al menos dos cliques disjuntos.

**Demostración:** Sabemos por Corolario 2.4.9 que cada vértice de un generador crítico es intersección o diferencia exacta entre dos cliques. Como  $u$  es un vértice universal de  $G$ ,  $u$  es el único vértice que puede ser intersección exacta entre dos cliques, es más, debe serlo ya que no puede ser diferencia exacta entre dos cliques (pues está en todos). Luego, todo otro vértice de  $G$  es diferencia exacta entre dos cliques de  $G$ . Sean  $Q_i, Q_j$  los cliques de  $G$  para los que  $\{u\} = Q_i \cap Q_j$ , entonces, por Observación 1,  $Q_i - u$  y  $Q_j - u$  son cliques de  $G - u$  y además son disjuntos.  $\square$

**Definición 4.2.2.** Un vértice de un grafo  $G$  se dice vértice diferencia si es la diferencia exacta entre dos cliques de  $G$ . Diremos entonces que  $G$  es grafo diferencia si es el grafo trivial o si cada uno de sus vértices es vértice diferencia.

**Proposición 4.2.3.** Los grafos diferencia conexos con a lo sumo cuatro cliques son los que se describen en la Figura 4.6.

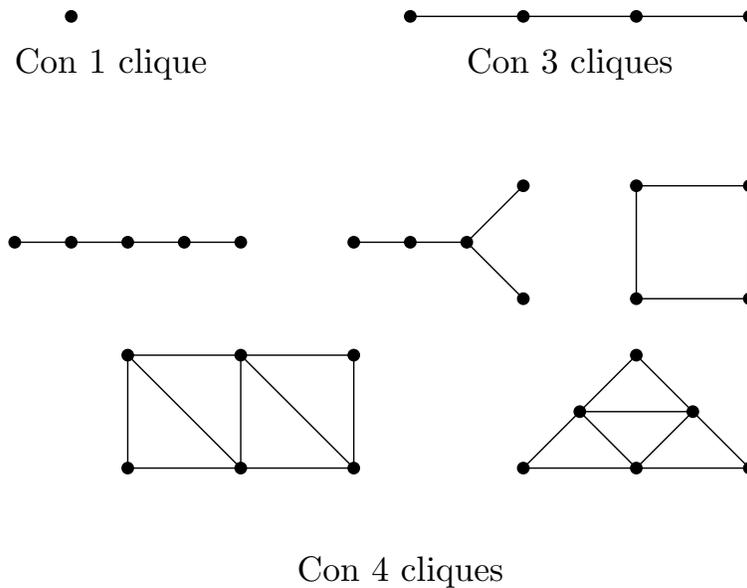


Figura 4.6: Grafos diferencia conexos con a lo sumo 4 cliques.

**Demostración:** Sea  $G$  con  $t$  cliques,  $t \leq 4$ . Como todo vértice es diferencia,  $G$  es crítico. Si  $G$  tiene dos cliques disjuntos, entonces  $G$  más un vértice universal es un generador

crítico de  $K_t$ . Tales grafos se obtienen haciendo una inspección de los generadores críticos de  $K_2$ ,  $K_3$  y  $K_4$  con vértice universal. Si  $G$  no tiene dos cliques disjuntos, entonces los cliques son mutuamente intersectantes y no pueden tener un vértice en común pues tal vértice no sería diferencia. Luego  $G$  no es Helly y tiene a lo sumo cuatro cliques, debe ser el grafo Pirámide.  $\square$

En todos los casos de las siguientes proposiciones en las que se caracterizan generadores críticos, la demostración de que los grafos obtenidos son generadores críticos de  $K_5$ , surge inmediatamente al observar que los grafos tienen cinco cliques y que satisfacen el Corolario 2.4.9.

**Proposición 4.2.4.** *Sea  $G$  con vértice universal  $u$  tal que  $G - u$  no es conexo. El grafo  $G$  es un generador crítico de  $K_p$  si y sólo si las componentes conexas de  $G - u$ ,  $G_1, \dots, G_m$ , son grafos diferencia conexos y  $|\mathcal{C}(G_1)| + \dots + |\mathcal{C}(G_m)| = p$ .*

**Demostración:** La prueba es trivial a partir del Lema 4.2.1.  $\square$

El interés de esta proposición es poder encontrar generadores críticos de  $K_p$  de manera recursiva utilizando los grafos diferencia que fuimos encontrando en pasos anteriores.

CASO 1

**Corolario 4.2.5.** *Sea  $G$  con vértice universal  $u$  tal que  $G - u$  es un grafo no conexo. El grafo  $G$  es un generador crítico de  $K_5$  si y sólo si  $G - u$  es alguno de los grafo de la Figura 4.7.*

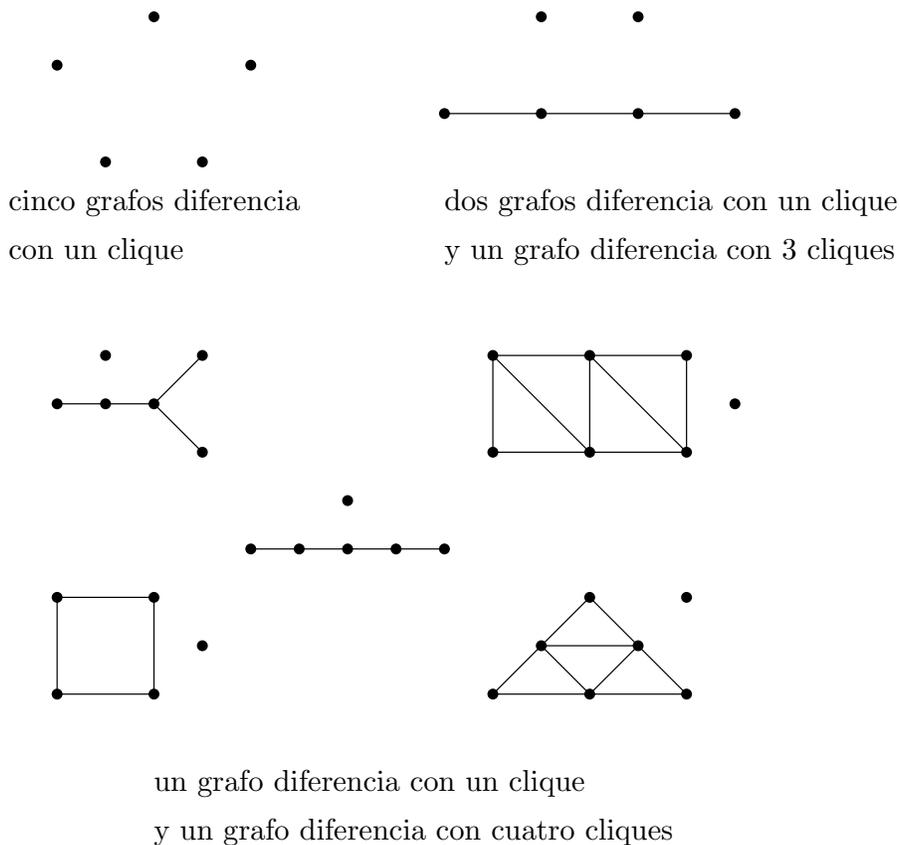


Figura 4.7: Agregando un vértice universal a cada uno de estos grafos se obtienen los generadores críticos de  $K_5$  que tienen un vértice universal cuya remoción produce un grafo no conexo.

**Demostración:** Por la Proposición 4.2.4, las componentes conexas de  $G - u$  tienen a lo sumo cuatro cliques, y la suma de la cantidad de cliques de cada una de ellas debe ser cinco. La demostración se completa utilizando la Proposición 4.2.3.  $\square$

## CASO 2

**Proposición 4.2.6.** *Sea  $G$  con vértice universal  $u$  tal que  $G - u$  es un grafo conexo con un  $C_5$  inducido. El grafo  $G$  es un generador crítico de  $K_5$  si y sólo si  $G$  es el grafo de la Figura 4.8.*

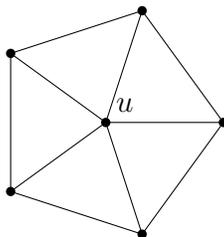


Figura 4.8: Único generador crítico de  $K_5$  con vértice universal  $u$ , tal que  $G - u$  es conexo y tiene un  $C_5$  inducido.

**Demostración:** Si  $G$  es generador crítico, por la Proposición 4.2.1, todo vértice de  $G - u$  es diferencia de dos cliques de  $G - u$ . Como  $G - u$  tiene un ciclo inducido de tamaño cinco, cada una de las aristas del ciclo está en un clique diferente de  $G - u$ . Si el grafo  $G - u$  tuviese algún otro vértice además de los del ciclo, éste no podría ser diferencia.  $\square$

CASO 3

**Proposición 4.2.7.** *Sea  $G$  con vértice universal  $u$  tal que  $G - u$  es un grafo conexo con un  $C_4$  inducido. El grafo  $G$  es un generador crítico de  $K_5$  si y sólo si  $G - u$  es alguno de los grafos de la Figura 4.9.*

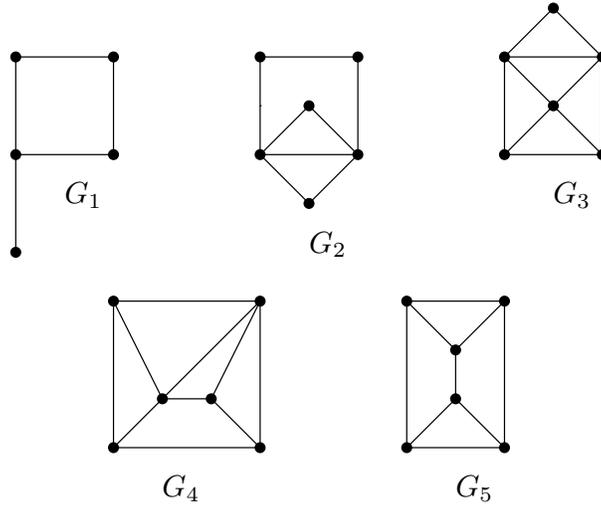


Figura 4.9: Agregando un vértice universal a cada uno de estos grafos se obtienen los generadores críticos de  $K_5$  que tienen un vértice universal cuya remoción produce un grafo conexo con un  $C_4$  inducido.

**Demostración:** Sea  $G$  un generador crítico de  $K_5$  en las condiciones de la proposición. Entonces  $G - u$  tiene un ciclo inducido de tamaño cuatro y, por Lema 4.2.1, es un grafo diferencia. Sea  $[1, 2, 3, 4, 1]$  un ciclo del grafo. Como está inducido, las aristas  $12, 23, 34, 41$  pertenecen cada una a un clique distinto de  $G - u$ , digamos sin pérdida de generalidad, que  $\{1, 2\} \subseteq Q_1$ ,  $\{2, 3\} \subseteq Q_2$ ,  $\{3, 4\} \subseteq Q_3$ ,  $\{4, 1\} \subseteq Q_4$ . Como  $G - u$  tiene cinco cliques, tiene al menos un vértice que no pertenece al ciclo, digamos  $x$ .

Caso 3.1: Supongamos primero que  $x$  es adyacente a un único vértice del ciclo. Así se obtiene  $G_1$  cumpliendo todas las condiciones pedidas.

Caso 3.2: Supongamos que  $x$  es adyacente a exactamente dos vértices adyacentes del ciclo, sin pérdida de generalidad, sean estos vértices 1 y 2. Se tiene que:  $1 \in Q_4 - Q_3$ ,  $2 \in Q_2 - Q_3$ ,  $3 \in Q_3 - Q_4$ ,  $4 \in Q_4 - Q_1$ .

Subcaso 3.2.1: Si  $\{x\} = Q_1 - Q_5$ , existe un vértice  $y \in Q_5$  y es adyacente a 1 y a 2. Se obtiene el grafo  $G_2$  que cumple todas las condiciones necesarias. Sin agregar más vértices pero pidiendo que  $y$  sea adyacente a los cuatro vértices del ciclo se obtiene  $G_3$ .

Subcaso 3.2.2: Supongamos ahora que  $\{x\} = Q_5 - Q_i$ , donde  $i \in \{2, 3, 4\}$ . Existe  $y \in Q_5$  y claramente,  $x \in Q_5$ . Luego,  $y \in Q_i$ . Si  $i = 2$  el vértice 2 es diferencia exacta entre  $Q_2$  y  $Q_3$ . Esto implica que  $y$  es adyacente a 4 también y se obtiene  $G_4$ . Si  $i = 4$  el caso es análogo. Si  $i = 3$  se obtiene el grafo  $G_5$ .

Caso 3.3: Supongamos que  $x$  es adyacente a exactamente tres vértices del ciclo, supongamos sin pérdida de generalidad, que son 1, 2 y 3. Supongamos que  $\{2\} = Q_i - Q_5$  donde  $i \in \{1, 2\}$ , sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\{2\} = Q_1 - Q_5$ . Luego,  $\{1, x, y\} \subseteq Q_5$ . El vértice  $x$  sólo puede ser diferencia entre  $Q_5$  y  $Q_4$  (pues  $1 \in Q_5$ ). Se obtiene así el grafo  $G_4$ . Supongamos ahora que  $\{2\} = Q_5 - Q_i$  donde  $i \in \{3, 4\}$ , sin pérdida de generalidad, asumamos que  $i = 3$ . Se tiene que  $\{2, 3, y\} \subseteq Q_5$  y, por lo tanto,  $\{y, 3, 4\} \subseteq Q_3$ . Se obtiene nuevamente  $G_4$ .  $\square$

CASO 4

**Proposición 4.2.8.** *Sea  $G$  con vértice universal  $u$  tal que  $G - u$  es un grafo conexo, cordal y  $G - u - v$  es un grafo diferencia para algún vértice  $v$  distinto a  $u$ . El grafo  $G$  es un generador crítico de  $K_5$  si y sólo si  $G - u$  es alguno de los grafos de la Figura 4.10.*

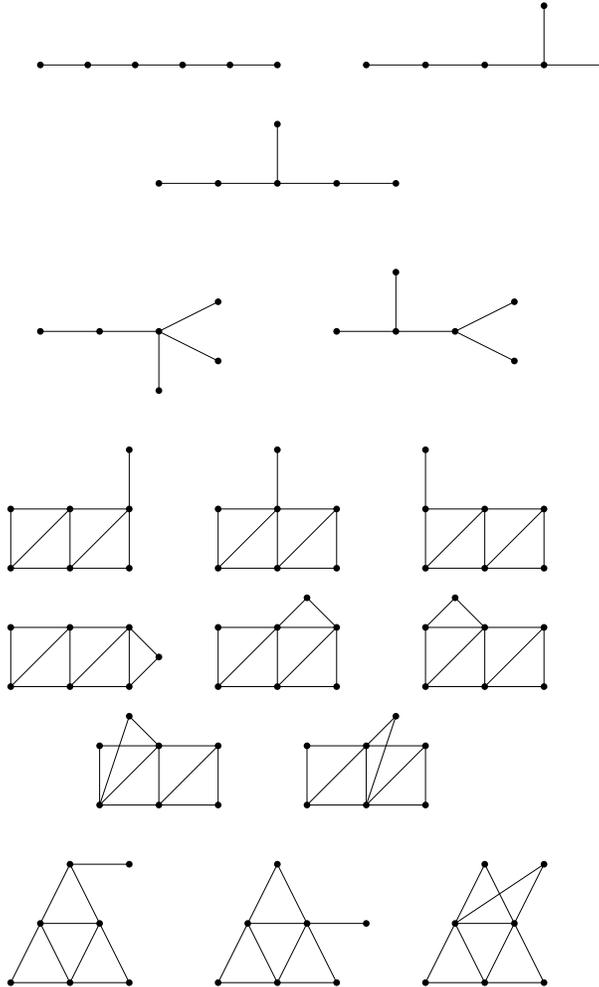


Figura 4.10: Agregando un vértice universal a cada uno de estos grafos se obtienen los generadores críticos de  $K_5$  que tienen un vértice universal cuya remoción produce un grafo conexo, cordal, el cual a su vez posee algún vértice cuya remoción produce un grafo diferencia.

