



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Trabajo de Tesis Doctoral:

AdS/CFT y métodos holográficos a tiempo real

Tesista: Pedro Jorge Martínez

Director/a: Guillermo Silva

Codirector/a: Marcelo Botta-Cantcheff

Año: 2020

A mi siempre todos me regalaron todo.
Gracias.

*“Nuestras virtudes son el reflejo de las de quienes nos han formado.
Nuestros errores, en cambio, son producto de la propia incompetencia.”*
Osvaldo Civitarese (2018),
que parafraseaba a Isaac Newton,
que a su vez parafrasearía a alguien más.

A la memoria de Federico Mauro

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a la educación pública, gratuita y de calidad; a los que la sueñan, la hacen, la defienden y la usufructan y al fisco que la sostiene. A mis profesores, colegas y también a mis alumnos; sin los últimos la institución no tiene sentido.

Quedan fuera de este agradecimiento quienes conciben y forman la educación pública como un lugar más de exclusión y promoción de metas individuales.

Ya en orden causal, agradezco a mi vieja y a mi viejo como ejemplo de sacrificio y constancia. Agradezco también a mi familia con y sin sangre de por medio.

Sin contradicción, agradezco al cuerpo docente y directivo del Instituto de Cultura Itálica de La Plata por ser mi segundo hogar. Gracias por la formación en un sentido académico, ético y humano.

Quiero agradecer también a mis amigos pasados presentes y futuros. Gracias por el mate, el buen vino, los versos y el humor. Por muchos más acuerdos, desacuerdos y rosca de todo orden.

Gracias a Ágata, que es mucho más “vida” que todo el trabajo que sigue.

Agradezco a los docentes, no docentes e investigadores del Departamento de Física y de la Universidad Nacional de La Plata que no hayan quedado descartados en el segundo párrafo.

Agradezco especialmente a Marcelo Botta-Cantcheff por su esfuerzo en explicarme lo que para él era obvio y para mi falso, y por esperar pacientemente a que yo me diese cuenta de que él tenía razón. A Guillermo Silva, por su parte, no le agradezco nada porque él dice que no hay que agradecerle a la gente por hacer su trabajo.

Espero estar a la altura de los privilegios que me fueron otorgados y espero saber contribuir a un futuro de mayor justicia social.

Esta tesis contiene (aunque no se limita a) los contenidos de los siguientes trabajos:

Publicaciones

- ABRIL 2019 | **Holographic excited states in AdS Black Holes**
Marcelo BOTTA CANTCHEFF, PJM and Guillermo A. SILVA
Journal of High Energy Physics | JHEP04(2019)028
arXiv | 1901.00505 [hep-th]
- NOV 2018 | **The gravity dual of real-time CFT at finite temperature**
Marcelo BOTTA CANTCHEFF, PJM and Guillermo A. SILVA
Journal of High Energy Physics | JHEP11(2018)129
arXiv | 1808.10306 [hep-th]
- ENE 2017 | **Interacting Fields in Real Time AdS/CFT**
Marcelo BOTTA CANTCHEFF, PJM and Guillermo A. SILVA
Journal of High Energy Physics | JHEP03(2017)148
arXiv | 1703.02384 [hep-th]
- FEB 2016 | **On excited states in real-time AdS/CFT**
Marcelo BOTTA CANTCHEFF, PJM and Guillermo A. SILVA
Journal of High Energy Physics | JHEP02(2016)171
arXiv | 1512.07850 [hep-th]

Trabajos sin publicar

- ENE 2017 | **Which quantum states are dual to classical spacetimes?**
Marcelo BOTTA CANTCHEFF and PJM
Ensayo para GRF 2016 Awards for Essays on Gravitation
arXiv | 1703.03483 [hep-th]

Resumen

En esta tesis se llevaron adelante estudios formales en el marco de posibles extensiones a tiempo real de la dualidad AdS/CFT. En particular, integrando elementos de las prescripciones de Skenderis y van Rees (SvR) y de Banks Douglas Horowitz y Martinec (BDHM) o extrapolar, se estudiaron aplicaciones para el desarrollo de una familia de estados excitados de las teorías a ambos lados de la dualidad.

La prescripción SvR incorpora elementos del formalismo de Schwinger-Keldysh (SK) para el estudio de sistemas fuera del equilibrio mediante caminos en el plano complejo temporal para dar una extensión a tiempo real de la prescripción Gubser Klebanov Poliakov y Witten (GKPW) para el cálculo de funciones de correlación. En esta última se identifican las funciones de partición de ambas teorías duales. De forma general, para la prescripción SvR se separa un camino SK en segmentos de signatura definida a los que se le asigna una geometría dual. Luego, estas se unen para conformar una descripción holográfica del camino SK completo en términos de una variedad que tiene saltos de signatura, lo que llamaremos una variedad de signatura mixta. Los segmentos Lorentzianos del camino SK se asocian a la evolución física del sistema mientras que los segmentos Euclidianos definen el estado en que este se encuentra. Los correladores en tiempo real se obtienen derivando la función generatriz respecto de fuentes externas ubicadas en las regiones Lorentzianas de la variedad.

La prescripción BDHM es un mapa operatorial entre las teorías duales, que asocia campos fundamentales canónicamente cuantizados de la teoría de gravedad con operadores primarios de traza simple de la teoría de campos. En particular, la prescripción da cuenta la factorización que se da en el límite planar de una teoría de campos, prescribiendo que los operadores pueden escribirse perturbativamente en términos de los operadores escalera de la teoría gravitatoria dual. Veremos que esta prescripción nos dará gran poder de cómputo y proveerá chequeos de consistencia de las interpretaciones propuestas para los estados bajo estudio.

Los estados estudiados en este trabajo se definen como deformaciones por fuentes externas de las regiones Euclídeas de los caminos SK en el marco de la prescripción SvR. Seremos capaces de escribir expresiones no perturbativas para los estados en términos de los grados de libertad de cada teoría dual y mostraremos que por construcción estos tienen siempre asociada una geometría dual del lado de la teoría de gravedad. Incorporando herramientas de la prescripción BDHM, veremos que un estudio perturbativo en $1/N$ nos permitirá observar que a orden dominante los estados son excitaciones coherentes del espacio de Hilbert, en acuerdo con su carácter semiclásico. Luego, en este límite, los estados bajo estudio pueden considerarse una base sobrecompleta del espacio de Hilbert bajo estudio, donde cada elemento de la base tiene asociado una geometría clásica. La consideración de correcciones demuestra que los estados definidos son solo coherentes en el límite estricto $N \rightarrow \infty$ y se corrigen con potencias crecientes de los operadores escalera de la teoría de gravedad. Sin embargo, puede demostrarse a todo orden que el cálculo de las correcciones a los correladores por considerar este juego de estados admite reglas diagramáticas sobre la variedad de signatura mixta. Esto demuestra que la propiedad constitutiva de estos estados no es su coherencia, que solo se da a primer orden en $1/N$, si no el hecho de que tengan siempre una geometría dual asociada.

Se estudian construcciones concretas de estos estados para caminos de SK asociados a sistemas a $T = 0$ y luego para el caso $T \neq 0$. En los primeros se describen las herramientas esenciales de la construcción de los estados excitados y el estudio de sus propiedades, como el cálculo de los autovalores en el límite $N \rightarrow \infty$, donde estos son coherentes. Se comprueba también que los estados están definidos independientemente del camino SK particular bajo estudio. Luego, se estudia un ejemplo particular de un sistema a $T \neq 0$, cuyo camino SK asociado presenta un dual holográfico cuyas propiedades serán discutidas en detalle. Estudiamos también estados excitados sobre este camino, comprobando las propiedades generales para estos discutidas en el párrafo anterior.

En el Capítulo 1 se presenta una breve introducción histórica de los descubrimientos en la física teórica que culminaron con la formulación de la dualidad AdS/CFT. Se presentan también de forma general las áreas de investigación involucradas y se esquematiza la forma en que estas se articulan a lo largo del trabajo.

En el Capítulo 2 se introducen las herramientas formales necesarias de teoría cuántica de campos (TCC o QFT) así como también de relatividad general (RG). Sobre teorías de campos, se presenta el formalismo de Schwinger-Keldysh (SK) para describir problemas físicos en términos de una evolución temporal sobre caminos en el plano complejo temporal. En particular, se presentan los llamados caminos In-Out, In-In y Térmico, distinguiéndolos según sean caminos abiertos o cerrados en el plano complejo. Este último, descrito por un camino cerrado, permite el estudio de teorías de campos a temperatura finita. Se describe el formalismo de teoría térmica de campos (TFD), que también permite el estudio de teorías a temperatura finita y se muestra que es equivalente a un caso particular del camino térmico. Esta doble descripción del sistema será de utilidad para los objetivos de esta tesis. Se presentan además dos realizaciones físicas de TFD, el espacio de Rindler y los agujeros negros eternos. Se estudiarán luego el grupo de simetrías conformes $SO(d, 2)$. Se estudiarán algunas de las propiedades salientes de teorías de campos conformes o CFT en dimensión d general y en particular se mostrará cómo el grupo conforme restringe la forma de los correladores de una teoría. Como consecuencia de esto, veremos que el estudio de las teorías conformes se realiza de forma estándar mediante, por ejemplo, el programa de Bootstrap y otros procedimientos que prescindan enteramente de una acción para la teoría. En el marco de la dualidad AdS/CFT podremos estudiar propiedades de teorías de campos conformes mediante técnicas variacionales. Finalmente, presentamos propiedades generales de los estados coherentes en mecánica cuántica y teorías de campos y una forma de realizar los mismos mediante evoluciones de sistemas acoplados a fuentes externas clásicas. Desde el lado de gravedad, se define la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica Λ en $d + 1$ dimensiones y sus soluciones maximalmente simétricas en signatura Euclidiana y Lorentziana con $\Lambda < 0$, H y AdS respectivamente en términos de superficies embebidas en espacios de mayor dimensión. Se estudiarán las simetrías de estos espacios, observando que coincide con el grupo de simetrías conformes para una dimensión menos, $SO(d, 2)$, y se presentan los distintos parches de coordenadas con los que se cubrirán estas variedades y sus superficies de nivel. Se observará que la métrica inducida sobre el borde conforme de AdS define sobre qué espacio estará definida la CFT dual. Desde el punto de vista holográfico, los espacios asintóticamente AdS (aAdS) describirán distintos estados de la CFT dual. Como ejemplo concreto de esto se introducen, también para ambas signaturas, las soluciones de agujero negro para espacios con $\Lambda < 0$, duales a un estado CFT de equilibrio térmico. Luego de presentar el caso general, introduciremos las geometrías BTZ en tiempo Lorentziano y Euclídeo y se estudiarán los diagramas conformes de ambas geometrías. Estas son geometrías $2 + 1$ dimensionales localmente AdS/ H_{2+1} pero que poseen una singularidad cónica. Esto les dará algunas propiedades similares a las soluciones de agujero negro y su baja dimensionalidad nos permitirá realizar de forma analítica todos los cálculos de interés.

En el Capítulo 3 se introduce formalmente la dualidad AdS/CFT o correspondencia gauge/gravedad. Con este objetivo se presentan un estudio preliminar de lo que se conoce como el límite planar de las teorías de campos o límite $N \rightarrow \infty$ y un resumen de los resultados de teoría de cuerdas que serán relevantes. Luego se presenta el primer ejemplo de una realización de la dualidad AdS/CFT, presentado por Juan Maldacena a finales de los '90 y que mediante dos descripciones equivalentes del espectro de bajas energías de una configuración de branas relaciona la teoría de campos $\mathcal{N} = 4$ SYM con una teoría de cuerdas tipo IIB sobre $AdS_5 \times S^5$. A este ejemplos y otras realizaciones concretas de la dualidad se denominan colectivamente enfoques de arriba hacia abajo. A continuación, se presenta lo que se denominan enfoques de abajo hacia arriba, donde se proponen relaciones generales para sistemas holográficos que conectan los observables de ambas teorías. Presentaremos las prescripción GKPW y el diccionario BDHM o extrapolar, dos prescripciones equivalentes. La prescripción GKPW que relaciona en signatura euclidiana las funciones de partición de las teorías duales y se muestra cómo se obtiene una función de 2 puntos euclidiana según la misma. La prescripción BDHM es en cambio un mapa operatorial entre las teorías. El uso de ambas prescripciones en conjunto será clave para las observaciones de este trabajo. Luego, se presentan las inconsistencias con el Principio Holográfico a las que lleva una formulación inocente de AdS/CFT en tiempo real y la prescripción de Skenderis y van Rees (SvR), que resuelve estas inconsistencias extendiendo la prescripción GKPW a tiempo real incorporando herramientas del formalismo de SK. Dado un problema de una CFT en términos de un camino SK, se construye un dual holográfico al camino como el pegado de variedades de signatura Euclídea

y Lorentziana de forma que se trabaja sobre una variedad de signatura cambiante. Se estudian entonces las técnicas de pegado de variedades y campos involucradas en la prescripción SvR. Finalmente, se presenta el aporte central de este trabajo, que es la construcción de una familia de estados excitados holográficos que por construcción tienen siempre asociada una geometría del lado de gravedad. Se estudiarán algunas de sus características generales y se comprobará en particular que en el límite $N \rightarrow \infty$ estricto los mismos son estados coherentes. Calcularemos los autovalores de esta aproximación de los estados y comprobaremos también que correcciones $1/N$ rompen la coherencia de los estados, pero no su interpretación geométrica.

El Capítulo 4 presenta las aplicaciones de estos estados holográficos a $T = 0$. En primer lugar, se describe el caso In-Out en detalle para el límite semiclásico de N grande y una CFT dual definida en un espacio compacto: se arma la geometría dual pegando secciones Euclidianas y Lorentzianas de AdS puro según la prescripción SvR, se encuentran las soluciones clásicas más generales a las ecuaciones de movimiento de los campos en cada región y se muestra cómo el pegado garantiza que la solución en la variedad completa es única. Se deriva la acción en la capa de masa de esta configuración, que contiene toda la información de los objetos a calcular: el producto interno entre los estados excitados holográficos, los elementos de matriz de los operadores duales entre los estados así como también los correladores de la teoría. Se corrobora que los correladores estén bien ordenados temporalmente, demostrando el correcto pegado de la geometría. Se obtiene el producto interno entre los estados excitados y se comprueba que no son ortonormales. Se recalcula el producto interno luego de normalizar los estados y se consigue definir con esto un producto interno en el espacio de las funciones definidas sobre las fronteras conformes euclidianas de la geometría. Este producto interno, además, es reminiscente de la forma tradicional del producto interno entre estados coherentes normalizados. Se concluye este ejemplo estudiando los elementos de matriz de los operadores CFT holográficos en esta base de estados, lo que equivale a determinar completamente el operador en este subespacio del espacio de Hilbert total, y se encuentra un acuerdo exacto entre los autovalores de los estados coherentes obtenidos en este formalismo y el sugerido por la prescripción BDHM. En segundo lugar se presenta el mismo problema en coordenadas de Poincaré, incluyendo ahora interacciones en la teoría de gravedad. El problema de campos dual describe una CFT en espacio plano donde el N del grupo de simetrías es grande pero finito y se pueden obtener correcciones orden a orden en $1/N$. Se obtienen las funciones de 2 puntos de la teoría correctamente ordenadas y luego se estudian los estados excitados en este caso. Las interacciones deforman la naturaleza coherente de los estados, que a primer orden en $1/N$ se comportan como estados coherentes-comprimidos. El ejemplo permite sugerir un método diagramático para calcular las correcciones a las contribuciones de los estados excitados a cualquier orden. Se discute también los casos en donde varios campos interactúan en la teoría gravitatoria, donde los estados excitados describen estados entrelazados. Por completitud, se incluyen los resultados del caso In-In donde se muestra explícitamente que el pegado de la geometría determina la causalidad de los correladores de la teoría independientemente del ansatz del que se parta. Este ejemplo pondrá de manifiesto el rol de las condiciones de contorno asintóticas en combinación con el pegado de geometrías para obtener el correlador adecuado en cada región de la variedad.

El Capítulo 5 presentan los casos de estudio a $T \neq 0$. Se comienza por describir los detalles que lo diferencian del caso a $T = 0$, tales como la duplicación de grados de libertad y los distintos ordenamientos temporales relevantes así como también la forma en que se resuelven típicamente los casos a $T \neq 0$ en la literatura y cómo esta entra en conflicto con el principio holográfico. Se presentan las geometrías duales para el problema a tiempo real que son un resultado de este trabajo de tesis. El dual geométrico a altas temperaturas se describe con sumo detalle esencialmente siguiendo pasos análogos a los del ejemplo In-Out del capítulo anterior. Las regiones Lorentzianas de esta geometría están conectadas por un agujero de Einstein-Rosen, además de estar conectadas a través de las regiones euclidianas, lo que impone condiciones extra al pegado de la geometría y debe ponerse especial detalle en la analiticidad de la misma en el interior de la variedad. Se comprueba que la geometría define unívocamente la solución de los campos en su interior en términos exclusivamente de información accesible desde la CFT dual, recuperando el acuerdo con el principio holográfico. Se chequea primero que esta geometría reproduce los correladores en el orden temporal correcto. Los estados excitados siguen describiéndose en términos de una sola fuente en el borde conforme, pero la excitación está definida naturalmente en términos de una rotación de Bogoliubov de los grados de libertad de las regiones Lorentzianas de la geometría en lugar de excitar cada una por separado. El dual geométrico a bajas temperaturas, AdS Térmico, es menos interesante y es esencialmente una duplicación

de los casos a $T = 0$ descritos en el capítulo anterior. Para terminar, se discute un trabajo en construcción donde se aplican los resultados obtenidos para estos ejemplos en combinación con herramientas de teoría algebraica de campos para obtener hamiltonianos modulares para estados fuera del equilibrio térmico en teorías holográficas.

Por último, el Capítulo 6 contiene un breve resumen de los resultados obtenidos, la discusión de los mismos y las conclusiones. Se discute también el impacto de estos resultados en el área así como también las perspectivas futuras de trabajo a corto y largo plazo.

En los apéndices A y B se discuten el formalismo de renormalización holográfica y algunas integrales demasiado extensas para el cuerpo del texto. El formalismo de renormalización holográfica es el mecanismo estándar por el cual se regulariza la acción de gravedad en espacios aAdS para remover las divergencias sobre los bordes conformes. Las integrales relegadas al segundo apéndice son mayormente integrales en el espacio de momentos que llevan a la versión en espacio de configuración de los correladores del borde al volumen y de borde a borde. En el apéndice se discute en detalle las diferencias entre los distintos ordenamientos temporales y cómo estos se relacionan con los caminos de integración en el plano complejo de la frecuencia. Se presenta también por completitud el cálculo de la integral de momentos de la función de 3 puntos en coordenadas de Poincaré, donde se hace imprescindible el uso de las isometrías de AdS para su resolución.

Índice general

1. Introducción	10
2. Campos y Gravedad	14
2.1. Teorías de Campos	14
2.2. Espacios AdS y H	41
3. AdS/CFT	56
3.1. Preliminares	57
3.2. AdS/CFT de arriba hacia abajo	65
3.3. AdS/CFT de abajo hacia arriba	69
3.4. Prescripción de Skenderis y van Rees	83
3.5. Estados excitados holográficos	89
4. Aplicaciones a Temperatura cero	98
4.1. In-Out en Globales: campo libre	99
4.2. In-Out en Poincaré: interacciones	109
4.3. In-In	123
5. Aplicaciones a Temperatura finita	126
5.1. Preliminares	126
5.2. Estados excitados en caminos cerrados	129
5.3. Construcción de la geometría y pegado	132
5.4. Campo escalar: BTZ	137
5.5. Análisis BDHM	144
5.6. Campo escalar: AdS térmico	146
5.7. Entropía de estados excitados holográficos	150
6. Conclusiones	152
A. Renormalización holográfica	155
B. Integrales	159
B.1. Correladores Globales	159
B.2. Correladores Poincaré	160
B.3. Correladores BTZ	165

Capítulo 1

Introducción

La física teórica de las interacciones fundamentales en el siglo XX estuvo dominada por dos teorías. Por un lado la Teoría Cuántica de Campos unificó exitosamente tres de las cuatro interacciones fundamentales: dio el marco para estudiar las interacciones nucleares débiles y fuertes, así como el electromagnetismo. Esta teoría unificada, llamada Modelo Estándar, ha sido probado durante los últimos 40 años en grandes aceleradores como SLAC y LHC [1], mostrando un excelente ajuste de los datos experimentales. Esto impone a las QFT como la forma más acabada que disponemos para describir la materia fundamental en el régimen cuántico, al menos a las escalas de energía a la que podemos hacer experimentos controlados. Por otro lado, la relatividad general de Einstein ha explicado con gran éxito la gravedad clásica. Las mediciones de ondas gravitacionales de LIGO en 2016 [2] y las imágenes del centro de la galaxia M87 del telescopio Event Horizon en 2019 [3], confirman y refuerzan la vigencia de RG como la mejor teoría gravitatoria hasta el momento.

Sin embargo, ambos marcos teóricos aún no consiguen amalgamarse en lo que se suele llamarse una Teoría del Todo. Desde el marco general de las TCC, incorporar la métrica como un campo más no ha conseguido integrar satisfactoriamente la gravedad en su régimen cuántico, resultando en una teoría no renormalizable (sin poder predictivo) o efectiva en el mejor de los casos. Una cuantización de este estilo tampoco sería del todo satisfactoria en un sentido más general, puesto que requeriría la elección de una foliación temporal en el proceso, lo que entra en conflicto con la invarianza de diffeomorfismos de la RG. En el sentido inverso, integrando las fuerzas al marco de la RG, ya sea mediante dimensiones extra y reducción de KK o desde teoría de cuerdas, las predicciones que pueden hacerse a las escalas medibles o bien son indistinguibles de los modelos vigentes o bien no logran reproducir los resultados experimentales. Aún si esto no es una demostración de que no haya supersimetría ni dimensiones extra, es evidente que desde el enfoque teórico hace falta un nuevo principio guía que ayude a conectar la gravedad con el resto de las interacciones fundamentales.

Hace poco más de 20 años, la conjetura de Maldacena [4] inauguraba el área que hoy se conoce como correspondencia gauge/gravedad o AdS/CFT. Formulada originalmente como una dualidad fuerte/débil entre una teoría de cuerdas tipo IIB sobre $AdS_5 \times S^5$ y una teoría $\mathcal{N} = 4$, $SU(N)$ SYM en $d = 3 + 1$, la correspondencia se refiere en la actualidad a una conexión más amplia entre teorías de cuerdas, gravedad y geometría por un lado, y teorías de campos de gauge en una dimensión menor por el otro, de donde se la conoce también como dualidad holográfica. Por su carácter de dualidad fuerte/débil, introdujo la posibilidad de describir teorías de gauge fuertemente acopladas en términos de teorías de cuerdas débilmente acopladas propagándose en espacios tiempo de pequeña curvatura y, recíprocamente, permitió estudiar la dinámica del espacios tiempo fuertemente curvados en términos de teorías de gauge débilmente acopladas. Desde entonces la correspondencia AdS/CFT se ha convertido en una herramienta útil para estudiar aspectos no perturbativos de las teorías de gauge, cuanto los fenómenos asociados a la gravedad cuántica. En este trabajo se hará foco en aspectos formales de la primera posibilidad. La prerrogativa de que toda la información de una teoría de mayor dimensión puede accederse a través de otra de menos dimensión y viceversa se conoce como Principio Holográfico, que será un principio guía para el desarrollo de este trabajo.

Es interesante mencionar que el carácter fuerte/débil de la dualidad representa a la vez un atractivo y una debilidad. El atractivo, como se mencionó arriba, es la descripción en términos perturbativos una teoría dual de procesos que de otra forma serían difíciles de obtener en la teoría original. Aún así, por lo mismo resulta un desafío para demostrarla de forma acabada. Salvo por escasos pero importantes méto-

dos (integrabilidad, por ejemplo [5]), la teoría de perturbaciones es la herramienta estándar para calcular observables en una teoría. Por construcción, una expansión perturbativa no puede tener validez en ambas teorías a la vez, de forma que solo una solución completa de ambas teorías en todos los regímenes podría establecer un mapa completo de los observables y así probar la dualidad. En casos de estudio con gran número de (super)simetrías, como por ejemplo el caso $\mathcal{N} = 4$, $SU(N)$ SYM en $d = 3 + 1$ mencionado arriba, algunos observables pueden calcularse de forma exacta para todos los valores de los parámetros y así compararse con las predicciones perturbativas de la teoría dual. A este tipo de chequeos no triviales se lo conoce como holografía de precisión [6]. Hasta el momento, la dualidad AdS/CFT ha pasado estos y otros tipos de chequeo de consistencia [7, 8]. Luego, aún en su carácter conjetural, la correspondencia gauge/gravedad se conforma como una herramienta robusta en el área de la física teórica de altas energías.

Si bien la propuesta original surge dentro del marco de teoría de cuerdas y concretamente para el caso del mentado ejemplo de una teoría de cuerdas tipo IIB sobre $AdS_5 \times S^5$ y una teoría $\mathcal{N} = 4$, $SU(N)$ SYM en $d = 3 + 1$, la dualidad ha encontrado un número creciente de mapas precisos entre teorías completas, como el caso de $\mathcal{N} = 6$ super Chern Simons y la teoría ABJM [9]. Los casos de estudio, como los anteriores, donde se tienen de dos teorías concretas consideradas duales y se estudia una u otra usando la dualidad, se suelen denominar estudios “de arriba hacia abajo”.

Por otro lado, uno podría argüir que debiera existir un marco general en el cuál dar un diccionario entre teorías sin que esta dependa de forma drástica del caso de estudio puntual. Desde esta perspectiva, se buscan establecer reglas generales para el estudio holográfico de sistemas sin recurrir a una descripción detallada de las teorías en cuestión. En este sentido, existe consenso en la comunidad en que las propiedades topológicas y causales de la geometría del espacio tiempo son codificadas en los estados y la dinámica de la teoría cuántica de campos dual. En particular, la conjetura establece que una teoría de gravedad definida sobre un espacio-tiempo asintóticamente Anti de Sitter (AdS), será dual a una teoría de campos conforme (CFT) que podría pensarse definida sobre la frontera conforme del espacio AdS. Soluciones de espacios AdS que interpolan entre dos valores de constante cosmológica entre su borde asintótico y horizonte de Killing se interpreta como el flujo del grupo de renormalización de la teoría de campos dual entre dos puntos fijos [8]. También de forma general, una geometría de agujero negro asintóticamente AdS describirá la física de la teoría de campos dual a dicha temperatura [10]. Llamaremos a este tipo de abordajes de la dualidad “de abajo hacia arriba”. Esta será principalmente la forma en la que discutiremos la dualidad en este trabajo.

Un aspecto interesante y general a comentar acerca de una descripciones duales de sistemas, es que requiere de una reinterpretación de lo que suelen denominarse los grados de libertad (GDL) de un sistema. Podría decirse que en un estudio clásico de teoría de campos, uno puede escribir una acción que podría ser un contenido de materia acoplada entre sí por interacciones que admiten una descripción perturbativa. En este ejemplo, los GDL se piensan como el contenido de materia definido por el lagrangiano de la teoría libre, la constante de acoplamiento es un parámetro pequeño $\lambda \ll 1$ a determinar por el experimento y los observables de la teoría interactuante se obtienen como perturbaciones de los resultados libres con el orden de precisión buscado. La teoría cuántica de campos muestra que solo se obtendrán predicciones finitas luego de renormalizar la teoría, lo que lleva a que el valor de la constante de acoplamiento efectivo de la teoría dependa de la escala a la que se están haciendo los experimentos $\lambda = \lambda(E)$. Esto quiere decir que existirán genéricamente regiones donde $\lambda \sim 1$ o incluso $\lambda \gg 1$. En estas regiones, no solo pierde validez la expansión perturbativa, si no que es también cuestionable que podamos extrapolar a esta región nuestra definición de GDL del caso debilmente acoplado: para $\lambda \gg 1$ no hay ningún sentido en el cual la parte que llamamos libre sea distinguible o dominante respecto de los otros términos de forma que es caprichoso priorizarla para caracterizar la teoría. En este sentido para teorías de campos, salvo para teorías libres, los GDL de una teoría general no es algo propio de un sistema si no que solo hay GDL efectivos con validez dentro de un régimen de energías. Ahora bien, entre un régimen y otro típicamente GDL efectivos cambiarán radicalmente de naturaleza. Ejemplos elementales de esto son QED y QCD. Para el primero, a bajas energías la teoría está descrita por electrones y campos de gauge. Sin embargo a altas energías la carga del electrón se vuelve un parámetro no perturbativo y no puede afirmarse que las excitaciones fundamentales del vacío sigan siendo estados con fotones y electrones, si no que serán nuevos grados de libertad. El caso de QCD se da en sentido inverso, siendo descrita por quarks (incluso no masivos) a altas energías, mientras que a bajas energías la teoría se vuelve fuertemente acoplada. El hecho de que la teoría tenga libertad asintótica hace que sí poseamos numerosa fenomenología de las excitaciones del vacío a bajas energías, que son

estados confinados de quarks y que conforman la materia hadrónica, protones y neutrones entre otros. Si bien se conocen modelos efectivos para describir la fenomenología hadrónica, sería interesante encontrar una descripción fundamental de QCD a bajas energías, que ya no será la acción conocida de QCD, si no que tendrá nuevos GDL. El objetivo de esta discusión es presentar a AdS/CFT como una herramienta para proveer descripciones no perturbativas de teorías de campos en términos de una teoría radicalmente distinta con espaciotiempo dinámico y en otro número de dimensiones.

Las primeras prescripciones para trabajar en holografía [11, 12] fueron definidas sobre teorías de signatura Euclidiana. En esta representación del diccionario holográfico se conectan las funciones de partición de las teorías duales, estableciendo un mapa entre fuentes externas para operadores locales de traza simple en la CFT y condiciones de borde en el borde conforme para los campos fundamentales en AdS. En particular, y como se explicará en más detalle en el cuerpo de este trabajo, las funciones de n -puntos o correladores de la CFT se obtienen tomando derivadas respecto de las fuentes externas. En esta signatura, la única frontera del espacio AdS es su borde conforme donde está definida la CFT dual. Sin embargo, una extrapolación directa a tiempo real de esta prescripción lleva a aparentes contradicciones con el principio holográfico: la información que corresponde a los estados inicial y final debe obtenerse o bien de bordes no holográficos o bien del interior de la geometría y ninguna de estas regiones ni su información son accesibles desde la teoría de campos dual. Cabe mencionar que en la interpretación física del análogo euclidiano no hay tal conflicto, puesto que el sistema se encuentra por construcción en el estado de equilibrio. Una construcción consistente en tiempo real de la dualidad es luego de interés al menos como un chequeo de consistencia: no hay ningún motivo por el cuál la dualidad tenga que admitir solo una descripción Euclídea. En un sentido menos formal, el cálculo Euclídeo de observables no siempre admite una extensión analítica obvia a tiempo real. En particular, cantidades como la viscosidad de cizalla en teoría de campos, definida como el límite a bajas energías de un cociente de correladores de la teoría de campos, resulta difícil de obtener en ausencia de métodos de extensión analítica de resultados Euclídeos, donde los resultados suelen estar dados en términos de sumas discretas de frecuencias de Matsubara y un límite de bajas energías no es posible [13, 14]. En esta tesis se presenta un ejemplo más sencillo de esto, donde se obtienen correladores de la teoría a tiempo real que serían no triviales de obtener solo desde el correlador Euclídeo.

Una forma alternativa de trabajar con la dualidad es el mapa BDHM o extrapolar [15]. Este segundo mapa, equivalente a GKPW [16], es un mapa entre operadores de la teorías duales y permite una descripción de los operadores de una CFT en el límite planar en términos de operadores escalera de los campos fundamentales de AdS. En un sentido estricto, en la literatura el mapa extrapolar consiste en el cálculo de los correladores de la teoría de campos mediante la extracción del orden dominante de los correladores en AdS cuando sus puntos se llevan al borde conforme. Sin embargo, si uno asume la prescripción operatorial BDHM, puede demostrar inmediatamente la prescripción extrapolar y viceversa. Luego, en este trabajo hablaremos indistintamente de ambas prescripciones aunque preferiremos el nombre de BDHM, la versión operatorial, que es la que nos será más útil a nuestros fines. La relación operatorial inversa de cuantizar la teoría CFT para obtener información de la gravedad cuántica en AdS se conoce como mapa HKLL [17]. Desde este enfoque usualmente se discute cuánta información de la CFT es necesaria para determinar un operador a medida que este está más adentro en la dirección radial holográfica. Este problema y sus avances, sin embargo, está fuera de los objetivos de esta tesis y se refiere al lector a [18] para su discusión.

Una extensión de la prescripción GKPW a procesos con evolución en tiempo real en acuerdo con el Principio holográfico fue dada por Skenderis y van Rees (SvR) en [19, 13]. En esta, se representan problemas físicos en la CFT en términos de caminos de Schwinger-Keldysh (SK) [20] en tiempo complejo. Lo que se busca entonces es proveer una geometría dual al camino completo SK, que invariablemente será una variedad de signatura cambiante, como lo es el propio camino SK. El resultado es una prescripción a tiempo complejo donde las regiones Lorentzianas representan la evolución real del sistema mientras que las euclidianas definen el estado en que este se encuentra, en consonancia con la construcción de la función de onda de Hartle-Hawking HH [21] para la gravedad cuántica euclidiana.

La construcción del dual geométrico se realizará separando el camino SK en segmentos de signatura definida, asignando un dual a cada segmento y luego pegando las piezas para armar la variedad completa. Las reglas de pegado se derivan directamente en el formalismo de integral de caminos pidiendo que cada región defina un buen problema variacional y que las contribuciones provenientes de las regiones de pegado se cancelen entre ellas. Con esta prescripción, puede demostrarse que el problema en la teoría gravitatoria

está completamente determinado por información accesible desde la teoría de campos dual, resolviendo el conflicto con el principio holográfico. La contraparte de esto es el lidiar con una integral de caminos compleja. Este método de dar con el dual geométrico completo mediante piezas que luego se ensamblan, sugiere un mapa holográfico también por partes para cada segmento. Profundizaremos sobre esta idea en el cuerpo del trabajo.

Otro aspecto que resuelve la prescripción SvR al estar embebida en el formalismo de SK, es que logra reproducir sin ambigüedades los distintos tipos ordenamientos temporales. Por ejemplo, los correladores a $T = 0$ en teoría de campos y la respuesta lineal de un sistema a $T \neq 0$ requieren de un ordenamiento temporal de Feynman y causal respectivamente. Desde la prescripción euclidiana tradicional los reguladores adecuados deben imponerse a mano y con intuición física, lo que puede resultar no trivial, especialmente en teorías interactuantes. Esta ambigüedad no tiene lugar desde el formalismo de SK: ambos problemas corresponden a distintos caminos en el plano complejo temporal y llevan directamente a los resultados correctos en cada caso. El correcto ordenamiento de los correladores obtenidos por cálculos holográficos, contrastados con los resultados esperados de cálculos directos en la CFT, se usará durante la tesis como chequeo de consistencia de que las geometrías consideradas están bien construidas.

Un aspecto relevante de esta prescripción es que sugiere la existencia de dos tipos de fuentes externas que uno puede encender en la teoría. Las fuentes externas en las regiones Lorentzianas se interpretan inmediatamente como los objetos análogos a las fuentes externas Euclídeas en la prescripción GKPW, i.e. aquellas sobre las cuales se deriva para encontrar los correladores de la teoría. Por otro lado, aparecen en este formalismo además regiones Euclídeas sobre las que pueden encenderse fuentes. Como se mencionó, en su trabajo original [19, 13] los autores consideraron el caso de fuentes Euclídeas nulas, en acuerdo con lo propuesto por HH para la función de onda del vacío. La inserción de fuentes en las regiones Euclídeas del camino y la caracterización de sus efectos en el marco de AdS/CFT será el eje central de esta tesis.

El resultado más importante de este trabajo es el haber generalizado la prescripción SvR para estados excitados holográficos mediante la inserción de fuentes Euclídeas. Por estados excitados holográficos nos referimos a estados que pueden definirse de forma no perturbativa en términos de los GDL de cada teoría a ambos lados de la dualidad y que por construcción siempre tienen asociada una geometría dual en la teoría gravitatoria. El estudio llevado a cabo nos permite caracterizar a estos en el límite planar de la CFT como excitaciones coherentes del vacío en términos de los operadores escalera de la teoría de gravedad. En este límite entonces los estados bajo estudio representan una base (sobrecompleta) del espacio de Hilbert. Correcciones a este límite romperán el carácter coherente, pero a todo orden perturbativo los mismo mantienen una geometría dual asociada. Se conseguirá dar además, merced de su carácter geométrico, un juego de reglas diagramáticas para calcular las correcciones al comportamiento coherente a todo orden. Estudiamos aplicaciones de esta construcción a distintos caminos de SK que describen sistemas a $T = 0$ y $T \neq 0$. Los últimos serán especialmente interesantes en tanto su estado está definido por una matriz densidad y la descripción de los estados excitados en este caso requiere de un estudio más detallado.

A continuación, en los Caps. 2 y 3 se presentan las herramientas necesarias para los estudios que se llevarán a cabo en el trabajo. La Sec. 3.5 presenta la construcción formal y caracterización de los estados excitados holográficos, punto central de la tesis. En los Caps. 4 y 5 presentaremos las aplicaciones de esta construcción a sistemas a $T = 0$ y $T \neq 0$ respectivamente. En los Aps. A y B, se presentan el procedimiento de renormalización holográfica e integrales en el espacio de momentos dejadas fuera del cuerpo del trabajo.

Capítulo 2

Campos y Gravedad

En este capítulo presentaremos aspectos preliminares tanto de teoría cuántica de campos (TCC o QFT) como de relatividad general (RG) que serán necesarios para este trabajo. En primer lugar, definiremos las funciones de correlación y explicaremos su rol central en TCC. Generalizaremos la definición estándar de estos objetos a caminos complejos en el tiempo, conocidos como formalismo de Schwinger-Keldysh (SK) y presentaremos los caminos que serán de interés para las aplicaciones en los Caps. 4 y 5. En segundo lugar presentaremos el formalismo de Teoría térmica de campos (TFD) y veremos que este es el equivalente al estudio de un camino particular descrito en la sección anterior, lo que será de mucha utilidad para las aplicaciones a T finita en el Cap. 5. Estudiaremos también el grupo de simetría conforme, su álgebra y cómo estas simetrías restringen las funciones de correlación. Estas restricciones son tales que proponen una nueva forma de estudiar estas teorías que evita cualquier relación a una acción concreta. Luego, introduciremos espacios de constante cosmológica negativa en signatura Lorentziana (AdS) y Euclidea (H) y estudiaremos las isometrías que los definen, $SO(d, 2)$. A partir de ellas, veremos que podemos definir una teoría conforme a partir de una acción en AdS, recuperando el álgebra conforme. Esto nos permitirá recuperar un principio de Hamilton para teorías conformes que no siempre existe o puede definirse. Presentaremos además geometrías de agujeros negros sobre espacios asintóticamente AdS (AdS-BH) además de presentar las coordenadas en las que trabajaremos.

De forma general a lo largo del trabajo, definiremos las teorías de campos sobre espaciotiempos $d = (d - 1) + 1$ dimensionales con campos fundamentales A_μ aún si no estamos hablando puntualmente de una teoría de gauge y \mathcal{O} para operadores locales que podrían o no ser compuestos. Las teorías de gravedad se definirán sobre espacios $d + 1$ dimensionales y los campos fundamentales se notarán Φ , con condiciones de contorno en el borde conforme ϕ , también independientemente del carácter tensorial del mismo. Esto obedece mayormente a la notación estándar de la bibliografía sobre la correspondencia AdS/CFT.

2.1. Teorías de Campos

En esta sección, presentaremos aspectos relevantes para esta tesis sobre teoría de campos en espacio plano. En primer lugar, introducimos lo que en el contexto de este trabajo llamaremos colectivamente el formalismo de Schwinger-Keldysh (SK) para describir sistemas fuera del equilibrio. De forma resumida, el formalismo permite interpretar algunos procesos físicos de interés como la evolución del sistema sobre un camino en el plano complejo temporal. En un sentido más estricto suele denominarse camino SK a un camino particular de la familia que describiremos, pero en este trabajo llamaremos caminos SK indistintamente a todos los ejemplos de interés para este trabajo llamados: In-Out, In-In y Térmico, los cuales presentamos en la misma sección. Los últimos dos, In-In y Térmico, presentan trayectorias cerradas en tiempo real, aunque el camino In-In es un camino abierto en el plano complejo. Mostraremos cómo se tratan los caminos cerrados en el formalismo de integral de caminos. A continuación, se presenta el formalismo TFD o teoría térmica de campos para estudiar teorías de campos a temperatura finita. Veremos cómo este formalismo, en principio independiente queda contenido en un caso particular del camino Térmico del formalismo SK, pero explota simetrías propias de su formulación que serán de gran utilidad para este trabajo. Como ejemplo o addendum, presentaremos una derivación de lo que se conoce como efecto Unruh y lo relacionaremos con la analiticidad de los campos que viven sobre una variedad. Luego discutiremos el grupo

de simetrías conformes $SO(d, 2)$ (o $SO(d + 1, 1)$ en signatura Euclídea) y las restricciones que impone a una teoría de campos invariante frente al mismo, que denominaremos CFT. Por último discutiremos propiedades generales sobre estados coherentes en el marco de teoría de campos. Mostraremos que componen una base sobrecompleta de estados del sistema con la propiedad de tener siempre asociado una interpretación clásica en términos de posición y momento o de configuración de campo y momento canónicamente conjugado en teoría de campos. Mostraremos además que sistemas libres en su estado fundamental acoplados a fuentes externas durante un período de tiempo arriban naturalmente a un estado coherente [22]. Determinaremos también de forma cerradas los autovalores para este caso y discutiremos algunas extensiones a dicho mecanismo de creación de estados excitados por evolución unitaria de un sistema.

2.1.1. Formalismo de Schwinger-Keldysh

En esta sección presentamos lo que llamaremos formalismo de Schwinger-Keldysh [20] (SK), herramienta troncal de la prescripción de Skenderis y van Rees. En resumen, dicho formalismo permite reinterpretar procesos físicos de interés en términos de integrales sobre una sucesión de segmentos orientados de signaturas pura Euclídea o Lorentziana en el plano complejo temporal. De forma general, los segmentos Lorentzianos describirán la evolución en tiempo real del sistema, mientras que los segmentos Euclídeos describirán el estado del sistema. Como se mencionó más arriba, en la literatura suele denominarse camino SK solamente a un camino particular cerrado en el tiempo que mostraremos más abajo. En esta tesis, sin embargo, llamaremos genéricamente formalismo SK a cualquier camino sobre el plano complejo temporal que describa un proceso físico.

Caminos abiertos

Motivaremos el formalismo de Schwinger-Keldysh explicando cómo reescribir un proceso de dispersión de partículas como un camino en el plano complejo temporal formado de 3 segmentos: dos Euclídeos que construyen por separado el estado inicial y final y uno Lorentziano que describe la evolución unitaria del sistema entre uno y otro estado.

Se parte de la expresión estándar para calcular la función de 2 puntos de un campo local \mathcal{O} , que tomamos escalar por conveniencia, en una teoría con hamiltoniano $H = H_0 + H_I$, donde H_0 es un Hamiltoniano que puede resolverse de forma exacta y H_I describe interacciones que al menos formalmente pueden tomarse como perturbaciones de H_0 . Esto se escribe como [23],

$$\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \} | \Omega \rangle \equiv \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \mathcal{O}_I(x) \mathcal{O}_I(y) e^{-i \int_{-T/2}^{T/2} dt H_I(t)} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ e^{-i \int_{-T/2}^{T/2} dt H_I(t)} \} | 0 \rangle} \quad (2.1.1)$$

donde $|\Omega\rangle$ es el vacío exacto de la teoría interactuante $H = H_0 + H_I$ que se asume único, $|0\rangle$ el vacío de H_0 , $\mathcal{O}_I(x)$ el campo escalar en el esquema de interacciones y $T\{\dots\}$ es el operador de ordenamiento temporal. En (2.1.1) hemos hecho explícito el límite $T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)$, que permite conectar el vacío $|\Omega\rangle$, en principio desconocido, con $|0\rangle$ que nos es accesible. Explicaremos esta conexión para entender un primer ejemplo de un fenómeno físico en términos de un camino en el plano complejo temporal.

Se parte del estado de vacío de la teoría libre H_0 en un pasado remoto ($T \rightarrow -\infty$) y se encienden adiabáticamente las interacciones hasta obtener un sistema $H_0 + H_I$. La evolución del vacío libre luego de un tiempo T es

$$\begin{aligned} e^{-iHT} |0\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n T} \langle n|0\rangle |n\rangle \\ &= e^{-iE_\Omega T} \langle \Omega|0\rangle |\Omega\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-iE_n T} \langle n|0\rangle |n\rangle \\ &= e^{-iE_\Omega T} \left(\langle \Omega|0\rangle |\Omega\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i(E_n - E_\Omega) T} \langle n|0\rangle |n\rangle \right) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

donde se asume que existe una base $|n\rangle$ de autoenergías E_n del hamiltoniano completo H . El primero de estos estados es por definición $|\Omega\rangle$ con energía $E_\Omega < E_n, \forall n \geq 1$. Si es correcta la hipótesis de que H_I puede describirse como una perturbación de H_0 , resulta que necesariamente $\langle n|0\rangle \neq 0$. Si además el sistema

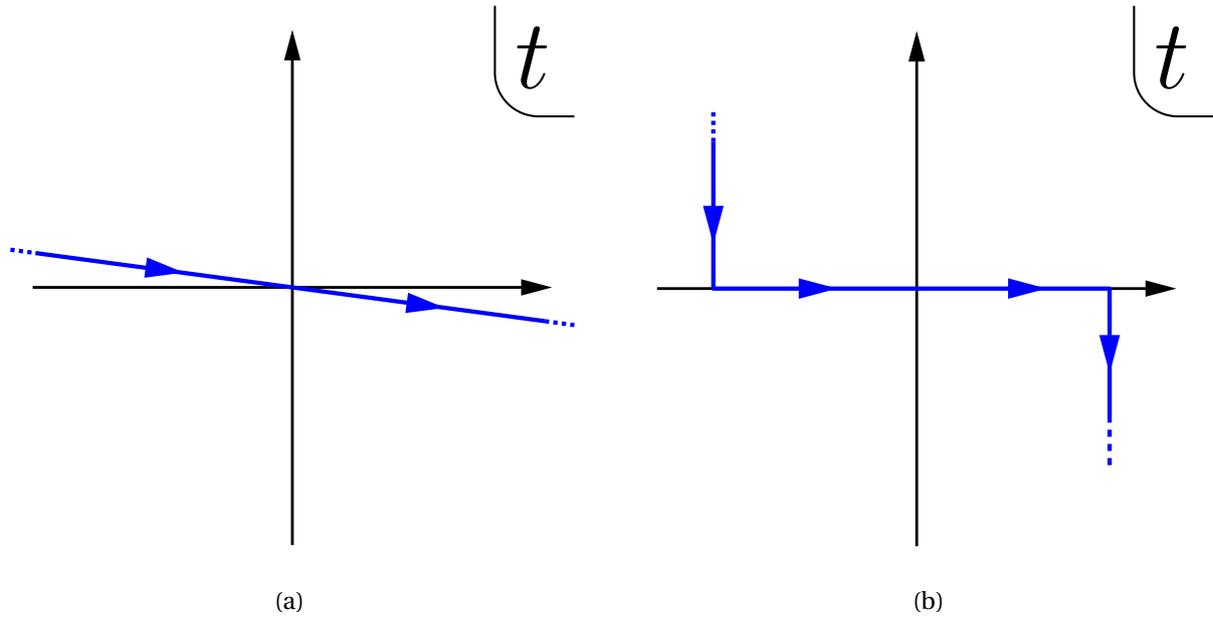


Figura 2.1: (a) La figura muestra el camino sobre el plano complejo temporal que toma el formalismo tradicional de dispersión en teoría cuántica de campos. Aunque el corrimiento del eje real ϵ es pequeño, dado que $T \rightarrow \infty$, tanto la componente real como imaginaria del camino se hacen infinitas. Este camino lleva a un propagador de Feynman. (b) Se muestra el camino del formalismo In-Out sobre el plano temporal complejo ya como 3 segmentos de signatura definida.

evolucionó adiabáticamente entre un hamiltoniano y otro, el periodo de tiempo T necesario para cambiar de un Hamiltoniano a otro es infinito, de forma que la expresión anterior vale estrictamente en el límite $T \rightarrow \infty$. El último paso es notar que por construcción, $(E_n - E_\Omega) > 0, \forall n \geq 1$, de forma que deformando la evolución temporal como $T \rightarrow T(1 - i\epsilon)$, la evolución unitaria adquiere una componente exponencial que suprime todos los términos respecto del primero, i.e.

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iHT} |0\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iE_\Omega T} \langle \Omega | 0 \rangle | \Omega \rangle + \dots ; \quad \Rightarrow \quad | \Omega \rangle \sim \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{-iHT} |0\rangle}{\langle \Omega | 0 \rangle} .$$

El camino descrito por el límite se muestra en la Fig. 2.1(a).

El objetivo central de esta derivación es mostrar que ya en los procesos más canónicos de teorías de campos aparece al menos como herramienta de cómputo los caminos en el plano complejo de tiempo. En un sentido más amplio, las propiedades analíticas de los correladores y otros observables juegan un rol central dentro en una QFT en general. En un sentido inmediato a los efectos de esta sección, recordaremos que uno puede construir la matriz densidad de un sistema en equilibrio térmico como una extensión analítica del operador de evolución unitaria. Otros ejemplos son la ubicación de los polos en el plano complejo ω de las autofunciones de energía, que determinan si están asociadas a la creación o aniquilación de partículas o la caracterización de las funciones de Green retardadas o avanzadas, que también se caracterizan según sean analíticas en el semiplano inferior o superior para ω complejo. De forma general, debemos pensar a los objetos definidos en QFT como la extensión analítica de la función misma en todas sus variables y a los polos de las mismas como información física relevante para el sistema.

Un segundo motivo por el cual enfatizar esta propiedad general de las QFT, es que esto no es propio para otras teorías físicas y en particular no lo es para la Relatividad General. Si bien la misma se sirve de extensiones analíticas en situaciones de mucha simetría, no es condición necesaria que una métrica tenga una extensión analítica única para ser considerada física y debido a la invarianza de difeomorfismos, distintas foliaciones temporales llevan a distintas posibles extensiones analíticas de una misma métrica [24]. Un ejemplo inmediato de esto son las soluciones para agujeros negros rotantes [25], donde los términos cruzados en la métrica hacen que una rotación de Wick no lleve la métrica real original a una métrica real, si no a una compleja. Otro ejemplo de profundo interés en RG es el proceso de colapso de materia, la formación de un agujero negro y su posterior evaporación. No es claro que la evolución de un sistema gravitatorio en

presencia de un agujero negro sea de naturaleza unitaria. Si bien volveremos sobre este punto varias veces a lo largo de este trabajo, diremos lo siguiente: si la dualidad AdS/CFT, que presentaremos en el próximo capítulo, describe completamente teorías de gravedad en términos de teorías de campos y viceversa, esta disparidad en la importancia de la analiticidad en las teorías podría ofrecer algún tipo de información acerca de los agujeros negros y de propiedades de la correcta teoría de gravedad cuántica. En particular, el argumento más sólido a favor de que la evolución de los agujeros negros puede explicarse mediante una evolución unitaria proviene de AdS/CFT.

En un lenguaje de integrales de camino, los correladores de un operador local \mathcal{O} de la teoría se obtienen mediante su función generatriz

$$Z[j] \equiv \int \mathcal{D}A_\mu e^{-iS[A_\mu] - i \int j \mathcal{O}}, \quad (2.1.3)$$

donde hemos omitido las variables de integración por simplicidad, $\int j \mathcal{O} = \int dx^d j(x) \mathcal{O}(x)$, hemos denominado colectivamente A_μ a los campos fundamentales de la QFT, $S[A_\mu]$ es la acción para dichos campos y j es una fuente externa para el operador \mathcal{O} , que deforma la acción. La naturaleza tensorial de j será el adecuado para contraer todos los índices del operador \mathcal{O} del que es fuente. Es inmediato ver que tomar derivadas respecto de j para luego tomar el límite $j \rightarrow 0$ permite obtener todas las funciones de n puntos de \mathcal{O} . Notar que \mathcal{O} no tiene por qué ser un campo fundamental de la teoría si no que puede ser también cualquier operador compuesto. Esto será relevante en el próximo capítulo al tratar con teorías de Yang Mills. De forma natural, puede extenderse este mecanismo a cualquier número de operadores \mathcal{O} .

A partir de (2.1.3), uno puede obtener las funciones de n puntos conectadas ordenadas temporalmente como

$$\left\langle T \left\{ \prod_{i=1}^n \mathcal{O}(x_i) \right\} \right\rangle \equiv \frac{\delta^n \ln Z[j]}{\prod_{i=1}^n \delta j(x_i)} \Big|_{j=0} \quad (2.1.4)$$

donde la expresión “conectadas” refiere a que este objeto solo toma en cuenta los procesos en los cuales los n operadores están contraídos con los demás y no intervienen aquellos que puedan describirse en términos de funciones de $m < n$ puntos.

En el lenguaje de integrales de caminos, la definición (2.1.3) ya tiene incorporada la foliación temporal usada y solo es capaz de calcular funciones de n puntos ordenadas según se ordena el camino sobre la que está definida. Veremos esto con más detalle al presentar otros caminos de SK más adelante. Así como está escrita, es implícito que la función generatriz (2.1.3) está definida sobre un camino en tiempo real $t \in (-\infty, \infty)$, aunque con una deformación hacia tiempos complejos similar a la definida anteriormente $T \rightarrow T(1 - i\epsilon)$. Hacer explícita la integración sobre esta curva deformada es engorroso desde el punto de vista notacional y operativo, puesto que la acción y los campos se vuelven todo el tiempo variables complejas. Para simplificar el análisis, podemos aprovechar el hecho de que no haya singularidades del lagrangiano sobre el camino de la Fig. 2.1(a), para deformarlo al camino que muestra la Fig. 2.1(b) en términos de segmentos verticales y horizontales, donde la acción es, por segmentos, solamente Euclídea o Lorentziana. Llamaremos a este camino In-Out.

La expresión de (2.1.3) sobre el camino de la Fig. 2.1(b) puede escribirse,

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{C}}[j] &\equiv \int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}A_\mu e^{-iS[A_\mu] - i \int j \mathcal{O}(x)} \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu^{-\frac{T}{2}} \mathcal{D}A_\mu^{+\frac{T}{2}} Z_E[j_-; A^{-\frac{T}{2}}] Z_L[j_L; A^{-\frac{T}{2}}; A^{+\frac{T}{2}}] Z_E[j_+; A^{+\frac{T}{2}}], \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

donde $A^\pm \frac{T}{2}$ son condiciones iniciales y finales para cada segmento, sobre los que se integra para describir la función generatriz total, $\{j_\pm, j_L\}$ son las fuentes en cada región y hemos distinguido las tres secciones del camino como distintas funciones generatrices sobre recorridos de distinta signatura,

$$Z_E[j_-; A^{-\frac{T}{2}}] \equiv \int_0^{A^{-\frac{T}{2}}} \mathcal{D}A_\mu e^{-S_E[A] - \int j_- \mathcal{O}} \quad Z_L[j_L; A^{-\frac{T}{2}}; A^{+\frac{T}{2}}] \equiv \int_{A^{-\frac{T}{2}}}^{A^{+\frac{T}{2}}} \mathcal{D}A_\mu e^{-iS_L[A] - \int j_L \mathcal{O}}, \quad (2.1.6)$$

con una definición análoga para $Z_E[j_+; A^{+\frac{T}{2}}]$.

Aclaremos algunos aspectos sobre (2.1.5). La propiedad de evaluar una función generatriz por partes para luego pegarlas, esquemáticamente

$$Z_{a \rightarrow c} = \int db Z_{a \rightarrow b} Z_{b \rightarrow c},$$

no es una particularidad de este formalismo si no una propiedad general en QFT. Lo interesante de usar esta propiedad en este contexto es que permite en este ejemplo identificar cada uno de los segmentos con un proceso físico: Los segmentos $Z_E[j_{\pm}; A^{\pm \frac{T}{2}}]$ corresponden a la preparación del estado final/inicial del proceso de dispersión respectivamente, mientras que la sección Lorentziana $Z_L[j_L; A^{-\frac{T}{2}}; A^{+\frac{T}{2}}]$ describe la evolución física del sistema en tiempo real.

Por último, notar que en las medidas Euclídeas integramos solo sobre configuraciones que se anulen en $\tau = \pm\infty$. En la misma línea que (2.1.2), se puede argüir que una evolución Euclídea por un período infinito de tiempo proyecta siempre sobre el vacío de la teoría, donde todos los campos están apagados. Un razonamiento alternativo es pensar que para intervalos muy grandes de tiempo en los cuales evoluciona un sistema (un experimento de dispersión completo toma en principio un tiempo infinito) la fenomenología no debiera ser sensible a la configuración precisa en la que los campos estaban a un dado instante. Desde este punto de vista, se argumenta que esta información debiera solo contribuir a una constante que puede absorberse en una redefinición de la función generatriz.

Con esto en mente, es claro que j_L juega el rol de la fuente análoga a la de (2.1.4) respecto de la cual derivar. Los roles de j_{\pm} no son inmediatamente claros aún y postergaremos la discusión de los mismos, notando que haciendo $j_{\pm} = 0$ recuperamos la evolución sin deformar en (2.1.2). Estas integrales de caminos para $j_{\pm} = 0$ preparan el estado de vacío de una teoría $S[A]$. Intuitivamente entonces, la integral de caminos Euclídea con $j_{\pm} \neq 0$ llevará a estados distintos del vacío. Estudiaremos sus propiedades al final del presente capítulo. Un proceso análogo a este para teorías de gravedad fue concebido por Hartle y Hawking [21], que utilizaremos en el próximo capítulo. Hacemos notar que volveremos recurrentemente a este método de construir el estado de vacío de una teoría mediante integrales de caminos Euclídea.

Antes de pasar a estudiar caminos cerrados en el tiempo mencionaremos un aspecto general del trabajo. En todo nuestro desarrollo, usaremos métricas mayormente positivas para signatura Lorentziana y completamente positivas para Euclídeas. Esta convención facilita pasar mediante rotaciones de Wick de una signatura a la otra evitando signos globales. Dicho esto, también hay un sentido preciso en el cual tienen sentido físico las rotaciones de Wick, que en nuestra convención es $t \rightarrow -it$ y en consecuencia $\tau \rightarrow it$, lo que lleva naturalmente de operadores evolución unitarios e^{-iHt} a decaimiento de exponenciales reales $e^{-H\tau}$, de forma similar a (2.1.2). En este sentido también, notamos que una descripción paramétrica del camino orientado de la Fig. 2.1, la sección vertical que describe el estado inicial y que está en el semiplano complejo superior puede describirse con un parámetro $\lambda = -i\tau$, con $\tau \in (-\infty, 0]$ y lo análogo para el estado final con otro $\tau \in [0, \infty)$. Mantendremos esta convención para todo el trabajo.

Caminos cerrados

Ya justificada la presencia de los caminos a tiempo complejo y su estudio, introduciremos un nuevo tipo de camino que surge al estudiar valores de expectación para sistemas fuera del equilibrio. Veremos que podremos interpretar el cálculo como un camino cerrado (de ida y vuelta) sobre el eje temporal real. Este formalismo implica la duplicación de los grados de libertad del sistema y entre otras cosas permite calcular correladores de operadores en distintos ordenamientos temporales. La importancia de esto reside en que, por ejemplo, para teorías en equilibrio a temperatura finita, la respuesta de un sistema a la inserción de un operador estará dada en términos del correlador causal (que se llama típicamente función respuesta en este contexto) y no del correlador de Feynman de vacío tradicional en QFT. De forma general en signatura Lorentziana hay más de un ordenamiento temporal que es físicamente relevante.

Sobre los distintos ordenamientos temporales haremos también un comentario. Si bien para una teoría libre en el vacío se suele recurrir al cálculo de un correlador Euclídeo (que es único) y luego obtener el correlador adecuado haciendo una rotación de Wick acorde, sorteando los polos en el plano complejo de una manera determinada, este procedimiento no siempre puede usarse para todos los casos de interés. Nuevamente, en el caso concreto de teorías a temperatura constante los correladores Euclídeos se expresan en términos de una sumatoria discreta sobre frecuencias de Matsubara [26, 27]. Hacer una extensión analítica de una serie infinita de términos no siempre es algo que sea posible y en un sentido menos formal, una base discreta de frecuencias obstruye el cálculo de cantidades como la viscosidad de cizalla, que en teorías de campos se define como un cociente de correladores en el límite $\omega \rightarrow 0$ de bajas frecuencias [14, 13]. En un sentido más operativo, el cálculo de objetos más complejos de teorías de campos motiva la formulación de un método que permita obtener directamente las cantidades físicas a tiempo real.

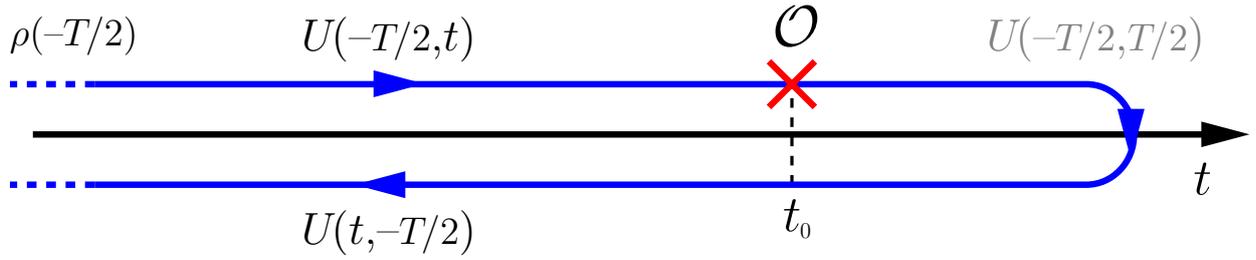


Figura 2.2: Se muestra en azul la interpretación de la evolución cerrada en el tiempo de la toma de una traza, junto con los operadores que generan cada tramo.

Se parte de un sistema con un hamiltoniano que podría depender del tiempo, $H(t)$, y en un estado descrito inicialmente por una matriz densidad $\rho(-T/2)$ para un instante $-T/2$. Para T suficientemente grande, uno puede pensar nuevamente que el sistema partió del estado de equilibrio de algún hamiltoniano H_0 que adiabáticamente fue convirtiéndose en $H(t)$. Para un tiempo t , puede encontrarse $\rho(t)$ resolviendo la ecuación de movimiento

$$\partial_t \rho(t) = -i[H(t), \rho(t)]. \quad (2.1.7)$$

La solución formal de esta ecuación diferencial es

$$\rho(t) = U(t, -T/2) \rho(-T/2) U(-T/2, t), \quad U(t, t') \equiv T \left\{ \exp \left(-i \int_t^{t'} H(t) dt \right) \right\} \quad (2.1.8)$$

El valor de expectación de un operador $\mathcal{O}(t)$ se define como

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle \equiv \frac{\text{tr}\{\mathcal{O}(t)\rho(t)\}}{\text{tr}\{\rho(t)\}} = \frac{\text{tr}\{U(-T/2, t) \mathcal{O}(t) U(t, -T/2) \rho(-T/2)\}}{\text{tr}\{\rho(-T/2)\}}. \quad (2.1.9)$$

El corazón del formalismo de Schwinger-Keldysh es interpretar el lado derecho de (2.1.9) como una evolución desde una configuración inicial en $-T/2$ hasta t , donde se aplica el operador $\mathcal{O}(t)$, para luego volver a $-T/2$, como se muestra en la Fig. 2.2. Notar que la evolución temporal en la primera mitad de la curva es opuesta a la de la segunda mitad. El cálculo, por ejemplo, de una función de 2 puntos sobre el camino de regreso en este formalismo llevará a un propagador ordenado tipo Dyson, i.e. en sentido anti-temporal. Más adelante mostraremos explícitamente cómo se realiza esto en el lenguaje de integral de caminos.

Notar que la función de partición puede calcularse como el valor de expectación del operador identidad, i.e.

$$Z_{SK} \equiv \frac{\text{tr}\{\rho(t)\}}{\text{tr}\{\rho(-T/2)\}} = \frac{\text{tr}\{\rho(-T/2)U(-T/2, t)U(t, -T/2)\}}{\text{tr}\{\rho(-T/2)\}} = \frac{\text{tr}\{\rho(-T/2)\}}{\text{tr}\{\rho(-T/2)\}} = 1, \quad (2.1.10)$$

donde en la segunda igualdad utilizamos la propiedad cíclica de la traza y $U(t, t')U(t', t) = U(t, t) = 1$ por unitariedad.

Para construir una función generatriz a partir de esta función de partición trivial, la deformaremos de la siguiente manera. En primer lugar notar que se puede extender la curva cerrada sobre la cual se integra desde $-T/2$ a $T/2$, insertando la identidad de la forma $1 = U(t, T/2)U(T/2, t)$ tanto en (2.1.9) como en (2.1.10). De esta manera se logra asociar a todos los observables de la teoría con el mismo camino independientemente de dónde estén siendo observados. En particular, sobre (2.1.9) en la interpretación de camino cerrado, la inserción de la identidad a izquierda o derecha de $\mathcal{O}(t)$ inserta al mismo en el camino de ida o de vuelta, de forma que el sistema/formalismo no distingue entre uno y otro caso.

En el formalismo tradicional de SK, se deforma simétricamente el Hamiltoniano como $H(t) \rightarrow H(t) \pm \mathcal{O}j/2$ con una fuente externa j para obtener valores de expectación de operadores como

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \left. \frac{\delta Z[j]}{\delta j} \right|_{j=0}. \quad (2.1.11)$$

Notar que dado que $Z[0] = 1$, tomar la derivada de $\delta Z[j]|_{j=0} = \delta \ln Z[j]|_{j=0}$.

De forma más general, uno puede deformar el hamiltoniano con dos fuentes independientes en los caminos de arriba y abajo. De este modo, el sistema queda descrito por el doble de grados de libertad que en el sistema original, evolucionando cada uno con un hamiltoniano $H(t) \rightarrow H(t) + \mathcal{O}_\pm j_\pm$. Esta será la forma en que trabajaremos para caminos cerrados en esta tesis. El formalismo tradicional puede recuperarse tomando $j_\pm = \pm j/2$ al final de cada cálculo.

Aquí, es central notar que si bien las teorías no interactúan entre ellas, sobre el punto $T/2$ los campos sí están identificados $A_+(T/2) \equiv A_-(T/2)$, lo que representa una condición final/inicial para los GDL A_\pm . A este vínculo se suma que las teorías a $-T/2$ se encuentran en el mismo estado $\rho(-T/2)$. En consecuencia, veremos que esta función generatriz contiene ahora información de más de un tipo de propagación de información en nuestro sistema y que el orden de derivación de las fuentes j_\pm es relevante. Dicho de otro modo, en términos del espacio de Hilbert de la teoría duplicada, el correlador de la teoría ya no es un escalar si no una matriz de 2×2 que, en un caso general, no será simétrica.

Calcularemos ahora esta matriz para un caso explícito de un sistema de osciladores libre \mathcal{O} , $H = \omega a^\dagger a$, que alcanza para mostrar las propiedades que describimos en el párrafo anterior. Tomaremos el estado inicial $\rho(-T/2) = e^{-\beta H}$ el de una teoría en equilibrio a temperatura $T = \beta^{-1}$. Calcularemos la función de partición (2.1.10) para este sistema. A lo largo de todo el ejemplo mantendremos la notación $\mp T/2$ para los puntos iniciales y finales del camino. El límite $T \rightarrow \infty$ puede tomarse al final de los cálculos para evitar tener una escala dimensional T espúrea en el problema.

El denominador puede obtenerse mediante un cálculo estándar de mecánica estadística, permite calcular la traza de la matriz densidad, i.e. [27]

$$\text{tr}\{\rho(-T/2)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}$$

donde hemos llamado ω a la energía del estado fundamental. El cálculo del numerador requiere de mayor cuidado para imponer correctamente los vínculos del sistema. Dividiremos entonces el camino en N secciones infinitesimales de longitud δ_t como se muestra en la Fig. 2.3, donde \mathcal{O}_i $i = 0, \dots, N/2$ e $i = N/2 + 1, \dots, N$ representan a los campos \mathcal{O}_\pm respectivamente. Usaremos el operador identidad en la base de estados coherentes

$$1 = \int \mathcal{D}\mathcal{O}_j e^{-\mathcal{O}_j^2} |\mathcal{O}_j\rangle \langle \mathcal{O}_j|, \quad \langle \mathcal{O}_i | \mathcal{O}_j \rangle = e^{\mathcal{O}_i \mathcal{O}_j} \quad (2.1.12)$$

Notar que el instante $t_{N/2} = t_{N/2+1}$ son el mismo y representan las condiciones finales/iniciales de los campos \mathcal{O}_\pm , i.e. $\mathcal{O}_+(+T/2) = \mathcal{O}_-(+T/2)$. Trabajaremos en detalle el ejemplo de $N = 6$. Para este caso el numerador de (2.1.10) toma la forma

$$\begin{aligned} Z_{SK} &= \text{tr}\{U(-T/2, t)U(t, -T/2)\rho(-T/2)\} \\ &= \langle \mathcal{O}_6 | U_{-\delta_t} | \mathcal{O}_5 \rangle \langle \mathcal{O}_5 | U_{-\delta_t} | \mathcal{O}_4 \rangle \langle \mathcal{O}_4 | 1 | \mathcal{O}_3 \rangle \langle \mathcal{O}_3 | U_{+\delta_t} | \mathcal{O}_2 \rangle \langle \mathcal{O}_2 | U_{+\delta_t} | \mathcal{O}_1 \rangle \langle \mathcal{O}_1 | \rho(-T/2) | \mathcal{O}_6 \rangle. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

donde $U_{\pm\delta_t} = e^{\mp i H \delta_t} \approx 1 \mp i H \delta_t$ es el operador evolución temporal en el intervalo infinitesimal δ_t . A la mitad de la trayectoria $\delta_t = t_4 - t_3 = 0$, lo que impone el vínculo $\mathcal{O}_+(+T/2) = \mathcal{O}_-(+T/2)$. Notar la presencia de $\rho(-T/2) = e^{-\beta H}$ en el último factor. Su valor de expectación de la base coherente puede obtenerse con el del hamiltoniano $H = \omega a^\dagger a$, que en este caso libre es

$$\frac{\langle \mathcal{O}_i | H | \mathcal{O}_j \rangle}{\langle \mathcal{O}_i | \mathcal{O}_j \rangle} = \omega \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j, \quad \frac{\langle \mathcal{O}_i | \rho(-T/2) | \mathcal{O}_j \rangle}{\langle \mathcal{O}_i | \mathcal{O}_j \rangle} = e^{-\beta\omega \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j}, \quad \frac{\langle \mathcal{O}_i | U_{-\delta_t} | \mathcal{O}_j \rangle}{\langle \mathcal{O}_i | \mathcal{O}_j \rangle} = 1 \mp i\omega \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j \delta_t.$$

La función de partición (2.1.10) puede escribirse en notación matricial como

$$Z_{SK} = (1 - e^{-\beta\omega}) \int \prod_{j=1}^6 \mathcal{D}\mathcal{O}_j e^{-i \sum_{i,j=1}^6 \mathcal{O}_i G_{ij}^{-1} \mathcal{O}_j}, \quad -iG_{ij}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & & & e^{-\beta\omega} \\ h_- & -1 & & \\ & h_- & -1 & \\ \hline & & 1 & -1 \\ & & & h_+ & -1 \\ & & & h_+ & -1 \end{array} \right], \quad (2.1.14)$$

donde $h_\pm = 1 \pm i\omega\delta_t$. Los elementos diagonales provienen de la inserción de la identidad en términos de estados coherentes (2.1.12), los términos en h_\pm salen de la evolución temporal infinitesimal, mientras que el

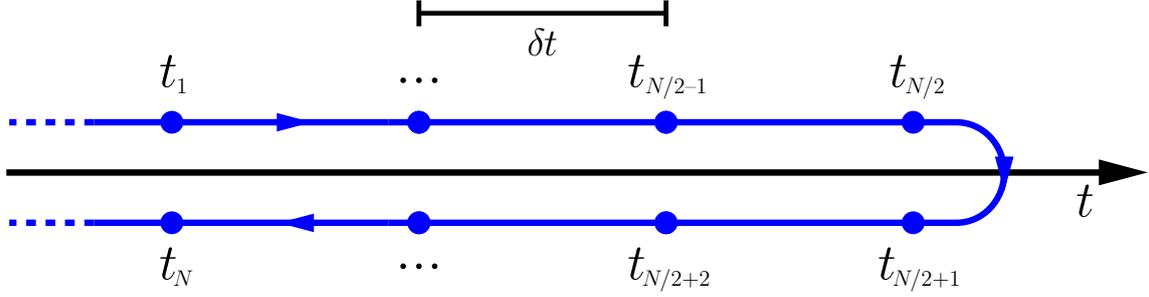


Figura 2.3: Se discretiza el recorrido de la Fig. 2.2 en N secciones infinitesimales de longitud δt . Se observa además que $t_{N/2} = t_{N/2+1}$.

$\rho = e^{-\beta\omega}$ arriba a la derecha viene de el último factor en (2.1.13). Notar el factor 1 en el elemento $iG_{N/2, N/2+1}^{-1}$ que empalma los campos de arriba y de abajo.

La integral en los campos es gaussiana y se resuelve por métodos estándar,

$$Z_{SK} = (1 - e^{-\beta\omega}) \int \prod_{i=1}^6 \mathcal{D}\mathcal{O}_i e^{i \sum_{j,j'=1}^6 \mathcal{O}_j G_{jj'}^{-1} \mathcal{O}'_j} = \frac{1 - e^{-\beta\omega}}{\det[-iG^{-1}]},$$

donde

$$\det[-iG^{-1}] = 1 - e^{-\beta\omega} (h_- h_+)^{N-1} = 1 - e^{-\beta\omega} (1 + \omega^2 \delta_t^2)^{N-1} \sim 1 - e^{-\beta\omega} e^{\omega^2 \delta_t^2 (N-1)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 - e^{-\beta\omega},$$

donde usamos que $\delta_t^2 (N-1) \sim N^{-1} \rightarrow 0$ en $N \rightarrow \infty$, recuperando $Z_{SK} = 1$. La ventaja de este procedimiento es que invirtiendo la matriz $-iG^{-1}$ se pueden obtener los correladores, i.e.

$$\langle \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j \rangle = iG_{ij}, \quad (2.1.15)$$

donde iG_{ij} se obtiene invirtiendo (2.1.14),

$$iG_{ij} = \frac{1}{\det[-iG^{-1}]} \begin{bmatrix} 1 & e^{-\beta\omega} h_- h_+^2 & e^{-\beta\omega} h_+^2 & e^{-\beta\omega} h_+^2 & e^{-\beta\omega} h_+ & e^{-\beta\omega} \\ h_- & 1 & e^{-\beta\omega} h_- h_+^2 & e^{-\beta\omega} h_- h_+^2 & e^{-\beta\omega} h_- h_+ & e^{-\beta\omega} h_- \\ h_-^2 & h_- & 1 & e^{-\beta\omega} h_-^2 h_+^2 & e^{-\beta\omega} h_-^2 h_+ & e^{-\beta\omega} h_-^2 \\ h_-^2 & h_- & 1 & 1 & e^{-\beta\omega} h_-^2 h_+ & e^{-\beta\omega} h_-^2 \\ h_-^2 h_+ & h_- h_+ & h_+ & h_+ & 1 & e^{-\beta\omega} h_-^2 h_+ \\ h_-^2 h_+^2 & h_- h_+^2 & h_+^2 & h_+^2 & h_+ & 1 \end{bmatrix},$$

de donde se puede ver explícitamente que la matriz de correladores no es simétrica y que por tanto los vínculos efectivamente hacen relevante el orden en que se toman las derivadas de la fuente. Si se indican los elementos de esta matriz con los índices $i, j = 1, 2, \dots, N, N, \dots, 2, 1$, donde los primeros (últimos) N corresponden al campo \mathcal{O}_+ (\mathcal{O}_-), los elementos de esta matriz pueden separarse en cuatro grupos,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_+ i \mathcal{O}_- j \rangle &\equiv \frac{e^{-\beta\omega} h_-^{i-1} h_+^{j-1}}{\det[-iG^{-1}]} \\ \langle \mathcal{O}_- i \mathcal{O}_+ j \rangle &\equiv \frac{h_+^{N-i} h_-^{N-j}}{\det[-iG^{-1}]} = \frac{(h_+ h_-)^{N-1} h_+^{1-i} h_-^{j-1}}{\det[-iG^{-1}]} \\ \langle \mathcal{O}_+ i \mathcal{O}_+ j \rangle &\equiv \frac{h_-^{i-j}}{\det[-iG^{-1}]} \times \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq j, \\ e^{-\beta\omega} (h_- h_+)^{N-1} & \text{si } i < j \end{cases} \\ \langle \mathcal{O}_- i \mathcal{O}_- j \rangle &\equiv \frac{h_+^{j-i}}{\det[-iG^{-1}]} \times \begin{cases} e^{-\beta\omega} (h_- h_+)^{N-1} & \text{si } i > j, \\ 1 & \text{si } i \leq j \end{cases} \end{aligned}$$

En el límite $N \rightarrow \infty$, recordando que $h_{\pm} = 1 \pm i\omega_0 \delta_t$ y $t_j = \delta_t j$

$$(h_+ h_-)^N \rightarrow 1 \quad h_{\pm}^j \rightarrow e^{\pm i\omega \delta_t j} = e^{\pm i\omega t} \quad \det[-iG^{-1}] \rightarrow 1 - e^{-\beta\omega} \quad (2.1.16)$$

se obtiene finalmente la matriz de propagadores, que notaremos

$$iG = \left[\begin{array}{c|c} \theta_{ij} n_\omega e^{-i\omega(t_i-t_j)} + \theta_{ji} (n_\omega + 1) e^{-i\omega(t_i-t_j)} & n_\omega e^{-i\omega(t_i-t_j)} \\ \hline (n_\omega + 1) e^{-i\omega(t_i-t_j)} & \theta_{ij} (n_\omega + 1) e^{-i\omega(t_i-t_j)} + \theta_{ji} n_\omega e^{-i\omega(t_i-t_j)} \end{array} \right] \quad (2.1.17)$$

donde $n_\omega = (e^{\omega\beta} - 1)^{-1}$ es el factor de Bose, $\theta_{ij} \equiv \theta(t_i - t_j)$ es notación para la función de Heaviside y donde pueden identificarse el propagador de Feynman y de Dyson como los elementos diagonales.

En este punto volvemos sobre un aspecto de suma importancia en este formalismo. Para caminos abiertos, el ordenamiento del camino es vinculante con el ordenamiento de los operadores que uno puede obtener mediante el una integral de caminos: se obtendrán siempre correladores ordenados según la orientación de caminos, lo que denotamos $T\{\dots\}$ o $\mathcal{P}\{\dots\}$ según sea una evolución pura Lorentziana o un camino en el plano complejo. Para caminos cerrados en general y para SK en particular, la noción de un ordenamiento $\mathcal{P}\{\dots\}$ unívoco para correladores, por ejemplo, es esquivo puesto que ya no hay una única forma de conectar 2 puntos sobre el camino. Lo que acabamos de mostrar con el ejemplo anterior, es que este tipo de integrales de camino, a través de los vínculos, lleva a una matriz de propagadores, cuyos elementos no diagonales representan los correladores

$$n_\omega e^{-i\omega(t_i-t_j)} = \langle \mathcal{O}_+(t_i) \mathcal{O}_-(t_j) \rangle \neq \langle \mathcal{O}_-(t_i) \mathcal{O}_+(t_j) \rangle = (1 + n_\omega) e^{-i\omega(t_i-t_j)}. \quad (2.1.18)$$

Notar que el primero de ellos es el que parece fuera del orden sugerido por $\mathcal{P}\{\dots\}$ y sin embargo nos es accesible desde la integral de caminos.

Es directo extender este análisis para una teoría de campos. En notación continua, la acción se escribirá

$$S_{SK} = \int_{SK} \mathcal{L} = \int \mathcal{L}_+ - \int \mathcal{L}_-$$

donde el subíndice SK una vez más indica que se integra sobre la curva de tiempo cerrada descrita en la Fig. 2.2 y el signo relativo viene del sentido opuesto de sus coordenadas temporales. Es importante recordar que si bien las teorías no son interactuantes, los campos \mathcal{O}_\pm están relacionados por el vínculo a $T/2$, aunque en esta notación no sea evidente. Volviendo a un caso general con campos fundamentales A_μ , la función generatriz de operadores \mathcal{O} con fuente j se define como

$$Z_{SK}[j_+, j_-] = \int_{SK; \rho(-T/2)}^{A_+(T/2)=A_-(T/2)} \mathcal{D}A_\mu e^{-iS[A_+] + iS[A_-] - i \int j_+ \mathcal{O}_+ + i \int j_- \mathcal{O}_-},$$

donde hemos hecho explícitas todas las condiciones sobre el sistema aunque no siempre lo haremos a lo largo del trabajo. Notar también que (2.1.18) hace explícito la importancia del orden de derivación en la función generatriz¹.