**Demostración:** Supongamos primero que ese vértice  $v$  es simplicial. Entonces  $G - u - v$  es un grafo diferencia con cuatro cliques, cordal y conexo. En estas condiciones,

encontramos los grafos de la Figura 4.11 (observar que son una subfamilia de los grafos descritos en la Figura 4.6).

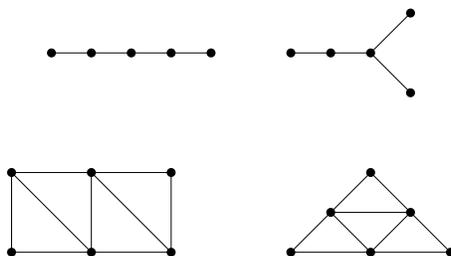


Figura 4.11: Grafos diferencia, conexos, cordales y con cuatro cliques.

Se tiene que  $G - u = H + v$  donde  $H$  es uno de los grafos de la Figura 4.11 y  $v$  es simplicial, es decir, es adyacente a los vértices de un completo no maximal de  $H$ .

Observando esto se obtienen los grafos de la Figura 4.10.

Ahora, debemos considerar el caso en que  $v$  no es simplicial. Entonces  $G - u - v$  es un grafo diferencia, cordal, que puede tener tres o cuatro cliques como se muestra en la Figura 4.12.

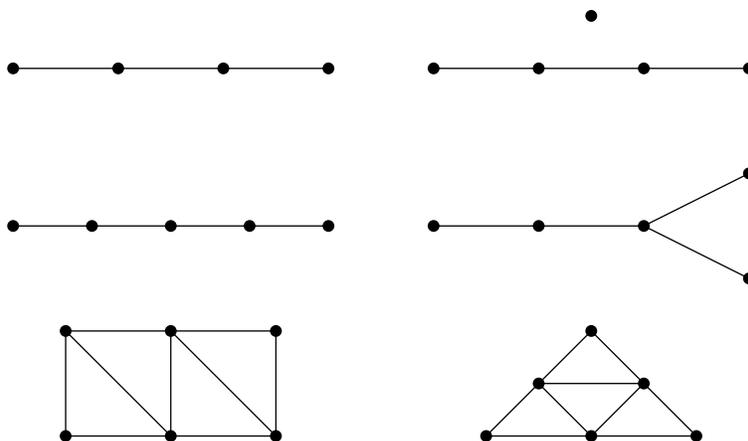


Figura 4.12: Grafos diferencia, conexos, cordales y con cuatro cliques.

Luego,  $G - u = H + v$  donde  $H$  es un grafo de la Figura 4.12. Como  $v$  no es simplicial, es adyacente a dos vértices no adyacentes de  $H$ . Por lo tanto, si  $H$  es el grafo de tres cliques de la Figura 4.12,  $H + v$  no es cordal o tiene también tres cliques. Si  $H$  es el grafo no conexo de dicha figura, entonces  $v$  es adyacente al vértice aislado y a por lo menos un vértice del camino. Si es adyacente a un sólo vértice del camino,

los grafos obtenidos ya fueron contemplados en el caso anterior. Si es adyacente a dos o tres vértices del camino  $H + v$  es no cordal o tiene cuatro cliques en lugar de cinco. Y si es adyacente a todos los vértices del camino  $H + v$  tiene cuatro cliques.

Por último, supongamos que  $H$  es alguno de los cuatro grafos conexos, con cuatro cliques  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , de la Figura 4.12. Se tiene que,  $H + v$  tiene cinco cliques,  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $C_i \subseteq Q_i$  para  $1 \leq i \leq 4$ . El clique  $Q_5$  tiene a  $v$  y a los vértices de un completo no maximal de  $H$ . Como  $v$  no es simplicial, pertenece a otro clique  $Q_i$  de  $H + v$ . Haciendo una inspección sobre los posibles grafos  $H$ , se observa que existe un vértice  $w$  que es la diferencia exacta entre  $C_i$  y  $C_j$ . Luego,  $v$  debe ser adyacente a todos los vértices de  $C_j$ , y siguiendo con el mismo análisis se obtiene que  $v$  es universal, no cumpliendo las condiciones requeridas para  $G - u$ . □

CASO 5

**Proposición 4.2.9.** *Sea  $G$  con vértice universal  $u$  tal que  $G - u$  es un grafo conexo, cordal y  $G - u - v$  no es un grafo diferencia para todo vértice  $v$  distinto a  $u$ . El grafo  $G$  es un generador crítico de  $K_5$  si y sólo si  $G - u$  es alguno de los grafos de la Figura 4.13.*

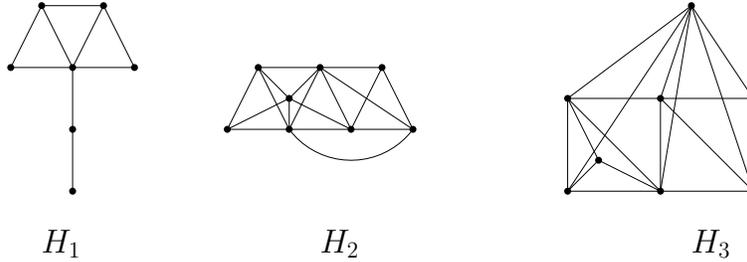


Figura 4.13: Agregando un vértice universal a cada uno de estos grafos se obtienen los generadores críticos de  $K_5$  que tienen un vértice universal cuya remoción produce un grafo conexo, cordal, tal que al remover cualquiera de sus vértices no se obtiene un grafo diferencia.

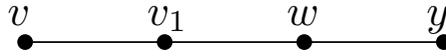
**Demostración:** Sea  $G$  generador crítico de  $K_5$  en las condiciones de la proposición. Entonces sabemos que

1.  $G - u$  es grafo diferencia.
2.  $G - u$  es grafo conexo.
3.  $G - u$  es grafo cordal.
4.  $G - u$  tiene cinco cliques, sean  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$ .
5. Al menos dos de esos cliques son disjuntos.
6. Al remover cualquiera de los vértices de  $G - u$  se obtiene un grafo que no es diferencia.

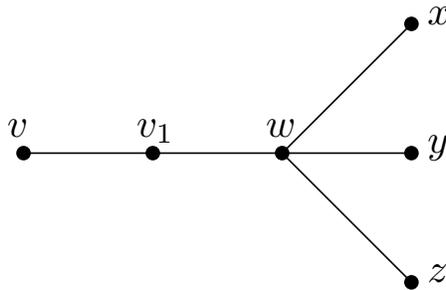
Por Teorema 2.2.1, existe  $v \in G - u$  simplicial. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $v \in Q_1$ . Al remover  $v$  de  $G - u$ ,  $Q_1 - v$  está contenido en un clique de  $G - u - v$  que también era clique de  $G - u$ , digamos, sin pérdida de generalidad,  $Q_2$ . Como  $G - u - v$  no es grafo diferencia, un vértice  $w$  de  $Q_2$  debe ser la diferencia exacta entre  $Q_2$  y  $Q_1$ . Luego, se puede afirmar que  $Q_2 = Q_1 - v + w$ .

La demostración se dividirá en casos según la cantidad de vértices de  $Q_1$ .

Caso 5.1: Supongamos que  $Q_1 = \{v, v_1\}$ , luego  $Q_2 = \{v_1, w\}$ . El vértice  $v_1$  no puede ser adyacente a otro vértice, sino  $w$  no perdería su condición de ser diferencia exacta entre cliques al remover  $v$ . Por Propiedades 2 y 4, tiene que haber un vértice adyacente a  $w$ , digamos  $y$ .

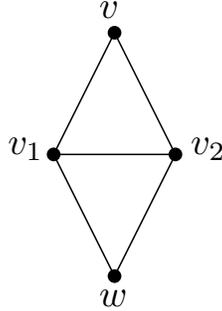


Si  $w$  no tiene más vecinos,  $y$  debería tener algún otro vecino, pero entonces  $wy$  es un clique de  $G$  e  $y$  está contenido en otro clique. Esto contradice que removiendo  $v$ ,  $w$  deja de ser diferencia exacta entre dos cliques. Por lo tanto,  $w$  tiene algún otro vecino, digamos  $x$ . Seguimos teniendo la misma situación para  $y$  y  $x$  tiene las mismas características, por lo tanto, como  $G - u - v$  tiene cuatro cliques  $w$  debe tener otro vecino, sea  $z$ . Ahora  $G - u - v$  es un grafo diferencia, conexo, con cinco cliques, pero no cumple que al remover cualquier vértice deja de ser diferencia.



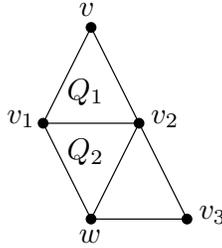
Si existen más vértices y ninguna adyacencia entre los vértices  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , esos vértices deben ser adyacentes a  $w$  y se incrementa la cantidad de cliques, por lo tanto, si hay más vértices, alguna adyacencia entre  $x$ ,  $y$ ,  $z$  debe existir. Supongamos que  $x$  es adyacente a  $y$ . Ahora ni  $x$  ni  $y$  son diferencia exacta entre dos cliques y el grafo tiene 4 cliques. Si para hacer que  $x$  y  $y$  sean diferencia exacta entre dos cliques no usara el clique que contiene a  $x$ ,  $y$ ,  $w$ , entonces deberían existir dos cliques nuevos por cada vértice y eso no es posible. Por lo tanto, cada uno de ellos será diferencia entre el clique que contiene a  $x$ ,  $y$ ,  $w$  y otro, es decir, existe un clique que tiene a  $x$ ,  $w$  y otro que tiene a  $y$ ,  $w$ . Si el que tiene a  $w$ ,  $z$  no es ninguno de estos dos cliques, entonces nos quedan seis cliques. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $z$  es adyacente a  $y$ , y existe otro vértice  $z'$  adyacente a  $w$ ,  $x$ . Así se obtienen todas las condiciones buscadas para  $G - u - v$ . Es el grafo  $H_1$  de la Figura 4.13.

Caso 5.2: Supongamos que  $Q_1 = \{v, v_1, v_2\}$  y por tanto,  $Q_2 = \{w, v_1, v_2\}$ . Observar que los vértices  $v_1, v_2$  no pueden estar juntos en otro clique que no sea  $Q_1$  o  $Q_2$ .



Subcaso 5.2.1: ni  $v_1$  ni  $v_2$  son diferencia exacta entre  $Q_2$  y  $Q$  para algún  $Q \in \{Q_3, Q_4, Q_5\}$ . Entonces, supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $v_1 = Q_3 - Q_4$  (por lo observado antes,  $v_2$  no está en  $Q_3$ ). Si  $\{v_2\} = Q_4 - Q_5$  existe un vértice  $y$  adyacente a  $v_1$  y a  $v_2$ , lo que contradice la observación anterior. Si  $\{v_2\} = Q_5 - Q_4$ ,  $H$  tiene un ciclo de tamaño cuatro.

Subcaso 5.2.2:  $\{v_1\} = Q_2 - Q_3$  (existe  $v_3$  en  $Q_3$  adyacente a  $w$  y a  $v_2$ ),  $\{v_2\} \neq Q_2 - Q$ .



Si  $\{v_2\} = Q_3 - Q$ , donde  $Q \in \{Q_4, Q_5\}$ , supongamos sin pérdida de generalidad, que  $Q = Q_4$ . Existe  $v_4 \in Q_4$  adyacente a  $w$  y a  $v_3$ . Supongamos que no hay más vértices en el grafo. Entonces, o el grafo no tiene cinco cliques o  $v_4$  es adyacente a  $v_1$  y el grafo no es cordal. Supongamos entonces, que existe otro vértice en el grafo y está en  $Q_4$ , digamos  $v_5$ . Los vértices  $v_4$  y  $v_5$  solo pueden ser diferencia entre  $Q_4$  y  $Q_5$ , por lo tanto, no pueden ser ambos vértices diferencia exacta. Por último, supongamos que si hay otro vértice  $v_5$ , está en  $Q_5$ . Esto contradice el hecho de que al remover cualquier vértice el grafo obtenido no es un grafo diferencia. Concluimos entonces que  $\{v_2\} \neq Q_3 - Q_4$ . Luego,  $\{v_2\} = Q_4 - Q_5$ , y se obtiene el mismo grafo del subcaso 5.1.

Caso 5.3: Supongamos que  $Q_1 = \{v, v_1, v_2, v_3\}$  y  $Q_2 = \{w, v_1, v_2, v_3\}$ . Como en el resto de los casos  $v_1, v_2, v_3$  no pueden estar juntos en otro clique que no sea  $Q_1$  o  $Q_2$ .

Subcaso 5.3.1 Supongamos que  $\{v_1\} = Q_2 - Q_3$ , luego  $\{w, v_2, v_3, x\} \subseteq Q_3$ . Observar que  $v_2, v_3$  están en  $Q_1, Q_2, Q_3$ , que no pueden estar en los cinco cliques de  $H$  y tampoco podrían estar juntos en  $Q_4$  o  $Q_5$  por la Propiedad 1.

- Supongamos que  $v_2 \notin Q_4$  y  $v_2 \notin Q_5$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $v_3 \in Q_4$ . Se tiene que  $\{v_3\} = Q_4 - Q_5$  y  $\{v_2\} = Q_i - Q_4$  para algún  $i \in \{2, 3\}$ . Si  $\{v_2\} = Q_2 - Q_4 \Rightarrow \{v_1, v_3, w\} \subseteq Q_4 \Rightarrow \{v_1, w\} \subseteq Q_5$ . Esto es una contradicción a la propiedad 5.

Si  $\{v_2\} = Q_3 - Q_4 \Rightarrow \{v_3, w, x\} \subseteq Q_4 \Rightarrow \{w, x\} \subseteq Q_5$ . Se obtiene el grafo  $H_2$  de la Figura 4.13.

- Supongamos ahora que  $v_2 \in Q_4$  y  $v_3 \in Q_5$ . Se tiene lo siguiente
  - $\{v_2\} = Q_4 - Q_5$  o  $\{v_2\} = Q_i - Q_5$  para algún  $i \in \{2, 3\}$ .
  - $\{v_3\} = Q_5 - Q_4$  o  $\{v_3\} = Q_i - Q_4$  para algún  $i \in \{2, 3\}$ .

No pueden darse simultáneamente  $\{v_2\} = Q_4 - Q_5$  y  $\{v_3\} = Q_5 - Q_4$  pues  $v_2$  y  $v_3$  son adyacentes. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\{v_2\} = Q_i - Q_5$ .

- Si  $\{v_2\} = Q_2 - Q_5$  y  $\{v_3\} = Q_3 - Q_4$  se tiene que  $\{w, v_1, v_3\} \subseteq Q_5$  y  $\{w, v_2, x\} \subseteq Q_4$  lo que contradice la propiedad 5.
- Si  $\{v_2\} = Q_3 - Q_5$  y  $\{v_3\} = Q_2 - Q_4$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\{v_2\} = Q_2 - Q_5$  y  $\{v_3\} = Q_5 - Q_4$  se tiene que  $\{w, v_1, v_3\} \subseteq Q_5$  y  $\{w, v_1\} \subseteq Q_4$  lo que contradice la propiedad 5.
- Si  $\{v_2\} = Q_3 - Q_5$  y  $\{v_3\} = Q_5 - Q_4$  se tiene  $\{w, v_3, x\} \subseteq Q_5$  y  $\{w, x\} \subseteq Q_4$  y se obtiene el grafo  $H_3$  de la Figura 4.13.

Subcaso 5.3.2: Supongamos que ni  $v_1$  ni  $v_2$ , ni  $v_3$  son diferencia exacta entre  $Q_2$  y otro clique. Luego, son diferencia exacta entre  $Q_3, Q_4, Q_5$ . No puede darse que  $\{v_s\} = Q_i - Q_j$  y  $\{v_t\} = Q_j - Q_i$  para  $s, t \in \{1, 2, 3\}$  pues  $v_s, v_t$  son adyacentes. Supongamos, sin pérdida de generalidad que  $\{v_1\} = Q_3 - Q_4$ . Por la observación anterior  $\{v_2\} = Q_4 - Q_5$  o  $\{v_2\} = Q_5 - Q_4$  y  $\{v_3\} = Q_3 - Q_5$  o  $\{v_3\} = Q_5 - Q_3$ . Supongamos que  $\{v_3\} = Q_3 - Q_5$ . Entonces  $\{v_1, v_3\} \subseteq Q_3$ ,  $v_3 \in Q_4$  y  $v_1 \in Q_5$ .

Si  $\{v_2\} = Q_4 - Q_5$ , entonces  $v_3 \in Q_5$ . Luego,  $v_3$  es universal y contradice la propiedad 5. Si  $\{v_2\} = Q_5 - Q_4$  el universal resulta ser  $v_1$  contradiciendo la propiedad 5.

Por esto, concluimos que  $\{v_3\} = Q_5 - Q_3$  y  $\{v_2\} = Q_4 - Q_5$ . Sea  $x$  un vértice distinto de  $v_1, v_2, v_3$ . Si  $x \in Q_3 \Rightarrow x \in Q_4 \Rightarrow x \in Q_5 \Rightarrow x \in Q_3$ . Obtenemos así que

$Q_3 = \{v_1\} \cup (Q_3 \cap Q_4 \cap Q_5)$ ,  $Q_4 = \{v_2\} \cup (Q_3 \cap Q_4 \cap Q_5)$  y  $Q_5 = \{v_3\} \cup (Q_3 \cap Q_4 \cap Q_5)$ . Esto es absurdo, dado que  $v_1, v_2$  y  $v_3$  son mutuamente adyacentes.

Caso 5.4: Supongamos que  $Q_1 = \{v, v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y  $Q_2 = \{w, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ .

Por lo visto en el caso anterior, no puede darse que  $v_1, v_2, v_3, v_4$  no sean diferencia exacta entre  $Q_2$  y otro clique, es más, por lo menos dos de ellos deben cumplir esto. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\{v_1\} = Q_2 - Q_3$  y  $v_2 = \{Q_2 - Q_4\}$ . Se tiene que  $\{v_2, v_3, v_4\} \subseteq Q_3$  y  $\{v_1, v_3, v_4\} \subseteq Q_4$ . Luego, para que  $v_3$  sea diferencia exacta entre cliques  $v_4$  debe estar en  $Q_5$  y, por lo tanto,  $v_4$  es universal, lo que contradice la propiedad 5. Concluimos que no hay grafos satisfaciendo todas las condiciones con  $|Q_1| \geq 5$ .  $\square$

#### 4.2.2. Generadores críticos de $K_5$ sin vértice universal.

Para atender este caso, analizaremos las familias  $\mathcal{RS}$ -separadoras minimales de  $k_5$  como lo hicimos para determinar los generadores críticos de  $K_4$ . La siguiente proposición nos permitirá disminuir la cantidad de casos a considerar.

**Proposición 4.2.10.** *Sea  $\mathcal{F}$  una familia  $\mathcal{RS}$ -separadora minimal de  $K_n$ . Entonces  $L(\mathcal{F})$  tiene un vértice universal si y sólo si  $K_n$  es un miembro de  $\mathcal{F}$ .*

**Demostración:** Sea  $u$  el vértice universal de  $L(\mathcal{F})$ . Es claro que el miembro  $F$  de  $\mathcal{F}$  correspondiente a  $u$  interseca todos los miembros de  $\mathcal{F}$ . Sea  $v$  un vértice cualquiera de  $K_n$ , como  $\mathcal{F}$  es separadora  $\bigcap \mathcal{F}_v = \{v\}$ . El miembro  $F$  interseca a todos los miembros de  $\mathcal{F}_v$  y como  $\mathcal{F}$  es Helly  $\bigcap \mathcal{F}_v \cap F \neq \emptyset$ . Luego,  $v \in F$  para todo  $v \in V(K_n)$ , entonces  $F = K_n$ .

Si  $K_n$  es un miembro de  $\mathcal{F}$ , como es mutuamente intersectante con todos los demás miembros, entonces es claro que  $L(\mathcal{F})$  tiene un vértice universal.  $\square$

CASO 6

**Lema 4.2.11.** *Los generadores críticos de  $K_5$  sin un vértice universal son los grafos de la Figura 4.14.*

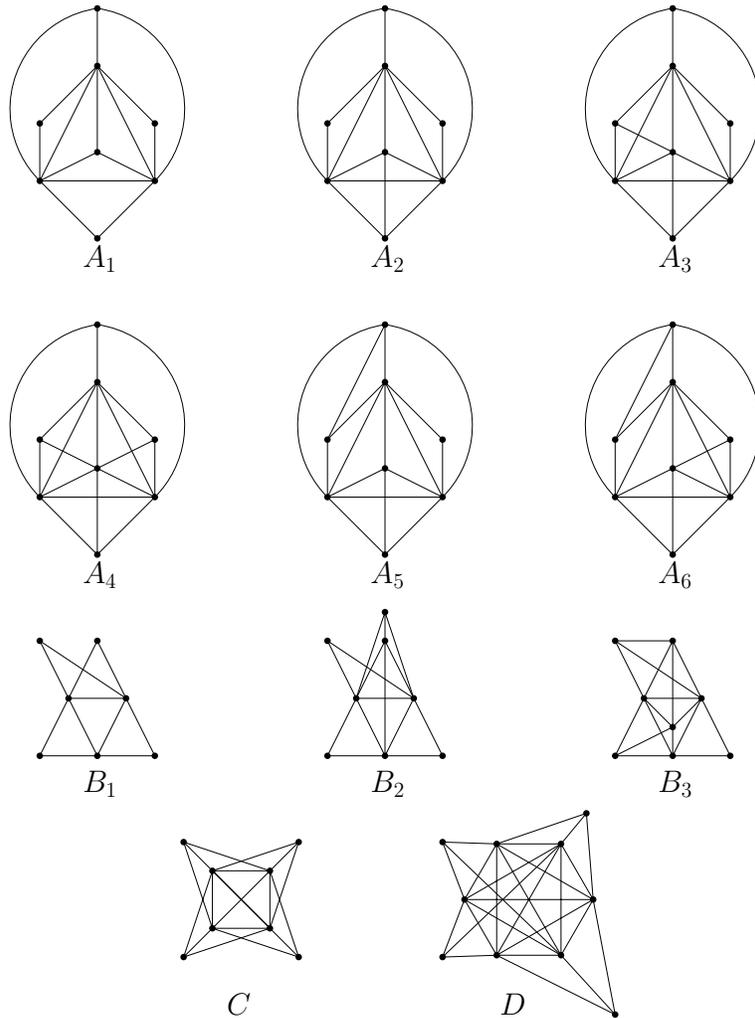


Figura 4.14: Generadores críticos de  $K_5$  sin vértice universal.

**Demostración:** Para los generadores críticos sin vértice universal buscaremos las familias  $\mathcal{RS}$ -separadoras minimales que no contienen a  $K_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Para esto determinamos primero las familias  $\mathcal{RS}$  minimales de  $K_5$ :

- a) La familia tiene sólo completos de tamaño cuatro. Es fácil ver que tomando dos  $K_4$  cualesquiera queda una arista del  $K_5$  sin cubrir. Y esa arista se puede cubrir

agregando cualquier  $K_4$ . Por lo tanto, con tres  $K_4$  se cubre el  $K_5$  de manera minimal. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que esos tres completos son:

$$\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}\}.$$

- b) La familia tiene sólo dos completos de tamaño cuatro. Como ya dijimos, queda una arista sin cubrir  $xy$ . Esa arista estará cubierta por un completo de tamaño tres  $\{x, y, z\}$ . Por la propiedad de Helly,  $z$  debe estar en la intersección de los dos completos de tamaño cuatro. Supongamos entonces, sin pérdida de generalidad, que los tres completos son:

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}\}.$$

- c) La familia tiene exactamente un completo de tamaño cuatro, supongamos, sin pérdida de generalidad, que es  $\{1, 2, 3, 4\}$ , faltan cubrir las aristas incidentes en 5. Luego, el resto de los completos deben contener al 5 y ser de tamaño tres. Como cualesquiera dos  $K_3$  en un  $K_5$  son intersectantes, todos los completos de esta familia son mutuamente intersectantes. Por la propiedad de Helly, todos los completos tienen un vértice en común. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que es el vértice 1. Luego, cada  $K_3$  tiene al 1 y al 5, y hay un  $K_3$  por cada vértice entre 2, 3 y 5.

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}\}.$$

- d) La familia no tiene completos de tamaño 4. Por lo tanto, tiene todos completos de tamaño 3. Por lo que analizado en el caso anterior, esta familia también tendrá un vértice común en todos sus completos, supongamos sin pérdida de generalidad, que es el vértice 1. Tiene que haber en la familia un completo de tamaño 3 por cada arista entre los vértices 2, 3, 4 y 5.

$$\mathcal{D} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}\}.$$

Ahora analizaremos que completos se deben agregar a cada una de las familias  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$  para obtener familias  $RS$ -separadoras minimales.

– Separación de la familia  $\mathcal{A}$ . En este caso utilizaremos las siguientes observaciones:

$a_1$ )  $\mathcal{A}$  no separa ningún vértice de  $K_5$ .

$a_2$ ) Por la propiedad de Helly, no se pueden agregar a  $\mathcal{A}$  ninguno de los siguientes completos:  $\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}$ .

$a_3$ ) Los completos  $\{3\}, \{4\}, \{5\}$  deben estar en cualquier familia  $RS$ -separadora minimal que contenga a  $\mathcal{A}$ . Efectivamente, en  $\mathcal{A}$ , los vértices 1 y 2 dominan a 3. Por  $a_2$ ) no se puede agregar a  $\mathcal{A}$  ningún completo que contenga a 3 y no contenga ni a 1 ni a 2, salvo el conjunto unitario  $\{3\}$ . Si se separa a 3 con dos completos de tamaño mayor o igual a dos, entonces éstos son intersectantes (pues contienen a 3) y también intersectan a los tres completos de  $\mathcal{A}$  (por contener al 1 o al 2) y la intersección total es vacía, por lo que no se obtiene una familia  $RS$ -separadora minimal. Luego la única opción para separarlo es agregando el unitario  $\{3\}$ . La demostración es análoga para los vértices 4 y 5.

$a_4$ ) En  $\mathcal{A}$ , el vértice 1 está dominado sólo por 2 y 2 está dominado sólo por 1.

Con estas observaciones comenzamos a construir las familias  $RS$ -separadoras minimales que contienen a  $\mathcal{A}$ . Por  $a_3$ ) ya sabemos como se separan 3, 4 y 5. Nos falta separar 1 y 2. Claramente, una forma es agregando los unitarios.

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \cup \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

Supongamos ahora, sin pérdida de generalidad, que sólo 1 no está separado por el unitario. Entonces, por la Observación  $a_4$ ), debemos agregar un completo que contenga a 1 y no a 2. Tenemos los siguientes casos según el tamaño del completo elegido. Con un completo de tamaño dos, tres o cuatro tenemos las siguientes familias, sin pérdida de generalidad.