Un último comentario acerca de la realización en un laboratorio de este tipo de caminos. En determinados sistemas, como en sistemas cuánticos de fermiones, la evolución del sistema se encuentra dominada por un hamiltoniano $H = \lambda h$, donde el signo de λ puede cambiarse a voluntad en el marco del experimento [29]. En un sistema con estas propiedades, la realización experimental de la evolución en el camino SK comienza con una evolución $e^{-i\lambda h t}$ durante un tiempo t y el camino de vuelta es simplemente un cambio en el signo de λ para conseguir una evolución $e^{+i\lambda h t}$. El sistema antes y después del experimento se pone en contacto con un reservorio a T constante, lo que reproduce las condiciones iniciales y finales en el experimento.

A continuación veremos dos formas de incorporar caminos de SK como caminos a tiempo complejo.

Formalismo Térmico

En la sección anterior trabajamos con un camino completamente sobre el eje real y dimos como ejemplo de estado inicial una matriz densidad térmica $\rho(-T/2) = e^{-\beta H}$ aunque podríamos haber insertado una matriz densidad de cualquier naturaleza. El formalismo térmico se concentrará en el primero de los casos, que permite interpretarlo como una evolución temporal euclídea de longitud β , como se muestra en la

¹Existe en este formalismo una combinación lineal de los grados de libertad \mathcal{O}_\pm , llamada rotación de Keldysh, que reescribe esta matriz en términos de nuevos grados de libertad donde el tratamiento en notación continua es más sencillo [28]. Sin embargo, no usaremos este formalismo en este trabajo.

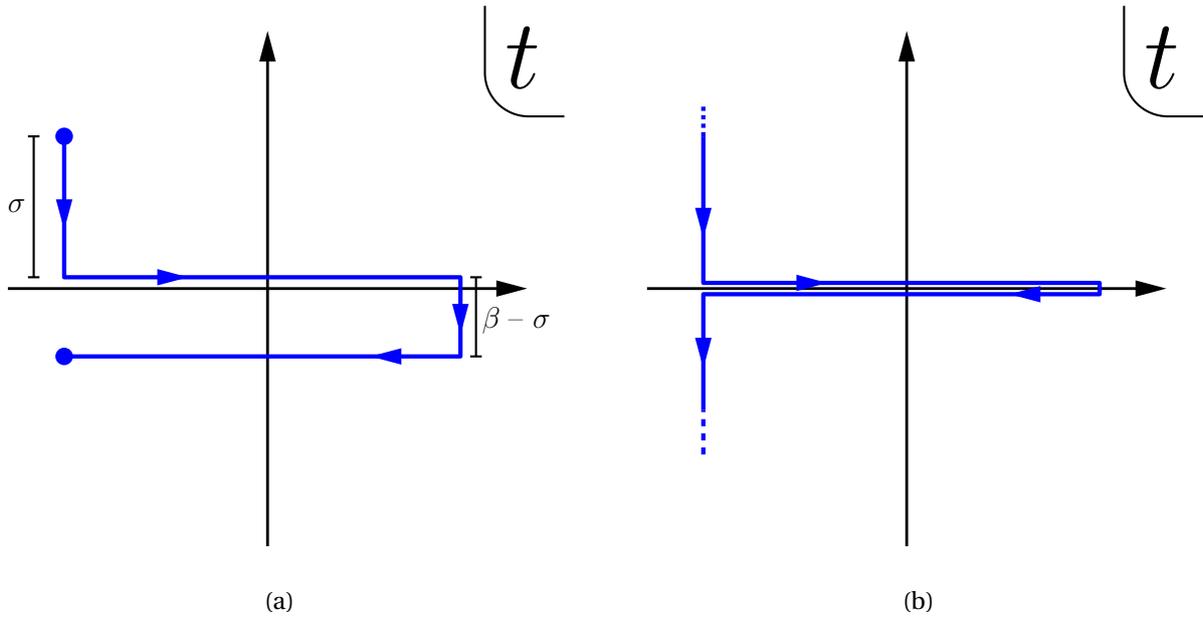


Figura 2.4: (a) Se muestra el camino del formalismo Térmico. Los círculos en los extremos de la trayectoria están identificados y el largo total de la sección imaginaria es β . La inserción de operadores sobre las secciones reales permiten el cálculo de correladores en una teoría a temperatura $T = \beta^{-1}$. (b) Se muestra el camino del formalismo In-In. Las secciones verticales definen los estados inicial y final, aunque para sistemas físicos estos estados deben ser iguales, debido a que la curva en tiempo real es cerrada.

Fig. 2.4(a). El camino se cierra imponiendo condiciones periódicas/antiperiódicas para los campos bosónicos/fermiónicos definidos sobre el camino, i.e. $\mathcal{O}(0) \equiv \pm \mathcal{O}(-i\beta)$ para bosones/fermiones. Así definido, este camino reproduce la matriz de propagadores (2.1.17) y su interpretación en términos de un sistema físico es también idéntica a la expuesta arriba.

Otra forma de presentar este camino es pensar en uno puramente Euclídeo y periódico de extensión $-i\beta$ (camino de Matsubara) usado en cálculos estándar de mecánica estadística [26] e incorporar al mismo un camino de SK en tiempo real. Naturalmente, el camino térmico en el límite $T \rightarrow 0$ recupera el camino original de Matsubara y representa la función de partición de la teoría.

Ahora bien, entendido el estado inicial como un segmento de evolución Euclídeo, existe una generalización de este camino que también es periódica en $-i\beta$, pero que distribuye la evolución Euclídea en dos segmentos: uno de longitud $-i\sigma$ en $t = +T/2$ al final de la evolución temporal y otra de longitud $-i(\beta - \sigma)$ en $t = -T/2$. Si bien la interpretación experimental de dicho proceso es menos clara, formalmente podemos repetir los cálculos del ejemplo anterior para este nuevo camino, ahora los elementos de (2.1.14) contienen la información del estado distribuida como $e^{-\beta\omega} \rightarrow e^{-(\beta-\sigma)\omega}$ y $1 \rightarrow e^{-\sigma\omega}$ para el elemento $iG_{N/2, N/2+1}^{-1}$. La matriz final de propagadores es también similar en estructura a (2.1.17), con idénticos elementos diagonales y con el cambio

$$iG(t)_{+-} = n_\omega e^{-i\omega t} \Rightarrow \frac{e^{\sigma\omega}}{e^{\beta\omega} - 1} e^{-i\omega t}; \quad iG(t)_{-+} = (n_\omega + 1) e^{-i\omega t} \Rightarrow \frac{e^{(\beta-\sigma)\omega}}{e^{\beta\omega} - 1} e^{-i\omega t}. \quad (2.1.19)$$

Lo destacable de esta generalización es que existe una configuración privilegiada $\sigma = \beta/2$, donde la distribución de las secciones Euclídeas y los elementos de la matriz de propagadores se vuelven simétricos. Veremos en la sección siguiente que este camino en particular puede entenderse como la realización en términos de caminos SK a tiempo complejo de otra formulación para teorías de campos a temperatura finita denominado TFD. Notar que la simetría de la matriz de propagadores permite un tratamiento más sencillo en términos de la notación continua, puesto que se ha recuperado la conmutación en el orden de derivación respecto de las fuentes j_\pm .

Definido el estado (térmico) del sistema en términos de un segmento Euclídeo, recupera la idea de modificarlo mediante inserciones de operadores sobre la misma deformando la integral de caminos como

$$Z_\sigma[j_+, j_-, j_E] = \int_{\sigma; j_E}^{A_+(T/2)=A_-(T/2)} \mathcal{D}A_\mu e^{-iS[A_+] + iS[A_-] - i \int j_+ \mathcal{O}_+ + i \int j_- \mathcal{O}_- - S[A_E] - \int j_E \mathcal{O}_E}, \quad (2.1.20)$$

o equivalentemente en términos operatoriales y con notación más compacta, para un camino cerrado \mathcal{C} en el plano temporal complejo la función generatriz puede escribirse como

$$Z_{\mathcal{C}}[j] = \text{Tr } U, \quad U \equiv \mathcal{P} e^{-i \int_{\mathcal{C}} d\theta (H + \mathcal{O} j(\theta))} \quad (2.1.21)$$

donde U es el operador de evolución para un Hamiltoniano (CFT) deformado con la fuente j y θ es un parámetro complejo que recorre la curva.

Formalismo In-In

Como último ejemplo de aplicación de un camino SK, presentamos lo que se conoce como camino In-In, presentado en la Fig. 2.4(b) que permite el cálculo directo de las funciones de Wightman de un problema [30]. El mismo incorpora dos segmentos semi infinitos verticales que preparan el estado inicial/final para los GDL \mathcal{O}_{\pm} respectivamente. A diferencia de los caminos anteriores, este camino no es cerrado y tiene un ordenamiento $\mathcal{P}\{\dots\}$ definido sin ambigüedades, de forma similar al camino In-Out descrito más arriba. En el lenguaje de esta sección, este camino también tiene formalmente una matriz de operadores, pero el formalismo de integrales de caminos solo permite acceder a los elementos diagonales y superior derecho, así como un formalismo tradicional de integrales de camino solo permite acceder a los correladores ordenados temporalmente. El estado del sistema en ausencia de fuentes Euclídeas describe el un sistema que parte y vuelve al vacío de la teoría. La deformación de tales evoluciones con fuentes generales describe el producto interno entre distintos estados excitados de la teoría.

2.1.2. TFD o Teoría térmica de campos

En esta sección se presenta el formalismo de Teoría térmica de campos o TFD. Este formalismo fue desarrollado en los '50 por Umezawa [31] y tiene como objetivo describir teorías de campos a temperatura finita, tradicionalmente abordadas desde la mecánica estadística, mediante técnicas de teorías de campos a temperatura cero. Más precisamente, la idea es construir un espacio de Hilbert tal que reproduzca todos promedios estadísticos obtenidos como trazas como en (2.1.9) de una teoría a $T = \beta^{-1}$ en términos de valores de expectación. Entre las motivaciones para tal desarrollo, las técnicas a temperatura cero de expansión en diagramas de Feynman y renormalización en particular, se aplican directamente sobre este formalismo. Para más ventajas del mismo, se recomienda al lector el trabajo recopilatorio [32]. Veremos también en esta sección que este formalismo, concebido de forma enteramente independiente, puede reinterpretarse como una teoría definida sobre el camino simétrico $\sigma = \beta/2$ en (2.1.20). Finalmente, presentaremos 2 sistemas que pueden considerarse realizaciones físicas de este formalismo y que serán objeto de estudio del presente trabajo

El formalismo general parte de un sistema en teoría de campos con hamiltoniano H con una base de autoenergías E_n y autoestados $|n\rangle$ ortonormales. Se intenta buscar un estado $|\Psi_0\rangle\rangle$ (la notación de doble ket se explicará en un momento), tal que reproduzca como valor de expectación los promedios estadísticos de un sistema a T finita, i.e. para un observable \mathcal{O}

$$\langle\langle \Psi_0 | \mathcal{O} | \Psi_0 \rangle\rangle \equiv \text{Tr} \{ \rho \mathcal{O} \} = Z_{\beta}^{-1} \sum_n \langle n | \mathcal{O} | n \rangle e^{-\beta E_n}, \quad (2.1.22)$$

donde Z_{β} es la función de partición a temperatura $1/\beta$. En términos de un vector en el espacio del espacio de Hilbert original \mathcal{H} , el estado debe poder expandirse en la base $|n\rangle$ con coeficientes $f_n(\beta)$,

$$|\Psi_0\rangle\rangle = \sum_n f_n(\beta) |n\rangle. \quad (2.1.23)$$

Reemplazando en (2.1.22), se obtiene

$$f_n^*(\beta) f_m(\beta) = Z_{\beta}^{-1} \delta_{nm} e^{-\beta E_n}, \quad (2.1.24)$$

que no puede satisfacerse para $f_n(\beta)$ c-números, pero sí puede entenderse como una relación de ortogonalidad entre vectores. El subíndice n motiva a realizar una representación de (2.1.24), en términos de una duplicación $\tilde{\mathcal{H}}$ del espacio de Hilbert original. El estado $|\Psi_0\rangle\rangle$ será entonces un estado del espacio de Hilbert doble $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ y solo queda encontrar sus coeficientes en la base $|n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle$, lo que justifica la notación

de doble braket. El segundo espacio contiene sus propios operadores $\tilde{\mathcal{O}}$, tales que conmutan con el espacio original

$$\langle n | \otimes \langle \tilde{i} | \tilde{\mathcal{O}} | m \rangle \otimes | \tilde{j} \rangle = \langle \tilde{i} | \tilde{\mathcal{O}} | \tilde{j} \rangle \delta_{nm}; \quad \langle n | \otimes \langle \tilde{i} | \mathcal{O} | m \rangle \otimes | \tilde{j} \rangle = \langle n | \mathcal{O} | m \rangle \delta_{\tilde{i}\tilde{j}}, \quad (2.1.25)$$

y los autovalores de \mathcal{O} y $\tilde{\mathcal{O}}$ se relacionan mediante la relación no trivial

$$\langle n | \mathcal{O} | m \rangle = \langle \tilde{m} | \tilde{\mathcal{O}}^\dagger | \tilde{n} \rangle. \quad (2.1.26)$$

Veremos que esta condición tendrá consecuencias interesantes sobre el estado $|\Psi_0\rangle\rangle$.

Los coeficientes originales pueden encontrarse fácilmente como

$$f_n(\beta) = Z_\beta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta}{2} E_n} | \tilde{n} \rangle,$$

de donde el estado que buscábamos resulta

$$|\Psi_0\rangle\rangle = Z_\beta^{-\frac{1}{2}} \sum_n e^{-\frac{\beta}{2} E_n} | n \rangle \otimes | \tilde{n} \rangle. \quad (2.1.27)$$

Es interesante notar que hemos nuevamente duplicado los grados de libertad de nuestro sistema y que ahora, si bien en un nuevo lenguaje de \mathcal{O} y $\tilde{\mathcal{O}}$, volvemos a tener una matriz de correladores.

Para ver el formalismo en acción, consideremos nuevamente el ejemplo de un oscilador

$$H = \omega a^\dagger a, \quad a|0\rangle = H|0\rangle = 0, \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad [a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

Definiremos el espacio $\tilde{\mathcal{H}}$ como una duplicación²

$$\tilde{H} = \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a}, \quad \tilde{a}|\tilde{0}\rangle = \tilde{H}|\tilde{0}\rangle = 0, \quad |\tilde{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}!}} (\tilde{a}^\dagger)^n |\tilde{0}\rangle, \quad [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1, \quad [\tilde{a}, \tilde{a}] = [\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0.$$

El segundo sistema es enteramente independiente del primero, i.e. las teorías no interactúan y sus operadores conmutan libremente entre ellos, $[\mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}}] = 0, \forall cal O, \tilde{\mathcal{O}}$. El mapa tilde, $\tilde{\cdot}$, puede mejor formalizarse como el transformado CRT [33], considerándose así como una transformación discreta en sí misma, independiente de un sistema en particular. A los efectos de esta tesis, siempre tendremos un sistema para replicar. La relevancia del segundo sistema entonces reside en que la teoría se encuentra en un estado entrelazado $|\Psi_0\rangle\rangle$. En este sistema, recordando que $E_n = \omega n$ y $Z^{-1} = 1 - e^{-\beta\omega}$,

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle\rangle &= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} e^{-\beta\omega n} \frac{1}{n!} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle \\ &= \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \exp(e^{-\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + n_\omega}} e^{\sqrt{\frac{n_\omega}{1+n_\omega}} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle \\ &\equiv e^{-iB} |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle, \end{aligned}$$

donde para la última igualdad usó $n_\omega^{-1} = e^{\omega\beta} - 1$ y

$$B \equiv -i \cosh^{-1}(1 + n_\omega) (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger) \quad B^\dagger = B. \quad (2.1.28)$$

Lo relevante de la igualdad anterior es demostrar que el estado $|\Psi_0\rangle\rangle$ es una rotación del vacío $|0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$. Esto permite afirmar que también B es el generador de la transformación que lleva de los operadores escalera sobre el vacío $|0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$ a los que corresponden naturalmente al vacío rotado, i.e.

$$d^{(1)} \equiv e^{-iB} a e^{iB} = \sqrt{1 + n_\omega} a - \sqrt{n_\omega} \tilde{a}^\dagger; \quad d^{(2)} \equiv e^{-iB} \tilde{a} e^{iB} = \sqrt{1 + n_\omega} \tilde{a} - \sqrt{n_\omega} a^\dagger, \quad (2.1.29)$$

Notar que la transformación mezcla los operadores de creación y destrucción. Una rotación en este espacio se denomina genéricamente rotación de Bogoliubov. Los nuevos operadores $d^{(1)}$ y $d^{(2)}$ son los operadores destrucción naturales en el vacío $|\Psi_0\rangle\rangle$,

$$d^{(1)} |\Psi_0\rangle\rangle = d^{(2)} |\Psi_0\rangle\rangle = 0. \quad (2.1.30)$$

²En [32] puede verse el mapa tilde completo para el caso general.

Las excitaciones creadas por los operadores $(d^{(1)})^\dagger$ y $(d^{(2)})^\dagger$ ya no son excitaciones de ninguno de los dos sistemas independientes, si no que pueden crearse a partir de $|\Psi_0\rangle\rangle$ como la aniquilación de partículas en \mathcal{H} o la creación de partículas en $\tilde{\mathcal{H}}$ (y viceversa), lo que es reminiscente a la dualidad partícula-agujero en sistemas de electrones en un metal [34, 31]. Al final de esta sección veremos realizaciones físicas de estas excitaciones.

El hecho de que cualquier estado de la teoría global se pueda generar como operaciones localizadas en un subsistema, pongamos por caso \mathcal{H} , es producto de que $|\Psi_0\rangle\rangle$ sea un estado maximalmente entrelazado, satisfaciendo las condiciones del teorema de Reeh–Schlieder. En el lenguaje de la teoría de Tomita-Takesaki, podría demostrarse que $|\Psi_0\rangle\rangle$ cumple las propiedades de ser cíclico y separable [33].

Si el estado $|\Psi_0\rangle\rangle$ es una rotación del vacío producto, entonces deberá poder describirse como el vacío de un nuevo Hamiltoniano. Es inmediato comprobar que

$$(H - \tilde{H})|\Psi_0\rangle\rangle = 0; \quad \mathbb{U}(t) \equiv \mathcal{P} U \otimes \tilde{U} = e^{-i\Delta t(H \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes H)} = e^{-i\Delta t(H - \tilde{H})}; \quad \mathbb{U}(t)|\Psi_0\rangle\rangle = |\Psi_0\rangle\rangle \quad (2.1.31)$$

lo que dispara la siguiente interpretación: puede pensarse la teoría $\tilde{\mathcal{H}}$ como definida con una evolución temporal invertida respecto de \mathcal{H} . Esto permite dentro de este mismo formalismo entender la ecuación (2.1.26) y conecta inmediatamente con el formalismo SK.

Un cálculo directo de propagadores en el espacio duplicado lleva a

$$\langle\langle \Psi_0 | \begin{pmatrix} \mathcal{O}(t_i)\mathcal{O}(t_j) & \mathcal{O}(t_i)\tilde{\mathcal{O}}(t_j) \\ \tilde{\mathcal{O}}(t_i)\mathcal{O}(t_j) & \tilde{\mathcal{O}}(t_i)\tilde{\mathcal{O}}(t_j) \end{pmatrix} | \Psi_0 \rangle\rangle, \quad (2.1.32)$$

donde

$$\langle\langle \Psi_0 | \mathcal{O}(t_i)\mathcal{O}(t_j) | \Psi_0 \rangle\rangle = \theta(t_i - t_j)n_\omega e^{-i\omega(t_i - t_j)} + \theta(t_i - t_j)(n_\omega + 1)e^{-i\omega(t_i - t_j)}, \quad (2.1.33)$$

$$\langle\langle \Psi_0 | \mathcal{O}(t_i)\tilde{\mathcal{O}}(t_j) | \Psi_0 \rangle\rangle = \frac{e^{\beta\omega/2}}{e^{\beta\omega} - 1} e^{-i\omega(t_i - t_j)} = \langle\langle \Psi_0 | \tilde{\mathcal{O}}(t_i)\mathcal{O}(t_j) | \Psi_0 \rangle\rangle \quad (2.1.34)$$

$$\langle\langle \Psi_0 | \tilde{\mathcal{O}}(t_i)\tilde{\mathcal{O}}(t_j) | \Psi_0 \rangle\rangle = \theta(t_i - t_j)(n_\omega + 1)e^{-i\omega(t_i - t_j)} + \theta(t_i - t_j)n_\omega e^{-i\omega(t_i - t_j)}. \quad (2.1.35)$$

La matriz reproduce exactamente (ver (2.1.34)) la matriz de propagadores simétrica obtenida a partir de (2.1.20) y lo mismo con todos los observables, de forma que ambos formalismos describen la misma teoría. El hecho de que la matriz sea simétrica también puede pensarse en los sistemas original y tilde no interactúan, i.e. $[\mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}}] = 0, \forall \mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}}$. La función generatriz (2.1.20) reescrita en este lenguaje será

$$Z_{TFD}[j, \tilde{j}] = \langle\langle \Psi_0 | \mathbb{U}[j, \tilde{j}] | \Psi_0 \rangle\rangle. \quad (2.1.36)$$

La incorporación de fuentes externas para las secciones Euclídeas es inmediata y sus consecuencias se estudiarán en el Cap. 5.

A continuación, destacaremos dos aspectos más de esta correspondencia entre teorías relevantes para este trabajo. Un mapa detallado entre ambos formalismos puede encontrarse en [35] y sus referencias. El primero será la identificación del estado inicial $|\Psi_0\rangle\rangle$ en términos del segmento vertical ubicado en $-T/2$ y el final con el ubicado en $T/2$. Puede también construirse un operador evolución $\mathbb{U} \equiv U \otimes \tilde{U}$ que describe la evolución en el espacio doble de un estado hacia el otro. Debe recordarse que $\tilde{U} = e^{+i\tilde{H}t}$, en acuerdo con la interpretación de que los grados de libertad duplicados describen una evolución temporal inversa a U y con la descripción en términos de un camino de SK. Este conjunto de identificaciones se muestran en la Fig. 2.5. En términos de ser capaces de definir bra's y ket's que pertenezcan a un espacio de Hilbert y su dual, resulta a posteriori razonable que este mapa sea posible para el camino SK simétrico³. El segundo aspecto relevante de esta correspondencia será la interpretación de las excitaciones de $|\Psi_0\rangle\rangle$ en términos de partículas. Si el encendido de fuentes j_E sobre las regiones Euclídeas describe excitaciones del estado del sistema, en este formalismo podremos satisfactoriamente describir las mismas en términos de excitaciones de partículas sobre el vacío $|\Psi_0\rangle\rangle$. En el Cap. 5 volveremos sobre las excitaciones del vacío.

³Se puede extender esta correspondencia a caminos no simétricos de SK, pero los mismos acarrearán el uso de factores para mapear entre \mathcal{H} y su dual y el tratamiento se vuelve igual de complejo que el tratamiento directo sobre SK. No es claro para el autor de este trabajo si puede mantenerse tampoco una descripción consistente de las excitaciones de $|\Psi_0\rangle\rangle$ en términos de partículas.

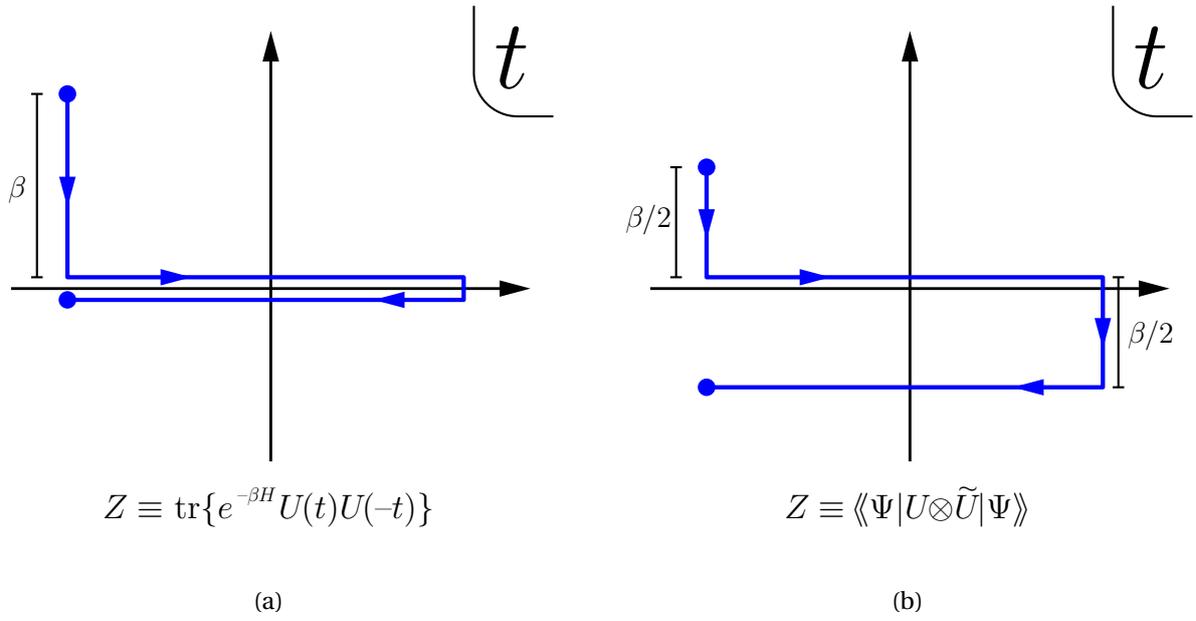


Figura 2.5: (a) En las figura se muestra la interpretación canónica de un camino térmico donde la función de partición se escribe como la traza de una matriz densidad térmica. En esta representación, no hay una noción de estado inicial y final. (b) Para el camino simétrico $\sigma = \beta/2$, el formalismo TFD permite reescribir el proceso como un proceso In-Out en un espacio de Hilbert duplicado.

Presentaremos ahora una notación que permite formalizar mejor la interpretación de $|\Psi_0\rangle\rangle$ como una evolución temporal Euclídea. Partiendo de expresión en (2.1.27), considerando los operadores evolución $U(t) \equiv e^{-iHt}$ y $\tilde{U}(t) \equiv e^{i\tilde{H}t}$,

$$Z_{\beta}^{\frac{1}{2}} |\Psi_0\rangle\rangle = \sum_n e^{-\frac{\beta}{2} E_n} |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle = U(-i\beta/2) \otimes \mathbb{1} |\mathbb{0}\rangle\rangle = \mathbb{1} \otimes \tilde{U}(-i\beta/2) |\mathbb{0}\rangle\rangle, \quad (2.1.37)$$

donde hemos definido el estado identidad

$$|\mathbb{0}\rangle\rangle \equiv \sum_n |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle, \quad \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}}\{|\mathbb{0}\rangle\rangle\langle\langle\mathbb{0}|\} = \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}_{\mathcal{H}},$$

un estado de norma divergente, de forma que él mismo no pertenece al espacio de Hilbert, pero que será útil notacionalmente. Esta reescritura de $|\Psi_0\rangle\rangle$, interpreta los coeficientes del mismo en términos de elementos de matriz del operador evolución Euclídea $U(-i\beta/2)$,

$$\langle\langle n| \otimes \langle\tilde{m}| | \Psi_0\rangle\rangle \equiv \langle n| U(-i\beta/2) | m\rangle = \langle\tilde{m}| \tilde{U}(-i\beta/2)^{\dagger} | \tilde{n}\rangle \quad (2.1.38)$$

con el que se puede también recuperar la matriz densidad del sistema como una evolución euclídea en β

$$\rho_0 \equiv \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}}\{|\Psi_0\rangle\rangle\langle\langle\Psi_0|\} = U(-i\beta/2) \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}}\{|\mathbb{1}\rangle\rangle\langle\langle\mathbb{1}|\} U(-i\beta/2)^{\dagger} = U(-i\beta/2) U(-i\beta/2)^{\dagger} = e^{-\beta H}; \quad \rho_0^{\dagger} = \rho_0. \quad (2.1.39)$$

Antes de pasar a los ejemplos físicos, daremos una forma alternativa para definir el estado TFD en el contexto de una QFT, llamada condición de equilibrio térmico. Partiendo de un sistema con campos fundamentales A_{μ} y campos TFD duplicados \tilde{A}_{μ} , se puede demostrar que el estado $|\Psi_0\rangle\rangle$ queda totalmente determinado en un instante t por la condición:

$$(\mathbb{1} \otimes A_{\mu}(t) - U(-i\beta/2) \tilde{A}_{\mu}(t) U^{-1}(-i\beta/2) \otimes \mathbb{1}) |\Psi_0\rangle\rangle = 0. \quad (2.1.40)$$

Descomponiendo los campos en términos de operadores escalar, la ortogonalidad de las autofunciones permite descomponer (2.1.40) en las condiciones más familiares (2.1.30).

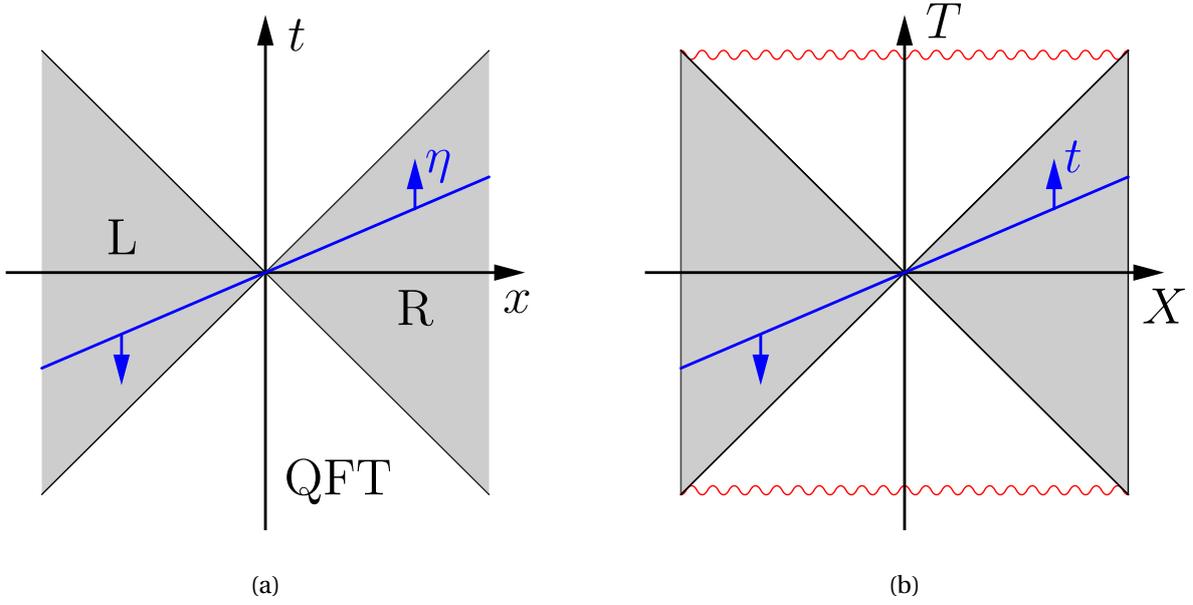


Figura 2.6: Las figuras muestran representaciones de los sistemas físicos que pueden representarse por el formalismo TFD: El espacio de Rindler para cualquier teoría de campos relativista sobre la misma y el agujero negro maximalmente extendido. En (b) hemos elegido representar un agujero negro en un espacio asintóticamente AdS.

Efecto Unruh: Espacio de Rindler y Agujeros Negros

Para terminar, presentamos dos sistemas físicos en donde el formalismo TFD se realiza: la descripción de un vacío global en una QFT en espacio plano en términos de espacios de Rindler [37, 33] y la interpretación TFD de un agujero negro eterno, [36, 37].

Sea una QFT cualquiera invariante de Lorentz definida en espacio de Minkowski $\mathbb{M}^{d-1,1}$. Las simetrías de la teoría, contienen un vector de Killing temporal ∂_t , respecto del cual uno puede cuantizar la teoría sobre un vacío que llamaremos $|0\rangle_{\mathbb{M}}$. Supongamos, sin embargo, que existe un observador que no tiene acceso a todo el espacio si no solo a una mitad, que tomaremos como $x > 0$ y llamaremos, según la terminología estándar, R. Puede demostrarse que este observador puede identificarse con un observador que se encuentra sometido a una aceleración constante, aunque la demostración de esto no será relevante para nuestros objetivos [37, 38]. Suponiendo que la teoría se encuentra en el estado $|0\rangle_{\mathbb{M}}$, uno puede preguntarse cuál es el estado reducido a R, definido por la matriz densidad que resulta de tomar la traza parcial de $|0\rangle_{\mathbb{M}}$ sobre el complemento de R, que llamaremos L. Sin demostración, el resultado es [38, 33]

$$\rho_R \equiv \text{Tr}_L\{|0\rangle_{\mathbb{M}}\langle 0|\} = e^{-\pi H_R}; \quad H_R = \int_{x>0} \text{Boosts}_{xt} = \int_R T_{\mu\nu} \zeta^\mu \eta^\nu,$$

donde hemos dado en la última igualdad una forma covariante del generador de boosts en el plano $\{x, t\}$, de forma que $\zeta^\mu = \omega^{[\mu\nu]} \delta_{\nu x} x$ y η^μ es un vector unitario que apunta en la dirección de ∂_t . Más allá de la forma específica de H_R acerca de la cual comentaremos algo más en el próximo ejemplo, el resultado anterior muestra que el estado que observa R no es un estado de vacío ($|0\rangle_R$, por ejemplo) si no un estado térmico de temperatura $(2\pi)^{-1}$ respecto de un Hamiltoniano H_R . Esto es precisamente de lo que se partía en la ecuación (2.1.22). Lo que acabamos de hacer entonces es hacer una construcción inversa de cómo presentamos el formalismo TFD y lo que queda es explicitar el mapa. El vacío global, se puede descomponer como

$$|0\rangle_{\mathbb{M}} = |\Psi_0\rangle\rangle = Z_{2\pi}^{-\frac{1}{2}} \sum_n e^{-\pi E_n} |n\rangle_R \otimes |\bar{n}\rangle_L, \quad (2.1.41)$$

donde ahora la base $|n\rangle$ es la base de autoenergías de H_R con autovalores E_n . Si reconstruimos según el formalismo TFD el espacio duplicado, veremos que se reconstruye el espacio $x < 0$, que llamamos L, pero se observa que en esta construcción la evolución temporal de L, en términos de \cup se da en sentido opuesto al de la de R y dejando un punto fijo $x = 0$. Esto permite interpretar mejor el resultado general de H_R como

el generador de boosts en el plano $\{x, t\}$, que como toda rotación requiere de un punto fijo, $x = 0$ en este caso. Se destaca una vez más que este resultado no depende de las propiedades ni campos presentes en la QFT, si no solamente de que sea invariante de Lorentz, que contiene la simetría de boosts. Se resumen los aspectos importantes de este análisis en la Fig. 2.6.

El segundo ejemplo verá aplicaciones más directas en el Cap. 5 y es el caso de un agujero negro eterno, que para ser concretos tomaremos en un espacio-tiempo de constante cosmológica negativa, i.e. AdS-Schwartzchild. La descripción formal de AdS y los agujeros negros en espacios con constante cosmológica negativa recién se hará más adelante en este capítulo, de forma que seremos mayormente cualitativos en nuestra descripción. La solución que se conoce como AdS-Schwartzchild es en análogo en RG a la solución del potencial gravitatorio Newtoniano exterior a un objeto de masa M . Ambas soluciones, por supuesto, dejan de ser aplicables para $r < R$, donde R es el radio del cuerpo que produce el campo. Sin embargo, la RG indica que existe una cota máxima a la densidad del objeto, o equivalentemente para una dada M , un radio r_S mínimo que puede tener el objeto para que la analogía entre ambas teorías se sostenga. Por debajo del mismo, la solución de AdS-Schwartzchild describe lo que se conoce como un Agujero Negro y la forma estándar en que se escribe la métrica se vuelve singular en $r \rightarrow r_S$. Ahora bien, entendida la solución de AdS-Schwartzchild como objeto de estudio en sí mismo, uno posee un vector de Killing temporal ∂_t , con el cual foliar el espacio-tiempo, sobre la geometría puede definir un hamiltoniano H_t y con este definir un vacío $|0\rangle_t$. Sin embargo, existe además un cambio de coordenadas posible para la dicha métrica, que muestra que la singularidad en R_t es espúrea de nuestro viejo juego de coordenadas, y que la variedad completa que describe AdS-Schwartzchild es un espacio conformado por 4 regiones, de las cuales la métrica original solo tenía acceso a una de ellas. La nueva métrica, llamada de Kruskal, define naturalmente otro vector de Killing temporal ∂_T , que esta vez está definido globalmente en la variedad, mientras que el original era naturalmente singular en $r = r_S$. Aunque esto en general no es posible, uno puede para sistemas muy simples encontrar soluciones a sistemas definidos por un hamiltoniano global H_T , con el mismo contenido de materia que el local H_t , y definir con el primero un nuevo vacío $|0\rangle_T$. Lo que puede observarse, comparando sobre puntos donde ambas métricas están bien definidas, es que una vez más el vacío global $|0\rangle_T$ describe un estado térmico para un observador que solo accede a la métrica exterior,

$$|0\rangle_T = |\Psi_0\rangle\rangle = Z_\beta^{-\frac{1}{2}} \sum_n e^{-\frac{\beta}{2} E_n} |n\rangle_t \otimes |\tilde{n}\rangle_t. \quad (2.1.42)$$

La temperatura en este caso depende de la masa del agujero negro como $\beta^{-1} = T \propto \sqrt{M}$. De forma similar al ejemplo anterior, uno puede nuevamente partir de un ensamble canónico sobre el espacio exterior de AdS-Schwartzchild y reconstruir el otro sistema. la evolución TFD tiene nuevamente un punto fijo sobre $r = r_S$, topológicamente una esfera de radio r_S , que separa en este espacio a los sistemas. Siendo un poco más preciso, en términos de las soluciones normales asociadas a la creación/aniquilación de partículas, puede observarse que los modos normales globales resultan ser las extensiones analíticas de los normales locales. Recordamos que las extensiones analíticas de una forma particular de la métrica (merced de la invarianza frente a difeomorfismos) no es una transformación bien definida en RG, a diferencia de una QFT, donde las propiedades analíticas de los observables son un método estándar para obtener información física del sistema. Se resumen los aspectos importantes de este análisis en la Fig. 2.6.

Ambos ejemplos presentados tienen el objetivo de mostrar aplicaciones físicas a los formalismos presentados en esta sección. En la próxima sección abordaremos el grupo de simetrías conformes, las propiedades generales de estas teorías y la forma canónica de estudiarlas. Esto permitirá tener un punto de anclaje con el cuál comparar una vez que comencemos a hacer predicciones sobre estos sistemas mediante métodos holográficos en el próximo capítulo.

2.1.3. Simetría conforme

Dentro de las áreas de la física que están involucradas en este trabajo, las teorías con simetría conforme entran en juego por dos frentes. Desde la comprensión y el desarrollo de las técnicas de renormalización⁴ en teorías de campos y puntualmente el salto conceptual que implica que el valor de las constantes de acoplamiento de una teoría dependa de la escala de energías a la que se la está observando, el estudio de las

⁴No abordaremos explícitamente en esta tesis el área de la renormalización en teorías de campos y mayormente solo enunciaremos resultados. Un abordaje pedagógico al tema puede encontrarse en [39].

teorías conformes se convierte en un punto de referencia para entender propiedades generales del flujo del grupo de renormalización. Las teorías conformes (a nivel cuántico) están completamente desprovistas de cualquier escala con dimensiones y por tanto no distinguen puntualmente entre energías altas o bajas⁵. En términos más formales, estas son puntos fijos del flujo del grupo de renormalización. Desde una perspectiva contemporánea, se espera que una QFT genérica forme parte de un flujo RG tal que siempre tenga puntos fijos tanto en el UV como en el IR, i.e. o bien la teoría ya es conforme, o bien la teoría está fluyendo entre teorías conformes. Por otro lado, el gran número de simetrías presentes en la teoría hace que un tratamiento estándar en términos de acciones no sea necesario y una teoría concreta se pueda estudiar entonces desde principios más abstractos, como las identidades de Ward y el algoritmo conocido como “bootstrap” que presentaremos brevemente en esta sección. Se configuran entonces las teorías conformes como modelos de juguete por excelencia donde las simetrías permiten restringir fuertemente la física que estas describen y a partir de las cuales (y de sus deformaciones) debieran poder describirse cualquier otra QFT no conforme. Desde una perspectiva fenomenológica, las teorías conformes, que describen sistemas desprovistos de escalas, se asocian a sistemas físicos en puntos críticos, donde las fluctuaciones cuánticas se vuelven comparables y mayores a los valores de expectación de los observables, $\sqrt{\langle \Delta \Phi^2 \rangle} / \langle \Phi \rangle \gg 1$, generando entonces cambios macroscópicos en el sistema [40].

El segundo lugar donde aparecen las simetrías conformes es en el marco de teorías de cuerdas. En este caso, que describiremos de forma muy resumida en el próximo capítulo, la invarianza ante reparimetrizaciones de las variables propias (tiempo propio para una partícula) para objetos fundamentales 1-dimensionales, permite demostrar que la teoría (bidimensional) inducida sobre la hoja de mundo de la cuerda es conforme [41, 42]. En particular, las teorías conformes en 2 dimensiones presentan un grupo infinito de simetrías infinitesimales. Esto último quiere decir que de las infinitas simetrías de la teoría, solo un número finito de estas están bien definidas globalmente en la teoría. Aún así, las restricciones que imponen estas infinitas simetrías a los objetos locales (correladores) alcanzan en algunos casos para determinar la completamente en términos de algunos parámetros y sin recurrir a una acción o principio variacional, como es el caso de las teorías minimales [40].

En esta tesis, estamos interesados en aspectos relevantes de las teorías conformes en dimensión d general y por tanto tomaremos un enfoque que describa los aspectos generales de este grupo de simetrías, más que los aspectos particulares del caso $d = 2$. En lo que sigue presentamos el grupo de simetrías conforme en espacio plano y su álgebra. Describiremos algunas representaciones y los números cuánticos que las caracterizan, que son distintos de los que se usan usualmente en teorías invariantes de Lorentz. Describiremos las restricciones que esta impone sobre los correladores y en la misma dirección presentaremos las identidades de Ward y algunos aspectos del programa conocido como Bootstrap, que permite entender la forma estándar de obtener información de una CFT. Finalmente, introduciremos la correspondencia operador-estado propia de las teorías conformes, que será conceptualmente relevante para los estados excitados que buscamos describir en este trabajo. Un estudio completo y formal de CFT puede encontrarse en [40, 43].

El grupo de transformaciones conformes pueden definirse como aquellas que dejan una métrica invariante a menos de un factor de escala local,

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}(x) . \quad (2.1.43)$$

Es inmediato observar que el grupo de Poincaré es un subgrupo de estas transformaciones. Para una métrica general, uno puede definir la matriz de transformación como

$$\Gamma_{\nu}^{\mu}(x) = \lambda(x) \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} ; \quad \Gamma_{\sigma}^{\mu}(x) \Gamma_{\gamma}^{\nu}(x) g'_{\mu\nu}(x') = g'_{\sigma\gamma}(x') . \quad (2.1.44)$$

Parametrizando la transformación infinitesimal como $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} - (\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu})$ e imponiendo (2.1.43), se llega a lo que se conoce como la ecuación de Killing conforme

$$\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu} = \left(\frac{2}{d} \partial_{\rho}\epsilon^{\rho} \right) g_{\mu\nu} . \quad (2.1.45)$$

⁵Veremos que una teoría conforme a nivel clásico no necesariamente lo es a nivel cuántico. El ejemplo por antonomasia es QCD no masivo, donde a pesar de no tener escala a nivel clásico, la renormalización impone una escala Λ_{QCD} por debajo de la cual la materia fundamental de la teoría deja de ser una buena descripción y la fenomenología se describe en términos de objetos compuestos. Esto motiva el nombre de Λ_{QCD} como escala de confinamiento.

A diferencia de las simetrías del grupo de Poincaré, cuyos generadores cumplen una ecuación ordinaria de Killing, donde el lado derecho de (2.1.45) es trivial, los generadores de este grupo dependerán de la métrica donde se impongan. En este trabajo nos interesan los generadores de las transformaciones que satisfagan (2.1.45) para una métrica plana $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Imponiendo esta condición sobre (2.1.45), se la puede manipular para obtener

$$2(\partial_\nu \partial^\nu) \eta_\mu = (2-d) \partial_\mu \left(\frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho \right), \quad (2.1.46)$$

donde puede verse explícitamente que el caso $d = 2$ requiere de un tratamiento especial, que dará como resultado el número infinito de simetrías infinitesimales en dicho caso. Para $d > 2$, la ecuación de arriba es equivalente a

$$(\partial_\nu \partial^\nu) (\partial_\rho \epsilon^\rho) = 0$$

y sus soluciones describen $\frac{1}{2}(d+2)(d+1) = d + d(d-1)/2 + d + 1$ transformaciones independientes, que agruparemos respectivamente como:

- **Traslaciones:** $\epsilon^\mu = a^\mu$ con d generadores P_μ ;
- **T. de Lorentz:** $\epsilon^\mu = \omega^{[\mu\nu]} x_\nu$ y $d(d-1)/2$ generadores $L_{\mu\nu}$;
- **T. Especiales Conformes:** $\epsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2x^\mu b \cdot x$ con d generadores K_μ ;
- **T. Escala:** $\epsilon^\mu = \lambda x^\mu$ con generador D .

Este grupo es isomorfo a $SO(d, 2)$. Las primeras 2 transformaciones están asociadas con traslaciones rígidas, rotaciones y boosts y describen, como habíamos predicho, el grupo de Poincaré que es el máximo número de isometrías que puede tener una métrica⁶. Las $d+1$ transformaciones restantes resultan del factor conforme Ω^2 en (2.1.43) y se denominan transformaciones especiales conformes y dilataciones, respectivamente.

La forma finita de una transformación especial conforme es

$$x'^\mu = \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b \cdot x + b^2 x^2}.$$

Una primera observación es que esta transformación mapea puntos del espacio al infinito, de forma que para obtener un álgebra de grupo (con una transformación y su inversa ambas contenidas) al espacio de \mathbb{M} debe agregársele el punto en infinito. La simetría discreta de inversión $x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2}$ cumple con la condición (2.1.43) y es por tanto una transformación del grupo conforme. Teniendo en cuenta esta última transformación se forma el grupo conforme completo, que resulta isomorfo a $SO(d, 2) \times \mathbb{Z}_2 \approx O(d, 2)$. De hecho, una transformación especial conforme puede descomponerse en una inversión, seguida de una traslación y de una nueva inversión.

En términos de los generadores de $SO(d, 2)$, el álgebra del grupo es

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(\eta_{ad} J_{bc} + \eta_{bc} J_{ad} - \eta_{ac} J_{bd} - \eta_{bd} J_{ac}), \quad (2.1.47)$$

donde $a, b, c, d = \{-1, 0, 1, \dots, d\}$, aunque es más conveniente la parametrización que usamos arriba, definiendo

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} \quad J_{-1,0} = D \quad J_{-1\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \quad J_{0\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu), \quad (2.1.48)$$

de donde se obtiene una segunda forma más física del álgebra

$$[D, P_\mu] = iP_\mu \quad [D, K_\mu] = -iK_\mu \quad [K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu} D - L_{\mu\nu}) \quad (2.1.49)$$

$$[K_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu} K_\nu - \eta_{\rho\nu} K_\mu) \quad [P_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu} P_\nu - \eta_{\rho\nu} P_\mu) \quad (2.1.50)$$

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}) \quad (2.1.51)$$

A la luz de esta notación, se observa que P_μ y K_μ funcionan como operadores escalera de D . Esto ya sugiere que para este tipo de teorías, en lugar de usar la energía P_0 como número cuántico, es más conveniente usar D , para discriminar entre representaciones. Esto equivale a elegir la transformación de dilataciones D

⁶Ver la Sec. 2.2, donde se discuten brevemente características de los espacios maximalmente simétricos.

como el hamiltoniano del sistema, lo que lleva a lo que se conoce como cuantización radial, i.e. la foliación del espacio según una coordenada radial. En este esquema, el instante de tiempo inicial $t = -\infty$, que se recuerda que en teorías conformes es un punto del espacio-tiempo y no un límite, se mapea a $r = 0$ o en 2 dimensiones se suele notar $z, \bar{z} = 0$. El momento angular seguirá siendo un buen número cuántico para estas teorías.

Llamaremos operadores cuasi-primarios⁷ \mathcal{O} de dimensión conforme Δ a los que frente a una transformación conforme, transforman como

$$\mathcal{O}(x) \rightarrow \mathcal{O}'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta} \mathcal{O}(x), \quad (2.1.52)$$

donde se ha omitido los posibles efectos de los índices espinoriales en \mathcal{O} . A los efectos de esta tesis, donde estudiaremos solamente campos escalares de Lorentz, la transformación (2.1.52) es una transformación exacta. Una vez encontrados todos los operadores cuasi-primarios y sus respectivos pesos conformes, accederemos a todos los operadores de la teoría mediante la acción de P_μ y K_μ sobre los mismos, así como una vez obtenidos los posibles valores de espín se obtienen todos los estados de esa representación irreducible mediante L^\pm . Alternativamente, se definen cuasi-primarios a aquellos que $[\mathcal{O}(0), K_\mu] = 0$, es decir que ya no admiten descender en su dimensión conforme. A los operadores obtenidos como $[\mathcal{O}(0), P_\mu] \sim \partial_\mu \mathcal{O}$ se los conoce como descendientes de \mathcal{O} .

Tensor de energía-momento y anomalía conforme

Destaquemos un aspecto más para teorías con simetrías conformes en cualquier dimensión. Como consecuencia de la misma, la acción de la teoría debe ser invariante ante $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu$ donde ϵ^μ es una función infinitesimal arbitraria. Uno puede demostrar que el cambio de una acción resulta

$$0 = \delta S = \int T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu = \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) = \frac{1}{d} \int T^\mu_\mu \partial_\nu \epsilon^\nu \quad (2.1.53)$$

donde hemos usado que $T^{\mu\nu}$ es simétrico en sus índices y (2.1.45). Dado que $\partial_\nu \epsilon^\nu$ es arbitrario, la simetría conforme impone a nivel clásico que la traza del tensor energía momento se anule, $T^\mu_\mu = 0$. El presente argumento es equivalente a la construcción de la corriente de Noether usando el correspondiente teorema. Veremos que a nivel cuántico este objeto puede obtener correcciones, que suelen denominarse dimensiones anómalas, lo que puede generar la ruptura de la simetría conforme.

Las identidades de Ward pueden pensarse como la versión cuántica del teorema de Noether para las cargas conservadas de una teoría. A partir de una simetría de la teoría, las identidades de Ward establece relaciones entre las funciones de correlación de distinto número de puntos, a imponerse cuando dos o más puntos del correlador de mayor número de puntos coinciden. Si estas contribuciones se resuman a un resultado nulo, entonces se recupera conservación de la corriente conservada ahora a nivel cuántico, i.e. $\partial_\mu \langle T^{\mu\nu} \rangle = 0$.

En el contexto cuántico, una simetría de la teoría debe dejar invariante la función de partición de la teoría. Esto implica no solo la acción si no también la medida de integración, en el sentido de una integral de caminos. Estas contribuciones de la medida a las leyes de conservación llevan, para una simetría $\delta \mathcal{O}_k = -\omega_a G_k^a \mathcal{O}_k$, con generador G_k^a y parámetro infinitesimal ω_a y con una corriente conservada clásicamente J_a^μ , a lo que se conoce como las identidades de Ward

$$\partial_\mu \langle J_a^\mu \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = -i \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \langle \mathcal{O}_1(x_1) \dots G_i^a \mathcal{O}_i(x_i) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle. \quad (2.1.54)$$

Uno puede utilizar los generadores descritos anteriormente para esta sección y obtener la forma explícita de las identidades de Ward para una teoría conforme. De todas ellas, estamos en particular interesados en la que está vinculada a la simetría de escala con generador D , que imponía a nivel clásico $T^\mu_\mu = 0$. Esta ecuación nos lleva a

$$\langle T^\mu_\mu(x) \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = -i \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \Delta_i \langle \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle. \quad (2.1.55)$$

⁷Los operadores primarios son una subcategoría de los cuasi-primarios para $d = 2$, que cumplen esta condición para ambas álgebras de Virasoro. En el caso de $d > 2$, estos operadores cuasi-primarios serán los objetos fundamentales de estudio.

A partir de esta expresión, puede demostrarse [44], que para d par esta identidad es anómala (los términos de la derecha dan una contribución no trivial) y por tanto

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle = \frac{c}{16\pi^2} W^2 - \frac{a}{16\pi^2} E^2 - \frac{a'}{16\pi^2} \square R \neq 0$$

donde a derecha hemos escrito el resultado concreto para $d = 4$ [45], con W^2 y E^2 los cuadrados de los tensores de Weyl y la densidad de Euler, y R el escalar de curvatura. La constante c es conocida como la carga central de la teoría y en conjunto con a son parámetros que caracterizan la teoría. La constante a' no invariante frente a transformaciones conformes y por tanto no contiene información física. Un chequeo no trivial de la dualidad AdS/CFT es que es capaz de recuperar la dimensión anómala de estas teorías conformes, mediante cálculos holográficos [8].

A continuación presentamos algunos ejemplos de las restricciones que imponen las simetrías conformes sobre correladores de operadores locales.

Correladores en una CFT

En este apartado estudiamos la forma funcional de algunos correladores de las teorías conformes. El objetivo de esto es mostrar que estas son lo suficientemente restrictivas como para imponer la forma precisa de las funciones de 2 y 3 puntos para operadores cuasi-primarios, independientemente de la acción que describa al sistema, si es que hubiese tal. De forma general, tomaremos una función de n puntos, un proceso de vacío a vacío, y aplicaremos transformaciones conformes sobre el mismo. Puesto que la teoría es invariante frente a las mismas, la forma funcional del objeto no cambiará y lo que se obtiene de esto son condiciones que han de imponerse sobre la forma de los correladores de una CFT. Por simplicidad, para este apartado tomaremos operadores \mathcal{O} escalares, aunque estas consideraciones pueden extenderse a operadores de mayor espín. El hecho de que estos objetos sean procesos de vacío a vacío, es importante puesto que no solo los operadores si no también los estados de una teoría cambian frente a una transformación. Sin embargo, el estado de vacío de una teoría, si existe, se puede definir como aquel que es invariante frente a todas las simetrías de la teoría. En consecuencia, para estos objetos solo serán relevantes las transformaciones de los operadores.

Como primer ejemplo sencillo (i.e. ya presente en teorías con invarianza frente al grupo de Poincaré), se observa que para una teoría con invarianza traslacional los valores de expectación de vacío de operadores locales son triviales, i.e.

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x) | 0 \rangle = \langle \mathcal{O}(x) \rangle = 0. \quad (2.1.56)$$

Otra forma de decir esto es que no existe ninguna función no trivial $f(x)$ tal que $f(x+a) = f(x) \forall a$, con la excepción de una función constante $f(x) = f_0$. Para este último caso, puede redefinirse el operador como $\mathcal{O}(x) \rightarrow \mathcal{O}(x) - f_0$ para obtener un valor de expectación de vacío trivial.

Destacamos nuevamente que este argumento requiere de considerar al sistema en el estado de vacío. Dado que en esta tesis describiremos estados excitados ilustremos esto con un ejemplo sencillo. Consideremos un estado $|\mathcal{O}_{\Sigma}\rangle$ de la base de autoestados de \mathcal{O} sobre una superficie de Cauchy Σ , tal que $\hat{\mathcal{O}}|\mathcal{O}_{\Sigma}\rangle = \mathcal{O}_{\Sigma}(x)|\mathcal{O}_{\Sigma}\rangle$, donde hemos hecho explícito que $\hat{\mathcal{O}}$ es un operador y \mathcal{O}_{Σ} es una función de las coordenadas del espacio. Es directo demostrar que el valor de expectación de \mathcal{O} en este estado es

$$\langle \mathcal{O}_{\Sigma} | \hat{\mathcal{O}}(x) | \mathcal{O}_{\Sigma} \rangle = \mathcal{O}_{\Sigma}(x) \langle \mathcal{O}_{\Sigma} | \mathcal{O}_{\Sigma} \rangle,$$

sin entrar en contradicción con (2.1.56). En lo sucesivo para este trabajo, siempre que no se explicita el estado en que se toma un valor de expectación, este es tomado en el vacío de la teoría, como sugiere la notación de (2.1.56).

El caso de la función de 2 puntos usa simetrías propias del grupo conforme. En primer lugar, la invarianza frente a traslaciones y transformaciones de Lorentz impone que sólo puede depender de módulos de distancias $r_{ij} = |x_i - x_j|$. Según (2.1.43), la función de 2 puntos cambia como

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2) \rangle = G(r_{12}) = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta_1} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta_2} \langle \phi(x'_1) \phi(x'_2) \rangle. \quad (2.1.57)$$

Para una transformación de escala, esto impone que

$$G(r_{12}) = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} G(\lambda r_{12}), \quad \Rightarrow \quad G(r_{12}) = \frac{C}{r_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2}}$$

donde C es una constante arbitraria. Finalmente, una transformación especial conforme y usando la notación $\gamma_i = 1 + 2b \cdot x_i + b^2 x_i^2$ se tiene que

$$x_i^\mu \rightarrow \frac{x_i^\mu - b^\mu x_i^2}{\gamma_i}; \quad \left| \frac{\partial x_i'}{\partial x_i} \right| = \frac{1}{\gamma_i^d}; \quad |x_1' - x_2'| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}},$$

de forma que

$$G(r_{12}) = \frac{C}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2}} G(r_{12}), \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \frac{C}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2}} \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^{\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}}}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2}},$$

que solo se satisface si $\Delta_1 = \Delta_2$, de forma que

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2) \rangle = C \frac{\delta_{\Delta_1 \Delta_2}}{x_{12}^{2\Delta_1}}. \quad (2.1.58)$$

Hemos demostrado que, a menos de una constante que puede absorberse en una redefinición de \mathcal{O} , la función de 2 puntos de operadores cuasi-primarios de una teoría conforme y la de sus descendientes está completamente determinada y es diagonal en el peso conforme de los operadores. Es importante también notar que podría haber más de un operador \mathcal{O} con la misma dimensión conforme. Destacamos que esta forma es la que adoptan los correladores en una teoría definida sobre espacio plano, ver discusión debajo de (2.1.45). Una teoría definida, por ejemplo, sobre un cilindro $\mathbb{R}_t \times S^{d-1}$, a la que puede accederse mediante un mapa conforme, dará correladores

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2) \rangle = C \frac{\delta_{\Delta_1 \Delta_2}}{[\cos(t_1 - t_2) - \cos(\Omega_1 - \Omega_2)]^{\Delta_1}}, \quad (2.1.59)$$

donde $\Omega - \Omega'$ es notación para la distancia ortodrómica sobre la esfera S^{d-1} .

Para la función de correlación de 3 puntos de operadores escalares, un procedimiento análogo lleva a

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2) \mathcal{O}_{\Delta_3}(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} x_{23}^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} x_{13}^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2}},$$

donde puede verse que a medida que el número de puntos aumenta, las restricciones de la teoría se hacen menos fuertes.

Una vez fijada C para los operadores de la teoría, las constantes C_{123} en la expresión anterior contienen información física de la teoría bajo estudio. De hecho, puede demostrarse que una CFT queda totalmente determinada por el espectro de sus operadores primarios y los coeficientes C_{123} de sus funciones de 3 puntos. Comentaremos en breve el motivo detrás de esta afirmación.

A partir de las funciones de 4 puntos y superiores, existen nuevos objetos invariantes de simetrías conformes de los que puede depender el propagador. Ejemplos de estas cantidades son $\frac{r_{12} r_{34}}{r_{13} r_{24}}$ y permutaciones de índices con esta estructura. Tomando el caso particular del propagador de 4 puntos, puede limitarse su forma a

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2) \mathcal{O}_{\Delta_3}(x_3) \mathcal{O}_{\Delta_4}(x_4) \rangle = \mathcal{F} \left(\frac{r_{12} r_{34}}{r_{13} r_{24}}, \frac{r_{12} r_{34}}{r_{23} r_{14}} \right) \prod_{i < j} \frac{1}{r_{ij}^{\Delta_i - \Delta_j - \Delta/3}}, \quad \Delta = \sum \Delta_i, \quad (2.1.60)$$

donde \mathcal{F} es una función arbitraria que no puede fijarse por simetrías de la teoría.

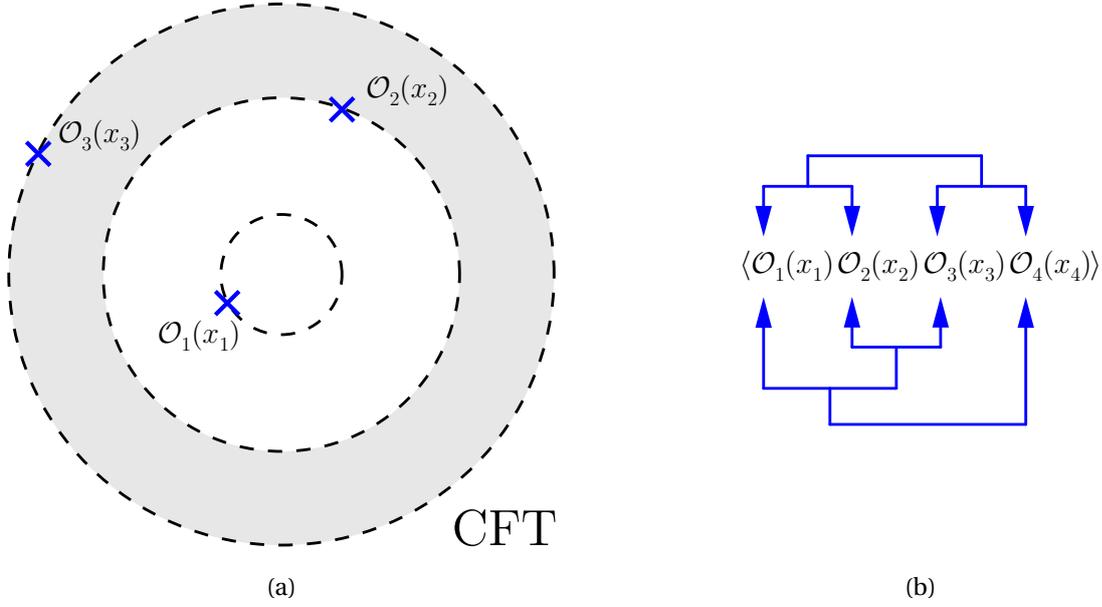


Figura 2.7: (a) Se representan 3 inserciones de operadores $\mathcal{O}_i(x_i)$ a distintas distancias del origen en una cuantización radial de una CFT. La región gris del plano muestra la región de validez exacta de la OPE para los operadores $\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_1(x_1)$. (b) Se muestran dos formas de contraer una función de 4 puntos, obteniendo así distintas expansiones del mismo objeto, lo que impone restricciones en los posibles coeficientes de los OPE de una teoría.

OPE y programa de Bootstrap

Describimos ahora de forma muy breve la expansión de productos de operadores (OPE) y el funcionamiento del programa de Bootstrap en CFT, que es la forma estándar de caracterizar estas teorías. El OPE es una identidad válida para cualquier QFT, que permite, dentro de un valor de expectación, reescribir el producto de dos operadores locales \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 ubicados en puntos cercanos x_1 y x_2 , en términos de una serie asintótica de la forma [46]

$$\langle \dots \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \dots \rangle = \langle \dots \sum_i c_i (x_1 - x_2)^i \mathcal{O}_i(x_1) \dots \rangle \quad (2.1.61)$$

donde i es una suma infinita contable sobre los enteros, c_i son coeficientes y $\mathcal{O}_i(x_1)$ contienen en un caso general a todos los otros operadores de la teoría. Si bien esta expansión es válida en general para cualquier teoría de campos, es especialmente relevante para teorías conformes, donde la invarianza de escalas hace que la expansión sea exacta, al menos hasta que x_1 o x_2 coincida con algún otro punto x_3 de inserción de operadores en los ... del valor de expectación. Luego, los coeficientes de esta expansión contienen información física que caracteriza la teoría específica. Más aún, uno puede ver que la información relevante para la teoría aparece solamente en las contribuciones no analíticas de la serie, i.e. $i < 0$. Ejemplos canónicos de esto son el OPE del tensor de energía momento (holomorfo) consigo mismo en $d = 2$,

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} + \dots,$$

que contiene la carga central c de la teoría y la dimensión conforme $\Delta = 2$; y el OPE del tensor de energía momento con un primario,

$$T(z)\mathcal{O}(w) \sim \frac{\Delta \mathcal{O}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial \mathcal{O}(w)}{(z-w)} + \dots,$$

que contiene su peso conforme Δ . En ambos ejemplos, los ... representan los términos sucesivos en el OPE que son analíticos en $(z-w)$ y que ya no contienen información global de la teoría. Comentamos también que en CFT los operadores posibles de la teoría son solo los cuasi-primarios y sus descendientes, de forma que uno tiene una intuición más precisa de qué operadores \mathcal{O}_i esperar en el lado derecho de la expansión. Notar que por la definición de $T_{\mu\nu}$, el mismo no es primario.

El programa de Bootstrap es un programa que aprovecha dos herramientas centrales de las CFT ya descritas: el hecho de que los correladores de 2 y 3 puntos de la teoría estén completamente determinados por las simetrías de la teoría y el hecho de que la OPE sea exacta para un radio de convergencia finito. Esencialmente, se parte de una función de n puntos de una teoría y se la desglosa en funciones de $m < n$ puntos usando recursivamente el OPE entre los operadores involucrados, hasta descomponer el objeto original en términos de funciones de 2 y 3 puntos. Las distintas formas de llevar a cabo este proceso permite encontrar vínculos adicionales a la teoría y (aunque no lo hemos hecho aquí) demuestra que la teoría queda completamente definida en términos de su espectro de operadores cuasi-primarios y los coeficientes de las funciones de 3 puntos.

Para ilustrar este proceso, partamos de la función de 4 puntos de operadores $\mathcal{O}_i(x_i)$,

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4) \rangle = \sum_i c_i (x_1 - x_2)^i \langle \mathcal{O}_i(x_1)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4) \rangle \quad (2.1.62)$$

$$= \sum_i c_i (x_1 - x_2)^i \sum_j c_j (x_3 - x_4)^j \langle \mathcal{O}_i(x_1)\mathcal{O}_j(x_3) \rangle \quad (2.1.63)$$

$$= \sum_i c_i^2 (x_1 - x_2)^i (x_3 - x_4)^i \langle \mathcal{O}_i(x_1)\mathcal{O}_i(x_3) \rangle \quad (2.1.64)$$

$$= \frac{1}{(x_1 - x_3)^{2\Delta}(x_2 - x_4)^{2\Delta}} \sum_i c_i^2 \mathcal{F}_i \left(\frac{r_{12}r_{34}}{r_{13}r_{24}}, \frac{r_{12}r_{34}}{r_{23}r_{14}} \right), \quad (2.1.65)$$

donde en el primer y segundo renglón usamos el OPE, en el tercero usamos que la función de 2 puntos es diagonal en la dimensión conforme y en el cuarto recuperamos la estructura de (2.1.60). Los coeficientes c_i que aparecen en el OPE entre estos operadores son capaces de determinar los correladores de mayor número de puntos mediante este tipo de descomposiciones.

Una vez más, el objetivo de este apartado es mostrar la forma estándar en que se aborda el cálculo de correladores y la caracterización de una CFT general en ausencia de una acción concreta. La dualidad AdS/CFT proveerá una forma de estudiar estos aspectos mediante un principio variacional tradicional, aunque en una teoría muy distinta en apariencia y en una dimensión mayor.

Correspondencia Estado-Operador

Por último, presentaremos otro aspecto de las teorías conformes relevante para nuestros objetivos, denominado Correspondencia Estado-Operador. Esta correspondencia establece que existe un mapa biyectivo entre los operadores locales de una CFT y los estados de la misma. Debe destacarse que lo interesante de este mapa es su carácter biyectivo, que solo se cumple para teorías conformes: en QFT generales siempre hay un mapa inyectivo de operadores locales $\mathcal{O}(x)$ a estados de la forma

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{O}(x)|0\rangle; \quad \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \mathcal{O}(z, \bar{z})|0\rangle = \mathcal{O}(0, 0)|0\rangle \quad \implies \quad |\mathcal{O}\rangle.$$

donde $|0\rangle$ es el vacío de la QFT y la segunda expresión está escrita en términos de la cuantización radial. Es posible incluso demostrar que cualquier estado de la teoría puede obtenerse por este método. Debe mencionarse que si bien es crucial que \mathcal{O} sea un operador local, no tiene por qué ser un operador fundamental de la teoría y su estructura podría ser muy compleja. Un ejemplo trivial es el estado de una partícula fundamental ubicada en x , para un campo fundamental $\mathcal{O}(x)$, $\mathcal{O}|0\rangle$. Ejemplos más elaborados son la estructura de operadores de vértice en la teoría de cuerdas, como lo son: $e^{ikX(z, \bar{z})}$, que aplicado sobre el vacío en $z, \bar{z} \rightarrow 0$ llevan al autoestado de momento $|k\rangle$. Llamaremos genéricamente a estos operadores de vértice.

El aspecto central por el que el mapa en la CFT es invertible, es que el punto $t = -\infty$ o $z, \bar{z} = 0$ es un punto incluido legítimamente en la variedad y por tanto podemos traerlo a cualquier distancia finita mediante una transformación conforme. Dado entonces un estado $|\mathcal{O}\rangle$, podremos siempre reconstruir el operador del cual partimos,

$$|\mathcal{O}\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{O}(x)|0\rangle \quad \implies \quad \mathcal{O}(x). \quad (2.1.66)$$

De este mapa se sigue que la clasificación de operadores primarios y descendientes se transfiere inmediatamente a los estados de la teoría. Un operador $\mathcal{O}(z, \bar{z})$ primario produce un estado primario $\mathcal{O}(0, 0)|0\rangle$. La condición de que un estado sea primario puede escribirse como

$$K_\mu |\mathcal{O}\rangle = K_\mu \mathcal{O}(0)|0\rangle = 0 \quad (2.1.67)$$

En virtud de que $|0\rangle$ es un estado primario y que para operadores primarios $[K_\mu, \mathcal{O}(0)] = 0$. Este estado tiene también asociado luego el peso conforme Δ del operador, i.e.

$$D|\mathcal{O}\rangle = \Delta|\mathcal{O}\rangle \quad (2.1.68)$$

Esta es la forma estándar en CFT de construir estados excitados: identificados los operadores de vértice adecuados, se actúa con estos sobre el vacío para reconstruir el espacio de Hilbert de la teoría. Como hemos visto, la correspondencia operador-estado garantiza que siempre podremos construir un $\mathcal{O}(x)$ local tal que obtengamos cualquier estado, pero no ofrece un mecanismo sistemático para obtenerlo y dependiendo del estado que queremos reproducir, su estructura puede resultar compleja.

En nuestro trabajo, optaremos por otro mecanismo para excitar el vacío, en términos de una excitación no localizada en el tiempo, mediante una evolución (Euclídea) del sistema sometido a una fuente externa que se apaga antes de llegar al instante donde se observa al estado. Dado que este mecanismo lleva a un estado excitado de la teoría, entonces deberá existir algún $\mathcal{O}(x)$ local que ubicado en $t \rightarrow -\infty$ y aplicado al vacío recupere el estado que estamos describiendo. Lograremos escribir explícitamente dicho operador para algunos casos. El motivo por el que recurrimos entonces a nuestro formalismo es que nos permite establecer un mapa más claro de qué excitaciones estamos describiendo aún para teorías de las que tenemos muy poca información. Veremos además que nos permitirá tener no solo una interpretación de los mismos en CFT débilmente acopladas si no también en aquellas fuertemente acopladas mediante una descripción holográfica precisa. El mapa entre estados excitados que presentaremos al final del próximo capítulo y que representa el corazón de esta tesis, sería ineficaz y difícil de formular directamente en términos de operadores de vértice.

2.1.4. Estados coherentes

Concluiremos el apartado introductorio de teorías de campos describiendo algunas propiedades relevantes sobre estados coherentes y de un mecanismo para construirlos mediante interacciones del sistema con una fuente externa. Los estados coherentes fueron concebidos casi en paralelo con la mecánica cuántica por Schrödinger en el '26. Su relevancia no sería destacada hasta el '62 con trabajos importantes de Glauber y Gilmore, entre otros [22, 47]. Desde una perspectiva contemporánea se destacan 3 propiedades principales de los estados coherentes: coherencia, sobrecompletitud de la base y una interpretación geométrica intrínseca. La tercera propiedad, refiere al hecho de que los estados coherentes son estados cuánticos a los que se les puede asociar una configuración clásica. Esta última noción aplicada a los campos de RG, que definen la geometría del espacio-tiempo, hará que en aquel contexto una configuración clásica y una interpretación geométrica sean la misma cosa. Aclaremos que en esta tesis trabajaremos en todo momento sobre sistemas bosónicos, de forma que presentaremos el formalismo de estos estados para sistema de espín entero. La extensión todo el formalismo a sistemas de fermiones existe, aunque la noción de interpretación clásica para sistemas fermiónicos no siempre es posible. Basaremos esta sección en [48, 22, 49, 47].

En el marco de la mecánica cuántica, se suele presentar a los estados coherentes $|\lambda\rangle$ como autoestados de los operadores escalera del oscilador armónico, i.e.

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle,$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$. Es directo demostrar que estos estados tienen valor de expectación y varianza finita para q y p , las posiciones y momentos generalizados del problema, tal que estas además minimizan la relación de incerteza de Heisenberg. Para este ejemplo, los estados coherentes admiten tres definiciones equivalentes

$$|\lambda\rangle \equiv e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle, \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda\rangle / \Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2}, \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda\rangle \equiv D(\lambda)|0\rangle.$$

La tercera definición está dada en términos del operador unitario desplazamiento $D(\lambda) \equiv e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a} = D^\dagger(\lambda)$. Una ventaja inmediata de la tercera definición es que dada la unitariedad del operador desplazamiento, los estados así construidos están normalizados por construcción, mientras que no lo están en la definición de la izquierda.

Esta última definición es además la más natural de extender a un marco general teoría de campos, incluso para operadores locales como los operadores de campo y momento canónicamente conjugado. Si

$[\mathcal{O}, \Pi_{\mathcal{O}}] = i$, sobre una superficie de Cauchy Σ , entonces se puede crear un estado coherente en una QFT para un campo real como

$$D(\lambda)|0\rangle \equiv e^{i \int_{\Sigma} \mathcal{O} \dot{\lambda} - \Pi_{\mathcal{O}} \lambda} |0\rangle \equiv |\lambda\rangle; \quad \langle \lambda | \lambda \rangle = 1 \quad (2.1.69)$$

Donde ahora $\lambda = \lambda(x_{\Sigma}) \in \mathbb{R}$ como fuente de un campo real \mathcal{O} . Esta última expresión será útil en breve. Es inmediato demostrar que

$$\frac{\langle \lambda | \mathcal{O} | \lambda \rangle}{\langle \lambda | \lambda \rangle} = \langle 0 | D(\lambda)^{\dagger} \mathcal{O} D(\lambda) | 0 \rangle = \langle 0 | (\mathcal{O} + \lambda) | 0 \rangle = \lambda; \quad \frac{\langle \lambda | \Pi_{\mathcal{O}} | \lambda \rangle}{\langle \lambda | \lambda \rangle} = \dot{\lambda}, \quad (2.1.70)$$

donde se usó la unitariedad de D , $D(\lambda)^{\dagger} D(\lambda) = 1$ para mostrar $\langle \lambda | \lambda \rangle = \langle 0 | D(\lambda)^{\dagger} D(\lambda) | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1$ y que $\langle 0 | \mathcal{O} | 0 \rangle = 0$. Es relevante destacar que $\mathcal{O} | \lambda \rangle \neq \lambda | \lambda \rangle$ y $\Pi_{\mathcal{O}} | \lambda \rangle \neq \dot{\lambda} | \lambda \rangle$, de forma que no es esta una base de autoestados del campo o su momento conjugado. Tal base puede construirse y resulta ortonormal, pero no será relevante a los efectos de este trabajo.

Una propiedad de los estados coherentes que será relevante para comprender algunos resultados de este trabajo es que la función de 2 puntos conectada para estados coherentes y para el vacío son el mismo. La demostración es directa, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\langle \lambda | \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 | \lambda \rangle_c}{\langle \lambda | \lambda \rangle} &\equiv \frac{\langle \lambda | \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 | \lambda \rangle}{\langle \lambda | \lambda \rangle} - \frac{\langle \lambda | \mathcal{O}_1 | \lambda \rangle \langle \lambda | \mathcal{O}_2 | \lambda \rangle}{\langle \lambda | \lambda \rangle} \\ &= \langle 0 | D(\lambda)^{\dagger} \mathcal{O}_1 D(\lambda) D(\lambda)^{\dagger} \mathcal{O}_2 D(\lambda) | 0 \rangle - \lambda_1 \lambda_2 \\ &= \langle 0 | (\mathcal{O}_1 + \lambda_1) (\mathcal{O}_2 + \lambda_2) | 0 \rangle - \lambda_1 \lambda_2 \\ &= \langle 0 | \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 | 0 \rangle + \lambda_1 \langle 0 | \mathcal{O}_2 | 0 \rangle + \lambda_2 \langle 0 | \mathcal{O}_1 | 0 \rangle + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2 \\ &= \langle 0 | \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 | 0 \rangle = \langle 0 | \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 | 0 \rangle_c, \end{aligned}$$

donde se usó el subíndice c para denotar “conectada” y se explicitó $\langle 0 | \mathcal{O}_1 | 0 \rangle = 0$ por invarianza traslacional, la función de 2 puntos conectada y desconectada en el vacío son iguales. Propiedades similares pueden demostrarse para funciones de correlación de orden superior, pero no serán relevantes para este trabajo.

Se recuerda además que los estados coherentes no son autoestados del operador número, i.e. no tienen un número de partículas definido. Esta propiedad resulta atractiva, por ejemplo, para estudiar divergencias infrarojas en teorías de campos. Las mismas aparecen en el tratamiento estándar hecho sobre la base del operador número para teorías con partículas no masivas. El ejemplo por antonomasia de esto es QED. Las divergencias aparecen en una expansión en diagramas de Feynman al no poder distinguir en un experimento real con n partículas salientes y un número m de partículas no masivas con energía por debajo de lo que los detectores pueden distinguir. La regularización en esta base requiere la suma de diagramas de distinto número de partículas salientes para demostrar que cada diagrama es divergente, pero que su suma al formar procesos físicos de la matriz de dispersión $\langle \text{out} | S | \text{in} \rangle$ es finito. En la base coherente este problema se sortea por construcción y cada diagrama es IR finito de forma independiente [48].

Hasta el momento en esta presentación, hemos definido a los estados coherentes (y siendo esta una base del espacio de Hilbert, a todos los estados en consecuencia) como excitaciones del vacío mediante la acción de un operador definido sobre una superficie de Cauchy Σ actuando sobre el vacío de la teoría en la misma superficie. A continuación presentaremos una forma de construir estados excitados en general y coherentes en particular mediante una evolución temporal del sistema sujeto a la acción de una fuente externa [22].

Considérese una QFT libre en su estado de vacío $H|0\rangle = 0$ en un instante t_0 . La evolución libre de este sistema en el tiempo bajo H será trivial, i.e.

$$U(t)|0\rangle = \mathcal{P} \{ e^{-i \int_{t_0}^t dt H} \} |0\rangle = \prod_i e^{-i H \Delta t} |0\rangle = e^{-i H(t-t_0)} |0\rangle = (1 - i H(t-t_0) + \dots) |0\rangle = |0\rangle \quad (2.1.71)$$

donde hemos hecho intencionalmente explícitos varios pasos. En primer lugar, la definición formal del operador evolución implica una exponencial temporalmente ordenada. Notar que este operador implica considerar el hamiltoniano de la teoría en todos los instantes intermedios $H(t_i)$, $t_0 < t_i < t$ y en este sentido no es un operador definido sobre una superficie Σ . Por definición, puede escribirse como la productoria

de una serie de pasos infinitesimales Δt que llevan desde el instante $t_0 \rightarrow t$. Para cualquier sistema cerrado donde H no depende del tiempo, como es este ejemplo, $[H(t_1), H(t_2)] = 0$ y la productoria de exponenciales puede escribirse como una única exponencial que depende solamente de $(t - t_0)$. Este último paso puede pensarse en términos de los teoremas de desentrelazamiento de Baker-Campbell-Hausdorf [50],

$$e^X e^Y = e^Z, \quad Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \dots, \quad (2.1.72)$$

del cual hemos usado su versión más trivial, cuando $[X, Y] = 0$. Convertida la exponencial temporalmente ordenada en una exponencial regular, cabe expandirla por definición y usar $H|0\rangle = 0$ para demostrar la evolución trivial del estado.