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} \cup \{\{1, 3\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A} \cup \{\{1, 3, 4\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

$$\mathcal{A}_4 = \mathcal{A} \cup \{\{1, 3, 4, 5\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

Supongamos ahora que ni 1 ni 2 están separados por un completo unitario. Entonces, debemos agregar un completo que tenga a 1 y no a 2 y otro que tenga a 2 y no a 1. Observar que estos completos serán intersectantes con los completos de  $\mathcal{A}$ ; y como la intersección de los completos de  $\mathcal{A}$  y estos dos completos es vacía, para satisfacer la propiedad de Helly estos dos completos deben ser disjuntos. Por eso, podemos tomar dos completos de tamaño dos o un completo de tamaño dos y uno de tamaño tres. Quedan las siguientes familias, sin pérdida de generalidad.

$$\mathcal{A}_5 = \mathcal{A} \cup \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

$$\mathcal{A}_6 = \mathcal{A} \cup \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

– Separación de la familia  $\mathcal{B}$ . Comencemos con las observaciones generales.

$b_1$ ) El vértice 1 está separado por  $\mathcal{B}$ .

$b_2$ ) Por la propiedad de Helly, no se pueden agregar a  $\mathcal{B}$  completos que no contengan a 1 salvo el completo  $\{2, 3\}$ .

$b_3$ ) Con el mismo análisis hecho en la Observación 2, (3), se obtiene que los completos  $\{4\}, \{5\}$  deben estar en cualquier familia  $RS$ -separadora minimal que contenga a  $\mathcal{B}$ .

$b_4$ ) En  $\mathcal{B}$ , el vértice 2 está dominado por 1 y por 3, y el vértice 3 está dominado por 1 y por 2.

Por las Observaciones  $b_1$ ) y  $b_3$ ) sólo debemos pensar que completos debemos agregar para separar a 2 y a 3.

Comenzamos separando mediante completos unitarios:

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cup \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

Ahora supongamos, sin pérdida de generalidad, que 2 no está separado por el unitario. Por las Observaciones  $b_2$ ) y  $b_4$ ) para separar a 2 de 1, el único completo que puede agregarse es  $\{2, 3\}$ . Y debemos agregar otro completo que tenga al 2 y no al 3, y por Observación  $b_2$ ), tiene al 1. Éste último completo puede tener tamaño dos o tres, de las que surgen las siguientes familias, sin pérdida de generalidad.

$$\mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \cup \{\{2, 3\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

$$\mathcal{B}_3 = \mathcal{B} \cup \{\{2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

Consideremos ahora que ni  $\{2\}$  ni  $\{3\}$  están en  $\mathcal{B}_i$ , como ambos están dominados por 1, debe estar el completo  $\{2, 3\}$  en la nueva familia. Si ahora tomamos un completo que contenga al 2 y no al 3 y otro que contenga al 3 y no al 2, estos tres completos serán mutuamente intersectantes sin un vértice en común, lo que es una contradicción a que  $\mathcal{B}_i$  es Helly.

Por la Observación  $b_3$ ) no hay más familias  $\mathcal{B}_i$ .

– Separación de la familia  $\mathcal{C}$ . En este caso utilizaremos las siguientes observaciones generales:

$c_1$ ) El vértice 1 está separado por  $\mathcal{C}$ .

$c_2$ ) Sea  $Q$  un completo de tamaño mayor o igual a dos en  $\mathcal{C}_i$ . Luego,  $Q$  intersecta al completo de tamaño cuatro y a por lo menos dos de los completos de tamaño tres de  $\mathcal{C}$ , por lo tanto, debe contener al 1, pues  $\mathcal{C}_i$  es Helly.

Presentamos primero la familia trivial, que por la Observación  $c_1$ ) es:

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cup \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

Supongamos que  $j$  no está separado por el completo unitario para algún  $j \in \{2, 3, 4, 5\}$ . Como el vértice 1 domina a  $j$  en  $\mathcal{C}$ , entonces debe haber un completo que contenga al  $j$  y no al 1. Por Observación  $c_2$ ) ese completo tiene tamaño 1. Por lo tanto,  $\mathcal{C}_1$  es la única familia  $RS$ -separadora minimal que surge de  $\mathcal{C}$ .

– Separación de la familia  $\mathcal{D}$ . Observaciones generales para esta familia:

$d_1$ ) El vértice 1 está separado por  $\mathcal{D}$ .

$d_2$ ) Cualquier completo de tamaño mayor o igual a dos es mutuamente intersectante con a lo sumo cinco de los seis completos de  $\mathcal{D}$ . Luego, para que ese completo esté en una familia  $RS$ -separadora minimal de  $K_5$  debe contener al 1.

Presentamos la familia trivial, que por la Observación  $d_1$ ) es:

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cup \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

Por la Observación  $d_2$ ) y haciendo el mismo análisis hecho para  $\mathcal{C}$  se tiene que  $\mathcal{D}_1$  es la única familia que surge de  $\mathcal{D}$ .

De la intersección de estas familias se obtienen los siguientes grafos:

$$L(\mathcal{A}_1) = A_1$$

$$L(\mathcal{A}_2) = A_2$$

$$L(\mathcal{A}_3) = A_3$$

$$L(\mathcal{A}_4) = A_4$$

$$L(\mathcal{A}_5) = A_5$$

$$L(\mathcal{A}_6) = A_6$$

$$L(\mathcal{B}_1) = B_1$$

$$L(\mathcal{B}_2) = B_2$$

$$L(\mathcal{B}_3) = B_3$$

$$L(\mathcal{C}) = C$$

$$L(\mathcal{D}) = D$$

□

# Capítulo 5

## Familias de grafos con único generador crítico

Se sabe que la cantidad de generadores críticos de un grafo clique es finita. Veamos brevemente por qué sucede esto.

Sea  $G$  un grafo clique con  $|V(G)| = n$  y  $H$  un generador crítico de  $G$ . Como  $H$  es generador crítico de  $G$ , por Corolario 2.4.9, todo vértice  $v$  de  $H$  es de la forma  $\{v\} = Q_i \cap Q_j$  o  $\{v\} = Q_i - Q_j$ . Si  $G$  tiene  $n$  vértices  $H$  tiene  $n$  cliques, entonces hay  $\binom{n}{2}$  posibilidades para los vértices de  $H$  que son intersección exacta entre dos cliques y  $n \cdot (n - 1)$  para los que son diferencia exacta entre dos cliques. Por lo tanto,  $|V(H)| \leq \binom{n}{2} + n \cdot (n - 1)$  lo que implica que la cantidad de vértices de un generador crítico de  $G$  está acotada y por ende hay finitos generadores críticos de  $G$ .

Este resultado se puede encontrar con otra demostración en el trabajo [10] de Escalante y Toft publicado en 1974.

En ese mismo paper, los autores muestran una primera familia de grafos que tiene un único generador crítico.

**Teorema 5.0.1.** [10] *Si  $G$  es  $K_3$ -libre, entonces  $G$  tiene un único generador crítico, el cual resulta del siguiente procedimiento:*

1. *se considera el grafo clique de  $G$ , llamesmolo  $H$ , es decir,  $H = K(G)$ , luego*
2. *por cada  $v \in V(G)$  tal que  $d(v) = 1$  se agrega un vértice  $v'$  a  $H$ , y finalmente ;*
3. *se hacen adyacentes los vértices  $v'$  agregados a los vértices de  $H$  correspondientes a las aristas de  $G$  incidentes en  $v$ .*

En la Figura 5.1 se puede ver un ejemplo de un grafo  $K_3$ -libre y su único generador crítico.

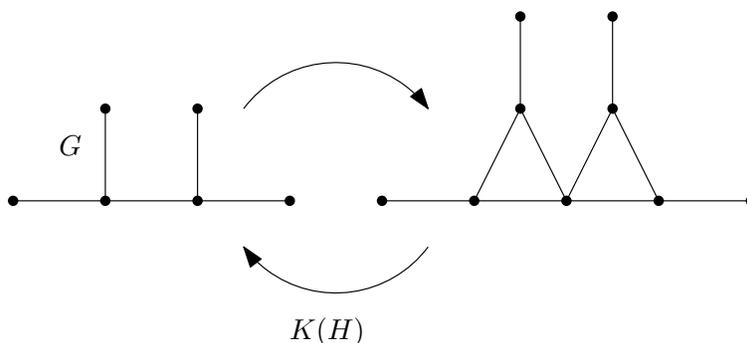


Figura 5.1: Ejemplo de grafo  $K_3$ -libre y su único generador crítico hallado con el procedimiento descrito en el teorema.

Por otra parte, Escalante y Toft conjeturan en [10] que todo grafo self-clique tiene un único generador crítico. Chong-Kean y Yee-Hock, en [19], refutan la conjetura de Escalante y Toft mostrando que el grafo de la Figura 5.2 es self clique y tiene más de un generador crítico. Uno de sus generadores críticos es él mismo y otro el grafo de la Figura 5.3. Muestran también que a partir de este grafo se puede construir una familia infinita de grafos self-clique con más de un generador crítico.

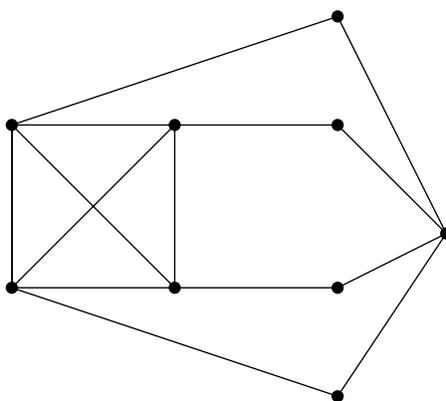


Figura 5.2: Grafo self-clique y crítico.

Sin embargo, existe una subfamilia de grafos self-clique para la cual la conjetura es cierta. Como se puede ver en uno de nuestros primeros resultados que enunciamos a continuación.

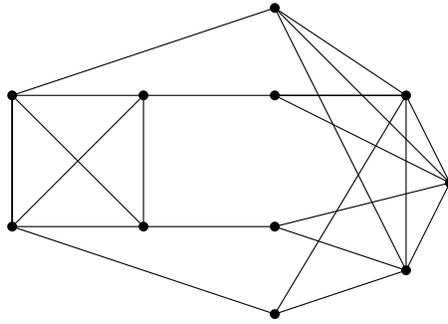


Figura 5.3: Otro generador crítico del grafo de la Figura 5.2.

**Lema 5.0.2.** *Si  $G$  es self-clique y  $K_4$ -libre, entonces tiene un único generador crítico y es él mismo.*

**Demostración:** Veamos primero que  $G$  es crítico. Para esto supongamos que no lo es con el fin de obtener una contradicción. Entonces existe  $v \in V(G)$  tal que  $K(G - v) = K(G) = G$ . Se desprenden dos casos:

1. Si  $G - v$  es clique Helly entonces  $K^2(G - v) \subseteq G - v$  y  $K^2(G - v) = K(K(G - v)) = K(G) = G \subseteq G - v$ ; lo que es una contradicción.
2. Si  $G - v$  no es clique Helly, entonces, por Teorema 2.4.3,  $G - v$  tiene como subgrafo inducido alguno de los grafos  $H_i$  allí mencionados, esto implica que  $G$  también tiene alguno de estos como subgrafo inducido. Como cualquiera de ellos genera un  $K_4$  en la imagen por  $K$ , esto produce una contradicción pues la imagen por  $K$  de  $G$  es el mismo  $G$  que no tiene  $K_4$ .

Por lo tanto,  $G$  es un generador crítico de  $G$ . Faltaría ver que no existe otro generador crítico de  $G$ . Sea  $H$  un generador crítico de  $G$ . Por la misma observación de antes  $H$  debe ser Helly (si no contiene como subgrafo inducido algún  $H_i$  y su imagen tiene un  $K_4$ ). Entonces  $K^2(H) \subseteq H$  y razonando como antes nos queda que  $G \subseteq H$  y  $H$  es crítico, entonces  $G = H$ .  $\square$

En [19], los autores describen una nueva familia de grafos con un único generador crítico; ésta requiere la siguiente definición.

Llamamos grafo diamante al grafo obtenido de un  $K_4$  removiendo una arista cualquiera.

**Observación 3.** *Un grafo es {diamante}-libre (también escribiremos diamante-libre) si y sólo si no tiene aristas multicliques.*

**Teorema 5.0.3.** [19] *Sea  $H$  un grafo diamante-libre. Entonces  $H$  tiene un único generador crítico si y sólo si es  $K_4$ -libre y todo vértice de un triángulo de  $H$  pertenece a más de un clique.*

En la Figura 5.4 se muestra un grafo sin aristas multicliques con único generador crítico. En base a lo realizado en [19] encontramos una manera de hallar ese único generador crítico.

**Proposición 5.0.4.** *Sea  $G$  un grafo {diamante,  $K_4$ }-libre tal que los vértices de todo triángulo pertenecen a más de un clique. Entonces, el único generador crítico de  $G$  se obtiene de la siguiente manera:*

1. *se obtiene el grafo  $H = K(G)$ ;*
2. *por cada  $v \in V(G)$  tal que  $d(v) = 1$  se agrega un vértice  $v'$  a  $H$ ;*
3. *cada  $v'$  se hace adyacente a los vértices de  $H$  correspondientes a cliques de  $G$  conteniendo a  $v$ .*

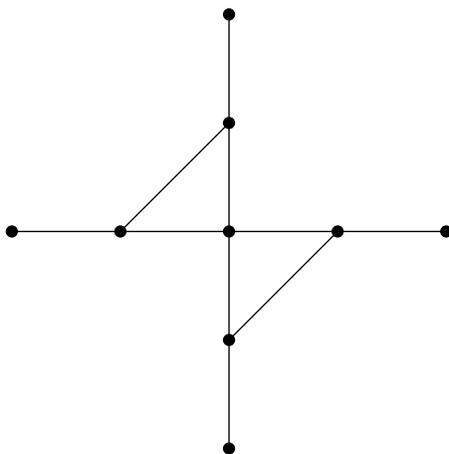


Figura 5.4: Grafo  $G$  sin aristas multicliques con único generador crítico.

Cabe notar que tal como surge de una exhaustiva búsqueda en portales científicos, no se encuentran más resultados acerca de la cantidad de generadores críticos de grafos

pertenecientes a familias particulares (como son el caso de los grafos  $K_3$ -libre y los grafos diamante-libre).

El aporte de esta nueva sección es mostrar nuevas familias de grafos con único generador crítico. Sea  $K_5 - e$  el grafo obtenido del grafo completo de cinco vértices borrando una arista cualquiera.