El objetivo del detalle minucioso en el análisis anterior es preparar al lector para una versión modificada del mismo, donde el sistema se ve sometido a una fuente externa j para alguno de los campos fundamentales de la teoría $A \sim a + a^\dagger$, que se encenderá de forma adiabática en un instante posterior a t_0 y se apagará también de forma adiabática en un instante anterior a t . Estas condiciones, garantizan que en el instante inicial y final, el hamiltoniano que describe el sistema sea el H original y no su deformación por la fuente externa. Haremos un paso más antes de reproducir el proceso anterior, realizando el cómputo en el esquema de Dirac, o de Interacción, donde los operadores están sujetos a una evolución temporal y estados evolucionan solo con la parte no libre del hamiltoniano⁸,

$$U_j(t) = \mathcal{P}\{e^{-i \int_{t_0}^t dt H + jA}\} \implies U_j(t) = \mathcal{P}\{e^{-i \int_{t_0}^t dt jA}\}, \quad (2.1.73)$$

en este caso solo con el efecto de la fuente externa. La evolución del sistema partiendo del vacío entonces resulta

$$U_j(t)|0\rangle = \mathcal{P}\{e^{-i \int_{t_0}^t dt jA}\}|0\rangle = \prod_i e^{-i j A \Delta t}|0\rangle = \prod_i e^{-i(\tilde{j}(t_i) a^\dagger + \tilde{j}(t_i)^* a)}|0\rangle \quad (2.1.74)$$

$$= \prod_i D(j_i)|0\rangle = e^{i\delta_j} D\left(\int_{t_0}^t dt j\right)|0\rangle \equiv e^{i\delta_j} \left| \int_{t_0}^t dt j \right\rangle, \quad (2.1.75)$$

donde hemos usado para resumar la productoria la propiedad

$$D(\lambda_1)D(\lambda_2) = e^{i\delta_\lambda} D(\lambda_1 + \lambda_2), \quad (2.1.76)$$

donde δ_λ es una fase real, que puede demostrarse explícitamente a partir de (2.1.72), [47]. Lo que hemos demostrado en (2.1.74), es que la evolución de una teoría libre bajo el efecto de una fuente externa da como resultado un estado coherente con autovalor $\int_{t_0}^t dt j$ que podemos calcular analíticamente.

Este argumento puede generalizarse directamente, siempre en términos de una expansión perturbativa, para fuentes externas de operadores más complejos. Desde un punto de vista algebraico, encender una fuente para cualquier operador lineal en los operadores escalera dará como resultado un estado coherente. Esto se sigue de que el álgebra de $\{\mathbb{1}, a^\dagger, a, a^\dagger a\}$ es cerrada. Desde este punto de vista, encender una fuente para un operador cuadrático en los operadores escalera debiera también poder resumarse, dado que el álgebra de $\{\mathbb{1}, a^\dagger, a, a^\dagger a, (a^\dagger)^2, a^2\}$ es también cerrada. El resultado es un estado coherente comprimido, o de forma general lo que se conoce como un estado gaussiano generalizado. Cualquier otro conjunto de potencias finitas de estos operadores no conforma un álgebra cerrada y el paso de resumación de la productoria tampoco se puede obtener de forma cerrada. Aún así, para cualquier caso y al orden deseado, pueden obtenerse los estados finales con métodos numéricos buscando representaciones fieles del álgebra efectiva trunca [47].

Este es el resultado más importante de este apartado y puede verse como un puntapié inicial para el estudio de los estados excitados que se consideran en esta tesis: acoplar un sistema a una fuente externa clásica durante un período finito de tiempo permite obtener estados excitados de la teoría.

⁸En esta ecuación hay una redundancia en la notación, puesto que el objeto A a la izquierda es un operador en el esquema de Schrödinger y no cumple una ecuación de evolución temporal, mientras que el A a la derecha es el más familiar en el lenguaje de teoría de campos relativista, donde la evolución del espacio-tiempo es considerada. Dado que no volveremos sobre la primera descripción y que este es un paso estándar en QFT, se decidió no distinguir entre ambas magnitudes. Siempre estará claro a cuál nos referimos según lo acompañe o no el hamiltoniano del sistema.

Sobre esta forma particular de excitar la teoría, es menester aclarar algo sobre su generalidad. Escrito como en (2.1.69), los parámetros λ y $\hat{\lambda}$ son enteramente independientes. Sin embargo, notar que ya su notación sugiere el formalismo posterior en términos de una fuente externa. Es inmediato comprobar que :

$$\langle \int_{t_0}^t dt j | \mathcal{O} | \int_{t_0}^t dt j \rangle \sim \int_{t_0}^t dt j. \quad (2.1.77)$$

Sin embargo, se puede mostrar que $\langle \int_{t_0}^t dt j | \Pi_{\mathcal{O}} | \int_{t_0}^t dt j \rangle = 0$ en esta construcción. El motivo de esto es que el estado de entrada y salida para el cálculo de estos valores medios están generados como evoluciones espejadas respecto del tiempo t , i.e. notar que el estado de salida se obtiene como el conjugado hermítico de una excitación del sistema mediante una evolución (2.1.73), que puede reinterpretarse como una evolución donde se cambió el integrando en la evolución $t \rightarrow -t$. Esta simetría en la inversión temporal, hace que las soluciones clásicas obtenidas sobre la superficie de Cauchy en t , que es la interpretación clásica de los valores de expectación para estados coherentes, fuerzan $\langle \int_{t_0}^t dt j | \Pi_{\mathcal{O}} | \int_{t_0}^t dt j \rangle = 0$.

Si bien (2.1.74) fue obtenido utilizando una evolución en tiempo real del vacío, su reinterpretación en términos de álgebras discutido arriba permite independizarse de esta condición y considerar una evolución acoplada a una fuente en signatura Euclídea. El objetivo de esto es conectar con las consideraciones hechas al comienzo de este capítulo, ver por ejemplo (2.1.2), donde construimos el vacío de una teoría de campos a través de una evolución temporal Euclídea. En (2.1.5), se definió una función generatriz, donde los estados iniciales estaban definidos por funciones de partición $Z_E[j_E; A^{-\frac{T}{2}}]$ y donde $Z_E[0; A^{-\frac{T}{2}}]$ describía el vacío de la teoría. En estos ejemplos el tiempo $t_0 \rightarrow -\infty$ y la fuente en ese punto puede o no apagarse, aportando en cualquier caso solamente una constante a la función de partición que puede absorberse en su normalización [21]. A la luz del análisis expuesto en este apartado, es claro que $Z_E[j_E; A^{-\frac{T}{2}}]$ con $j_E \neq 0$ construirá un estado excitado de la teoría original, siempre que j_E se apague adiabáticamente antes de llegar al tiempo t . La comparación entre ambas construcciones, a tiempo real e imaginario, se ilustra en la Fig. 2.8.

Sobre esto haremos un comentario en conexión con la correspondencia operador-estado de una CFT. Dijimos en la Sección anterior que cualquier estado de la teoría puede obtenerse como un operador local de la CFT aplicado al vacío, pero que la estructura de este operador podría ser fuertemente no trivial dependiendo del estado que se busca construir. Sea un estado excitado construido por una fuente externa como se describe en esta sección, ahora por conveniencia en el esquema de Schrödinger, donde \mathcal{O} es el mismo operador en cada hoja de la foliación temporal y la evolución temporal está absorbida en el estado. El estado creado por este proceso será

$$|\lambda\rangle = \mathcal{P}\{e^{-\int(H+\lambda\mathcal{O})}\}|0\rangle \quad (2.1.78)$$

$$\sim \left(1 - \prod_i (H + \lambda_i(x)\mathcal{O}(x)) \dots\right) |0\rangle \quad (2.1.79)$$

$$\sim \left(1 - \prod_i (H + \lambda_i(x)[\mathcal{O}(0) + \partial\mathcal{O}(0)(x-0) + \dots]) \dots\right) |0\rangle \quad (2.1.80)$$

$$= \hat{\lambda}(0)|0\rangle \quad (2.1.81)$$

donde en las últimas líneas hemos hecho una expansión de Taylor de \mathcal{O} alrededor de $z, \bar{z} = 0$, de forma que el operador $\hat{\lambda}$ definido arriba es el que genera el estado $|\lambda\rangle$ en el lenguaje de la sección anterior. Notar que el operador $\hat{\lambda}$ contiene al primario \mathcal{O} y todos sus descendientes con distintos coeficientes actuando sobre el vacío. Uno puede además utilizar el OPE de \mathcal{O} consigo mismo sobre los términos superiores de la expansión de Taylor para argumentar que el operador $\hat{\lambda}$ contendrá no solo a \mathcal{O} y sus descendientes si no también a todos operadores de la teoría que aparezcan en su OPE. Este sencillo argumento muestra la conexión entre una y otra forma de construir estados excitados, al menos del formalismo de Glauber al formalismo estándar.

Diremos a modo de avance de la última sección del próximo capítulo, que en una teoría que tuviese un borde, como es el caso de AdS, uno podría también explorar los estados excitados accesibles para fuentes encendidas solamente sobre el borde de la teoría. Notar que nuestros argumentos en esta sección no dependen de que la métrica del espacio sea plana. La construcción en AdS seguirá pasos muy similares a esta, pero lo interesante será interpretar las excitaciones, mediante la dualidad AdS/CFT, como un resultado para CFTs fuertemente acopladas.

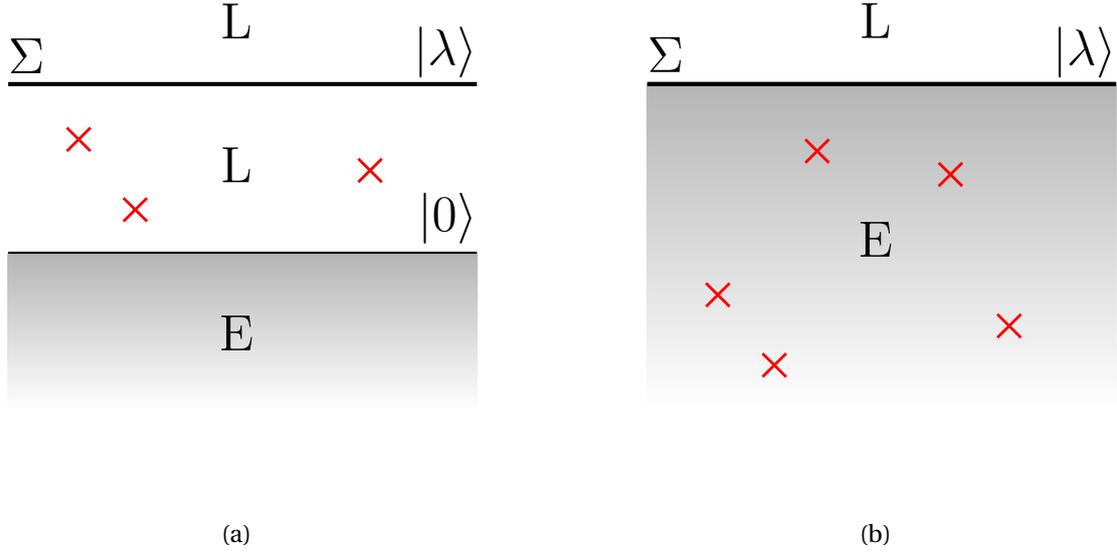


Figura 2.8: La figura muestra dos formas de generar estados excitados. En (a) se lleva a cabo el proceso descrito por Glauber [22] donde partiendo del vacío se excita el sistema a tiempo real con fuentes externas en tiempo real para preparar un estado coherente de la teoría. En (b) se muestra un proceso análogo llevado a cabo solo mediante una evolución Euclídea deformada con inserciones de fuentes.

2.2. Espacios AdS y H

En esta sección introduciremos los espacios AdS y H y las soluciones de agujeros negros sobre las mismas, estudiaremos sus isometrías, diagramas de Penrose y los parches de coordenadas que usaremos en los capítulos siguientes. Se notará la dimensión de estos espacios $d + 1$, lo que hará más cómodo el uso de las ecuaciones en el contexto de holografía.

Los espacios AdS y H son soluciones maximalmente simétricas a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa, en signaturas Lorentziana y Euclídea respectivamente. Estas ecuaciones pueden derivarse minimizando la acción de Einstein-Hilbert

$$S = \frac{1}{16\pi G_{d+1}} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (2.2.1)$$

donde $\Lambda < 0$ es la constante cosmológica.

Un espacio maximalmente simétrico $d + 1$ dimensional general posee el máximo número de isometrías posibles para un espacio de su dimensión, $\frac{1}{2}(d + 1)(d + 2)$. Cada isometría tiene asociado un vector de Killing ξ_β , que está definido por

$$\nabla_{(\alpha} \xi_{\beta)} = 0.$$

donde ∇_μ es la derivada covariante en ese espacio.

El tensor de Riemann de dicho espacio es constante y está determinado por la métrica como

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{2\Lambda}{d(d + 1)} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}). \quad (2.2.2)$$

Localmente, un espacio maximalmente simétrico de dimensión $d + 1$ y signatura dada queda completamente determinado por el signo de Λ . De esta forma, los espacios quedan clasificados en 3: $\Lambda > 0$, $\Lambda = 0$ y $\Lambda < 0$. En signatura Euclídea, estos espacios corresponden respectivamente a la esfera $d + 1$ -dimensional S^{d+1} , a hiper-superficies \mathbb{R}^{d+1} y a espacios hiperbólicos H_{d+1} . En métrica Lorentziana estos espacios se denominan respectivamente de Sitter dS_{d+1} , Minkowski \mathbb{M}^{d+1} y anti-de Sitter AdS_{d+1} .

A continuación se presentan formas alternativas de definir los espacio AdS_{d+1} y H_{d+1} en términos de superficies embebidas en espacios de dimensión mayor, que permite observar más claramente la topología e isometrías de los mismos.

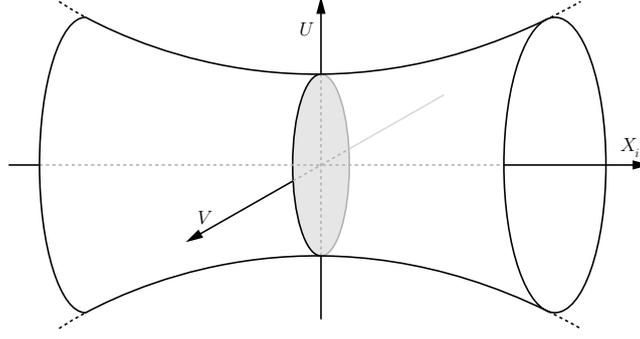


Figura 2.9: Se muestra el espacio AdS_2 como una superficie embebida en $\mathbb{R}^{1,2}$. En una dimensión d general las coordenadas U y V son temporales en la métrica, mientras que las X_i son espaciales.

2.2.1. AdS como superficie cuádrica

Se puede también definir AdS_{d+1} como una superficie cuádrica embebida en una métrica plana $d+2$ dimensional. Para eso, se considera el vínculo

$$\sum_{i=1}^d X_i^2 - U^2 - V^2 = \frac{(d-2)(d-1)}{2\Lambda}, \quad (2.2.3)$$

sobre la métrica $\mathbb{R}^{d,2}$

$$ds^2 = \sum_{i=1}^d dX_i^2 - dU^2 - dV^2. \quad (2.2.4)$$

El único parámetro global de AdS_{d+1} es su constante cosmológica, que tomaremos sin pérdida de generalidad como $\Lambda = -\frac{1}{2}(d-2)(d-1)$ que hace el lado derecho de (2.2.3) igual a la unidad.

En esta presentación de AdS puede rápidamente conocerse sus vectores de Killing. Es inmediato ver que el vínculo (2.2.3) es invariante frente al grupo $SO(d,2)$, que es además subgrupo de las isometrías de (2.2.4). Luego, resulta que el grupo de isometrías de AdS_{d+1} es $SO(d,2)$. Como chequeo de consistencia, puede verse comprobarse que $SO(d,2)$, en tanto matriz real simétrica y unitaria, tiene $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ generadores, en acuerdo con un espacio maximalmente simétrico de $d+1$ dimensiones. La topología del hiperboloide (2.2.3) es isomorfa a $\mathbb{R}^d \times S^1$, donde S^1 está asociada a la dirección temporal. En la Fig. 2.9 se muestra el hiperboloide (2.2.3) para el caso de AdS_2 , embebido en el espacio $\mathbb{R}^{1,2}$. El espacio así definido posee entonces curvas temporales cerradas. Resolveremos esto en la siguiente sección utilizando lo que se conoce como la variedad de *cubrimiento universal* de AdS.

Para los objetivos del Capítulo 4 serán relevantes 2 parametrizaciones de este espacio: las coordenadas *Globales* y las de *Poincaré*.

Coordenadas Globales

Se parametriza al hiperboloide (2.2.3) como

$$U = \cosh(\rho) \cos(t); \quad V = \cosh(\rho) \sin(t); \quad X_i = \sinh(\rho) \Omega_i; \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^d \Omega_i^2 = 1 \quad (2.2.5)$$

donde Ω_i representan las coordenadas estándar⁹ sobre S^{d-1} . Expresando la métrica (2.2.4) en función de estas coordenadas resulta

$$ds^2 = -\cosh^2(\rho) dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2(\rho) d\Omega_{d-1}^2, \quad (2.2.6)$$

donde $d\Omega_{d-1}^2$ es la métrica de S^{d-1} . Tomando $0 \leq \rho < \infty$ y $0 \leq t < 2\pi$, además del rango clásico de las variables angulares de S^{d-2} , se cubre una vez el hiperboloide completo.

⁹Por ejemplo, para S^2 las coordenadas son $\Omega_1 = \cos\theta$ y $\Omega_2 = \sin\theta$.

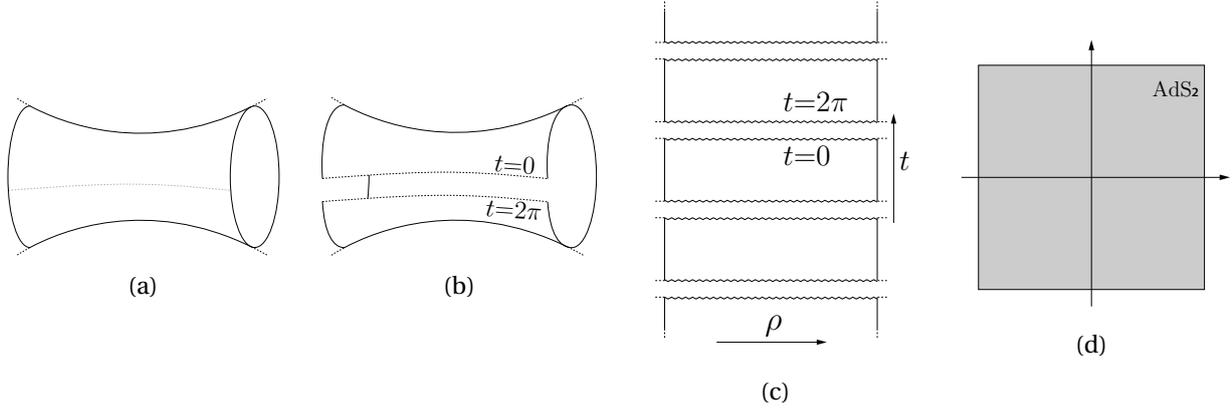


Figura 2.10: Procedimiento para deformar el hiperboloide (2.2.3) al plano en AdS_2 . En (a) y (b) se marca con una línea punteada el corte que marca el paso de 0 a 2π del tiempo. En (c) se unen infinitos de estos cortes, evitando así la existencia de curvas temporales cerradas.

La coordenada temporal describe una variedad isomorfa a S^1 . Se evitará tener curvas cerradas temporales (que acarrearían problemas de causalidad) se toma la variedad de *cubrimiento universal* de AdS que permite tomar $-\infty < t < \infty$. Esencialmente, se extiende el dominio de la variable t , definiendo cada vuelta como una variedad distinta, similar a como se define una hoja de Riemann en análisis complejo. En la Fig. 2.10 puede verse de forma ilustrativa este proceso.

Reescribiremos la métrica (2.2.6) como

$$ds^2 = -(1+r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{(1+r^2)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad (2.2.7)$$

definiendo $r = \sinh(\rho)$, donde $r \in [0, \infty)$. Esta segunda forma será la que más usaremos en los capítulos subsiguientes.

Coordenadas Poincaré

Otra parametrización posible para (2.2.3) es

$$V = \frac{t}{z}; \quad U - X^d = \frac{1}{z}; \quad U + X^d = \frac{1}{z} \left(\sum_{i=1}^{d-1} x_i^2 - t^2 + z^2 \right); \quad X_i = \frac{x_i}{z}; \quad i = 1, 2, \dots, d-1 \quad (2.2.8)$$

La métrica (2.2.4) en estas coordenadas resulta

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left(-dt^2 + dz^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dx_i^2 \right) \quad (2.2.9)$$

donde $-\infty < t, x^i < \infty$. El dominio de la variable z puede cubrir los reales positivos o negativos, pero no ambos, debido a la singularidad en $z = 0$. Se tomará $z > 0$, que cubre solamente una mitad del hiperboloide (2.2.3) como se muestra en la Fig. 2.11a.

El interés en esta parametrización reside en que las superficies de nivel de z describen espacios \mathbb{M}^d . Por un lado, la estructura de (2.2.9) hace manifiesta una simetría de dilatación $(t, z, x^i) \rightarrow (ct, cz, cx^i)$, con $c > 0$. Esta simetría permite estudiar cómo se comportan objetos que viajan en la dirección z . Una misma área se verá más grande a medida que se mueva de z_1 a z_2 con $z_2 > z_1$. Esto puede reinterpretarse en términos energéticos como que la escala de energías aumenta al disminuir z . Por este motivo se suele hacer referencia a los bordes $z \rightarrow \infty$ y $z = 0$ como *borde infrarrojo* y *borde ultravioleta* respectivamente, como se esquematiza en la Fig. 2.11b.

Estructura conforme

El estudio de la estructura conforme de un espacio facilita el análisis de la estructura causal del mismo. De forma general, se parte de una métrica del espacio y mediante cambios de coordenadas y transformaciones conformes se lo mapea a una región finita de una métrica conocida. La estructura causal de un

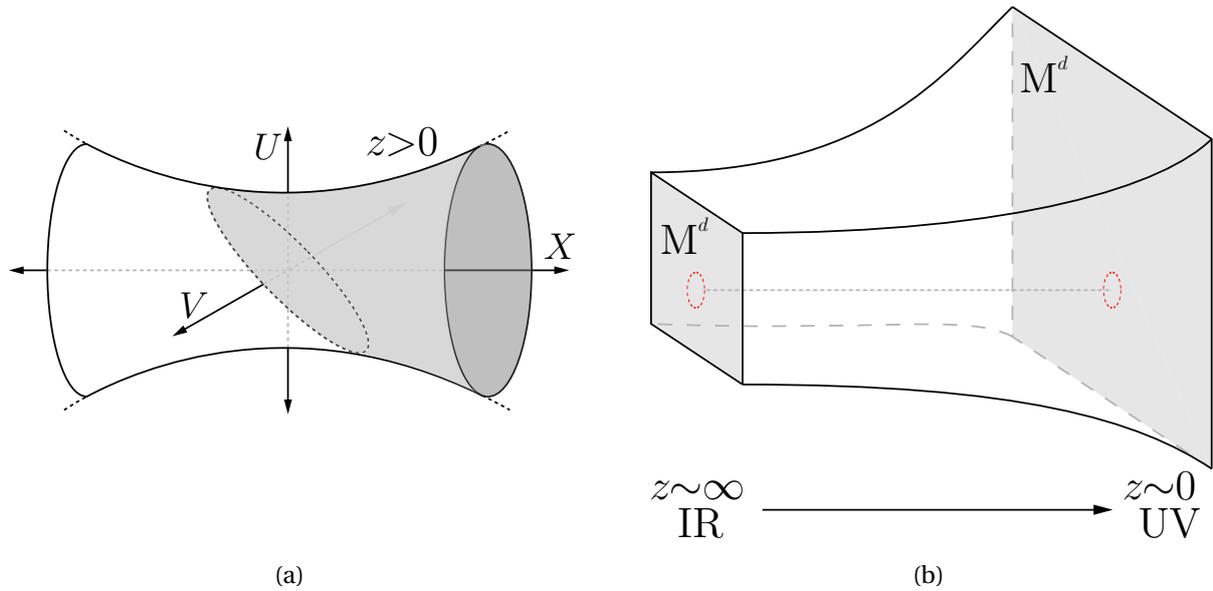


Figura 2.11: (a) Se muestra la región cubierta por las coordenadas de Poincaré definidas en la ecuación (2.2.8) sobre AdS_2 . A partir de dicha parametrización puede verse que $z > 0$ impone $U - X > 0$. (b) Se toman dos superficies de nivel de z . Un cuerpo (representado por el círculo de línea punteada) en una región de $z \rightarrow 0$ pareciera ser más pequeño que el mismo cuerpo a $z \rightarrow \infty$

espacio-tiempo es invariante frente a transformaciones conformes¹⁰. Con estos diagramas, llamados conformes o de Penrose, obtendremos las superficies de nivel de las variables de cada parametrización, que serán fundamentales en las aplicaciones de la prescripción de Skenderis y van Rees.

Para tener una variable radial con un dominio finito, se parte de la métrica (2.2.6) y se define $\tan \chi = \sinh \rho$, de donde

$$ds^2 = \frac{d\tilde{s}^2}{\cos^2 \chi} = \frac{-dt^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_{d-1}^2}{\cos^2 \chi} \quad \chi \in [0, \pi/2]. \quad (2.2.10)$$

La geometría definida por $d\tilde{s}^2$ se conoce como *Universo Estático de Einstein* y corresponde a un universo sin bordes isomorfo a $S^d \times \mathbb{R}_t$. En este último $\chi \in [0, \pi]$ de donde puede verse que las superficies $t = \text{cte}$ de (2.2.10) describen hemi-esferas S^d . El polo de la hemi-esfera y su ecuador corresponden a $\chi = 0$ y $\chi = \pi/2$ respectivamente. La Fig. 2.12 muestra la estructura conforme de AdS_3 . Cada punto de la zona sombreada representa un círculo de radio $\sin(\chi)$. El borde conforme de este espacio se encuentra en $\chi = \pi/2$ y tiene una topología isomorfa a $\mathbb{R}_t \times S^d$ para dimensión d arbitraria. En general, el espacio AdS con su borde conforme se entienden como un cilindro macizo. Las regiones $t = \text{cte}$ definen “tapas” en el cilindro, mientras que el *borde conforme* corresponde a la superficie lateral del mismo.

La existencia de una frontera tipo tiempo ($\chi = \pi/2$) implica que AdS no es *globalmente hiperbólico*. Esto significa que a partir las ecuaciones de movimiento y condiciones iniciales en una superficie espacial no es posible determinar la evolución temporal de un sistema, dado que podría ingresar información desde la frontera temporal. De forma general, este problema se resuelve imponiendo condiciones de contorno adicionales en dichas fronteras. Es interesante notar que la existencia de una frontera tipo tiempo es lo que permite que la teoría de campos en el borde conforme tenga una dimensión temporal al proponer la dualidad AdS/CFT en tiempo real.

La región descrita por las coordenadas de Poincaré se obtendrá comparando esta parametrización con las coordenadas globales. Por simplicidad se presenta un análisis hecho sobre AdS_2 , pero un estudio en dimensión arbitraria lleva a conclusiones análogas [51]. Dado que cada parametrización tiene coordenadas temporales no equivalentes, se notará al tiempo global como t_G y al Poincaré como t_P . A partir de

¹⁰Se puede demostrar que una transformación conforme preserva los ángulos entre curvas. Sabiendo esto, puntos separados tipo espacio/luz/tiempo en el diagrama conforme, también lo estarán en la métrica original.

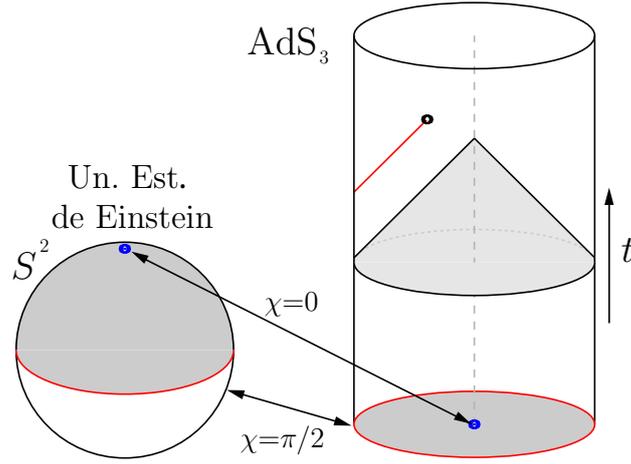


Figura 2.12: La zona cubierta por una superficie a $t = \text{cte}$ (disco sombreado en gris) de AdS_3 es una hemisfera del Universo Estático de Einstein. En la misma figura se muestra que el espacio AdS no es globalmente hiperbólico, puesto que la información completa del sistema sobre una superficie de Cauchy (cono gris) es incapaz de determinar el estado del sistema en el punto negro, el cual está causalmente conectado (recta roja) con puntos del borde de AdS.

(2.2.5) y (2.2.8),

$$U = \frac{\cos(t_G)}{\cos(\chi)} = \frac{-t_P^2 + z^2 + 1}{z}; \quad V = \frac{\sin(t_G)}{\cos(\chi)} = \frac{t_P}{z}; \quad X = \tan \chi = \frac{-t_P^2 + z^2 - 1}{z}.$$

A partir de estas relaciones pueden obtenerse las curvas de nivel de t_P y z , definidas como

$$\frac{\sin(t_G)}{\cos(t_G) - \sin(\chi)} = t_P = \text{cte} \quad \cos(t_G) - \sin(\chi) = \frac{1}{z} = \text{cte},$$

cuya forma puede verse en la Fig. 2.13a. La frontera de la región cubierta por las coordenadas de Poincaré en un espacio AdS_{d+1} se muestra en la Fig. 2.13b.

2.2.2. H como superficie cuádrica

Los espacios maximalmente simétricos con $\Lambda < 0$ y signatura euclídea reciben el nombre de espacios *Hiperbólicos* o H. Se presentará este espacio como una hiper-superficie embebida en un espacio plano de dimensión mayor, similar a como se hizo para el espacio AdS. En la literatura también se lo nombra como AdS Euclídeo o directamente AdS si la signatura del espacio se entiende del contexto. Sin embargo, en este trabajo será importante distinguir cuándo estamos en signatura Euclídea o Lorentziana y para este fin se prefiere darle un nombre propio.

Se impone como vínculo el paraboloides

$$\sum_{i=1}^{d+1} X_i^2 - U^2 = \frac{(d-2)(d-1)}{2\Lambda}, \quad (2.2.11)$$

sobre la métrica del espacio $\mathbb{R}^{d+1,1}$

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{d+1} dX_i^2 - dU^2. \quad (2.2.12)$$

En la Fig. 2.14 se muestra el paraboloides (2.2.11) embebido en el espacio $\mathbb{R}^{2,1}$. Esta construcción muestra que las simetrías de este espacio son $SO(d+1, 1)$, que son las del vínculo (2.2.11). Igual que en AdS, usaremos $\Lambda = \frac{1}{2}(d-2)(d-1)$.

Un comentario interesante acerca del vínculo (2.2.11) es que, a diferencia de (2.2.3), no describe una topología conexas. Es decir, las soluciones a (2.2.11) son dos paraboloides separados y que por tanto no

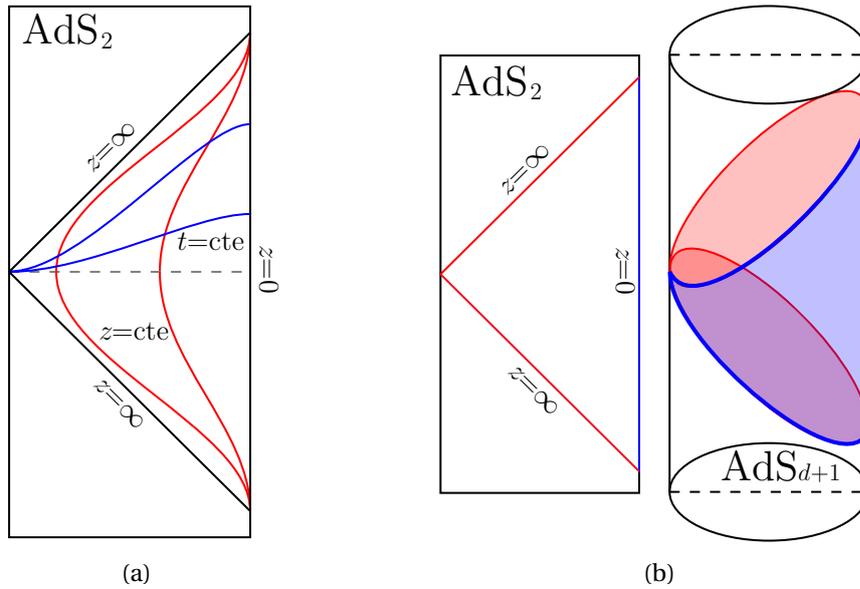


Figura 2.13: En (a) se muestran esquemáticamente las curvas generadas al tomar constante alguna de las coordenadas de Poincaré. En (b), se lleva gráficamente de AdS_2 a AdS_{d+1} . Las curvas rojas y azules se hacen hiper-superficies en dimensión general. Cada punto del diagrama de la derecha representa una esfera S^{d-2} .

pueden cubrirse a la vez por un mismo parche coordenado. A los efectos de definir el espacio H de esta forma se debe tomar uno de los 2, que sin pérdida de generalidad será el definido por la condición $U > 0$.

Para los objetivos de este trabajo serán relevantes 3 parametrizaciones de este espacio: las coordenadas *Globales*, las que denominaremos *E-Globales* y las de *Poincaré*.

Coordenadas Globales

Parametrizaremos este espacio como

$$U = \cosh(\tilde{\rho}); \quad X_i = \sinh(\tilde{\rho}) \Omega_i; \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^d \Omega_i^2 = 1, \quad (2.2.13)$$

donde las coordenadas Ω_i son las coordenadas esféricas de S^d , cumple la condición (2.2.11) y permite expresar la métrica (2.2.12) como

$$ds^2 = d\tilde{\rho}^2 + \sinh^2(\tilde{\rho}) d\Omega_d^2, \quad (2.2.14)$$

donde $d\Omega_d^2$ es la métrica unitaria de S^d y $0 \leq \tilde{\rho} < \infty$. Con estos dominios, se cubre el paraboloide superior¹¹ de la Fig. 2.14. La métrica (2.2.14) muestra que H es topológicamente equivalente a \mathbb{R}^{d+1} , que puede representarse a su vez como una esfera maciza.

Coordenadas E-Globales

La parametrización análoga a las coordenadas globales de AdS para el espacio H se definen como

$$U = \cosh(\rho) \cosh(\tau); \quad X^{d+1} = \cosh(\rho) \sinh(\tau); \quad X^i = \sinh(\rho) \Omega_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^d \Omega_i^2 = 1 \quad (2.2.15)$$

donde las coordenadas Ω_i son las coordenadas esféricas de S^{d-2} . La métrica (2.2.12) en función de estas coordenadas resulta

$$ds^2 = \cosh^2(\rho) d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2(\rho) d\Omega_{d-1}^2, \quad (2.2.16)$$

con $d\Omega_{d-1}^2$ la métrica unitaria de S^{d-1} , $0 \leq \rho < \infty$ y $-\infty < \tau < \infty$. Con esto se cubre el paraboloide superior completo.

¹¹El otro paraboloide puede cubrirse haciendo $U = -\cosh(\tilde{\rho})$.

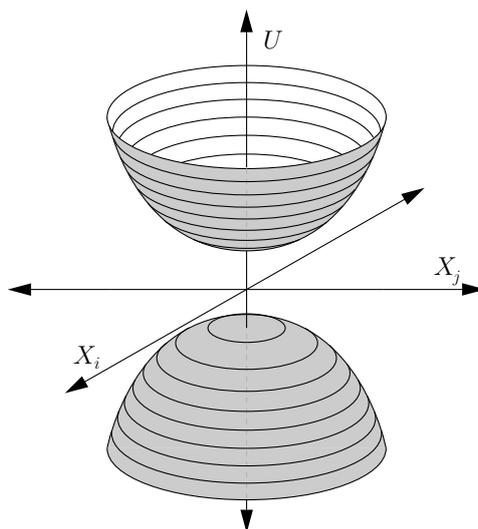


Figura 2.14: Se muestra el espacio H_2 como una superficie embebida en $\mathbb{R}^{2,1}$. Puede elegirse cubrir con un juego de coordenadas o bien el paraboloides superior o inferior, pero no ambos de forma continua.

Se define $r = \sinh(\rho)$ para escribir la métrica (2.2.16) como

$$ds^2 = (1 + r^2) d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad (2.2.17)$$

donde $0 \leq r < \infty$. La métrica (2.2.17) puede obtenerse como la prolongación analítica de (2.2.7) aplicando la transformación $t \rightarrow -i\tau$. La similitud entre estas métricas será muy importante en el Cap. 4 para comparar soluciones de los campos entre teorías gravitatorias de signatura Lorentziana y euclidea.

Coordenadas Poincaré

La parametrización

$$X^d = \frac{\tau}{z}; \quad U - X^{d+1} = \frac{1}{z}; \quad U + X^{d+1} = \frac{\sum_{i=1}^{d-2} x_i^2 + \tau^2 + z^2}{z}; \quad X_i = \frac{x_i}{z}, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, d-1 \quad (2.2.18)$$

cumple el vínculo (2.2.11) y deja la métrica (2.2.12) como

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left(d\tau^2 + dz^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dx_i^2 \right) \quad (2.2.19)$$

donde $-\infty \leq \tau, x^i < \infty$ y $z > 0$. A diferencia de AdS, se puede comprobar que estas coordenadas sí barren todo el hiperboloides superior $U > 0$ y por tanto todo el espacio H.

Estructura Conforme

Para enviar la parametrización (2.2.13) a una región finita, se define $\sinh(\tilde{\rho}) = \tan(\eta)$. Se puede comprobar directamente que la foliación del espacio H_3 por las coordenadas globales corresponden a las tradicionales en una esfera. En E-Globales, las coordenadas angulares son explícitamente iguales a las de las coordenadas Globales con excepción de la variable angular azimutal $\theta \in [0, \pi]$ como se puede ver comparando (2.2.13) y (2.2.15). Las superficies de nivel de las variables E-Globales quedan definidas por las ecuaciones

$$\tan(\eta) \sin(\theta) = \sinh(\rho) = \text{cte} \quad \sin(\eta) \cos(\theta) = \tanh(\tau) = \text{cte} \quad (2.2.20)$$

En la Fig. 2.15 se muestran las superficies (2.2.20) en un espacio H de dimensión arbitraria. Estas superficies son de especial interés en el Capítulo 4, donde se deberá encontrar una forma de describir la frontera de H en función de estas coordenadas para imponer condiciones de contorno no triviales sobre esta.

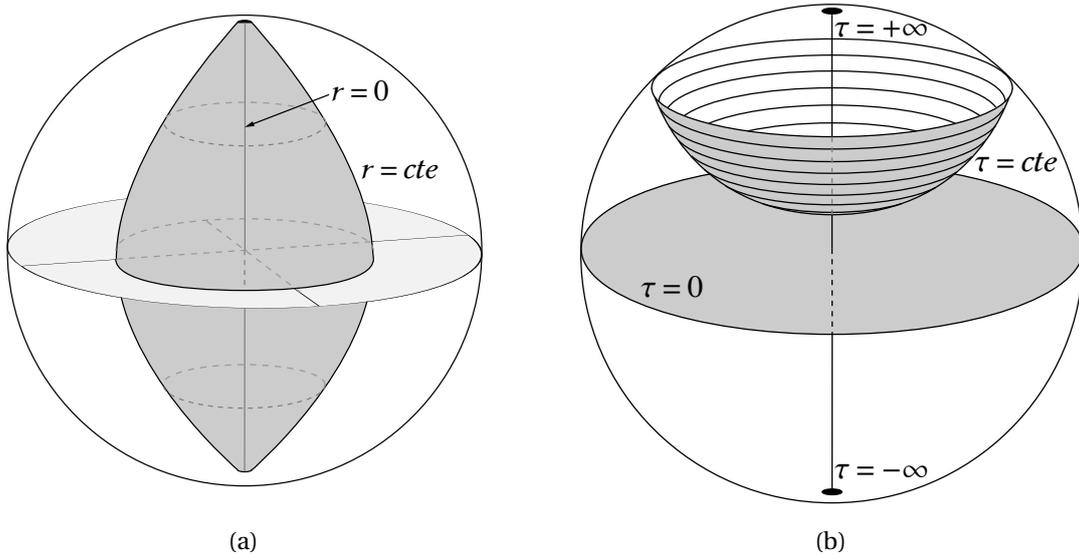


Figura 2.15: Se muestran las curvas de nivel de las coordenadas e-globales ρ (a) y τ (b).

Por último, se discuten las coordenadas Poincaré euclídeas. Partiendo de la parametrización (2.2.18) y comparando con (2.2.13), se obtienen las superficies de nivel para estas coordenadas

$$\cos(\eta)^{-1} + \tan(\eta) \sin(\theta) = z^{-1} = cte \quad \frac{\sin(\eta) \cos(\theta)}{1 - \sin(\eta) \sin(\theta)} = \tau = cte \quad (2.2.21)$$

Ejemplos de las curvas de nivel sobre H_d se muestra en la Fig. 2.16.

2.2.3. Agujeros Negros en AdS y H

Los agujeros negros son soluciones de vacío no triviales a las ecuaciones de Einstein derivadas de (2.2.1). En una primera aproximación, pueden pensarse como el análogo en Relatividad General a la solución exterior de un potencial gravitatorio para un cuerpo masivo. En este sentido, estarán caracterizadas por un grupo reducido de parámetros M, J, Q por ejemplo, que suelen denominarse Masa, Momento Angular y Carga del agujero negro, respectivamente, aunque son en verdad cantidades asociadas a la solución y por ende a todo el espacio-tiempo. Para nuestros objetivos bastará con considerar $J = 0, Q = 0$, i.e. agujeros negros sin momento angular ni carga. El parámetro M determinará entonces todas las propiedades físicas de esta solución: la posición del horizonte de eventos, o radio de Schwartzchild r_S , y la temperatura del mismo, o temperatura de Hawking.

En este trabajo no nos detendremos en estudiar en profundidad la física de estos objetos y sus propiedades, si no que de la misma forma que los espacios AdS y H presentados anteriormente, describiremos los aspectos topológicos y los juegos de coordenadas que necesitaremos para nuestros objetivos.

Hacemos notar también que estos espacios ya no son maximalmente simétricos. Esto puede también entenderse como analogía a las soluciones para un potencial radial, que tiene un origen de coordenadas natural sobre el cuerpo que genera el campo en comparación con r_S , rompiendo la simetría de traslación y dejando solo las rotaciones alrededor de dicho punto como isometrías globales. Aún así, a grandes distancias del cuerpo que genera el campo, el efecto del mismo es despreciable y se puede ver que las isometrías de traslación se recuperan de forma aproximada, i.e. para distancias $r \gg r_S$ el espacio es AdS. A esto se lo suele denominar simetrías asintóticas y están relacionadas, por ejemplo, con los teoremas suaves de Weinberg [46]. En nuestro caso, recuperar las isometrías de AdS será crucial para asociar los bordes conforme de la solución con una teoría de campos conforme en un estado distinto al fundamental. El diccionario holográfico establece que una geometría de un agujero negro es dual a una teoría de campos conforme a temperatura finita: la del agujero negro. Desde el punto de vista de diagramas conformes, esto también implica que los bordes asintóticos de estos espacios tendrán propiedades similares a las de los espacios AdS y H. Por ejemplo, los agujeros negros en AdS tendrán bordes asintóticos tipo tiempo.

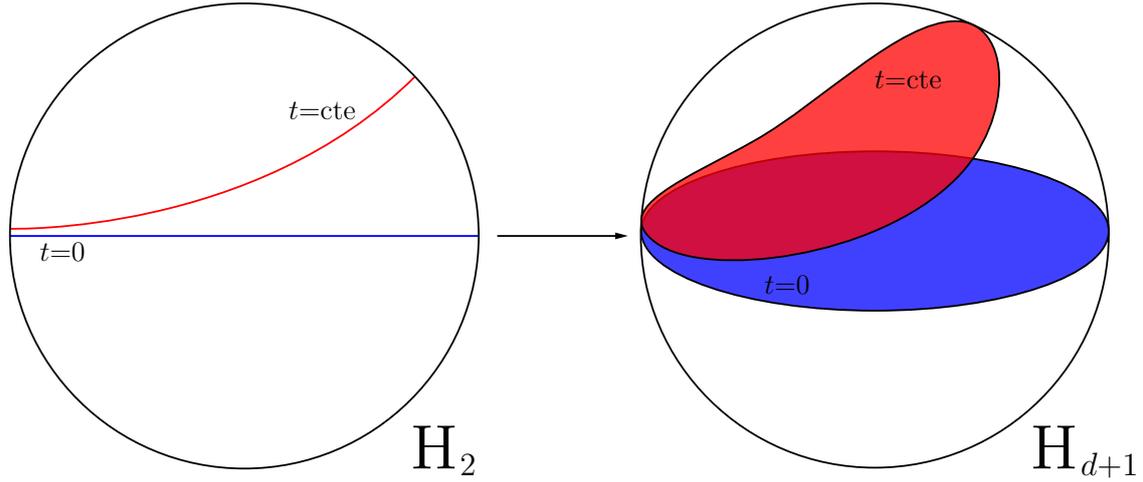


Figura 2.16: Se muestra las curvas de nivel de las coordenadas de Poincaré Euclideas en 2 y más dimensiones.

La métrica exterior de agujeros negros en AdS en dimensión general $d + 1$ son,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2; \quad f(r) = r^2 + 1 - \frac{2M}{r^{d-2}}, \quad (2.2.22)$$

donde M es la masa ADM de la solución, mientras que la métrica en signatura Euclídea se puede obtener como su rotación de Wick,

$$ds^2 = f(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad (2.2.23)$$

donde $d\Omega_{d-1}$ es la métrica estándar sobre la esfera S^{d-1} , $t \in \mathbb{R}$, $r \geq [r_S, \infty)$ $\tau \sim \tau + \beta$, con r_S la solución real más grande de $f(r_S) = 0$ y $\beta = 2\pi f'(r_S)$. El dominio acotado de la coordenada radial surge de que uno solo puede acercarse desde el infinito hasta $g_{tt}(r_S) = g^{rr}(r_S) = f(r_S) = 0$, de modo que la métrica tiene una singularidad en estas coordenadas en r_S . En tensión con la analogía de gravedad Newtoniana, los agujeros negros Lorentzianos presentan como variedad una estructura más rica que se revela al escribir la métrica en otro juego particular de coordenadas, llamado de Kruskal, que revela la variedad completa; no hay nada físico que suceda en r_S y uno puede chequear que el escalar de Ricci en dicho punto es regular. El único punto singular en la variedad es $r = 0$, donde el escalar de Ricci diverge¹² Aún así, es conveniente dar un nombre a r_S , que denominaremos horizonte o radio de Schwarzschild. En tiempo Euclídeo, las coordenadas en (2.2.23) alcanzan para cubrir toda la variedad, pero veremos que la ausencia de singularidades cónicas requiere la periodización del tiempo, propiedad común de los agujeros negros en signatura Euclídea.

Hemos de notar que el término cuadrático r^2 en $f(r)$ de (2.2.22) es en verdad Λr^2 donde hemos puesto $\Lambda = 1$. De aquí se puede comprobar que esta solución tiende a la conocida solución de Schwartzchild para un espacio plano en el límite $\Lambda \rightarrow 0$. Tomando el límite $M \rightarrow 0$ se reobtienen las métricas de AdS y H, como era de esperarse.

Puede también extraerse una interpretación física del otro término no constante de $f(r)$, que en rigor es $\frac{2MG}{c^2 r^{d-2}}$. En el caso $d + 1 = 4$, $\Lambda = 0$ y límite $G \rightarrow 0$, que físicamente corresponde a tomar espacio plano y curvatura débil, el efecto de la gravedad es el de un potencial efectivo sobre la métrica plana (gravedad

¹²Un cálculo directo lleva a

$$R = \frac{(d-1)(d-2)}{r^2} - \frac{(r^{d-1}f(r))''}{r^{d-1}},$$

de donde puede verse que $r = 0$ es una singularidad verdadera del espacio-tiempo. Una singularidad en un escalar de la teoría, por definición invariante frente a un cambio de coordenadas, alcanza para demostrar que un punto es una verdadera singularidad. Sin embargo, esto no prueba que r_S no sea una singularidad, puesto que podrían haber otros escalares que sí tengan singularidades en ese punto aunque R no las tenga. Para demostrar que r_S es un punto regular de la variedad se debe mostrar que existe al menos un juego de coordenadas donde este punto es regular, lo que haremos al introducir las coordenadas de Kruskal más abajo [37].

linearizada) con potencial central $\phi(r) = GM/r$, lo que da un sentido concreto a la analogía explicada arriba [37]¹³. Otro aspecto relevante en lo que sigue de este segundo término es la potencia de r^{d-2} en el denominador, que indica que solo tiene sentido para dimensiones $d + 1 > 3$. Esta restricción en la dimensionalidad del sistema está relacionada con los grados de libertad dinámico que tiene la RG en distintas dimensiones¹⁴. Una forma laboriosa de comprobar esto es expandir cualquier métrica alrededor de un sistema de coordenadas localmente inercial (AdS/Minkowski/dS según el signo de Λ) en un punto, que por el Principio de equivalencia es siempre posible. La información de la métrica real queda entonces contenido en las derivadas de todo orden de la métrica alrededor de ese punto. Se puede comprobar que para $d + 1 > 3$ uno puede siempre anular todas las primeras derivadas de la métrica pero no todas las segundas derivadas, que son los elementos libres del tensor de Riemann de la variedad grados de libertad dinámicos de la teoría a determinar por las ecuaciones de movimiento. En $d + 1 \leq 3$ uno observa en cambio que este proceso sobre-determina el tensor de Riemann y no quedan derivadas segundas por fijar. Una forma menos artesanal de hacer esto es notar que para $d + 1 \leq 3$, las ecuaciones de movimiento de Einstein de vacío son identidades geométricas. Dado que el espacio plano es siempre solución de las ecuaciones de Einstein, la consecuencia de esto es que, salvo por propiedades topológicas globales, como singularidades cónicas o agujeros en la variedad, todas las soluciones a RG en $d + 1 \leq 3$ son el respectivo espacio maximalmente simétrico según el signo de Λ .

La importancia del análisis anterior reside en que en las secciones siguientes trabajaremos sobre “agujeros negros” definidos sobre espacios asintóticamente AdS con $d + 1 = 3$, conocidos como agujeros negros BTZ, por sus descubridores Bañados, Teitelboim y Zanelli [52]. Como se explicó en el párrafo anterior, estos espacios no son exactamente agujeros negros en el sentido explicado más arriba, si no que son lo que se conoce como un “orbifold” de AdS₃, es decir un pliegue o pegado no trivial de una superficie sobre sí misma que le otorga propiedades topológicas globales, aunque no modifica la geometría local, i.e. el escalar de curvatura en todo punto es igual al de AdS₃, salvo en $r = 0$, donde la métrica no es diferenciable. En este caso particular, veremos que la solución BTZ puede pensarse como una identificación particular de la variable angular de AdS₃ en combinación con una doble rotación de Wick. Veremos que la construcción de este agujero negro BTZ requiere específicamente de una constante cosmológica negativa y por tanto no tiene análogos en espacios planos o dS. A pesar de no ser un agujero negro en el sentido estricto, la solución BTZ presenta un diagrama de Penrose similar a las soluciones de agujero negro tradicionales, modos cuasi-normales y normales¹⁵, entre otras propiedades. La ventaja que nos dará trabajar sobre estos espacios es que la baja dimensionalidad del problema permitirá encontrar, por ejemplo, soluciones analíticas para los campos sobre las mismas, de donde pueden obtenerse también expresiones analíticas para su temperatura, modos cuasi-normales, etc. Esto no es posible para agujeros negros en dimensión general, donde se suelen requerir métodos numéricos.

BTZ Lorentziano

La solución BTZ Lorentziano de masa $M = r_S^2$, sin momento angular ni carga se puede escribir como

$$ds^2 = -(r^2 - r_S^2) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 - r_S^2} + r^2 d\varphi^2, \quad (2.2.24)$$

donde $r \in [r_S, \infty)$, $t \in \mathbb{R}$ y $\varphi \sim \varphi + 2\pi$. Sobre esta misma métrica, se propone reescalar las coordenadas como

$$r \rightarrow r_S r, \quad t \rightarrow \frac{t}{r_S}, \quad \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{r_S}, \quad (2.2.25)$$

¹³Si para el mismo límite relajamos $\Lambda = 0$, se puede observar que el espacio AdS es asintóticamente un espacio plano con un potencial cuadrático que mantiene a los objetos dentro del mismo. A esto se refiere la frase “AdS es una caja”.

¹⁴Se está siempre hablando de RG como tiempo-espacios sin Torsión y con la acción de Einstein (2.2.1). Teorías de gravedad con derivadas de orden superior o métricas que admitan torsión modifican el conteo de grados de libertad que está a continuación.

¹⁵Además de modos normales, o modos oscilatorios con frecuencia real, los agujeros negros admiten soluciones de cuadrado integrable con frecuencia compleja y que por tanto no describen una evolución unitaria sobre el parche. La interpretación es que la información de estos modos está cayendo en el agujero negro a medida que estos evolucionan hasta quedar totalmente absorbidos. Acerca de si esta información se pierde para siempre dentro del agujero negro o si existe una descripción unitaria de este proceso es un área muy activa de investigación en la actualidad y una incógnita sobre la que se cree que AdS/CFT puede arrojar nuevas perspectivas [53].

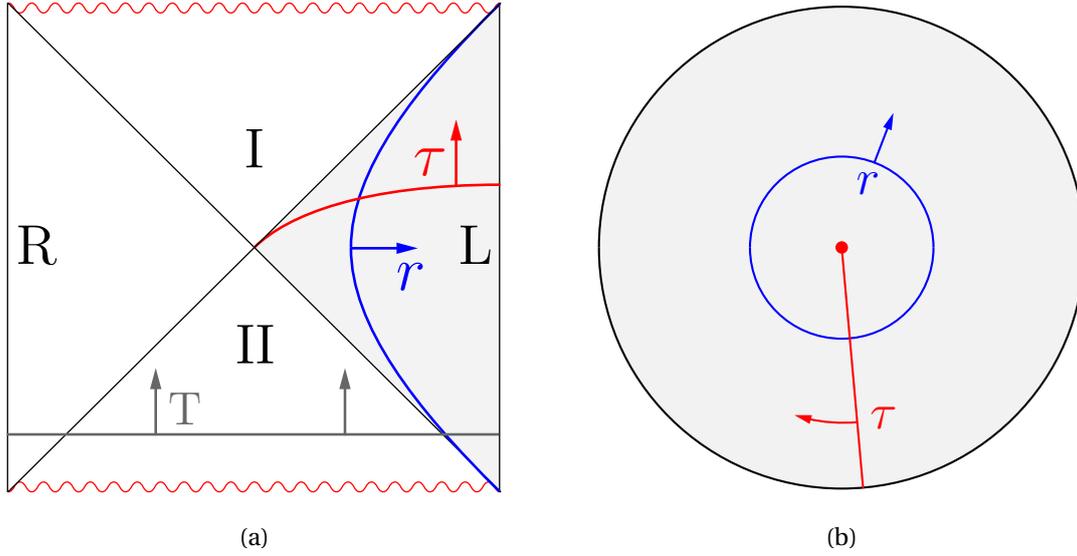


Figura 2.17: Diagramas conformes de las geometrías AdS-BH en signatura Lorentziana y Euclídea respectivamente. En gris, está señalado la región de la variedad cubierta por las coordenadas exteriores, mientras que en rojo y azul se señalan las superficie de nivel en r y t/τ . Para agujeros negros en dimensión general cada punto del dibujo representa un S^{d-1} , mientras que para BTZ cada punto es S^1 . Para la variedad Lorentziana se señala en gris más oscuro la coordenada global T que cubre la variedad completa y está globalmente definida.

para llevar la métrica (2.2.24) a la forma

$$ds^2 = -(r^2 - 1)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 - 1} + r^2 d\varphi^2 \quad (2.2.26)$$

donde ahora $r \in [1, \infty)$ y $\varphi \sim \varphi + 2\pi r_S$. El reescalado consigue entonces absorber la masa del agujero negro BTZ en la periodicidad de la coordenada angular.

Comenzamos la caracterización de este espacio haciendo evidente que es localmente AdS_3 en todo punto, salvo en $r = 0$. Para esto, sobre (2.2.26) haremos una doble rotación de Wick $t \rightarrow i\varphi$ y $\varphi \rightarrow it$, además de un cambio de coordenadas radial $\tilde{r}^2 = r^2 - 1$ quedando así

$$ds^2 = +\tilde{r}^2 d\varphi^2 + \frac{d\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2 + 1} - (\tilde{r}^2 + 1)dt^2 \quad (2.2.27)$$

donde $\tilde{r} > 0$, que es localmente la métrica (2.2.7) con $d + 1 = 3$ con distintos dominios e identificaciones en las otras coordenadas. En el paso anterior hemos realizado dos rotaciones de Wick sobre una métrica, una transformación discreta, lo que formalmente no garantiza que las variedades estén conectadas. De hecho, esta doble rotación borra de la métrica (2.2.26) el interior del agujero negro. Sobre esta objeción, uno puede pensar entonces sobre un espacio de signatura Euclídea, donde la conexión anterior no requiere de ninguna rotación de Wick.

El juego de coordenadas que cubren toda la variedad, llamado de Kruskal, se definen desde las coordenadas exteriores

$$u = \sqrt{\frac{r-1}{r+1}} e^t; \quad v = -\sqrt{\frac{r-1}{r+1}} e^{-t}; \quad \Rightarrow \quad r^2 = \left(\frac{1-uv}{1+uv}\right)^2 \quad (2.2.28)$$

que deja la métrica (2.2.26) como

$$ds^2 = -\frac{4dudv}{(1+uv)^2} + \left(\frac{1-uv}{1+uv}\right)^2 d\varphi^2 = \frac{1}{(1+uv)^2} (-4dudv + (1-uv)^2 d\varphi^2) \quad (2.2.29)$$

Notar que el dominio heredado de las coordenadas exteriores sugiere $u > 0$ y $v < 0$, pero escrita la métrica ya como (2.2.29) se observa que esta restricción es espúrea y el verdadero dominio es $u, v \in \mathbb{R}$ bajo la restricción $(uv)^2 \leq 1$. El único punto singular de (2.2.29) está en $uv = 1$ que se corresponde con el punto $r = 0$.

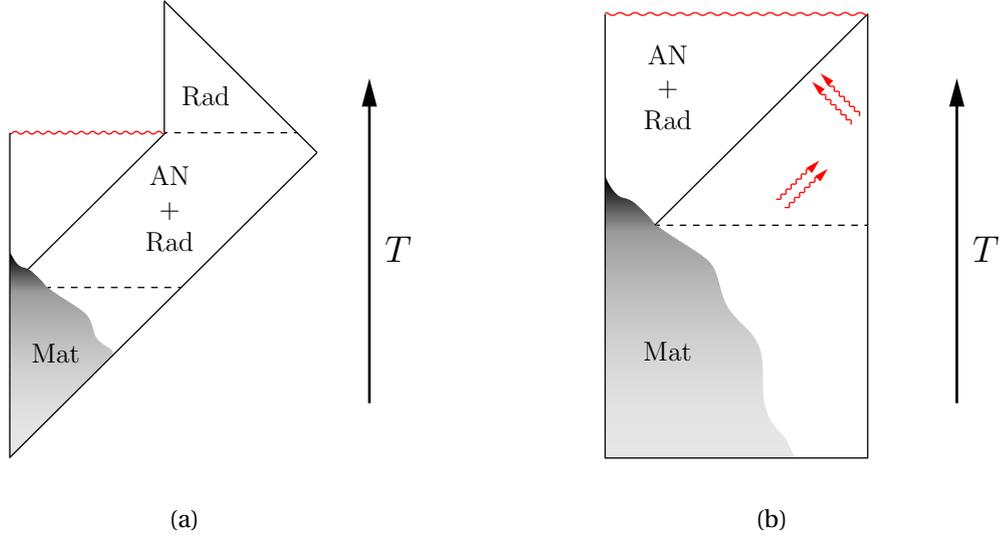


Figura 2.18: Se muestra un diagrama conforme esquemático de un proceso realista de colapso de materia en espacio plano que forma un agujero negro, para finalmente evaporarse. La región gris que se vuelve cada vez más oscura representa una densidad de materia autogravitante en un espacio (Mat) que aumenta progresivamente su densidad hasta formar un agujero negro y radiación remanente del colapso, además de la propia radiación de Hawking proveniente del agujero negro (AN+Rad). Éste emite radiación hasta perder toda su energía y evaporarse, para dejar nuevamente espacio plano. Este último proceso sucede siempre para espacios asintóticamente planos, pero no así en AdS, (b) donde la configuración de agujero negro podría ser estable si este tiene suficiente masa como para que la radiación alcance a volver luego de rebotar en el borde antes de que el mismo complete la evaporación. La dirección T refiere genéricamente a una coordenada de tiempo global que genéricamente no estará globalmente definida.

Definiremos primero coordenadas que nos permitan hacer el diagrama conforme de esta variedad y luego exploraremos la interpretación física de las nuevas regiones a las que accedimos gracias a este cambio de coordenadas.

De forma análoga a como se hizo para AdS, debemos definir coordenadas de dominio finito y sustraer el factor conforme divergente para poder obtener el diagrama conforme. Se definen $u = \tan U$ y $v = \tan V$, con $U, V \in [-\pi/2, \pi/2]$ en la inteligencia de que el vínculo $uv = \tan U \tan V = 1$, que es una hipérbola en términos de u y v , tiene como solución $V = \pi/2 - U$, i.e. una recta en términos de U y V . La métrica en las nuevas coordenadas es

$$ds^2 = \frac{d\tilde{s}^2}{\cos^2 U \cos^2 V} = \frac{-dUdV + \cos^2(U+V)d\varphi^2}{\cos^2 U \cos^2 V}, \quad (2.2.30)$$

donde podemos chequear rápidamente que $\cos^2(U+V) = 0$ solo si $U+V = \pm\pi/2$ o bien $r = 0$, como se espera de la parte angular de la métrica. En particular, se puede ver que para $U = V = 0$ la métrica no colapsa si no que es una esfera S^1 . El radio de esta esfera se recupera volviendo a una variable angular periódica en 2π , de donde se ve que el radio es r_+ . El diagrama conforme en términos de la métrica regular $d\tilde{s}^2$ se puede ver en la Fig. 2.17a. En ella, se denota en color gris la región cubierta por las coordenadas exteriores originales (2.2.26). Sobre esta región se muestran además las superficies de nivel de r y t . Un ejemplo del efecto de considerar BTZ en lugar de un agujero negro, es que el diagrama conforme que se obtiene es sensiblemente distinto al de los ejemplos de mayor dimensión. En la Fig. 2.17a pareciera que a $T = t = 0$ dos fotones pueden entrar desde los bordes de L y R y encontrarse en la singularidad del agujero negro, mientras que en los agujeros negros de mayor dimensión esto es falso [54, 55].

El resto de las regiones son comunes a las soluciones conocidas como agujeros negros “eternos”. Esta denominación hace referencia a la existencia del vector de Killing global ∂_T , que puede encontrarse definiendo coordenadas $T/2 = U - V$ y $R/2 = U + V$ y comprobando que la variable T no aparece en la métrica. Es importante notar que esta es una isometría distinta de la ∂_t en (2.2.26). La relación entre ambos tipos de “tiempo”, uno global en términos de la variedad y uno local pero relacionado con un observador exterior al agujero negro da lugar a lo que se conoce como efecto Unruh, como se observó en la Sec. 2.1.2. Volviendo

sobre la mentada “eternidad” de estos agujeros negros, se sucede que estas soluciones describen agujeros negros que siempre han existido y seguirán existiendo. Una descripción más realista de un agujero negro se da en términos, por ejemplo, del colapso de materia autogravitante que en un dado momento colapsa a un radio menor al horizonte. Un diagrama conforme esquemático para un proceso de ese tipo en un espacio de constante cosmológica negativa se presenta en la Fig. 2.18. Se incluye en la misma otro hecho conocido de la física de agujeros negros que es su evaporación [citar Hawking]. En espacios asintóticamente planos el agujero negro siempre se evaporará completamente, mientras que en espacios AdS depende de que este sea lo suficientemente grande como para que la energía que emite se compense con la que vuelve del borde conforme luego de rebotar sobre el mismo. De esta figura es claro que este espacio será menos simétrico y más difícil de describir, dependiendo de información detallada de la materia que colapsa así como también del proceso de evaporación de los agujeros negros. Una descripción acabada de este último proceso es aún materia de discusión. Las soluciones que usaremos en esta tesis entonces deben entenderse como puntos de partida, si lo que se desea es un estudio acabado de la física de agujeros negros.

Describiremos ahora con más detalle las nuevas regiones a las que se accede en esta última forma de la métrica (2.2.29). La región $u, v > 0$ se denomina comúnmente interior del agujero negro. Esta región contiene dentro de sí la singularidad $uv = 1$, que se representa en la Fig. 2.17a como una línea roja ondulada. Un cálculo directo de una geodésica para un observador que atraviesa el horizonte y para a esta región muestra que en un tiempo propio finito el observador se encuentra con la singularidad a $r = 0$, donde la geodésica termina. A este respecto se menciona también que desde un observador en las coordenadas exteriores (2.2.26), un objeto cayendo al agujero negro tarda infinito tiempo (Δt) en llegar al horizonte. Esto es solo un efecto de las coordenadas exteriores y, como se mencionó antes, un objeto cayendo tarda un tiempo propio finito en llegar desde el borde a la singularidad. El hecho de que toda geodésica tipo tiempo y luz caigan a esta región en tiempo finito es la causa coloquial de que esta solución y en particular esta región del espacio se llamen agujeros negros, en analogía con los cuerpos negros, que absorben en todas las frecuencias. La región $u, v < 0$ contiene la otra singularidad $r = 0$ y no aparece en soluciones de colapso de materia. Por oposición a la región anterior que comúnmente se denomina agujero negro, en algunas bibliografías se la llama agujero blanco.

La región $u < 0$ y $v > 0$ tampoco aparece en las soluciones de colapso y es también consecuencia de las isometrías impuestas a la solución. Es una réplica del espacio $u > 0$ y $v < 0$ descrito por las métrica original (2.2.26). Habiendo notado que en $u = v = 0$ la métrica no colapsa, puede verse que este espacio, que llamamos L, está conectado con el original, R, a través del agujero de gusano. Estas regiones sí serán de gran interés para nuestros objetivos merced de su interpretación física en los trabajos de Israel en los '70 [36], que luego inspiraron resultados dentro del diccionario holográfico [56]. Como se explicó en la Sec. 2.1.2, la región reflejada L y los grados de libertad que en ella viven se asocian a los grados de libertad duplicados en el formalismo TFD. En este marco, cuando trabajemos con caminos de Schwinger-Keldysh para describir una CFT a temperatura finita que puedan interpretarse como un proceso en TFD, podremos asociarles una descripción dual en términos de las regiones L y R. Se profundizará sobre el diccionario preciso en los capítulos subsiguientes.

Queda aún presentar un último parche de coordenadas sobre esta geometría que será relevante. Éste se sigue de tomar la métrica (2.2.26) y definir una coordenada $s^2 = r^2 - 1$, de forma de obtener

$$ds^2 = -s^2 dt^2 + \frac{ds^2}{s^2 + 1} + (s^2 + 1)d\varphi^2. \quad (2.2.31)$$

La novedad en este sistema de coordenadas es que sabiendo que el punto $u = v = 0$ no es un punto singular de la métrica, podemos extender el dominio $s \in (-\infty, \infty)$, aún si en el punto $s = 0$ ni la métrica ni su inversa están bien definidas. Con el dominio extendido, (2.2.31) cubre ambos lados L y R y cuenta con el vector de Killing original ∂_t de la métrica (2.2.26). El punto delicado sobre este vector es cómo se extiende desde una región a la otra. La forma correcta dentro del marco de RG es el de describir el vector ∂_t en términos de las coordenadas $\{u, v\}$, que están definidas globalmente. En términos de estas se puede pasar de R a L y comprobar que la buena extensión de este vector hace que los tiempos en ambas copias corran en sentido opuesto, como se muestra en la Fig. 2.19. En la misma figura, pueden verse las curvas de nivel de las coordenadas analíticamente extendidas a signatura Euclídea. Una segunda forma más directa de comprobar esto es entendiendo a la coordenada s en (2.2.31) como una variable compleja y demandando analiticidad al pasar por $u = 0$. Esto es poco canónico dentro de RG, puesto que la analiticidad de las métricas no es un

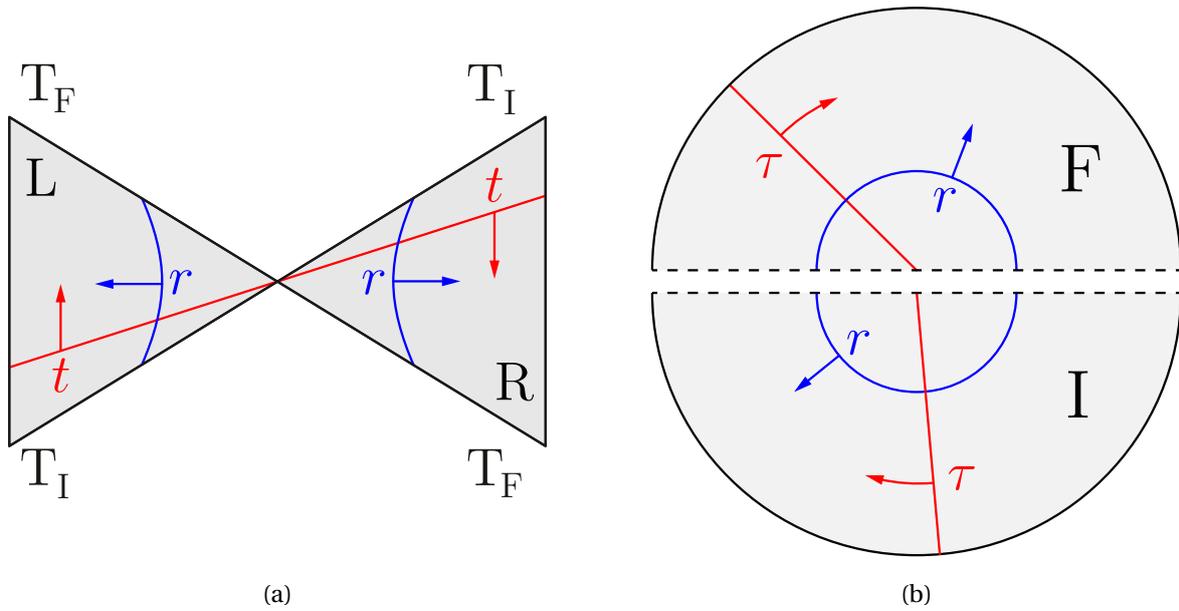


Figura 2.19: (a) Parches estáticos de AdS-BH con superficies de nivel de t, r . El tiempo corre hacia arriba en L y hacia abajo en R. La variable angular φ en (2.2.24) se omite en el dibujo. (b) AdS-BH euclidiano: el tiempo se vuelve una variable angular, i.e. $\tau \sim \tau + 2\pi$. Las dos piezas son idénticas, con extensión temporal $\Delta\tau = \beta/2$.

requisito general que se exija (ni que cumpla en general) una métrica para que se considere una solución física [24]. El contraejemplo inmediato es el de un agujero negro rotante, donde merced de los términos cruzados en la métrica no hay una extensión obvia a valores complejos de sus variables. Esto entra en tensión en el contexto de AdS/CFT con la importancia que sí tienen las propiedades analíticas de muchos objetos en teoría de campos. El autor de esta tesis no tiene aún herramientas para responder a esta cuestión de forma completamente satisfactoria.

BTZ Euclídeo

La geometría que describen los agujeros negros Euclídeos es considerablemente más sencilla que su contraparte Lorentziana. Se puede definir la variedad como la descrita por la métrica

$$ds^2 = (r^2 - r_S^2) d\tau^2 + \frac{dr^2}{r^2 - r_S^2} + r^2 d\varphi^2, \quad (2.2.32)$$

que se puede pensar como una rotación de Wick de (2.2.24). Aquí nuevamente $r \in [r_S, \infty)$ y $\varphi \sim \varphi + 2\pi$, pero τ requiere más atención y su dominio lo definiremos en un momento. Usando el mismo reescalo que en la sección anterior (2.2.25), se lleva (2.2.32) a la forma

$$ds^2 = (r^2 - 1) d\tau^2 + \frac{dr^2}{r^2 - 1} + r^2 d\varphi^2 \quad (2.2.33)$$

donde ahora $r \in [1, \infty)$ y $\varphi \sim \varphi + 2\pi r_S$. Las restricciones al dominio de τ pueden verse a φ fijo y $s^2 = r^2 - 1 \sim 0$, donde la métrica toma la forma

$$ds^2 \sim s^2 d\tau^2 + ds^2, \quad (2.2.34)$$

que es topológicamente un disco¹⁶. Esto demuestra que para evitar singularidades cónicas, se debe imponer $\tau \sim \tau + 2\pi$. Este proceso, en principio matemático tiene una interpretación interesante en términos de mecánica estadística. Supongamos que se busca describir una solución de agujero negro y, en términos de su masa, establecer la temperatura a la cual está en equilibrio térmico con su entorno. La forma estándar de

¹⁶Notar que el pasaje a la coordenada s es necesario para establecer la comparación con el disco en una coordenada radial $s \geq 0$ y conseguir que la parte radial se mantenga finita en una expansión $r \sim 1$.

obtener cantidades termodinámicas de un sistema en equilibrio térmico es el hacer una rotación de Wick en la coordenada temporal y hacer periódica la solución en esta coordenada. El resultado describe la teoría a una temperatura $T = \beta^{-1}$, donde β es la periodicidad impuesta a la variable temporal Euclídea. Lo que nos dice la condición que encontramos con el argumento anterior es que la única temperatura a la que un agujero negro está en equilibrio térmico es a $T = \frac{1}{2\pi}$ en las coordenadas reescaladas según (2.2.25), o $T = \frac{r_s}{2\pi} \sim \sqrt{M}$ en las coordenadas originales. Soluciones con déficit angular en τ son también permitidas, pero la singularidad cónica indica que el sistema no está en equilibrio y relajará cediendo o absorbiendo calor del baño hasta llegar a una temperatura acorde con su masa.

Como se mencionó antes, una rotación de Wick sobre una métrica tiene efectos no triviales sobre la topología que la misma describe. En este caso, vemos que el punto $r = 1$ es simplemente el origen de un disco. La métrica nuevamente no colapsa si no que describe un S^1 , pero ya no conecta dos regiones distintas y la métrica (2.2.33) alcanza a cubrir toda la variedad, como se muestra en la Fig. 2.17b.

Esto completa la presentación y estudio de los espacios y juegos de coordenadas que necesitaremos para los objetivos de esta tesis. En el siguiente capítulo se utilizará lo presentado sobre campos y gravedad para introducir las herramientas necesarias de AdS/CFT.

Capítulo 3

AdS/CFT

En este capítulo se describen aspectos generales de la dualidad AdS/CFT y a lo largo de su desarrollo se hará énfasis en los aspectos de la misma relevantes para esta tesis. De forma que abarque los contenidos de esta sección, diremos que la dualidad AdS/CFT prescribe que ciertas teorías de campos con simetría conforme (CFT) en d dimensiones admiten una descripción completa en términos de ciertas teorías de cuerdas definidas sobre un espacio AdS_{d+1} , con una dimensión extra. Esto le vale el nombre alternativo de dualidad holográfica. En particular, la dualidad relaciona los regímenes de acoplamiento fuerte y débil de una y otra teoría, lo que se conoce como dualidad S en el lenguaje de teoría de cuerdas.

Se comenzará con una breve revisión del primer y más famoso ejemplo de la dualidad, propuesto originalmente por Maldacena en [4]. Para esto describiremos algunas herramientas preliminares como la expansión en N grande para teorías de campos y algunas herramientas necesarias de teoría de cuerdas para finalmente enunciar la dualidad en un enfoque que daremos en llamar “de arriba hacia abajo”. En este tipo de enfoque se busca establecer diccionarios precisos entre dos teorías y sus observables en aras de hacer holografía de precisión, chequeando resultados no triviales a ambos lados de la dualidad, o bien usando la dualidad para hacer predicciones precisas sobre una teoría particular haciendo cuentas en la dual [7, 8]. Este resumen tiene como objetivo dar un marco histórico para la dualidad y no será la forma en que usaremos la dualidad en esta tesis.

Luego, presentaremos un segundo enfoque de la dualidad que llamaremos “de abajo hacia arriba”. Esta forma de presentar la dualidad hace hincapié en aspectos generales de las teorías duales y prescribe diccionarios menos precisos entre observables genéricos en una y otra lado de la correspondencia. Lo que se consigue es un marco teórico más general donde uno puede probar modelos de juguete con características cualitativas a veces difíciles de describir con un modelo preciso [45, 11, 12, 57]. Desde esta perspectiva es que abordaremos la dualidad en esta tesis. Comprobaremos que estableciendo ciertas reglas elementales, naturalmente motivadas y consistentes con los ejemplos “arriba hacia abajo” conocidos, se puede obtener un diccionario holográfico con el cual trabajar. Inmediatamente presentaremos la prescripción GKPW, o anstaz de Witten, para el cálculo de funciones de correlación Euclídeas en AdS/CFT. Esta prescripción, que establece una relación precisa entre las funciones de partición de ambas teorías (proveyendo un mapa cuantitativo) y sus generalizaciones son el corazón de este trabajo. Mostraremos cómo esta prescripción permite el cálculo de funciones de dos y más puntos en una CFT en una primera aproximación mediante una expansión similar a la tradicional en campos mediante lo que se conoce como diagramas de Witten. Como segundo ejemplo de un mapa se presenta el diccionario BDHM que realiza un mapa equivalente a GKPW pero a nivel de operadores, lo que será conveniente para nuestros fines en las aplicaciones. Como último ejemplo de este tipo de abordaje de la dualidad mencionaremos la fórmula de Ryu-Takayanagi (RT) para el cálculo de entropías de entrelazamiento.

Más adelante introduciremos la prescripción de Skenderis y van Rees (SvR) para calcular funciones de correlación a tiempo real. Comenzaremos mostrando que una generalización inocente de la prescripción GKPW presenta ambigüedades que son además esperables desde un punto de vista del principio holográfico y físico en general. La prescripción SvR resolverá estas ambigüedades de forma precisa y sólo recurriendo a una extensión natural a tiempo complejo de la prescripción a GKPW en términos de caminos de SK y variedades de signatura cambiante. En su aproximación semiclásica, se deben obtener las soluciones clásicas a campos definidas sobre dichas variedades, pegando regiones de signatura Euclídea y Lorentziana. Se estu-

diarán las condiciones de pegado en general tanto para las geometrías en sí mismas como para los campos que viven sobre ellas.

Finalmente, prescribiremos la forma de una familia de estados excitados en el marco de la dualidad, cuyo es el eje central de esta tesis. Enmarcaremos su definición dentro de la prescripción de SvR, donde aparecen de forma natural, pero demostraremos que su definición es independiente de la misma. Mostraremos que por construcción los mismos siempre admiten una geometría dual asociada y veremos que en el límite semiclásico de la teoría gravitatoria los estados describen excitaciones coherentes del espacio de Hilbert. Mostraremos que esta propiedad es un efecto del límite $N \rightarrow \infty$ y que no se mantiene frente a correcciones en $1/N$, pero que desde una aproximación perturbativa se pueden calcular las correcciones orden a orden.

3.1. Preliminares

En esta primera sección mencionaremos los aspectos que consideramos vinculantes con una comprensión mínima de las reglas básicas de la dualidad. Veremos, por un lado, lo que se conoce como expansión a N grande de una teoría de campos y cómo este permite reorganizar la expansión perturbativa de ciertas teorías en términos de una expansión topológica y por otro algunas herramientas básicas de teoría de cuerdas y branas, las acciones que describen su dinámica y sus límites de bajas energías.

3.1.1. Límite de N grande en teorías de campos

El límite de N grande, o límite planar pensando ya en su interpretación topológica, de una teoría de campos surge como una idea de 'tHooft de tomar como un parámetro extra de la teoría el parámetro adimensional N que define el grupo de simetrías de la misma. En un sentido físico, el límite de N grande se corresponde con un número creciente de campos de la teoría y por tanto del número de grados de libertad en cada punto del espacio. En una teoría conforme, el número de grados de libertad se suele cuantificar a través de la carga central de la teoría c . En este lenguaje, al límite de N grande también se lo suele denominar el límite de c grande. Se mostrará que tomando el límite $N \rightarrow \infty$ y ordenando los observables de la teoría en una expansión $1/N$, estos

Partamos de una teoría de Yang Mills con grupo de simetría $U(N)$, cuyo lagrangiano se escribe

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g_{YM}^2} \text{Tr}\{F^2\}; \quad \text{Tr}\{F^2\} = \text{Tr}\{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\} = F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu}; \quad (3.1.1)$$

donde los índices μ, ν barren las d dimensiones del espacio-tiempo mientras que A barre las N^2 dimensiones del grupo de gauge $U(N)$. Para ser más precisos, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, $A_\mu = A_\mu^A T^A$ son los campos fundamentales tomados en la representación adjunta y donde las matrices T^A son los generadores del grupo $U(N)$ tomadas en la representación fundamental. En una abordaje clásico de teoría de campos, uno pensaría en organizar una expansión perturbativa alrededor del parámetro adimensional g_{YM}^2 , donde cada propagador contribuye como g_{YM}^2 y cada interacción (cúbica o cuártica) contribuye como g_{YM}^{-2} . El carácter matricial de los campos $A_\mu = (A_\mu)^i_j$ motiva una reescritura de los diagramas tradicionales de Feynmann (de una sola línea) en términos de una notación de doble línea, como se muestra en la Fig. 3.1a. La operación traza en esta representación suma sobre los índices i, j , que corren también hasta N . El punto central de esta sección reside en que cada línea cerrada en un diagrama es una contracción sobre el índice de gauge, que aporta un factor N al contéo de potencias. De esta forma, un diagrama general D , sin patas externas, con L líneas cerradas, V vértices y P propagadores será proporcional a

$$D \sim N^L g_{YM}^{-2V} g_{YM}^{2P} = N^{L-P+V} \left(\frac{g_{YM}^2}{N} \right)^{P-V} = N^{2-2g} \lambda^{P-V} \quad (3.1.2)$$

donde hemos definido $\lambda = g_{YM}^2/N$, llamado parámetro de 't Hooft, motivados por el teorema de Euler [41] para variedades sin punturas,

$$L - P + V = 2 - 2g \quad (3.1.3)$$

donde g es el género del diagrama, es decir, su cantidad de agujeros. El género de un diagrama de doble línea es el género de la superficie de Riemann de menor género sobre la cual puede dibujarse el diagrama sin que se crucen líneas que no están contraídas. Ejemplos de este procedimiento pueden verse en la Fig. 3.1b. Concretamente, lo que acabamos de demostrar es que en el límite de $N \rightarrow \infty$ y λ finito hay un límite físicamente interesante de la teoría donde podemos expandir la función de partición de la teoría como

$$\ln Z_{YM} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} f_g(\lambda), \quad (3.1.4)$$

donde $f_g(\lambda)$ es una función de λ que engloba la suma de todos los diagramas de género g . En el límite $N \rightarrow \infty$ entonces vemos que dominan los diagramas de género $g = 0$ empezando por diagramas a orden $N^{2-2g} = N^2$. Veremos en la siguiente sección que esta expansión topológica también sucede en teoría de cuerdas. De forma intuitiva, a género g fijo pero V y P crecientes, el diagrama a doble línea se parece más y más a la superficie suave bidimensional sobre la que se lo dibuja.

La segunda consecuencia de una expansión en N grande será lo que se denomina comúnmente factorización de N grande, que refiere a la factorización de las funciones de n -puntos de operadores invariantes frente al grupo de simetrías asociado. En nuestro caso, veremos que los operadores \mathcal{O}_i invariantes de gauge de $U(N)$ en nuestra teoría de YM se factorizan de la forma

$$\left\langle \prod_i \mathcal{O}_i \right\rangle = \prod_i \langle \mathcal{O}_i \rangle + \text{correcciones } \frac{1}{N}. \quad (3.1.5)$$

Para nuestra teoría, el operador invariante de gauge más sencillo es la traza en densidad lagrangiana, i.e.

$$\mathcal{O}(x) \equiv \frac{1}{N} \text{Tr}\{F^2\} \quad (3.1.6)$$

donde se elige la normalización para conseguir que a primer orden en género, el valor de expectación sea de orden N^0 , i.e.

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle \sim N^{2-2g} \times \frac{1}{N} \times g_{YM}^2 \sim N^{-2g}. \quad (3.1.7)$$

El argumento central aquí es notar que agregar patas externas al conteo anterior agrega factores $g_{YM}^2 = \lambda/N$ por cada pata externa, sumado a los factores extra $1/N$ de la normalización del operador. Para una función de 2 puntos de estos operadores conectada será

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y) \rangle_c = \langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y) \rangle - \langle \mathcal{O}(x) \rangle \langle \mathcal{O}(y) \rangle \sim N^{2-2g} \times \left(\frac{1}{N}\right)^2 \times g_{YM}^4 \sim N^{-2g-2}, \quad (3.1.8)$$

de donde queda demostrado que

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y) \rangle = N^{-4g} \langle \mathcal{O}(x) \rangle \langle \mathcal{O}(y) \rangle + N^{-2g} \times \text{correcciones } \frac{1}{N^2}. \quad (3.1.9)$$

Este tipo de argumentos pueden seguirse para funciones de N puntos y demostrar la factorización para el operador (3.1.6). Se pueden obtener resultados similares para todos los operadores invariantes de gauge de traza única de la teoría.

Cabe destacar que esta factorización en N grande es un efecto independiente del efecto topológico anterior. Para esto, hemos mantenido el número g en el conteo de potencias anteriores y de allí se puede ver que los términos subdominantes en $1/N$ de la función de 2 puntos en (3.1.9) son también planares (correspondientes a $g = 0$) en el sentido definido más arriba.

El operador (3.1.6) en particular está compuesto de una sola traza. Uno podría definir operadores locales e invariantes de gauge también en términos de operadores multi-traza. Siguiendo argumentos análogos a los anteriores, se puede ver que la factorización en N grande separa los valores de expectación estos operadores multi-traza en términos de los de una sola traza de los que están compuestos. Para nuestros objetivos entonces basta con tomar operadores del tipo (3.1.6).

Otro comentario interesante es que el límite en que las correlaciones de un sistema se factorizan se suele denominar límite clásico. Esta nomenclatura en este caso puede llevar a confusiones, puesto que el primer orden de la expansión topológica es aún una suma infinita de diagramas a todo orden en λ , incluyendo loops.

Si bien hemos estudiado este efecto en una teoría de Yang-Mills, el límite de N grande en teorías de campos está presente también en otros modelos. Para un estudio más completo de este fenómeno se refiere al lector a [58] y también a [59].

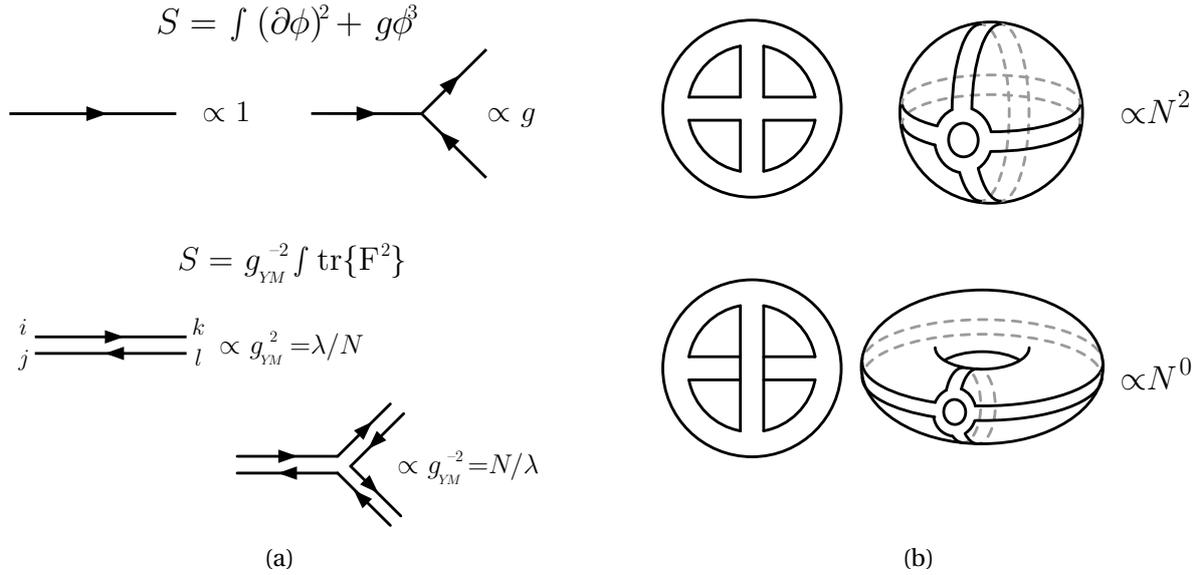


Figura 3.1: a) Ejemplos de diagramas de Feynman en una teoría escalar $g\phi^3$ en simple línea y en la notación de doble línea la teoría de YM con grupo de simetría $U(N)$ con sus respectivos pesos en la constante de acoplamiento. b) Ejemplos de diagramas planares y no planares y su representación embebida en superficies de Riemann.

3.1.2. Aspectos relevantes de cuerdas y branas

En esta sección resumiremos propiedades de la teoría de cuerdas que serán relevantes para la presentación de la dualidad en la próxima sección. La teoría de cuerdas surge en los años 60 como una alternativa a las teorías de campos para explicar la fenomenología de la física hadrónica obtenida por los aceleradores de la época. En particular y como ejemplo canónico, la teoría de cuerdas predice una torre infinita de partículas de masa $M^2 \propto J$ o trayectoria de Regge, en coincidencia con lo que sugerían las observaciones de ese momento. Su desarrollo en este sentido se vio opacado por el éxito de QCD para explicar la teoría de hadrones a altas energías. Sin embargo, a bajas energías en QCD, la descripción en términos de quarks es incorrecta debido al fenómeno de libertad asintótica. En esta región, llamada confinante, la física hadrónica admite una descripción de la fenomenología en términos de cuerdas. En esta interpretación los extremos (libres) de cuerdas abiertas representan los quarks y anti-quarks, unidos por un tubo de flujo de color.

En su segundo auge con el descubrimiento de las branas, en los 80 y 90, la teoría de cuerdas se propuso ya como una candidata a la teoría del todo, integrando las fuerzas fundamentales de la naturaleza. Apoyada principalmente por dar una descripción consistente de una teoría cuántica de la gravedad, en este contexto se propone que los objetos fundamentales de la naturaleza son cuerdas, abiertas o cerradas, cuyas oscilaciones se perciben en nuestro espacio-tiempo $3 + 1$ dimensional como las partículas elementales. En este segundo auge, la teoría de cuerdas tampoco consigue obtener respaldo experimental, aunque en este sentido la complejidad puede atribuirse al incontable número de configuraciones de la teoría de cuerdas que lleva a una teoría efectiva en $3 + 1$ dimensiones. Si bien aún no se tiene una configuración de teoría de cuerdas consistente con el modelo estándar, sí se tienen numerosas configuraciones que reproducen distintas características distintivas del mismo. La demostración de que no existe tal configuración parece igual de elusiva que su búsqueda activa. Aún así, el estudio de teoría de cuerdas y sus contribuciones a la comprensión de aspectos cuánticos de la gravedad y de agujeros negros en particular le dan un papel protagónico aún hoy como área de investigación. Más aún, la teoría de cuerdas presenta varios aspectos interesantes que la hacen deseable como teoría del todo. Ponemos como ejemplos el hecho de que la teoría prediga (por consistencia al cuantizar) el número de dimensiones que tiene el espacio-tiempo y el hecho de que sea una teoría libre de divergencias UV por construcción.

Acción de la teoría de cuerdas

La acción que domina la dinámica de una cuerda en el espacio puede motivarse a partir de la que domina la de una partícula puntual de masa m ,

$$S_{PP} = m \int d\tau \sqrt{G_{\mu\nu} \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu} = m \int \sqrt{dX^\mu dX_\mu} = m \int ds, \quad (3.1.10)$$

donde $X^\mu = X^\mu(\tau)$ son las coordenadas del espacio-tiempo donde vive la partícula, $G_{\mu\nu}$ la métrica del espacio y τ es el tiempo propio de la partícula¹. En su recorrido, la partícula, un objeto 0-dimensional, va trazando una curva, objeto 1-dimensional, o línea de mundo. La acción por su parte se interpreta como la funcional de la longitud propia de su línea de mundo, como se muestra en la segunda y tercera expresión, donde se definió $ds^2 \equiv \sqrt{dX^\mu dX_\mu}$. La última reescritura de la acción, independiente de τ , hace evidente que (3.1.10) es invariante ante reparametrizaciones de $\tau' = \tau'(\tau)$.

La acción de una cuerda, objeto 1-dimensional, estará dominada luego por su funcional de área que lleva el nombre de acción de Nambu-Goto

$$S_{NG} = T \int d\tau d\sigma \sqrt{\det\{G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu\}} = T \int d^2\sigma \sqrt{\det g_{\alpha\beta}} = T \int dA \quad (3.1.11)$$

donde τ y σ parametrizan la hoja de mundo de la cuerda y α y β suman sobre estas variables. Por su parte, hemos definido en la segunda igualdad la matriz $g_{\alpha\beta} = G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu$ que es la métrica inducida sobre la hoja de mundo de la cuerda por la métrica del espacio ambiente $G_{\mu\nu}$. Por último, las correctas unidades de la acción demandan la inclusión de un parámetro T que se interpreta como la tensión de la cuerda (su energía por unidad de longitud, es decir energía² en unidades naturales) y que suele reescribirse por motivos históricos también como $T^{-1} = 2\pi\alpha'$, siendo α' la pendiente de Regge.

La fenomenología que de estas acciones se obtiene y su derivación excede los objetivos de este trabajo. Mencionaremos entonces algunos resultados importantes que darán herramientas básicas para la próxima sección.

En primer lugar mencionaremos que hay dos tipos de cuerdas: cerradas y abiertas. En este formalismo la distinción surge al imponer condiciones de contorno sobre la acción de Nambu-Goto en la coordenada σ tal que (3.1.11) determine un problema variacional bien planteado. A tal efecto existen 3 posibilidades: condiciones periódicas, de Dirichlet y de Neumann. La primera corresponde naturalmente a cuerdas cerradas mientras que las otras definen cuerdas abiertas. Las condiciones de Neumann definen cuerdas abiertas que viajan libremente por el espacio ambiente, pero las condiciones de Dirichlet sugieren que esas cuerdas abiertas se encuentran fijas a una punto o región del espacio. En una teoría fundamental, la existencia de puntos privilegiados en el espacio-tiempo sin dinámica romperían la invarianza de Lorentz y serían por tanto inaceptables. El intento de dar sentido a una teoría de cuerdas abiertas dará lugar al descubrimiento de objetos solitónicos, llamados D-branas, que serán centrales en la presentación de la dualidad y sobre los que ampliaremos más adelante.

Se debe mencionar que la acción (3.1.11) no es una acción particularmente sencilla de manipular debido a la raíz cuadrada en el integrando. A nivel clásico, esta dificultad puede sortearse agregando un campo auxiliar $h_{\alpha\beta}$ y utilizando la acción de Poliakov

$$S_P = \frac{T}{2} \int d\sigma^2 \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu. \quad (3.1.12)$$

A esta acción se la conoce en la literatura como modelo sigma no lineal y es cuadrática en los campos X^μ , aunque no libre debido a que debe satisfacer los vínculos que surgen de la ecuación de movimiento de $h_{\alpha\beta}$. Es directo ver que resolviendo las ecuaciones de movimiento para $h_{\alpha\beta}$ y reemplazando en (3.1.12) se obtiene la acción (3.1.11) a menos de un factor conforme. La invarianza clásica de la acción de Poliakov frente a transformaciones de Weyl remueve este factor y las vuelve idéntico a nivel clásico. Es razonable

¹Otro aspecto interesante a comentar es la inclusión de la masa de la partícula adelante de la acción. Es inmediato ver que la masa de una partícula libre, factor común de la acción, no afectará su dinámica. Sin embargo, la posible adición de términos de interacción y, más importante aún, las correctas unidades de la acción hace importante la presencia de m como prefactor. En este segundo sentido cabe notar que $\hbar = c = 1$, de forma que S es adimensional, m tiene unidades de energía y s unidades inversas a las de energía.

entonces pensar a $h_{\alpha\beta}$ como haber dado dinámica a la métrica inducida sobre la hoja de mundo de la cuerda. A pesar de ser equivalentes a nivel clásico, no es claro que estas acciones lo sean a nivel cuántico. Aún así, una cuantización directa de la acción (3.1.11) es inabordable, como se mencionó, debido a la raíz cuadrada del integrando. Luego, la descripción cuántica de las cuerdas se realizará siempre sobre la acción de Polyakov (3.1.12). Un comentario más: la mayor parte de la fenomenología que enunciamos en esta tesis se conoce por soluciones expandidas sobre un espacio ambiente plano.

Volviendo sobre el campo auxiliar $h_{\alpha\beta}$, ya mencionamos que la acción de Polyakov es invariante frente a transformaciones conformes de $h_{\alpha\beta}$. El grupo que genera estas transformaciones en general es el grupo conforme $SO(d, 2)$ para una teoría Lorentziana en d dimensiones. En 2 dimensiones, como es nuestro caso, se puede comprobar que hay infinitas transformaciones infinitesimales² que dejan invariante la métrica, conocido como el grupo de Virasoro. Como corolario de esto se puede ver que toda métrica bidimensional es una transformación conforme del plano, mostrando que tenemos libertad para elegir un gauge en donde $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, simplificando mucho el análisis del sistema. En este gauge, aún queda por fijar la invarianza frente a factores conformes, que termina por imponer a nivel clásico que $T_{\alpha\beta} = 0$, que se conoce como condición de Virasoro. En particular, la traza del tensor de energía momento es nulo a nivel clásico, $h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0$. A nivel cuántico, se puede mostrar que el valor de expectación del tensor energía momento toma un valor no nulo, lo que rompe la invarianza de escala, con un coeficiente dependiente de la dimensión del espacio ambiente y que puede hacerse nulo fijando $d = 26$ para la teoría de cuerdas bosónica y $d = 10$ para la teoría de supercuerdas, que mencionaremos en un momento. Dado que la invarianza conforme es una invarianza de gauge de nuestra teoría, no es una simetría que sea aceptable romper³, ver discusión en Sec. 2.1.3. El objetivo final de este análisis sobre las simetrías de la teoría es el siguiente: la cuantización consistente de la teoría de cuerdas hace una predicción sobre dimensión del espacio-tiempo, mientras que en teorías de campos este parámetro puede pensarse libre.

Acerca de las soluciones clásicas y su cuantización sobre espacios planos mencionaremos algunos resultados. Las soluciones de cuerdas cerradas admiten una expansión en modos que viajan a izquierda y derecha completamente desacoplados entre ellos, mientras que en el caso de la abiertas solo un juego de modos es linealmente independiente. En la cuantización canónica de la teoría, cada modo (de la serie infinita de modos) está asociado a un operador escalera cuya excitación sobre el vacío crea una partícula distinta. Así, la teoría de cuerdas también predice una torre infinita de partículas de masa creciente⁴. Para sanear esta predicción contradictoria con los experimentos actuales, la teoría de cuerdas propone que la energía necesaria para ver esta torre infinita de partículas es aún inalcanzable en los aceleradores modernos. Más precisamente, se supone que el parámetro $T \propto \alpha'^{-1} \rightarrow \infty$, lo que equivale a pensar en cuerdas muy pequeñas. El espectro de masas predicho por las cuerdas crece de forma $M^2 \sim \alpha'^{-1} \rightarrow \infty$, de modo que a bajas energías, comparadas con α'^{-1} , solo nos es accesible el espectro no masivo y por ende un número finito de partículas. El espectro no masivo de las cuerdas cerradas contiene al gravitón y a una teoría de gravedad. El espectro no masivo de cuerdas abiertas por su parte contiene el espectro de una teoría de Yang-Mills.

La expresión (3.1.11) y (3.1.12) tal como las presentamos admiten su tratamiento en espacio-tiempos dinámicos. Sin embargo, las soluciones a las ecuaciones de movimiento fuera del espacio plano no es posible en general. Considerar topologías no triviales sugiere nuevas generalizaciones de la acción, como el término $\int \sqrt{g} \Phi R^{(2)}$, donde Φ es un campo escalar acoplado al escalar de curvatura de la hoja de mundo llamado dilatón. Este campo y en particular las configuraciones donde el mismo es constante serán relevantes en breve. La generalización del cálculo de la dimensión crítica se da en términos más emparentados con la

²No todas son invertibles en toda la variedad y por tanto no son transformaciones que estén globalmente definidas. El subgrupo de estas transformaciones, comúnmente denominadas L_{-1}, L_0, L_1 , forman el grupo $SL(2, \mathbb{R})$ para cuerdas abiertas y $SL(2, \mathbb{C})$ para las cerradas, que tienen el doble de modos.

³Clarifiquemos este comentario con el ejemplo siguiente. La teoría de QCD con quarks sin masa, por ejemplo, también es invariante conforme a nivel clásico. Sin embargo la cuantización de la teoría lleva a la aparición de una escala, que es la escala de confinamiento de los quarks Λ_{QCD} . La ruptura de la simetría conforme en este caso explica el hecho de que no se observen quarks libres a bajas energías. Por el contrario, no admitiríamos una cuantización de un campo de gauge que en el proceso rompiese tal simetría, de donde reside el éxito de la regularización dimensional.

⁴La teoría de cuerdas bosónica en particular contiene en su espectro un taquión, que es un estado de M^2 negativa, como estado fundamental. Esto implica que la teoría no tiene un vacío estable y que no es consistente tal como está planteada. Sin embargo, esto no es una predicción de la teoría de cuerdas si no un problema en su formulación bosónica, que se resolverá al estudiar la teoría de super-cuerdas.

forma tradicional de teoría de campos de mantener la simetría conforme de una teoría, i.e. la anulación de las funciones β de todas las constantes de acoplamiento de la teoría. Lo novedoso de este análisis es que en apariencia, las acciones que presentamos no tienen constantes de acoplamiento en el sentido tradicional, como sí lo era g_{YM}^2 en la sección anterior. Se interpretan en este contexto al propio espaciotiempo y al dilatón (y a otros campos presentes en la teoría) como constantes de acoplamiento dependientes de la posición. La renormalización de estos campos se reinterpreta entonces como las funciones β de estas cantidades, a las que se les pedirá que sean nulas. Cabe destacar que la anulación de estas cantidades ya no se escriben como ecuaciones algebraicas si no en general como ecuaciones diferenciales para los campos implicados. A primer orden en α' , la anulación de la función β del dilatón impone que la dimensión del espacio ambiente sea $d = 10$ y la de la métrica impone, en ausencia de otros campos y dilatón constante, $R_{\mu\nu} = 0$ i.e. los espaciotiempo ambiente para estas condiciones han de ser soluciones de las ecuaciones de Einstein de vacío sin constante cosmológica. Las condiciones que se obtienen en presencia de otros campos, como la 2-forma B , puede verse en [60]. Sobre esto solo comentaremos que hay soluciones exactas a todo orden en α' que describen espacios AdS. En lo que sigue y salvo que se aclare lo contrario, seguiremos describiendo la fenomenología de cuerdas sobre espacio ambiente plano.

Cuerdas abiertas y cerradas

Como se mencionó, la propagación de cuerdas se da en términos de lo que se conoce como la hoja de mundo. En términos de estas, es fácil ver que una cuerda abierta describirá una hoja de mundo abierta mientras que una cerrada describirá una topología similar a un cilindro. Trataremos en este párrafo aspectos relevantes de las interacciones entre las cuerdas abiertas y cerradas. En el contexto de teoría de cuerdas la interacción entre distintos tipos de cuerdas no se trata como un término extra de interacción a la acción de Polyakov, si no en términos de la expansión en topologías no triviales que surge naturalmente al considerar procesos de dispersión de cuerdas. De forma general, cualquier proceso de dispersión de cuerdas abiertas o cerradas pueden representarse en términos de superficies de Riemann con bordes y agujeros. Por ejemplo, un proceso de 2 a 2 cuerdas cerradas puede suceder de varias maneras: las cuerdas se unen durante un período de tiempo para luego volver a separarse; las cuerdas se unen y se separan y vuelven a unirse y separarse; etc, ver Fig. 3.2a. En este proceso particular, vemos que cada uno de estos procesos puede representarse en términos de superficies de Riemann con $b = 4$ bordes y un número creciente $g = 0, 1, \dots$ de agujeros, lo que denominamos género en la sección anterior. Para ser más precisos, consideremos la acción de estas cuerdas que por vivir sobre topologías no triviales requieren un acoplamiento con el dilatón,

$$S = S_{NG} + \frac{1}{4\pi} \int d\sigma^2 \Phi R^{(2)}. \quad (3.1.13)$$

Para las configuraciones donde el dilatón es constante $\Phi = \phi_0$, la integral del segundo término es topológica y se puede demostrar por teorema de Riemann que es

$$\frac{1}{4\pi} \int d\sigma^2 \Phi R^{(2)} = \frac{\phi_0}{4\pi} \int d\sigma^2 R^{(2)} = \frac{\phi_0}{4\pi} 4\pi(2 - 2g - b) = \phi_0(2 - 2g - b)$$

El proceso de 2 a 2 cuerdas cerradas $2_c \rightarrow 2_c$ que queremos describir en la figura puede escribirse como una integral de caminos que suma sobre cada topología pesando cada una por la exponencial de la acción evaluada en cada solución, i.e.

$$2_c \rightarrow 2_c \sim \sum e^{-S} = \sum_g (e^{-\phi_0})^{2-2g-b} e^{-S_{NG}} = \sum_g g_s^{2g+b-2} e^{-S_{NG}}, \quad (3.1.14)$$

donde se definió $g_s \equiv e^{\phi_0}$ como la constante de acoplamiento adimensional de cuerdas cerradas. Notar que este proceso relaciona cuerdas cerradas con cuerdas cerradas. Comentaremos sobre procesos que relacionen cuerdas abiertas y cerradas en breve. Para comparar explícitamente con las expresiones de la sección anterior, consideremos la función de partición de cuerdas, que se obtiene con procesos de vacío a vacío tipo $0_c \rightarrow 0_c$, que hace $b = 0$ y se puede escribir

$$Z_C = \sum_g g_s^{2g-2} e^{-S_{NG}}, \quad (3.1.15)$$

que al comparar con (3.1.4) sugiere que $g_s \sim N^{-1}$. En la misma línea de razonamiento, podemos intentar relacionar $e^{-S_{NG}}$ con las funciones $f_g(\lambda)$ de la misma expresión. La acción de área que S_{NG} genéricamente dependerá de dos factores con dimensiones: α' y una escala propia del espacio, que en los casos de interés será el radio de AdS, L . Si consideramos que el cociente adimensional $R^2/\alpha' \gg 1$ es el límite en el cual las cuerdas son mucho más pequeñas que las distancias propias del espacio, donde las cuerdas asemejan a objetos puntuales y asemejándose su cuántica a las de teorías de campos, suena razonable proponer $L^2/\alpha' \sim \lambda$. Veremos cómo esto se realiza más concretamente en la siguiente sección.

Haremos tres comentarios más acerca de interacciones sobre cuerdas. El primero es que para cuerdas abiertas el mismo tipo de expansión aparece para la función de partición con una constante de acoplamiento g'_s para procesos de cuerdas abiertas a cuerdas abiertas. Sin embargo, los parámetros g'_s y g_s no son independientes, y de hecho es fácil demostrar que $g_s'^2 = g_s$. Esto puede motivarse a partir de (3.1.14), observando que la adición de un agujero a la topología $g \rightarrow g + 1$ aporta un factor g_s^2 y que en términos de un proceso de cuerdas cerradas, esto equivale a agregar 2 bordes a geometría y luego pegar un propagador de cuerda cerrada a la topología final. El punto central es que los propagadores de cuerdas abiertas pueden también reinterpretarse como trayectorias cerradas en términos de una cuerda abierta con extremos en los bordes del cilindro. En esta interpretación, la geometría original ha emitido una cuerda abierta, lo que aporta un factor de $g_s'^2$ y luego la ha reabsorbido, aportando nuevamente $g_s'^2$ para un total de $g_s'^4$. Los procesos de emisión/absorción son orden $g_s'^2$ puesto que cada extremo de la cuerda aporta un factor g_s' . Lo que acabamos de mostrar es que un proceso que agrega g_s^2 puede reinterpretarse como uno que agrega $g_s'^4$, lo que supone que $g_s'^2 = g_s$. También sobre cuerdas abiertas y cerradas, mencionaremos que si bien una teoría de cuerdas cerradas es consistente en sí misma, una de cuerdas abiertas no lo es. Dicho de otro modo, habiendo introducido el acoplamiento g_s , una teoría de cuerdas abiertas necesariamente producirá cuerdas cerradas, mientras que no existe un proceso en donde una cuerda cerrada emita una cuerda abierta. Esto tendrá relevancia en la sección siguiente.

El último comentario compete a los tipos de teorías de cuerdas. Los procesos que describimos corresponden a lo que se denomina teorías de cuerdas orientadas, o tipo II. La palabra “orientada” en este caso puede interpretarse en términos de las superficies de Riemann que describen los procesos físicos de la teoría: todas las superficies de la Fig. 3.2a se corresponden a superficies orientables. Las teorías de cuerdas tipo I, en cambio, restringen los procesos físicos a aquellos invariantes frente a la inversión de orientación. Las topologías descritas por estas teorías para cuerdas abiertas y cerradas son, por ejemplo, cintas de Moebius y botellas de Klein, respectivamente. En lo que sigue, solo nos interesan procesos en teorías de cuerdas tipo II.

D-branas

Al hablar de cuerdas abiertas anteriormente, mencionamos que para el planteo consistente de cuerdas con condiciones de contorno tipo Dirichlet, era necesario incorporar nuevos objetos a la teoría y que si estos no habrían de romper la invarianza de Lorentz, tendrían que tener dinámica propia. Estos objetos se conocen como D-branas o Dp -branas, donde p explicita el número de coordenadas espaciales del mismo. Este objeto p dimensional, con un volumen de mundo $p + 1$ dimensional, es una extensión más de la noción de línea/hoja de mundo y por tanto su acción será un hiper-volumen propio. La brana tendrá $p + 1$ coordenadas σ^m , con $m = 0, \dots, p$ y el resto de las coordenadas del espacio ambiente serán los análogos de los campos escalares X^μ de la cuerda. Un aspecto que no mencionamos de las cuerdas abiertas anteriormente es que sus extremos son portadores de cargas de gauge $U(1)$, aunque está relacionado con que la teoría de bajas energías de la cuerda bosónica abierta sea una teoría de YM. Si es que estas cuerdas tienen sus extremos fijos en las branas, entonces sobre las mismas deben vivir teorías de gauge sensibles a estas cargas. La dinámica de cuerdas está dominada por lo que se conoce como la acción DBI (Dirac-Born-Infeld)

$$S_{DBI} = T_p \int d\sigma^p \sqrt{\det(g_{mn} + 2\pi\alpha' F_{mn})}, \quad T_p = \frac{1}{(2\pi)^p g_s \alpha'^{\frac{p+1}{2}}}. \quad (3.1.16)$$

Notar que $T_p \propto g_s^{-1}$, de donde se infiere que estos objetos son de carácter no perturbativo, i.e. no pueden alcanzarse desde el vacío de cuerdas usando teoría de perturbaciones. Como se mencionó en un principio, las branas fueron concebidas como lugares donde fijar cuerdas abiertas. Sin embargo, en virtud de la doble interpretación de las hojas de mundo para procesos de cuerdas tanto en términos de cuerdas abiertas o

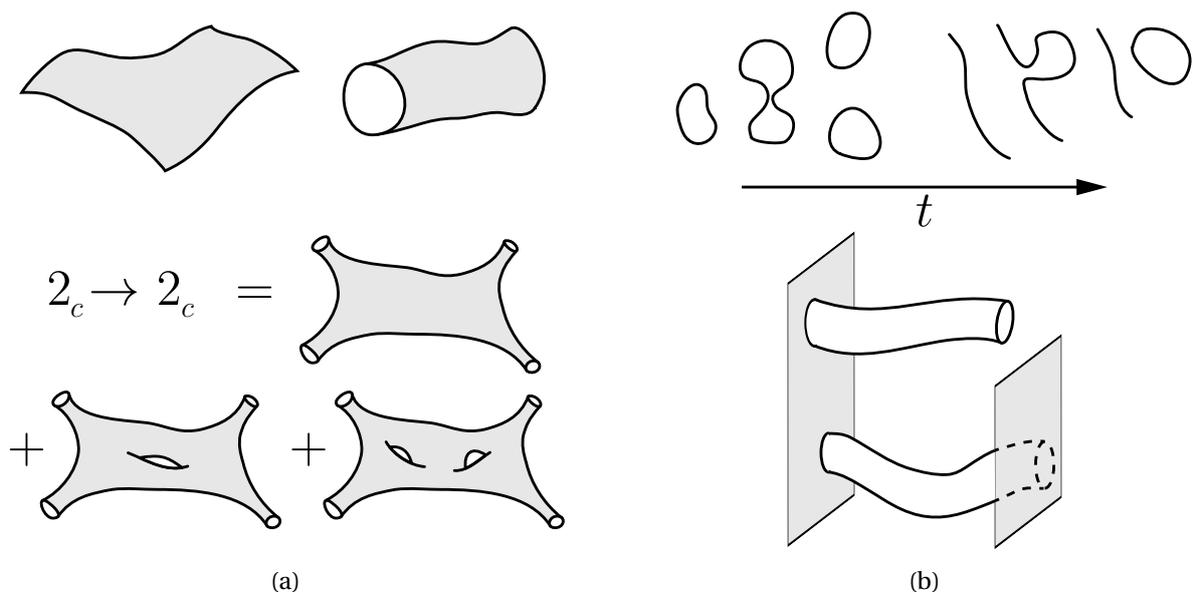


Figura 3.2: (a) Arriba se muestran ejemplos de hojas de mundo descritas por cuerdas abiertas y cerradas. En la parte de abajo se representan los primeros términos de (3.1.14) en una expansión en género. (b) Arriba se muestran dos procesos de interacción de cuerdas. Se intenta mostrar que mientras una teoría de cuerdas cerradas es consistente en sí misma, no así una de solo cuerdas abiertas. Esto se sigue de que no hay un proceso a partir de una cuerda cerrada que resulte en una cuerda abierta y una cerrada. Como se muestra, de una cuerda abierta sí puede obtenerse dicho estado final. Debajo se muestran branas con hojas de mundo de cuerdas, que pueden interpretarse como lazos de cuerdas abiertas o como creación de cuerdas cerradas.

cerradas, lo dicho anteriormente implica que entonces las branas son también fuentes de cuerdas cerradas, como se muestra en la Fig. 3.2b. En este mismo sentido, también las branas admiten dos descripciones de su física de bajas energías. Una es considerar la física de un sistema de branas en el espacio-tiempo plano. El espectro de bajas energías serán las oscilaciones de las coordenadas donde está fija la brana y la de los campos que en ella viven. La expansión a primer orden de la acción DBI resulta en

$$S_{DBI} \sim \frac{1}{g_{YM}^2} (\text{Tr}\{F^2 + \dots\}), \quad g_{YM}^2 = 2(2\pi)^{p-2} g_s \alpha'^{\frac{p-3}{2}}, \quad (3.1.17)$$

codicente con lo que ya habíamos mencionado acerca de las excitaciones de bajas energías de sistemas de cuerdas abiertas, i.e. son teorías de campos de YM. Lo interesante de esto es la relación entre los parámetros de la teoría de cuerdas y la teoría de YM. Notar que para $p = 3$, g_{YM}^2 es independiente de α' y esto será importante para la sección siguiente. La segunda descripción es en términos de sistemas de cuerdas cerradas. El mismo sistema, i.e. sistemas con las mismas simetrías y propiedades a bajas energías, se obtiene a partir de ciertas soluciones de supergravedad, la generalización supersimétrica de la teoría de gravedad. La forma de la métrica de estas soluciones será central en la sección que sigue. Será importante también para lo que sigue, mencionar que además de contener los campos F , estos se acoplan mediante la acción de Wess-Zumino a las q -formas del espacio ambiente, que son generalizaciones a mayor número de índices de los campos de gauge: el campo $F_{\mu\nu}$ es una 2 forma. La antisimetría en los índices y su cantidad hace directo ver que una Dp -brana se acopla naturalmente con una $p+2$ -forma del espacio ambiente, de la misma forma que una D0-brana (una partícula a través de su velocidad) se acopla naturalmente al campo A_μ de la 2-forma $dA = F$. La acción de Wess-Zumino provee además la forma del acoplamiento para todas las $p+2-2n$ -formas para $n \geq 0$.

Supersimetría

Acercas de la teoría de cuerdas supersimétricas, o supercuerdas, haremos también algunos comentarios. En general, la supersimetría es una transformación que mezcla grados de libertad bosónicos y fermiónicos.

Como consecuencia inmediata de una simetría tal, cualquier teoría invariante frente a estas transformaciones debe tener el mismo número de grados de libertad bosónicos y fermiónicos. Aunque su realización en la naturaleza es aún conjetural, las teorías supersimétricas tienen enormes ventajas conceptuales y computacionales debido a las restricciones que impone la misma. En primer lugar, recordamos que la supersimetría en la teoría de cuerdas es necesaria para sanear el estado taquiónico de la teoría bosónica y que debido a los campos espinoriales agregados, la dimensión crítica es $d = 10$. Existen dos formas de definir la teoría de cuerdas supersimétricas, conocidas como RNS (Reneu-Neve-Schwartz) y GS (Green-Schwartz). En la primera formulación, se agregan fermiones ψ_α^μ de dos componentes a la teoría (3.1.12) y así definida es supersimétrica en la teoría de la hoja de mundo. Sin embargo, la cuantización en espacio plano de esta teoría lleva a el doble de estados fermiónicos que bosónicos en el espacio ambiente, ahora de $d = 10$, de forma que la supersimetría no queda realizada allí. La teoría vuelve a ser consistente luego de definir los estados físicos como aquellos invariantes frente a la proyección GSO (Gliozzi, Scherk y Olive). En este formalismo, este es el paso que elimina el taquión del espectro. En la formulación GS en cambio, la teoría se escribe ya en términos del formalismo de superespacio ambiente y la teoría entonces está garantizada de cumplir supersimetría en el espacio ambiente. De forma sucinta, el superespacio consiste en pensar a las coordenadas del tiempoespacio como variables bosónicas a las que se suman grados de libertad fermiónicos en forma de dimensiones extra. Así, la supersimetría está incluida en la teoría original como una isometría en un espacio auxiliar más grande. Para teorías de cuerdas con supersimetría $\mathcal{N} = 2$, que son las que nos interesan en este trabajo, se agrega la coordenada fermiónica $\theta = \theta^1 + \theta^2$ donde θ^I son espinores de Majorana. Las transformaciones de supersimetría en estas teorías se pueden interpretar simplemente como desplazamientos rígidos en cada coordenada fermiónica θ^I , $I = 1, 2$. El equivalente a la proyección GSO se realiza de forma natural y sin hipótesis extra en la formulación GS en términos de una simetría de gauge fermiónica, llamada simetría κ . Aquí surge otra subclasificación de las teorías de cuerdas supersimétricas orientadas (tipo II), las teorías se distinguen según los θ^I tienen quiralidades opuestas, tipo IIA, o si tienen la misma quiralidad, tipo IIB. Las distintas teorías soportan distintos tipos de q -formas en sus espacios ambiente (impares y pares respectivamente) y por tanto también soportan las configuraciones de branas que bajo estas están cargadas (pares e impares respectivamente). Por último, mencionamos un aspecto de la teoría de la fenomenología de supercuerdas que será relevante en breve. Los espectros de bajas energías de cuerdas abiertas supersimétricas describirán extensiones supersimétricas de las teorías de Yang-Mills, o SYM; mientras que las teorías de cuerdas cerradas supersimétricas describirán extensiones supersimétricas de teorías de gravedad, o supergravedad. Esto clarifica el hecho de que a la descripción de las branas en términos de soluciones de supergravedad la hayamos asociado a sistemas de cuerdas cerradas.

3.2. AdS/CFT de arriba hacia abajo

En esta sección describimos finalmente la primera versión de lo que se conoce en la actualidad como dualidad AdS/CFT o correspondencia gauge/gravedad. El caso fundacional fue publicado por Maldacena en el año '97 [4], creando una nueva forma de usar las herramientas de teoría de cuerdas. Este primer ejemplo sugiere que una teoría de campos $\mathcal{N} = 4$ SYM en $3 + 1$ dimensiones con grupo de simetrías $SU(N)$ y una teoría de supercuerdas cerradas tipo IIB sobre un espacio $AdS_5 \times S^5$ son formulaciones alternativas del mismo sistema físico. A este ejemplo concreto siguieron un número abrumador de nuevos ejemplos de descripciones holográficas, chequeos de consistencia y de precisión, aunque no una demostración en términos absolutos. En particular, la tentadora idea de describir el régimen no perturbativo de una teoría de campos (en particular QCD) a través de sistemas clásicos de gravedad o de obtener una formulación de gravedad cuántica en términos del régimen perturbativo de una teoría de campos la configuran como una herramienta de frontera para varias abordar varias preguntas actuales de la física de altas energías. Aún sin haber alcanzado de forma acabada ninguno de estos dos objetivos aún, la dualidad AdS/CFT se mantiene al día de hoy como un área de investigación pujante.

Consideremos entonces la configuración original concreta. El sistema en cuestión es el límite de bajas energías de una pila de N D3-branas apiladas en un espacio ambiente plano para una teoría de cuerdas supersimétrica. Como adelantamos en la sección anterior la doble interpretación de este sistema en término de cuerdas abiertas y cuerdas cerradas, mostrada pictóricamente en la Fig. 3.3, será central.

En términos de un sistema de branas y cuerdas abiertas supersimétricas, ya comentamos que su des-

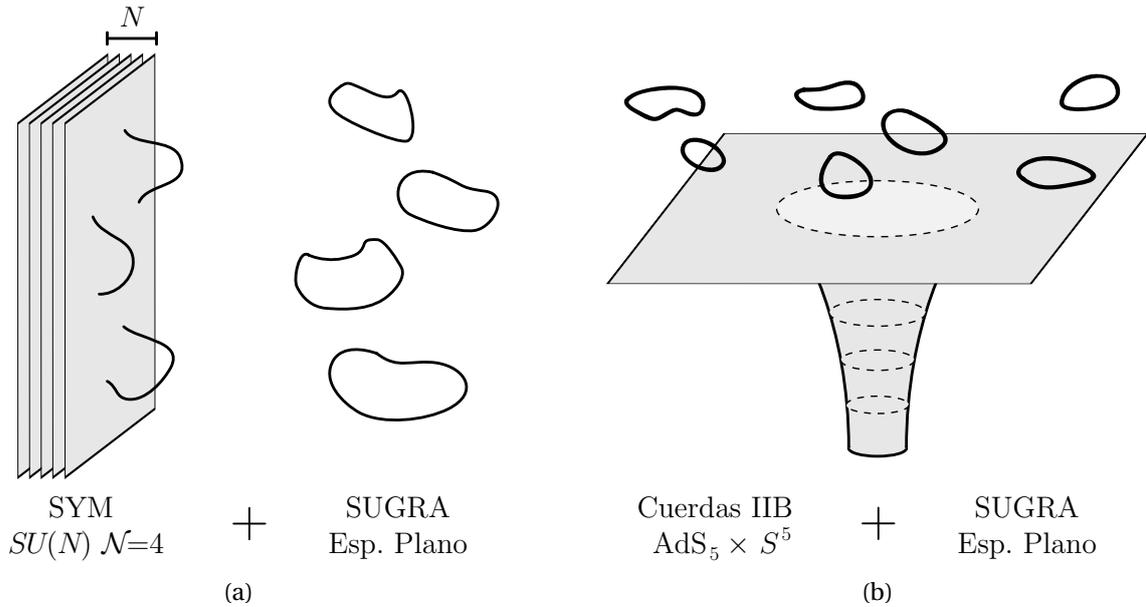


Figura 3.3: Dos interpretaciones del mismo sistema físico a bajas energías. En (a) se muestra el sistema de N branas coincidentes como objetos solitónicos con cuerdas abiertas que empiezan y terminan en las mismas y fuentes de cuerdas cerradas. A bajas energías el sistema describe una teoría SYM $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ y una teoría de SUGRA sobre espacio plano desacopladas entre ellas. En (b) se interpretan las branas en términos de una teoría de cuerdas definida sobre un espaciotiempo dinámico. La solución describe una teoría de Cuerdas tipo IIB definida sobre $AdS_5 \times S^5$ y una teoría de SUGRA sobre espacio plano desacopladas entre ellas.

cripción a bajas energías (recordar que en teoría de cuerdas esto es tomar el límite $\alpha' \rightarrow 0$) es una teoría SYM, pero seremos ahora más precisos en este aspecto. Para el caso, por ejemplo de un arreglo de N D3-branas separadas por una distancia L , las cuerdas que van de una a otra brana tienen una longitud mínima L y por tanto una energía mínima $TL \sim L/\alpha'$, por lo que en el límite de bajas energías no hay energía para crearlos y se desacoplan del sistema. Las excitaciones remanentes son las de las cuerdas que comienzan y terminan en la misma brana. La teoría descrita por estas excitaciones es la de $\mathcal{N} = 4$ SYM en $3 + 1$ dimensiones con grupo de simetrías $U(1)^N$. En el límite en que las branas son coincidentes, $L \rightarrow 0$, los modos de las cuerdas entre branas se vuelven no masivos y la simetría de la teoría de gauge se agranda. Estrictamente, se obtiene una teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en $3 + 1$ dimensiones con grupo de simetrías $U(N)$, pero es estándar ver que se puede descomponer $U(N) = U(1) \times SU(N)$ y que el campo de gauge asociado al grupo abeliano $U(1)$ se desacopla del resto. El resultado final es entonces que el límite de bajas energías de la pila de N D3-branas apiladas se describe en términos de una teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en $3 + 1$ dimensiones con grupo de simetrías $SU(N)$. Como se mencionó anteriormente, no se puede construir una teoría consistente de cuerdas abiertas sin incluir cuerdas cerradas. El espectro de bajas energías de estas cuerdas cerradas en sí mismas describen una teoría de SUGRA tipo IIB en espacio plano. En el límite $\alpha' \rightarrow 0$, los términos libres de cada teoría ($\propto \alpha'^{-1}$) dominan sobre las interacciones y por ende los modos de bajas energías de SUGRA se propagan en espacio plano.

La segunda descripción se da enteramente en términos de cuerdas cerradas. Nuevamente, el espectro no masivo de teoría de cuerdas supersimétricas tipo IIB, describe una teoría SUGRA tipo IIB. La descripción de la configuración de D3-branas en este lenguaje reside en encontrar una solución de SUGRA que tenga las mismas simetrías que la configuración de D3-branas. Por la forma en la que están dispuestas, una encima de la otra, la solución debe ser invariante de Lorentz en el volumen de mundo $3 + 1$ dimensional. Debe mantener además la invarianza rotacional $SO(6)$ sobre las dimensiones donde no se extienden las branas. Como explicamos en la sección anterior, las Dp -branas se acoplan naturalmente al flujo de $p + 2$ -formas, donde $d = 10$ es la dimensión del tiempoespacio, y a través de la acción de Wess-Zumino también con todas las formas $p + 2 - 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Salvo la 5-forma, el resto de las formas las tomaremos nulas y tomaremos

al dilatón constante, de forma que se debe encontrar una solución a la acción

$$S_{SG} = \frac{1}{16\pi G_N^{(10)}} \int dX^{10} \sqrt{|G|} \left(R - \frac{2}{5!} F_5^2 \right), \quad (3.2.1)$$

donde $G_N^{(10)}$ es la constante de Newton en 10 dimensiones y $16\pi G_N^{(10)} = (2\pi)^7 g_s^2 \alpha'^4$ en términos de las magnitudes de la teoría de cuerdas original. La solución a dicha acción está dada por la métrica

$$ds^2 = H^{-\frac{1}{2}}(r) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H^{\frac{1}{2}}(r) (dr^2 + r^2 d\Omega^5), \quad H(r) = 1 + \frac{L^4}{r^4};, \quad (3.2.2)$$

donde $L^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2$ y la configuración de la 5-forma⁵

$$F_5 = (1 + \star) dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3 \wedge dH^{-1} \quad (3.2.3)$$

donde \star es la operación estrella de Hodge, i.e. así escrita la forma queda autodual, condición que no se puede imponer a nivel de la acción pero que es requerida por la teoría de SUGRA IIB. Notamos primero que en este lenguaje el número de branas N entra linealmente en la definición de L^4 y es también el flujo magnético de la 5-forma sobre la esfera

$$\int_{S^5} \star F_5 = N. \quad (3.2.4)$$

Acerca de la forma de la métrica de la solución, vemos que las simetrías de Lorentz en 3+1 están respetadas por las coordenadas x^μ , que se asocian a las coordenadas de la hoja de mundo de las branas. El resto de las coordenadas se agrupan también como espacio plano 5+1 pero haciendo manifiesta la simetría $SO(6)$.

Hay 2 límites inmediatamente interesantes de esta métrica que son los límites donde $r \gg L$ y $r \ll L$, que describen 2 regiones de la solución. El primero, el límite lejano, de ellos hace $H(r) \sim 1$, y la métrica se vuelve plana, i.e. lejos de las branas se obtiene SUGRA sobre espacio plano⁶. El límite $r \ll L$, o de horizonte cercano, hace en cambio $H(r) \sim L^4/r^4$ de donde

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{L^2}{r^2} dr^2 + L^2 d\Omega^5 = L^2 \left(\frac{z^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{z^2} + d\Omega^5 \right), \quad (3.2.5)$$

donde en la segunda igualdad hemos usado $z = L^2/r$ para hacer evidente que en este límite se tiene la métrica $AdS_5 \times S^5$. En el límite de bajas energías $\alpha' \rightarrow 0$, una vez más los modos de cada sector quedan desacoplados y tenemos en la región lejana SUGRA IIB sobre espacio plano y en horizonte cercano tenemos una teoría también de SUGRA IIB pero en $AdS_5 \times S^5$. Sobre esta última todo el espectro de SUGRA es relevante y no solo los modos no masivos. El motivo de esto es que el límite $\alpha' \rightarrow 0$ es trivialmente el de bajas energías para espacio plano, pero no así para espacios curvos. Desde una perspectiva gravitatoria, altas o bajas energías se describen respecto de un observador asintótico. Luego, los modos de altas energías E que llegan desde la región de horizonte cercano, serán también medidos como de bajas energías debido al corrimiento al rojo $E_{Asint} = H^{-\frac{1}{4}} E$ que sufren durante el trayecto. Se observa que $E_{Asint} < E$ puesto que $r/L \sim r/\alpha' \rightarrow 0$ es $H(r)^{-\frac{1}{4}} \rightarrow 0$. Esta interpretación entonces captura toda la física de cuerdas de la región cercana al horizonte. En resumen, en esta interpretación se obtienen también dos teorías desacopladas, una de ellas SUGRA IIB sobre espacio plano como en la primera, pero en este caso la otra es una teoría completa de cuerdas cerradas tipo IIB sobre $AdS_5 \times S^5$.

La afirmación central de [4] es conjeturar que entonces las otras dos teorías que no son SUGRA IIB sobre espacio plano, siendo descripciones en el mismo límite del mismo sistema físico, describen la misma física, i.e. son duales entre sí. Más explícitamente, estamos afirmando que

$$\boxed{\text{Cuerdas tipo IIB en } AdS_5 \times S^5} \iff \boxed{\text{SYM } \mathcal{N} = 4 \text{ } SU(N)} \quad (3.2.6)$$

⁵Usando explícitamente los índices de la 5-forma, la solución puede escribirse también

$$(F_5)_{\mu\nu\rho\sigma\eta} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\eta\gamma} \partial^\gamma H(r)$$

⁶Recordar que en la sección anterior mencionamos que la cuantización consistente de la teoría de cuerdas supersimétrica (anulación de funciones β de la teoría) lleva a $d = 10$ para el dilatón y en ausencia de otros campos $R_{\mu\nu} = 0$ lo que impone un espacio Ricci plano. Dicho de otra forma, $H(r) \sim 1$ hace $F_5 \sim 0$, lo que apaga el único otro campo no trivial, de donde resulta natural obtener un espacio Ricci plano como solución.

acompañado del mapa entre parámetros⁷ $4\pi g_s = g_{YM}^2$ y $L^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2 = g_{YM}^2 N \alpha'^2$, o en términos de $\lambda = g_{YM}^2 N$, tenemos

$$\lambda = \frac{L^4}{\alpha'^2}; \quad 4\pi g_s = g_{YM}^2. \quad (3.2.7)$$

Tomar al pié de la letra esta dualidad para todos los valores de N y λ es lo que se conoce como la versión fuerte de la correspondencia gauge/gravedad.

Estudiaremos ahora límites de estos parámetros donde la dualidad, tomándola como válida, se hace particularmente útil. Comencemos por el primer límite estudiado en este capítulo que es el de $N \rightarrow \infty$ y $\lambda = \text{cte}$, que en SYM equivale al límite planar. Para $\lambda \ll 1$, el límite de la teoría de campos se hace perturbativo, pero (3.2.7) impone $\alpha' \gg L^2$ de forma que se captura toda la física cuerdas de la teoría dual. Para $\lambda \gg 1$ SYM se vuelve fuertemente acoplado pero ahora $\alpha' \ll L^2$ y la teoría dual es ahora una teoría de SUGRA IIB en el límite semiclásico, $G^{(10)} \sim g_s^2 \alpha'^4 \sim N^{-2} \rightarrow 0$ de donde domina la configuración clásica de la acción de SUGRA. Cabe mencionar que en el argumento anterior se asumió $g_{YM}^2 = 4\pi g_s \sim 0$ y $g_{YM}^2 N \rightarrow \infty$ para mantener $\lambda \gg 1$ y obtener así un límite computacionalmente interesante. Por completitud y para mostrar ostensiblemente la intuición física puesta en los límites anteriores, se observa que uno puede también tomar el límite $N \rightarrow \infty$ y $\lambda \rightarrow \infty$ haciendo $g_{YM}^2 \rightarrow \infty$. Sin embargo, este límite no es tratable perturbativamente ni desde la teoría de campos ni desde la teoría de cuerdas puesto que estamos en el límite $g_s \rightarrow \infty$ lo que hace la expansión topológica (3.1.15) también intratable.

Como adelantamos al principio de este capítulo, hemos presentado un ejemplo concreto donde es posible describir un régimen fuertemente acoplado de una teoría particular de campos (SYM) en términos de el límite semiclásico de una teoría de mayor dimensionalidad (SUGRA) y el régimen no perturbativo de una teoría (candidata) de gravedad cuántica (cuerdas IIB) mediante el régimen perturbativo de una teoría de campos (SYM).

Es menester hacer un comentario acerca de la dimensionalidad de los sistemas descritos. Por un lado, la teoría de gravedad se extiende formalmente en $\text{AdS}_5 \times S^5$, i.e. $(4 + 1) + 5$ dimensiones, mientras que la teoría de campos efectiva que describe es la de SYM $\mathcal{N} = 4$ en $3 + 1$. Sin embargo, los grados de libertad dinámicos de la teoría de SYM solo se mueven sobre AdS_5 , mientras que las simetrías de S^5 se manifiestan en la teoría de campos como las simetrías internas de la SUSY. Desde el punto de vista gravitatorio, se pueden demostrar que los operadores de la teoría de campos son duales a modos de KK que aparecen al compactificar 5 de las 10 dimensiones del espacio con una S^5 . Dicho de otro modo, el grupo de simetrías $SO(6)$ es una simetría interna de SYM y no se manifiesta como dimensiones espaciales extra. La conclusión es que de forma general hemos de pensar a la dualidad holográfica como la descripción de una teoría de campos en d dimensiones tiempoespaciales en términos de una teoría de gravedad solo en una dimensión más, i.e. $d + 1$. De hecho, la interpretación canónica de la dualidad realiza a la teoría de campos dual (o mejor dicho, su punto fijo UV) viviendo en el borde asintótico del espacio AdS y, como mencionamos en la Sec 2.2, movernos hacia el interior de la coordenada holográfica describirá el flujo del grupo de renormalización de la teoría. El ejemplo que acabamos de considerar plantea un caso sencillo de esta afirmación: el espacio que describimos es AdS puro y mantiene todo el tiempo las simetrías de su borde asintótico, en acuerdo con el hecho conocido de que SYM $\mathcal{N} = 4$ es una teoría conforme exacta a nivel cuántico. Volveremos sobre esto en la próxima sección.

Otros ejemplos y generalizaciones

Para terminar, mencionaremos algunas extensiones de este modelo concreto. Para comenzar mencionamos que no es el único caso donde se conoce un mapa exacto entre 2 teorías, poniendo como ejemplo la interpretación holográfica dual a $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons, en términos de teorías de cuerdas tipo IIA. El punto central de la modificación de relaciones duales consiste en tener una interpretación de las mismas a ambos lados de la dualidad. Una deformación inmediata, y profundamente relevante para esta tesis, surge al insertar fuentes externas a operadores de la teoría de campos, lo que se manifiesta en la teoría dual como un cambio en las condiciones de contorno de los campos de la teoría de SUGRA. En lo anterior, se requiere que el operador insertado no rompa el punto fijo UV de la teoría de campos para de este modo admitir una solución de SUGRA asintóticamente AdS, i.e. en el lenguaje de campos, se requiere una deformación

⁷Ver (3.1.17) y (3.2.2), notando que para D3-branas g_{YM} es independiente de α' .

relevante. La solución de SUGRA dual a esta teoría deformada será asintóticamente AdS, pero reducirá las simetrías hacia su interior. En la interpretación dada en el párrafo anterior, esto refleja que frente al flujo GR, la deformación se está haciendo relevante y la teoría se alejará de su punto fijo UV. En el caso de QCD, esta ruptura de la simetría conforme se manifiesta en la escala de confinamiento de los quarks Λ_{QCD} y, pensando en este ejemplo de especial interés, en general a la deformación del espacio AdS en holografía se la asocia una escala de confinamiento de la teoría de campos dual. Otra deformación que no consideraremos en detalle, será agregar configuraciones adicionales de branas, como las construcciones D3D7. En este ejemplo, se rompen algunas de las supersimetrías de la teoría agregando $N_f \ll N$ D7-branas, que se estudian entonces como objetos de prueba sobre la geometría de fondo $AdS_5 \times S^5$, y que se extienden sobre las D3-branas originales y otras 3 dimensiones del espacio S^5 . El resultado de esta deformación desde la teoría de campos es que las cuerdas abiertas que empiezan y terminan en los distintos tipos de branas incorporan a la teoría materia bariónica masiva en la representación fundamental.

A continuación, describiremos un enfoque más abstracto o general de la dualidad, que se conoce como enfoque de abajo hacia arriba y que será la forma en la que principalmente abordaremos la dualidad en este límite.

3.3. AdS/CFT de abajo hacia arriba

En esta sección presentaremos lo que se suele definir como enfoque de abajo hacia arriba de la dualidad AdS/CFT. Esta nomenclatura surge del hecho de que impondremos ciertos axiomas, basados en intuiciones obtenidas de ejemplos concretos de la dualidad, a partir de los cuales trabajar. Las conclusiones extraídas en este abordaje no pueden ser asociadas a ningún par de teorías duales en concreto, sino a teorías conectadas por la dualidad holográfica en general. La ventaja principal de este enfoque es que nos permitirá contestar preguntas generales o de consistencia acerca de la dualidad sin recurrir necesariamente al contenido preciso de campos de ninguna teoría, o tomando modelos de juguete que logren capturar la física necesaria. El eje central de esta tesis, a saber definir un marco consistente de holografía en tiempo real y describir dentro de este marco excitaciones del vacío bien definidas a ambos lados de la dualidad, se favorece enormemente del uso de modelos de juguete que permiten estudiar selectivamente los fenómenos de interés. Al mismo tiempo, si el modelo de juguete elegido es lo suficientemente genérico, la aplicación de los corolarios del análisis a ejemplos concretos de la dualidad resulta inmediato. Al menos en la forma en la que se trabajará en esta tesis, se podría decir que en un sentido puramente operacional, puede pensarse a la dualidad AdS como una forma de estudiar teorías conformes, tradicionalmente estudiadas en términos de identidades de Ward, OPEs etc, a través de un enfoque más tradicional de teoría de campos en términos de una acción y un principio variacional en AdS. En términos de lo que se discutió en la sección pasada, en todo lo que sigue de esta tesis estaremos siempre pensando en un límite de $N \rightarrow \infty$ y $g_{YM} \sim g_s \rightarrow 0$, manteniendo $\lambda \rightarrow \infty$, i.e. un límite donde la teoría de (super)gravedad es semiclásica y perturbativamente describe una teoría de campos en su régimen fuertemente acoplado. Si bien describiremos algunos aspectos de correcciones a primer orden en $\lambda^{-\frac{1}{2}}$, semiclásicas en SUGRA pero no perturbativas en la teoría de gauge, no discutiremos correcciones en g_s provenientes de cuerdas que llevarían a topologías con género $g \neq 0$.

Un posible punto de partida de este enfoque es afirmar que los espacios de Hilbert entre dos teorías duales son idénticos, i.e.

$$\mathcal{H}_{CFT} \equiv \mathcal{H}_{AdS}. \quad (3.3.1)$$

No obstante, sin ofrecer un diccionario más preciso entre los observables de ambas teorías, esta hipótesis de trabajo no tiene demasiado poder de cómputo. Presentaremos dos formas de trabajar dentro de este tipo de enfoques: uno orientado a un tratamiento de integrales de caminos, conocido como GKPW (Gubser Klebanov Poliakov y Witten) [11, 12], y el otro en términos de un diccionario entre operadores de ambas teorías usando herramientas de cuantización canónica, conocido como BDHM (Banks Douglas Horowitz Martinec) [15]. Ambos enfoques fueron detectados como potencialmente distintos ya en [15] y si bien sus predicciones coinciden, recién en [16] se demostró consistentemente la equivalencia entre ambos. La consistencia entre ambas prescripciones será central en esta tesis. Antes de presentar ambos diccionarios, haremos algunos comentarios generales sobre este enfoque.

Relajar la condición de una teoría de campos conforme particular y hablar describir propiedades generales de CFT_d permite considerar espacios AdS_{d+1} , cuyas isometrías $SO(d, 2)$ ya garantizan que la teoría de

campos en el borde asintótico será invariante frente al grupo conforme en d dimensiones $SO(d, 2)$. Siempre que trabajemos de esta forma, se está pensando que las simetrías extra que pudiera tener la teoría deberán construirse mediante espacios auxiliares en producto directo con AdS, similar al rol de la S^5 en la sección anterior, que se asociaba a las simetrías internas de supersimetría de la teoría de campos. Más precisamente, el espacio AdS₅ tiene isometrías isomorfas al grupo conforme en 4 dimensiones $SO(4, 2)$, mientras que S^5 tiene a $SO(6) \approx SU(4)$ como grupo de isometría. Las simetrías bosónicas de la teoría SYM con $\mathcal{N} = 4$ son $SU(2, 2) \times SU(4)_R$. Dado que $SU(2, 2) \approx SO(4, 2)$, puede comprobarse que el grupo de simetrías coincide para ambas teorías. De forma general, siempre que se tenga una teoría que mantenga la simetría conforme en su régimen cuántico, su dual será un espacio AdS. Además, cualquier otra simetría de la teoría de gauge se asociará con simetrías de algún espacio interno M . El espacio dual a una teoría de campos conforme de dimensión arbitraria d tendrá así la estructura general $AdS_{d+1} \times M$. Otro aspecto a mencionar en esta parte es el siguiente. Si bien describiremos consistentemente observables de CFT mediante holografía, no estamos afirmando que toda CFT admite una descripción holográfica. En esta tesis no estudiaremos ejemplos de tales teorías, aunque mencionaremos en la bibliografía suele aclararse esta posible ambigüedad, afirmando que se está describiendo una CFT holográfica.

Una situación de particular interés para esta tesis es el de considerar teorías con materia de prueba sobre una métrica fija AdS. Aunque aclararemos esto con más precisión en breve, diremos que la decisión estricta de dejar fija la métrica del espacio AdS trae como consecuencia que se predicción del tensor de energía momento de la CFT holográfica sea nulo, y se dice que dicha CFT no tiene tensor de energía momento. El rol central que ocupa el tensor de energía momento en una QFT general y en una CFT particular y las potenciales consecuencias de que éste sea nulo motiva este comentario. En un espíritu similar al del párrafo anterior, esta inconsistencia es producto de tomar un modelo de juguete y podría subsanarse o bien tomando en cuenta el efecto en la métrica de la materia dentro de AdS o bien considerando directamente fluctuaciones cuánticas dentro de la misma en forma de gravitones, i.e. materia bosónica de espín 2. Sin embargo, para poder confiar en los resultados de un análisis parcial de una teoría, este debe ser producto de un truncamiento consistente de sus grados de libertad. La justificación de este truncamiento consiste en que al escribir las ecuaciones de Einstein de una teoría de gravedad el efecto de la materia sobre la métrica siempre está mediado por la constante de Newton $G^{(10)}$ y que en virtud del análisis de la sección anterior se obtiene $G_{\mu\nu} = G^{(10)} T_{\mu\nu} \sim N^{-2} T_{\mu\nu}$, de donde se puede ver que los efectos de materia sobre la métrica en este contexto será siempre subdominante en N^{-2} respecto de la materia como objeto de prueba sobre el fondo⁸. El objetivo perseguido en estos últimos dos comentarios es que en cualquier abordaje de la dualidad en términos de modelos de juguete, obtendremos una representación incompleta de la teoría dual que buscamos describir. De forma general, una teoría gravitatoria de juguete incompleta nos dará, por supuesto, una CFT dual también incompleta. La pérdida de precisión en este enfoque será recompensada por la generalidad de los corolarios que de ella se obtienen.

3.3.1. GKPW o ansatz de Witten

Esta es la forma estándar de obtener observables en AdS/CFT. Esta prescripción establece una relación entre los observables de ambas teorías a partir de una relación entre sus funciones de partición. Concretamente, la inserción de fuentes para operadores invariantes de gauge de la teoría de campos, que llevan a la función generadora de momentos, se mapean a condiciones de contorno para campos fundamentales en la teoría de gravedad dual. Recordar que el cálculo de una función de partición se realiza enteramente en signatura Euclídea. El hecho de que agregar una fuente externa a una teoría de campos sea explícitamente deformar la teoría, mientras que cambiar las condiciones de contorno no, es un aspecto de la dualidad que aprovecharemos para definir los estados excitados holográficos que serán centrales en esta tesis.

La prescripción se puede presentar a partir de la expresión

$$Z_{CFT}^d \equiv Z_H^{d+1}, \quad (3.3.2)$$

⁸Si uno vuelve a (3.2.1) parece que esta intuición no funciona puesto que tanto la gravedad como el campo de gauge tienen el mismo prefactor. La solución a esta contradicción aparente surge al recordar que la operación traza es también proporcional a N como se describió alrededor de (3.1.6). El $T_{\mu\nu}$ escrito en la ecuación de arriba está pensado para materia normalizada en N tal que su término cinético tenga la normalización canónica, i.e. con un factor $\frac{1}{2}$ e independiente de N . Más adelante explicaremos la elección de esta normalización con más profundidad.

donde Z_{CFT}^d es la función de partición de una teoría de campos conforme en d dimensiones tiempoespaciales y Z_H^{d+1} es la función de partición de una teoría de campos sobre un fondo H , el análogo de AdS en signatura Euclídea presentado en la Sec. 2.2. La expresión anterior puede pensarse todavía como una consecuencia de (3.3.1) y sigue sin tener poder de cómputo real, puesto que los campos que describen ambas teorías son distintos y aún no tenemos formas de relacionarlos. El ansatz consiste en afirmar que a todo operador invariante de gauge de la teoría de campos (i.e. todo observable) se le corresponde un campo fundamental de la teoría gravitatoria dual y que la inserción de fuentes externas para un operador de la teoría de gauge de este tipo, se manifiesta en la teoría dual de gravedad como un cambio en las condiciones de contorno sobre el borde conforme de dicho campo fundamental⁹. En términos usados en un lenguaje general para CFT, los operadores duales a campos fundamentales de la teoría de gravedad son los operadores primarios quirales de la teoría CFT.

La función generadora de momentos de un operador \mathcal{O} de la CFT se obtiene deformando la función de partición en (3.3.2) con una fuente externa ϕ , de forma que

$$Z_{CFT}^d \equiv \int \mathcal{D}A_\mu e^{-S_{CFT}[A_\mu]} \quad \Rightarrow \quad Z_{CFT}^d[\phi] \equiv \int \mathcal{D}A_\mu e^{-S_{CFT}[A_\mu] - \int \phi \mathcal{O}} = \langle e^{-\int \phi \mathcal{O}} \rangle \quad (3.3.3)$$

donde hemos denotado colectivamente a los campos de la teoría de gauge como A_μ y el elemento de medida $\mathcal{D}A_\mu$ integra sobre las configuraciones de campo de cuadrado integrable. Notar que el cálculo de la función de partición se realiza en signatura Euclídea. Esto será importante cuando hagamos cálculos explícitos. Como se describió en la Sec. 2.1, en el formalismo de integral de caminos, los correladores conectados de la teoría original se obtienen tomando derivadas funcionales del logaritmo natural de la función generadora de momentos respecto de la fuente externa para luego apagar la fuente, i.e. la función de n puntos de \mathcal{O} será

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \mathcal{O}(x_i) \right\rangle \equiv \left[\frac{\delta^n \ln Z_{CFT}[\phi]}{\prod_{i=1}^n \delta \phi(x_i)} \right]_{\phi \rightarrow 0} \quad (3.3.4)$$

Al otro lado de la dualidad, la inserción de esta fuente externa se manifiesta como una deformación en las condiciones de contorno en el borde asintótico de la teoría de gravedad,

$$Z_H^{d+1} \equiv \int \mathcal{D}\Phi_0 e^{-S_H[\Phi]} \quad \Rightarrow \quad Z_H^{d+1}[\phi] \equiv \int \mathcal{D}\Phi_\phi e^{-S_H[\Phi]},$$

donde hemos representado como Φ colectivamente a todos los campos de la teoría de gravedad, $\mathcal{D}\Phi_0$ define una medida de integración sobre las configuraciones de campo nulas en el borde asintótico de H , mientras que $\mathcal{D}\Phi_\phi$ integra sobre configuraciones que satisfacen $\Phi|_\partial = \phi$, donde señalamos el borde asintótico por el subíndice ∂ . Recordar que esta integral de caminos se realiza sobre un espacio de dimensión mayor a la de la teoría de campos. Una primera observación es que gracias a que el cómputo se lleva a cabo en signatura Euclídea, i.e. en el espacio H introducido en la Sec. 2.2 que tiene como única frontera su borde asintótico, la imposición de condiciones de Dirichlet sobre la misma (en combinación con la regularidad de la solución dentro de H) es suficiente para tener un problema variacional bien definido. La segunda observación es que formalmente la métrica de H es divergente en su borde conforme y las soluciones regulares en su interior serán o bien nulas o bien divergentes sobre el mismo, de forma que el proceso de construir soluciones clásicas tales que $\Phi|_\partial = \phi$ debe regularizarse. Veremos ambos aspectos aparecer de forma explícita en el ejemplo que presentamos más abajo.

Con estas definiciones, podemos escribir una relación explícita para las funciones generadoras de momentos de la teoría conforme como

$$Z_{CFT}^d[\phi] \equiv Z_H^{d+1}[\phi] \equiv \int \mathcal{D}\Phi_\phi e^{-S_H[\Phi]} \sim e^{-S_H^0[\phi]}, \quad (3.3.5)$$

donde en la última igualdad aproximamos la integral de caminos sobre el espacio H por la acción sobre la capa de masa $S_H^0[\phi]$ que es una funcional de las condiciones de contorno del problema ϕ . Una solución completa a $Z_H^{d+1}[\phi]$ requiere de integrar sobre todas las geometrías de cualquier número género que

⁹En rigor de verdad esta prescripción excede el límite de $N \rightarrow \infty$ en la que lo estamos presentando en términos de (super)gravedad. En particular, uno puede usar esta prescripción para calcular valores de expectación de lazos de Wilson de la CFT de forma holográfica a través de la minimización de la acción de Nambu Goto (3.1.11) en un espacio ambiente AdS. Esta presentación reducida nos permite ir más rápido a los aspectos de la misma que queremos resaltar.

cumplan asintóticamente las condiciones de contorno impuestas por la medida. En su lugar, estamos desacoplando los grados de libertad gravitacionales del resto de la materia, de forma que la geometría obedece una aproximación de punto de ensilladura por sí misma, quedando así fija. La materia entonces se propaga sobre una métrica fija. La solución de gravedad dominante para espacios asintóticamente AdS y H serán generalmente los propios espacios AdS y H extendidos a todo el interior de la variedad en los casos más simples, como veremos en los ejemplos en los Caps. 4 y 5. Una vez más, esta aproximación de materia y gravedad desacoplada se corresponde con el límite $N \rightarrow \infty$ y $\lambda \rightarrow \infty$ con $g_{YM}^2 = g_s \rightarrow 0$ en términos del ejemplo planteado en la sección anterior. La ecuación (3.3.5), especialmente la última igualdad en el límite semiclásico, en combinación con (3.3.4), da lugar a lo que podríamos denominar como una de las ecuaciones maestras de esta tesis:

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \mathcal{O}(x_i) \right\rangle \equiv - \left[\frac{\delta^n S_H^0[\phi]}{\prod_{i=1}^n \delta\phi(x_i)} \right]_{\phi \rightarrow 0}. \quad (3.3.6)$$

La ecuación (3.3.6) tal como está escrita permite entonces el cálculo de funciones de correlación en una CFT holográfica en un régimen fuertemente acoplado (una cantidad no accesible mediante métodos perturbativos) en términos de la solución clásica de campos sobre espacios de constante cosmológica negativa, H en esta signatura. En la siguiente sección, veremos cómo podría extenderse esta expresión al caso de tiempo real y los problemas que esto acarrea a una visión holográfica del problema.

A continuación, presentaremos un ejemplo concreto del cálculo de una función de 2 puntos para un operador \mathcal{O} escalar de la CFT mediante la expresión (3.3.6). Conseguiremos esto encendiendo una fuente externa ϕ para dicho operador, lo que implica condiciones de contorno no nulas para su operador dual en la teoría de gravedad también escalar, que llamaremos Φ . Como se mencionó anteriormente, resolveremos las ecuaciones de movimiento del campo pensándolo como un campo de prueba sobre la métrica, de forma que la variedad es exactamente el espacio H, el que describiremos según la métrica (2.2.7),

$$ds^2 = (1 + r^2) d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\Omega_{d-1}^2.$$

Este ejemplo nos permitirá comprender las sutilezas generales del uso de esta prescripción, como la imposición de condiciones de contorno sobre un borde asintótico, y cómo se resuelven. El problema se representa pictóricamente en la Fig. 3.4.

Se considera entonces un campo escalar Φ de masa m^2 libre sobre una geometría H_{d+1} , con acción

$$S_H = \frac{1}{2} \int \sqrt{g} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^2), \quad (3.3.7)$$

donde el índice μ barre las $d + 1$ coordenadas de H_{d+1} . Queremos encontrar la acción en la capa de masa para una configuración de campo tal que resuelva las EDM y que sea regular en H y que además satisfaga sobre el borde asintótico $\Phi|_\partial = \phi$ en algún sentido que definiremos con más precisión en breve.

Corroboraremos en primer lugar que hemos definido un problema variacional bien formulado. Para esto, comprobaremos que la acción (3.3.7) con condiciones de contorno de Dirichlet tiene un punto estacionario si el campo cumple las ecuaciones de movimiento. Calcularemos entonces la variación δS_H recordando que,

$$\delta \mathcal{L} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta (\partial_\mu \Phi) = m^2 \Phi \delta \Phi + \partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi \delta \Phi, \quad (3.3.8)$$

e integrando por partes en la acción tenemos que

$$\delta S_H = \int \sqrt{-g} \delta \mathcal{L} = \int \sqrt{-g} \delta \Phi (\square - m^2) \Phi - \frac{1}{2} \int_\partial \sqrt{-\gamma} \delta \Phi \partial_n \Phi. \quad (3.3.9)$$

De aquí puede verse que fijar $\delta \Phi|_\partial \equiv 0$ en las regiones del borde de la variedad, la acción tiene un punto estacionario cuando las EDM se cumplen. Notar que en este caso hay un solo tipo de borde tipo espacio, que es también el borde donde está definida la teoría holográfica y por tanto es información directa de la CFT. En presencia de más bordes de distinto tipo habría otras regiones no accesibles desde la teoría de campos y que pondrían en jaque la interpretación completa del problema en términos de un principio holográfico. Volveremos sobre esto al introducir la holografía en tiempo real.

Volviendo sobre la acción (3.3.7), integrando por partes el término cinético, se obtiene

$$S_H = \frac{1}{2} \int \sqrt{g} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^2) \quad (3.3.10)$$

$$= \frac{1}{2} \int \partial_\mu (\sqrt{g} \Phi \partial^\mu \Phi) - \frac{1}{2} \int \sqrt{g} \Phi (\square - m^2) \Phi \quad (3.3.11)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial} \sqrt{\gamma} \Phi n^\mu \partial_\mu \Phi - \frac{1}{2} \int \sqrt{g} \Phi (\square - m^2) \Phi, \quad (3.3.12)$$

donde en el último renglón usamos el teorema de Gauss en $d + 1$ dimensiones para reescribir la derivada total como un término de borde sobre ∂ , el borde asintótico de H, $\sqrt{\gamma}$ es la métrica inducida sobre ∂ , n^μ es un vector unitario $n^2 = n^\mu n_\mu = 1$ que apunta hacia afuera de ∂ y $\square \equiv \sqrt{g}^{-1} \partial_\mu (\sqrt{g} \partial^\mu)$ es el operador Laplaciano estándar para espacios curvos.

Supongamos por un momento que hemos encontrado una solución a las ecuaciones de movimiento tal que $(\square - m^2) \Phi = 0$, la acción (3.3.7) en la capa de masa resulta

$$S_H^0 = \frac{1}{2} \int_{\partial} \sqrt{\gamma} \Phi n^\mu \partial_\mu \Phi = \frac{1}{2} \int_{\partial} r^d \Phi (r \partial_r \Phi) \quad (3.3.13)$$

donde en la segunda igualdad hemos usado $\sqrt{\gamma} = \sqrt{1 + r^2} r^{d-1} \sim r^d$ y $n^\mu = \sqrt{1 + r^2} \delta_r^\mu \partial_r \sim \delta_r^\mu r \partial_r$ para la métrica (2.2.7) sobre el borde asintótico, que representa el límite $r \rightarrow \infty$. Lo que observamos de esta expresión es la necesidad explícita de regular divergencias, i.e. tal como está presentada la prescripción ofrece resultados divergentes. El origen de las divergencias no es difícil de comprender en términos geométricos: hemos definido la información a extraer en términos de una frontera conforme de nuestro espacio, donde la métrica donde trabajamos es singular. Esto sugiere que un método de regularización razonable sería el de usar una distancia de corte R para el espacio H, donde se define el borde ∂ . Esta intuición resulta ser correcta en términos computacionales, se denomina renormalización holográfica [62], por motivos que aclararemos en breve y se presenta de forma sistemática, aunque en otras coordenadas donde es más natural, en el Ap. A. Esta forma de regular las divergencias ya sugiere algunos comentarios. Acerca del nombre, su relación con la renormalización surge al recordar que hay una asociación entre la dirección holográfica en la teoría gravitatoria y el flujo GR en la teoría de campos, siendo el borde asintótico asociado con el comportamiento UV de la teoría. Si la renormalización en la teoría de campos tradicional cura las divergencias UV de dicha teoría, este proceso, que también resuelve divergencias UV en los términos que acabamos de explicar, será el análogo holográfico de este procedimiento. En segundo lugar, nuevamente aparece algo en principio indeseable en cualquier teoría invariante de escala que es precisamente una escala con dimensiones, i.e. R . Dicho de otro modo, en una teoría conforme a nivel cuántico, no tiene lugar ningún parámetro dimensional. Desde un punto más formal, no es obvio que el proceso de regular divergencias introduciendo una nueva escala para luego quitarla sobre el resultado final ofrezca una respuesta consistente. Pueden contrastarse los mecanismos de Pauli Villars con el de regularización dimensional para teorías de campos tradicionales, donde si bien la primera puede permitir obtener resultados correctos, se prefiere la segunda que mantiene la invarianza de gauge en todo momento. En este sentido la Renormalización holográfica es más similar a una visión Wilsoniana de la renormalización.