Extenderemos la noción de arista multiclíque a los completos. Diremos que un completo es multiclíque si está contenido en más de un cliques.

**Observación 4.** *Un grafo es  $\{K_5 - e\}$ -libre si y sólo si no tiene triángulos multiclíques.*

**Lema 5.0.5.** *Sea  $G$  un grafo  $\{K_5, K_5 - e\}$ -libre. El grafo  $G$  es grafo cliques si y sólo si  $G$  es cliques Helly hereditario.*

**Demostración:** Sea  $G$  grafo cliques, como es  $\{K_5, K_5 - e\}$ -libre, no tiene como subgrafo inducido ni al grafo  $A$  ni al grafo  $B$  de la Figura 2.3. Entonces, por Lema 2.4.5,  $G$  es cliques Helly hereditario.

Si  $G$  es cliques Helly, entonces  $G$  es grafo cliques por Lema 2.4.2. □

**Observación 5.** *Todo triángulo en un grafo cliques,  $\{K_5, K_5 - e\}$ -libre tiene al menos una arista no multiclíque.*

Dos aristas  $xy$  y  $uv$  se dicen independientes si  $\{x, y\} \cap \{u, v\} = \emptyset$ , es decir, si no comparten un vértice extremo.

**Teorema 5.0.6.** *Si  $G$  es un grafo cliques  $\{K_5, K_5 - e\}$ -libre, entonces  $\mathcal{C}(G)$  es una familia  $\mathcal{RS}$  minimal de  $G$ . Es más,  $G$  tiene una única familia  $\mathcal{RS}$  minimal si y sólo si cada  $K_4$  en  $G$  tiene al menos un par de aristas multiclíques independientes entre sí.*

**Demostración:** Es claro que  $\mathcal{C}(G)$  es cubridora y por el Lema 5.0.5 sabemos que es Helly. Falta probar entonces que es minimal. Por la Observación 5, si se remueve cualquier  $K_4$  de la familia  $\mathcal{C}(G)$ , entonces se deja de cubrir alguna arista. Y por Lema 2.4.6 los cliques de tamaño menor o igual a tres deben estar en cualquier familia  $\mathcal{RS}$  de  $G$ , por lo tanto,  $\mathcal{C}(G)$  es minimal.

Veamos ahora que  $G$  tiene una única familia  $\mathcal{RS}$  minimal si y sólo si cada  $K_4$  en  $G$  tiene al menos un par de aristas multiclíques independientes entre sí.

Supongamos que existe un  $K_4$  en  $G$  digamos  $Q = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  que no tiene dos aristas multiclíques independientes, entonces se pueden dar tres casos: 1)  $Q$  no tiene aristas multiclíques, 2)  $Q$  tiene tres aristas multiclíques formando un triángulo, 3)  $Q$

tiene aristas multicliques y todas inciden en un mismo vértice, digamos  $v_1$ . En el caso 1), por Corolario 3.0.5,  $G$  tiene más de una familia  $\mathcal{RS}$  minimal. En el caso 2), se contradice la Observación 5. Y en el caso 3), por Lema 3.0.6,  $G$  tiene más de una familia  $\mathcal{RS}$  minimal.

Ahora supongamos que todo  $K_4$  en  $G$  tiene al menos un par de aristas multicliques independientes entre sí, ya sabemos que toda familia  $\mathcal{RS}$  de  $G$  debe contener los cliques de tamaño tres y tiene un completo de tamaño dos si y sólo si es un clique de  $G$ , por Lema 2.4.6. Por lo tanto, si existe una familia  $\mathcal{F}$  distinta de  $\mathcal{C}(G)$  la diferencia debe estar en los  $K_4$ . Tomemos un  $K_4$  cualquiera  $C$  del grafo. Sean  $v_1, v_2, v_3, v_4$  sus vértices y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $v_1v_4, v_2v_3$  son aristas multicliques. Supongamos que  $v_1v_4$  es cubierta por un completo  $T$  que no está contenido en  $C$ , entonces para cubrir las aristas no multicliques de  $C$  no puedo tomar los triángulos  $v_1v_3v_2$  y  $v_2v_4v_3$  pues esos dos triángulos y  $T$  son mutuamente intersectantes con intersección total vacía. Debo elegir algún triángulo que contenga a  $v_1v_4$ . Esto es igual para cada una de las aristas multicliques y para cualquier  $K_4$ . Por lo tanto, toda arista debe estar contenida en un completo distinto para cada clique que la contiene. Es decir, si no se cubre el  $K_4$  con él mismo necesitamos tres triángulos distintos contenidos en el  $K_4$ .

La única forma de cubrir las aristas del  $K_4$  es con triángulos y con las dos aristas multicliques independientes cualquier forma de cubrir el  $K_4$  con triángulos genera una familia que no es Helly. Luego,  $G$  tiene una única familia  $\mathcal{RS}$  minimal y es  $\mathcal{C}(G)$ .  $\square$

**Teorema 5.0.7.** *Sea  $G$  un grafo clique  $\{K_5, K_5 - e\}$ -libre. El grafo  $G$  tiene una única familia  $\mathcal{RS}$ -separadora minimal si y sólo si*

1. *cada  $K_4$  tiene al menos un par de aristas multicliques independientes entre sí;*
2. *para todo  $v \in V(G)$ , uno de los siguientes enunciados es verdadero:*
  - a)  $d(v) = 1$ ,
  - b)  $\{v\} = C_1 \cap C_2$  para algún par  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(G)$ ,
  - c) *todo clique conteniendo  $v$  es un triángulo cuya arista opuesta a  $v$  es multiclique.*

**Demostración:** Como  $G$  admite una única familia  $\mathcal{RS}$  separadora minimal  $\mathcal{F}$ , por Lema 3.0.3, existe una única familia  $\mathcal{RS}$  minimal de  $G$  y, por Teorema 5.0.6, debe ser  $\mathcal{C}(G) \cup N_{\mathcal{C}(G)}$ . Resulta entonces, también por Teorema 5.0.6, que 1. vale.

Sea  $w$  un vértice cualquiera con  $d(w) > 1$  que no es la intersección exacta entre dos cliques de  $G$ . Probaremos que  $w$  satisface 2.c).

Primero, con el fin de obtener una contradicción, asumamos que  $w$  pertenece a un  $K_4$  de  $G$ , digamos  $\{w, x, y, z\}$ . Afirmamos que en este caso  $w \in N_{\mathcal{C}(G)}$ . De hecho, como  $G$  es  $\{K_5 - e\}$ -libre y  $w$  no es la intersección exacta entre dos cliques, tenemos que ninguna de las aristas  $wx, wy, wz$  puede ser multiclique. Por otro lado, por 1., podemos asumir que una de esas aristas es multiclique, digamos sin pérdida de generalidad que es  $wx$ . Es más cualquier clique de  $G$  conteniendo  $w$  también contiene a  $x$ . Concluimos que  $w$  no está separado por  $\mathcal{C}(G)$ . Entonces  $\mathcal{F}' = (\mathcal{F} - \{w\}) \cup \{w, y\}$  es otra familia  $\mathcal{RS}$  separadora de  $G$ . Puede no ser minimal esta familia pero seguro que contiene una que si lo es y es distinta a la que teníamos.

Además,  $w$  no está en ningún  $K_4$ , y entonces cualquier clique conteniendo a  $w$  es un triángulo. De nuevo es fácil ver que  $w \in N_{\mathcal{C}(G)}$ . Supongamos con el fin de obtener una contradicción que  $\{w, x, y\}$  es un clique de  $G$  tal que  $xy$  no es multiclique. Entonces  $\mathcal{F}' = \mathcal{F} - \{w\} \cup \{\{w, x\}, \{w, y\}\}$  es otra familia  $\mathcal{RS}$  separadora de  $G$  no necesariamente minimal pero contiene una minimal que es diferente a la que teníamos.

Para probar la recíproca tenemos que por Teorema 5.0.6,  $\mathcal{C}(G)$  es la única familia  $\mathcal{RS}$  minimal de  $G$ . Veamos que  $\mathcal{C}(G) \cup (\{v\})_{v \in N_{\mathcal{C}(G)}}$  es la única familia  $\mathcal{RS}$ , separadora y minimal. Sea  $v$  un vértice que no está separado por  $\mathcal{C}(G)$ . Observar que esto implica que  $v$  no es intersección exacta entre dos cliques, y supongamos que  $v$  no está separado por el conjunto unitario  $\{v\}$ . Como la única forma de separar un vértice de grado uno es mediante el unitario, se tiene que  $d(v) > 1$ . Entonces la condición (iii) es verdadera, por lo tanto, existe un vértice  $w$  tal que todo clique conteniendo a  $v$  es un triángulo que también contiene a  $w$ . Luego, para separar a  $v$  de  $w$ , necesitamos un conjunto completo  $F$  conteniendo  $v$  pero no a  $w$ . Claramente  $F$  no es un triángulo, sea  $F = \{v, u\}$ . Por lo tanto,  $\{v, w, u\}$  es un clique de  $G$  y la arista  $wu$  es multiclique, sea  $\{w, u, z\}$  un clique. Por lo tanto, por la propiedad de Helly, ningún otro clique contiene a  $v$ ; y entonces, para separar  $v$  de  $u$ , necesitamos el conjunto completo  $F' = \{v, w\}$ . Como los conjuntos  $\{w, u, z\}$ ,  $F$  y  $F'$  no satisfacen la propiedad de Helly, se tiene la prueba.  $\square$

**Corolario 5.0.8.** *Sea  $G$  un grafo clique  $\{K_5, K_5 - e\}$ -libre. El grafo  $G$  tiene un único generador crítico si y sólo si*

1. *cada  $K_4$  tiene al menos un par de aristas multicliques independientes entre sí;*
2. *para todo  $v \in V(G)$ , uno de los siguientes enunciados es verdadero:*

- a)  $d(v) = 1$ ,
- b)  $\{v\} = C_1 \cap C_2$  para algún par  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(G)$ ,
- c) todo clique conteniendo  $v$  es un triángulo cuya arista opuesta a  $v$  es multi-clique.

**Demostración:** Se desprende directamente del Teorema 5.0.7. □

**Proposición 5.0.9.** *Sea  $G$  un grafo clique  $\{K_5, K_5 - e\}$ -libre cumpliendo las condiciones 1. y 2. del Corolario 5.0.8. La forma de hallar el único generador crítico de  $G$  es:*

1. obtener el grafo  $H = K(G)$ ;
2. por cada vértice  $v$  de  $G$  que no sea intersección exacta entre dos cliques agregar un vértice  $v'$  a  $H$ ;
3. hacer adyacente a  $v'$  a los vértices de  $H$  correspondientes a cliques de  $G$  conteniendo a  $v$ .

En la Figura 5.5 se observa un grafo en las condiciones del Teorema 5.0.7.

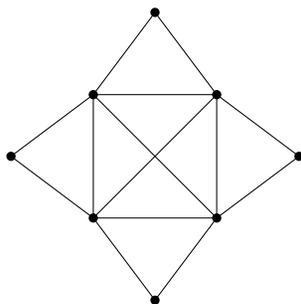


Figura 5.5: Grafo  $G$ ,  $\{K_5, K_5 - e\}$ -libre con único generador crítico.

Como corolario del corolario anterior obtenemos una caracterización total de todos los grafos clique  $K_4$ -libre con único generador crítico.

**Teorema 5.0.10.** *Un grafo clique  $K_4$ -libre  $G$  tiene un único generador crítico si y sólo si cada  $v \in V(G)$  satisface al menos una de las siguientes condiciones:*

1.  $d(v) = 1$ ,

2.  $\{v\} = C_1 \cap C_2$  para algún par  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(G)$ ,

3. toda arista opuesta a  $v$  en un triángulo de  $G$  es multiclíque.

**Demostración:** La prueba se sigue directamente del Corolario 5.0.8, sabiendo que  $G$  es  $K_4$ -libre. □

En la Figura 5.6 se puede observar un grafo  $K_4$ -libre con único generador crítico. Este grafo tiene aristas multiclíques por lo que es preciso exigirle algunas condiciones adicionales a las del Teorema 5.0.3. Es sencillo observar que el grafo de la Figura 5.2 que tiene más de un generador crítico no cumple con las condiciones del Teorema 5.0.10.

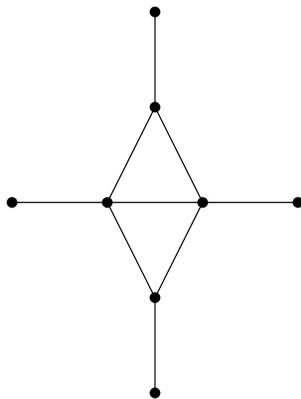


Figura 5.6: Grafo  $G$  sin  $K_4$  con único generador crítico.

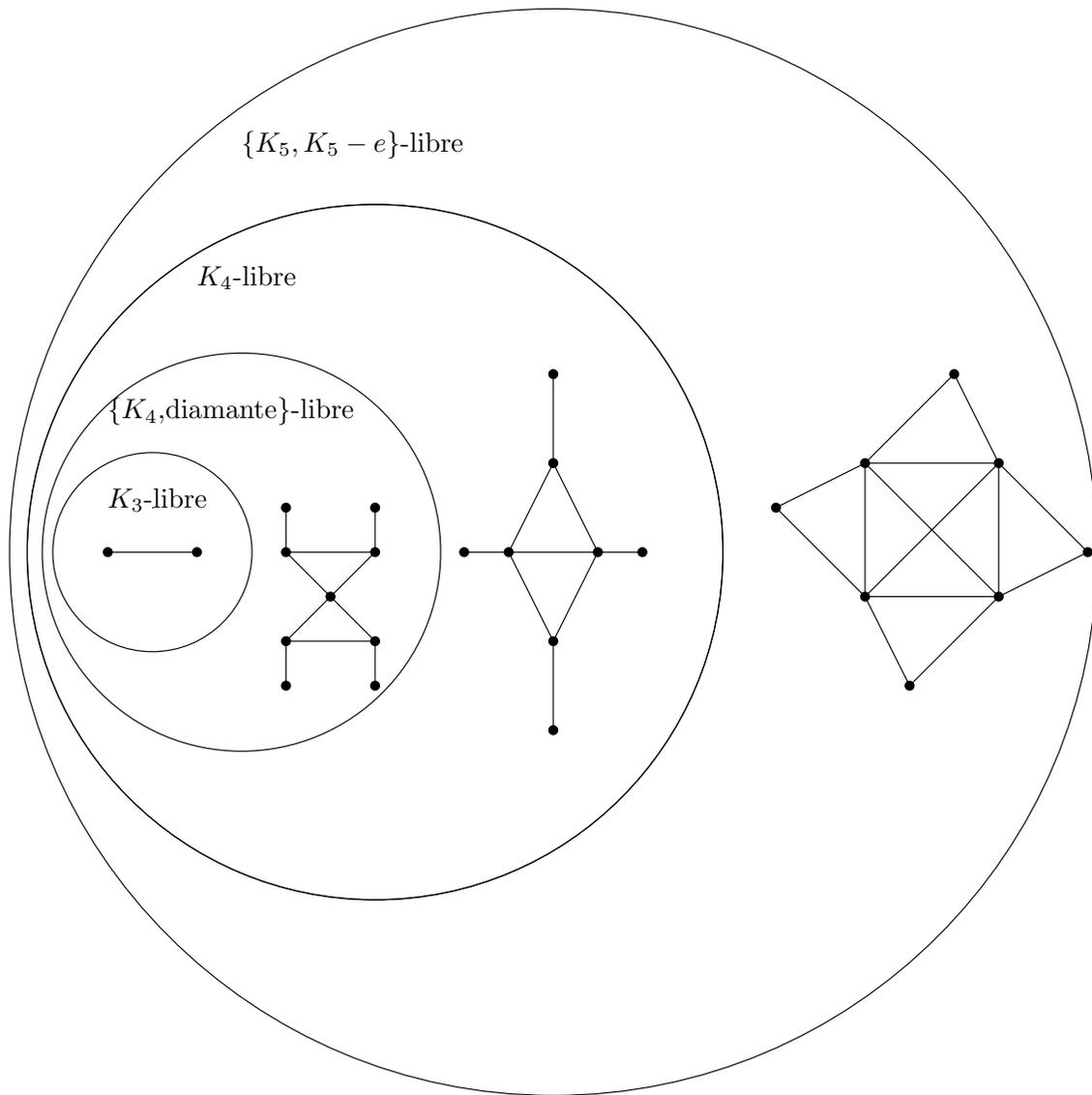


Figura 5.7: Gráfico de contenciones entre las familias con único generador crítico.

Decimos que un grafo  $S_n$  es un complete-sun si

- $V(S_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ;
- $G[\{v_1, v_2, \dots, v_n\}] \simeq K_n$
- cada  $s_i$  es adyacente únicamente a  $v_i$  y  $v_{i+1}$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $n+1 = 1$ .

Pregunta: ¿Los grafos complete-suns tienen un único generador crítico?

NO Contraejemplo:  $S_{10}$ .

La familia de los cliques  $\mathcal{C}(G)$  y

$$\mathcal{F} = (C(G) - \{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}) \cup \{\{v_1, v_2, \dots, v_8\}, \{v_1, v_4, v_5, \dots, v_{10}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_8, v_9, v_{10}\}\}$$

son dos familias  $\mathcal{RS}$  minimales distintas de  $S_{10}$ , por lo tanto,  $S_{10}$  tiene más de un generador crítico.

Pregunta: ¿Todo grafo self-clique es crítico?

NO El grafo en la Figura 5.8 es self-clique y el vértice  $v$  es un vértice superfluo.

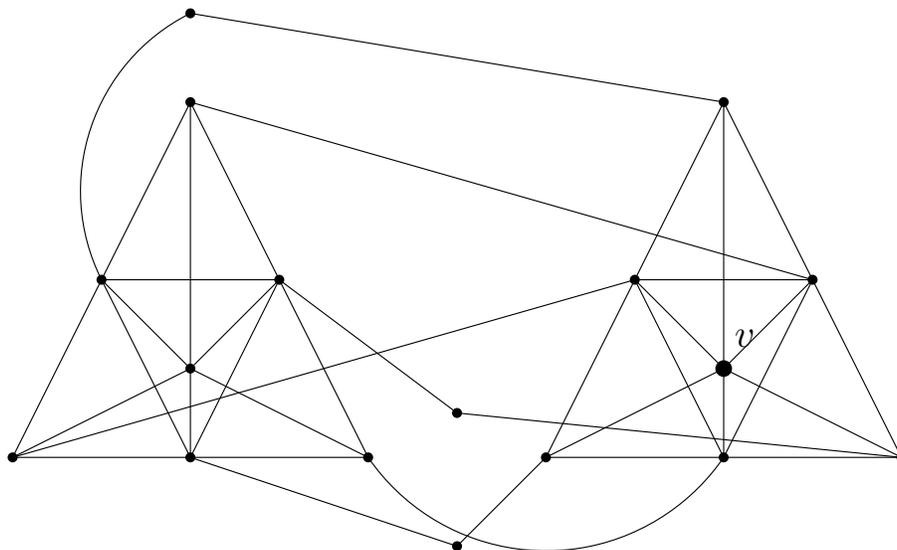


Figura 5.8: Grafo self-clique con  $v$  superfluo.



# Capítulo 6

## Sobre prohibidos minimales de $K^{-1}(K_p\text{-libre})$

En este capítulo nos centramos en encontrar cotas para el clique máximo, el estable máximo y la cantidad de vértices de los subgrafos inducidos prohibidos minimales de  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$ . Estos grafos satisfacen que  $K(G)$  tiene un  $K_p$  y  $K(G-v)$  no tiene un  $K_p$  para todo  $v \in V(G)$ , por lo tanto, podemos asegurar que son críticos. Escalante y Toft estudiaron varias cotas sobre generadores críticos en [10] pero en su estudio necesitaba conocer la imagen por el operador  $K$  de estos grafos. Mostraremos que para conseguir las cotas buscadas no necesitamos la imagen exacta de los prohibidos minimales. De todas maneras enunciaremos los resultados de Escalante y Toft para poder hacer una comparación con los resultados obtenidos por nosotros.

Llamaremos *k-estrella*,  $k \geq 0$  al grafo  $G$  tal que  $V(G) = \{z_0, z_1, \dots, z_k\}$  y  $E(G) = \{z_0z_1, z_0z_2, \dots, z_0z_k\}$ .

**Teorema 6.0.1.** [10] *Sea  $G$  un generador crítico de  $H$ . Sea  $v$  un vértice de  $H$  y  $F$  el subgrafo inducido en  $H$  por  $N(v)$ . Llamemos  $a_1$  a la cantidad de aristas de  $F$  y  $a_2$ ,  $a_3$  a la cantidad de componentes conexas con uno y dos vértices de  $F$  respectivamente. Sea  $Q_v$  el clique de  $G$  correspondiente a  $v$ . Vale que*

- *Si  $F$  es un  $K_3$  o una  $k$ -estrella con  $k \geq 0$ , entonces  $|Q_v| \leq a_1 + a_2 + a_3 + 1$ .*
- *En otro caso  $|Q_v| \leq a_1 + a_2 + a_3$ .*
- $|Q_v| \geq \max\{2, \alpha(F)\}$

Ya vimos, en el Capítulo 4, que Protti y Szwarcfiter en [22] describieron las familias de subgrafos inducidos prohibidos minimales para las familias  $K^{-1}(K_3\text{-libre})$ ,  $K^{-1}(K_4\text{-libre})$ .

libre). En estos dos casos, encontrar las cotas buscadas se trata de hacer una inspección entre los grafos de las familias. Analicemos entonces, que sucede con los subgrafos inducidos prohibidos minimales de  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$  para  $p \geq 5$ .

En lo que sigue, mostraremos que para un grafo  $G$  prohibido minimal de  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$  se tiene un resultado similar al dado para grafos críticos en el Corolario 2.4.9, sólo que más fuerte: probaremos que si  $\mathcal{F}$  es una familia de  $p$  cliques, distintas dos a dos, mutuamente intersecantes de  $G$ , entonces, todo vértice de  $G$  puede escribirse como diferencia exacta o intersección exacta entre dos cliques de  $\mathcal{F}$ . Para esto necesitamos definir los siguientes conjuntos de vértices.

Sea  $G$  un grafo cualquiera y  $C_1, C_2, \dots, C_t$  con  $t \geq 2$ , cliques de  $G$ .

$$\begin{aligned} I &= \{x \in C_1 : \exists i, j \in \{2, \dots, t\} \text{ tal que } C_i \cap C_j = \{x\}\}; \\ D &= \{x \in C_1 - I : \exists i, j \in \{2, \dots, t\} \text{ tal que } C_i - C_j = \{x\}\}; \\ I' &= \{x \in C_1 - I - D : \exists j \in \{2, \dots, t\} \text{ tal que } C_1 \cap C_j = \{x\}\}; \\ D' &= \{x \in C_1 - I - D - I' : \exists j \in \{2, \dots, t\} \text{ tal que } C_1 - C_j = \{x\}\}. \end{aligned}$$

Se tiene entonces el siguiente resultado.

**Lema 6.0.2.** *Si  $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$  es una familia de cliques mutuamente intersecante de un grafo  $G$  prohibido minimal de  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$ , entonces  $C_1 = I \cup I' \cup D \cup D'$*

**Demostración:** Supongamos, con el fin de obtener una contradicción, que existe  $x \in C_1 - (I \cup I' \cup D \cup D')$ .

Para todo  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ , o bien  $C_i - x$  es un clique de  $G - x$  o bien  $C_i - x$  está contenido en algún otro clique de  $G$  distinto de  $C_i$ . En el primer caso, sea  $C'_i = C_i - x$  (puede darse que  $C'_i = C_i$  en el caso en que  $x \notin C_i$ ); y en el segundo caso sea  $C'_i$  algún otro clique de  $G$  conteniendo a  $C_i - x$  (observar que en estas condiciones  $C'_i$  es tanto un clique de  $G$  como de  $G - x$ , pero no pertenece a  $\{C_1, C_2, \dots, C_p\}$ ).

Veamos que si  $i \neq j$ , entonces  $C'_i \neq C'_j$ . Supongamos que  $C'_i = C'_j = C$ . Si  $C$  no es un clique de  $G$ , entonces  $C'_i = C_i - x$  y  $C'_j = C_j - x$ , por lo tanto  $C_i = C_j$  lo que es una contradicción. Si  $C$  es un clique de  $G$ , entonces  $C_i - x \subseteq C$  y  $C_j - x \subseteq C$  lo que implica que  $C_i \cup C_j = \{x\}$ , lo que es una contradicción.

Se sigue que  $C'_1, C'_2, \dots, C'_p$  son  $p$  cliques de  $G - x$ . Por lo tanto, por hipótesis, no son mutuamente intersecantes. Sean  $C'_i$  y  $C'_j$  dos cliques disjuntos. Como  $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ , se tiene que  $C_i \cap C_j = \{x\}$ , lo que contradice el hecho de que  $x \notin I \cup I'$ .  $\square$

**Teorema 6.0.3.** *Si  $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$  es una familia de cliques mutuamente interseccionantes de  $G$  prohibido minimal de  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$ , entonces todo v3rtice de  $G$  es la intersecci3n exacta o la diferencia exacta entre dos cliques de  $\mathcal{F}$ .*

**Demostraci3n:** Como  $G$  es minimal (es decir, ning3n subgrafo inducido de  $G$  tiene  $p$  cliques mutuamente interseccionantes), todo v3rtice de  $G$  debe pertenecer a alguno de los cliques en  $\mathcal{F}$ , es decir,  $V(G) = \cup_{1 \leq i \leq p} C_i$ . Esto es porque si existiera  $x$  que no pertenece a ninguno de esos cliques, es claro que  $G - x$  seguir3a teniendo  $p$  cliques distintos mutuamente interseccionantes. Por otro lado, dado un v3rtice  $x$  de  $G$ , reenumerando los cliques de  $\mathcal{F}$  si es necesario, podemos asumir, sin p3rdida de generalidad, que  $x \in C_1$ ; por lo tanto, por Lema 6.0.2, existen  $C_i$  y  $C_j$  en  $\mathcal{F}$  tales que  $\{x\} = C_i \cap C_j$  o  $\{x\} = C_i - C_j$ .  $\square$

## 6.1. Cota para el orden y el n3mero de estabilidad de un prohibido minimal de $K^{-1}(K_p\text{-libre})$ .

**Teorema 6.1.1.** *Si  $G$  es un prohibido minimal de  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$ , entonces  $|V(G)| \leq 3\binom{p}{2}$  y todo conjunto estable de  $G$  contiene a lo sumo  $p$  v3rtices.*

**Demostraci3n:** Por Teorema 6.0.3, todo v3rtice es la intersecci3n o diferencia exacta entre dos de los  $p$  cliques de una familia mutuamente interseccionante de  $G$ , por lo tanto,  $|V(G)| \leq 3\binom{p}{2}$ . Es m3s, como dos v3rtices de un conjunto estable no pueden pertenecer a un mismo clique, se tiene que un conjunto estable no puede tener m3s de  $p$  v3rtices.  $\square$

**Corolario 6.1.2.** *Para todo  $p \geq 2$ , la familia de prohibidos minimales de  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$  es finita.*

**Demostraci3n:** Se deduce directamente del Corolario 6.1.1.  $\square$

## 6.2. Cota para el número clique de un prohibido minimal de $K^{-1}(K_p\text{-libre})$ .

El siguiente lema vale para cualquier grafo. Será usado junto al Lema 6.2.2 para acotar el tamaño de los cliques de un grafo  $G$  prohibido minimal de  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$ .

**Lema 6.2.1.** *Sean  $C_1, C_2, \dots, C_t$  cliques distintos de un grafo  $G$ . Si  $t \geq 4$  y  $C_1 = I \cup D \cup I' \cup D'$ , entonces*

$$|C_1| \leq \binom{t-1}{2} + 1.$$

**Demostración:** Sea  $C_1 = I \cup D \cup I' \cup D'$  y asumamos que  $|C_1| \geq 4$ , pues de otra manera la demostración sería trivial. Para todo vértice  $x \in I$  (resp.  $x \in D$ ), elegimos un par de elementos  $i, j \in \{2, \dots, t\}$  tales que  $C_i \cap C_j = \{x\}$  ( $C_i - C_j = \{x\}$  resp.) y sea  $I_x = \{i, j\}$  ( $D_x = \{i, j\}$ , resp.).

Para todo vértice  $x \in I'$  (resp.  $x \in D'$ ), elegimos un elemento  $j \in \{2, \dots, p\}$  satisfaciendo  $C_1 \cap C_j = \{x\}$  ( $C_1 - C_j = \{x\}$  resp.) y sea  $I'_x = \{j\}$  ( $D'_x = \{j\}$  resp.).