Siendo este el primer ejemplo de un cálculo holográfico no ahondaremos aún en el proceso de regularización holográfica y dejaremos los detalles para los capítulos siguientes. Por ahora utilizaremos un método más rudimentario de regularización con un doble objetivo. El primero es de velocidad para llegar al resultado que buscamos y el segundo es que, producto de esta regularización descuidada, llegaremos a un resultado no del todo correcto, lo que hace tangible la importancia de una correcta regulación. El paso a seguir entonces es buscar la solución clásica de las ecuaciones de movimiento. Veremos que estas soluciones son en rigor divergentes, pero su comportamiento es tal que podremos obtener un resultado finito para la acción sobre la capa de masa (3.3.13).

La EDM para Φ es $(\square - m^2) \Phi = 0$, que en coordenadas (2.2.7) se escribe como

$$\left(\frac{1}{r^{d-1}} \partial_r (r^{d-1} (1 + r^2) \partial_r) + \frac{\partial_\tau^2}{1 + r^2} + \frac{\Delta_\Omega}{r^2} - m^2 \right) \Psi = 0,$$

donde Δ_Ω es el operador Laplaciano en coordenadas esféricas y que expandida como ondas planas de τ y armónicos esféricos de Ω_{d-1} [61], $\Phi \propto e^{i\omega t} Y_{l m_i}(\Omega) f_{-i\omega l}(r)$ donde m_i engloba el resto de los números

cuánticos angulares, se obtiene una ecuación diferencial para $f_{-i\omega l}(r)$ de la forma¹⁰

$$\left(\frac{1}{r^{d-1}} \partial_r \left(r^{d-1} (1+r^2) \partial_r \right) - \frac{\omega^2}{1+r^2} + \frac{l(l+d-2)}{r^2} - m^2 \right) f_{-i\omega l}(r) = 0.$$

Una ecuación diferencial de segundo orden tiene 2 soluciones linealmente independientes. Por la estructura de esta ecuación, según el teorema de Frobenius Fuchs, estas tendrán puntos singulares en $r = 0$ y/o $r \rightarrow \infty$, donde la ecuación diferencial está mal definida. Podemos elegir un juego de soluciones linealmente independientes, por ejemplo, tal que una sea regular en el origen y la otra no; fijado este comportamiento ya no podremos controlar el comportamiento de ninguna en $r \rightarrow \infty$ y típicamente ambas serán divergentes en este límite. Lo análogo puede hacerse invirtiendo $r \rightarrow \infty$ y $r \rightarrow 0$ en el argumento anterior. Habiendo probado más arriba que estamos resolviendo un buen problema variacional y que el problema es lineal, sabemos también que la solución es única. La construiremos entonces tratando de tomar decisiones físicamente motivadas.

Elegimos una base que tenga propiedades definidas en el interior de H, tal que una de las soluciones sea regular y la otra no en $r = 0$. Las soluciones regulares en el origen son, a menos de una constante de normalización,

$$f_{-i\omega l}(r) = r^l (r^2 + 1)^{-i\frac{\sqrt{\omega^2}}{2}} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}(d+l-\Delta - i\sqrt{\omega^2}), \frac{1}{2}(l+\Delta - i\sqrt{\omega^2}); \frac{d}{2} + l; -r^2 \right) \quad (3.3.14)$$

donde ${}_2F_1(a, b, c, x)$ es la función hipergeométrica de Gauss [61] y hemos definido Δ como la solución más grande de $m^2 = \Delta(\Delta - d)$, i.e. $\Delta = d/2 + \sqrt{d^2/4 + m^2} \in \mathbb{R}$ por conveniencia notacional pero también porque será importante más adelante. En todo el análisis siguiente asumiremos $m^2 > 0$ y por tanto $\Delta > d$. Como sugiere la notación, esta será la dimensión conforme del operador escalar dual \mathcal{O} en la CFT. Más adelante comentaremos sobre otros posibles valores de m^2 en espacios de curvatura negativa. Se ha también elegido hacer explícito a través de $\sqrt{\omega^2}$ que la solución no puede depender del signo de ω . Esto será de importancia mayúscula cuando estudiemos y peguemos soluciones a esta ecuación en distintas signaturas para obtener un pegado suave¹¹. Luego, la solución más general regular en el origen se obtendrá como combinación lineal de la base anterior, i.e.

$$\Phi(r, \tau, \Omega) = \sum_{l, m_i} \int d\omega c_{\omega l m_i} e^{i\omega\tau} Y_{l m_i}(\Omega) f_{-i\omega l}(r), \quad (3.3.15)$$

donde $c_{\omega l m_i}$ son coeficientes que quedarán determinados al imponer las condiciones de contorno, para lo cual estudiaremos el comportamiento asintótico de las funciones $f_{-i\omega l}(r)$,

$$f(-i\omega, l, r) \sim A(-i\omega, l) r^{\Delta-d} + B(-i\omega, l) r^{-\Delta}, \quad (3.3.16)$$

donde definiendo $\Gamma(x)$ como la función Gamma [61],

$$A(-i\omega, l) \equiv \frac{\Gamma(\Delta-1)\Gamma(l+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(l+\Delta-i\omega)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(l+\Delta+i\omega)\right)}, \quad B(\omega, l) = \frac{\Gamma(1-\Delta)\Gamma(l+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(l-\Delta-i\omega+2)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(l-\Delta+i\omega+2)\right)}. \quad (3.3.17)$$

Independientemente de las funciones A y B , cuya forma precisa depende de la normalización usada al definir la base, vemos que el comportamiento asintótico de la solución no ofrece ninguna solución regular en el borde asintótico.

En rigor de verdad, para el caso de un campo escalar sin masa, $\Delta - d = 0$ y la solución dominante es regular en el borde. Este es el ejemplo preciso con el que Witten propone su ansatz en [11, 12]. Sin embargo, aquel es un caso particular y estamos queriendo presentar la forma general en que uno aborda este tipo de problemas.

¹⁰La notación $-i\omega$ en $f_{-i\omega l}(r)$ se acomodará mejor a los resultados de los próximos capítulos.

¹¹Para $d+1 \geq 3$, los armónicos esféricos suman sobre $l \geq 0$, pero para AdS₃ sus autofunciones tienen autovalores $l(l+d-2) = l^2$ y reemplazaríamos $l \rightarrow \sqrt{l^2}$, o $|l|$ aprovechando que es entero [63]. En esta tesis no extenderemos analíticamente coordenadas angulares, pero esto podría ser de interés en problemas holográficos de agujeros negros rotantes i.e. teorías de campo con potencial químico $\mu \neq 0$ [13].

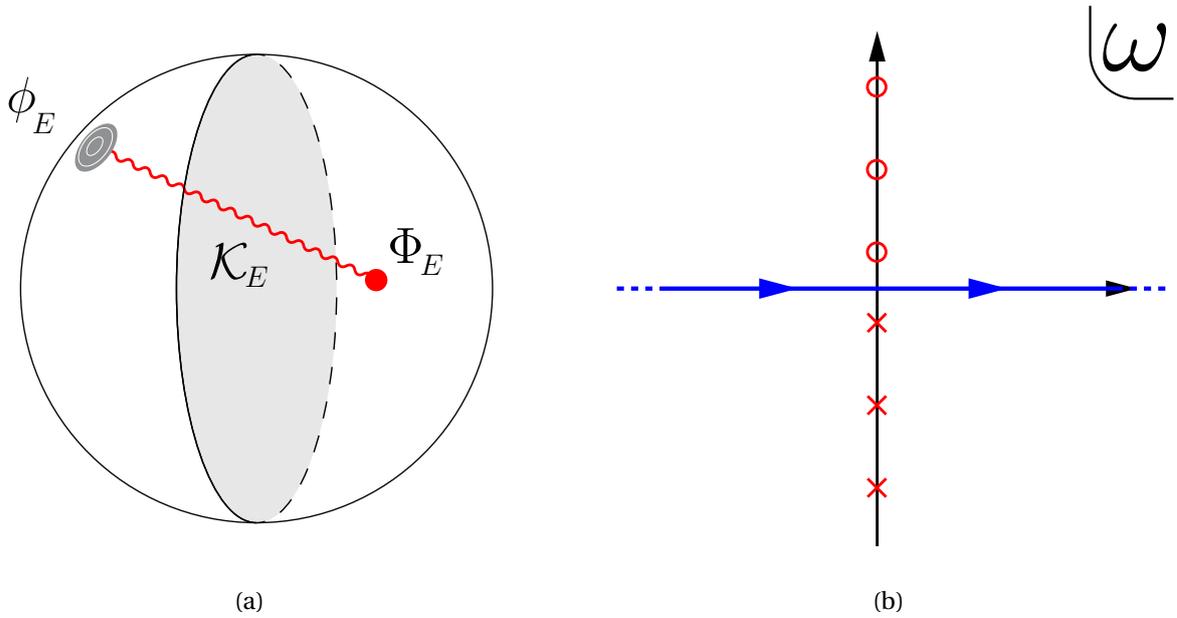


Figura 3.4: Se muestra en (a) el problema a resolver en el espacio H , con la solución clásica Φ_E representada como la que se obtiene de propagar la información de la fuente asintótica ϕ_E al interior de H con el propagador de borde a volumen \mathcal{K}_E y en (b) los polos de la solución clásica (3.3.24). Se distinguen los polos que provienen de $\omega = \pm\omega_{nl}$.

Explicábamos entonces que tal como está presentada la base $f(-i\omega, l, r)$ no parece admitir condiciones de contorno en su borde asintótico. Sin embargo, es crucial notar que la divergencia del campo está dominada por una potencia máxima $\Delta - d$ y es independiente de ω y l . Es interesante contrastar esto con el comportamiento de un campo en espacio plano, donde la expresión análoga a (3.3.16) es

$$f_{\text{plano}}(-i\omega, l, r) \sim \tilde{A}(-i\omega, l) r^{-\frac{d-1}{2}} e^{-r\sqrt{m^2+\omega^2}} + \tilde{B}(-i\omega, l) r^{-\frac{d-1}{2}} e^{-r\sqrt{m^2+\omega^2}}, \quad (3.3.18)$$

donde más allá del decaimiento exponencial, la diferencia radica en que cada modo decae/diverge distinto. Lo que estamos observando en (3.3.16), es que el efecto de la constante cosmológica en H (y AdS) es que hay un factor divergente común a todos los modos. Esto permite dar un sentido concreto a la condición sobre el borde $\Phi|_{\partial} = \phi$ de dos formas: o bien imponiendo una distancia de corte R donde, teniendo en cuenta las potencias en (3.3.16), se impone formalmente una función $\phi(t, \Omega)$ sobre ∂ como

$$\Phi(t, r, \Omega)|_{\partial} = \Phi(t, r, \Omega)|_R = \Phi(t, R, \Omega) = R^{\Delta-d} \phi(t, \Omega); \quad (3.3.19)$$

o bien trabajando en un espacio sin regularizar pero imponiendo la condición más suave de que el campo cerca del borde conforme se comporte a orden dominante como

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(t, r, \Omega) \sim r^{\Delta-d} \phi(t, \Omega) + \dots \quad (3.3.20)$$

El primer procedimiento es el más formal y lleva al proceso de renormalización holográfica que se detalla en el Ap. A. Como se adelantó, para este ejemplo usaremos el segundo. La forma explícita de la condición y la potencia naturalmente cambia con el juego de coordenadas usado, pero el proceso será siempre sustraer la potencia dominante en la expansión y fijar como factor que la acompaña a $\phi(t, \Omega)$, la condición de borde a imponer.

Dado que el campo en (3.3.15) está escrito en términos de sus modos normales en términos de bases ortonormales, $e^{i\omega\tau}$ e $Y_{lm_i}(\Omega)$, será conveniente expandir la condición de contorno también en esta base,

$$\phi(t, \Omega) = \sum_{l, m_i} \int d\omega e^{i\omega\tau} Y_{lm_i}(\Omega) \phi_{\omega lm_i} \quad (3.3.21)$$

de donde se obtiene a partir de (3.3.20)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(t, r, \Omega) = r^{\Delta-d} \sum_{l, m_i} \int d\omega c_{\omega lm_i} e^{i\omega\tau} Y_{lm_i}(\Omega) A(-i\omega, l) + \dots = r^{\Delta-d} \sum_{l, m_i} \int d\omega e^{i\omega\tau} Y_{lm_i}(\Omega) \phi_{\omega lm_i} \quad (3.3.22)$$

y en consecuencia, por ortonormalidad de la base,

$$c_{\omega l m_i} \equiv \frac{\phi_{\omega l m_i}}{A(-i\omega, l)}. \quad (3.3.23)$$

La expresión (3.3.15) se reescribe finalmente como

$$\Phi(r, \tau, \Omega) = \sum_{l, m_i} \int d\omega \frac{\phi_{\omega l m_i}}{A(-i\omega, l)} e^{i\omega\tau} Y_{l m_i}(\Omega) f_{-i\omega l}(r) = \int_{\partial} \phi(\tau', \Omega') \mathcal{K}_E(\tau, r, \omega; \tau, \Omega). \quad (3.3.24)$$

En la segunda igualdad hemos reescrito el campo en términos más geométricos definiendo $\mathcal{K}_E(\tau, r, \omega; \tau, \Omega)$ como el propagador Euclídeo del borde al volumen y está representado como una línea ondulatoria en la Fig. 3.4. Su forma precisa puede obtenerse pero no es de nuestro interés ahora. Es inmediato mostrar que para $r \rightarrow \infty$ la solución cumple las condiciones de borde. Es importante notar que (3.3.24) tiene polos en el integrando, mas no sobre el camino de integración. Los polos tal y como está escrita provienen de $A^{-1}(-i\omega, l)$ que contiene polos simples debido a las funciones Γ , y que suceden siempre que $\omega = \pm i\omega_{nl}$, con $\omega_{nl} = 2n + l + \Delta$ y pueden verse en la Fig. 3.4. Estos polos jugarán un rol importantes en el próximo capítulo. Lo que resta ahora es estudiar las propiedades de $\Phi|_{\partial}$ y $(r\partial_r\Phi)|_{\partial}$ para insertarlas en (3.3.13).

El primero de estos objetos, $\Phi|_{\partial}$ es fácil de escribir puesto que hemos fijado su forma al imponer las condiciones de contorno, i.e. $\Phi|_{\partial} = r^{\Delta-d}\phi(\tau, \Omega)$. Para el segundo, escribimos

$$r\partial_r\Phi_L(\tau, r, \Omega) = \sum_{l, m_i} \int d\omega \frac{\phi_{\omega l m_i}}{A(-i\omega, l)} e^{i\omega\tau} Y_{l m_i}(\Omega) r\partial_r f(\omega, l, r). \quad (3.3.25)$$

y usaremos nuevamente (3.3.16), de donde¹²

$$\frac{1}{A(-i\omega, l)} r\partial_r f(\omega, l, r) \sim r^{\Delta-d} \mathbb{S}[\omega, l] - \Delta r^{-\Delta} \frac{B(-i\omega, l)}{A(-i\omega, l)}. \quad (3.3.26)$$

El primer término $\mathbb{S}[\omega, l]$ es una serie de potencias positivas enteras de los momentos. En el Ap. A, se demostrará que este tipo de términos pueden reescribirse como derivadas de la función δ de Dirac y puestas en términos de borde de la acción. Lo primero muestra que estos términos son contribuciones divergentes relevantes solamente en los puntos de contacto, para estudiar la función de Green para puntos coincidentes, por ejemplo. Lo segundo muestra que estas contribuciones pueden removerse sustrayendo estas contribuciones a la acción (3.3.7), sin modificar las ecuaciones de movimiento y por ende el análisis que hemos hecho. Por los motivos expuestos, descartaremos la contribución $\mathbb{S}[\omega, l]$ y conservaremos la subdominante.

Insertando todo esto en (3.3.13), se tiene

$$S_H^0 = \frac{1}{2} \int_{\partial} r^d \Phi(r\partial_r\Phi) \quad (3.3.27)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial} r^d \left(r^{\Delta-d} \phi(\tau, \Omega) \right) \left(\sum_{l, m_i} \int d\omega \phi_{\omega l m_i} e^{i\omega\tau} Y_{l m_i}(\Omega) \left\{ -\Delta r^{-\Delta} \frac{B(-i\omega, l)}{A(-i\omega, l)} \right\} \right) \quad (3.3.28)$$

$$= -\frac{\Delta}{2} \sum_{l, m_i} \int d\omega \left(\int_{\partial} \phi(\tau, \Omega) e^{i\omega\tau} Y_{l m_i}(\Omega) \right) \frac{B(-i\omega, l)}{A(-i\omega, l)} \phi_{\omega l m_i} \quad (3.3.29)$$

$$= -\frac{\Delta}{2} \sum_{l, m_i} \int d\omega \phi_{\omega l m_i}^* \frac{B(-i\omega, l)}{A(-i\omega, l)} \phi_{\omega l m_i} \quad (3.3.30)$$

$$= -\frac{\Delta}{2} \int_{\partial} \int_{\partial'} \phi(\tau, \Omega) \left(\sum_{l, m_i} \int d\omega \frac{B(-i\omega, l)}{A(-i\omega, l)} e^{i\omega(\tau-\tau')} Y_{l m_i}(\Omega) Y_{l m_i}^*(\Omega') \right) \phi(\tau', \Omega'), \quad (3.3.31)$$

donde en la línea final hemos escrito el resultado tanto en espacio de momentos como de configuración. Estaremos más interesados en la segunda forma para comparar con los resultados obtenidos para teorías conformes en el capítulo anterior. Notar que a orden dominante fueron controladas las divergencias y los

¹²Para esta expansión hemos usado que Δ no es un entero positivo. Si lo fuese, la expansión de la Hipergeométrica de Gauss en (3.3.14) contiene un término logarítmico acompañando la potencia subdominante $r^{-\Delta}$. Lo importante de la expansión de abajo es que en cualquier caso lo que acompaña a la potencia dominante es una serie de potencias positivas de los momentos y lo que acompaña a la potencia subdominante contiene una estructura analítica más compleja con polos. Ver Ap. A.

términos que siguen son crecientemente subdominantes. Esta expresión ya permite hacer uso de (3.3.6), de donde se obtiene que

$$\langle \mathcal{O}(\tau, \Omega) \mathcal{O}(\tau', \Omega') \rangle \equiv - \left[\frac{\delta^2 S_H^0[\phi]}{\delta \phi(\tau, \Omega) \delta \phi(\tau', \Omega')} \right]_{\phi \rightarrow 0} = \Delta \sum_{l, m_l} \int d\omega \frac{B(-i\omega, l)}{A(-i\omega, l)} e^{i\omega(\tau - \tau')} Y_{lm_l}(\Omega) Y_{lm_l}^*(\Omega'), \quad (3.3.32)$$

siendo la función de 2 puntos la única no trivial. La integral de momentos se puede llevar a cabo usando el teorema de residuos, obteniendo

$$\langle \mathcal{O}(\tau, \Omega) \mathcal{O}(\tau', \Omega') \rangle \equiv \frac{C_{\Delta, d}}{[\cosh(\tau - \tau') - \cos(\Omega - \Omega')]^\Delta} \quad (3.3.33)$$

donde $C_{\Delta, d}$ es una constante de normalización heredada del cómputo holográfico y puede absorberse en una redefinición de \mathcal{O} , y donde por $\cos(\Omega - \Omega')$ nos referimos a la distancia ortodrómica¹³ sobre la esfera S^{d-1} . Notar que el signo negativo en el prefactor de (3.3.27) es crucial para obtener un propagador de positivo definido en signatura Euclídea, nuevamente vinculante con la unitariedad de una QFT. Este resultado es para una teoría que vive en el borde de AdS en coordenadas globales está definido sobre el cilindro $\mathbb{R}_\tau \times S^{d-1}$. Los resultados en la CFT pueden conectarse a través de una transformación conforme¹⁴ que lleve del cilindro al plano, para obtener,

$$\langle \mathcal{O}(\tau, \Omega) \mathcal{O}(\tau', \Omega') \rangle \equiv \frac{\tilde{C}_{\Delta, d}}{[(\tau - \tau')^2 + (x_i - x'_i)^2]^\Delta} \quad \Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2} \quad (3.3.34)$$

donde $\tilde{C}_{\Delta, d}$ es la normalización transformada y hemos recuperado momentáneamente $L^2 = 1$. Podemos reconocer el resultado para teorías conformes en espacio plano y donde también reconocemos que $\Delta = d/2 + \sqrt{d^2/4 + m^2}$ definido en términos de los parámetros de AdS es la dimensión conforme del operador dual. Esto representa el primer cálculo holográfico explícito en este trabajo y encierra muchos de los aspectos esenciales de la forma en que trabajaremos en los capítulos venideros. Para este ejemplo hemos tratado de mencionar muchas de las sutilezas de este cálculo que surgen ya en signatura Euclídea, en el afán de separarlos de los que son propios del tratamiento a tiempo real, foco de atención de este trabajo. En la literatura suele ser más común encontrar todo el cálculo realizado directamente en coordenadas de Poincarè, de forma que nos resultó más interesante mostrar este procedimiento en otro juego de coordenadas. A continuación haremos una serie de comentarios sobre el resultado (3.3.34).

En primer lugar, es interesante notar que a partir de (3.3.27) uno también puede calcular la función de 1 punto [14]

$$\langle \mathcal{O}(\tau, \Omega) \rangle = \frac{1}{2} \int_{\partial} r^\Delta (r \partial_r \Phi) = r^\Delta \langle \Pi_r \rangle_{\partial}; \quad \Pi_r \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_r \Phi)}, \quad (3.3.35)$$

donde hemos reconocido el valor de expectación del momento radial canónicamente conjugado Π_r , evaluado sobre el borde ∂ , regulado con el prefactor r^Δ que retiene el factor dominante de la expansión [14, 64]. Naturalmente, apagar la fuente ϕ llevará a un valor de expectación en un estado de vacío. Es directo ver que el resultado (3.3.35) es lineal en ϕ y que en $\phi \rightarrow 0$ se recupera el resultado de CFT.

Es interesante también volver sobre el resultado trivial obtenido para las funciones de 3 y más puntos por este método, aún con $\phi \neq 0$. Notar primero que con esto nos referimos a las contribuciones conectadas de las funciones de n puntos. La forma de interpretar este resultado es volver sobre el comentario acerca de los modelos de juguete al comenzar la sección. El resultado obtenido debe interpretarse como el primer orden de una serie asintótica en $1/N$, de forma que la predicción que obtenemos no es que la teoría solo tiene funciones de 2 puntos no triviales, si no que las mismas son nulas a orden N^0 , para campos cuyo términos dinámicos en la acción estén normalizados de forma canónica sin dependencia en N . De forma más concreta, hemos normalizado nuestros operadores con un N extra respecto de (3.1.6) tal que la función de 2 puntos conectada sea de orden N^0 . Con esta normalización obtenemos valores de expectación de vacío que serían de orden N pero que son nulos por invarianza conforme $\langle \mathcal{O} \rangle = N \times 0 = 0$. Las funciones conectadas de orden superior son de orden N^{2-n-2g} para la función de $n \geq 3$ puntos conectadas. Las correcciones en N debieran aparecer una vez que consideremos topologías de género g superior, como explicamos alrededor de

¹³Por ejemplo, en $d+1=3$, $C_{\Delta, 3} = \Delta(\Delta-1)/2^{\Delta-1} \pi$ y la distancia ortodrómica es simplemente $\cos(\Omega - \Omega') = \cos(\varphi - \varphi')$ [19, 63].

¹⁴En H esto es solo un cambio de coordenadas de E-Globales a Poincarè.

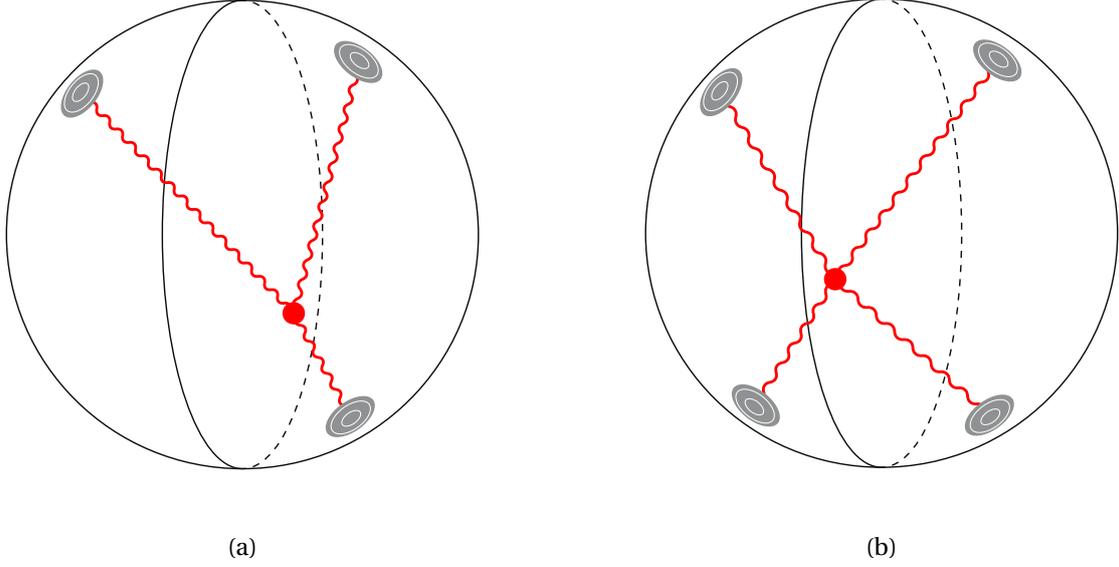


Figura 3.5: Diagramas de Witten de 3 y 4 puntos

(3.1.4) y (3.1.15). En esta normalización de los operadores, sin embargo, hemos introducido una modificación en el conteo de potencias de N y las correcciones de orden superior ya no se corresponden solamente a correcciones de topológicas género g mayor, si no que se mezclan con las correcciones semiclásicas al encender interacciones en AdS. Para ver esto, recordemos que la acción de SUGRA (3.2.1) tiene un factor $(G^{(10)})^{-1} \propto N^2$ en frente y tomemos un campo escalar sin masa con interacciones cúbicas y cuárticas,

$$S \sim \frac{N^2}{2} \int (\partial\Phi)^2 + g\Phi^3 + \lambda\Phi^4 = \frac{1}{2} \int (\partial\tilde{\Phi})^2 + \frac{g}{N}\tilde{\Phi}^3 + \frac{\lambda}{N^2}\tilde{\Phi}^4 \quad (3.3.36)$$

donde en la segunda igualdad hemos definido el campo $\tilde{\Phi} = N\Phi$, tal que el término dinámico quede con factor $\frac{1}{2}$. Esto reproduce el conteo que hicimos más arriba en este párrafo para $g = 0$. Las interacciones en la teoría de gravedad se incorporan como correcciones al cálculo que hicimos en una notación similar a la de los diagramas de Feynman, llamados diagramas de Witten. Esencialmente, la diferencia radica en incorporar a la diagramática el borde de AdS, donde empiezan y terminan todos los puntos asociados a las fuentes externas. Las interacciones tendrán lugar dentro de AdS. Pueden verse dos ejemplos de estos diagramas en la Fig. 3.5. Veremos un ejemplo explícito de cómo se pueden obtener funciones de 3 puntos no triviales en el Cap 4.

Volviendo sobre $C_{\Delta,d}$ y $\tilde{C}_{\Delta,d}$, si bien sus valores precisos no son físicos, sí lo son sus cocientes respecto de las funciones de más puntos, que entran en juego al considerar las identidades de Ward. En este punto, se vuelve más relevante la forma de regularizar el espacio usada. De la forma en que lo hicimos, $\tilde{C}_{\Delta,d} = \pi^{-\frac{d}{2}}\Gamma(\Delta+1)/\Gamma(\Delta-d/2)$, que difiere de la predicción con el cociente obtenido con la función de 3 puntos por un factor de $(2\Delta-d)/\Delta$ [65]. Una regularización mediante el método de renormalización holográfica permite obtener el coeficiente correcto. Sin embargo, como veremos en las aplicaciones, las funciones $n \geq 3$ puntos son naturalmente convergentes en AdS, al contrario del cálculo del ejemplo, y su resultado es independiente del método de regularización usado. A todos los efectos prácticos, uno puede utilizar el método de regularización del ejemplo (que por lo general conlleva a integrales en espacio de momento más tratables) y corregir el coeficiente de la función de 2 puntos al final del cálculo.

Haremos ahora los comentarios pertinentes sobre los valores físicos de m^2 y Δ en espacios AdS. La intuición sobre espacio plano sugiere que $m^2 > 0$, lo que parcialmente motiva su notación. Sin embargo, desde un enfoque de teoría cuántica de campos la interpretación del término cuadrático como la masa en reposo $m \in \mathbb{R}$ al cuadrado de la partícula asociada al campo se realiza a posteriori y no es una noción fundamental. Sin embargo, en ese contexto el signo positivo de m^2 sí es importante en el sentido de que mantiene la unitariedad de la teoría de campos. Ésta última es una condición necesaria requerida para hacer una interpretación probabilística de los resultados de la teoría de campos y en términos más operativos implica que la norma de cualquier estado físico debe ser no negativa. Para el caso de una teoría conforme esta

condición lleva a que $\Delta \geq (d-2)/2$ para estados sin momento angular y $\Delta \geq d-2+l$ para $l > 0$, que de todas formas es una cota mayor a la primera. Desde la descripción de la teoría holográfica en AdS, además de la masa, esta condición está controlada por la dimensionalidad del espacio y por la constante cosmológica/radio de AdS, que hemos puesto $L^2 = 1$. A partir de la definición de Δ usada debajo de (3.3.14), se tiene que la dimensión conforme del operador dual \mathcal{O} es $\Delta = d/2 + \sqrt{d^2/4 + m^2}$, de donde uno puede sugerir $m^2 \geq -d^2/4$ que permite $\Delta \in \mathbb{R}$. A este límite inferior para las masas en AdS se la conoce como la cota de Breitenlohner Freedman [66]. Así las cosas, pareciera que la dualidad no permite describir todos los estados unitarios de la teoría, dado que faltan aquellos con $d/2 > \Delta \geq (d-2)/2$. La forma de incluir estos estados desde la descripción holográfica está fuera de los intereses de este trabajo e implica agregar términos de borde a la acción (3.3.7) para definir el problema variacional en términos de otras condiciones de contorno [67]. En este punto, es relevante mencionar que la relación entre m^2 y Δ encontrada en (3.3.34), es válida para campos/operadores escalares y que en casos con campos de espín más alto la relación cambia. Puede consultarse una tabla con las mismas en [7].

Un fenómeno interesante al describir en el intervalo $1 - d^2/4 \geq m^2 \geq -d^2/4$, conocido como la ventana de Breitenlohner Freedman [66]. En este rango, puede observarse (3.3.16) que ambas soluciones son regulares en el borde asintótico. En términos de los modos normalizables de la teoría, sucede que existen dos cuantizaciones posibles alternativas en AdS, que llevan a operadores del borde con distinta dimensión conforme, $\Delta < 0$ o $d - \Delta < 0$. La definición de un buen producto interno regular entre los modos muestra que no es posible hacer una cuantización en términos de una combinación lineal de ambas. No ahondaremos sobre este punto en este trabajo.

Otro punto relevante corresponde a la renormalizabilidad de la deformación de la teoría en (3.3.3). De un análisis estándar, es sabido que el operador será relevante siempre que $\Delta < d$. La interpretación holográfica estándar requiere que una deformación de la teoría no rompa las simetrías UV de la CFT, que son las que se identifican con las isometrías de AdS. Dicho de otra forma, solo puede interpretarse a la CFT como viviendo en el borde de AdS si en el punto fijo UV la deformación es relevante y por tanto pequeña en el UV. Esto indica que solo los casos con $\Delta < d$, i.e. $m^2 < 0$ están bien definidos en el sentido que hemos explicado en esta sección. En la bibliografía, sin embargo, suele no aclararse este punto y se asume que se realizan las cuentas en el régimen $\Delta < d$ y luego se extienden los resultados analíticamente para cualquier otro valor. Nosotros tomaremos también esta convención.

Un último comentario sobre Δ y m^2 es que, si bien en este modelo la masa es un parámetro libre, en los ejemplos de cuerdas IIB las masas de los campos suelen aparecer al descomponer los campos originales en modos KK sobre la esfera S^5 o sobre el espacio compacto auxiliar correspondiente. En este contexto, $m^2 = l(l+4)$, proveniente de una ecuación estandar de autovalores de armónicos esféricos y de donde se obtiene $\Delta = l+4$. Esto quiere decir que para modelos de arriba hacia abajo, lo físico es considerar casos donde $\Delta \in \mathbb{N}$, donde, por ejemplo, la expansión genérica (3.3.26) contiene términos logarítmicos. Hecha esta mención, en esta tesis no haremos mayor distinción entre uno y otro caso.

Antes de describir los detalles de la prescripción BDHM haremos un comentario acerca de los modos normalizables en signatura Euclídea. Al principio del ejemplo comprobamos que las condiciones de Dirichlet en el borde asintótico alcanzaban para obtener una solución única al problema. Aquí intentaremos sortear este resultado proponiendo a fuerza bruta un juego de modos que podríamos llamar normalizables. Veremos que para este ejemplo, por supuesto, estos modos no pueden agregarse a la solución (3.3.24), pero que sí pueden agregarse en otros contextos, que serán relevantes en esta tesis. Como se observa en (3.3.17), la función $A(-i\omega, l)$ tiene ceros en los polos de las Γ para $\omega = i\omega_{nl}$ donde $\omega_{nl} = 2n+l+\Delta > 0$. Surge entonces la propuesta de utilizar frecuencias imaginarias puras $e^{\pm\omega_{nl}\tau}$ para la expansión del campo, para conseguir eliminar el modo divergente sobre el borde conforme. El problema con estos modos, que ya no divergen en el borde asintótico, es que no pueden agregarse consistentemente a la variedad H, donde $\tau \in (-\infty, \infty)$: los modos en términos de exponenciales reales divergen para $\tau = \pm\infty$ y luego no son soluciones regulares de las EDM. Si bien hemos recuperado un resultado conocido, notamos que para intervalos de tiempo Euclídeo semi-infinito $\tau \in [0, \infty)$ por ejemplo, los modos $e^{-\omega_{nl}\tau}$ son admisibles y para un intervalo finito ambos modos pueden agregarse a una solución Euclídea sin modificar las condiciones de contorno asintóticas. Estos modos normalizables Euclídeos jugarán un rol central en nuestra construcción.

3.3.2. Diccionario BDHM

En esta sección introduciremos brevemente un segundo diccionario holográfico, que establece una biyección a nivel operatorial, en lugar de sobre las funciones de partición. Una descripción completa de este diccionario puede buscarse en las clases de J. Kaplan [45] y las referencias ahí contenidas, aunque el nombre que usamos fue tomado de [16], en referencia a los autores de [15], Banks Douglas Horowitz y Martinec, donde se mencionó que esta presentación de la dualidad podría no coincidir con la anterior. En [16] se demostró la equivalencia entre este diccionario y el anterior. En la bibliografía suele hacerse referencia a un mapa equivalente llamado “mapa extrapolar”, donde se obtienen los correladores de la CFT como un límite particular de los obtenidos en AdS. Puede verse que el mapa BDHM implica necesariamente el mapa extrapolar y que si éste último vale para todos los correladores de la teoría, necesariamente debe cumplirse el mapa BDHM. Se elige, sin embargo, el último de estos nombres para señalar que usaremos estrictamente la versión operatorial del mapa.

El punto de partida para este enfoque será nuevamente (3.3.1), pero para establecer un diccionario holográfico operatorial cuya forma explícita es

$$\hat{\mathcal{O}} \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} r^\Delta \hat{\Phi}, \quad (3.3.37)$$

y cuya notación explicamos a continuación. El lado derecho de la ecuación contiene un campo fundamental sobre la teoría de gravedad $\hat{\Phi}$ canónicamente cuantizado y está escrito en la misma métrica que la prescripción anterior (2.2.7). El prefactor cambiará entonces dependiendo de la métrica en la que esté escrito el espacio, pero puede describirse de forma más covariante como una potencia tal de la coordenada holográfica (r en este caso) que permita recuperar el comportamiento dominante del campo canónicamente cuantizado sobre el borde holográfico. El lado izquierdo define entonces un objeto \mathcal{O} que paso a paso en el límite está definido en AdS y que en el límite estricto dependerá solo de las coordenadas del borde. Se mostrará que el operador \mathcal{O} así definido conmuta con los generadores del grupo $SO(d, 2)$ según propiedades heredadas del campo $\hat{\Phi}$, que reproduce las relación encontrada para la dimensión conforme Δ y la masa m de un campo Φ escalar encontrada en (3.3.34).

El primer aspecto a notar acerca de (3.3.37), es su similaridad con (3.3.35). Por un lado, (3.3.37) es más fuerte en su afirmación por ser una identidad operatorial. En segundo lugar, uno podría preguntarse entonces si los operadores de la CFT son duales a los campos fundamentales Φ o a los momentos radialmente conjugados Π_r , que son formalmente objetos distintos. La respuesta está dada también en [16], donde se demuestra que sobre la región asintótica de AdS, cualquier interacción es subdominante respecto del efecto de la constante cosmológica, de forma que los comportamientos dominantes de Φ y Π_r solo difieren en una constante $(2\Delta - d)$ en el límite considerado en (3.3.37). En conclusión, uno podría reescribir (3.3.37) en términos de Π_r que en rigor es el objeto dual en el mapa, pero solo estaría ajustándose una normalización particular del operador \mathcal{O} que no contiene física.

Un aspecto interesante de este enfoque es que consigue extraer información de la teoría CFT dual en términos de cantidades intrínsecamente de AdS, como son sus modos normalizables, que por definición son de cuadrado integrable y por tanto nulas en el borde asintótico. Ha de compararse esto con la prescripción anterior, donde se obtuvo información sobre el borde en términos de funciones a partir de modos llamados no-normalizables, en virtud de no ser de cuadrado integrable (ver (3.3.20) para comprobar su comportamiento divergente) sobre una superficie de Cauchy.

Antes de obtener una forma explícita para \mathcal{O} , mencionaremos algo más acerca de la bibliografía existente. Una pregunta relacionada con (3.3.37), es preguntarse, en la dirección opuesta, cuánta información de la CFT del borde necesito para reproducir un operador en AdS a una dada posición de la coordenada holográfica. Esto se conoce como tradicionalmente como HKLL [17] y ha tenido un avance sostenido a lo largo del tiempo, ver por ejemplo [18]. Para responder brevemente a la pregunta, inicialmente se propuso que todos los puntos tipo espacio por fuera del cono causal del punto que uno quisiese recuperar del bulk era necesario para reproducir el punto. Avances en la comprensión del mapa holográfico pusieron de manifiesto que esto podía contener información redundante y que la mínima información necesaria se encontraba en lo que se conoce como cuña de entrelazamiento [18]. Desde este enfoque, lo que se busca es entender desde una perspectiva de campos, cómo está codificada la información de la geometría dual. En nuestro contexto nos hacemos una pregunta inversa: ya tenemos toda la información de la geometría y la usamos para obtener información sobre las cantidades de la teoría de campos.

Partiremos ahora de una versión Lorentziana de (3.3.7),

$$S_L = \frac{1}{2} \int \sqrt{g} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^2), \quad (3.3.38)$$

a la que le buscaremos soluciones normalizables. Expandiendo al igual que antes el problema en una base ortonormal en las coordenadas temporal y angulares $\Phi \propto e^{-i\omega t} Y_{lm_i} f_{\omega l}(r)$, se obtiene una ecuación de movimiento para $f_{\omega l}(r)$ con solución

$$f_{\omega l}(r) = r^l (r^2 + 1)^{\frac{\sqrt{\omega^2}}{2}} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} (d + l - \Delta + \sqrt{\omega^2}), \frac{1}{2} (l + \Delta - \sqrt{\omega^2}); \frac{d}{2} + l; -r^2 \right). \quad (3.3.39)$$

Una expansión en $r \rightarrow \infty$, análoga a (3.3.16), muestra que la única forma de obtener funciones de cuadrado integrable es restringir los valores de ω tal que $A(\omega, l) = 0$, que ya observamos se obtiene para $\omega = \pm \omega_{nl}$, con $\omega_{nl} = \Delta + 2n + l$, $n \in \mathbb{N}$. Llamaremos a esta base $g_{nl}(r)$, de forma que la solución más general de cuadrado integrable se escribe como

$$\Phi(t, r, \Omega) = \sum_{nl} a_{nl} e^{-i\omega_{nl} t} Y_{lm_i}(\Omega) g_{nl}(r) + a_{nl}^* e^{i\omega_{nl} t} Y_{lm_i}^*(\Omega) g_{nl}^*(r), \quad (3.3.40)$$

Donde se ha tenido el cuidado de definir la base $e^{-i\omega_{nl} t} Y_{lm_i}(\Omega) g_{nl}(r)$ tal que su producto interno de Klein Gordon sea ortonormal. El campo canónicamente cuantizado se obtiene entonces promoviendo los coeficientes $a_{nl} \rightarrow \hat{a}_{nl}$ y $a_{nl}^* \rightarrow \hat{a}_{nl}^\dagger$, con $[a_{nl}, a_{n'l'}^\dagger] = \delta_{nn'} \delta_{ll'}$. Notar que por construcción, dado que se forzó $A = 0$ en (3.3.16), el comportamiento dominante asintótico $r \rightarrow \infty$ de estas soluciones es

$$g_{nl}(r) \sim B(\omega_{nl}) r^{-\Delta} \equiv \mathcal{O}_{nl} r^{-\Delta}. \quad (3.3.41)$$

Luego, utilizando el mapa (3.3.37), se obtiene que

$$\hat{\mathcal{O}}(t, \Omega) = \sum_{nl} \hat{a}_{nl} e^{-i\omega_{nl} t} Y_{lm_i}(\Omega) \mathcal{O}_{nl} + \hat{a}_{nl}^\dagger e^{i\omega_{nl} t} Y_{lm_i}^*(\Omega) \mathcal{O}_{nl}^*, \quad (3.3.42)$$

donde hay varios aspectos a observar. El primero es que la prescripción establece que en el límite planar $N \rightarrow \infty$ y de acoplamiento fuerte de una teoría de campos, los operadores de simple traza duales a campos fundamentales de la teoría de gravedad, se comportan a primer orden como una teoría libre. Esto es otra forma de concebir el efecto de la factorización a N grande y de hecho este tipo de teorías se las conoce como libres generalizadas. La ecuación (3.3.42), sin embargo, da una forma concreta a esta idea, afirmando que los operadores escalera en los que se expanden estas teorías libres generalizadas son los obtenidos a través de la cuantización canónica de los campos fundamentales en la teoría dual. En consecuencia y en virtud de (3.3.1), estamos identificando el estado de vacío en AdS, aniquilado por los a_{nl} al vacío de la CFT. En algún sentido, la geometría de AdS reorganiza los grados de libertad de la teoría de campos dual, tal que estos puedan expandirse (en un lenguaje bien distinto) en operadores escalera, de forma similar a un tratamiento perturbativo. Cabe destacar que los operadores \mathcal{O} que admiten una descripción en términos de operadores escalera no serán en general un operador fundamental de la teoría si no un operador compuesto. Recordar, por ejemplo, que al discutir las teorías de SYM en su límite planar, $\mathcal{O} \sim \text{Tr} \mathcal{F}^\epsilon$.

Es interesante notar también que el mapa (3.3.37) le impone una normalización a los modos heredada de la del producto interno en AdS que en la expresión de arriba llamamos \mathcal{O}_{nl} . Como ejemplo concreto, para AdS_{2+1} se tiene

$$\mathcal{O}_{nl} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\Gamma[\Delta + n + |l|] \Gamma[\Delta + n]}{n! (\Gamma[\Delta])^2 \Gamma[n + |l| + 1]}} \quad \text{en AdS}_{2+1}. \quad (3.3.43)$$

En términos del operador (3.3.42), la replicación de los cálculos de la sección anterior es inmediata, i.e. $\langle \mathcal{O} \rangle = 0$, igual que las funciones conectadas de $n > 2$ puntos y

$$\langle \hat{\mathcal{O}}(t, \Omega) \hat{\mathcal{O}}(t', \Omega') \rangle = \sum_{nl} e^{-i\omega_{nl}(t-t')} Y_{lm_i}(\Omega) Y_{lm_i}^*(\Omega') |\mathcal{O}_{nl}|^2 \quad (3.3.44)$$

$$= \frac{1}{2\Delta - d} \frac{C_{\Delta, d}}{[\cos(\tau - \tau') - \cos(\Omega - \Omega')]^\Delta}, \quad \Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2} \quad (3.3.45)$$

donde la sumatoria es la misma que se obtiene resolviendo la integral en (3.3.32) por teorema de residuos, salvo por un factor $i\Delta t$ que proviene del cambio de signatura y un factor global $(2\Delta - d)$, que se puede reabsorber en la definición de \mathcal{O} en (3.3.37).

Cabe destacar que en esta versión del mapa, similar a lo que sucede en HKLL, la conexión entre las teorías se realiza entre modos normalizables, de forma que las operaciones como el cálculo de la función de 2 puntos es explícitamente finito paso a paso sin necesidad de regularizar la sumatoria. Esto implica que el proceso de renormalización holográfica sobre el que se hizo énfasis en el apartado anterior está ausente en este formalismo, que resulta imprescindible en ocasiones para reproducir correctamente los correladores en modelos de arriba hacia abajo¹⁵ [64]. Una vez más, debe volverse sobre la idea de que el enfoque de abajo hacia arriba simplifica la teoría dual que reproduce y no logrará holografía de precisión a menos que se agregue toda la información de alguno de los dos lados de la dualidad. Para la pregunta formulada en este caso particular, esta prescripción asume a los operadores ya desprovistos de su valor de expectación y por tanto las funciones de 2 puntos ya también desprovistas de contribuciones desconectadas de orden N , que dominarían sobre las contribuciones conectadas orden N^0 de no haber hecho nulos los valores de expectación de vacío [16].

La introducción de interacciones es también interesante de aclarar en este formalismo. La misma se realiza también según las reglas estándar de cuantización canónica [46]. Supongamos introducir interacciones en la teoría de gravedad dual como en (3.3.36), las ecuaciones de movimiento ahora pueden expandirse orden a orden en λ y g , así como también la solución clásica. El operador $\hat{\Phi}$ en este contexto se obtiene también como una expansión orden a orden en los parámetros, promoviendo cada término de interacción a operadores en orden normal, lo que garantiza orden a orden en las interacciones un valor de expectación de vacío nulo. Para una interacción cúbica, se obtiene por ejemplo que

$$\hat{\mathcal{O}} = \hat{\mathcal{O}}_0 + g \int G : \mathcal{O}_0^2 : + \dots \quad (3.3.46)$$

$$\sim a + a^\dagger + g(a^2 + a^\dagger a + (a^\dagger)^2) + \dots, \quad (3.3.47)$$

donde $\hat{\mathcal{O}}_0$ es (3.3.42) y G es la función de propagación de información del borde al interior de AdS, solución de las ecuaciones de movimiento en AdS a orden lineal. En la última expresión, se hizo explícito que el operador adquirirá orden a orden en las correcciones potencias crecientes de los operadores escalera. Esto será relevante en el próximo capítulo al estudiar el efecto de las interacciones en AdS.

En este apartado hemos establecido solamente los aspectos indispensables del mapa BDHM para nuestros objetivos. El formalismo en sí es mucho más extenso y se refiere al lector nuevamente a [45] y otros trabajos del autor, donde hay un tratamiento más acabado de las consecuencias de pensar un mapa operatorial en AdS/CFT. Como ejemplos sencillos, uno puede obtener las reglas de conmutación correctas de un operador cuasi-primario de una CFT con los generadores G del grupo a partir de la receta

$$[G, \mathcal{O}] \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} r^\Delta [G, \hat{\Phi}]. \quad (3.3.48)$$

Donde la forma de estos generadores es la de las isometrías de AdS. En particular, el generador D de dilatación, se corresponde con la coordenada temporal en coordenadas globales de AdS, i.e. ∂_t . Considerando un operador primario, de forma que todos los generadores K_μ lo aniquilen, equivale a considerar modos sin momento angular y en el estado de más baja energía, i.e. $n = l = 0$ en (3.3.42), de forma que se obtiene

$$[D, \mathcal{O}(0)] = -i\partial_t \mathcal{O}(0) = \omega_{n=0, l=0} \mathcal{O}(0) = \Delta \mathcal{O}(0),$$

comprobando independientemente el peso conforme del operador.

Mediante argumentos similares y una vez obtenida (3.3.42), uno puede construir el espacio de Fock de la CFT en este límite libre generalizado $N \rightarrow \infty$, comprobando via (3.3.48) por ejemplo que $P_\mu^n \mathcal{O} = (\partial_\mu)^n \mathcal{O}$ se corresponden con descendientes del operador \mathcal{O} y que $:\mathcal{O}^2:$ crea sobre el vacío un estado de 2 partículas.

Otra prescripción, conectada y equivalente a BDHM es el mapa HKLL [17]. En el mismo, se intenta prescribir el operador en la teoría de gravedad en términos de información accesible desde el borde, buscando responder cuál es la mínima información necesaria de la CFT para reproducir un punto dado en AdS. Avances en esta dirección pueden encontrarse en [18]. fueron Notar que en este caso el diccionario holográfico

¹⁵Agradezco a Kostas Skenderis por esta pregunta y a Jamie Sully por ayudarme a clarificar este punto.

va en sentido contrario al del BDHM intentando reconstruir la teoría de gravedad a partir de la información del borde. Uno puede pensar en este sentido a la prescripción HKLL como la inversión de la serie dada en (3.3.37) y viceversa.

A continuación mencionamos brevemente una tercera presentación del diccionario de abajo hacia arriba, conocida como fórmula RT.

3.3.3. Fórmula RT

La fórmula RT [57] (Ryu-Takayanagi) para el cálculo de la entropía de entrelazamiento es otro ejemplo más de una entrada en el diccionario holográfico en el enfoque de abajo hacia arriba. La misma prescribe que la entropía de entrelazamiento de un subsistema A en teorías CFT con borde ∂A , puede obtenerse minimizando la funcional de área en la teoría AdS dual, donde la frontera de dicha área mínima está anclada en el borde asintótico del espacio y coincide con ∂A . Si la superficie descrita en AdS es A_{AdS} , el resultado de esta prescripción es que a orden dominante en N , se obtiene

$$S_A = \frac{\tilde{\text{Área}}(A_{AdS})}{4G_N} + \dots$$

en acuerdo con todos los cálculos directos. Notar que el comportamiento dominante en esta expansión es $G_N^{-1} \propto N^2$ y por tanto divergente. Esto también tiene un correlato desde la teoría de campos siendo que la entropía de entrelazamiento es una cantidad intrínsecamente divergente. Sobre este aspecto y la información física que puede extraerse de este tipo de cálculos, se sugiere al lector [68].

La fórmula RT ha sido extendida a una formulación covariante conocida como HRT [69], además de ser mostrada consecuencia de la prescripción GKPW mediante el truco de réplicas en [70]. La expresión conocida como JLMS [18] puede pensarse también como una extensión de RT a un marco operatorial, en un enfoque más similar a la prescripción BDHM.

Como conclusión de esta sección, diremos que si bien el enfoque de abajo hacia arriba es menos preciso en sus predicciones, contrarresta esto con la simplicidad y generalidad en la validez que gozan sus resultados. Como ya se mencionó antes, esta construcción permite chequear o resolver de forma general potenciales contradicciones o aspectos sensibles de la dualidad que aún no están explorados. En particular en esta tesis nos interesa una pregunta general de este tipo. Si los espacios de Hilbert de ambas teorías son los mismos, entonces existe una correspondencia uno a uno entre los estados de una y otra teoría. Sin embargo, esto no quiere decir que a cada estado de la teoría conforme se le corresponda, en un límite de fuerte acoplamiento, una geometría simple: la integral de caminos de la teoría de gravedad podría no corresponder a ninguna geometría clásica o podría ser una suma sobre estos. Por ejemplo, es sabido que el estado de vacío de la teoría de campos fuertemente acoplada está representada por AdS puro. Se sabe también que los estados de n partículas no tienen en general¹⁶ una geometría asociada. En esta tesis encontraremos una familia de estados excitados no ortogonales que por construcción tienen asociada una geometría. Veremos que estos estados se pueden asociar a excitaciones coherentes en el límite $N \rightarrow \infty$ y que por ende son además una base del espacio de estados excitados en este límite.

En la siguiente sección volveremos sobre un enfoque similar a GKPW, donde se intentará reproducir, desde un enfoque de abajo hacia arriba, un proceso de dispersión de partículas en la teoría de campos, teniendo como prioridad definir todos aspectos del problema según un principio holográfico. Este último requerimiento pondrá de manifiesto a la vez ciertas ambigüedades de una extensión inocente de GKPW a tiempo real y la dificultad de definir estados siempre dentro de un diccionario holográfico.

3.4. Prescripción de Skenderis y van Rees

En esta sección presentamos la versión definitiva del diccionario holográfico que usaremos en el resto del trabajo. La misma fue propuesta por Skenderis y van Rees (SvR) en los trabajos [19, 13] y combina las

¹⁶Este comentario refiere a la hipótesis de termalización de autoestados ETH, donde se comprueba que para energías suficientemente altas, uno puede calcular el valor de expectación de un operador en ese estado mediante el cálculo de su valor de expectación en un ensamble canónico a una temperatura adecuada [71]. Dado que los estados de temperatura finita sí admiten un dual geométrico, puede pensarse a estos también como los duales de los mentados autoestados de energía. En un caso general sin embargo, no es obvio o es falso que un autoestado de energía posea un dual geométrico.

herramientas descritas en la Sec. 2.1.1 con la prescripción GKPW para dar un diccionario holográfico formalmente establecido para teorías y variedades de signatura compleja, pero que permite el cálculo directo de correladores en tiempo real.

Antes de presentar la prescripción propiamente dicha, enunciemos brevemente los conflictos que surgen al extender trivialmente GKPW a tiempo real y cómo esto entra en conflicto con entender el problema completo en términos de un diccionario holográfico. Una extensión directa de (3.3.2) nos lleva a considerar funciones generatrices en lugar de funciones de partición, de forma que el cálculo ya no es un promedio estadístico sobre un sistema en equilibrio si no un proceso de evolución temporal entre un estado inicial y otro final. Esto puede escribirse como

$$\langle f|U[\phi]|i\rangle = \int_{A_i}^{A_f} \mathcal{D}A_\mu e^{-iS_{CFT}-i\int\phi\mathcal{O}} = Z_{CFT}^d[\phi] \equiv Z_{AdS}^{d+1}[\phi] = \int_{\Phi_i}^{\Phi_f} \mathcal{D}\Phi_\phi e^{-iS_{AdS}}. \quad (3.4.1)$$

La observación central es la siguiente [72]: la información i, f en el lado izquierdo de la expresión queda completamente determinado en términos de condiciones iniciales/finales $A_{i/f}$ para los campos, mientras que en el lado derecho parece requerir toda la información de los campos $\Phi_{i/f}$, que están extendidos sobre toda la teoría de gravedad holográfica. Es claro que, así requerido, este segundo conjunto es más grande que el primero, de forma que hay información extra que requiere la teoría gravitatoria respecto de la teoría de campos al especificar los estados iniciales, lo que entra en conflicto con el principio holográfico.

Una forma más concreta de visualizar el problema es que la solución clásica para los campos en AdS, no queda completamente determinada por las fuentes asintóticas ϕ_L si no que admite cualquier combinación lineal de modos normalizables. Esta contribución afecta el cálculo de la acción en la capa de masa análoga a (3.3.13), e impide encontrar una solución única.

De forma más general depender fatalmente de una rotación de Wick para extraer información de un sistema a tiempo real puede representar un problema a la hora de calcular, por ejemplo, cantidades en límites de baja energía de sistemas en equilibrio térmico, donde los resultados Euclídeos están dados como sumas discretas de Matsubara. Por este medio, primero debe encontrarse la correcta extensión analítica de la serie para luego poder tomar el límite de bajas energías. El primero de estos pasos puede resultar fuertemente no trivial [14]. En un sentido más abstracto, no existe un motivo por el cual el diccionario holográfico pueda solamente plantearse en signatura euclídea, de forma que el problema de las condiciones iniciales debe por fuerza ser espúreo.

La prescripción SvR extiende la prescripción GKPW estableciendo una identidad entre las funciones de partición de teorías definidas sobre caminos de SK \mathcal{C} ,

$$Z_{\mathcal{C}}^d[\phi] \equiv Z_{\mathcal{C}}^{d+1}[\phi], \quad (3.4.2)$$

donde se dejó implícito que la teoría de la izquierda es una CFT y la de la derecha tiene condiciones asintóticamente AdS. En su trabajo original [19, 13], los autores se ocuparon de construir una prescripción consistente para calcular funciones de correlación a tiempo real para el vacío prescribiendo, en concordancia con lo discutido en la Sec. 2.1.1 que el mismo se obtiene desde la teoría de campos poniendo a cero las fuentes en las regiones Euclídeas. Desde el lado de gravedad, la construcción del vacío de una teoría mediante integrales de camino Euclídeos se discutió originalmente en [21] y se conoce como función de onda de Hartle-Hawking. Para el caso concreto del camino In-Out por ejemplo, la prescripción se escribe

$$\langle 0|e^{-i\int\phi_L\mathcal{O}}|0\rangle = \int \mathcal{D}A_\mu e^{-iS_{CFT}-i\int\phi_L\mathcal{O}} = Z_{CFT}^d[\phi] \equiv Z_{AdS}^{d+1}[\phi] = \int \mathcal{D}\Phi_{\phi_L} e^{-iS_{AdS}}, \quad (3.4.3)$$

donde ϕ_L es una fuente con soporte solamente en el segmento Lorentziano, pero la integral de caminos está tomada sobre todo el camino complejo \mathcal{C} de forma análoga a la de (2.1.5), donde los campos fundamentales tienen condiciones de contorno triviales para $\tau \rightarrow \pm\infty$.

El lado de la derecha de (3.4.3) es una integral de caminos sobre todas las geometrías posibles que cumplen con las condiciones de contorno asintóticas impuestas por la medida de integración y cuyo borde asintótico es un camino de signatura cambiante. Como un todo, la integral de caminos está bien definida como un problema variacional solo con la información asintótica de cada región. Las únicas divergencias presentes en (3.4.3) son versiones analíticamente extendidas de las que aparecían ya en (3.3.5) y se regularizan en consecuencia mediante un método de Renormalización holográfica analíticamente extendido que se describe en el Ap. A.

Como ya se mencionó, en esta tesis estudiaremos los correladores de la CFT que resultan de tomar el límite semiclásico de la teoría de gravedad dual, i.e. $N \rightarrow \infty$ y $\lambda \rightarrow \infty$. En este límite, la integral de caminos en gravedad se aproxima por su acción en la capa de masa, desacoplando geometría y materia. La geometría entonces será tal que minimice la acción y tenga saltos de signatura sobre superficies que llamaremos Σ . La materia se propagará entonces sobre esta variedad de signatura mixta. El punto central de esta prescripción (en este límite) es entonces encontrar primero la geometría que haga mínima la acción bajo las condiciones descritas y encontrar luego las soluciones clásicas sobre la misma.

El método de resolución propuesto en [13] y el que usaremos aquí, consiste en tomar la aproximación semiclásica en un orden preciso que describimos a continuación. Primero se separa la integral de caminos sobre superficies tipo espacio Σ que serán la extensión a la teoría de gravedad de los quiebres el camino y representan los puntos de cambio de signatura en esta teoría,¹⁷

$$Z_{AdS}^{d+1} = \prod_i \int \mathcal{D}\phi_{\Sigma_{i+1}} \mathcal{D}\phi_{\Sigma_{i-1}} Z_i[\phi_{\Sigma_{i-1}}, \phi_{\Sigma_{i+1}}], \quad (3.4.4)$$

donde se omitió la dependencia en las fuentes externas, $Z_i[\phi_{\Sigma_{i-1}}, \phi_{\Sigma_{i+1}}]$ es la función de partición con signatura definida para cada región por separado, dependiente cada una, en el caso general, de las condiciones de los campos en las regiones anteriores y siguientes $\phi_{\Sigma_{i\pm 1}}$. Luego se toma el límite semiclásico en cada región por separado, obteniendo regiones de acción mínima para cada segmento del camino. El resultado será

$$Z_{AdS}^{d+1} \sim \prod_i \int \mathcal{D}\phi_{\Sigma_{i+1}} \mathcal{D}\phi_{\Sigma_{i-1}} e^{-iS_i^0[\Sigma_{i-1}, \Sigma_{i+1}]}. \quad (3.4.5)$$

Notar que en la notación usada la coordenada temporal es tal que si la región es Lorentziana $-iS_i = -iS_L$, mientras que si es Euclídea $-iS_i = -S_E$, de forma consistente con el cambio $t \rightarrow -i\tau$. Finalmente, con la geometría y la materia en sus solución clásica, se toma el límite semiclásico para el pegado entre regiones $\phi_{\Sigma_{i\pm 1}}$. Esto impondrá lo que llamaremos condiciones de pegado entre las regiones. Discutiremos las mismas en detalle en breve. El resultado final será

$$\langle 0 | e^{-i \int \phi_L \mathcal{O}} | 0 \rangle \equiv Z_{AdS}^{d+1}[\phi_L] \sim \prod_i e^{-iS_i^0[\Sigma_{i-1}, \Sigma_{i+1}; \phi_L]}, \quad (3.4.6)$$

donde hemos recuperado la dependencia en las fuentes Lorentzianas y donde se asumen impuestas las condiciones de pegado para cada superficie Σ_i . Postergaremos todos los ejemplos concretos de esta prescripción a los próximos capítulos, donde incluiremos también el tratamiento de estados excitados.

Cabe destacar que este método no garantiza encontrar la solución de mínima acción sobre la variedad completa, aunque sí garantiza encontrar un candidato. En los casos estudiados en este trabajo, por su simplicidad, es razonable suponer que las soluciones encontradas por el mismo sí son el verdadero mínimo de la acción total. Lo que sí garantiza, dadas las condiciones de pegado es que la solución clásica de los campos será única.

Discutiremos ahora las condiciones de pegado sobre Σ . El punto de partida de esta discusión es que el método descrito requiere definir problemas variacionales sobre espacios con borde. Es un resultado conocido que un problema de RG con condiciones de contorno de Dirichlet sobre un borde, requiere de la adición de términos de Gibbons-Hawking para definir un buen problema variacional [73] que en estos casos estarán definidas sobre las regiones Σ . Más aún, si estos bordes tienen regiones no suaves, se requiere de términos extra, conocidos como términos de Hayward [74]. En nuestro caso, las regiones Σ tienen a su vez un borde $\partial\Sigma = \partial\Gamma\Sigma$ que es donde el borde asintótico se interseca con el borde tipo espacio y deben entonces agregarse términos de Hayward sobre estas regiones. En [13], se comprueba en detalle tanto para los campos de materia (en un caso escalar) como para las geometrías, que la adición de estos términos estándar llevan a las siguientes observaciones. Dado que el borde de AdS es asintótico, el tratamiento de regularización se hará con un radio de corte R . El límite $R \rightarrow \infty$ debe tomarse recién luego del pegado Σ y sobre el observable. Los términos de Gibbons-Hawking y Hayward agregados dan contribuciones no nulas y

¹⁷La notación usada en esta expresión es redundante, en tanto parece llevar a integrar muchas veces, por ejemplo, sobre varios $\mathcal{D}\phi_{\Sigma_i}$ así como también el hecho de que el primer y el último segmento solo dependen genéricamente de solo una condición de contorno $Z_i[\phi_{\Sigma_{i\pm 1}}]$. Se prefirió una notación más compacta que mostrase la estructura de la cuenta en lugar de una más compleja que cubriese todos los casos posibles.

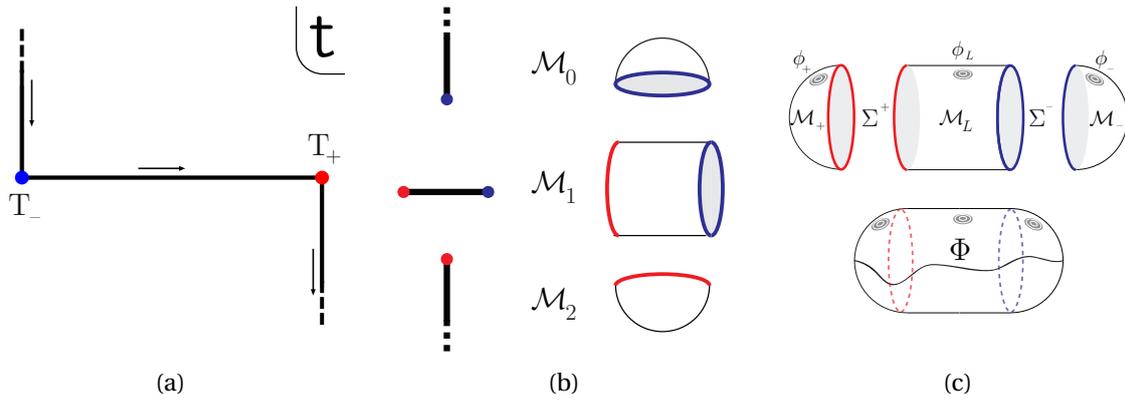


Figura 3.6: Se muestra cómo construir la teoría de gravedad dual al formalismo In-Out dentro de la prescripción de Skenderis y van Rees. En (a) se puede ver el camino \mathcal{C} seccionado en regiones de métrica euclídea y Lorentziana. El paso siguiente es encontrar espacios \mathcal{M}_i que sean duales a las secciones de las curvas y armar con estos (pegando los bordes azules con los rojos) un espacio “a trozos” dual a la curva como muestra b. Las hemisferas representan la mitad de espacios H_{d+1} mientras que los cilindros son secciones del cilindro AdS_{d+1} . Además de unir las fronteras de los espacios, se debe unir toda una hipersuperficie que atraviesa el volumen de la teoría gravitatoria. A continuación, se buscan las soluciones para los campos ψ_i en cada región \mathcal{M}_i por separado para finalmente imponer las condiciones I y II en cada frontera y obtener un único campo ψ que sea solución de las ecuaciones de movimiento en la variedad completa como se muestra en (c). La prescripción propone este campo como el que debe usarse en la acción al usar (3.4.6) para calcular observables de la teoría de campos dual.

potencialmente divergentes a la acción en la capa de masa de cada región. Sin embargo, la segunda aproximación semiclásica respecto de las propias condiciones ϕ_Σ impone la cancelación de estas contribuciones sobre cada borde Σ de forma independiente. Asimismo, deben apagarse todas las fuentes externas de forma suave antes de llegar a las regiones $\partial\Sigma$. La excepción a esto es la métrica, que ha de mantener condiciones de contorno asintóticamente AdS. Esto llevará a estudiar con más cuidado el pegado para estos GDL. Como regla, las condiciones de pegado a imponer sobre los campos sobre las superficies de pegado Σ son la continuidad (en el sentido de análisis complejo) de los propios campos y sus momentos conjugados a través de Σ :

$$\Phi_i(\Sigma) = \Phi_{i+1}(\Sigma), \quad \Pi_i(\Sigma) = \Pi_{i+1}(\Sigma) \quad \Pi_i \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_i}{\delta \Phi_i} \quad \phi_i(\partial\Sigma) = 0. \quad (3.4.7)$$

Es importante notar que las condiciones de pegado entre regiones Euclídeas y Lorentzianas, por ejemplo, llevarán a ecuaciones definidas en el plano complejo como $\Pi_L = i\partial_t \Phi = \partial_\tau = \Pi_E$. Para el pegado de la métrica, el campo a pegar es la métrica inducida sobre Σ , h_{ab} , y el pegado suave del momento conjugado de la métrica Π_{ab} es equivalente al pegado suave de la curvatura extrínseca K_{ab} a través de Σ ,

$$\Pi_{ab} = K h_{ab} - K_{ab}; \quad K = K_{ab} h^{ab}.$$

Una ilustración de las superficies de pegado que captura la notación y las cantidades relevantes puede verse en la Fig. 3.6. Estas condiciones se conocen como condiciones de pegado de Israel [75, 25].

Por consistencia en términos de un tratamiento en variables complejas de integrales de camino, era razonable esperar la cancelación de todas las divergencias. Sin embargo, el método que usamos requiere de esta separación para obtener la solución completa por pasos, de forma que las condiciones (3.4.7) serán de gran utilidad práctica en los próximos capítulos.

En los siguientes apartados, daremos algunos detalles del método de regulación recién expuesto. El lector satisfecho con las reglas (3.4.7), puede pasar directamente a la próxima sección donde describiremos la forma de incorporar estados excitados en esta prescripción.

Campo Escalar

Consideremos el pegado de un campo escalar Φ de masa m a través de una región Σ que pega una región Lorentziana con una Euclídea, ambos sobre una métrica fija con coordenadas tipo tiempo globalmente

definidas dentro de la variedad, como se muestra en la Fig 3.7. Este ejemplo se generaliza a otros tipos de materia de forma inmediata.

Las acciones sobre las regiones son

$$-S_E = -\frac{1}{2} \int_E \sqrt{|g|} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi); \quad -iS_L = -\frac{i}{2} \int_L \sqrt{|g|} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi).$$

Las acciones admiten la expresión

$$-iS = -S_E - iS_L = -\frac{i}{2} \int_{t_{\mathcal{E}}} \sqrt{|g|} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi), \quad t_{\mathcal{E}} = \begin{cases} -i\tau & \text{para } E \\ t & \text{para } L \end{cases} \quad (3.4.8)$$

que describe ambas regiones. Los términos de borde a agregar para obtener un buen problema variacional sobre la región provienen de 3 regiones. Por un lado, las regiones asintóticas requieren de los términos estándar de renormalización holográfica en total analogía con el tratamiento Euclídeo en la Sec. (3.3.1) o el Ap. A y no los trataremos aquí. Las otras dos regiones son propias de la prescripción SvR y son las de interés para este apartado: las regiones tipo espacio Σ y sus fronteras $\partial\Sigma$, que son una frontera tipo espacio que reside sobre los bordes asintóticos. Estas últimas pueden eliminarse de la siguiente forma. Para un problema variacional con condiciones de Dirichlet, las contribuciones de borde son siempre lineales con las condiciones impuestas sobre tal región $\phi_{\partial\Sigma}$. Ahora bien, estas contribuciones deben ser el límite de las fuentes externas del problema ϕ_δ en la medida que estas se acercan a la superficie Σ . La interpretación física que daremos a las fuentes de cada región será distinta y por tanto no nos interesa establecer condiciones de continuidad entre las mismas. En particular, apagar las fuentes Euclídeas en $\partial\Sigma$ hace que a $\tau = 0$ se esté considerando el hamiltoniano original de la teoría en lugar de uno deformado, lo que lleva a describir un estado de la teoría original. Tomaremos como parte de la prescripción entonces la anulación suave de las fuentes ϕ_δ en el límite que se acerquen a Σ para evitar potenciales divergencias en estas regiones. Luego, las únicas contribuciones a estudiar son las provenientes de Σ propiamente dicha.

El pegado de las funciones de partición entre las regiones, demanda por construcción que los campos sobre Σ sean continuos, i.e.

$$\Phi_L(\Sigma) = \Phi_E(\Sigma).$$

Lo único que queda por estudiar entonces es la condición sobre los momentos conjugados en (3.4.7). Supongamos entonces conocidas las soluciones clásicas Φ_L^0 y Φ_E^0 que cumplen las ecuaciones de movimiento de cada espacio por separado. Integrando por partes (3.4.8), la contribución de los términos en Σ resulta

$$\frac{1}{2} \int_\Sigma \sqrt{\gamma} (\Phi_E^0 \partial_\tau \Phi_E^0 - i \Phi_L^0 \partial_t \Phi_L^0) = \frac{1}{2} \int_\Sigma \sqrt{\gamma} (\partial_\tau \Phi_E^0 - i \partial_t \Phi_L^0) \Phi_E^0(\Sigma); \quad \Rightarrow \quad \delta S \propto \frac{1}{2} \int_\Sigma \sqrt{\gamma}(\Sigma) (\partial_\tau \Phi_E^0 - i \partial_t \Phi_L^0) \delta \Phi_E^0,$$

donde hemos usado $\Phi_L(\Sigma) = \Phi_E(\Sigma)$ y el signo relativo entre los términos viene de que los vectores unitarios normales exteriores n_Σ^μ apuntan en dirección opuesta para L y E . Merced de la arbitrariedad de $\delta \Phi_E^0(\Sigma)$, esta contribución solo puede anularse si

$$(\partial_\tau \Phi_E^0 - i \partial_t \Phi_L^0) = 0; \quad \Leftrightarrow \quad \Pi_L(\Sigma) = \Pi_E(\Sigma). \quad (3.4.9)$$

Notar que en la segunda notación, más compacta, no es evidente que surjan los factores i , aunque sí es obligatorio que así sea uniendo regiones de distinta signatura.

El otro tipo de pegado de campos que nos interesa en este trabajo es el de dos segmentos Lorentzianos de un camino de SK que tienen una dirección temporal opuesta. Este caso se sigue de forma análoga al anterior, pero los momentos conjugados adquieren un signo relativo $\Pi_{L+}(\Sigma) = -\Pi_{L-}(\Sigma)$, en la notación usada debajo de (2.1.18). De forma general para una rotación del camino en el plano complejo, los momentos conjugados adquieren una fase $e^{i\theta}$, donde θ es el ángulo relativo.

Finalmente, como se adelantó, lo único que queda regular es el comportamiento asintótico de cada acción por separado, que se obtiene aplicando renormalización holográfica a cada sección por separado.

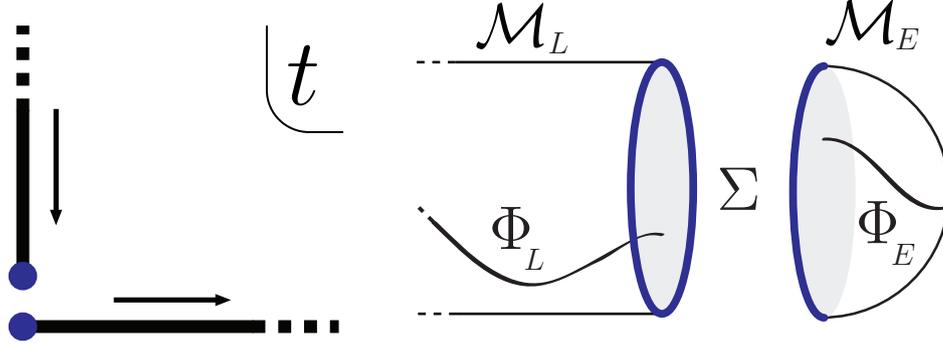


Figura 3.7: Se muestra la sección tomada para estudiar las divergencias en la acción de un campo escalar sobre una métrica definida. Los espacios \mathcal{M}_E y \mathcal{M}_L son espacios de escalar de curvatura negativo H y AdS de dimensión $d + 1$, donde d es la dimensión de la teoría de campos. Los bordes conformes son isomorfos a los tramos de la curva en la teoría de campos. La hipersuperficie donde deben pegarse ambas soluciones de los campos se denomina Σ .

Gravedad

El tratamiento para la acción de gravedad en este formalismo es mayormente análogo a las consideraciones anteriores salvo por dos sutilezas, de las cuales solo mencionaremos sus aspectos salientes. Un análisis detallado puede encontrarse en [13]. En primer lugar las condiciones de contorno de Dirichlet no pueden apagarse sobre $\partial\Sigma$, puesto que tienen que garantizar el comportamiento de AdS, de forma que hay que las contribuciones sobre estas superficies no pueden anularse de antemano. La acción completa a definir en cada región es

$$S = \frac{1}{2G_N} \left(\int \sqrt{g}(R - 2\Lambda) + 2 \int_{\partial} \sqrt{\gamma_{\partial}} K_{\partial} + 2 \int_{\Sigma} \sqrt{\gamma_{\Sigma}} K_{\Sigma} - \int_{\partial\Sigma} \sqrt{\sigma} X_{\partial\Sigma} \right), \quad (3.4.10)$$

donde las K son las curvaturas extrínsecas sobre la superficie correspondiente y $X_{\partial\Sigma}$ es también la curvatura extrínseca pero inducida sobre el borde $\partial\Sigma$. Estos son los términos de Gibbons-Hawking [73] y de Hayward [74] respectivamente. El pegado entonces impone también condiciones de pegado sobre los $X_{\partial\Sigma}$ a ambos lados de Σ .

La segunda sutileza es que las condiciones de pegado no imponen una forma única de extender la frontera $\partial\Sigma$ hacia adentro de la variedad para definir la forma de Σ . En términos más concretos, expandiendo las coordenadas del espacio asintóticamente AdS usando la expansión de Fefferman-Graham [76]

$$ds^2 = dr^2 + \gamma_{ij} dx_{\mu} dx^{\mu}, \quad \gamma = e^{2r} \left(g_0 + e^{-2r} g_2 + \dots + e^{-dr} [g_d + \tilde{g}_d \ln e^{-2r}] + \dots \right), \quad (3.4.11)$$

donde en la segunda ecuación hemos omitido los índices i, j por brevedad, g_i son funciones que dependen de las coordenadas de la CFT y se puede demostrar que el pegado admite que la superficie Σ quede determinada por una función $f(r, \Omega)$ tal que la coordenada temporal dentro de la variedad es

$$t' = t - f(r, \Omega), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f(r, \Omega) = O(e^{-r}),$$

siempre que se peguen las regiones de forma que los valores de sus $f(r, \Omega)$ coincidan [13]. Si bien es interesante como posibilidad considerar $f(r, \Omega)$ no triviales, se puede demostrar también que los observables de CFT calculados por esta prescripción (el valor de expectación del tensor de energía momento por ejemplo) no dependen de esta función. Este resultado es esperable desde un punto de vista holográfico, puesto que no hay contraparte de esta información desde el lado de la teoría de campos. Para los casos estudiados en este trabajo, encontraremos siempre una coordenada temporal sobre el borde asintótico que pueda extenderse sobre toda la variedad. Será evidente en todos nuestros ejemplos que hemos dado con la variedad que minimiza la acción de gravedad.

Aún así, no es claro para el autor cómo distinguir en un caso general si podría convenir a los efectos de minimizar la acción de gravedad la inclusión de una $f(r, \Omega)$ no trivial, puesto que dadas las condiciones

de pegado la misma parece no contribuir al cancelarse completamente entre las regiones. Un argumento razonable para buscar solamente soluciones con $f(r, \Omega) = 0$ es precisamente que al no tener dual en la teoría de campos, la elección natural es cero.

3.5. Estados excitados holográficos

En esta sección presentamos un mecanismo para incluir en la prescripción SvR estados excitados. Una vez expuesto, podremos independizar la construcción de la prescripción SvR, proponiendo entonces una base (o al menos una familia de estados excitados) del espacio de Hilbert de estados que tienen garantizada por construcción una geometría dual asociada. Daremos una definición no perturbativa de esta familia de estados y luego un estudio perturbativo de estos estados a $N \rightarrow \infty$, veremos que los mismos son a primer orden coherentes y adquieren potencias crecientes de los operadores escalera con correcciones crecientes en $1/N$.

Este mecanismo y el estudio de sus aplicaciones son el eje central de esta tesis y es un trabajo original del autor y sus directores, publicado en [63, 77, 78, 79] y en el ensayo subido a la red [80]. Las propiedades de los mismos fueron estudiadas en otros trabajos, entre ellos [81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90], donde se estudian la entropía de sistemas en estos estados, entre otras aplicaciones.

Comenzaremos ahora con la inclusión de estados excitados en la prescripción de SvR. Si bien la misma se escribe inicialmente como una única integral sobre un camino complejo, ver (3.4.2)(3.4.3), la metodología de resolución propuesta de partir la integral de caminos en segmentos de signatura definida, propone una interpretación alternativa en términos de una holografía “a trozos”¹⁸, apoyado por el hecho de que las divergencias que surgen al pegar dos segmentos se cancelan únicamente teniendo en cuenta los segmentos intervinientes. Incorporando la discusión de la Sec. 2.1.1, donde los segmentos Lorentzianos se asociaban a la evolución física del sistema y los Euclídeos en conjunto al estado del sistema en combinación con la de la Sec. 2.1.4 donde la inclusión de fuentes externas en segmentos Euclídeos describen estados excitados del espacio de Hilbert, se obtienen las herramientas necesarias para definir

$$|\Psi_\phi\rangle \equiv e^{-\int \mathcal{O} \phi} |0\rangle, \quad \langle \phi_\Sigma | \Psi_\phi \rangle \equiv \int \mathcal{D}\Phi_\phi e^{-S_E[\Phi]} = \Psi_\phi[\phi_\Sigma], \quad (3.5.1)$$

donde debe imponerse que la fuente externa ϕ se anule suavemente en la proximidad de Σ , tanto por las condiciones de pegado como para garantizar la construcción de un estado excitado de la teoría con el hamiltoniano sin deformar. Notar que hemos escrito el estado en términos de los grados de libertad de la teoría de campos y de la teoría de gravedad, en una definición no perturbativa. Aquí, $|\phi_\Sigma\rangle$ es la base de autoestados del campo Φ sobre Σ , tal que $\Phi|\phi_\Sigma\rangle = \phi_\Sigma|\phi_\Sigma\rangle$ y $\Psi_\phi[\phi_\Sigma]$ es la funcional de onda del estado. Estas definiciones son el eje central este trabajo. Esta construcción se esquematiza para ambos lados de la dualidad en la Fig. 3.8.