Se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. Si  $x, y \in I$ , entonces  $I_x \neq I_y$ .
2. Si  $x, y \in D$ , entonces  $D_x \neq D_y$ . Efectivamente, si  $D_x = D_y = \{i, j\}$ , entonces  $\{x\} = C_i - C_j$  y  $\{y\} = C_j - C_i$ . Además,  $C_i - x \subseteq C_j$  y, en consecuencia,  $y$  es adyacente a todos los vértices de  $C_i - x$ . Como  $y$  es adyacente a  $x$ , porque ambos vértices pertenecen a  $C_1$ , tenemos que  $C_i \cup \{y\}$  es un clique de  $G$ , lo que contradice el hecho de que  $C_i$  es un clique.
3. Si  $x \in I$  e  $y \in D$ , entonces  $I_x \neq D_y$ . Efectivamente, si  $I_x = D_y = \{i, j\}$ , entonces  $\{x\} = C_i \cap C_j$  e  $\{y\} = C_i - C_j$ , por lo tanto  $C_i = \{x, y\}$ , que implica la contradicción  $C_i \subseteq C_1$ .
4. Si  $x$  e  $y$  pertenecen a  $I'$ , entonces  $I'_x \neq I'_y$ . Sean  $I'_x = \{i\}$  e  $I'_y = \{j\}$ , entonces no existe un vértice  $z \in I$  tal que  $I_z = \{i, j\}$  y no existe un vértice  $w \in D$  tal que  $D_w = \{i, j\}$ , porque  $C_i \cap C_j \cap C = \emptyset$ ;  $x \in C_i - C_j$  e  $y \in C_j - C_i$ .
5. Si  $x$  e  $y$  pertenecen a  $D'$ , entonces  $D'_x \neq D'_y$ . Sean  $D'_x = \{i\}$  y  $D'_y = \{j\}$ , entonces no existe un vértice  $z \in I$  tal que  $I_z = \{i, j\}$  y no existe un vértice  $w \in D$  tal que  $D_w = \{i, j\}$ , porque  $|C_i \cap C_j| > 1$  caso contrario  $|C_1| = 3$ ;  $x \in C_j - C_i$  e  $y \in C_i - C_j$ .

6. Si  $x \in I'$  e  $y \in D'$ , entonces  $I'_x \neq D'_y$ . Efectivamente, si  $I'_x = D'_y = \{i\}$ , entonces  $\{x\} = C_1 \cap C_i$  y  $\{y\} = C_1 - C_i$ , entonces  $C_1 = \{x, y\}$ , lo que implica la contradicción  $|C_1| = 2 < 4$ .

Sean  $I'_x = \{i\}$  y  $D'_y = \{j\}$ , entonces no existe un v3rtice  $z \in I$  tal que  $I_z = \{i, j\}$  y no existe un v3rtice  $w \in D$  tal que  $D_w = \{i, j\}$ , porque  $x \in C_i \cap C_j$ ;  $C_1 \cap (C_i - C_j) = \emptyset$  y  $|C_j - C_i| \geq 2$ .

Por lo tanto, si la cardinalidad de los conjuntos  $I$ ,  $D$ ,  $I'$  y  $D'$  se denota  $n_I$ ,  $n_D$ ,  $n_{I'}$  y  $n_{D'}$ , respectivamente, se tiene que:

Por 1., 2. y 3.,

$$n_I + n_D \leq \binom{p-1}{2}; \quad (2.1)$$

y tomando tambi3n 4., 5. y 6.:

$$n_I + n_D \leq \binom{p-1}{2} - \binom{n_{D'}}{2} - \binom{n_{I'}}{2} - n_{I'}n_{D'}; \quad (2.2)$$

donde  $\binom{a}{b} = 0$  siempre que  $a < b$ .

Por el Lema 6.0.2 y la desigualdad (2.2) se tiene:

$$\begin{aligned} |V(C)| &= n_I + n_D + n_{I'} + n_{D'} \leq \\ &\binom{p-1}{2} - \binom{n_{D'}}{2} - \binom{n_{I'}}{2} - n_{I'}n_{D'} + n_{I'} + n_{D'} = \\ &\binom{p-1}{2} + \frac{1}{2}(3(n_{I'} + n_{D'}) - (n_{I'} + n_{D'})^2). \end{aligned}$$

Como  $n_{I'} + n_{D'}$  es un entero no negativo, es f3cil ver que  $3(n_{I'} + n_{D'}) - (n_{I'} + n_{D'})^2 \leq 2$ . Luego, la demostraci3n est3 completa.  $\square$

**Lema 6.2.2.** *Sea  $C$  un clique cualquiera de un grafo  $G$  prohibido minimal de  $K^{-1}(K_p$ -libre). Existe una familia  $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$  de cliques de  $G$  tales que*

$$C = C_1 = I \cup D \cup I' \cup D'.$$

**Demostraci3n:** Si  $C$  pertenece a una familia de  $p$  cliques mutuamente intersectantes de  $G$ , entonces la demostraci3n sale del Lema 6.0.2. Por lo tanto, asumamos que no existe tal familia. Sea  $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$  una familia de cliques mutuamente intersectante de  $G$ . Claramente,  $C \notin \mathcal{F}$ , y supongamos, sin p3rdida de generalidad, que

$C \cap C_1 = \emptyset$  y  $C \cap C_2 = \emptyset$ . Es más, por Teorema 6.0.3, cada vértice de  $C$  es la intersección o la diferencia exacta entre dos miembros de  $\mathcal{F}$ . Veamos que todo vértice de  $C$  es la intersección o diferencia exacta entre dos miembros de la familia  $\mathcal{F}' = \{C, C_2, \dots, C_p\}$ . Efectivamente, sea  $C_i$  y  $C_j$  en  $\mathcal{F}$  tales que  $\{x\} = C_i \cap C_j$  o  $\{x\} = C_i - C_j$ . Notar que  $C_i \neq C_1$ . En el primer caso, claramente  $C_j \neq C_1$ , por lo tanto  $C_i$  y  $C_j$  pertenecen a  $\mathcal{F}'$ . En el segundo caso, si  $C_j = C_1$ , entonces  $\{x\} = C_i - C_1 = C \cap C_i$  porque  $C_1 \cap C = \emptyset$ , luego  $\{x\}$  es la intersección exacta entre dos miembros de  $\mathcal{F}'$ .  $\square$

**Teorema 6.2.3.** *Sea  $G$  un prohibido minimal de  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$ . Si  $p \geq 4$ , entonces todo clique de  $G$  contiene a lo sumo  $\binom{p-1}{2} + 1$  vértices.*

**Demostración:** Es una consecuencia directa de los Lemas 6.2.2 y 6.2.1.  $\square$

# Capítulo 7

## Grafos clique Helly críticos

La familia de los grafos clique Helly fue ampliamente estudiada. No es una familia hereditaria, es decir, existen grafos clique Helly tales que al removerle uno de sus vértices se obtiene un grafo que no es clique Helly. Por ejemplo, en la Figura 7.1, el grafo  $G$  es un grafo clique Helly y al remover el vértice  $v$  se obtiene un grafo que no es clique Helly. Sin embargo, al remover el vértice  $w$  se obtiene un grafo que si es clique Helly.

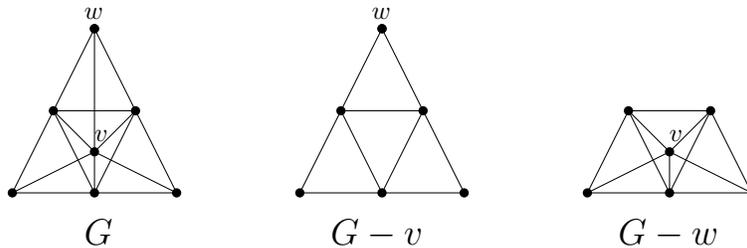


Figura 7.1:  $G$  es un grafo clique Helly no hereditario. Sin embargo, tiene un vértice  $w$  para el cual  $G - w$  también resulta clique Helly.

Dourado, Protti y Szwarcfiter conjeturan en [8] que para cualquier grafo clique Helly existe un vértice tal que al removerlo se obtiene un grafo que continúa siendo clique Helly. En este capítulo resolvemos negativamente ésta conjetura, presentando dos familias de contraejemplos. Para esto son necesarias algunas definiciones y resultados previos.

Ya conocemos la definición de grafo clique de un grafo  $G$  y sabemos que podemos aplicar el operador clique reiteradas veces. Cuando aplicamos el operador por segunda vez ( $K^2(G) = K(K(G))$ ) obtenemos un grafo donde los vértices son los cliques de

los cliques de  $G$ . De esto surgen las siguientes definiciones. Dado un vértice  $v$  de un grafo  $G$  llamaremos *estrella* de  $v$  al conjunto de todos los cliques de  $G$  que contienen a  $v$  (pensados como vértices de  $K(G)$ ), es decir,  $v^* = \{q \in V(K(G)) : v \in q\}$ . Las estrellas de  $G$  son completos de  $K(G)$ , pero no en todos los casos son maximales, es decir, sólo en algunos casos las estrellas se corresponden con vértices de  $K^2(G)$ . Sea  $c \in V(K^2(G))$  tal que el clique  $q$  de  $K(G)$  correspondiente a  $c$  no es una estrella de  $G$ , entonces diremos que  $q$  es una *corbata*.

Un ejemplo de una corbata es  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ , donde  $q_i$  es el clique formado por los vértices del triángulo correspondiente en la Figura 7.2.

Un grafo  $G$  es localmente cíclico si cada vecindario abierto en  $G$  induce un ciclo, y  $G$  es un grafo localmente  $C_d$  si  $N(v)$  induce un  $C_d$  para cada  $v \in V(G)$ .

La cintura de un grafo  $g(G)$  es la longitud del ciclo más corto en  $G$  (si  $G$  no tiene ciclos se dirá que  $g(G) = \infty$ ). La cintura local de  $G$  en un vértice  $v \in V(G)$ , notado  $l_{g_v}(G)$ , es la cintura del subgrafo inducido por el vecindario abierto de  $v$  en  $G$ , es decir,  $l_{g_v}(G) = g(N(v))$ . El mínimo de las cinturas locales, notado por  $lg(G)$ , es llamada, cintura local de  $G$ , es decir

$$lg(G) = \min\{l_{g_v}(g) : v \in V(G)\}.$$

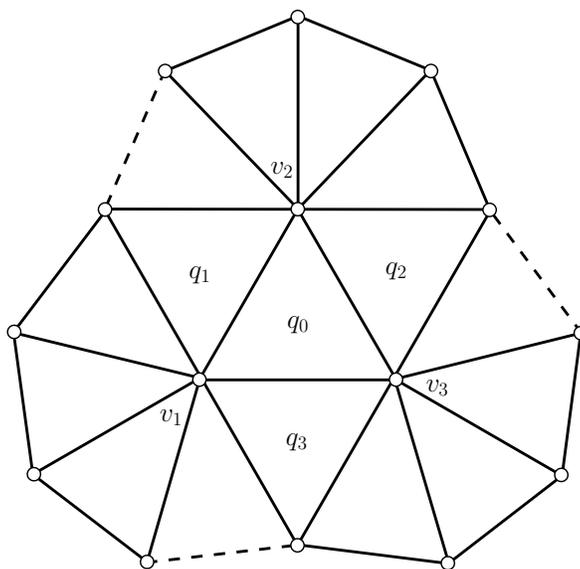


Figura 7.2: Dibujo parcial de un grafo localmente  $C_d$ .

Enunciamos a continuación el primer resultado necesario para la construcción de las familias de grafos que resultan contraejemplos de la conjetura.

**Teorema 7.0.1.** [18] *Si la cintura local de un grafo  $G$  es mayor que seis (i.e.  $lg(G) \geq 7$ ) entonces  $K(G)$  es clique Helly.*

Para  $d \geq 7$  y  $G$  un grafo localmente  $C_d$ , se ha hecho un análisis detallado de los cliques de  $G$  y los cliques de  $K(G)$  en [18]. Transcribimos aquí las propiedades más relevantes para nuestro propósito (todas pueden ser verificadas rápidamente):

**Observación 6.** ([18], Section 3.1)

*Si  $d \geq 7$ , y  $G$  es un grafo localmente  $C_d$ , entonces:*

1. *Todos los cliques de  $G$  son triángulos.*
2. *Para todo vértice  $v$  de  $V(G)$ ,  $v^*$  es un clique de cliques de  $G$ .*
3. *Para todo triángulo  $T = \{v_1, v_2, v_3\}$  de  $G$ , existe una corbata  $Q_T = \{q \in K(G) : |q \cap T| \geq 2\}$ , que es un clique de cliques de  $G$  y es siempre de la forma  $Q_T = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$  (observar Figura 7.2).*
4. *Todo clique de cliques de  $G$  es una estrella  $v^*$  o una corbata  $Q_T$ .*
5. *En  $K^2(G)$ ,  $v_1^*$  es adyacente o igual a  $v_2^*$  si y sólo si  $v_1$  es adyacente o igual a  $v_2$  en  $G$ .*
6. *En  $K^2(G)$ ,  $Q_T$  es adyacente o igual a  $Q_{T'}$  si y sólo si  $T$  y  $T'$  comparten una arista, o comparten un vértice y existe una arista uniendo un vértice de  $T - T'$  con un vértice de  $T' - T$ .*
7. *En  $K^2(G)$ ,  $v^*$  es adyacente o igual a  $Q_T$  si y sólo si  $v \in \cup Q_T = \cup_{i=0}^3 q_i$  donde  $Q_T = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ .*

Brown y Connelly probaron en [6] que existe al menos un grafo finito localmente  $C_d$  para cada  $d \geq 3$ . Larrión, Neumann-Lara y Pizaña [18] obtuvieron el siguiente teorema que extiende el resultado de Brown y Connelly en los casos en que  $d \geq 7$ .

**Teorema 7.0.2.** [18] *Sea  $d$  un entero mayor o igual a 7. Entonces existe un número infinito de grafos localmente  $C_d$  no isomorfos.*

Se define el producto fuerte de grafos, notado  $G \boxtimes H$ , de la siguiente manera:  $V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H)$ . Y dos vértices  $(g_1, h_1), (g_2, h_2)$  distintos de  $G \boxtimes H$  son adyacentes cuando  $g_1$  es adyacente o igual a  $g_2$  en  $G$  y  $h_1$  es adyacente o igual a  $h_2$  en  $H$ . Recomendamos consultar [16] para conocer los resultados más importantes de producto fuerte. Un resultado clásico sobre grafos clique (Neumann-Lara, 1978) establece que el operador clique es distributivo sobre el producto fuerte de grafos:

**Teorema 7.0.3.** [17]  $K(G \boxtimes H) \cong K(G) \boxtimes K(H)$ .

## 7.1. Familia self-clique

Sean  $C_r, C_s, C_t$  ciclos de tamaño  $r, s, t$ , respectivamente, con  $r, s, t \geq 4$ . Tomamos  $G(r, s, t) = C_r \boxtimes C_s \boxtimes C_t$ . Mostraremos a continuación que estos grafos forman una familia de contraejemplos de la conjetura de Dourado, Protti y Szwarcfiter [8]:

**Teorema 7.1.1.** *Todos los grafos  $G(r, s, t)$  son self-clique y clique Helly críticos.*

**Demostración:** Ciertamente todos son self clique pues por Teorema 7.0.3, tenemos que  $K(G(r, s, t)) = K(C_r \boxtimes C_s \boxtimes C_t) \cong K(C_r) \boxtimes K(C_s) \boxtimes K(C_t) \cong C_r \boxtimes C_s \boxtimes C_t = G(r, s, t)$ .

Sabemos que todo  $C_d$  es clique Helly. Veamos ahora que el producto fuerte de grafos clique Helly es clique Helly:

Supongamos que  $X$  e  $Y$  son grafos clique Helly. Los cliques de  $X \boxtimes Y$  son de la forma  $q = q_1 \times q_2$  con  $q_1 \in \mathcal{C}(X)$  y  $q_2 \in \mathcal{C}(Y)$ . Tomemos una familia mutuamente intersectante de cliques de  $X \boxtimes Y$ , siendo:  $q^1 = q_1^1 \times q_2^1, q^2 = q_1^2 \times q_2^2, \dots, q^m = q_1^m \times q_2^m$ . Se tiene que  $q_1^1, q_1^2, \dots, q_1^m$  son cliques mutuamente intersectantes en  $X$  y  $q_2^1, q_2^2, \dots, q_2^m$  son cliques mutuamente intersectantes en  $Y$ . Como  $X$  e  $Y$  son clique Helly, hay algún par de vértices  $x, y$  tales que  $x \in \bigcap_{i=1}^m q_1^i \subseteq X$  e  $y \in \bigcap_{i=1}^m q_2^i \subseteq Y$ . Claramente,  $(x, y)$  pertenece a la intersección total de  $q^1, q^2, \dots, q^m$  y por lo tanto,  $X \boxtimes Y$  es clique Helly.

Se sigue que  $G(r, s, t) = C_r \boxtimes C_s \boxtimes C_t$  es clique Helly.

Ahora mostraremos que  $G(r, s, t) - x$  no es clique Helly para todo vértice  $x$ . Como  $G(r, s, t)$  es claramente vértice transitivo, es suficiente probar que esto sucede para cualquier vértice  $x$  particular. Asumamos que los vértices de cada ciclo  $C_d$  están numerados como  $\{1, 2, \dots, d\}$  para  $d \in \{r, s, t\}$  y tomemos  $x = (2, 2, 2) \in G(r, s, t)$ . Definimos  $H = G(r, s, t) - x$ . Ahora en  $G(r, s, t)$  tomamos los cliques  $q_1 = \{2, 3\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2\}$ ,  $q_2 = \{1, 2\} \times \{2, 3\} \times \{1, 2\}$ ,  $q_3 = \{1, 2\} \times \{1, 2\} \times \{2, 3\}$ . Los cliques correspondientes en  $H$ ,  $\bar{q}_i = q_i \cap H = q_i - (2, 2, 2)$  para  $i = 1, 2, 3$ , son mutuamente intersectantes (cada  $q_i \cap q_j$  contiene uno de los siguientes vértices:  $(1, 2, 2)$ ,  $(2, 1, 2)$  or  $(2, 2, 1)$ ) pero tienen intersección total vacía: el único vertice en  $q_1 \cap q_2 \cap q_3$  en  $G(r, s, t)$  es  $(2, 2, 2)$  que no está presente en  $H$ . Se sigue que  $H$  no es clique Helly.  $\square$

## 7.2. Familia 2-self-clique

En esta sección presentaremos otra familia de grafos que contradicen la conjetura de Dourado, Protti y Szwarcfiter. Para esto enunciaremos previamente un resultado muy reconocido de Escalante.

**Proposición 7.2.1.** [9] *Sea  $G$  un grafo clique Helly. Si  $G$  no tiene vértices dominados entonces  $K^2(G) \cong G$ .*

**Teorema 7.2.2.** *Sea  $G$  un grafo localmente  $C_d$  con  $d \geq 7$ . Entonces  $K(G)$  es un grafo clique Helly crítico.*

**Demostración:** Como  $G$  es localmente  $C_d$ , la cintura local de  $G$  es igual a  $d \geq 7$ , luego, por Teorema 7.0.1,  $K(G)$  es clique Helly.

Sea  $q_0$  un vértice cualquiera de  $K(G)$  (que se corresponde con un clique de  $G$ ). Probaremos que  $K(G) - q_0$  no es clique Helly. Por Observación 6.1. todo clique en  $G$  es un triángulo. Sin pérdida de generalidad asumamos que  $q_0 = \{v_1, v_2, v_3\}$  como en la Figura 7.2.

Consideremos los siguientes cliques de  $K(G) - q_0$ :  $v_1^* - q_0$ ,  $v_2^* - q_0$  y  $v_3^* - q_0$ . Veamos que estos tres cliques son mutuamente intersectantes pero la intersección total es vacía: de hecho, los vértices de  $K(G) - q_0$  correspondientes a los cliques  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  de  $G$  (como en la Figura 7.2) pertenecen a  $v_1^* \cap v_2^*$ ,  $v_2^* \cap v_3^*$  y  $v_3^* \cap v_1^*$ , respectivamente. Finalmente, supongamos con el fin de obtener una contradicción, que un vértice  $q$  de  $K(G) - q_0$  pertenece a  $v_1^* \cap v_2^* \cap v_3^*$ , entonces, por definición de estos conjuntos,  $q$  es un clique de  $G$  tal que  $v_i \in q$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Por lo tanto,  $q = \{v_1, v_2, v_3\} = q_0$  lo que contradice que  $q$  es un vértice de  $K(G) - q_0$ . Luego  $K(G) - q_0$  no es clique Helly.  $\square$

**Teorema 7.2.3.** *Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos grafos no isomorfos localmente  $C_d$ . Entonces  $K(G_1)$  y  $K(G_2)$  son también no isomorfos.*

**Demostración:** Supongamos con el fin de obtener una contradicción, que  $K(G_1) \cong K(G_2)$ . Entonces tenemos que  $K^2(G_1) \cong K^2(G_2)$ . Ahora, por observación 6.4., los vértices de  $K^2(G_1)$  (y aquellos de  $K^2(G_2)$ ) son estrellas o corbatas. Por Observación 6.5.-7., las estrellas tienen grado  $3d$  (de sus vecinos hay  $d$  que son estrellas y  $2d$  que son corbatas) y las corbatas tienen grado quince (seis estrellas y nueve corbatas), ver Figura 7.2. Por lo tanto, cualquier isomorfismo  $\phi : K^2(G_1) \rightarrow K^2(G_2)$  debe mandar estrellas en estrellas de manera biyectiva. Sean  $S_1$  y  $S_2$  los subgrafos de  $K^2(G_1)$  y  $K^2(G_2)$  inducidos

por las estrellas de  $G_1$  y  $G_2$  (respectivamente). Luego la restricción de  $\phi, \phi' : S_1 \rightarrow S_2$ , es también un isomorfismo. Luego, por Observación 6.5.,  $G_1 \cong S_1$  y  $G_2 \cong S_2$ . Se sigue que  $G_1 \cong S_1 \cong S_2 \cong G_2$ , contradiciendo nuestra hipótesis.  $\square$

**Teorema 7.2.4.** *Hay un número infinito de grafos clique Helly críticos 2-self-clique.*

**Demostración:** Sea  $G$  un grafo localmente  $C_d$  y  $H = K(G)$ . Por Teorema 7.2.2, el grafo  $H$  es clique Helly crítico. Por Teorema 7.0.2, hay infinitos de tales ejemplos, todos no isomorfos por Teorema 7.2.3.

El hecho de que estos ejemplos no son self-clique se sigue de la comparación de los grados de los vértices. Como en la demostración del Teorema 7.2.3, los vértices de  $K(H) = K^2(G)$  tienen grado  $3d$  o quince, pero el grado de todos los vértices de  $H = K(G)$  es  $3d - 6$  (ver Figura 7.2 y Observación 6.1.). Se tiene que,  $K(H) \not\cong H$  y por lo tanto  $H$  no es self-clique. Por Teorema 7.2.1,  $H$  es 2-self-clique.  $\square$

# Capítulo 8

## Conclusiones

En este trabajo hemos hecho aportes al estudio del operador clique y al estudio de las familias  $\mathcal{RS}$  de un grafo clique (Capítulo 3).

Describimos nuevas familias de grafos que tienen un único generador crítico y presentamos técnicas para encontrar generadores críticos de un grafo completo (Capítulos 4 y 5).

Acotamos superiormente la cantidad de vértices de un grafo prohibido minimal de la familia  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$ , lo cual permitió determinar que el conjunto de prohibidos minimales de dicha familia  $K^{-1}(K_p\text{-libre})$  es finita. También conseguimos acotar el tamaño de su clique máximo y de su estable máximo (Capítulo 6).

Por último, describimos dos familias infinitas de grafos cada uno de las cuales constituye un contraejemplo para una importante conjetura realizada por Dourado, Protti y Szwarcfiter en el año 2006.

Vale mencionar que de los resultados presentados en esta Tesis surgieron los siguientes trabajos:

- “Two infinite families of clique-Helly graphs” [5] con Liliana Alcón y Miguel Pizaña que ha sido aceptado para su publicación en la revista *Discrete Applied Mathematics* (en prensa).
- “On clique-inverse graphs of graphs with bounded clique number” que ha sido aceptado para su publicación en la revista *Journal of Graph Theory* (en prensa).
- “On the existence of critical clique-Helly graphs”, resumen extendido publicado en *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. [4]



# Bibliografía

- [1] L. Alcón. *Clique-critical graphs: Maximun size and recognition*, Discrete Applied Mathematics. **154** (2006), 1799–1802.
- [2] L. Alcón, L. Faria, C. M. H. de Figueredo, M. Gutierrez. *The complexity of clique graph recognition*, Theoretical Computer Science **410** (2009), 2072–2083.
- [3] L. Alcón, L. Faria, C. M. H. de Figueredo, M. Gutierrez. *Split clique graph complexity*, Theoretical Computer Science **506** (2013), 29–42.
- [4] L. Alcón, M. Pizaña and G. Ravenna. *On the existence of critical clique-Helly graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **62** (2017), 231–236.
- [5] L. Alcón, M. Pizaña and G. Ravenna. *Two infinite families of critical clique-Helly graphs*, Discrete Applied Mathematics (2019). <https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.06.025>.
- [6] M. Brown and R. Connelly. *On graphs with a constant link*. In *New directions in the theory of graphs (Proc. Third Ann Arbor Conf., Univ. Michigan, Ann Arbor, Mich., 1971)*, Academic Press, New York, (1973), 19–51.
- [7] G. A. Dirac. *On rigid circuit graphs*, Abh. Sem. Univ. Hamburg **25** (1961), 71–76
- [8] M.C. Dourado, F. Protti, J.L. Szwarcfiter. *Computational aspects of the Helly property: a survey*, Journal of the Brazilian Computer Society **12** (2006), 7–33.
- [9] F. Escalante. *Über iterierte Clique-Graphen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **39** (1973), 59–68.
- [10] F. Escalante, B. Toft, *On Clique Critical Graph*, Journal of Combinatorial Theory **17** (1974), 170-182.

- [11] M. Gutierrez, J. Meidanis. *Algebraic Theory for the Clique Operator*, Journal of the Brazilian Computer Society, **7**, (2001), 53–64.
- [12] M. Gutierrez, J. Meidanis. *On Clique Graph Recognition*, Ars Combinatoria, **63** (2002), 207-210.
- [13] M. Gutierrez, J. Meidanis. *On the Clique Operator*, Lecture Notes in Computer Science, **1380** (1998), 261-272. Proceedings of the 3rd. Latin American Conference on Theoretical Informatics.
- [14] M. Gutierrez, J. Meidanis. *Preimage, Image and Iterated Image of the Clique Operator*, Mathematica contemporanea, **25** (2003), 107–123.
- [15] R.C. Hamelink. *A partial characterization of clique graphs*, Journal of Combinatorial Theory, **5** (1968), 192-197.
- [16] R. Hammack, W. Imrich and S. Klavžar. *Handbook of product graphs*. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 2011.
- [17] V. Neumann-Lara. On clique-divergent graphs. In *Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976)*, volume 260 of *Colloq. Internat. CNRS*, pages 313–315. CNRS, Paris, 1978.
- [18] F. Larrión, V. Neumann-Lara and M.A. Pizaña. *Whitney triangulations, local girth and iterated clique graphs*, Discrete Mathematics, **258** (2002) 123–135.
- [19] L. Chong-Keang, P. Yee-Hock. *On graphs Without Multicliqual Edges*, Journal Of Graph Theory, Vol. 5, 443–451 (1981).
- [20] C. L. Lucchesi, C. Picinin de Mello, J. L. Szwarcfiter. *On Clique-Complete Graphs*, Discrete Mathematics, **183** (1998), 247-254.
- [21] E. Prisner. *Hereditary Clique-Helly Graphs*, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, **14** (1993), 216-220.
- [22] F. Protti, J.L. Szwarcfiter. *Clique-Inverse Graphs of  $K_3$ -free Graphs and  $K_4$ -free Graphs*, Journal of Graph Theory **35** (2000), 257–272.
- [23] F. S. Roberts, J. H. Spencer. *A characterizations of clique graphs*, Journal of Combinatorial Theory B, **10** (1971), 102-108.

- [24] J. L. Szwarcfiter. *A survey on Clique Graphs*, in Recent Advances in Algorithms and Combinatorics, Springer-Verlag, (2003), 190–136.
- [25] J. L. Szwarcfiter. *Recognizing Clique Helly Graphs*, Ars Combinatoria **45** (1997), 29-32.