En este formalismo se está asociando separadamente a cada segmento de un camino SK una interpretación holográfica en sí propia, identificando cada una con estados/operadores del espacio de Hilbert, que en virtud de (3.3.1) es el mismo para ambas teorías¹⁹.

Desde una perspectiva de RG, el lado derecho de (3.5.1) representa una generalización de la prescripción de Hartle-Hawking para la funcional de onda de vacío en una teoría de gravedad [21]. La definición original imponía condiciones de contorno nulas para todos los campos de la teoría, mientras que esta prescripción las deja encendidas para los campos duales a operadores de la CFT.

Otro aspecto interesante de (3.5.1), es que realiza en ambas teorías el mecanismo explicado en la Sec. 2.1.4 basado en [22] donde la inserción de fuentes externas durante un periodo de tiempo finito lleva a la construcción de estados excitados. Lo destacable de este formalismo en este caso es que los espacios AdS, al tener borde, permiten considerar dos tipos distintos de fuentes según se encuentren dentro del espacio o en su borde asintótico. En el marco de la dualidad, este segundo caso empalma con el mecanismo estándar

¹⁸Al menos, en los casos donde este mecanismo lleve a la solución que minimiza la acción completa. Esto fue discutido en la sección anterior debajo de (3.4.3). Este será siempre el caso en esta tesis.

¹⁹Es interesante mencionar también que esta hipótesis asume un mapa entre bases de ambas: debiera haber una base CFT dual a $|\phi_\Sigma\rangle$. La construcción de la misma podría pensarse como la base de autoestados análoga para \mathcal{O} , con una normalización heredada de la teoría de gravedad, de forma similar a los factores \mathcal{O}_{nl} en (3.3.37) y (3.3.48). No exploraremos en detalle esta mapa en este trabajo.

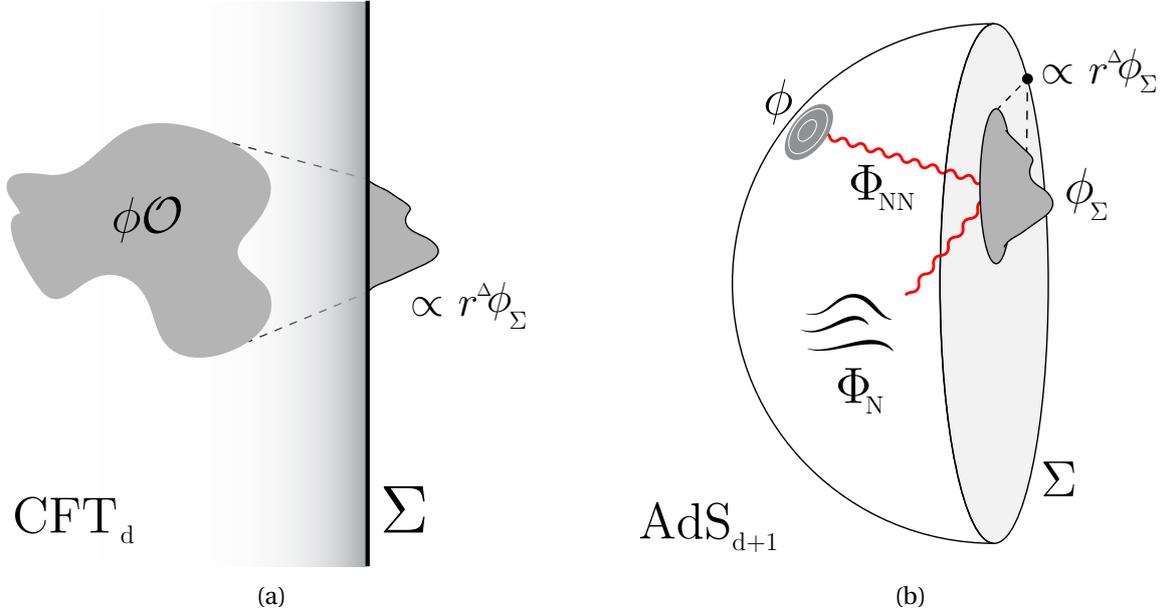


Figura 3.8: En la figura se representan los estados (3.5.1) en su prescripción a ambos lados de la dualidad. La fuente ϕ está en la teoría de campos y genera sobre Σ un estado excitado de la teoría. En la teoría dual la fuente es condición de contorno para un campo en AdS, el cual en su solución clásica tendrá genéricamente una parte normalizable Φ_N y otra no normalizable Φ_{NN} , lineal en la fuente ϕ . Ambas contribuciones generan una solución sobre Σ que describe el estado dual en AdS al estado excitado de la CFT.

para generar funciones generatrices de operadores CFT duales a campos fundamentales de la teoría de gravedad dual. El mecanismo de Glauber desde la CFT se manifiesta también del lado AdS, pero ahora como fuentes asintóticas, que en el formalismo de integral de caminos aparecen no en el integrando si no definiendo la medida de integración. Aprovecharemos esto en un modelo de juguete libre para obtener algunas propiedades de los estados definidos en (3.5.1).

Incorporando (3.5.1) a (3.4.3), se obtiene para el camino In-Out

$$\langle \Psi_{\phi_+} | T \{ e^{-i \int \mathcal{O} \phi_L} \} | \Psi_{\phi_-} \rangle = \sum_{\phi_{\Sigma^\pm}} (\Psi_{\phi_+}[\phi_{\Sigma^+}])^* Z[\phi_L; \phi_{\Sigma^-}, \phi_{\Sigma^+}] \Psi_{\phi_-}[\phi_{\Sigma^-}], \quad (3.5.2)$$

donde $\Psi_{\phi_\pm}[\phi_{\Sigma^\pm}]$ es la funcional de onda del estado final/inicial y $Z[\phi_L; \phi_{\Sigma^-}, \phi_{\Sigma^+}]$ es la función generatriz para las funciones de n puntos conectadas de la teoría en tiempo real.

Como muestra no perturbativa de la formulación de estos estados, partiremos de (3.5.2), para el caso en donde el estado final está dado por una funcional de onda general $\Psi_{\phi_+}[\phi_{\Sigma^+}]$ que podría o no tener un dual geométrico. La funcional de onda del estado inicial $\Psi_0[\phi_{\Sigma^-}]$ será la del estado de vacío. Se dividirá la evolución Lorentziana en 2 partes en un $t = \tilde{T}$, como se muestra en la Fig. 3.9. El proceso se escribe

$$\langle \Psi_f | T [e^{-i \int_{\partial_r, \mathcal{M}'_L} \mathcal{O} \phi'_L - i \int_{\partial_r, \tilde{\mathcal{M}}} \tilde{\mathcal{O}} \tilde{\phi}}] | 0 \rangle = \sum_{\phi_{\tilde{\Sigma}}, \phi_{\Sigma^\pm}} (\Psi_f[\phi_{\Sigma^+}])^* \left(\int_{\phi_{\tilde{\Sigma}}}^{\phi_{\Sigma^+}} [\mathcal{D}\Phi]_{\phi'_L} e^{-i S_L[\Phi]} \right) \left(\int_{\phi_{\Sigma^-}}^{\phi_{\tilde{\Sigma}}} [\mathcal{D}\Phi]_{\tilde{\phi}} e^{-i \tilde{S}[\Phi]} \right) \left(\int_0^{\phi_{\Sigma^-}} [\mathcal{D}\Phi]_0 e^{-S_-[\Phi]} \right), \quad (3.5.3)$$

donde $\phi_{\tilde{\Sigma}}$ indica el valor del campo en $\tilde{\Sigma}$. Comparando con el formalismo de Glauber, el estado final de la evolución del sistema en $\tilde{\Sigma}$ es un estado excitado exactamente del tipo descrito la Sec. 2.1.4, donde las fuentes clásicas están ubicadas en el borde asintótico. Consideraremos a la combinación de estas dos regiones como las que definen el estado inicial para la segunda región Lorentziana.

También como se explicó en la Sec. 2.1.4, uno puede (al precio de perder la normalización del estado, como veremos más abajo) hacer una rotación de Wick sobre $\tilde{\mathcal{M}}$ el espacio Lorentziano que define al estado y conseguir así una única evolución Euclídea (ahora con fuentes) describa el estado inicial para la única región Lorentziana, que ahora describe la evolución física del sistema, i.e.

$$\langle \Psi_f | T [e^{-i \int_{\partial_r, \mathcal{M}'_L} \mathcal{O} \phi'_L - \int_{\partial_r, \tilde{\mathcal{M}}} \tilde{\mathcal{O}} \tilde{\phi}}] | 0 \rangle = \sum_{\phi_{\Sigma^+}, \phi_{\tilde{\Sigma}}} (\Psi_f[\phi_{\Sigma^+}])^* \left(\int_{\phi_{\tilde{\Sigma}}}^{\phi_{\Sigma^+}} [\mathcal{D}\Phi]_{\phi'_L} e^{-i S_L[\Phi]} \right) \left(\int_0^{\phi_{\tilde{\Sigma}}} [\mathcal{D}\Phi]_{\tilde{\phi}} e^{-S[\Phi]} \right).$$

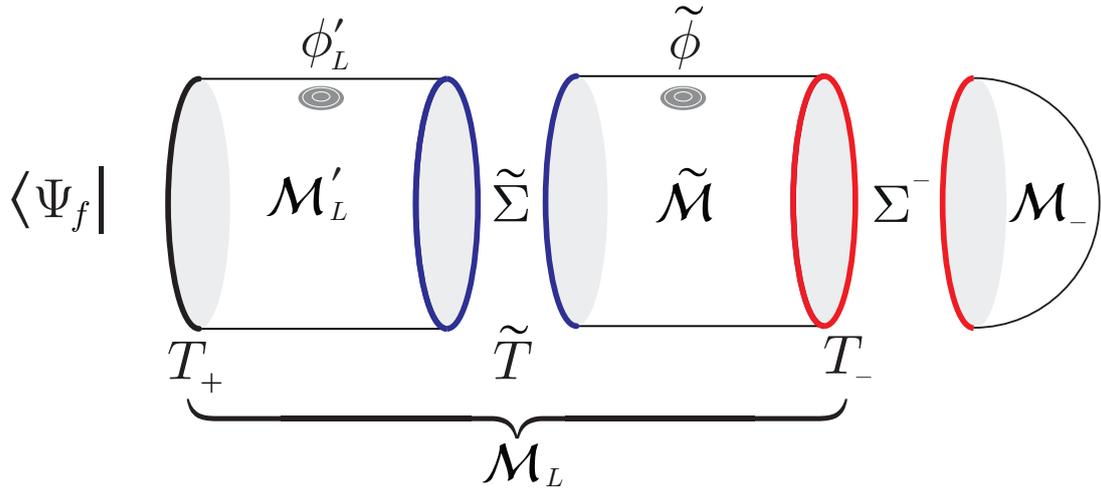


Figura 3.9: La figura puede interpretarse como dividir en 2 la sección Lorentziana de In-Out. El estado Ψ_f se reemplaza por uno genérico que en principio podría no tener un dual geométrico.

Sobre esta expresión, uno puede tomar el límite en que no hay evolución Lorentziana, de forma de convertir el objeto en un producto interno entre estados,

$$\langle \Psi_f | e^{-\int \sigma \tilde{\phi}} | 0 \rangle = \sum_{\phi_{\Sigma^+}} (\Psi_f[\phi_{\Sigma^+}])^* \left(\int_0^{\phi_{\Sigma^+}} [\mathcal{D}\Phi]_{\tilde{\phi}} e^{-S[\Phi]} \right). \quad (3.5.4)$$

Luego, la arbitrariedad de $|\Psi_f\rangle$, hace que (3.5.4) imponga (3.5.1), que era lo que se buscaba demostrar.

La conexión de este formalismo con otras formas más canónicas de construir estados excitados en CFT, como la aplicación de operadores primarios sobre el vacío en virtud de la correspondencia operador estado se sigue del argumento hecho en la Sec. 2.1.4. La novedad de esta sección es definir una nueva familia de estados cuya interpretación holográfica es siempre posible y cuya conexión con el formalismo antedicho es, al menos desde lo formal, también explícita. En particular, en la Fig. 3.10 se muestra, en el contexto de AdS/CFT, el mismo estado construido como la evolución temporal del estado de vacío de un sistema bajo el efecto de una fuente externa y como una deformación de la integral de caminos de HH, como se define en (3.5.1).

3.5.1. Límite Semiclásico

La construcción de estos estados en términos de fuentes externas sobre una evolución dada en términos de una integral de caminos sobre los grados de libertad de gravedad y materia, en nuestra notación absorbidos en Φ , hace esta admita siempre un límite semiclassical que será el de la integral de caminos que lo define. Además, el límite $N \rightarrow \infty$ desacopla materia y gravedad a primer orden e impone según nuestra normalización una teoría de materia libre, donde las interacciones de polinómicas de potencia creciente $n \geq 3$ están acompañadas aparecen como correcciones subdominantes N^{2-n} . En lo que queda de esta sección, tomaremos el límite semi-clásico del lado de la gravedad y exploraremos de varias maneras las propiedades de estos estados en este límite. Los estados (3.5.1) en este límite pueden escribirse

$$|\Psi_\phi\rangle \equiv e^{-\int \sigma \phi} |0\rangle, \quad \langle \phi_\Sigma | \Psi_\phi \rangle \equiv e^{-S_E^0[\phi, \phi_\Sigma]} = \Psi_\phi[\phi_\Sigma], \quad (3.5.5)$$

donde $S_E^0[\phi, \phi_\Sigma]$ es una acción libre en la capa de masa de los campos involucrados.

Producto interno y GKPW

Comenzaremos por considerar un producto interno de la forma (3.5.4), pero donde ahora tanto el estado inicial como final están dados por (3.5.1). Esto puede verse en la Fig. 3.11. El punto central es reconocer que esta cuenta, que describe una recta vertical completa de evolución Euclídea, no es otra cosa que una

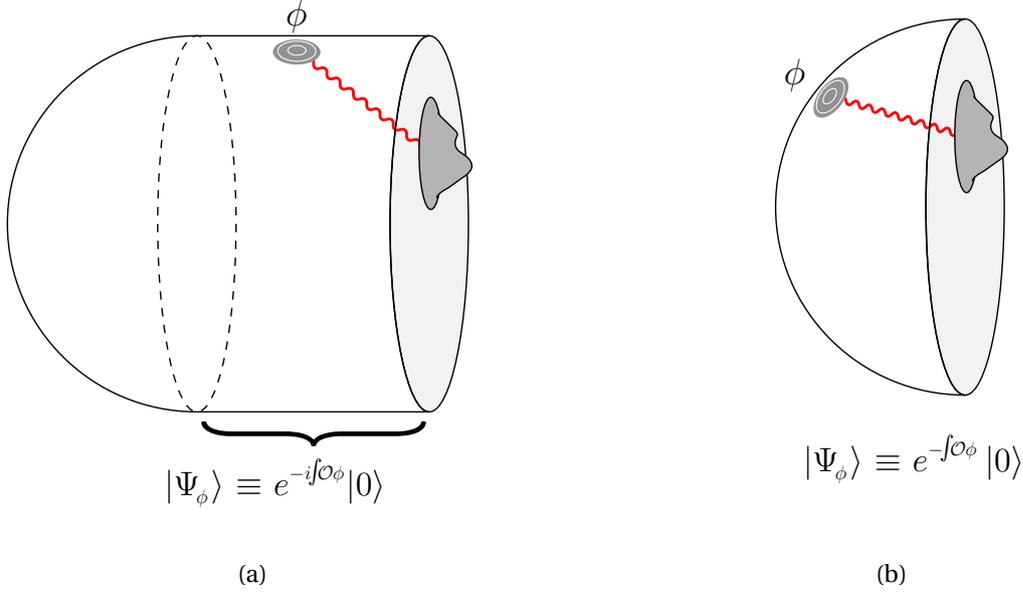


Figura 3.10: En la figura se representan en este contexto las 2 formas discutidas en la Sec. 2.1.4 para crear estados excitados a partir de la evolución con fuentes en tiempo real a partir de un estado de vacío, o como la deformación directamente aplicada a la integral de caminos euclídea. En la figura se omite la representación de los modos normalizables.

reinterpretación de la función generatriz calculada para la prescripción GKPW en (3.3.5), donde las fuentes ya no son objetos sobre los que se deriva, como en (3.3.6), si no fuentes externas que definen cada estado,

$$\langle \Psi_{\phi_+} | \Psi_{\phi_-} \rangle = \sum_{\phi_\Sigma} (\Psi^{\phi_+}[\phi_\Sigma])^* \Psi^{\phi_-}[\phi_\Sigma] = Z_E[\phi_-, \phi_+]. \quad (3.5.6)$$

La aproximación semiclassical entonces recupera el resultado (3.3.27), donde ahora la fuente ϕ se separa en ϕ_\pm dependiendo si están definidas sobre $\tau \gtrless 0$,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\phi_+} | \Psi_{\phi_-} \rangle &= e^{-S_E^0[\phi_+, \phi_-]} = e^{-\int_x \int_y \phi(x) G(x, y) \phi(y)} \\ &= e^{-\left\{ \int_- \int_- \phi_-(x) G(x, y) \phi_-(y) + \int_+ \int_+ \phi_+(x) G(x, y) \phi_+(y) + 2 \int_- \int_+ \phi_-(x) G(x, y) \phi_+(y) \right\}}, \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

donde $G(x, y)$ es la función de 2 puntos calculada en las coordenadas adecuadas, por ejemplo (3.3.33) en E-Globales, y el subíndice \pm en las integrales son notación para las que integran sobre $\tau \gtrless 0$. El primer resultado que puede extraerse es que dado que el producto interno entre estados de este tipo es la exponencial de una acción Euclídea, un objeto definido positivo, los estados (3.5.1) no son ortogonales²⁰. Calcularemos a continuación la norma de los mismos.

Para esto, es necesario definir el mapa entre estados de entrada y salida. Este mapa es el análogo Euclideo de la operación \dagger , y sus reglas fueron definidas por Jackiw en [91]. Puede demostrarse que el estado de salida $\langle \Psi_{\phi_-} |$ se construye con una fuente espejada en $\tau \rightarrow -\tau$. En coordenadas globales de AdS_{d+1} , por ejemplo,

$$\phi_\pm^*(\tau, \Omega) \equiv \phi_\pm(-\tau, \Omega). \quad (3.5.8)$$

La norma de un estado arbitrario $|\Psi^{\phi_-}\rangle$ es

$$\langle \Psi^{\phi_-} | \Psi^{\phi_-} \rangle = \|\Psi^{\phi_-}\|^2 = e^{-S_E^0[\phi_-^*, \phi_-]}, \quad (3.5.9)$$

²⁰En particular, también puede verse que este producto interno es real, lo que no es una propiedad general de productos internos de estados, aunque tampoco es una restricción para nuestros objetivos. No ahondaremos sobre este punto.

donde, utilizando (3.5.8)

$$\begin{aligned}
S_E^0[\phi_-^*, \phi_-] &= \int_{-\infty}^0 d\tau \int_{-\infty}^0 d\tau' \phi_-(\tau) G(\tau, \tau') \phi_-(\tau') + \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} d\tau' \phi_-(-\tau) G(\tau, \tau') \phi_-(-\tau') \\
&\quad + 2 \int_{-\infty}^0 d\tau \int_0^{\infty} d\tau' \phi_-(\tau) G(\tau, \tau') \phi_-(-\tau') \\
&= 2 \int_{-\infty}^0 d\tau \int_{-\infty}^0 d\tau' \phi_-(\tau) G(\tau, \tau') \phi_-(\tau') + 2 \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} d\tau' \phi_-(\tau) G(\tau, \tau') \phi_-(-\tau').
\end{aligned}$$

Las integrales de las variables angulares Ω, Ω' se omiten para simplificar la notación. Para encontrar este resultado también hemos utilizado las propiedades de la función de Green de borde a borde $G(-\tau, -\tau') = G(\tau, \tau')$ y $G(\tau, \tau') = G(\tau', \tau)$. Por lo tanto, el producto interno entre dos estados excitados *normalizados* definidos dentro de las fórmulas SvR es

$$\langle \Psi_{\mathcal{N}}^{\phi_+} | \Psi_{\mathcal{N}}^{\phi_-} \rangle = \frac{1}{\|\Psi^{\phi_+}\| \|\Psi^{\phi_-}\|} e^{-S_E^0[\phi_+, \phi_-]} = e^{-(S_E^0[\phi_+, \phi_-] - \frac{1}{2} S_E^0[\phi_+, \phi_+^*] - \frac{1}{2} S_E^0[\phi_-^*, \phi_-])}, \quad (3.5.10)$$

donde el exponente

$$\ln \langle \Psi_{\mathcal{N}}^{\phi_+} | \Psi_{\mathcal{N}}^{\phi_-} \rangle = 2 \int_{-\infty}^0 d\tau \int_0^{\infty} d\tau' \left(\phi_-(\tau) G(\tau, \tau') \phi_+(\tau') - \frac{1}{2} \phi_+(\tau) G(\tau, \tau') \phi_+(-\tau') - \frac{1}{2} \phi_-(\tau) G(\tau, \tau') \phi_-(-\tau') \right),$$

se puede reescribir como

$$\ln \langle \Psi_{\mathcal{N}}^{\phi_+} | \Psi_{\mathcal{N}}^{\phi_-} \rangle \equiv - \int_{-\infty}^0 d\tau \int_0^{\infty} d\tau' (\phi_-(\tau) - \phi_+(-\tau)) G(\tau, \tau') (\phi_-(-\tau') - \phi_+(\tau')) \quad (3.5.11)$$

$$= - \int_{-\infty}^0 d\tau \int_0^{\infty} d\tau' (\phi_-(\tau) - \phi_+^*(\tau)) G(\tau, \tau') (\phi_-(\tau') - \phi_+^*(\tau'))^*. \quad (3.5.12)$$

Esta expresión puede también escribirse $((\phi_- - \phi_+^*), (\phi_- - \phi_+^*)) = |\phi_- - \phi_+^*|^2$ si se define el producto interno

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv \int_{-\infty}^0 d\tau \int_{-\infty}^0 d\tau' \phi_1(\tau) G(\tau, -\tau') \phi_2(\tau'), \quad (3.5.13)$$

del espacio de funciones $\mathcal{C} \equiv \{\phi_{\pm}, \phi_1, \phi_2, \dots\}$ definido sobre la hemi-esfera $-\infty < \tau < 0$ que parametriza los estados iniciales CFT. Por supuesto, el producto interno puede equivalentemente definirse sobre la hemi-esfera de los estados de salida. Nótese que este producto es positivo definido y no degenerado puesto que $G(\tau, -\tau') \sim (\tau + \tau')^2$, que solo se anula cuando ambos $\tau < 0$ y $\tau' < 0$ lo hagan.

Este resultado constituye la primera comprobación holográfica de nuestra afirmación sobre la coherencia de los estados (3.5.5), ya que el producto de dos estados (normalizados) puede escribirse en términos de una norma definida positiva como

$$\langle \Psi_{\mathcal{N}}^{\phi_+} | \Psi_{\mathcal{N}}^{\phi_-} \rangle = e^{-|\phi_- - \phi_+^*|^2}, \quad (3.5.14)$$

propiedad asociada a los estados coherentes.

Es interesante destacar aquí el rol que juega la construcción de los estados excitados como una evolución pura Euclídea o como un vacío construido por un segmento Euclídeo seguido de una evolución Lorentziana con fuentes. En el segundo caso, es trivial demostrar, ver Sec. 2.1.4, que los estados están normalizados por definición, en virtud de la unitariedad del operador evolución Lorentziana. La construcción que hemos hecho en términos de evoluciones Euclídeas sin embargo, rompen la unitariedad del operador evolución, de forma que en el producto interno ya no ocurre la cancelación. La naturaleza de los estados, sin embargo, no se ve afectada por esto.

Si el caso del producto interno es una reinterpretación del problema de GKPW, entonces las correcciones que surgen por interacciones en AdS se pueden obtener también en este lenguaje, en términos de diagramas de Witten, que ahora calculan las correcciones debido a que los estados ya no son exactamente coherentes, como demostraremos en el próximo apartado. Lo interesante de esto es que los estados (3.5.1) admiten un tratamiento perturbativo en términos de diagramas de Witten. Esto se extenderá aún cuando consideremos caminos con segmentos reales, como veremos en la Sec. 4.2.

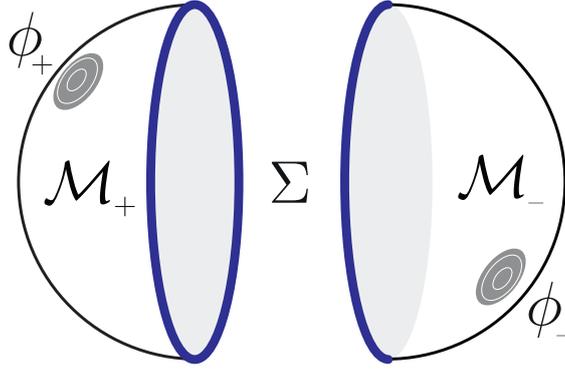


Figura 3.11: La configuración considerada en la Fig. 3.9, con estados iniciales y finales holográficos se convierte en un espacio H cuando el cilindro Lorentziano se pone a cero.

Coherencia desde la integral de caminos

Consideremos el estado excitado para un modelo de juguete libre escalar masivo,

$$\langle \phi_\Sigma | \Psi_\phi \rangle \equiv \int \mathcal{D}_{\phi_\Sigma; \phi} \Phi e^{-S_E[\Phi]}; \quad S_E[\Phi] = \int \sqrt{g} \mathcal{L} = \int \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} (\partial_0 \Phi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \right).$$

Sobre esta acción, haremos un desplazamiento rígido del campo como $\Phi \rightarrow \Phi + Y$, donde Y cumple las ecuaciones clásicas de movimiento, además de las condiciones de contorno sobre el límite asintótico $Y_\partial = \phi$, como se especificó²¹ en la Sec. 3.3.1. La medida de la integral de caminos es invariante ante este desplazamiento, excepto en sus condiciones de contorno

$$\mathcal{D}_{\phi_\Sigma; \lambda} \Phi \rightarrow \mathcal{D}_{\phi_\Sigma - Y_\Sigma; 0} \Phi,$$

donde Y_Σ es el valor de Y sobre Σ y la acción se modifica como

$$S_E[\Phi] \rightarrow S_E[\Phi] + S_E[Y] + \int \Phi (\square - m^2) Y + \int_\partial \sqrt{\gamma_\partial} \Phi \partial_n Y + \int_\Sigma \sqrt{\gamma_\Sigma} \Phi \partial_n Y.$$

De estos, el primero de los términos queda dentro de la integral mientras que el segundo sale afuera. El tercero es trivial por definición de Y . Argumentaremos ahora que el cuarto término es nulo, mientras que el quinto sale fuera de la integral de caminos.

Considerese ahora el término sobre el borde asintótico ∂ . Cualquier cálculo sobre el mismo debe hacerse sobre un espacio regulado por una distancia de corte, pongamos por caso R . En este espacio regulado, si bien la expansión de Y será divergente en el límite $R \rightarrow \infty$, el campo Φ es idénticamente nulo por construcción en cada paso de dicho límite, de forma que

$$\int_\partial \sqrt{\gamma_\partial} \Phi \partial_n Y = \int_\partial \sqrt{\gamma_\partial} (0) \partial_n Y = 0.$$

El término de borde temporal no es nulo, pero por estar evaluado sobre Σ se puede escribir como

$$\int_\Sigma \sqrt{\gamma_\Sigma} \Phi \partial_n Y = \int_\Sigma \sqrt{\gamma_\Sigma} \Phi_\Sigma \partial_n Y,$$

donde la variable de integración Φ ya no aparece y por tanto este término sale fuera de la integral. El resultado es entonces

$$\begin{aligned} \langle \phi_\Sigma | \Psi_\phi \rangle &\equiv \int \mathcal{D}_{\phi_\Sigma; \lambda} \Phi e^{-S_E[\Phi]} \\ &= e^{-S_E[Y]} e^{\int_\Sigma \sqrt{\gamma_\Sigma} \Phi_\Sigma \partial_n Y} \int \mathcal{D}_{\phi_\Sigma - Y_\Sigma; 0} \Phi e^{-S_E[\Phi]} \\ &= e^{-S_E[Y]} e^{\int_\Sigma \sqrt{\gamma_\Sigma} \Phi_\Sigma \partial_n Y} \langle \phi_\Sigma - Y_\Sigma | \Psi_0 \rangle \\ &= e^{-S_E[Y]} \langle \phi_\Sigma | e^{-\int_\Sigma \sqrt{\gamma_\Sigma} \hat{\Pi}_\Sigma Y_\Sigma + \int_\Sigma \sqrt{\gamma_\Sigma} \hat{\Phi}_\Sigma \partial_n Y} | \Psi_0 \rangle \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

²¹Es relevante notar que dado que estamos trabajando con medio espacio H, estas condiciones no bastan para definir unívocamente Y . Esto no será importante para el desarrollo y resultado de este apartado y por tanto dejaremos implícita una condición extra sobre Y que la defina unívocamente.

donde hemos reflejado el cambio en la medida a través de un cambio en el elemento de la base y a su vez hemos reescrito esto en términos de la base original bajo la acción de un operador desplazamiento usando el momento canónicamente conjugado del campo Π . En la expresión anterior, producto del tratamiento Euclídeo, hemos escrito las exponenciales de desplazamiento como exponenciales reales en lugar de exponenciales imaginarias. La recreación de este argumento con fuentes en un segmento en tiempo real lleva a la correcta reinserción de las i . Esto puede también verse recordando que $\partial_n \sim \partial_t$ sobre Σ y que los Π de una y otra signatura se pegan incorporando también una i . El signo importante en la expresión de arriba es el signo relativo que permite interpretar lo que acompaña al operador como el valor de expectación de su conjugado, como veremos a continuación.

Dado que $\langle \phi_\Sigma |$ es un elemento arbitrario de una base completa, hemos probado que para una teoría libre de juguete

$$|\Psi_\lambda\rangle = e^{-S_E[\Upsilon]} e^{-\int_\Sigma \sqrt{\gamma_\Sigma} \hat{\Pi}_\Sigma \Upsilon + \int_\Sigma \sqrt{\gamma_\Sigma} \hat{\Phi}_\Sigma \partial_n \Upsilon} |\Psi_0\rangle. \quad (3.5.16)$$

Esta forma para nuestros estados en $N \rightarrow \infty$ fue sugerida en [84], y esta demostración es original de este trabajo. Es inmediato mostrar usando que $[\Phi, \Pi] \sim i\delta$, que

$$\Upsilon_\Sigma = \langle \Psi_\lambda | \Phi | \Psi_\lambda \rangle; \quad \dot{\Upsilon}_\Sigma = \langle \Psi_\lambda | \Pi | \Psi_\lambda \rangle. \quad (3.5.17)$$

Como se discutió en la Sec. 2.1.4, la simetría de reflexión en τ que impone estas excitaciones entre los estados de entrada y salida, ver (3.5.8), permite demostrar que

$$\dot{\Upsilon}_\Sigma = \langle \Psi_\lambda | \Pi | \Psi_\lambda \rangle \propto \int_0^\infty d\tau' (\partial_\tau G(0, \tau') - \partial_\tau G(0, \tau')) \phi(-\tau') = 0, \quad (3.5.18)$$

donde hemos usado la notación de (3.5.7) para la función de 2 puntos conforme. No exploraremos en detalle las consecuencias de esto, aunque el autor lo considera natural por la forma en que generamos el estado, como una fuente externa acoplada al campo y no a su momento conjugado y siendo que λ es una fuente real, mientras que para los estados coherentes generales el factor que acompaña a a^\dagger es complejo.

En el argumento anterior, nos pareció de interés mantener $\dot{\Upsilon}$ genérico hasta el final puesto que el resultado (3.5.16) no depende de esto.

Demostrada la naturaleza coherente de los estados holográficos en el límite $N \rightarrow \infty$, es natural suponer que estos configuran una base completa según la cual expandir un estado arbitrario $|\Gamma\rangle$ aún si este no carece de una geometría dual asociada,

$$|\Gamma\rangle = \sum_\phi C_\phi |\Psi_\phi\rangle, \quad (3.5.19)$$

como los autoestados de energía de baja energía. Esta posibilidad fue explorada por el autor en el ensayo [80] y también por otros autores en [92].

Antes de continuar, comentaremos cómo la inclusión de correcciones $1/N$ afectan el resultado (3.5.16). De forma general, el argumento no permitirá una identificación cerrada de los estados puesto que la acción ya no se separará completamente independizando Φ de Υ . Esto es razonable puesto que pone de manifiesto que una fuente externa encendida sobre la que se cuantiza puede absorber u otorgar energía a un sistema cuántico, modificando así el sistema cuántico en cuestión. Más concretamente, la solución Υ estará presente en las ecuaciones de movimiento de Φ . Para ejemplificar esto, tomaremos el caso de un campo escalar sin masa autointeractuante con un potencial cúbico,

$$\mathcal{L}(\Phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{g}{3} \Phi^3, \quad g \propto N^{-1}; \quad (-\square \Phi + g\Phi^2) = 0. \quad (3.5.20)$$

La separación del campo $\Phi \rightarrow \Phi + \Upsilon$ ahora lleva a términos de volumen

$$\mathcal{L}(\Phi + \Upsilon) = \mathcal{L}(\Phi) + \mathcal{L}(\Upsilon) + \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Upsilon + g\Phi^2 \Upsilon + g\Upsilon^2 \Phi. \quad (3.5.21)$$

Los términos de borde siguen un proceso análogo al descrito arriba. Las ecuaciones de movimiento de Υ anulan el término de volumen lineal en Φ . La integral de caminos queda

$$\begin{aligned} \langle \phi_\Sigma | \Psi_\lambda \rangle &\equiv \int \mathcal{D}_{\phi_\Sigma, \lambda} \Phi e^{-S_E[\Phi]} \\ &= e^{-S_E[\Upsilon]} e^{\int_\Sigma \sqrt{\gamma_\Sigma} \phi_\Sigma \partial_t f} \int \mathcal{D}_{\phi_\Sigma - f_\Sigma; 0} \phi e^{-S_E[\Phi] + g \int \Phi^2 \Upsilon} \\ &= e^{-S_E[\Upsilon]} \langle \phi_\Sigma | e^{-\int_\Sigma \sqrt{\gamma_\Sigma} \hat{\Pi}_\Sigma \Upsilon_\Sigma + \int_\Sigma \sqrt{\gamma_\Sigma} \hat{\Phi}_\Sigma \partial_n \Upsilon} \left(1 + g \int \Upsilon \Phi^2 + O(g^2) \right) | \Psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

Observar que cada paso de la derivación anterior es válido también para el caso interactuante, pero que la integral de caminos que queda ya no es el vacío de la teoría original si no que se encuentra acoplado con la fuente externa, en este caso $g \int \Upsilon \Phi^2$. Naturalmente, se observa que para $g \rightarrow 0$ recuperamos el límite de estados coherentes, pero que la primera corrección ya deformará esta propiedad de una forma no trivial.

Es interesante notar que un procedimiento análogo podría también haberse hecho sobre (3.3.3), para el caso de una teoría libre con una fuente externa j para el campo fundamental. El campo se descompone como $A \rightarrow A + Y$, donde Y cumple las EDM acopladas a la fuente externa. El término de acoplamiento a la fuente queda $jA \rightarrow jA + jY$, el segundo sale de la integral de caminos y forma parte de la normalización de la funcional de onda, y el primero se anula por las ecuaciones de movimiento de Y . Luego, al igual que para Φ en el ejemplo de anterior, para A queda una acción libre desacoplada de la fuente externa. El resultado es entonces análogo a (3.5.16), i.e. un sistema libre que fue acoplado en el pasado a una fuente externa para sus campos fundamentales quedará en un estado coherente de la teoría original. Esto no es más que una derivación alternativa en términos de integrales de caminos del resultado original de Glauber, [22].

Veremos ahora la información accesible sobre estos estados desde la prescripción BDHM, donde la expansión en operadores escalera nos permitirá un tratamiento más pragmático.

Coherencia desde BDHM

El abordaje de los estados (3.5.5) desde la prescripción BDHM permite un tratamiento de los mismo en términos de operadores escalera de la teoría de AdS. Aprovechando los teoremas de desentrelazado BCH (Baker-Campbell-Hausdorff) [50] daremos una perspectiva más acabada de sus propiedades para los casos interactuantes.

En el límite $N \rightarrow \infty$, uno puede aplicar directamente (3.3.42), para obtener a partir de (3.5.5) que

$$|\Psi_\phi\rangle \propto e^{\sum_{nl} \lambda_{nl} \hat{a}_{nl}^\dagger} |0\rangle, \quad \lambda_{nl} = -\mathcal{O}_{nl}^* \int e^{\omega_{nl}\tau} Y_{lm_i}(\Omega) \phi(\tau, \Omega) = -\mathcal{O}_{nl}^* \bar{\phi}_{nl}, \quad (3.5.23)$$

donde $\bar{\phi}_{nl}$ es la transformada de Laplace de la fuente ϕ en este espacio. Esto demuestra en esta prescripción a orden dominante en N el caracter coherente de (3.5.5). Desde un punto de vista completamente Euclideo para construir los estados, es esperable que los autovalores de los estados coherentes construidos sean siempre reales. En consecuencia, es también esperable que solo el campo o su momento conjugado tengan valor de expectación no nulo sobre estos.

A partir de esta expresión es directo calcular cualquier función de n puntos en este limite en estos estados incluido el producto interno. En particular, para distintos estados de entrada y salida, uno puede calcular los elementos de matriz del operador \mathcal{O} en esta base para obtener

$$\frac{\langle \Psi_{\phi_+} | \mathcal{O}(t, \Omega) | \Psi_{\phi_-} \rangle}{\langle \Psi_{\phi_+} | \Psi_{\phi_-} \rangle} = \sum_{nl} (\lambda_{nl}^+)^* \mathcal{O}_{nl}^* e^{i\omega_{nl}t} Y_{lm_i}(\Omega) + \lambda_{nl}^- \mathcal{O}_{nl} e^{-i\omega_{nl}t} Y_{lm_i}^*(\Omega). \quad (3.5.24)$$

Este resultado puede compararse directamente con cálculos holográficos en la prescripción SvR y lo usaremos recurrentemente como chequeo de consistencia de nuestra construcción. Notar que este objeto no tiene que ser necesariamente real, incluso si los campos involucrados son todos reales, puesto que los elementos de matriz de un operador en una base no diagonal no están restringidos a serlo. En particular, si los estados de entrada y salida son iguales y dado que \mathcal{O} es hermitico, se puede comprobar que (3.5.24) es real. De la misma forma se puede obtener la función de 2 puntos conectada, que como se mostró en la Sec. 2.1.4, para estados excitados es la misma que para el vacío.

La incorporación de interacciones es especialmente interesante desde el enfoque BDHM, puesto que permite un estudio sistemático orden a orden en las constantes de acoplamiento. De particular interés será considerar el caso cúbico (3.5.20), donde como se mostró en (3.3.46), el operador \mathcal{O} es cuadrático en los operadores escalera a primer orden en g . Luego, a primer orden en $g \sim N^{-1}$, los estados (3.5.1) serán

$$|\Psi_\phi\rangle \propto \exp \left\{ \sum_{nl} \lambda_{nl} \hat{a}_{nl}^\dagger + g \gamma_{nl} (\hat{a}_{nl}^\dagger)^2 \right\} |0\rangle, \quad \lambda_{nl} \sim \phi_{nl}, \quad \gamma_{nl} \sim \phi_{nl}^2, \quad (3.5.25)$$

que se conocen de forma general como estados gaussianos generalizados, o coherente-comprimido.

Para terminar este análisis de los estados (3.5.1), se desea enfatizar una vez más que su definición no está enfocada en su carácter coherente, si no en que tengan garantizado por construcción un dual geométrico. La coherencia a orden dominante surge necesariamente como consecuencia de esta construcción, pero la incorporación de correcciones al cálculo inmediatamente romperán esta propiedad. La interpretación geométrica, sin embargo, se mantiene a todo orden en las correcciones semiclásicas y veremos que se pueden obtener todas las correcciones para las funciones de n puntos mediante un proceso diagramático que es la extensión a geometrías de signatura mixta a las reglas de los diagramas de Witten.

Este capítulo cierra el grueso de la introducción de los contenidos conceptuales y presenta la construcción central de esta tesis que son los estados 3.5.1 y su aproximación semiclásica (3.5.5). Los capítulos que restan a este trabajo contienen mayormente las aplicaciones que a lo largo de este tiempo hemos encontrado a los mismos y que fueron publicadas en [63, 77, 78, 79].

La única excepción a esto será la adaptación de este formalismo al caso de caminos cerrados y en particular para el camino Térmico simétrico $\sigma = \beta/2$ introducido en la Sec 2.1.1, donde aprovecharemos tanto herramientas de SK como de TFD para interpretar las excitaciones que los estados (3.5.1) describen a T finita.

Capítulo 4

Aplicaciones a Temperatura cero

En este capítulo estudiaremos los primeros ejemplos de aplicación de la prescripción SvR, así como también el estudio de los estados excitados holográficos. La estructura general del capítulo será el de proponer un camino SK, descomponerlo en secciones Euclídeas y Lorentzianas y buscar un dual holográfico para cada una para luego pegarlas según las condiciones descritas en la Sec. 3.4 para finalmente armar la geometría holográfica dual al camino SK completo. Luego, sobre cada una de estas geometrías de signatura cambiante estudiaremos la propagación de un campo de prueba escalar Φ de masa m en el límite semiclásico y calcularemos el producto internos y las funciones de 1 y 2 puntos para el operador dual de la CFT \mathcal{O} de dimensión conforme $\Delta = d/2 + \sqrt{d^2/4 + m^2}$ para estados excitados. Con esto comprobaremos algunas de las propiedades generales que presentamos en el capítulo anterior en ejemplos explícitos.

Todos los caminos presentados en este capítulo son abiertos y contienen segmentos Euclídeos semi-infinitos que pueden inmediatamente asociarse con los estados iniciales o finales del problema y el encendido de fuentes externas como excitaciones sobre los mismos. La extensión, cuando sea posible, de estas herramientas al caso de caminos cerrados se explicará en detalle en el próximo capítulo.

Empezaremos por estudiar el camino In-Out, que se corresponde con un experimento de dispersión, sobre dos CFT distintas. El primero describirá una CFT definida en una esfera $\mathbb{R}_t \times S^{d-1}$, donde \mathbb{R}_t es la coordenada temporal y la segunda definida sobre espacio plano \mathbb{M}^d . El dual holográfico de ambas teorías es AdS puro pero en coordenadas Globales y Poincaré respectivamente, que describen la forma correcta de los bordes asintóticos. Veremos que dado que las coordenadas de Poincaré en tiempo real no cubren todo el espacio AdS, las geometrías duales a cada problema son distintas. Sobre el primer ejemplo estudiaremos el límite $N \rightarrow \infty$ como primer chequeo explícito de la prescripción SvR y la de nuestros estados. Veremos que la prescripción SvR permite obtener directamente correladores temporalmente ordenados, que son los adecuados para este camino. El resultado más destacable de este ejemplo es el cálculo de los elementos de matriz del operador de la CFT en la base de nuestros estados. En este límite los estados son estrictamente coherentes y son por tanto una base del espacio de Hilbert, de forma que el cálculo de sus elementos de matriz es equivalente a dar una forma operatorial del estado, que permite comparar directamente los diccionarios GKPW/SvR con BDHM de una nueva manera. Por simplicidad de la métrica y fórmulas estudiaremos el ejemplo sobre AdS_{2+1} , donde podremos llevar a cabo todas las integrales de forma analítica. La extensión de los resultados al caso de dimensión general es directa.

Sobre la segunda agregaremos interacciones cúbicas en AdS para estudiar la deformación de los estados excitados holográficos. Comprobaremos que ya no serán coherentes, pero que a primer orden en el acoplamiento cúbico son estados coherentes-comprimidos [77, 47]. Concluiremos también que para este y cualquier otro caso donde se conozca la geometría dual completa para un camino, se pueden dar reglas diagramáticas para el cálculo de cualquier contribución a cualquier orden de estos estados. El juego de coordenadas de Poincaré permite tratar de forma analítica el caso AdS_{d+1} .

Para terminar el capítulo, estudiaremos el caso del camino In-In, donde construiremos por primera vez el pegado de geometrías Lorentzianas entre sí con direcciones temporales opuestas, además de la existencia de más de un propagador sobre el camino. Una vez pegada la geometría completa obtendremos los propagadores del problema para mostrar cómo aparecen en este formalismo. Los estados excitados se comportan de forma idéntica al de los ejemplos anteriores.

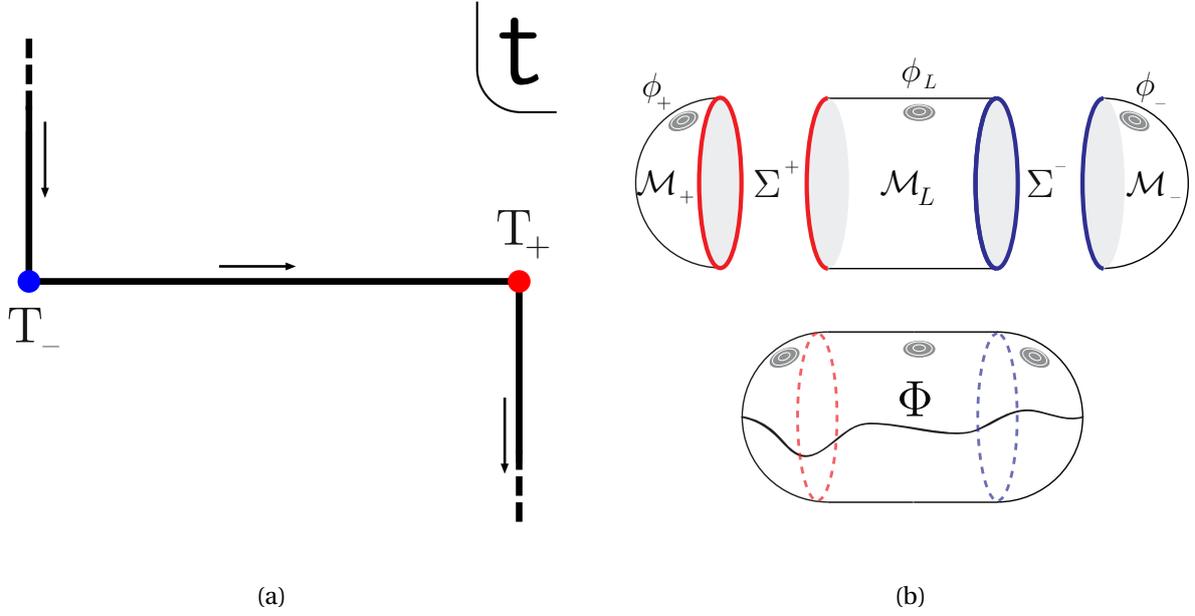


Figura 4.1: (a) Contorno In-Out en el plano complejo t con evolución temporal total $\Delta T = T_+ - T_-$. (b) Geometría dual SvR. En la parte de abajo se ilustra una configuración suave de campo.

4.1. In-Out en Globales: campo libre

En esta sección, siguiendo el trabajo [63] generalizaremos la cuenta hecha en [19] para el caso de estados excitados obtenidos prendiendo fuentes asintóticas en las regiones euclidianas sobre el camino In-Out. Nuestro objetivo es dar un primer ejemplo de dichos estados. Para esto, trabajaremos en el modelo más sencillo posible: un campo escalar real Φ libre de masa m en AdS_3 . Calcularemos funciones de correlación para su operador escalar dual \mathcal{O} de dimensión conforme $\Delta = d/2 + \sqrt{d^2/4 + m^2}$ para el camino de la Fig. 4.1a.

Nuestro primer objetivo es construir la geometría dual que describe el camino SK In-Out.

4.1.1. Construcción de la geometría y pegado

Como ya se describió numerosas veces en este trabajo, el camino In-Out, representado nuevamente en la Fig. 4.1a, está compuesto de 3 segmentos: dos segmentos verticales sobre $\mp T/2$ que construyen el estado inicial y final respectivamente y un segmento Lorentziano que se extiende sobre el eje real desde $[-T/2, +T/2]$. El parámetro T regula la definición del camino y puede tomarse a $T \rightarrow \infty$ para calcular funciones de 2 puntos, por ejemplo o $T \rightarrow 0$ cuando es de interés calcular valores de expectación o productos internos entre estados excitados.

Como se mencionó antes, la teoría de campos descrita en este borde está definida sobre $\mathbb{R}_t \times S^{d-1}$ que es exactamente la métrica conforme que describen las coordenadas Globales y E-Globales, en signatura Lorentziana y Euclídea respectivamente, en su borde asintótico, i.e. para $d+1 = 2+1$ (ver Sec. 2.2)

$$ds_{\text{AdS}}^2 = -(1+r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{(1+r^2)} + r^2 d\varphi^2, \quad ds_H^2 = +(1+r^2)d\tau^2 + \frac{dr^2}{(1+r^2)} + r^2 d\varphi^2. \quad (4.1.1)$$

En este ejemplo, la simplicidad de la métrica (hay un vector de Killing ∂_t global) permite extender la coordenada temporal del borde t, τ en toda la geometría como superficies Σ . Segmentos de estos espacios son los que usaremos para describir el dual holográfico del camino In-Out. Las coordenadas tipo espacio tienen dominio $r \geq 0$ y $\varphi \sim \varphi + 2\pi$.

El segmento Lorentziano será descrito por una variedad \mathcal{M}_L la métrica Lorentziana en (4.1.1) en un segmento $t \in [-T/2, T/2]$, mientras que los segmentos Euclídeos lo serán por variedades \mathcal{M}_\pm con $\tau \in [0, \infty)$ y $\tau \in (-\infty, 0]$ respectivamente. La topología del segmento Lorentziano es la de un cilindro, mientras que la de los segmentos Euclídeos es la de dos medias esferas, como se muestra en la Fig. 4.1b. Las 3 variedades deben

pegarse sobre las regiones tipo espacio Σ^\pm según se describe en (3.4.7), comprobando que las métricas inducidas y curvaturas extrínsecas sobre estas regiones son iguales.

Comprobaremos ahora que el pegado es posible de forma trivial. La condición sobre las métricas inducidas $h_{\alpha\beta}$ es producto de que al pegar sobre superficies de t, τ constante es directo comprobar que las métricas en (4.1.1) son iguales

$$ds_{AdS}^2|_{\Sigma^\pm} = \frac{dr^2}{(1+r^2)} + r^2 d\varphi^2 = ds_H^2|_{\Sigma^\pm}, \quad (4.1.2)$$

lo que satisface la primera condición.

La segunda condición requiere de un cálculo explícito de la curvatura extrínseca para una superficie normal al vector unitario saliente $n^\mu \propto \partial_t$. La curvatura extrínseca de una superficie normal a un vector n^μ unitario es

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n P_{\mu\nu} = \frac{1}{2} n^\alpha \partial_\alpha (g_{\mu\nu} - n^2 n_\mu n_\nu) + \partial_\mu (n^\alpha) (g_{\alpha\nu} - n^2 n_\alpha n_\nu) \quad (4.1.3)$$

donde $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n^2 n_\mu n_\nu$ es la primer forma fundamental de la superficie normal a n^μ y $n^2 = n_\alpha n^\alpha = -1$ dado que es un vector tipo tiempo. En coordenadas E-Globales en H y las Globales de AdS, el vector normal unitario es $n_\mu = \sqrt{1+r^2} \delta_\mu^t$. Dado que la métrica solo depende de la dirección radial, puede verse que el primer término de (4.1.3) se anula

$$n^\alpha \partial_\alpha (g_{\mu\nu} - n^2 n_\mu n_\nu) = n^0 \partial_0 (g_{\mu\nu}(r) - n^2 n_\mu(r) n_\nu(r)) = 0$$

El cálculo explícito del segundo término muestra que también es trivial

$$\partial_\mu (n^\alpha) (g_{\alpha\nu} - n^2 n_\alpha n_\nu) = \partial_\mu (n^0) (g_{0\nu} + n_0 n_\nu) = \delta_\mu^r \partial_r \left(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \right) \delta_\nu^0 (-1+r^2) + \sqrt{1+r^2} \sqrt{1+r^2} = 0$$

de forma que cualquier superficie de nivel de t y τ puede unirse con cualquier otra. En particular se pueden unir estas variedades sobre Σ^\pm , que es lo que se quería probar. La geometría completa pegada puede verse en la Fig. 4.1b.

A continuación, estudiaremos la propagación de un campo escalar sobre esta geometría.

4.1.2. Campo escalar libre

La acción para Φ sobre la curva compleja \mathcal{C} definida en Fig. 4.1a es

$$S[\Phi] = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \sqrt{|g|} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi), \quad (4.1.4)$$

que puede a su vez dividirse en las partes que conforman el camino completo. Tomaremos $\Phi_-(\tau) \equiv \Phi(-T - i\tau)$, con $\tau \in (-\infty, 0]$ el campo en el segmento vertical de la izquierda, $\Phi_L(t) \equiv \Phi(t)$, $t \in [-T, T]$ el campo en el segmento horizontal y $\Phi_+(\tau) \equiv \Phi(T - i\tau)$, $\tau \in [0, \infty)$ el campo en el segmento vertical de la derecha, la ecuación (4.1.4) puede ponerse de la forma

$$-iS = -S_- - iS_L - S_+,$$

donde

$$\begin{aligned} -S_\pm &= -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}_\pm} \sqrt{|g|} (\partial_\mu \Phi_\pm \partial^\mu \Phi_\pm + m^2 \Phi_\pm^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}_\pm} \sqrt{|g|} \Phi_\pm (\square - m^2) \Phi_\pm \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{M}_\pm} \sqrt{|\gamma_r|} \Phi_\pm n_r^\mu \partial_\mu \Phi_\pm - \frac{1}{2} \int_{\Sigma^\pm} \sqrt{|\gamma_\Sigma|} \Phi_\pm n_\Sigma^\mu \partial_\mu \Phi_\pm, \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

y

$$\begin{aligned} -iS_L &= -\frac{i}{2} \int_{\mathcal{M}_L} \sqrt{|g|} (\partial_\mu \Phi_L \partial^\mu \Phi_L + m^2 \Phi_L^2) \\ &= +\frac{i}{2} \int_{\mathcal{M}_L} \sqrt{|g|} \Phi_L (\square - m^2) \Phi_L - \frac{i}{2} \int_{\partial \mathcal{M}_L} \sqrt{|\gamma_r|} \Phi_L n_r^\mu \partial_\mu \Phi_L \\ &\quad - \frac{i}{2} \int_{\Sigma^+} \sqrt{|\gamma_\Sigma|} \Phi_L n_\Sigma^\mu \partial_\mu \Phi_L - \frac{i}{2} \int_{\Sigma^-} \sqrt{|\gamma_\Sigma|} \Phi_L n_\Sigma^\mu \partial_\mu \Phi_L. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

En las expresiones de arriba se integró por partes dando lugar a términos de borde con vectores n^μ normales a las fronteras de cada región. Estos términos son de dos tipos: bordes conformes señalados con ∂ y tipo espacio Σ que se muestran en la Fig.4.1b¹. Se definieron además, γ_r y γ_Σ como las métricas inducidas sobre las superficies correspondientes y $\square\phi \equiv (\sqrt{|g|})^{-1}\partial_\mu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi)$ es el Laplaciano escalar estándar.

La tarea es encontrar una solución clásica suave de (4.1.4) con $\phi_\pm, \phi_L \neq 0$. El método para encontrar tal configuración, como se explicó en el capítulo anterior, será el de encontrar una solución general en cada una de las regiones sujetas a su condición de borde asintótico y luego imponer continuidad de campo y momento conjugado a través de las superficies Σ , es decir en $\pm T/2$. Estas condiciones pueden escribirse más explícitamente para este caso puntual como

$$\begin{aligned} \Phi_-(r, 0, \varphi) &= \Phi_L(r, -T/2, \varphi), & \Phi_L(r, T/2, \varphi) &= \Phi_+(r, 0, \varphi), \\ \partial_\tau \Phi_-(r, \tau, \varphi) \Big|_{\tau=0} &= -i\partial_t \Phi_L(r, t, \varphi) \Big|_{t=-T/2}, & -i\partial_t \Phi_L(r, t, \varphi) \Big|_{t=T/2} &= \partial_\tau \Phi_+(r, \tau, \varphi) \Big|_{\tau=0}. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Al igual que en el caso de la prescripción GKPW, ver Sec. 3.3.1, para encontrar soluciones del campo con fuentes asintóticas el problema se debe regularizar imponiendo las condiciones asintóticas a un radio de corte $r = R$, que mantendrá hasta obtener los correladores de CFT, donde el límite $R \rightarrow \infty$ estará bien definido. A diferencia de la Sec. 3.3.1, para este ejemplo mantendremos hasta el final el regulador asintótico y obtendremos así la normalización del cálculo holográfico de la función de 2 puntos que cumple con las identidades de Ward.

Solución sobre \mathcal{M}_L

En la región Lorentziana, la métrica en coordenadas globales es, ver (4.1.1),

$$ds^2 = -(1+r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\varphi^2, \quad t \in [-T/2, +T/2]$$

Usando el ansatz $\Phi_L(r, t, \varphi) \propto e^{-i\omega t + i l \varphi} f(\omega, l, r)$ con $l \in \mathbb{Z}$, en la ecuación de Klein Gordon que se desprende de (4.1.6) obtenemos

$$\left(\frac{1}{r} \partial_r (r(1+r^2) \partial_r) + \frac{\omega^2}{1+r^2} - \frac{l^2}{r^2} - m^2 \right) f(\omega, l, r) = 0.$$

La solución regular en el origen es

$$f(\omega, l, r) = (1+r^2)^{\sqrt{\omega^2}/2} r^{|l|} {}_2F_1 \left(\frac{\sqrt{\omega^2} + |l| + \Delta}{2}, \frac{\sqrt{\omega^2} + |l| - \Delta + 2}{2}; 1 + |l|; -r^2 \right),$$

donde ${}_2F_1(a, b; c; x)$ es la función hypergeométrica de Gauss [61]. Luego, una solución general en L puede escribirse como

$$\Phi_L(r, t, \varphi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int d\omega c_{\omega l} e^{-i\omega t + i l \varphi} f(\omega, l, r). \quad (4.1.8)$$

La condición de contorno la imponemos como

$$\Phi_L(R, t, \varphi) = R^{\Delta-2} \phi_L(t, \varphi). \quad (4.1.9)$$

A partir de (4.1.8) y (4.1.9) se obtiene

$$c_{\omega l} = \frac{R^{\Delta-2}}{4\pi^2} \int dt' d\varphi' e^{i\omega t' - i l \varphi'} \frac{\phi_L(t', \varphi')}{f(\omega, l, R)}.$$

Insertando esto de nuevo en (4.1.8), se llega a

$$\Phi_L(r, t, \varphi) = \frac{R^{\Delta-2}}{4\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int d\omega dt' d\varphi' e^{-i\omega(t-t') + i l(\varphi-\varphi')} \phi_L(t', \varphi') \frac{f(\omega, l, r)}{f(\omega, l, R)}. \quad (4.1.10)$$

¹Los contribuciones de este tipo que surgirían de las secciones euclidianas en $\tau \rightarrow \pm\infty$ en (4.1.5) están ausentes dado que, como se explicó en la Sec. 3.4, las condiciones de contorno $\phi_\pm \rightarrow 0$ en estos límites, respectivamente.

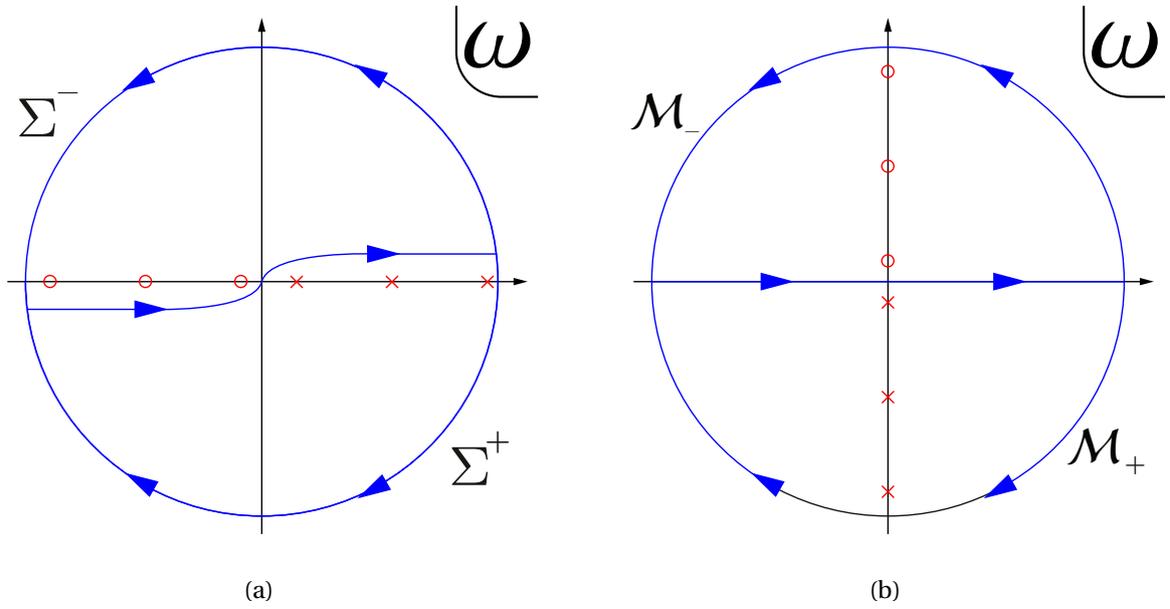


Figura 4.2: (a) Camino de Feynman \mathcal{F} en el plano complejo ω usado en (4.1.12). Σ^\pm indica el contorno apropiado a elegir cerca de dichas superficies, cuando la integral en frecuencia puede resolverse por teorema de residuos. (b) Ubicación en el plano complejo ω de los ceros de $f(-i\omega, l, R)$ relevantes en (4.1.18). Nuevamente, \mathcal{M}_\pm representan la deformación del camino que permite resolver la integral en frecuencia por teorema de residuos cerca de dichas superficies.

Se puede comprobar que esta expresión no está bien definida puesto que $f(\omega, l, R) = 0$ para $\omega = \pm\omega_{nl}^R$ con

$$\omega_{nl}^R \equiv \omega_{nl} + \epsilon(R), \quad (4.1.11)$$

donde $\omega_{nl} = 2n + |l| + \Delta$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), y $\epsilon(R) \sim O(1/R^{2\Delta-2})$. Los modos (4.1.11) tienden a los modos normalizables de AdS estandar (ver Sec. 3.3.2) en el límite $R \rightarrow \infty$. Siguiendo a [19] damos sentido a la expresión (4.1.10) eligiendo el camino de integración de Feynman en el plano complejo ω como se muestra en la Fig.4.2a, que sorteja los polos, y daremos cuenta de estos modos normalizables de forma independiente. De esta forma, escribiremos la solución general del campo en L que satisface (4.1.9) como

$$\begin{aligned} \Phi_L(r, t, \varphi) = & \frac{R^{\Delta-2}}{4\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega dt' d\varphi' e^{-i\omega(t-t') + il(\varphi-\varphi')} \phi_L(t', \varphi') \frac{f(\omega, l, r)}{f(\omega, l, R)} \\ & + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ l \in \mathbb{Z}}} \left(L_{nl}^+ e^{-i\omega_{nl}^R t} + L_{nl}^- e^{+i\omega_{nl}^R t} \right) e^{il\varphi} g_{nl}(r), \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

donde L_{nl}^\pm son coeficientes que serán determinados al pegar las regiones imponiendo (4.1.7) en las hipersuperficies Σ^\pm (ver (4.1.24)) y

$$g_{nl}(r) \equiv f(\pm\omega_{nl}^R, l, r). \quad (4.1.13)$$

Soluciones sobre \mathcal{M}_\pm

Las soluciones sobre las secciones euclidianas se pueden obtener inmediatamente de las soluciones Lorentzianas. Consideremos concretamente (4.1.5) sobre \mathcal{M}_+ , siendo la métrica, ver (4.1.1),

$$ds^2 = (1+r^2)d\tau^2 + \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\varphi^2, \quad \tau \in [0, \infty) \quad (4.1.14)$$

se separan variables como

$$\Phi_+(r, \tau, \varphi) \propto e^{+i\omega\tau + il\varphi} h(\omega, l, r), \quad (4.1.15)$$

se halla inmediatamente que

$$h(\omega, l, r) = f(-i\omega, l, r). \quad (4.1.16)$$

La solución general al problema en \mathcal{M}_+ se escribe entonces como

$$\Phi_+(r, \tau, \varphi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int d\omega d_{\omega l} e^{i\omega\tau + il\varphi} f(-i\omega, l, r),$$

e imponiendo

$$\Phi_+(R, \tau, \varphi) = R^{\Delta-2} \phi_+(\tau, \varphi), \quad (4.1.17)$$

se halla

$$\Phi_+(r, \tau, \varphi) = \frac{R^{\Delta-2}}{4\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int d\omega d\tau' d\varphi' e^{i\omega(\tau-\tau') + il(\varphi-\varphi')} \phi_+(\tau', \varphi') \frac{f(-i\omega, l, r)}{f(-i\omega, l, R)}. \quad (4.1.18)$$

La integral en frecuencias así escrita en este caso está bien definida, puesto que los polos del integrando quedan fuera del eje real y sobre el eje imaginario ω , como se muestra en la Fig. 4.2b.

Como se señala en [19], las frecuencias imaginarias $\omega = \pm i\omega_{nl}^R$ en (4.1.15) ofrecen también los candidatos a soluciones normalizables

$$\Phi_+(r, \tau, \varphi) \propto e^{\mp\omega_{nl}^R \tau + il\varphi} g_{nl}(r).$$

Dado que $\tau \in [0, \infty)$ en \mathcal{M}_+ se comprueba que efectivamente pueden agregarse una combinación lineal arbitraria de modos $e^{-\omega_{nl}^R \tau}$ a (4.1.18)² sin modificar las condiciones de contorno asintóticas. La solución en \mathcal{M}_+ que satisface (4.1.17) es

$$\Phi_+(r, \tau, \varphi) = \frac{R^{\Delta-2}}{4\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int d\omega d\tau' d\varphi' e^{i\omega(\tau-\tau') + il(\varphi-\varphi')} \phi_+(\tau', \varphi') \frac{f(-i\omega, l, r)}{f(-i\omega, l, R)} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ l \in \mathbb{Z}}} E_{nl}^+ e^{-\omega_{nl}^R (\tau + iT/2) + il\varphi} g_{nl}(r). \quad (4.1.19)$$

Por su parte, la solución sobre \mathcal{M}_- es

$$\Phi_-(r, \tau, \varphi) = \frac{R^{\Delta-2}}{4\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int d\omega d\tau' d\varphi' e^{i\omega(\tau-\tau') + il(\varphi-\varphi')} \phi_-(\tau', \varphi') \frac{f(-i\omega, l, r)}{f(-i\omega, l, R)} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ l \in \mathbb{Z}}} E_{nl}^- e^{\omega_{nl}^R (\tau - iT/2) + il\varphi} g_{nl}(r). \quad (4.1.20)$$

Los coeficientes E_{nl}^\pm serán determinados al imponer (4.1.7) (ver (4.1.24)). La existencia de modos normalizables en signatura euclidiana es consecuencia de que \mathcal{M}_\pm son solo medio espacio hiperbólico y contienen o bien $\tau = \infty$ o bien $\tau = -\infty$, pero no ambos. Se recuerda que las fuentes ϕ_\pm han de elegirse tales que se apaguen suavemente tanto cerca de $\tau \rightarrow \pm\infty$ como Σ^\pm como requiere la prescripción SvR [13]. Las fases $e^{-i\omega_{nl}^R T/2}$ agregadas en (4.1.19)-(4.1.20) son convenientes para el pegado más adelante y son inocuas puesto que E^\pm son arbitrarios.

Pegado de las soluciones

El pegado (4.1.7) requiere previamente del estudio del comportamiento de (4.1.12), (4.1.19) y (4.1.20) y sus derivadas temporales cerca de Σ^\pm . Estas expansiones pueden llevarse a cabo mediante el teorema de residuos dado que las fuentes se anulan suavemente cerca de cualquier frontera [13]. Deformando los caminos de integración en ω adecuadamente según se muestra en Fig.4.2 se halla

$$\Phi_+(r, \tau, \varphi) \sim \sum_{nl} \left(E_{nl}^+ e^{-\omega_{nl}^R (\tau + iT/2)} + R^{\Delta-2} \text{Res}_{nl}^R \phi_{+;n(-l)} e^{\omega_{nl}^R (\tau + iT/2)} \right) e^{il\varphi} g_{nl}(r), \quad \tau \sim 0 \quad (4.1.21)$$

$$\Phi_-(r, \tau, \varphi) \sim \sum_{nl} \left(E_{nl}^- e^{\omega_{nl}^R (\tau - iT/2)} + R^{\Delta-2} \text{Res}_{nl}^R \phi_{-;n(-l)} e^{-\omega_{nl}^R (\tau - iT/2)} \right) e^{il\varphi} g_{nl}(r), \quad \tau \sim 0$$

$$\Phi_L(r, t, \varphi) \sim \sum_{nl} \left(\left(L_{nl}^+ + iR^{\Delta-2} \text{Res}_{nl}^R \phi_{L;n}^* \right) e^{-i\omega_{nl}^R t} + L_{nl}^- e^{i\omega_{nl}^R t} \right) e^{il\varphi} g_{nl}(r), \quad t \sim +T/2$$

$$\Phi_L(r, t, \varphi) \sim \sum_{nl} \left(L_{nl}^+ e^{-i\omega_{nl}^R t} + \left(L_{nl}^- + iR^{\Delta-2} \text{Res}_{nl}^R \phi_{L;n(-l)} \right) e^{i\omega_{nl}^R t} \right) e^{il\varphi} g_{nl}(r), \quad t \sim -T/2$$

donde se definieron en las primeras dos líneas

$$\phi_{+;nl} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau d\varphi e^{-\omega_{nl}^R (\tau + iT) + il\varphi} \phi_+(\tau, \varphi), \quad \phi_{-;nl} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 d\tau d\varphi e^{+\omega_{nl}^R (\tau - iT) + il\varphi} \phi_-(\tau, \varphi), \quad (4.1.22)$$

²Un razonamiento análogo lleva a los modos normalizables en \mathcal{M}_- .

y para la fuente Lorentziana

$$\phi_{L;nl} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dt d\varphi e^{-i\omega_{nl}^R t + i l \varphi} \phi_L(t, \varphi).$$

Los residuos Res_{nl}^R están definidos alrededor de los puntos $\omega = -\omega_{nl}^R$ en un sentido antihorario

$$Res_{nl}^R \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\omega = -\omega_{nl}^R} \frac{d\omega}{f(\omega, l, R)}. \quad (4.1.23)$$

A partir de la ortogonalidad de $e^{il\varphi}$ y $g_{nl}(r)$, las ecuaciones (4.1.7) implican

$$\begin{aligned} L_{nl}^{\pm} &= R^{\Delta-2} Res_{nl}^R \phi_{\mp; n(-l)}, \\ E_{nl}^+ &= R^{\Delta-2} Res_{nl}^R \left(i\phi_{L;nl}^* + \phi_{-; n(-l)} \right), \\ E_{nl}^- &= R^{\Delta-2} Res_{nl}^R \left(i\phi_{L; n(-l)} + \phi_{+; n(-l)} \right). \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Estas expresiones generalizan los resultados obtenidos en [19] y se reducen a ellos en el límite $\phi_{\pm}(\tau, \varphi) = 0$. Lo esencial del resultado obtenido es que las fuentes euclideas encienden modos normalizables en la región Lorentziana. Se mostrará en breve que los factores $R^{\Delta-2}$ en (4.1.24) permiten un límite $R \rightarrow \infty$ convergente.

Antes de calcular la acción en la capa de masa, haremos un comentario sobre las expresiones de los campos sobre las superficies Σ^{\pm} que será común a todas las aplicaciones independientemente de los caminos SK que estemos considerando. De forma general, la parte de la solución Lorentziana que cumple con las condiciones de contorno asintóticas, como (4.1.10), tendrá polos sobre el eje real ω lo que forzará a elegir un camino de integración para poder definirla correctamente. La elección de cualquier camino en este punto, asociado como vemos a una noción de ordenamiento temporal en AdS (recordar que nombramos al camino \mathcal{F} por Feynman) no afectará el resultado final de los correladores en la CFT dual. El motivo de esto es que además de la solución no normalizable, existen aún los modos normalizables con parámetros L^{\pm} arbitrarios, de forma que elegir un camino en este punto es solo una forma provisoria de definir la solución par poder trabajar. La forma final de la solución, y en consecuencia la forma física en que la información se propaga sobre toda la variedad de signatura mixta es única y se hará manifiesta recién después de hacer el pegado entre las geometrías, i.e. después de determinar las L^{\pm} . Volveremos sobre esto en breve.

Dicho de otro modo, es central para la prescripción de SvR el efecto combinado de los modos normalizables y no normalizables de la solución sobre las variedades. Esto se hará manifiesto en todos los ejemplos de aplicación de este trabajo.

De forma operacional, el hecho de que las fuentes asintóticas se apaguen sobre las Σ^{\pm} , impone que sobre estas regiones la solución al campo deba poder expandirse sólo en términos de los modos normalizables de la variedad. Partiendo del primer renglón de (4.1.12), el caso $t \sim +T/2$ implica que $(t - t') \sim (T/2 - t') > 0$, puesto que t' barre solo el soporte de $\phi_L(t', \varphi')$ que por construcción se apaga suavemente antes de llegar a $t \sim \pm T/2$. Esto permite resolver las integrales en frecuencia ω sobre las superficies Σ^{\pm} por teorema de residuos,

$$\begin{aligned} \frac{R^{\Delta-2}}{4\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega dt' d\varphi' e^{-i\omega(t-t') + il(\varphi-\varphi')} \phi_L(t', \varphi') \frac{f(\omega, l, r)}{f(\omega, l, R)} &= \\ &= \sum_{nl} iR^{\Delta-2} Res_{nl}^R \phi_{L;nl}^* e^{-i\omega_{nl}^R t} e^{il\varphi} g_{nl}(r), \quad t \sim +T/2, \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

lo que lleva a (4.1.21). Notar que por la forma particular del camino, elegido, solo aparecen en la suma del lado derecho los residuos con parte real positiva. Esto será importante en breve. Se observa que el resultado obtenido es que la fuente externa sobre \mathcal{M}_L se propaga hasta Σ^+ y sobre esta describe una configuración particular de modos normalizables. Dicho de otro modo, las singularidades en el plano complejo ω de las soluciones no normalizables contienen la información necesaria de los modos normalizables. En este caso, los polos simples son directamente las frecuencias normales del problema. Veremos que en el caso de AdS-BH esto será análogo pero más delicado, siendo que el problema admite soluciones normalizables, no normalizables pero también modos cuasi-normales. Lo que sí es general de todo este tratamiento, es que la diferencia entre dos caminos provisorios distintos elegidos para la solución no normalizable, será siempre

una combinación lineal precisa de modos normalizables, de forma que la elección de uno u otro camino siempre puede absorberse en una redefinición de los coeficientes de estos.

Luego, lo que se observa es que las condiciones de pegado es donde los modos normalizables y no normalizables de la solución quedan vinculados. Si bien en la Sec. 3.4 se demostró que cada pegado por separado cancela las potenciales divergencias, se observa ya en este primer ejemplo que las condiciones (3.4.7), o (4.1.7) para este problema en particular, solo pueden resolverse todas en simultáneo y no por regiones. De forma general, los modos no normalizables de las regiones \mathcal{M}_i se manifestarán como modos normalizables, i.e. a través de los coeficientes que acompañan a estos modos en las soluciones generales, sobre todas las \mathcal{M}_j , $j \neq i$. Esto puede verse de forma manifiesta en todos los resultados de (4.2.16), donde puede verse que en ausencia de fuentes externas los coeficientes son todos nulos.

Sin embargo, para un camino SK general no solo las fuentes asintóticas dan lugar a coeficientes no triviales sobre la región. Como dijimos, en (4.1.12) se hizo una elección provisoria para la forma de sortear los polos en el camino de integración de las frecuencias, pero esta elección debe ser espúrea dado que por construcción de la prescripción SvR, la solución sobre la variedad completa que satisfacen (4.1.7) es única. Supongamos que hubiésemos tomado otro camino en (4.1.12), la integral sobre ω hubiese encerrado otros polos en (4.1.25), lo que modificaría la forma explícita de las ecuaciones (4.1.12), resultando a su vez en un cambio para las soluciones (4.1.24). Se puede comprobar que cualquier elección de camino de integración hecha en (4.1.12) llevará a la misma solución única sobre toda la variedad una vez satisfechas las condiciones de pegado.

Una vez insertadas (4.1.24) en las soluciones (4.1.12), (4.1.19) y (4.1.20), se obtiene de forma unívoca el correlador de la CFT a partir de la acción en la capa de masa como haremos a continuación. Veremos un ejemplo concreto de esto al estudiar el camino In-In al final de este capítulo, donde propondremos un camino de integración en ω provisorio que será corregido por los coeficientes de los modos normalizables luego de pegar las variedades.

Acción en la capa de masa

En esta sección se describirá cómo tomar el límite $R \rightarrow \infty$ sobre la acción en la capa de masa. La acción (4.1.4) sobre las soluciones clásicas da como resultado los siguientes términos de borde

$$\begin{aligned} S^0 &= -\frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\partial_r \mathcal{M}} dt d\varphi \sqrt{|\gamma_r|} \Phi n_r^\mu \partial_\mu \Phi \right]_{r=R} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int d\varphi (1+r^2) R^{\Delta-2} \left(-i \int_{-\infty}^0 d\tau \phi_- r \partial_r \Phi_- + \int_{-T}^T dt \phi_L r \partial_r \Phi_L - i \int_0^\infty d\tau \phi_+ r \partial_r \Phi_+ \right) \right]_{r=R}, \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

donde se usó que $\Phi(R, t, \varphi) = R^{\Delta-2} \phi(t, \varphi)$. Los tres términos en (4.1.26) se comportan de forma idéntica al tomar $R \rightarrow \infty$. Tomando por caso el término Lorentziano, se muestra que una expansión en $R \gg 1$ muestra que hay contribuciones tanto de los términos no normalizables como de los normalizables, i.e. los proporcionales a ϕ_L y L_{nl}^\pm en (4.1.12). El término dominante en la expansión de la derivada radial en (4.1.26) es

$$(1+r^2) R^{\Delta-2} (r \partial_r \Phi_L) \sim R^\Delta \left(R^{\Delta-2} \phi_L \frac{r \partial_r f(\omega, l, r)}{f(\omega, l, R)} + L_{nl}^\pm r \partial_r g_{nl}(r) \right), \quad R \gg 1. \quad (4.1.27)$$

La contribución del primer término en (4.1.27) es análoga³ a la estudiada en la Sec. 3.3.1. De la expansión en $r \gg 1$ de f ,

$$f(\omega, l, r) \sim A(\omega, l) r^{\Delta-2} + B(\omega, l) r^{-\Delta}, \quad (4.1.28)$$

donde

$$A(\omega, l) \equiv \frac{\Gamma(\Delta-1)\Gamma(|l|+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}(|l|+\Delta-\omega))\Gamma(\frac{1}{2}(|l|+\Delta+\omega))}, \quad B(\omega, l) = \frac{\Gamma(1-\Delta)\Gamma(|l|+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}(|l|-\Delta-\omega+2))\Gamma(\frac{1}{2}(|l|-\Delta+\omega+2))},$$

³Ya hemos introducido algunos de estos objetos en la Sec. 3.3.1, por ejemplo en (3.3.17). Hemos preferido reescribir estas definiciones para comodidad del lector.

se encuentra, a primer orden en R ,

$$R^{\Delta-2} \frac{r \partial_r f(\omega, l, r)}{f(\omega, l, R)} \Big|_{r=R} \sim \mathbb{S}[\omega, l, R] - 2(\Delta - 1) R^{-\Delta} \frac{B(\omega, l)}{A(\omega, l)} (1 + o(R^{-2})). \quad (4.1.29)$$

El primer término $\mathbb{S}[\omega, l, R]$ es una serie de potencias positivas de ω, l y se descarta puesto que da lugar a lo que se conoce como términos de contacto, contribuciones UV divergentes que pueden regularizarse agregando contratérminos a la acción. Como ya se mencionó anteriormente, este proceso se denomina Renormalización Holográfica y se discute de forma general en el Ap. A. La expansión en $r \sim R \gg 1$ de $g_{nl}(r)$ es

$$g_{nl}(r) \sim A(\omega_{nl}^R, l) r^{\Delta-2} + B(\omega_{nl}^R, l) r^{-\Delta},$$

con ω_{nl}^R dado por (4.1.11) de forma que $g_{nl}(R) = 0$. Luego, a primer orden en R se tiene que $A(\omega_{nl}^R, l) \sim -B(\omega_{nl}^R, l) R^{-2\Delta+2}$ que combinado con la ecuación anterior da

$$g_{nl}(r) \sim -B(\omega_{nl}^R, l) R^{-\Delta} \left(\left(\frac{r}{R} \right)^{\Delta-2} - \left(\frac{r}{R} \right)^{-\Delta} \right).$$

Se puede ver entonces que a primer orden en R , el segundo término de (4.1.27) es

$$L_{nl}^{\pm} r \partial_r g_{nl}(r) \Big|_{r=R} \sim -2(\Delta - 1) R^{-\Delta} B_{nl} Res_{nl} \phi_{\mp; n(-l)} (1 + o(R^{-2})), \quad (4.1.30)$$

donde la dependencia en R encontrada en (4.1.24) se tuvo en cuenta en combinación con (4.1.23) para definir

$$B_{nl} \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} B(\omega_{nl}^R, l), \quad Res_{nl} \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} R^{\Delta-2} Res_{nl}^R = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\omega=-\omega_{nl}} d\omega \frac{1}{A(\omega, l)}.$$

Usando (4.1.29) y (4.1.30) en (4.1.27) resulta en una expresión, cuya contribución finita es

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (1 + r^2) R^{\Delta-2} r \partial_r \Phi_L \sim -2(\Delta - 1) \left(\frac{B(\omega, l)}{A(\omega, l)} \phi_L + B_{nl} Res_{nl} \phi_{\pm} \right).$$

Llevando adelante pasos similares para los demás términos en (4.1.26), la acción en la capa de masa completa resulta

$$\begin{aligned} S^0 = & (\Delta - 1) \left(\sum_l \int_{\mathcal{F}} d\omega \phi_L(\omega, l) \phi_L^*(\omega, l) \frac{B(\omega, l)}{A(\omega, l)} \right. \\ & + 2 \sum_{nl} \int d\tau d\varphi \phi_L(\tau, \varphi) \left(\phi_{+; nl} e^{i\omega_{nl}\tau - i l \varphi} + \phi_{-; n(-l)} e^{-i\omega_{nl}\tau + i l \varphi} \right) B_{nl} Res_{nl} \\ & \left. - i \sum_l \int d\omega \left(\phi_+(\omega, l) \phi_+^*(\omega, l) + \phi_-(\omega, l) \phi_-^*(\omega, l) \right) \frac{B(-i\omega, l)}{A(-i\omega, l)} - 4\pi i \sum_{nl} \phi_{+; nl} \phi_{-; n(-l)} B_{nl} Res_{nl} \right), \quad (4.1.31) \end{aligned}$$

donde

$$\phi_+(\omega, l) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\tau d\varphi e^{i\omega\tau + i l \varphi} \phi_+(\tau, \varphi), \quad \phi_-(\omega, l) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 d\tau d\varphi e^{i\omega\tau + i l \varphi} \phi_-(\tau, \varphi),$$

$$\phi_L(\omega, l) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T d\tau d\varphi e^{-i\omega\tau + i l \varphi} \phi_L(\tau, \varphi),$$

y

$$B_{nl} Res_{nl} = \frac{2(-1)^n \Gamma[1 - \Delta] \Gamma[n + |l| + \Delta]}{n!(n + |l|)! \Gamma[1 - n - \Delta] \Gamma[\Delta - 1]} = 2(\Delta - 1) \frac{\Gamma[\Delta + n + |l|] \Gamma[\Delta + n]}{n! (\Gamma[\Delta])^2 \Gamma[n + |l| + 1]}. \quad (4.1.32)$$

Es importante notar que (4.1.32) es positivo definido $\forall nl$, lo que puede verse directamente de la expresión a la derecha.

Producto interno y funciones de n puntos entre estados excitados

En esta sección analizamos los observables que podemos obtener a partir de (4.1.31). Vamos a evaluar el producto interno y funciones de correlación conectadas de 1 y 2 puntos entre estados excitados holográficos.

A modo de chequeo de consistencia, vamos a calcular el producto interno a partir de (4.1.31). El resultado tiene que coincidir con el obtenido en la Sec. 3.3.1 y [11, 12]. Recordamos que en aquel contexto se estaba calculando la función generadora de momentos en una teoría definida en signatura Euclídea, mientras que ahora este objeto representa un producto interno entre estados del espacio de Hilbert. El producto interno entre estados excitados puede calcularse haciendo colapsar la región Lorentziana, tomando $\Delta T \rightarrow 0$, en ausencia de fuentes Lorentzianas. Esto deja solamente la tercera línea de (4.1.31)⁴. Se obtiene

$$\begin{aligned}
\ln \langle \Psi_{\phi_+} | \Psi_{\phi_-} \rangle &= \lim_{\Delta T \rightarrow 0} i S^0 \\
&= (\Delta - 1) \left(\sum_l \int d\omega \left(\phi_+(\omega, l) \phi_+^*(\omega, l) + \phi_-(\omega, l) \phi_-^*(\omega, l) \right) \frac{B(-i\omega, l)}{A(-i\omega, l)} + 4\pi \sum_{nl} \phi_{+;nl} \phi_{-;n(-l)} B_{nl} Res_{nl} \right) \\
&= (\Delta - 1) \sum_l \int d\omega \left(\phi_+(\omega, l) \phi_+^*(\omega, l) + \phi_-(\omega, l) \phi_-^*(\omega, l) + 2\phi_+(\omega, l) \phi_-^*(\omega, l) \right) \frac{B(-i\omega, l)}{A(-i\omega, l)} \\
&= \frac{1}{2} \int d\tau d\varphi d\tau' d\varphi' \left(\phi_+(\tau, \varphi) + \phi_-(\tau, \varphi) \right) G(\tau, \tau', \varphi, \varphi') \left(\phi_+(\tau', \varphi') + \phi_-(\tau', \varphi') \right), \tag{4.1.33}
\end{aligned}$$

donde en la segunda línea se reescribió la suma de residuos como una integral en ω y en la tercer línea se definió

$$\begin{aligned}
G(\tau, \tau', \varphi, \varphi') &\equiv \frac{\Delta - 1}{2\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int d\omega e^{i\omega(\tau - \tau') + il(\varphi - \varphi')} \frac{B(-i\omega, l)}{A(-i\omega, l)} \\
&= \frac{(\Delta - 1)^2}{2^{\Delta-1}\pi} \left(\cosh(\tau - \tau') - \cos(\varphi - \varphi') \right)^{-\Delta}, \tag{4.1.34}
\end{aligned}$$

que es la función de 2 puntos euclidiana en el cilindro (3.3.33), recuperando entonces GKPW [11, 12] y es la forma precisa de (3.5.7) para este caso particular de AdS_{2+1} con AdS Euclideo parametrizado como (4.1.14).

La segunda línea en (4.1.31) es la relevante para este cálculo. La primer derivada (4.1.31) con respecto a la fuente Lorentziana en el límite $\phi_L \rightarrow 0$ resulta en

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \Psi_{\phi_+} | \mathcal{O}(t, \varphi) | \Psi_{\phi_-} \rangle}{\langle \Psi_{\phi_+} | \Psi_{\phi_-} \rangle} &= - \frac{\delta S^0}{\delta \phi_L(t, \varphi)} \Big|_{\phi_L=0} \\
&= -2(\Delta - 1) \sum_{nl} B_{nl} Res_{nl} \left(\phi_{+;nl} e^{i\omega_{nl}t - il\varphi} + \phi_{-;n(-l)} e^{-i\omega_{nl}t + il\varphi} \right) \tag{4.1.35}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(\Delta - 1)^2}{2^{\Delta-1}\pi} \int \frac{\Theta(\tau') \phi_+(\tau', \varphi') + \Theta(-\tau') \phi_-(\tau', \varphi')}{[\cos(t + i\tau') - \cos(\varphi - \varphi')]^\Delta}, \tag{4.1.36}$$

donde $\Theta(\tau')$ es la función de Heaviside. Este resultado será no trivial siempre que $\phi_\pm \neq 0$. Es también interesante notar que considerando fuentes idénticas iniciales y finales en (4.1.36) ($\phi_+ \equiv \phi_-^*$) en el límite $T \rightarrow 0$ y siendo \mathcal{O} hermítico, el resultado (4.1.36) debe ser un número real. Esta condición resulta en

$$(\phi_{+;nl})^* = \phi_{-;n(-l)},$$

o de forma alternativa, usando (4.1.22),

$$\phi_+(\tau, \varphi) = \phi_-(-\tau, \varphi),$$

que coincide con la prescripción de conjugado dual euclidiana dada en (3.5.8). Volveremos sobre este resultado luego de escribir la función de 2 puntos.

⁴Notar que la dependencia en T de (4.1.22) desaparece en este límite.

Sólo la primera línea en (4.1.31) es cuadrática en las fuentes ϕ_L . La función de 2 puntos conectada ordenada temporalmente es por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Psi_{\phi_+} | T[\mathcal{O}(t, \varphi) \mathcal{O}(t', \varphi')] | \Psi_{\phi_-} \rangle}{\langle \Psi_{\phi_+} | \Psi_{\phi_-} \rangle} \Big|_c &\equiv -i \frac{\delta^2 S^0}{\delta \phi_L(t, \varphi) \delta \phi_L(t', \varphi')} \Big|_{\phi_L=0} \\ &= \frac{\Delta - 1}{2\pi^2 i} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega e^{-i\omega(t-t') + il(\varphi - \varphi')} \frac{B(\omega, l)}{A(\omega, l)} \\ &= \frac{(\Delta - 1)^2}{2^{\Delta-1} \pi} \left[\cos((t-t')(1-i\epsilon)) - \cos(\varphi - \varphi') \right]^{-\Delta} \quad (4.1.37) \\ &= \frac{\langle 0 | T[\mathcal{O}(t, \varphi) \mathcal{O}(t', \varphi')] | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} \Big|_c \quad (4.1.38) \end{aligned}$$

que resulta independiente de las fuentes ϕ_{\pm} . Esta independencia de la función de dos puntos ya había sido predicha en la Sec. 2.1.4 para estados coherentes, cuya función de dos puntos conectada es la misma que para el vacío. Esto es en chequeo de consistencia para la el carácter coherente de nuestros estados en el límite $N \rightarrow \infty$. Este resultado reproduce lo obtenido en [19] y el orden temporal es el correlador correcto para un problema de QFT de dispersión. La forma en que la integración en ω impone el orden temporal se muestra en el Ap. B. Un detalle que puede notarse es que la integral en momentos da un factor i extra que cancela el de la prescripción. Esto puede interpretarse como una rotación de Wick del caso Euclideo, pero lo importante es que el factor y su signo es importante para obtener una función de 2 puntos real y positiva.

Las derivadas siguientes de la acción en la capa de masa respecto de ϕ_L y por consecuencia todas las funciones de n puntos conectadas para esta CFT son todas triviales. Como se argumentó en la Sec. 3.3, esto es consecuencia de que la teoría en gravedad sea cuadrática, lo que corresponde en la teoría de campos al límite de N grande.

4.1.3. Resumen y análisis de los resultados

En este primer ejemplo vimos los elementos centrales y comunes de las aplicaciones que siguen. En primer lugar propusimos una geometría de acción mínima dual al camino completo SK en términos de la unión de geometrías de acción mínima para cada una de las secciones verticales y horizontales del mismo por separado y comprobamos que los candidatos admitían su unión en una geometría completa según las condiciones dadas por la prescripción SvR.

Construida la geometría dual del camino, presentada en la Fig. 4.1b, se estudió la propagación clásica de un campo escalar real Φ sobre la misma y se comprobó que la misma está unívocamente determinada dadas las condiciones de contorno en los bordes holográficos. Esto es un primer ejemplo explícito de que la formulación de SvR es suficiente para dar una solución única del campo y por tanto una respuesta única para los correladores de la teoría dual.

Un aspecto interesante es que la solución encontrada teniendo en cuenta los coeficientes (4.1.24) es compleja, a pesar de que la acción de la que partimos era la de un campo real. Esto es una consecuencia directa de que el camino In-Out está definido sobre el plano complejo, de forma que aunque la acción para los campos sea real, las condiciones de pegado (4.1.7), que imponen analiticidad fuerzan que la solución clásica sea compleja. El carácter real del campo Φ en este contexto es relevante al cuantizar canónicamente el campo: indica que la misma involucra solo un juego de operadores a, a^\dagger y llevan a un operador de la CFT como en (3.3.42). Luego, \mathcal{O} es hermitico y por tanto el valor de expectación del campo en cualquier estado también debe ser un objeto real, propiedad que se utilizó en (4.2.34) para chequear las reglas de conjugación Euclídeas de Jackiw en esta prescripción.

Se describió la forma de regularizar la acción en la capa de masa obteniendo (4.1.31), que se observa contiene la información del producto interno entre los estados (4.1.33), la información de todos elementos de matriz de \mathcal{O} en esta base (4.1.36) y el correlador temporalmente ordenado también de \mathcal{O} . Cabe destacar que la forma de estos 3 resultados no es independiente y de hecho todos los resultados pueden obtenerse para este ejemplo como extensiones analíticas en distancias temporales complejas del correlador de la teoría. Por un lado, esto refuerza la noción de que existe una interpretación diagramática de estas correcciones,

que exploraremos recién en el próximo ejemplo. Por el otro, señalamos que para caminos cerrados de SK la conexión entre los distintos objetos calculados con este método no siempre es inmediata y requiere considerar la forma precisa del camino en cuestión. Dicho de otro modo, la simple relación entre los resultados es producto de la estructura simple del camino In-Out.

Volvemos ahora sobre el resultado (4.1.36) para los elementos de matriz de \mathcal{O} . En la Sec. 3.5 se mostró que usando (3.3.42), se obtendrían para los estados (3.5.5) elementos de matriz (3.5.24). En este ejemplo, a partir de (4.1.36) se obtienen los autovalores para los estados

$$\lambda_{nl}^{\pm} \equiv -\sqrt{2\pi} \sqrt{2(\Delta-1)B_{nl}Res_{nl}} \phi_{\pm;n(\mp l)} \in \mathbb{R}. \quad (4.1.39)$$

Ahora es directo chequear a partir de (3.3.43) y (4.1.32) que

$$N_{nl} = \sqrt{\frac{B_{nl}Res_{nl}}{2(\Delta-1)}},$$

que coincide con la expresión (3.5.24) a menos de un factor de normalización $2\Delta - d$ conocido en la literatura y cuyo origen se describe en la Sec. 3.5 [16], que puede absorberse en la definición del operador. De forma similar, uno puede tomar (3.5.5) y (3.3.42) y calcular el producto interno (4.1.33) y la función de 2 puntos conectada (4.1.38) para corroborar que también coinciden con nuestros resultados.

Luego, todos los resultados obtenidos son consistentes con afirmar que los estados (3.5.5), construidos encendiendo fuentes euclidianas ϕ_{\pm} en la prescripción SvR satisfacen

$$\hat{a}_{nl} |\Psi_{\phi_{-}}\rangle = \left(-\sqrt{2\pi} \sqrt{2(\Delta-1)B_{nl}Res_{nl}} \phi_{-;n(-l)} \right) |\Psi_{\phi_{-}}\rangle, \quad (4.1.40)$$

$$\langle \Psi_{\phi_{+}} | \hat{a}_{nl}^{\dagger} = \langle \Psi_{\phi_{+}} | \left(-\sqrt{2\pi} \sqrt{2(\Delta-1)B_{nl}Res_{nl}} \phi_{+;nl} \right), \quad (4.1.41)$$

lo que equivale a afirmar que $|\Psi_{\phi_{\pm}}\rangle$ son estados coherentes. Siendo así, los estados (3.5.5) se pueden escribir en el espacio de Hilbert(-Fock) del bulk \mathcal{H}_{AdS} en el límite $N \rightarrow \infty$ como

$$|\Psi_{\phi_{\pm}}\rangle = e^{\sum_{nl} 2\pi(\Delta-1)B_{nl}Res_{nl}\phi_{\pm;n(l)}\phi_{\pm;n(-l)}} e^{-\sum_{nl} \sqrt{4\pi(\Delta-1)B_{nl}Res_{nl}}\phi_{\pm;n(\mp l)}\hat{a}_{nl}^{\dagger}} |0\rangle, \quad (4.1.42)$$

en acuerdo con lo propuesto. Esto concluye el estudio del camino In-Out en su descripción dual de AdS_{2+1} en coordenadas globales, publicado en [63]. A continuación se aborda el estudio del mismo camino pero en coordenadas de Poincaré, donde las integrales de momento permiten abordar el problema en dimensión general $d+1$. A su vez, incluiremos el tratamiento de interacciones en la teoría de gravedad y cómo esto afecta tanto a los correladores de la teoría en el vacío como a los estados excitados.

4.2. In-Out en Poincaré: interacciones

Como siguiente ejemplo de aplicación a $T=0$ se presenta el formalismo In-Out en coordenadas de Poincaré. El eje central de esta discusión es estudiar las consecuencias de las interacciones en la teoría de gravedad sobre nuestros estados. Esto permitirá además observar la prescripción funcionar en dimensión arbitraria además de obtener el correlador para \mathcal{O} en espacio plano.

Cabe recordar que (ver Sec. 3.3.1) en la normalización de $\langle \mathcal{O}\mathcal{O} \rangle \sim N^0$, las correcciones en AdS polinómicas Φ^n , $n \geq 3$ tienen acoplamientos $g_n \sim N^{2-n}$. En este contexto, un límite $N \rightarrow \infty$ estricto las teorías relevantes son libres generalizadas. La expansión de un potencial general contendrá todos los términos mencionados antes, de forma que la primera corrección en $1/N$ será un término de interacción cúbica, que es lo que tomaremos.

Es importante destacar que un modelo con un potencial cúbico solo puede ser un modelo de juguete. El motivo de esto es que una teoría con un potencial puramente cúbico no tiene un estado fundamental bien definido. Esto puede verse fácilmente al comprobar que un potencial cúbico no está acotado por encima ni por debajo: dado un valor del campo, siempre habrá otro valor que el campo puede tomar para que la energía del sistema baje. Luego, cualquier configuración de campo es inestable y el sistema no tiene un vacío o estado fundamental bien definido. Una teoría como la que se propone debe pensarse entonces como una teoría efectiva en un régimen acotado de energías que eventualmente debe corregirse con términos como un potencial que provéa un buen vacío, como un término cuártico. Lo que se busca observar en este modelo es ajeno a todos estos problemas y por tanto no se discute en las siguientes secciones.

4.2.1. Construcción de la geometría y pegado

La construcción de esta geometría es muy similar a la de la sección anterior. Consideramos duales para cada región como espacios AdS o H puros, y tomamos como superficie de pegado Σ las hipersuperficies tipo espacio generadas en coordenadas de Poincaré a t y τ constante. Es conveniente resaltar que las variables t y τ usadas para esta sección refieren a las coordenadas de Poincaré presentadas en la Sec. 2.2 y no son equivalentes a las usadas en los ejemplos anteriores.

En particular las métricas son

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left(-dt^2 + dz^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dx_i^2 \right), \quad ds^2 = \frac{1}{z^2} \left(+d\tau^2 + dz^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dx_i^2 \right), \quad (4.2.1)$$

de donde es inmediato que las métricas inducidas sobre las Σ cumplen la condición de continuidad. El cálculo directo en estas coordenadas de la curvatura extrínseca sobre las superficies nulas muestra que nuevamente son triviales por separado $K_{\mu\nu} = 0$, de forma que cualquier superficie Σ constante puede pegarse con cualquier otra.

El único detalle de esta construcción es que las coordenadas de Poincaré Lorentzianas no cubren toda la variedad de AdS, de forma que la forma final del dual geométrico para una CFT definida en espacio plano se muestra en la Fig. 4.3.

4.2.2. Campo escalar interactuante

Se considera un campo escalar real masivo auto-interactuante con un término de interacción cúbico sobre AdS puro descrito en coordenadas de Poincaré. Esto será suficiente para entender cómo los estados (3.5.5) se modifican en presencia de interacciones. La generalización de este procedimiento a múltiples campos escalares y de mayor espín es directa y se comentará sobre esto al final de la sección.

La acción con la que trabajaremos sobre el camino de la Fig. 4.3(a) es,

$$-iS = -\frac{i}{2} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^2) - i \frac{g}{3} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} \Phi^3, \quad (4.2.2)$$

donde la integración tiene lugar en la variedad $d + 1$ dimensional $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_+ \cup \mathcal{M}_L \cup \mathcal{M}_-$ obtenida pegando según la prescripción SvR segmentos euclidianos y Lorentzianos de AdS puro como se muestra en Fig.4.3(b). La ecuación de movimiento que se obtienen de (4.2.2) es

$$(\square - m^2) \Phi = g \Phi^2, \quad (4.2.3)$$

que resolveremos de forma perturbativa en g expandiendo el campo como

$$\Phi = \Phi_0 + g \Phi_1 + g^2 \Phi_2 + \dots, \quad (4.2.4)$$

obteniendo

$$(\square - m^2) \Phi_0 = 0, \quad (\square - m^2) \Phi_1 = \Phi_0^2, \quad (\square - m^2) \Phi_2 = 2\Phi_0 \Phi_1, \dots \quad (4.2.5)$$

Aquí la solución libre Φ_0 cumple las condiciones de contorno asintóticas $\{\phi^\pm, \phi^L\}$ sobre $\partial\mathcal{M}$, mientras que las demás Φ_i cumplen condiciones de contorno de Dirichlet.

La acción en la capa de masa resulta

$$\begin{aligned} -iS &= -\frac{i}{2} \int \sqrt{g} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^2) - i \frac{g}{3} \int \sqrt{g} \Phi^3, \\ &= -\frac{i}{2} \int \partial_\mu (\sqrt{g} \Phi \partial^\mu \Phi) + \frac{i}{2} \int \sqrt{g} \Phi (\square - m^2) \Phi - i \frac{g}{3} \int \sqrt{g} \Phi^3, \\ &= -\frac{i}{2} \int \sqrt{\gamma} \Phi n^\mu \partial_\mu \Phi + i \frac{g}{2} \int \sqrt{g} \Phi^3 - i \frac{g}{3} \int \sqrt{g} \Phi^3 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

donde γ es la métrica inducida en el borde ∂ y n^μ es el vector unitario normal a la superficie. Para escribir la tercera línea se usó (4.2.3). Estas expresiones son formales aún, sin aclarar cómo se impusieron las condiciones de contorno asintóticas. Al igual que en la sección anterior, trabajaremos en un espacio AdS

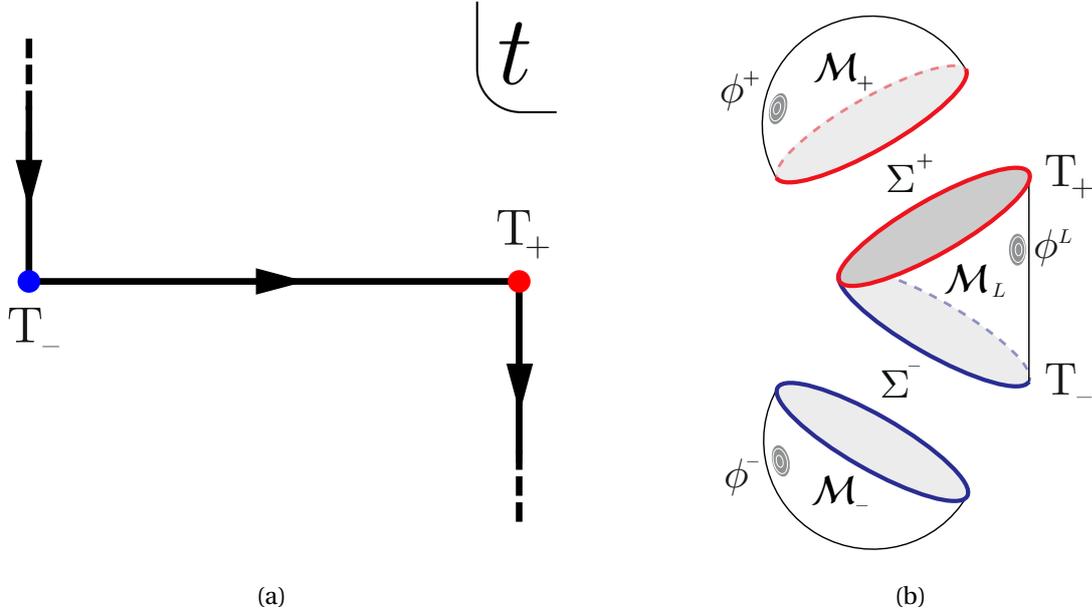


Figura 4.3: (a) Camino In-Out en el plano complejo t (b) Dual holográfico en coordenadas de AdS Poincaré.

regularizado UV por una distancia mínima ϵ , tal que las condiciones asintóticas se imponen sobre $z = \epsilon \ll 1$ en coordenadas de Poincaré. A esta se la llama prescripción ϵ en [11, 44]. El límite $\epsilon \rightarrow 0$ se toma sobre los observables. Insertando (4.2.4) en (4.2.6) se encuentra

$$\begin{aligned}
 -iS &= -iS_0 - igS_1 - ig^2S_2 + \dots \\
 &= -\frac{i}{2} \int \sqrt{\gamma} \Phi_0 n^\mu \partial_\mu \Phi_0 - i\frac{g}{2} \left(\int \sqrt{\gamma} \Phi_0 n^\mu \partial_\mu \Phi_1 - \int \sqrt{g} \Phi_0^3 \right) - i\frac{g}{3} \int \sqrt{g} \Phi_0^3 + O(g^2), \quad (4.2.7)
 \end{aligned}$$

donde el primer término es la contribución de la acción libre, el segundo término se anula (ver Ap. A) y el tercer término da lugar a las correcciones a primer orden en las funciones de correlación que se buscan. La contribución $\int \sqrt{\gamma} \Phi_1 n^\mu \partial_\mu \Phi_0$ está ausente en (4.2.7) dado que, como se dijo arriba, $\Phi_1 = 0$ sobre ∂ . Dado que el segundo término en (4.2.7) está ausente, resulta que Φ_0 es lo único que necesitamos de Φ para obtener las correcciones a primer orden en g para los correladores. En la siguiente sección construimos dicha solución.

Solución libre Φ_0

En esta sección se obtiene la solución Φ_0 para la variedad completa \mathcal{M} resolviendo la primera ecuación en (4.2.5). Para ello, de forma similar a los casos anteriores, se buscan soluciones generales en \mathcal{M}_L y \mathcal{M}_\pm y luego se encuentra Φ_0 como la única de estas que es continua y suave a través de las superficies de pegado Σ^\pm .

Es interesante hacer un comentario sobre los términos de interacciones en la teoría de gravedad y los métodos de renormalización holográfica. Para teorías libres, como vimos en el ejemplo anterior, la acción en la capa de masa consistía solamente de términos de borde. Para acciones con interacciones esto ya no es cierto y de hecho el término que dará las correcciones es el término de volumen fuera del paréntesis en (4.2.7). Lo interesante es que puede demostrarse [65], que los términos de borde del caso libre son los únicos que hace falta regularizar, mientras que las contribuciones de interacciones en el volumen son finitas automáticamente. Esto permite usar en los términos de interacción la expresión para los campos en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, que simplifica su estructura y lleva a integrales de momento más manejables.

Sección Lorentziana

La ecuación de Klein-Gordon en \mathcal{M}_L es

$$(\square - m^2) \Phi_0^L = 0. \quad (4.2.8)$$

con la métrica de Poincaré AdS_{d+1} dada por

$$ds^2 = z^{-2}(-dt^2 + d\mathbf{x}^2 + dz^2), \quad \mathbf{x} = (x^1, \dots, x^{d-1}), \quad z \in [\epsilon, \infty), \quad t \in [T_-, T_+]. \quad (4.2.9)$$

Usando el ansatz $\Phi_0^L = e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} f_{\omega\mathbf{k}}(z)$ en (4.2.8) se encuentra

$$z^2 f''_{\omega\mathbf{k}}(z) + (1-d)z f'_{\omega\mathbf{k}}(z) - z^2(\mathbf{k}^2 - \omega^2) f_{\omega\mathbf{k}}(z) - m^2 f(z) = 0. \quad (4.2.10)$$

En la prescripción ϵ , las condiciones de contorno asintóticas para la ecuación (4.2.8) se imponen sobre $z = \epsilon$, i.e.

$$\Phi(\epsilon, t, \mathbf{x}) = \epsilon^{d-\Delta} \phi_L(t, \mathbf{x}). \quad (4.2.11)$$

donde $\Delta \equiv d/2 + \nu$ y $\nu = \sqrt{d^2/4 + m^2}$. Para este caso se considera $\nu \in \mathbb{N}^5$.

La solución más general a (4.2.8) que satisface (4.2.11) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \Phi_0^L(z, t, \mathbf{x}) &= \int d\tilde{t} d\tilde{\mathbf{x}} \mathcal{K}_\epsilon(z, t, \mathbf{x}; \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) \\ &+ \int_+ \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) \left(L_{\omega\mathbf{k}}^+ e^{-i\omega t} + L_{\omega\mathbf{k}}^- e^{i\omega t} \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} z^{\frac{d}{2}} \left(J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z) - \frac{K_\nu(qz)}{K_\nu(q\epsilon)} J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} \epsilon) \right). \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

La primera línea, a la que de aquí en más nos referiremos como solución NN, garantiza (4.2.11) siendo que el propagador del volumen al borde \mathcal{K}_ϵ está dado por [11, 44]

$$\mathcal{K}_\epsilon(z, t, \mathbf{x}; \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) \equiv \epsilon^{d-\Delta} \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{z^{d/2} K_\nu(qz)}{\epsilon^{d/2} K_\nu(q\epsilon)} e^{-i\omega(t-\tilde{t}) + i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})}, \quad q \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 - \omega^2 - i0^+}. \quad (4.2.13)$$

Aquí J_ν es la función de Bessel de primer tipo y K_ν es la función de Bessel modificada de segundo tipo [61]. Un pequeño corrimiento a los complejos $-i0^+$ se incorpora a q para definir unívocamente las integrales de momento en (4.2.13) como se muestra en la Fig. 4.4(a). Como se discutió en [13, 93], este corrimiento es el adecuado para obtener el correlador de Feynman. La segunda línea en (4.2.12), o modos N, determinan el campo dentro del volumen. Está construida como una combinación lineal de soluciones a las ecuaciones de movimiento que por construcción se anulan en $z = \epsilon$. Notar que hemos escrito la segunda solución linealmente independiente de (4.2.8) (segundo término en el último paréntesis de (4.2.12)) como una Bessel K_ν con argumento imaginario. La condición de modo normalizable obliga a integrar para modos N solo sobre momentos tipo tiempo, i.e. $(\omega^2 - \mathbf{k}^2) \geq 0$. Se han separado de forma explícita las frecuencias positivas y negativas en (4.2.12), y en lo que sigue, \int_\pm siempre denota una integración sobre \mathbb{R}^\pm solo para la frecuencia o τ . El resto de las variables a integrar se toman sobre \mathbb{R} . Mostraremos que los coeficientes $L_{\omega\mathbf{k}}^\pm$ en (4.2.12), en principio arbitrarios, quedarán unívocamente determinados al pegar campo y momento a través de Σ^\pm .

Secciones Euclídeas

La métrica y ecuaciones de movimiento en las regiones euclidianas pueden obtenerse por rotación de Wick sobre (4.2.9) y (4.2.10). El punto crucial sobre \mathcal{M}_\pm es que τ está definida solo para la semirrecta \mathbb{R}^\pm , dando lugar a la existencia de modos N euclidianos. Las soluciones generales a Klein-Gordon sobre \mathcal{M}_\pm son

$$\begin{aligned} \Phi_0^\pm(z, \tau, \mathbf{x}) &= \int_\pm d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{x}} \mathcal{K}_\epsilon(z, \tau, \mathbf{x}; \tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}}) \phi^\pm(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}}) \\ &+ \int_+ \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) E_{\omega\mathbf{k}}^\pm e^{\mp i\omega\tau + i\mathbf{k}\mathbf{x}} z^{\frac{d}{2}} \left(J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z) - \frac{K_\nu(qz)}{K_\nu(q\epsilon)} J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} \epsilon) \right), \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

con el propagador euclidiano del volumen al borde dado por

$$\mathcal{K}_\epsilon(z, \tau, \mathbf{x}; \tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}}) \equiv \epsilon^{d-\Delta} \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{z^{d/2} K_\nu(\sqrt{\mathbf{k}^2 + \omega^2} z)}{\epsilon^{d/2} K_\nu(\sqrt{\mathbf{k}^2 + \omega^2} \epsilon)} e^{i\omega(\tau-\tilde{\tau}) + i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})}.$$

La principal diferencia con su contraparte Lorentziana (4.2.13) es que los cortes ramales no interfieren con el camino de integración, como se observa en la Fig. 4.4(b). Notar que los modos N involucran exponenciales reales en τ con $\omega > 0$, de forma que se admiten modos $e^{\mp i\omega\tau}$ sobre \mathcal{M}_\pm . Los coeficientes $E_{\omega\mathbf{k}}^\pm$ son la contraparte euclidiana de $L_{\omega\mathbf{k}}^\pm$ y también quedarán determinados al pegar las soluciones a través de Σ^\pm .

⁵ El caso $\nu = 0$ (el límite de masa mínimo de Breitenlohner Freedman [66]) requiere tratarse aparte. Este detalle técnico se discute en el Ap. A. En lo que sigue se toma $\nu \geq 1$.

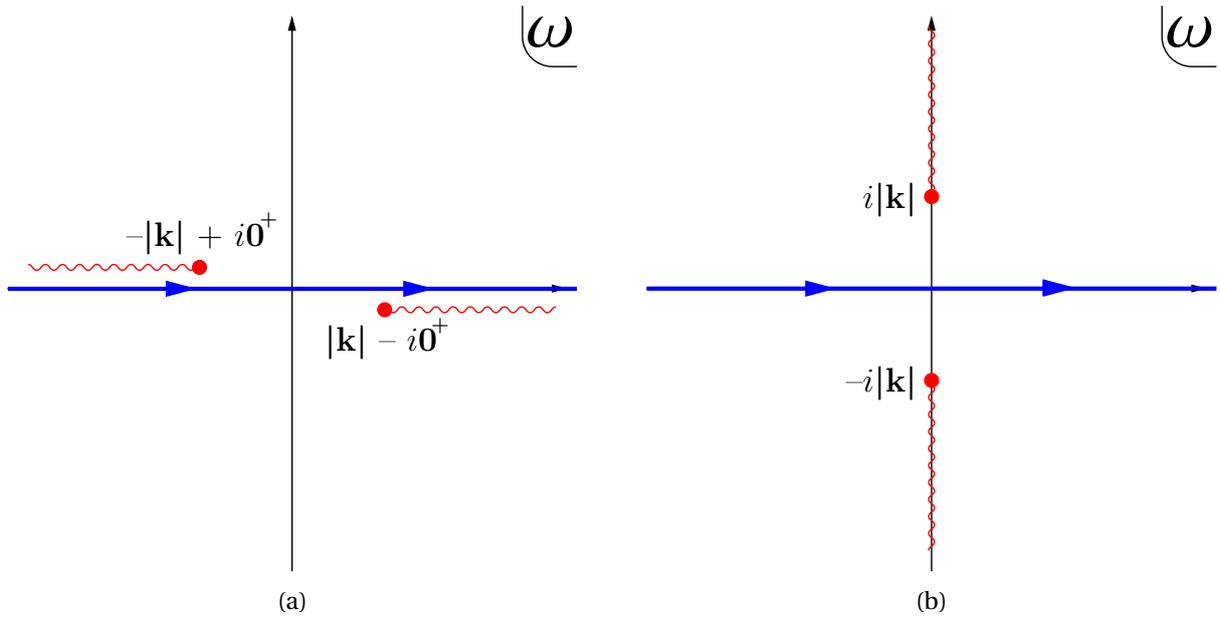


Figura 4.4: (a) Posición de los cortes ramales (en rojo) en el plano complejo ω y camino de integración (en azul) en (4.2.13). (b) Posición de los cortes y caminos de integración para el propagador euclidiano.

Pegado de las soluciones

Las condiciones de continuidad a través de Σ^\pm ,

$$(\Phi_0^L(t, \mathbf{x}, z) - \Phi_0^\pm(\tau, \mathbf{x}, z))_{\Sigma^\pm} = 0, \quad (\partial_t \Phi_0^L(t, \mathbf{x}, z) + i\partial_\tau \Phi_0^\pm(\tau, \mathbf{x}, z))_{\Sigma^\pm} = 0, \quad (4.2.15)$$

fijan los coeficientes $L_{\omega\mathbf{k}}^\pm$ y $E_{\omega\mathbf{k}}^\pm$ en (4.2.12) y (4.2.14) como

$$L_{\omega\mathbf{k}}^\pm = e^{\pm i\omega T_\mp} \frac{\pi(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \phi_{\pm i\omega\mathbf{k}}^\mp, \quad E_{\omega\mathbf{k}}^\pm = e^{\mp i\omega T_\pm} \frac{\pi(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} (i\phi_{\pm\omega\mathbf{k}}^L + e^{\pm i\omega T_\mp} \phi_{\pm i\omega\mathbf{k}}^\mp), \quad (4.2.16)$$

donde $\phi_{\omega\mathbf{k}}^L$ y $\phi_{\omega\mathbf{k}}^\pm$ son las componentes de Fourier de las fuentes definidas en (4.2.21) y (4.2.25). El detalle de este pegado, algo denso matemáticamente, se hace en el siguiente apartado, que el lector interesado en los correladores puede saltar. Relaciones de este tipo fueron obtenidas para un problema similar en [94].

Detalle del pegado de soluciones

En este apartado se trata cuidadosamente el pegado de las soluciones encontradas arriba, llegando a (4.2.16) a partir de (4.2.15). Las ecuaciones de continuidad (4.2.15) sobre Σ^\pm dan relaciones lineales entre L^\pm y E^\pm que las determinan de forma unívoca en términos de las fuentes ϕ^\pm . Para el cómputo de estas relaciones se puede tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$ desde el comienzo. Esto está permitido, puesto que las fuentes $\phi^{L,\pm}$ se anulan cerca de Σ^\pm . La ausencia de fuentes garantiza que las configuraciones de campo se puedan expandir en términos de modos N, de forma que no hay divergencias en esta cuenta y el regulador es superfluo. Desde un punto de vista matemático, esto se hará manifiesto en (4.2.30) donde puede verse que solo el orden ϵ^0 de los coeficientes L^\pm es relevante.

Se descomponen las ecuaciones de pegado en sus componentes de momento como

$$\Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \int_0^\infty dz z^{1-\frac{d}{2}} J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z) \times \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (4.2.15). \quad (4.2.17)$$

Se utilizan además las siguientes propiedades [95, 61]

$$\Theta(\tilde{\omega}) \delta(\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}) \int_0^\infty dz z J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z) J_\nu(\sqrt{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\mathbf{k}}^2} z) = \frac{\delta(\tilde{\omega} - |\omega|)}{|\omega|}, \quad (4.2.18)$$

$$\delta(\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}) \int_0^\infty dz z J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z) K_\nu(\tilde{q} z) = \frac{(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}} \tilde{q}^{-\nu}}{(\tilde{\omega} - (|\omega| - i0^+))(\tilde{\omega} + (|\omega| - i0^+))}. \quad (4.2.19)$$

con q definido en (4.2.13). Se muestra a continuación el comportamiento de (4.2.17) cerca de las superficies Σ^\pm para las soluciones Lorentzianas y euclidianas (4.2.12) y (4.2.14) en el límite $\epsilon \rightarrow 0$.

Sección Lorentziana Se analizan las partes NN y N de Φ por separado. Las componentes en el espacio de momentos de la parte NN de (4.2.12) son

$$\Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) \int \frac{d\tilde{\omega} d\tilde{\mathbf{k}}}{(2\pi)^d} \frac{\phi_{\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{k}}}^L}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}} e^{-i\tilde{\omega}t} \left(\int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{x}(\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}})} \right) \left(\int dz z J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z) K_\nu(\tilde{q}z) \right) =$$

$$\Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) \frac{(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}}}{2^\nu \pi \Gamma(\nu)} \left(\int d\tilde{\omega} \frac{\phi_{\tilde{\omega}, \mathbf{k}}^L e^{-i\tilde{\omega}t}}{(\tilde{\omega} - (|\omega| - i0^+)) (\tilde{\omega} + (|\omega| - i0^+))} \right) \quad (4.2.20)$$

con la transformada de Fourier de la fuente $\phi_{\omega \mathbf{k}}^L$ dada por

$$\phi_{\omega \mathbf{k}}^L \equiv \int_{\partial \mathcal{M}_L} d\tilde{t} d\tilde{\mathbf{x}} \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) e^{i\omega \tilde{t} - i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{x}}}. \quad (4.2.21)$$

La integral sobre $\tilde{\omega}$ en (4.2.20) se resuelve por Teorema de Residuos, con el contorno de integración cerrado por arriba/abajo para Σ^\pm . Para dar un ejemplo, puesto que la fuente $\phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})$ se anula suavemente antes de llegar a Σ^+ , para t cercano a Σ^+ se cumple que $(t - \tilde{t}) \sim (T_+ - \tilde{t}) > 0$, de forma que la curva de integración para $\tilde{\omega}$ se deformará hacia abajo. Lo opuesto sucede para Σ^- . En resumen, la contribución NN a (4.2.17) es

$$(4.2.20) = \frac{\Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2)}{2\pi\omega} (i\chi_{\omega \mathbf{k}} \phi_{\pm \omega \mathbf{k}}^L) e^{\mp i\omega t}, \quad t \sim \Sigma^\pm; \quad \chi_{\omega \mathbf{k}} \equiv \frac{\pi(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}}}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} \quad (4.2.22)$$

donde se dejó de lado tanto el regulador $i0^+$ como el valor absoluto, puesto que $\omega > 0$ para los modos N. Notar que solo las componentes de Fourier tipo tiempo de ϕ^L excitan los modos normalizables (ver [93]).

Las componentes en el espacio de momentos de los modos N son

$$\Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) \int_+ \frac{d\tilde{\omega} d\tilde{\mathbf{k}}}{(2\pi)^d} \Theta(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\mathbf{k}}^2) \left(L_{\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{k}}}^+ e^{-i\tilde{\omega}t} + L_{\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{k}}}^- e^{i\tilde{\omega}t} \right) \left(\int d\mathbf{x} e^{i(\tilde{\mathbf{k}} - \mathbf{k})\mathbf{x}} \right) \times$$

$$\times \left(\int dz z J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z) J_\nu(\sqrt{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\mathbf{k}}^2} z) \right) = \frac{\Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2)}{2\pi\omega} \left(L_{\omega \mathbf{k}}^+ e^{-i\omega t} + L_{\omega \mathbf{k}}^- e^{i\omega t} \right), \quad (4.2.23)$$

donde se usó (4.2.18). Notar que una de las funciones escalón Θ es redundante y fue descartada.

Secciones euclidianas El caso Euclideano, (4.2.14), se sigue de forma análoga al Lorentziano. La parte NN da

$$\Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) \int \frac{d\tilde{\omega} d\tilde{\mathbf{k}}}{(2\pi)^d} \frac{\phi_{\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{k}}}^\pm (\tilde{\omega}^2 + \tilde{\mathbf{k}}^2)^{\frac{\nu}{2}}}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} e^{i\tilde{\omega}\tau} \left(\int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{x}(\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}})} \right) \left(\int dz z J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z) K_\nu(\sqrt{\tilde{\omega}^2 + \tilde{\mathbf{k}}^2} z) \right) =$$

$$\Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) \frac{(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}}}{2^\nu \pi \Gamma(\nu)} \left(\int d\tilde{\omega} \frac{\phi_{\tilde{\omega}, \mathbf{k}}^\pm e^{i\tilde{\omega}\tau}}{(\tilde{\omega} - i|\omega|) (\tilde{\omega} + i|\omega|)} \right) \quad (4.2.24)$$

con la transformada de Fourier para la fuente euclidiana dada por

$$\phi_{\omega \mathbf{k}}^\pm \equiv \int_\pm d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{x}} \phi^\pm(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}}) e^{-i\omega \tilde{\tau} - i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{x}}}, \quad (4.2.25)$$

La integral sobre $\tilde{\omega}$ también se resuelve por residuos en analogía con el caso anterior. Cerca de Σ^+ , $(\tau - \tilde{\tau}) < 0$, de forma que $e^{i\tilde{\omega}(\tau - \tilde{\tau})}$ requiere que el camino se cierre por abajo, encerrando el polo en $\tilde{\omega} = -i|\omega|$. Para \mathcal{M}_- se cierra por arriba. Ambos casos se pueden resumir en la expresión

$$(4.2.24) = \frac{\Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2)}{2\pi\omega} \chi_{\omega \mathbf{k}} \phi_{\mp i\omega \mathbf{k}}^\pm e^{\pm \omega \tau}, \quad \tau \sim \Sigma^\pm. \quad (4.2.26)$$

Notar de (4.2.25) que $\phi_{\mp i\omega\mathbf{k}}^{\pm}$ tiene el signo apropiado de “frecuencia imaginaria” tal que la integral resulta convergente.

Los modos N euclidianos dan

$$\frac{\Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2)}{2\pi\omega} E_{\omega\mathbf{k}}^{\pm} e^{\mp\omega\tau}, \quad \tau \sim \Sigma^{\pm} \quad (4.2.27)$$

Tomando en cuenta todas las contribuciones (4.2.22), (4.2.23), (4.2.26) y (4.2.27) uno puede escribir (4.2.17) como un juego de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} L_{\omega\mathbf{k}}^{-} e^{i\omega T_+} + (i\chi_{\omega\mathbf{k}} \phi_{\omega\mathbf{k}}^L + L_{\omega\mathbf{k}}^+) e^{-i\omega T_+} &= \chi_{\omega\mathbf{k}} \phi_{-i\omega\mathbf{k}}^+ + E_{\omega\mathbf{k}}^+ \\ L_{\omega\mathbf{k}}^{-} e^{i\omega T_+} - (i\chi_{\omega\mathbf{k}} \phi_{\omega\mathbf{k}}^L + L_{\omega\mathbf{k}}^+) e^{-i\omega T_+} &= \chi_{\omega\mathbf{k}} \phi_{-i\omega\mathbf{k}}^+ - E_{\omega\mathbf{k}}^+ \\ (i\chi_{\omega\mathbf{k}} \phi_{-\omega\mathbf{k}}^L + L_{\omega\mathbf{k}}^-) e^{i\omega T_-} + L_{\omega\mathbf{k}}^+ e^{-i\omega T_-} &= E_{\omega\mathbf{k}}^- + \chi_{\omega\mathbf{k}} \phi_{i\omega\mathbf{k}}^- \\ (i\chi_{\omega\mathbf{k}} \phi_{-\omega\mathbf{k}}^L + L_{\omega\mathbf{k}}^-) e^{i\omega T_-} - L_{\omega\mathbf{k}}^+ e^{-i\omega T_-} &= E_{\omega\mathbf{k}}^- - \chi_{\omega\mathbf{k}} \phi_{i\omega\mathbf{k}}^- \end{aligned}$$

cuya solución es (4.2.16).

El interés que guarda este apartado es mostrar la dificultad que puede presentar o el nivel de cuidado que requieren el pegado de las soluciones sobre las regiones Σ . Luego, será de gran interés pragmático la reinterpretación diagramáticas de las contribuciones en términos de la extensión analítica de las reglas de los diagramas de Witten que daremos al final de la sección. Dado un juego de reglas adecuado para el camino SK bajo tratamiento, uno puede sortear el pegado de las variedades y calcular directo las contribuciones a los correladores.

Acción en la capa de masa: contribución libre

En esta sección generalizamos a coordenadas de Poincaré y a dimensión general d los resultados obtenidos en la Sec. 4.1. En particular, calculamos para los estados excitados (3.5.5) el producto interno y las funciones de 1 y 2 puntos de operadores locales escalares \mathcal{O} de dimensión conforme Δ . Con este fin, evaluamos la acción en la capa de masa.

Se considera en esta sección la contribución Gaussiana S_0 en (4.2.7). Insertando las soluciones (4.2.12) y (4.2.14), con $L_{\omega\mathbf{k}}^{\pm}$, $E_{\omega\mathbf{k}}^{\pm}$ coeficientes dados por (4.2.16), en la expresión de S_0 se encuentra una suma sobre las 3 secciones que se ven en la Fig.4.3(b)⁶,

$$\begin{aligned} -iS_0 &= -iS_0^+ - iS_0^L - iS_0^- \\ &= -\frac{1}{2} \int_+ d\tau d\mathbf{x} \epsilon^{-\Delta} \phi^+ (z\partial_z \Phi_0^+) \Big|_{z=\epsilon} - \frac{i}{2} \int d\tau d\mathbf{x} \epsilon^{-\Delta} \phi^L (z\partial_z \Phi_0^L) \Big|_{z=\epsilon} - \frac{1}{2} \int_- d\tau d\mathbf{x} \epsilon^{-\Delta} \phi^- (z\partial_z \Phi_0^-) \Big|_{z=\epsilon}, \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

donde se reemplazó el elemento de volumen $\sqrt{\gamma} = \epsilon^{-d}$, se utilizaron las condiciones de contorno (4.2.11) y se omitieron los argumentos de las funciones arriba para acortar la expresión. Solo las contribuciones de borde asintótico ($z = \epsilon$) aparecen en la expresión dado que el pegado que llevamos a cabo en las secciones anteriores garantizan que las contribuciones de los bordes Σ^{\pm} se cancelen entre sí [13].

El análisis asintótico de los términos de borde en (4.2.28) muestra que tanto las contribuciones N como NN contribuyen a los observables de la teoría. Se muestra explícitamente esto para el caso Lorentziano, siendo que los términos euclidianos se siguen de forma análoga. La parte NN en (4.2.12), para $z \approx \epsilon$ se comporta como

$$\left. \frac{\partial_z (z^{d/2} K_\nu(qz))}{e^{\nu-1} K_\nu(q\epsilon)} \right|_{z=\epsilon} = (d-\Delta)\epsilon^{d-\Delta} P_{\nu-1}(q^2) + \epsilon^\Delta q^{2\nu} \ln(q) \left((-1)^{\nu-1} \frac{4^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)^2} + O(\epsilon^2) \right). \quad (4.2.29)$$

Siguiendo [11, 12], se observa que la expansión anterior tiene dos contribuciones cualitativamente distintas: una analítica y dominante dada por un polinomio $P_{\nu-1}(q^2)$ de orden $(\nu-1)$ y otra no analítica que

⁶La acción en la capa de masa, tanto la parte libre como interactuante, deben siempre entenderse como funciones solamente de las condiciones de contorno asintóticas, i.e. $S[\phi^L, \phi^\pm]$. Para no sobrecargar la notación, en lo que sigue de esta sección se omite señalar esta dependencia explícitamente.

contiene, para $\nu \in \mathbb{Z}$, términos logarítmicos $\ln q$. Los primero da lugar a términos de contacto en S_0 y aquí se dejan para ser tratados en el Ap. A. Los segundos dan la contribución física, i.e. los correladores en la teoría conforme dual. Los modos N, segunda línea de (4.2.12), en una expansión en ϵ dan

$$\begin{aligned} L_{\omega\mathbf{k}}^{\pm} \epsilon \partial_z \left(z^{\frac{d}{2}} J_{\nu} \left(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z \right) - z^{\frac{d}{2}} \frac{K_{\nu}(qz)}{K_{\nu}(q\epsilon)} J_{\nu} \left(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} \epsilon \right) \right) \Big|_{z=\epsilon} &= L_{\omega\mathbf{k}}^{\pm} \epsilon^{\Delta} (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}} \left(\frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} + O(\epsilon^2) \right) \\ &= \epsilon^{\Delta} (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\nu} \left(\frac{4^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)^2} \pi e^{\pm i\omega T_{\mp}} \phi_{\pm i\omega\mathbf{k}}^{\mp} + O(\epsilon^2) \right). \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Notar que el comportamiento dominante, en factor común, es ϵ^{Δ} tanto para (4.2.29) como para (4.2.30), que compensa precisamente el factor $\epsilon^{-\Delta}$ que aparecían en (4.2.28). Potencias más altas en ϵ de (4.2.29) y (4.2.30) no son relevantes para (4.2.28), dado que desaparecen en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. Notar que la contribuciones de (4.2.30) no da lugar a nuevos términos de contacto a pesar de ser analíticos en $(\omega^2 - \mathbf{k}^2)$ debido a que los modos N están solo integrados sobre momentos tipo tiempo (ver (4.2.12)). Ver Ap. B para un análisis detallado de esto.

Con este análisis hecho se puede llegar a una expresión para la acción libre en la capa de masa S_0 . Reemplazando (4.2.29) y (4.2.30) en (4.2.28) lleva a integrales de momento que se resuelven en detalle en el Ap. B. Aquí presentamos los resultados. Las expresiones adoptan una forma compacta definiendo una distancia entre puntos η del contorno en Fig.4.3(a) como ⁷

$$|x^{\mu} - \tilde{x}^{\mu}|^2 \equiv (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})^2 - (\eta - \tilde{\eta})^2 \quad \eta \equiv \begin{cases} T_- - i\tau & \tau \leq 0 & \text{en } \mathcal{M}_- \\ t & t \in [T_-, T_+] & \text{en } \mathcal{M}_L \\ T_+ - i\tau & \tau \geq 0 & \text{en } \mathcal{M}_+ \end{cases}, \quad (4.2.31)$$

con el término cuadrático en las fuentes Lorentzianas, regulado tipo Feynman, $|x^{\mu} - \tilde{x}^{\mu}|^2 = (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})^2 - (t - \tilde{t})^2 + i0^+$. Para $x^{\mu} \in \mathcal{M}_L$ y $\tilde{x}^{\mu} \in \mathcal{M}^+$ la distancia se escribe como $|x^{\mu} - \tilde{x}^{\mu}|^2 = (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})^2 - (t - (T_+ - i\tilde{t}))^2$.

Para la sección Lorentziana \mathcal{M}_L la acción libre en la capa de masa es entonces

$$S_0^L = + \frac{i}{2} \frac{2\nu\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\nu)} \int dt d\mathbf{x} \left[\int d\tilde{t} d\tilde{\mathbf{x}} \frac{\phi^L(t, \mathbf{x}) \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})}{|x^{\mu} - \tilde{x}^{\mu}|^{2\Delta}} - i \left(\int_{+} d\tilde{t} d\tilde{\mathbf{x}} \frac{\phi^L(t, \mathbf{x}) \phi^+(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})}{|x^{\mu} - \tilde{x}^{\mu}|^{2\Delta}} + \int_{-} d\tilde{t} d\tilde{\mathbf{x}} \frac{\phi^L(t, \mathbf{x}) \phi^-(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})}{|x^{\mu} - \tilde{x}^{\mu}|^{2\Delta}} \right) \right]$$

y expresiones similares se obtienen para las secciones euclidianas \mathcal{M}_{\pm}

$$S_0^+ \equiv - \frac{i}{2} \frac{2\nu\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\nu)} \int_{+} d\tau d\mathbf{x} \left[\left(\int_{+} d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{x}} \frac{\phi^+(\tau, \mathbf{x}) \phi^+(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}})}{|x^{\mu} - \tilde{x}^{\mu}|^{2\Delta}} + \int_{-} d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{x}} \frac{\phi^+(\tau, \mathbf{x}) \phi^-(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}})}{|x^{\mu} - \tilde{x}^{\mu}|^{2\Delta}} \right) + i \int d\tilde{t} d\tilde{\mathbf{x}} \frac{\phi^+(\tau, \mathbf{x}) \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})}{|x^{\mu} - \tilde{x}^{\mu}|^{2\Delta}} \right]$$

$$S_0^- \equiv - \frac{i}{2} \frac{2\nu\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\nu)} \int_{-} d\tau d\mathbf{x} \left[\left(\int_{-} d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{x}} \frac{\phi^-(\tau, \mathbf{x}) \phi^-(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}})}{|x^{\mu} - \tilde{x}^{\mu}|^{2\Delta}} + \int_{+} d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{x}} \frac{\phi^-(\tau, \mathbf{x}) \phi^+(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}})}{|x^{\mu} - \tilde{x}^{\mu}|^{2\Delta}} \right) + i \int d\tilde{t} d\tilde{\mathbf{x}} \frac{\phi^-(\tau, \mathbf{x}) \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})}{|x^{\mu} - \tilde{x}^{\mu}|^{2\Delta}} \right]$$

Notar que los términos cruzados en fuentes en estas expresiones se suman en (4.2.28). A continuación se obtienen con estas expresiones las contribuciones libres para los productos internos y las funciones de 1 y 2 puntos entre estados excitados.

Producto interno: El producto interno entre estados excitados (3.5.5) se obtiene colapsando la región Lorentziana ($\Delta T = (T_+ - T_-) \rightarrow 0$) en ausencia de fuentes lorentztianas [63]. Esto significa considerar solo los primeros términos en S_0^+ y S_0^- . Definiendo

$$\phi^E(\tau, \mathbf{x}) \equiv \Theta(\tau) \phi^+(\tau, \mathbf{x}) + \Theta(-\tau) \phi^-(\tau, \mathbf{x}), \quad (4.2.32)$$

⁷Uno podría alternativamente parametrizar el camino como

$$\eta(\lambda) \equiv \begin{cases} T_- - i(\lambda - T_-) & \lambda \leq T_- & \text{en } \mathcal{M}_- \\ \lambda & \lambda \in [T_-, T_+] & \text{en } \mathcal{M}_L \\ T_+ - i(\lambda - T_+) & \lambda \geq T_+ & \text{en } \mathcal{M}_+ \end{cases}$$

donde $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

el producto interno se puede escribir como [63]

$$\ln \langle \phi^+ | \phi^- \rangle |_{g=0} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} i S_0 |_{\phi^L=0} = \frac{1}{2} \int d\tau d\mathbf{x} \int d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{x}} \left(\frac{2\nu\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\nu)} \frac{\phi^E(\tau, \mathbf{x}) \phi^E(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}})}{((\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})^2 + (\tau-\tilde{\tau})^2)^\Delta} \right), \quad (4.2.33)$$

de acuerdo con la expresión en [12]. Se recuerda una vez más que en [12] la expresión no tenía esta interpretación aunque matemáticamente son idénticas.

Función de 1 punto: La función de 1 punto se obtiene de los términos lineales en la fuente Lorentziana ϕ^L en S_0 ,

$$\left. \frac{\langle \phi^+ | \mathcal{O}(t, \mathbf{x}) | \phi^- \rangle}{\langle \phi^+ | \phi^- \rangle} \right|_{g=0} = - \left. \frac{\delta S_0}{\delta \phi^L(t, \mathbf{x})} \right|_{\phi^L=0} = - \int d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{x}} \left(\frac{2\nu\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\nu)} \frac{\phi^E(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}})}{|x^\mu - \tilde{x}^\mu|^{2\Delta}} \right) \quad (4.2.34)$$

Notar que esta expresión corresponde a la propagación de las condiciones de contorno Euclidianas ϕ^\pm a la región Lorentziana. Recordar que por la definición anterior de distancias, $\tilde{x}_\mu = (T_\pm \mp i\tilde{\tau})$ para $\tilde{\tau} \geq 0$.

Función de 2 puntos conectada: El segundo término en (4.2.28) es el que contiene la información relevante. El resultado es

$$\left. \frac{\langle \phi^+ | T \{ \mathcal{O}(t, \mathbf{x}) \mathcal{O}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) \} | \phi^- \rangle_c}{\langle \phi^+ | \phi^- \rangle} \right|_{g=0} \equiv -i \left. \frac{\delta^2 S_0}{\delta \phi^L(t, \mathbf{x}) \delta \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})} \right|_{\phi^L=0} = \frac{2\nu\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\nu)} \frac{1}{((\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})^2 - (t-\tilde{t})^2 + i0^+)^\Delta}. \quad (4.2.35)$$

Las ecuaciones (4.2.33)-(4.2.35) recuperan y generalizan los obtenidos en [63, 13].

Acción en la capa de masa: contribuciones por interacción

En esta sección calculamos las correcciones a orden g a la acción en la capa de masa. Ya se mencionó que el segundo término en (4.2.7) se anula idénticamente (ver Ap. A), de forma que el término relevante es

$$S_1 = -\frac{g}{3} \int_{\mathcal{M}} dz d\eta d\mathbf{x} \sqrt{g} (\Phi_0(z, \eta, \mathbf{x}))^3, \quad (4.2.36)$$

donde se usó la variable temporal compleja η introducida en (4.2.31). Como se mencionó al principio de esta sección, las integrales sobre el volumen de AdS que surgen en el tratamiento de interacciones pueden tratarse en la prescripción asintótica, i.e. tomando desde el principio el límite $\epsilon \rightarrow 0$. En base a resultados obtenidos en [65], se dará una forma analítica y cerrada para estas contribuciones.

Para el cálculo de (4.2.36) se necesita la expresión para Φ_0 de la prescripción asintótica. Esto se obtiene a partir de las expresiones (4.2.12), (4.2.14), (4.2.16) tomando $\epsilon \rightarrow 0$. Para la parte NN, primera línea de (4.2.12), el límite deja una integral en momentos que puede resolverse analíticamente [12, 13],

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d\tilde{t} d\tilde{\mathbf{x}} \mathcal{K}_\epsilon(z, t, \mathbf{x}; \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) = i \int d\tilde{t} d\tilde{\mathbf{x}} \left(\frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\nu)} \frac{z^\Delta}{(|x^\mu - \tilde{x}^\mu|^2 + z^2)^\Delta} \right) \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}), \quad (4.2.37)$$

notar que el propagador de volumen al borde queda regulado tipo Feynman como se menciona debajo de (4.2.31).

Ahora se muestra que los modos N que contienen la información de los estados excitados (segunda línea en (4.2.12)) se puede escribir como una convolución entre fuentes euclidianas y una extensión analítica del propagador de volumen a borde. Tomando $\epsilon \rightarrow 0$ en los modos N, con $L_{\omega\mathbf{k}}^\pm$ dado en (4.2.16), se encuentra nuevamente una integral de momento que puede resolverse y que lleva a (ver Ap. B)

$$\begin{aligned} \Phi_{0(N)}^L(z, t, \mathbf{x}) &= \frac{2^{1-\nu}\pi}{\Gamma(\nu)} \int_+ \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}} z^{\frac{d}{2}} J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z) \\ &\quad \times \left(\int_+ d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{x}} e^{-i\omega((T_+ - i\tilde{\tau}) - t) + i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})} \phi^+(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}}) + \int_- d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{x}} e^{-i\omega(t - (T_- - i\tilde{\tau})) + i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})} \phi^-(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}}) \right). \\ &= \int d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{x}} \left(\frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\nu)} \frac{z^\Delta}{(|x^\mu - \tilde{x}^\mu|^2 + z^2)^\Delta} \right) \phi^E(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}}), \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

con ϕ^E definido en (4.2.32) y la distancia $|x^\mu - \tilde{x}^\mu|^2$ en (4.2.31). Se obtienen expresiones análogas para los campos en \mathcal{M}_\pm . Recordando la compleja variable de tiempo η introducida en (4.2.31) motiva la definición de una sola fuente

$$\phi(\eta, \mathbf{x}) \equiv \begin{cases} \phi^-(\tau, \mathbf{x}) & \text{on } \partial_z \mathcal{M}_- \\ \phi^L(t, \mathbf{x}) & \text{on } \partial_z \mathcal{M}_L \\ \phi^+(\tau, \mathbf{x}) & \text{on } \partial_z \mathcal{M}_+ \end{cases} \quad (4.2.39)$$

que permite escribir Φ_0 sobre la variedad de signatura mixta \mathcal{M} como una única integral compleja que reúne las contribuciones de las fuentes Lorentzianas y euclidianas. Resumiendo, la expresión final para Φ_0 en la prescripción asintótica teniendo en cuenta todas las fuentes es

$$\Phi_0(z, \eta, \mathbf{x}) \equiv i \int_{\partial_z \mathcal{M}} d\tilde{\eta} d\tilde{\mathbf{x}} \left(\frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2} \Gamma(\nu)} \frac{z^\Delta}{(|x^\mu - \tilde{x}^\mu|^2 + z^2)^\Delta} \right) \phi(\tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{x}}). \quad (4.2.40)$$

Insertando la expresión anterior en (4.2.36) conduce a una integral sobre M conocida [65],

$$\begin{aligned} -\frac{g}{3} \int_{\mathcal{M}} dz d\eta d\mathbf{x} \sqrt{g} (\Phi_0)^3 &= i \frac{g}{3} \int_{\mathcal{M}} \frac{dz d\eta d\mathbf{x}}{z^{d+1}} \prod_{i=1}^3 \left(\int_{\partial_z \mathcal{M}_i} d\eta_i d\mathbf{x}_i \left(\frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2} \Gamma(\nu)} \frac{z^\Delta}{(|x^\mu - x_i^\mu|^2 + z^2)^\Delta} \right) \phi(\eta_i, \mathbf{x}_i) \right) \\ &= \frac{g}{3} \frac{\Gamma(\frac{\Delta}{2})^3 \Gamma(\frac{\Delta}{2} + \nu)}{2\pi^d \Gamma(\nu)^3} \prod_{i=1}^3 \left(\int_{\partial_z \mathcal{M}_i} d\eta_i d\mathbf{x}_i \right) \frac{\phi(\eta_1, \mathbf{x}_1) \phi(\eta_2, \mathbf{x}_2) \phi(\eta_3, \mathbf{x}_3)}{|x_1^\mu - x_2^\mu|^\Delta |x_2^\mu - x_3^\mu|^\Delta |x_1^\mu - x_3^\mu|^\Delta} \\ &= \frac{g}{3} \prod_{i=1}^3 \left(\int_{\partial_z \mathcal{M}_i} d\eta_i d\mathbf{x}_i \right) \phi(\eta_1, \mathbf{x}_1) \phi(\eta_2, \mathbf{x}_2) \phi(\eta_3, \mathbf{x}_3) \mathcal{R}(x_1^\mu, x_2^\mu, x_3^\mu), \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

donde los argumentos x_i^μ de las fuentes ϕ definidas en (4.2.39) se encuentran en $\mathcal{M} = \partial_z \mathcal{M}_- \cup \partial_z \mathcal{M}_L \cup \partial_z \mathcal{M}_+$, y la expresión para \mathcal{R} es

$$\mathcal{R}(x_1^\mu, x_2^\mu, x_3^\mu) \equiv \frac{1}{2\pi^d} \frac{\Gamma(\Delta/2)^3 \Gamma(\Delta/2 + \nu) \Gamma(\nu)^{-3}}{|x_1^\mu - x_2^\mu|^\Delta |x_2^\mu - x_3^\mu|^\Delta |x_1^\mu - x_3^\mu|^\Delta}.$$

Dado que (4.2.41) contiene potencias de ϕ^L hasta el orden cúbico, obtenemos correcciones en el producto interno y correladores conectados de 1, 2 y 3 puntos. El orden dominante de la acción en la capa de masa para nuestro sistema es

$$S = -\frac{1}{2} \int_{\partial_z \mathcal{M}} \sqrt{\gamma} \Phi_0 n^\mu \partial_\mu \Phi_0 - \frac{g}{3} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} (\Phi_0)^3 = (4.2.28) + (4.2.41). \quad (4.2.42)$$

Corrección al producto interno: De la acción en la capa de masa podemos obtener el producto interno entre estados excitados. Esto se encuentra apagando las fuentes Lorentzianas y tomando un intervalo de evolución temporal real nulo [63].

$$\ln \langle \phi^+ | \phi^- \rangle \equiv \lim_{\Delta T \rightarrow 0} (4.2.42)|_{\phi^L=0} = (4.2.33) - \frac{g}{3} \prod_{i=1}^3 \left(\int_{\partial_z \mathcal{M}_i} d\tau_i d\mathbf{x}_i \right) \phi^E(\tau_1, \mathbf{x}_1) \phi^E(\tau_2, \mathbf{x}_2) \phi^E(\tau_3, \mathbf{x}_3) \mathcal{R}(x_1^\mu, x_2^\mu, x_3^\mu), \quad (4.2.43)$$

con ϕ^E definido en (4.2.32). En analogía con el caso no interactuante [63], el lado izquierdo de la ecuación, que se reduce al cálculo de una función generatriz para una teoría deformada con una fuente ϕ^E en el borde de AdS euclidiano, reproduce el resultado de [65].

Como puede verse, los estados excitados definidos en (3.5.5) no están normalizados. Definiendo

$$|\phi^\pm\rangle_N \equiv N_\pm |\phi^\pm\rangle,$$

la normalización adecuada se obtiene como

$${}_N \langle \phi^\pm | \phi^\pm \rangle_N = |N_\pm|^2 e^{iS_0} (1 + i g S_1) = 1 \implies N_\pm = e^{-\frac{i}{2} S_0} \left(1 - i \frac{g}{2} S_1 \right),$$

donde se expandió a primer orden en g . Recordar que al tomar $\Delta T \rightarrow 0$, tanto iS_0 como iS_1 se vuelven cantidades reales, ver (4.2.33) y (4.2.43). Luego de manipular las expresiones, el producto interno normalizado se puede escribir como

$${}_N\langle\phi^+|\phi^-\rangle_N = e^{-\frac{1}{2}|\phi^--(\phi^+)^*|^2} \left(1 - \frac{g}{3} \int_{\partial\mathcal{M}_-} (\phi^-(\tau_1, \mathbf{x}_1) - (\phi^+(\tau_1, \mathbf{x}_1))^*) \sum_{s=\pm} \left(s \int_{\partial\mathcal{M}_s} \phi^s(x_2^\mu) \phi^s(x_3^\mu)\right) \mathcal{R}(x_1^\mu, x_2^\mu, x_3^\mu)\right) \quad (4.2.44)$$

que naturalmente es máximo cuando $(\phi^+(\tau, \mathbf{x}))^* \equiv \phi^+(-\tau, \mathbf{x}) = \phi^-(\tau, \mathbf{x})$. Una vez más, esta es la regla de conjugación euclidiana dada en [91]. La norma $|\phi^- - (\phi^+)^*|^2 = (\phi^- - (\phi^+)^*, \phi^- - (\phi^+)^*)$ construida en [63], se induce del producto interno en el espacio de los campos suaves definidos sobre $\partial\mathcal{M}_-$ como⁸

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv \int_- d\tau d\mathbf{x} \int_- d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{x}} \left(\frac{2\nu\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\nu)} \frac{\phi_1(\tau, \mathbf{x}) \phi_2(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}})}{((\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})^2 + (\tau + \tilde{\tau})^2)^\Delta} \right).$$

El factor en paréntesis modificando el comportamiento gaussiano en (4.2.44) indican que, en presencia de interacciones, los estados excitados se desvían de un comportamiento coherente.

Corrección a la función de 1 punto: La corrección a primer orden a la función de 1 punto (4.2.34) se obtiene tomando la derivada a (4.2.41) respecto de ϕ^L . El resultado es

$$\frac{\langle\phi^+|\mathcal{O}(t, \mathbf{x})|\phi^-\rangle}{\langle\phi^+|\phi^-\rangle} \equiv \frac{\delta(4.2.42)}{\delta\phi^L(t, \mathbf{x})} \Big|_{\phi^L=0} = (4.2.34) + g \prod_{i=1}^2 \left(\int_{\partial\mathcal{M}_i} d\tau_i d\mathbf{x}_i \right) \phi^E(\tau_1, \mathbf{x}_1) \phi^E(\tau_2, \mathbf{x}_2) \mathcal{R}(x_1^\mu, x_2^\mu, x^\mu). \quad (4.2.45)$$

En el límite $\Delta T \rightarrow 0$, i.e. cuando no hay evolución temporal, la expresión dada se interpreta como el elemento de matriz del operador \mathcal{O} entre los estados $|\phi^\pm\rangle$. La corrección indica nuevamente una deformación del comportamiento coherente, puesto que ya no hay una relación lineal entre los elementos de matriz y las fuentes euclideas [63, 93].

Corrección a la función de 2 puntos: Tomando la segunda derivada de (4.2.41) con respecto a ϕ^L da la corrección a primer orden,

$$\frac{\langle\phi^+|T[\mathcal{O}(t, \mathbf{x})\mathcal{O}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})]|\phi^-\rangle}{\langle\phi^+|\phi^-\rangle} \equiv \frac{\delta^2(4.2.42)}{\delta\phi^L(t, \mathbf{x})\delta\phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})} \Big|_{\phi^L=0} = (4.2.35) - 2g \int_{\partial\mathcal{M}} d\tau_1 d\mathbf{x}_1 \phi^E(\tau_1, \mathbf{x}_1) \mathcal{R}(x_1^\mu, \tilde{x}^\mu, x^\mu). \quad (4.2.46)$$

Es importante señalar que esta corrección tiene origen físico como excitación del vacío, dependiendo explícitamente de la forma arbitraria de ϕ^E y no corresponde a una dimensión anómala del operador en la CFT, como su sigue de otro tipo de correcciones que surgen al considerar también interacciones en la teoría gravitatoria, cf. [96].

Función de 3 puntos Una tercera diferenciación con respecto a ϕ^L de (4.2.41) lleva a la función de 3 puntos,

$$\frac{\langle\phi^+|T[\mathcal{O}(t, \mathbf{x})\mathcal{O}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})\mathcal{O}(\tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{\mathbf{x}}})]|\phi^-\rangle}{\langle\phi^+|\phi^-\rangle} \equiv \frac{\delta^3(4.2.42)}{\delta\phi^L(t, \mathbf{x})\delta\phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})\delta\phi^L(\tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{\mathbf{x}}})} \Big|_{\phi^L=0} = 2g \mathcal{R}(x^\mu, \tilde{x}^\mu, \tilde{\tilde{x}}^\mu). \quad (4.2.47)$$

Esta es la extensión a tiempo real, ordenada temporalmente del resultado de [65]. Notar que no hay dependencia en ϕ^E de (4.2.47). Esto es producto de la naturaleza cúbica del vértice de interacción y es similar al resultado encontrado en la Sec. 4.1 para la función de 2 puntos en una teoría libre. Sin embargo, en el caso presente, la independencia en las fuentes euclidianas solo se sostiene a primer orden en λ y no es un resultado exacto.

⁸Notar que el denominador no se anula nunca dado que, a diferencia del propagador de borde a volumen, depende de $(\tau + \tilde{\tau})$ en lugar de $(\tau - \tilde{\tau})$, ver [63].

4.2.3. Resumen y análisis de los resultados

Estados comprimidos desde BDHM

De forma general, el uso de la correspondencia AdS/CFT en el límite de N grande implica el considerar una teoría de gravedad semiclásica. En el límite estricto $N \rightarrow \infty$ los estados excitados considerados se manifestaron como coherentes. En esta sección se mostrará que las interacciones cúbicas en la teoría de gravedad (4.2.36) conllevan a que los estados (antes coherentes) se deformen a coherentes-comprimidos.

Para esto, se retoma la prescripción BDHM [15, 45]. Se recuerda que la construcción BDHM consiste en cuantizar canónicamente los campos en la teoría AdS y extraer una expresión para el operador dual a partir de⁹

$$\mathcal{O}(t, \mathbf{x}) \equiv N_\nu \lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta} \widehat{\Phi}(z, t, \mathbf{x}). \quad (4.2.48)$$

El factor de normalización $N_\nu \equiv 2\nu = 2\Delta - d$ es necesario para un correcto acuerdo entre prescripciones [63, 16, 97].

A partir de la acción (4.2.2), se construye un campo cuantizado interactuante $\widehat{\Phi}$ de forma perturbativa en g . La parte libre $\widehat{\Phi}_0$ es una combinación lineal de los modos ortonormales correspondientes a las autofunciones de la ecuación de KG con operadores escalera como coeficientes, i.e. [93]

$$\widehat{\Phi}_0(z, t, \mathbf{x}) \equiv \sqrt{\pi} \int_+ \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} \Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) \left(a_{\omega\mathbf{k}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_{\omega\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right) z^{\frac{d}{2}} J_\nu \left(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z \right). \quad (4.2.49)$$

A partir de esta expresión y de (4.2.48) se obtiene el operador CFT a orden más bajo, g^0

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_0(t, \mathbf{x}) &\equiv N_\nu \lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta} \widehat{\Phi}_0(z, t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} \int_+ \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} \Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}} \left(a_{\omega\mathbf{k}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_{\omega\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right). \end{aligned} \quad (4.2.50)$$

La corrección a primer orden para el campo cuántico se sigue de (4.2.5) y es [46]

$$g \widehat{\Phi}_1(z, t, \mathbf{x}) = g \int_{\mathcal{M}} d\tilde{t} d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{z} \sqrt{\tilde{g}} G(z, t, \mathbf{x}; \tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) : (\widehat{\Phi}_0(\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}))^2 :$$

donde $G(z, t, \mathbf{x}; \tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})$ es el propagador de volumen a volumen en AdS [8] y $: \hat{A} :$ es el orden normal del operador \hat{A} . Usando la relación [44]

$$\lim_{z \rightarrow 0} G(z, t, \mathbf{x}; \tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{z^\Delta}{2\nu} \mathcal{K}(t, \mathbf{x}; \tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{z^\Delta}{2\nu} \left(\frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2} \Gamma(\nu)} \frac{\tilde{z}^\Delta}{(|x_\mu - \tilde{x}_\mu|^2 + \tilde{z}^2)^\Delta} \right),$$

la corrección a orden g del operador en la CFT resulta

$$\mathcal{O}_1(t, \mathbf{x}) \equiv N_\nu \lim_{z \rightarrow 0} z^{-\Delta} \widehat{\Phi}_1(z, t, \mathbf{x}) = - \int_{\mathcal{M}} d\tilde{t} d\tilde{\mathbf{x}} d\tilde{z} \sqrt{\tilde{g}} \mathcal{K}(t, \mathbf{x}; \tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) : (\widehat{\Phi}_0(\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}))^2 : \sim (a + a^\dagger)^2. \quad (4.2.51)$$

De forma que a primer orden se obtiene

$$\mathcal{O}(t, \mathbf{x}) = \mathcal{O}_0(t, \mathbf{x}) + g \mathcal{O}_1(t, \mathbf{x}) \sim a + a^\dagger + (a + a^\dagger)^2, \quad (4.2.52)$$

mostrando que la corrección \mathcal{O}_1 conduce a términos cuadráticos en los operadores escalera.

El paso final es notar que la exponencial ordenada sobre el camino en (3.5.5) puede pensarse como una evolución temporal con Hamiltoniano $\int d\mathbf{x} \mathcal{O}(\tau, \mathbf{x}) \phi^-(\tau, \mathbf{x})$, avanzando en tiempo euclidiano desde el infinito pasado hasta el tiempo del estado inicial en (3.5.5). De (4.2.52) se observa que dicha “evolución temporal” es cuadrática en operadores escalera. En este contexto, se usa el resultado de [47] donde, usando

⁹La expresión presentada está en coordenadas de Poincaré. En la Sección anterior se usó una expresión análoga en coordenadas globales. Una expresión covariante podría darse en términos del momento conjugado respecto de la coordenada radial holográfica.

teoremas de desenredo para separar las exponenciales, se muestra que la evolución bajo un hamiltoniano general cuadrático

$$\begin{aligned}
H(t) = & \sum_{\omega\mathbf{k}} \omega_{\omega\mathbf{k}}(t) \left(a_{\omega\mathbf{k}}^\dagger a_{\omega\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) + \sum_{\omega\mathbf{k}; \tilde{\omega}\tilde{\mathbf{k}}} \left(f_{\omega\mathbf{k}; \tilde{\omega}\tilde{\mathbf{k}}}(t) a_{\omega\mathbf{k}}^\dagger a_{\tilde{\omega}\tilde{\mathbf{k}}}^\dagger + h.c. \right) \\
& + \sum_{\omega\mathbf{k} \neq \tilde{\omega}\tilde{\mathbf{k}}} g_{\omega\mathbf{k}; \tilde{\omega}\tilde{\mathbf{k}}}(t) \left(a_{\omega\mathbf{k}}^\dagger a_{\tilde{\omega}\tilde{\mathbf{k}}} + \frac{1}{2} \delta_{\omega\mathbf{k}; \tilde{\omega}\tilde{\mathbf{k}}} \right) + \sum_{\omega\mathbf{k}} \left(h_{\omega\mathbf{k}}(t) a_{\omega\mathbf{k}}^\dagger + h.c. \right)
\end{aligned} \tag{4.2.53}$$

lleva el vacío de una teoría a un estado coherente-comprimido

$$\exp \left\{ \sum_{\omega\mathbf{k}} \alpha_{\omega\mathbf{k}}(t) a_{\omega\mathbf{k}}^\dagger + \sum_{\omega\mathbf{k}; \tilde{\omega}\tilde{\mathbf{k}}} \zeta_{\omega\mathbf{k}; \tilde{\omega}\tilde{\mathbf{k}}}(t) a_{\omega\mathbf{k}}^\dagger a_{\tilde{\omega}\tilde{\mathbf{k}}}^\dagger \right\} |0\rangle. \tag{4.2.54}$$

con parámetros $\alpha_{\omega\mathbf{k}}(t)$ y $\zeta_{\omega\mathbf{k}; \tilde{\omega}\tilde{\mathbf{k}}}(t)$ determinados a partir de los de (4.2.53)[47]. En resumen, a orden lineal en g , los estados (3.5.5) representan estados coherente-comprimido. En este caso concreto se obtiene

$$\begin{aligned}
f_{\omega\mathbf{k}; \tilde{\omega}\tilde{\mathbf{k}}}(\tau) & \equiv g \frac{\pi}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{x} \phi^-(\tau, \mathbf{x}) \int_{\mathcal{M}} \sqrt{\tilde{g}} \mathcal{K}(\tau, \mathbf{x}; \tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) \tilde{z}^d J_\nu \left(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} \tilde{z} \right) J_\nu \left(\sqrt{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\mathbf{k}}^2} \tilde{z} \right) e^{i(\tilde{\omega} + \omega)\tilde{t} - i(\tilde{\mathbf{k}} + \mathbf{k})\tilde{\mathbf{x}}}; \\
g_{\omega\mathbf{k}; \tilde{\omega}\tilde{\mathbf{k}}}(\tau) & \equiv g \frac{2\pi}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{x} \phi^-(\tau, \mathbf{x}) \int_{\mathcal{M}} \sqrt{\tilde{g}} \mathcal{K}(\tau, \mathbf{x}; \tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) \tilde{z}^d J_\nu \left(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} \tilde{z} \right) J_\nu \left(\sqrt{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\mathbf{k}}^2} \tilde{z} \right) e^{-i(\tilde{\omega} - \omega)\tilde{t} + i(\tilde{\mathbf{k}} - \mathbf{k})\tilde{\mathbf{x}}}; \\
h_{\omega\mathbf{k}}(\tau) & \equiv \frac{2^{1-\nu} \sqrt{\pi}}{(2\pi)^{d/2} \Gamma(\nu)} \int d\mathbf{x} \phi^-(\tau, \mathbf{x}) (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}} e^{i\omega\tau - i\mathbf{k}\mathbf{x}}; \quad \omega_{\omega\mathbf{k}}(\tau) \equiv g_{\omega\mathbf{k}; \omega\mathbf{k}}(\tau)
\end{aligned}$$

La evolución “temporal” en (4.2.54) debe entenderse como evaluada a tiempo euclidiano $\tau = 0$ asociada a una evolución completa a lo largo de la variedad \mathcal{M}_- .

Este resultado muestra el poder de cómputo de la prescripción BDHM fuera del caso libre. Es importante destacar que esta caracterización de los estados solo funciona a primer orden en g y es particular de una interacción cúbica.

En esta dirección y antes de observar los puntos finales sobre este ejemplo, es menester enfatizar que los estados (3.5.1) fuera del límite $N \rightarrow \infty$, pierden su carácter coherente para convertirse en estados más complejos. La propiedad inmanente de estos estados a cualquier orden en perturbaciones no es por tanto la coherencia, si no la capacidad de tener asociada una geometría clásica dual sobre la cual hacer perturbaciones. En los últimos dos apartados comentamos sobre la interpretación diagramática de los resultados obtenidos para nuestros estados y sobre la extensión de los resultados de esta sección al caso de más campos y su relación con el entrelazamiento.

Interpretación diagramática:

El resultado (4.2.40) y el vértice de interacción (4.2.36) admiten una interpretación diagramática de todas las correcciones encontradas (ver Figs.4.5 y 4.6). El propagador de volumen a borde, dado por el paréntesis en (4.2.40), que transporta la información de $\phi(\eta, \mathbf{x})$ de $\partial\mathcal{M}$ a un punto dentro de \mathcal{M} , se representa con líneas ondulantes. La interacción cúbica (4.2.36) se grafica como 3 líneas ondulantes que se encuentran en un punto. Correcciones de orden superior en g involucran el propagador de volumen a volumen que unan puntos dentro de \mathcal{M} que podrían estar también unidos por líneas ondulantes. El color de las líneas (rojo/azul) solo señalan la dependencia en el estado inicial/final. Por construcción, al tomar el logaritmo de la función de partición, solo los diagramas conectados deben tenerse en cuenta y en el límite de gravedad semiclásica, solo los diagramas árbol.

Como regla general, las correcciones g^k a la función de correlación n -ésima se compone de: (i) tomar n puntos en el borde Lorentziano $\partial\mathcal{M}_L$, llamados (t, \mathbf{x}) , $(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})$, ..., (ii) se ubican k vértices de interacción en el volumen y (iii) se consideran todos los posibles diagramas conectados de orden árbol que lleguen a los n puntos Lorentzianos. Las patas libres que no lleguen al borde Lorentziano deben unirse de todas las formas posibles a las secciones euclidianas que muestran las correcciones en el estado inicial/final. A primer orden en g , se muestran ejemplos de esto en las Figs.4.5 y 4.6.

En este marco general es fácil entender por qué la primera corrección a la función de 3 puntos en (4.2.47) no depende de las fuentes euclidianas puesto que no quedan patas libres a ese orden para incluir una dependencia en los estados. Esto también es un marco más general al resultado obtenido en la Sec. 4.1, donde se observa que la función de 2 puntos es independiente de las fuentes euclidianas a orden g^0 .

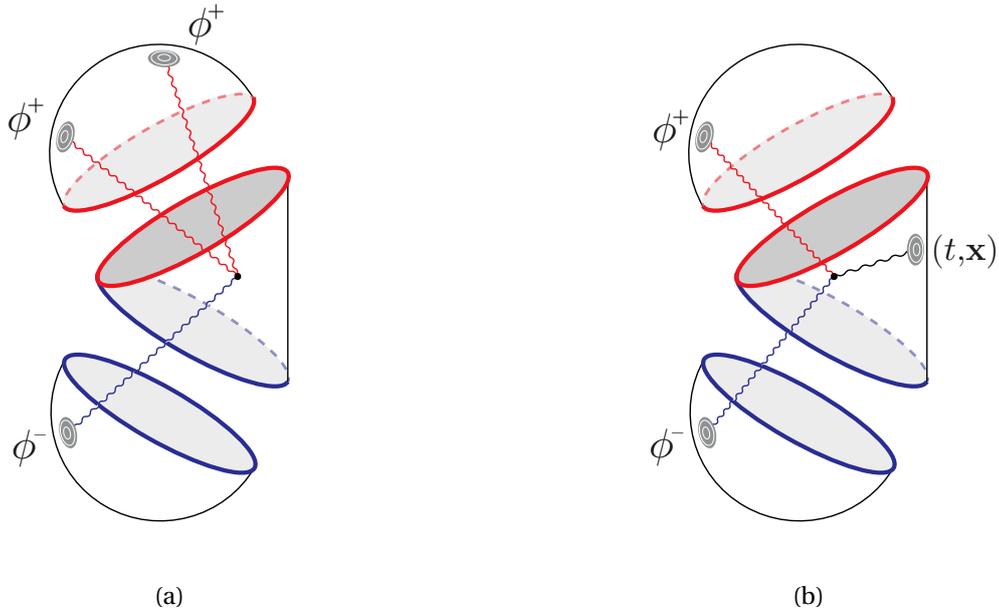


Figura 4.5: (a) Ejemplo de un diagrama que contribuye a la corrección del producto interno. Los puntos de inserción en el volumen y de fuentes euclidianas están integrados en más de M y ∂M_{\pm} respectivamente. El resultado completo es 4.2.43. (b) Ejemplo de un diagrama de corrección de primer orden que contribuye a la función de 1 punto. Se obtiene de (4.2.41) mediante la eliminación de una fuente Lorentziana y la integral que la acompaña. El resultado final de la corrección a primer orden viene dado por (4.2.45).

Interacción y entrelazamiento

A lo largo de toda esta sección y por simplicidad se ha trabajado con un solo campo escalar. Sin embargo, el mismo formalismo se extrapola directamente al caso de varios campos en interacción usando (4.2.40)¹⁰. Se muestra debajo que de forma general, interacciones entre campos en estas teorías llevan a estados entrelazados de la CFT.

Se toma, por ejemplo, 3 campos escalares Φ_I , $I = 1, 2, 3$ con una interacción dada por

$$-g_{IJK} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} \Phi_I \Phi_J \Phi_K .$$

El espacio de estados está definido como $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$.

La prescripción BDHM [15, 45] implica

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_I(t, \mathbf{x}) &\approx \mathcal{O}_{I;0}(t, \mathbf{x}) - g_{IJK} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} \mathcal{K}(t, \mathbf{x}; \tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) : (\hat{\Phi}_{J;0}(\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) \hat{\Phi}_{K;0}(\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})) : \\ &\approx \mathcal{O}_{I;0}(t, \mathbf{x}) - g_{IJK} \mathcal{O}_{JK;1}(t, \mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (4.2.55)$$

Expresando $\hat{\Phi}_{I;0}(z, t, \mathbf{x})$ en términos de los operadores escalar a_I , la correcciones a orden g , $\mathcal{O}_{JK;1}$ resulta lineal en la combinación de operadores

$$a_J^\dagger a_K^\dagger, a_J a_K, a_J^\dagger a_K \quad (4.2.56)$$

Luego, los estados excitados solo por fuentes $\phi_I \neq 0$, por ejemplo, serán

$$|\phi_1\rangle = \mathcal{P} \left\{ \exp \left[- \int_{\partial \mathcal{M}^-} \phi_1(\tau_x, \mathbf{x}) (\mathcal{O}_{1;0}(\tau_x, \mathbf{x}) - g_{1JK} \mathcal{O}_{JK;0}(\tau_x, \mathbf{x})) \right] \right\} |0\rangle \quad (4.2.57)$$

de forma que el segundo término del exponente, proporcional al acoplamiento g_{1JK} , contiene productos $a_J^\dagger a_K^\dagger$ que típicamente caracteriza estados máximamente entrelazados en el espacio $\mathcal{H}_J \otimes \mathcal{H}_K$. Notar también que los estados términos en el formalismo TFD tienen también esta forma [31, 32, 35, 56], ver Sec. 2.1.2.

¹⁰Una discusión complementaria del caso de varios campos puede hallarse en [15].

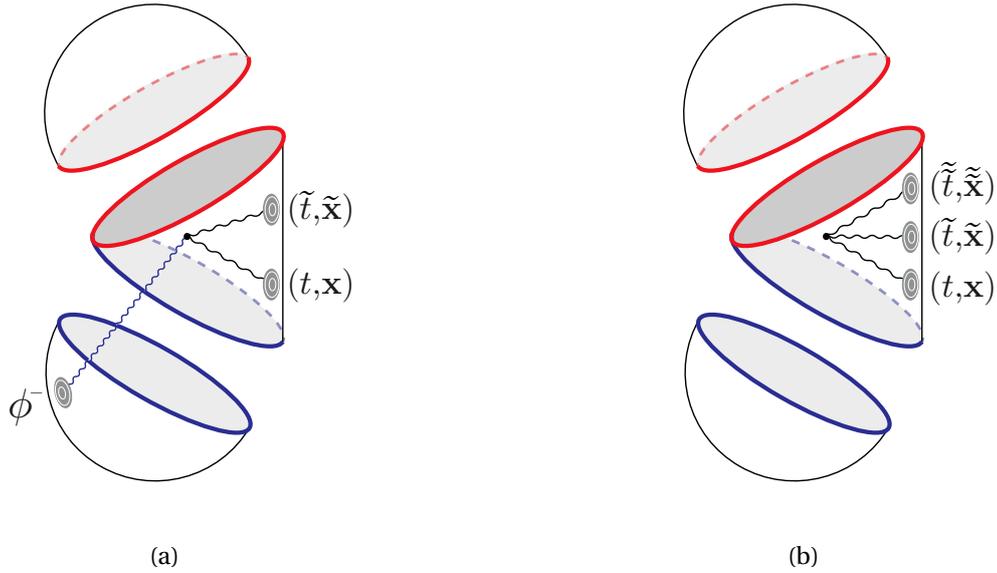


Figura 4.6: Ejemplos de diagramas que contribuyen a las correcciones de las funciones de 2 y 3 puntos. El diagrama de la Fig. (b) manifiesta la independencia de la fuente euclidiana de la corrección de primer orden de la función de 3 puntos.

Este resultado sugiere una posible conexión con algunas ideas y resultados recientes que apuntan a que la geometría clásica (emergente), y las configuraciones de campo en ella, deberían estar íntimamente relacionadas con estados entrelazados en la teoría de campo cuántico del borde [99, 100, 101, 102, 103, 81]. Más recientemente, estas ideas se han desarrollado en el contexto de las redes MERA [104, 105, 106].

4.3. In-In

Este último ejemplo a $T = 0$ muestra un caso donde el ordenamiento impuesto por el camino no es del tipo Feynman. El énfasis que se busca es el de que si bien puede haber formas más naturales que otras para elegir cómo sortear los polos para las soluciones Lorentzianas del campo en AdS, en definitiva no importa cuál se ponga puesto que el pegado determinará el adecuado para el problema. Dicho de otro modo, para escribir las soluciones generales (4.1.12) se requiere elegir un camino de integración para el primer término, pero dado que la diferencia entre la elección de dos caminos distintos siempre se puede poner en términos de una combinación lineal de modos normalizables y que la solución aún contiene coeficientes arbitrarios L^\pm , esta elección es espúrea hasta tanto no se determinen los últimos.

El camino In-In, mostrado en la Fig. 4.7a, difiere con el In-Out en que posee 2 secciones de signatura Lorentziana que forman un camino cerrado en el tiempo del tipo de Schwinger-Keldysh. Se asignará a cada tramo horizontal una variedad AdS_3 (cuyos tiempos fluyen en dirección opuesta) y a cada tramo vertical media esfera H_3 , como se muestra en la Fig. (4.7b), donde también se define la nomenclatura que se usará para esta sección. Como se mostró en la Sec. 4.1, el pegado de este tipo de regiones puede hacerse sobre cualquier superficie t/τ constante.

Ya con la intuición del camino In-Out, es razonable esperar que la propagación en \mathcal{M}_1 sea ordenada temporalmente y en \mathcal{M}_2 sea ordenada anti-temporalmente, según se recorre el camino. El hecho de que el camino sea abierto lo distingue de los caminos SK cerrados donde mostramos que hay una matriz de propagadores, producto de que ya no hay una sola forma de conectar dos puntos. El camino In-In, a pesar de contener segmentos Lorentzianos de ida y vuelta, es abierto y por tanto solo admite el cálculo de propagadores que sigan el orden del camino. El resultado interesante de esta sección es comprobar que el correlador entre los GDL de \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 se corresponde con lo que se conoce con una función de Wightman, que no tiene una interpretación en términos de un ordenamiento temporal, pero sí en términos de condiciones de analiticidad, siendo analítica en el semiplano inferior de la coordenada temporal, además de ser no nula dentro y fuera del cono de luz.

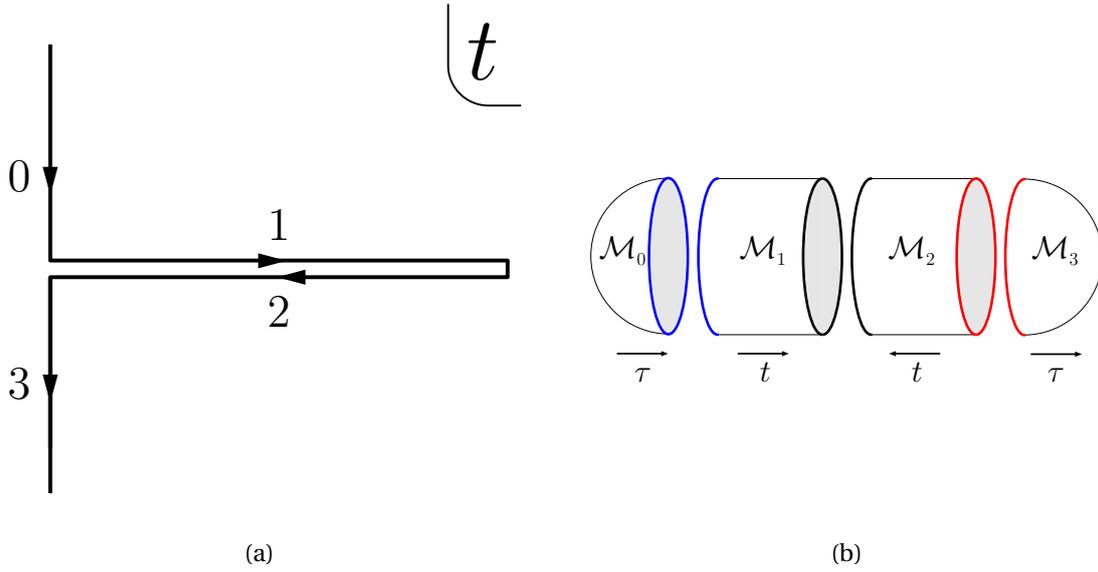


Figura 4.7: Se muestra cómo se construye la interpretación holográfica del camino In-In. Cada tramo vertical y horizontal de (a) se asocia con una sección de H_3 y AdS_3 respectivamente en (b). Las regiones \mathcal{M}_i se unen a otras sobre superficies Σ_{ij} .

Desde la dualidad, la duplicación de los grados de libertad se realiza considerando los campos Φ_1 y Φ_2 como grados de libertad independientes, además de imponer condiciones de contorno ϕ_1 y ϕ_2 sobre los bordes conformes de $\partial_r \mathcal{M}_1$ y $\partial_r \mathcal{M}_2$ también independientes una de otra. Luego, las distintas funciones de 2 puntos de la teoría se obtienen tomando la derivada funcional respecto de las fuentes ϕ_1 y ϕ_2 .

Para tener en cuenta dentro de la prescripción la región \mathcal{M}_2 , donde el tiempo va en sentido inverso se puede definir, por ejemplo

$$t_{\mathcal{E}} = \begin{cases} -i\tau_0 & \text{sobre } \mathcal{M}_0 & \tau_0 \in (-\infty, 0] \\ t_1 & \text{sobre } \mathcal{M}_1 & t_1 \in [0, T] \\ T - t_2 & \text{sobre } \mathcal{M}_2 & t_2 \in [0, T] \\ -i\tau & \text{sobre } \mathcal{M}_3 & \tau_3 \in [0, +\infty) \end{cases}$$

de forma que la acción completa para este camino se escribe

$$-iS = -\frac{1}{2} \int_{\partial 0} \sqrt{\gamma} \Phi_0 r \partial_r \Phi_0 - \frac{i}{2} \int_{\partial 1} \sqrt{\gamma} \Phi_1 r \partial_r \Phi_1 + \frac{i}{2} \int_{\partial 2} \sqrt{\gamma} \Phi_2 r \partial_r \Phi_2 - \frac{1}{2} \int_{\partial 3} \sqrt{\gamma} \Phi_3 r \partial_r \Phi_3 \quad (4.3.1)$$

Este cambio de signo al atravesar la superficie Σ_{12} afecta la condición sobre los momentos conjugados, dado que la derivada temporal de un lado adquiere un signo relativo respecto del otro. Lo mismo sucede en Σ_{23} , se pedirá continuidad de los campos y del momento conjugado, pero a este último se le agrega un signo negativo del lado lorentziano. Las condiciones de contorno son

$$\begin{aligned} \Phi_0|_{\Sigma_{01}} &= \Phi_1|_{\Sigma_{01}}; & \partial_\tau \Phi_0|_{\Sigma_{01}} &= -i \partial_t \Phi_1|_{\Sigma_{01}}; \\ \Phi_1|_{\Sigma_{12}} &= \Phi_2|_{\Sigma_{12}}; & \partial_t \Phi_1|_{\Sigma_{12}} &= -\partial_t \Phi_2|_{\Sigma_{12}}; \\ \Phi_2|_{\Sigma_{23}} &= \Phi_3|_{\Sigma_{23}}; & i \partial_t \Phi_2|_{\Sigma_{23}} &= \partial_\tau \Phi_3|_{\Sigma_{23}}, \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Dado que las variedades son las mismas en este formalismo que en la Sec. 4.1, la construcción de las soluciones para los campos es análoga al procedimiento llevado a cabo en dicha sección. Las soluciones sobre \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 son

$$\Phi_{1/2}(r, t_{1/2}, \varphi_{1/2}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega \int dt' \int d\varphi' e^{-i\omega(t_{1/2}-t') + ik(\varphi_{1/2}-\varphi')} \phi_{1/2}(t', \varphi') f(\omega, |k|, r) \quad (4.3.3)$$

$$+ \sum_{\pm} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{1/2; nk}^{\pm} e^{-i\omega_{n|k}^{\pm} t + ik\varphi} g(\omega_{n|k}^{\pm}, |k|, r), \quad (4.3.4)$$

donde hacemos notar que elegimos un camino tipo Feynman ambas soluciones $\Phi_{1/2}$. Notamos que para Φ_2 se espera un correlador ordenado en sentido opuesto al temporal. Veremos que los coeficientes determinados al pegar las soluciones acomodan automáticamente este ordenamiento. Sobre \mathcal{M}_0 y \mathcal{M}_3 las soluciones son

$$\Phi_{0/3}(r, \tau_{0/3}, \varphi_{0/3}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int d\omega \int dt' \int d\varphi' e^{i\omega(\tau_{0/3}-\tau') + ik(\varphi_{0/3}-\varphi')} \phi_{0/3}(\tau', \varphi') f(-i\omega, |k|, r) \quad (4.3.5)$$

$$+ \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{0/3;nk} e^{\pm i\omega_{n|k|}\tau_{0/3} + ik\varphi_{0/3}} g(\omega_{n|k|}, |k|, r), \quad (4.3.6)$$

donde los coeficientes han sido renombrados $C_{i;nk}$, donde i indica la región a la que pertenecen y el signo \pm de las exponenciales reales en τ del segundo renglón en (4.3.5) corresponde a las variedades \mathcal{M}_0 y \mathcal{M}_3 respectivamente. El pegado se sigue de forma completamente análoga al de la Sec. 4.1 y su resultado es

$$\begin{aligned} C_{1;nk}^+ &= \frac{1}{4\pi^2} \bar{\phi}_0 & C_{1;nk}^- &= \frac{1}{4\pi^2} (-e^{-i\omega_{n|k|}T} \bar{\phi}_2^+ + \bar{\phi}_3) \\ C_{2;nk}^+ &= \frac{1}{4\pi^2} (-\bar{\phi}_2^+ + e^{i\omega_{n|k|}T} \bar{\phi}_3) & C_{2;nk}^- &= \frac{1}{4\pi^2} (e^{-i\omega_{n|k|}T} [\bar{\phi}_0 + \bar{\phi}_1^+] - \bar{\phi}_2^-) \\ C_{0;nk} &= \frac{1}{4\pi^2} (\bar{\phi}_1^- - e^{-i\omega_{n|k|}T} \bar{\phi}_2^+ + \bar{\phi}_3) & C_{3;nk} &= \frac{1}{4\pi^2} (\bar{\phi}_0 + \bar{\phi}_1^+ - e^{i\omega_{n|k|}T} \bar{\phi}_2^-) \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{1/2}^\pm &= \bar{\phi}_{1/2}(R_0, \omega_{n|k|}^\pm, k) \equiv \int dt' d\varphi' \phi_{1/2}(R_0, t', \varphi') e^{ik\varphi + i\omega_{n|k|}^\pm t'} = R_0^{l-1} \bar{\phi}_{1/2}^\pm(\omega_{n|k|}^\pm, k); \\ \bar{\phi}_0 &= \bar{\phi}_0(R_0, \omega_{n|k|}, k) = \int_{-\infty}^0 d\tau' \int d\varphi' e^{\omega_{n|k|}\tau'} \phi_0(R_0, \tau', \varphi') = R_0^{l-1} \bar{\phi}_0(\omega_{n|k|}, k); \\ \bar{\phi}_3 &= \bar{\phi}_3(R_0, \omega_{n|k|}, k) = \int_0^\infty d\tau' \int d\varphi' e^{-\omega_{n|k|}\tau'} \phi_3(R_0, \tau', \varphi') = R_0^{l-1} \bar{\phi}_3(\omega_{n|k|}, k). \end{aligned}$$

Analizaremos ahora los resultados de los coeficientes (4.3.7). En primer lugar, se observa que los coeficientes C_2 , a diferencia de todos los ejemplos anteriores, tiene contribuciones de la propia fuente ϕ_2 . Aunque no lo demostraremos, estas contribuciones conforman la configuración exacta de modos normalizables para revertir el orden temporal sugerido en (4.3.3) y contruir una solución no normalizable ordenada anti-temporalmente. Esta contribución es la que determina el propagador para los grados de libertad en \mathcal{M}_2 , que resulta ordenado anti-temporalmente. Esto demuestra para este caso que sea cual fuere el orden elegido sobre la solución general, las condiciones de pegado se encargan de fijar de forma unívoca el propagador físico. Notar que los coeficientes C_1 no tienen contribuciones de la fuente de su propia región, de donde se deduce que el ordenamiento tipo Feynman era el adecuado desde el comienzo.

El correlador entre grados de libertad de \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 resulta

$$\langle 0 | \mathcal{C} \{ \mathcal{O}(t_2, \varphi_2) \mathcal{O}(t_1, \varphi_1) \} | 0 \rangle = \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi_2(t_2, \varphi_2) \delta \Phi_1(t_1, \varphi_1)} \quad (4.3.8)$$

$$= \frac{2(\Delta-1)}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-i\omega_{n|k|}(t_2-t_1) + ik(\varphi_2-\varphi_1)} \alpha(\omega_{n|k|}, |k|, l) \quad (4.3.9)$$

$$= \frac{(\Delta-1)^2}{2^{\Delta-1}\pi} [\cos((t_2-t_1) + i\epsilon) - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^{-\Delta}, \quad (4.3.10)$$

donde hemos hecho explícito que la integral de caminos solo calcula el correlador ordenado según la orientación del camino mediante $\mathcal{C}\{\dots\}$. Debe notarse que el correlador es analítico en el semiplano inferior de $(t_2 - t_1)$ en acuerdo con la definición de la función de Wightman [30, 13].

El segundo resultado es que en presencia de más regiones, la caracterización de los estados no es tan directa como lo fue para el caso In-Out. Sin embargo, habiendo ya entendido las propiedades en este primer caso, se puede proponer el anzats coherente (4.1.42) para nuestros estados excitados en este límite y comprobar que es consistente con todos los observables de este camino. La conclusión entonces es que la naturaleza de los estados es inmanente a los mismos e independiente del camino sobre el que se estudien.

Esto concluye los ejemplos de aplicación a $T = 0$. En su conjunto, estos muestran todos los aspectos relevantes tanto de la construcción SvR como de los estados holográficos que son el centro de esta tesis. En el próximo capítulo, extenderemos y aplicaremos la construcción a un caso de temperatura finita donde la estructura tanto de la teoría de campos como de las geometrías duales es más rica.

Capítulo 5

Aplicaciones a Temperatura finita

En este Capítulo se describirán aplicaciones de la prescripción SvR y de la construcción de estados excitados holográficos para el caso de una familia de caminos de SK cerrados que describen una teoría de campos a temperatura finita.

Para esto, daremos primero una breve introducción a la física de agujeros negros en AdS y la interpretación de su fenomenología en el marco de AdS/CFT. Interpretaremos en estos términos la transición de Hawking-Page [107] y discutiremos el significado de los modos normales y cuasi-normales de un agujero negro. Por último recordaremos los resultados de la discusión en la Sec. 2.2 sobre los grados de libertad en RG y su relación con la dimensión del espaciotiempo. En este punto justicaremos considerar como caso de estudio el agujero negro BTZ.

Luego de esta introducción, abordaremos el estudio de caminos cerrados en el marco de la prescripción de SvR y de los estados excitados holográficos. Recordaremos de la Sec. 2.1.2 que un camino posible de la familia de caminos SK cerrados térmicos admite una interpretación en términos de estados iniciales y finales. Este camino, que llamamos Térmico $\sigma = \beta/2$, será un caso de particular interés en el estudio de estados excitados holográficos.

A continuación, nos avocamos a la construcción de un dual geométrico para el camino Térmico $\sigma = \beta/2$. El estudio del dual a este camino y su reinterpretación en términos de TFD fue parte del trabajo de esta tesis y fue publicado en [78]. Veremos que la transición de Hawking-Page se hace manifiesta también a tiempo real en tanto existen dos geometrías que pueden servir de dual geométrico al mismo camino. Nos concentraremos en el estudio de la geometría que domina a altas temperaturas, relacionadas con agujeros negros BTZ. A bajas temperaturas, el dual holográfico es una compactificación de AdS puro denominada AdS-Térmico, cuyas propiedades son mayormente derivables a partir de lo aprendido en el capítulo anterior.

Luego, estudiaremos la propagación de un campo escalar sobre la variedad dominante a altas temperaturas y obtendremos la matriz de correladores de la teoría como chequeo de consistencia de la misma y luego la usaremos para caracterizar los estados excitados geométricos (3.5.1) en problemas a T finita. Esto último es también trabajo original de esta tesis y fue publicado en [79].

Concluimos el capítulo presentando dos secciones cortas: en la primera presentamos los resultados para el dual holográfico a bajas temperaturas y en la segunda hacemos algunos comentarios sobre el cálculo de la entropía de los estados holográficos (3.5.1) en base a estudios hechos en la bibliografía por otros autores y por el autor y colaboradores en un proyecto aún sin publicar.

5.1. Preliminares

En esta sección comentamos sobre aspectos preliminares que darán un marco teórico a ciertos conceptos que aparecerán a lo largo de este capítulo y que son estándar en la literatura.

Como se mencionó en la Sec. 2.2, los agujeros negros son soluciones estáticas de las ecuaciones de Einstein análogas a las soluciones exteriores de un potencial gravitatorio generado por un cuerpo masivo en gravedad Newtoniana. Sin embargo, más allá de la analogía, los agujeros negros son en sí mismos objetos centrales en el estudio de la relatividad general entendida como teoría clásica, así como también en la construcción de una teoría cuántica de la gravedad, puesto que su descripción puramente en términos

clásicos es incompleta. El ejemplo por antonomasia de esto es el cálculo estándar de la temperatura de un agujero negro de Schwarzschild en $d + 1 = 3 + 1$, que lleva a

$$T = \frac{1}{8\pi M} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M}, \quad (5.1.1)$$

donde en la segunda igualdad hemos recuperado las constantes fundamentales, para mostrar que $T \propto \hbar$, de donde se infiere que las propiedades macroscópicas de un AN ya requieren de efectos cuánticos de gravedad.

En la misma dirección es una frase conocida de relatividad general que la invarianza de diffeomorfismos impide la conservación de cargas a nivel local o que los únicos observables físicos de RG están definidos en el borde del espacio-tiempo. Para el caso de un AN, las propiedades coloquialmente asociadas al mismo (su masa, carga y momento angular) son en verdad cargas definidas como integrales definidas sobre el borde del espacio tiempo en cuestión. Cabe aclarar que las soluciones de agujeros negros existen para cualquier signo de constante cosmológica Λ , de forma que esta discusión aplica de forma general a RG y no a un espacio en particular. Por ejemplo, una solución de Schwarzschild en $\Lambda = 0$, las cargas se definirán como integrales sobre el espacio \mathbb{M} , que es la métrica a una distancia infinita del AN. Lo central de este punto es que entonces la información de un sistema en RG parece completamente reducible a información que puede darse sobre el borde del espacio, que por definición tiene una dimensión menos. Volveremos a esto en breve. En este sentido entonces vemos que la temperatura (5.1.1) también es un objeto definido en términos de cantidades que tienen sentido para un observador en el infinito.

A partir de (5.1.1), se puede obtener también la entropía de un agujero negro [108, 109],

$$S = \frac{A}{4} = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}, \quad (5.1.2)$$

donde A es el área del horizonte del AN. El hecho que la entropía de un agujero negro dependa nuevamente de \hbar es también un argumento a favor de la naturaleza cuántica de estos objetos y al igual que (5.1.1) son efectos no perturbativos en RG, puesto que dependen de G^{-1} . Recordar que la entropía es también una forma de cuantificar el número de microestados de un sistema. Dado que la estructura interna de un AN requiere una comprensión cabal de una teoría de RG cuántica, la expresión (5.1.2) se conforma aún hoy como un eje central para la construcción de dicha teoría. Cabe mencionar que en este sentido la teoría de cuerdas ha tenido éxito, reproduciendo la expresión (5.1.2) desde primeros principios para sistemas específicos [110].

El punto central para nuestra discusión es uno mucho más directo de observar en (5.1.2) y es que no es extensiva para el sistema, i.e. en lugar de depender del volumen del agujero negro depende de su área. Esto parece contradecir la termodinámica tradicional, pero a la vez está de acuerdo con la invarianza frente a diffeomorfismos, describiendo observables en términos de objetos que tienen una dimensión menos que el espaciotiempo en cuestión. Esta expresión es uno de los pilares de lo que se conoce como Principio holográfico y de la dualidad AdS/CFT en particular. Es posible entonces suponer que existe una descripción alternativa de los agujeros negros en términos de una teoría que vive sobre el borde del espaciotiempo. De tener acceso a esta teoría, sería posible que el estudio de procesos complejos para agujeros negros pudiera hacerse más transparentes en esta segunda teoría. Un ejemplo central de esto es el proceso de formación y evaporación de un agujero negro [109] y lo que se conoce como la paradoja de la pérdida de información. Una densidad de materia, determinada en principio por una gran cantidad de información, colapsa a una solución de AN y de esta sobreviven solamente su masa, momento angular y carga. Suponiendo que la información no se pierde y que esto sucede mediante un proceso aún desconocido pero unitario, el mecanismo por el cuál el AN almacena esta información, totalmente inaccesible para un observador exterior, es aún un misterio. La comprensión del proceso de evaporación de un AN como radiación podría ser el punto en el cuál toda la información de su formación vuelva a ser accesible a un observador asintótico, pero ni esta afirmación ni los mecanismos precisos por los que esto debiera ser así son claros aún hoy. Discusiones a este respecto pueden verse en [53].

Sobre la formación y evaporación de agujeros negros enfatizamos un punto sobre las soluciones de AN en espacios AdS. El borde asintótico de AdS fuerza a que la materia con velocidad saliente vuelva al origen del espaciotiempo luego de un tiempo propio finito, i.e. AdS es una caja. Por este motivo, un AN genérico

con masa por encima de una cota inferior, será una solución completamente estable, siendo que el proceso de evaporación en forma de radiación no consigue completarse antes de que la propia radiación rebote en el borde y vuelva a caer dentro del horizonte. Aún sin evaporación en los casos genéricos, hay formas más sutiles de preguntarse acerca de la paradoja de la información en AN en AdS [111]. El estudio de la resolución de la paradoja mediante AdS/CFT es tentadora dado que la evolución temporal en teorías de campos es efectivamente unitaria, lo que implicaría que también lo es el proceso de formación y evaporación de los AN, aún si los mecanismos involucrados no están claros. En este punto precisamente ha habido un avance en agujeros negros de baja dimensionalidad, donde se construye un modelo de abajo hacia arriba de agujeros negros en $1+1$ (esto se conoce como gravedad JT [112]) cuya radiación de Hawking obedece una curva de entropía de von Neumann conocida como curva de Page [53], que admite una descripción de la evaporación del agujero negro como un proceso unitario.

Acerca de agujeros negros sobre espacios de curvatura negativa, hay también un fenómeno relevante para este capítulo, conocido como la transición de fase de Hawking-Page [107]. La transición de Hawking-Page se da en el marco de gravedad cuántica, estudiando la energía libre de configuración para sistemas de gravedad con condiciones de contorno asintóticas AdS. De forma sucinta, se observa que existe una temperatura crítica T_C por debajo de la cual la solución de agujero negro en AdS es estable, pero energéticamente desfavorable respecto de una compactificación de AdS llamada AdS Térmico. La forma canónica de comprobar esto es estudiar la función de partición de un sistema a temperatura finita en términos de una integral de caminos en tiempo Euclídeo con condiciones de contorno periódicas en la coordenada temporal Euclídea $\tau \sim \tau + \beta$, $\beta^{-1} = T$. Desde la teoría de campos dual, T_C se interpreta como una escala de confinamiento del problema y la transición de Hawking-Page se interpreta como una transición de fase entre una libertad asintótica para $T > T_C$ sobre la solución de AN y confinamiento para AdS Térmico [10].

La existencia de una temperatura crítica (o de cualquier parámetro con unidades) en una teoría que se considera dual a una teoría de campos conforme es un aspecto potencialmente confuso que merece aclaración. La respuesta es que en verdad no hay una temperatura crítica si no un cociente adimensional de parámetros en los cuales una solución domina sobre otra. Recordar que hemos puesto la escala de distancias con respecto a la curvatura de AdS, i.e. hemos puesto $R_{AdS} = 1$ además de usar unidades naturales. En AdS global, que describe un cilindro $\mathbb{R}_t \times S^d$, el parámetro es el radio de la esfera S^d , que es $R_{AdS} = 1$. Hacer periódico el tiempo implica entonces agregar una nueva escala β , cuyo cociente con R_{AdS} es adimensional y es un buen parámetro de una teoría conforme. Así, $\beta_C = 2\pi = 2\pi R_{AdS}$ es un parámetro adimensional de la teoría y los observables pueden depender funcionalmente del mismo, en particular permitiendo una transición de fases entre regímenes del mismo.

Como ejemplo de esta observación, puede comprobarse que para una teoría CFT definida en espacio plano \mathbb{M}^d , dual a un espacio AdS en coordenadas de Poincaré, no hay un fenómeno análogo a la transición de Hawking-Page. La teoría es, por supuesto, sensible a $T = 0$ o $T \neq 0$ correspondiendo a soluciones de AdS puro o AN con horizonte plano respectivamente, pero cualquier solución $T \neq 0$ es la misma que cualquier otra y los observables no dependen de la temperatura, puesto que no hay otra escala en el problema que permita poner una dependencia en β .

Un aspecto nuevo que aparecerá en las soluciones de campos sobre la geometría de AN es la presencia de un nuevo juego de modos además de los normalizables y no normalizables, que serán los modos cuasi-normales. Este tercer juego de modos son modos de norma de cuadrado integrable, pero cuyas frecuencias son complejas de forma que su norma no es constante en el tiempo y decae exponencialmente. La interpretación de estos modos es que la información dada a una cierta superficie de Cauchy inicial está cayendo al horizonte contribuyendo a la masa del agujero negro. Dado que en AdS todas las geodésicas tipo tiempo caen en tiempo finito al horizonte (AdS es una caja, las partículas salientes rebotan en el borde y caen nuevamente al origen) ahora lo que parece sospechoso es la existencia de modos de norma constante sobre una geometría de AdS AN. La respuesta es que a diferencia de la noción de espacio plano de un horizonte donde han de imponerse condiciones de contorno tales que el mismo absorba sin emitir, en AdS el compromiso entre la información rebotando sobre el borde y la radiación de Hawking permiten considerar un horizonte en equilibrio térmico con su entorno, i.e. el agujero negro absorbe y emite radiación. La coexistencia de estos efectos da lugar a la existencia de modos de frecuencia real y cuadrado integrable sobre estas variedades. El fenómeno recién descrito es el mismo que el que permite la existencia de agujeros negros estables en AdS explicado en el párrafo anterior.

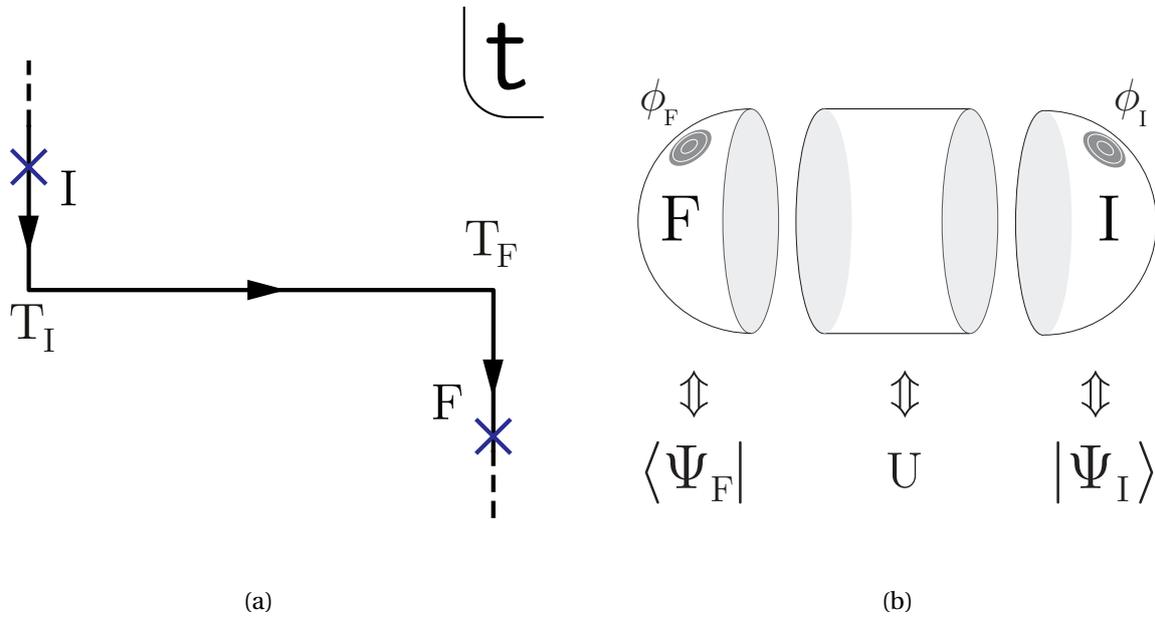


Figura 5.1: a) trayecto In-Out SK que representa un experimento de dispersión. La pieza (horizontal) lorentziana describe la evolución del sistema mientras que las piezas (verticales) euclidianas I/F, con cruces azules que denotan inserciones de operadores locales, preparan excitantes estados iniciales y finales a veces $T_{I/F}$. (b) La doble descripción semi-clásica del mismo problema llena el contorno del tiempo con colectores AdS euclidianos y lorentzianos. Las fuentes de los segmentos euclidianos generan estados de excitación holográfica.

Por último, recordamos también de la Sec. 2.2 que trabajaremos mayormente sobre una geometría BTZ, que si bien comparte muchos aspectos de las soluciones de un AN, es un espacio localmente AdS_{2+1} con una singularidad cónica en el origen. Como consecuencia de esto algunos correladores entre ambos espacios estarán relacionados por una doble rotación de Wick [13]. Sin embargo, la estructura del camino cerrado SK hará que no todos elementos de la matriz de correladores estén conectados de esta forma. La solución BTZ nos permitirá en el caso concreto de la propagación de un campo escalar, estudiar las soluciones de forma analítica permitiendo obtener entonces expresiones cerradas para los correladores de la teoría CFT dual así como también para los autovalores de los estados excitados holográficos en su límite semiclásico (3.5.1). Esta geometría permitirá entonces entender el tratamiento de estas cantidades para ejemplos de mayor número de dimensiones. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que la información que puede extraerse de un agujero negro BTZ extrapolable directamente a casos de mayor dimensionalidad es acotada, como puede verse en el estudio de sus geodésicas, por ejemplo en [54, 55].

5.2. Estados excitados en caminos cerrados

En esta sección comentamos acerca de las particularidades que surgen a la hora de tratar caminos cerrados de SK en la prescripción SvR y en particular de extender la noción de estados excitados holográficos también sobre los mismos. En particular, la extensión de la prescripción SvR será inmediata para cualquier camino de SK en general, mientras que una descripción acabada de los estados excitados se favorece de una elección particular de camino.

Para esto, revisamos algunos de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores. Esto ayudará a la claridad conceptual y a la comodidad del lector a la hora de comparar con las expresiones del final de esta misma sección extendidas a caminos cerrados y en particular cuando incorporemos la interpretación TFD.

La prescripción holográfica SvR puede resumirse en fórmula (3.4.2),

$$Z_{CFT}[\phi(\mathcal{C})] = Z_{grav}[\Phi|_{\partial} = \phi(\mathcal{C})] \quad (5.2.1)$$

donde el lado izquierdo es la función generatriz para las funciones de correlación de los operadores CFT \mathcal{O} con las fuentes $\phi(\mathcal{C})$ con soporte en un camino SK \mathcal{C} en el plano t del complejo. El lado derecho es

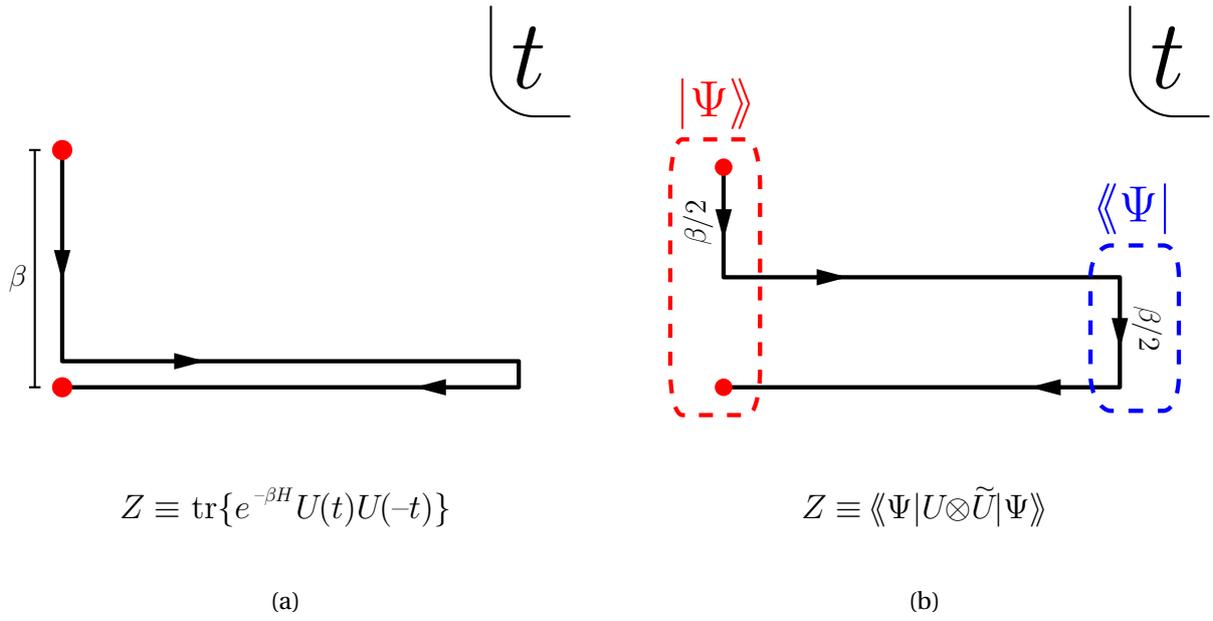


Figura 5.2: Se ilustran dos caminos térmicos. El segundo aprovecha la interpretación TFD para reescribir la función de partición como un producto interno.

la función de partición para el campo bulk Φ , dual a \mathcal{O} , en un espaciotiempo asintóticamente AdS con condiciones de contorno asintóticas para los campos $\phi(\mathcal{C})$. En el caso del camino In-Out, estudiado en profundidad en el capítulo anterior la prescripción anterior toma la forma explícita

$$\langle \Psi_{\phi_+} | T \{ e^{-i \int \mathcal{O} \phi_L} \} | \Psi_{\phi_-} \rangle = \sum_{\phi_{\Sigma^\pm}} (\Psi_{\phi_+}[\phi_{\Sigma^+}])^* Z[\phi_L; \phi_{\Sigma^-}, \phi_{\Sigma^+}] \Psi_{\phi_-}[\phi_{\Sigma^-}], \quad (5.2.2)$$

donde $T \{ e^{-i \int \mathcal{O} \phi_L} \}$ es la evolución en tiempo real del sistema deformado con un operador de traza simple en el esquema de interacción $\mathcal{O}(x)$, convolucionado por una fuente arbitraria dependiente del tiempo $\phi(x)$. En el límite semiclásico del lado de gravedad:

$$Z_{CFT}[\phi(\mathcal{C}_O)] = \langle \Psi_{\phi_+} | T \{ e^{-i \int \mathcal{O} \phi_L} \} | \Psi_{\phi_-} \rangle \approx e^{-i S^0[\phi(\mathcal{C}_O)]}, \quad (5.2.3)$$

donde $-i S^0$ es notación compacta para la acción en la capa de masa de la variedad dual de signatura cambiante estudiada en la Sec. 4.1. En virtud de que cada pegado es independiente, en la Sec. 3.5, se logró interpretar las regiones Euclídeas en estos caminos como estados iniciales y finales, excitados siempre que las fuentes asintóticas en estos se mantuviesen encendidas,

$$|\Psi_\phi\rangle = \mathcal{D} e^{-\int_{\tau < 0} d\tau \mathcal{O}(\mathbf{x}, \tau) \phi(\mathbf{x}, \tau)} |0\rangle, \quad \langle \phi_\Sigma | \Psi_\phi \rangle = \Psi_\phi(\phi_\Sigma) = \int [\mathcal{D}\Phi]_{(\phi_\Sigma, \phi)} e^{-S_E[\Phi]}, \quad (5.2.4)$$

Los estados (5.2.4) son holográficos en el sentido de que corresponden a duales geométricos bien definidos en [113, 89, 80, 114]. Los estados del espacio de Hilbert dual (bra) pueden construirse según el mapa $\phi(\tau) \rightarrow \phi(-\tau) \equiv \phi^*(\tau)$ [91]. En el límite semiclásico, (5.2.4) pueden escribirse como estados coherentes

$$|\Psi_\phi\rangle \sim e^{\lambda_k a_k^\dagger} |0\rangle. \quad (5.2.5)$$

El punto central de este resumen es que la independencia de los pegados y el ordenamiento temporal en caminos SK abiertos nos permitieron separar las contribuciones Euclídeas asociándolas inmediatamente con estados iniciales/finales. La construcción se resume en la Fig. 5.1.

5.2.1. Caminos cerrados

La construcción SvR como tal es inmediata de extender al caso de caminos cerrados [13], i.e.

$$Z_{CFT} = \text{Tr} U[\phi] \equiv \oint [\mathcal{D}\Phi]_\phi e^{-i S[\Phi]} \quad U[\phi] \equiv \mathcal{D} e^{-i \int_{\mathcal{C}} d\theta (H + \mathcal{O} \phi(\theta))}, \quad (5.2.6)$$

donde el operador U es notación compacta para el operador evolución definido sobre un camino SK cerrado, se usó θ como la variable que parametriza el camino cerrado. El hecho de que el camino sea cerrado se manifiesta en que se toma la traza de U . Recordar que este formalismo de integrales de camino sobre caminos cerrados ya no tiene un solo propagador dado por el orden del camino si no una matriz de propagadores que dan información sobre todas las formas de llegar de un punto a otro del camino. La importancia de este comentario es la siguiente: en un camino cerrado general, ya no hay una noción clara de pasado y futuro y por ende tampoco de estado inicial ni final. Es natural suponer que el encendido de fuentes sobre las regiones Euclídeas del camino llevarán a estados fuera del equilibrio. El desafío en este contexto será dar una descripción más precisa de estas excitaciones.

Como se mostró en la Sec. 2.1.1, (5.2.6) es suficiente para el cálculo de observables de sistemas definidos sobre cualquier estado dado por una matriz densidad ρ . Para caminos a temperatura finita β^{-1} , también se mostró que el problema entero puede ser puesto en términos de un camino de SK cuya evolución total Euclídea sea β , aunque de estos había una familia monoparamétrica de caminos equivalentes, con parámetro $\sigma \in [0, \beta]$. Solo los casos $\sigma = 0$ o $\sigma = \beta$ tenían una interpretación clara en términos de un sistema puesto en contacto con un baño térmico. Sin embargo, el camino $\sigma = \beta/2$ mostró la ventaja de tener una matriz de propagadores simétrica y un mapa completo al formalismo TFD, que sí posee una noción de estado inicial y final. El camino se muestra en la Fig. 5.2.

Siguiendo entonces las herramientas introducidas en la Sec. 2.1.2, reescribiremos (5.2.6) para el camino de la Fig. 5.2

$$Z_{CFT} = \langle\langle \Psi_F | \mathbb{U}(\Delta T) | \Psi_I \rangle\rangle \equiv \oint [\mathcal{D}\Phi]_\phi e^{-iS[\Phi]}, \quad (5.2.7)$$

donde el lado de gravedad admite también una división

$$\int \mathcal{D}[\Phi]_\phi e^{-iS[\Phi]} = \sum_{\phi_\Sigma(T_I), \phi_\Sigma(T_F)} \left(\int_{\phi_\Sigma(T_F)} \mathcal{D}[\Phi]_{\phi_F} e^{-S[\Phi]} \right) \left(\int_{\phi_\Sigma(T_I)}^{\phi_\Sigma(T_F)} \mathcal{D}[\Phi]_{\phi_L, \phi_R} e^{-iS[\Phi]} \right) \left(\int^{\phi_\Sigma(T_I)} \mathcal{D}[\Phi]_{\phi_I} e^{-S[\Phi]} \right). \quad (5.2.8)$$

Esta última expresión del lado de gravedad es central para nuestros objetivos y su notación e implicaciones presentaremos a continuación. El punto clave de la división entre las regiones es que los segmentos Euclídeos ya no se interpretan como una evolución en un segmento entre dos estados para un espacio de Hilbert \mathcal{H} , $\langle n|U|m \rangle$, si no como un estado entrelazado ($\langle n| \otimes \langle m| \Psi \rangle$) de una teoría $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, en acuerdo con la interpretación TFD del camino del lado de campos. Esta construcción está contenida en la Fig. 5.3.

En la Sec: 2.1.2 se demostró que los estados creados con fuentes Euclídeas apagadas eran el estado de vacío TFD que podían interpretarse nuevamente como evoluciones Euclídeas,

$$Z_\beta^{\frac{1}{2}} |\Psi_0\rangle\rangle = \sum_n e^{-\frac{\beta}{2} E_n} |n\rangle \otimes |\bar{n}\rangle = U(-i\beta/2) \otimes \mathbb{1} |\mathbb{0}\rangle\rangle = \mathbb{1} \otimes \tilde{U}(+i\beta/2) |\mathbb{0}\rangle\rangle. \quad (5.2.9)$$

En términos de una evolución con fuentes entonces, el estado obtenido será

$$Z_\beta^{\frac{1}{2}} |\Psi_\phi\rangle\rangle = U_\phi(-i\beta/2) \otimes \mathbb{1} |\mathbb{0}\rangle\rangle \quad (5.2.10)$$

En términos de los GDL de la teoría de gravedad,

$$Z_\beta^{\frac{1}{2}} \langle\langle \phi_\Sigma | \Psi_0 \rangle\rangle \equiv \int^{\phi_\Sigma(T_I)} \mathcal{D}[\Phi]_{\phi_I} e^{-S[\Phi]}. \quad (5.2.11)$$

En este nuevo lenguaje las ecuaciones (5.2.7) y (5.2.8) pueden entenderse como el análogo a T finita de (3.5.3) para dos estados holográficos, que nos permitió separar cada región del camino para asociarle un significado concreto en sí mismo. Esta correspondencia entre segmentos de caminos SK y objetos/geometrías del espacio del Hilbert, lo llamamos holografía por partes o por piezas [79]. En lo sucesivo, no tendremos en cuenta la normalización $Z_\beta^{\frac{1}{2}}$. Comprobaremos que esta definición vuelve a admitir la regla de conjugación de Jackiw $\phi(\tau) \rightarrow \phi(-\tau) \equiv \phi^*(\tau)$ para los objetos del espacio de Hilbert dual.

La suma sobre $\phi_\Sigma(T_I)$, $\phi_\Sigma(T_F)$ en (5.2.8) es entonces sobre las configuraciones de campo que dividen las regiones que definen el estado inicial y final del sistema, i.e. el tercer y primer paréntesis respectivamente (ver (5.2.11)) y la evolución física del sistema, ahora definida sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$

$$\mathbb{U}(\Delta T) = U(\Delta T) \otimes \tilde{U}(\Delta T) \equiv \int_{\phi_\Sigma(T_I)}^{\phi_\Sigma(T_F)} \mathcal{D}[\Phi]_{\phi_L, \phi_R} e^{-iS_L[\Phi] + iS_R[\Phi]}. \quad (5.2.12)$$

Lo que completa el mapa entre los objetos definidos en el formalismo TFD y la prescripción SvR y estados excitados holográficos sobre caminos cerrados. Notar que hemos recuperado en esta notación un proceso de dispersión análogo al de In-Out, ver Fig. 5.4.

Nos gustaría concluir esta sección escribiendo la prescripción holográfica (5.2.7) en el límite semiclásico de gravedad,

$$\langle\langle\Psi_F|e^{-i\int(\mathcal{O}_L\phi_L-\mathcal{O}_R\phi_R)}|\Psi_I\rangle\rangle\approx e^{-S_{AdS}[\phi(\mathcal{C})]}+e^{-S_{BH}[\phi(\mathcal{C})]} \quad (5.2.13)$$

donde hemos hecho explícito que existen dos soluciones para este camino. En los casos de interés de $\beta \gg \beta_C$ y $\beta \ll \beta_C$, solo uno de los términos de la derecha es relevante. Dado que estudiamos los estados excitados en el régimen perturbativo, sería inconsistente pensar que estos pueden generar una transición de fase gravitatoria al modificar la energía de la configuración. Luego, nos mantenemos lejos de la transición para evitar inconsistencias.

Recordamos en este punto al lector lo que se espera de los correladores para el camino Térmico $\sigma = \beta/2$ en lenguaje TFD, extendiendo a teoría de campos los resultados de (2.1.33),

$$-i\frac{\delta^2\ln Z_{CFT}}{\delta\phi_l\delta\phi_l'}\equiv\int d^d k e^{-ik(x-y)}\langle\langle\Psi_0|\begin{pmatrix}\mathcal{O}_L(k)\mathcal{O}_L(k) & \mathcal{O}_L(k)\mathcal{O}_R(k) \\ \mathcal{O}_R(k)\mathcal{O}_L(k) & \mathcal{O}_R(k)\mathcal{O}_R(k)\end{pmatrix}|\Psi_0\rangle\rangle, \quad (5.2.14)$$

donde los elementos de la matriz son

$$\langle\langle\Psi_0|\mathcal{O}_L(k)\mathcal{O}_L(k)|\Psi_0\rangle\rangle=\frac{e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega}-1}G_R(k)-\frac{1}{e^{\beta\omega}-1}G_A(k), \quad (5.2.15)$$

$$\langle\langle\Psi_0|\mathcal{O}_R(k)\mathcal{O}_L(k)|\Psi_0\rangle\rangle=2\frac{e^{\beta\omega/2}}{e^{\beta\omega}-1}(G_A(k)-G_R(k))=\langle\langle\Psi_0|\mathcal{O}_L(k)\mathcal{O}_R(k)|\Psi_0\rangle\rangle, \quad (5.2.16)$$

$$\langle\langle\Psi_0|\mathcal{O}_R(k)\mathcal{O}_R(k)|\Psi_0\rangle\rangle=\frac{1}{e^{\beta\omega}-1}G_R(k)-\frac{e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega}-1}G_A(k).$$

En las expresiones anteriores, $G_{R/A}(k)$ representan la transformada de Fourier de los propagadores retardados y avanzados de la teoría, analítica en la mitad superior e inferior del plano complejo $\omega \equiv k^0$. La propiedad simétrica de la matriz es consecuencia de que las dos piezas euclidianas tienen una longitud igual a $\beta/2$. Estos son los resultados para el estado de vacío que deberán ser reproducidos por cualquier candidato a dual geométrico del camino.

Un comentario al respecto de los caminos Térmicos $\sigma \neq \beta/2$. Una vez definida la factorización (5.2.7) y (5.2.8), uno puede imponer definiciones de bra, ket y evolución del sistema sobre los objetos análogos deformados para cada caso. Si bien a este nivel no parece haber grandes diferencias, se verá que esto requiere un mapa más complejo con fases complejas entre bra y ket relacionadas con el déficit $(\sigma - \beta/2)$ [35] y propiedades de analiticidad y pegado especiales para los duales holográficos. Si bien los observables de la teoría no dependerán nunca de este déficit, el caso no simétrico implica una dependencia extra en un parámetro que no es físico. Con esto se quiere enfatizar que la factorización (5.2.8) no es privativa del caso $\sigma \neq \beta/2$, pero sí lo es la sencillez de su interpretación física. Una vez establecida esta, la extensión al caso no simétrico es directa aunque complicada en sus reglas.

En lo que resta del capítulo, nos avocaremos al estudio del camino Térmico $\sigma = \beta/2$. En primer lugar, construiremos el dual holográfico del mismo, que consiste en 2 geometrías que dominan cada una según el sistema esté por encima o por debajo de la temperatura crítica de Hawking-Page. La más interesante de estas es la que domina a altas temperaturas que fue parte del trabajo original de esta tesis, publicado en [78]. Construida y descrita esta solución, describiremos la propagación de un campo escalar sobre el mismo, emulando los ejemplos a $T = 0$ del capítulo anterior, con el objetivo de estudiar la naturaleza de los estados excitados definidos por (5.2.11), también trabajo original de este trabajo y publicado en [79].

5.3. Construcción de la geometría y pegado

En esta sección, construiremos el dual holográfico para el camino de la Fig. 5.2(a). Como ya comentamos antes y se hizo explícito en (5.2.13), existen dos soluciones de la teoría de gravedad que cumplen con las condiciones de contorno impuestas por el camino Térmico $\sigma = \beta/2$. Sin embargo, llamaremos dual holográfico en singular a ambas geometrías, dado que solo con ambas se da una descripción completa de la fenomenología del caso para todas las temperaturas.

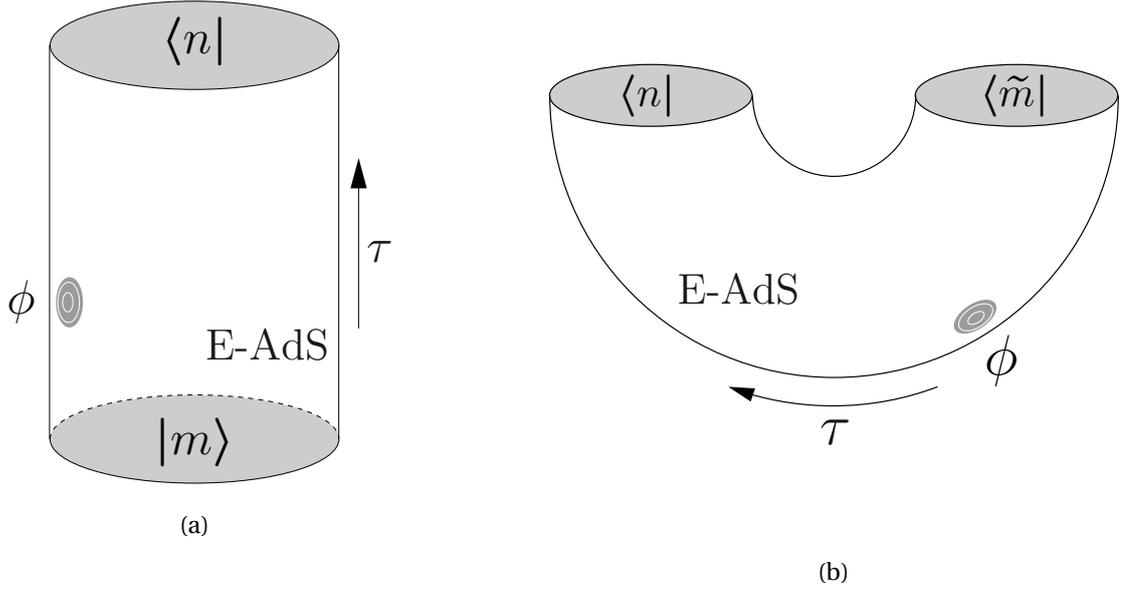


Figura 5.3: (a) Una pieza de la evolución euclídea representada como el elemento de la matriz $\langle n | \rho_\phi | m \rangle$ de la matriz de densidad ρ_ϕ . (b) El mismo objeto puede entenderse también como el coeficiente $(\langle n | \otimes \langle \tilde{m} | | \Psi_\phi \rangle)$ de un ket $|\Psi_\phi\rangle$ definido en el espacio TFD Hilbert $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$.

Caso $\beta \ll \beta_C$: AdS Térmico

Comenzaremos por describir la geometría dominante a bajas temperaturas, que se denomina AdS Térmico. La geometría se compone de segmentos de AdS y H puros pero siempre de regiones de extensión t, τ finita. Con esto, la topología descrita por los espacios H ya no son medias esferas como en el caso de los segmentos semi-infinitos del capítulo anterior, si no que describen cilindros al igual que AdS. Las métricas son nuevamente

$$ds_{AdS}^2 = -(1+r^2) dt^2 + \frac{dr^2}{(1+r^2)} + r^2 d\phi^2, \quad ds_H^2 = +(1+r^2) d\tau^2 + \frac{dr^2}{(1+r^2)} + r^2 d\phi^2, \quad (5.3.1)$$

donde hemos escrito el caso de AdS_{2+1} para empalmar mejor con la construcción a altas temperaturas que se hará también en $d+1 = 2+1$, aunque esta geometría sí es inmediato extenderla. El camino Térmico requiere considerar dos segmentos Lorentzianos $t \in [-T/2, T/2]$ y dos segmentos Euclídeos $\tau \in [-\beta/2, 0]$ y $\tau \in [0, \beta/2]$. La parametrización de estos últimos permite incorporar la conjugación de Jackiw $\tau \rightarrow -\tau$ a este camino sin modificaciones. El pegado de estas geometrías se sigue de los pegados hechos en todos los ejemplos del capítulo anterior: las métricas inducidas sobre las superficies t, τ constante son iguales y lo mismo las curvaturas extrínsecas, que se anulan idénticamente. La geometría resultante es un toro de signatura cambiante, que se muestra en la Fig. 5.5(a). Las condiciones de pegado de los campos escalares que se propagan sobre la misma son naturalmente compartidas por ambas soluciones y las presentamos al final de esta sección. Dada la simplicidad de esta geometría, postergaremos su análisis a la Sec. 5.6, donde mayormente enunciaremos los resultados del mismo.

Caso $\beta \gg \beta_C$: BTZ

En esta sección describimos en detalle la construcción de la geometría dual a la trayectoria SK mostrada en la Fig. 5.2(b), representada en la Fig. 5.5(b). Definiremos las coordenadas con las que trabajaremos y nos encargaremos de las condiciones de pegado entre las diferentes regiones. Trabajaremos en dimensiones de $2+1$ para facilitar el cálculo, pero toda la construcción sigue directamente los ejemplos de dimensiones más altas.

La geometría se construye a partir de los exteriores L y R de un agujero negro en AdS maximalmente extendido y dos regiones Euclídeas análogas, como se muestra en la Fig.5.6. Las dos piezas euclidianas están

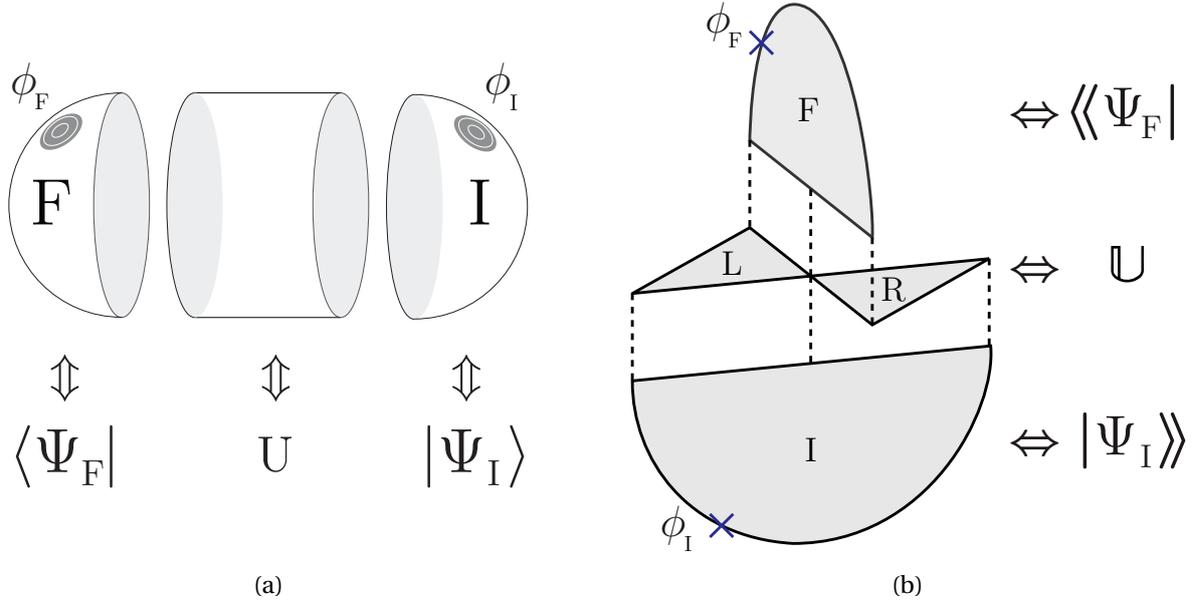


Figura 5.4: Las variedades de signatura compleja se pueden dividir y estudiar por partes. Cada pieza euclidiana corresponde a una preparación de estado, mientras que las piezas lorentzanas describen la evolución en tiempo real del sistema. (a) muestra el mapa a temperatura cero, mientras que (b) representa el mapa a temperatura finita.

pegadas a las superficies constantes de t (líneas rojas en la Fig. 5.6(a)) situadas en $t = T_{\pm}$ según el tiempo exterior extendido como en (2.2.31). Recordamos de la Sec. 2.2 que las métricas estándar para el agujero negro de BTZ son ($R_{AdS} \equiv 1$)

$$ds^2 = -(r^2 - r_S^2) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 - r_S^2} + r^2 d\varphi^2 \quad \text{and} \quad ds^2 = (r^2 - r_S^2) d\tau^2 + \frac{dr^2}{r^2 - r_S^2} + r^2 d\varphi^2, \quad (5.3.2)$$

en la signatura Lorentziana y Euclidiana respectivamente. En estas métricas, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \sim \varphi + 2\pi$ y $\tau \sim \tau + \beta$ con $\beta = T^{-1} = 2\pi/r_S$. Reescalando las coordenadas como

$$r \rightarrow r_S r, \quad t \rightarrow \frac{t}{r_S}, \quad \tau \rightarrow \frac{\tau}{r_S}, \quad \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{r_S}, \quad (5.3.3)$$

las métricas (2.2.24) se escriben

$$ds^2 = -(r^2 - 1) dt^2 + \frac{dr^2}{(r^2 - 1)} + r^2 d\varphi^2 \quad ds^2 = (r^2 - 1) d\tau^2 + \frac{dr^2}{(r^2 - 1)} + r^2 d\varphi^2 \quad (5.3.4)$$

con $\tau \sim \tau + 2\pi$ y la temperatura de BH absorbida en la periodicidad angular $\varphi \sim \varphi + 2\pi r_S$. Trabajaremos con las métricas (5.3.4) a lo largo de este apartado.

Un interés particular de los autores de [78] en encontrar un dual a altas temperaturas para este camino era que SvR en su trabajo original [13, 120] recurren a otro camino y variedad más compleja con un conjunto supernumerario de bordes holográficos respecto de los de la teoría SK original y que requiere de un pegado dentro del horizonte. A criterio de los autores, este camino no era radicalmente distinto de los casos a $T = 0$ y debía haber una geometría más sencilla que pudiera reproducir (5.2.15). Desde un punto de vista general, será siempre más sencillo buscar correcciones $1/N$ holográficas a la geometría dual más sencilla y con menos regiones.

Condiciones de continuidad

Ahora demostramos que nuestra geometría cumple con las condiciones de pegado adecuadas de \mathcal{C}^1 , es decir, la continuidad de la curvatura métrica y extrínseca a través de superficies de tiempo constante. Las métricas inducidas sobre cualquier superficie Σ de tiempo constante de signatura Lorentziana y Euclídea

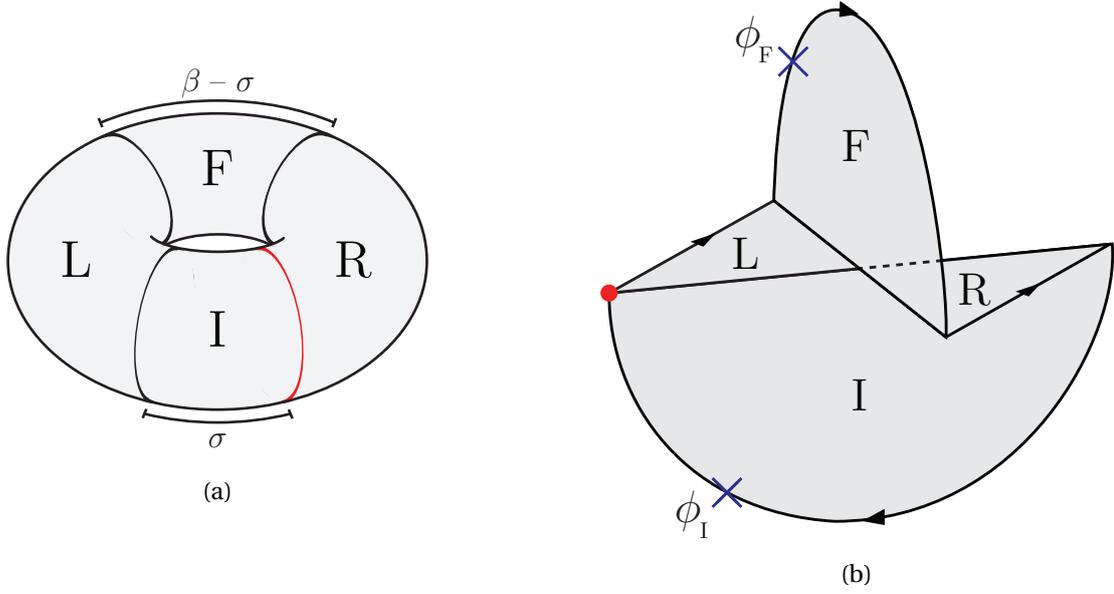


Figura 5.5: Duales holográficos para el camino Térmico $\beta/2$ a baja y alta temperatura respectivamente.

coinciden y, por lo tanto, se pueden pegar de forma continua. La estaticidad del espaciotiempo garantiza que esto se puede hacer en cualquier¹ superficie de t y τ . La continuidad del momento conjugado de la métrica es equivalente a la continuidad de la demanda de las curvaturas extrínsecas $K_{\mu\nu}$ a través de la superficie de pegado [13]. Explícitamente,

$$K_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \mathcal{L}_n P_{\mu\nu} = \frac{1}{2} n^\alpha \partial_\alpha (g_{\mu\nu} - n^2 n_\mu n_\nu) + \partial_\mu (n^\alpha) (g_{\alpha\nu} - n^2 n_\alpha n_\nu) \quad (5.3.5)$$

donde $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n^2 n_\mu n_\nu$ es la primera forma fundamental de una hipersuperficie con una superficie normal n^μ . En el presente caso, el vector temporal unitario es $n^\mu \equiv \delta_0^\mu (r^2 - 1)^{-1/2}$. El primer término en (5.3.5) desaparece debido a la estaticidad mientras que el segundo da

$$K_{\mu\nu} = \partial_\mu (n^\alpha) (g_{\alpha\nu} - n^2 n_\alpha n_\nu) = \delta_\mu^r \left(\frac{-r}{(r^2 - 1)^{3/2}} \right) (g_{0\nu} - n^2 n_0 n_\nu) = \delta_\mu^r \delta_\nu^0 \left(\frac{-r}{(r^2 - 1)^{3/2}} \right) P_{00} = 0 \quad (5.3.6)$$

que resulta de $P_{00} = 0$. La expresión anterior muestra la continuidad de la métrica de \mathcal{C}^1 a través de las superficies de pegado de Σ_t y Σ_τ . El punto $r = 1$ no muestra ninguna patología especial, como $\lim_{r \rightarrow 1} K_{\mu\nu} = 0$.

Cabe destacar que las secciones L y R, representadas en la Fig. 5.6, están conectadas a través del agujero de gusano, situado a $r = 1$, como en la extensión estándar de Kruskal. Este pegado es una suposición natural para evitar condiciones de contorno a $r = 1$ cuando se resuelve para el campo bulk. Esta conexión se hará manifiesta cuando estudiemos la propagación de los campos sobre esta geometría y será también de gran importancia en la interpretación de los estados excitados. El resultado final de la construcción es la geometría representada en la Fig. 5.5(b).

Ahora discutimos las condiciones de contorno en los campos definidos en esta geometría. Éstos se derivan directamente de la aproximación del punto de ensilladura como en (5.2.13) y pueden entenderse como un pegado de los campos de \mathcal{C}^1 , es decir, campo continuo e momento conjugado, a través de las hipersuperficies Σ que unen las piezas de la camino SK. Los signos explícitos en las condiciones de pegado, específicamente en el momento conjugado, dependen de la parametrización temporal de cada región. Nuestra elección se muestra en la Fig. 5.6(a) y lleva a

$$\begin{aligned} \Phi_L &= \Phi_I, & -i\partial_t \Phi_L &= \partial_\tau \Phi_I, & \text{en } t = T_I, \tau = 0 \\ \Phi_L &= \Phi_F, & -i\partial_t \Phi_L &= \partial_\tau \Phi_F, & \text{en } t = T_F, \tau = 0 \\ \Phi_R &= \Phi_I, & -i\partial_t \Phi_R &= \partial_\tau \Phi_I, & \text{en } t = T_I, \tau = -\pi \\ \Phi_R &= \Phi_F, & -i\partial_t \Phi_R &= \partial_\tau \Phi_F, & \text{en } t = T_F, \tau = \pi \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

¹Escribiendo métricas en coordenadas de Kruskal se puede comprobar la continuidad en superficies de $u = 0$ y $v = 0$, es decir, en el límite de $t \rightarrow \infty$.

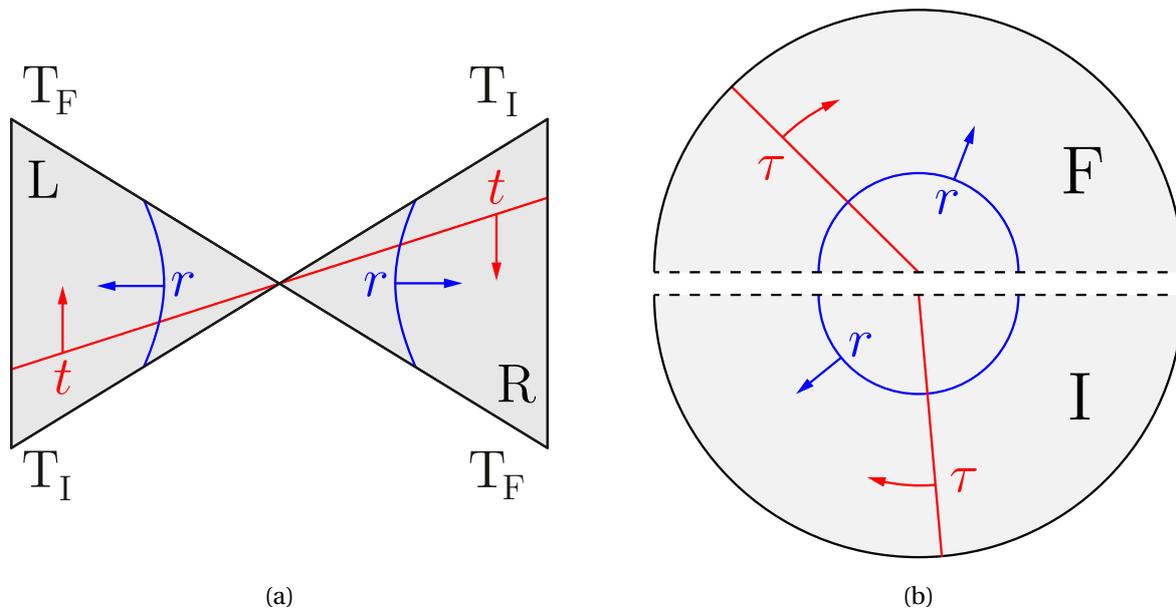


Figura 5.6: (a) Parches estáticos del AdS-BH con superficies t, r constantes representadas. El tiempo corre hacia arriba en la cuña izquierda (L) y hacia abajo en la cuña derecha (R). La variable angular φ en 2.2.26 ha sido suprimida. (b) Euclides AdS-BH: el tiempo se convierte en una variable angular. Las dos piezas son idénticas y su extensión temporal es $\beta/2$.

Referimos al lector a [13, 63] para cálculos explícitos en varios ejemplos. Observe que la coordenada de tiempo en R es opuesta al orden de las trayectorias. Esto está de acuerdo con la interpretación del TFD de los GDL en R como el dual CPT de los de la región L.

Descrita y presentada la geometría, volvemos sobre la expresión (5.2.8) para presentar en la Fig. 5.4 la analogía entre el Camino In-Out y el camino Térmico $\sigma = \beta/2$ en virtud de la interpretación TFD del mismo. Veremos que gracias a esto podremos dar una interpretación cerrada de las excitaciones holográficas en este nuevo sistema a $T \neq 0$.

Evolución temporal en TFD

Antes de pasar directo al estudio de la propagación de los campos en la geometría de la Fig. 5.5(a), comentaremos acerca de la forma en que se realiza la evolución TFD en la misma y sobre otras que son quizás más estándar en la bibliografía.

La interpretación TFD en holografía fue introducida por Maldacena en [56], asociando medio agujero BTZ Euclídeo al estado de vacío de TFD. En aquel trabajo, el autor quería estudiar propiedades del interior de un agujero negro, considerando como región de evolución física del sistema la mitad superior de un agujero negro maximalmente extendido como se muestra en la Fig. 5.7(a). Notar que esta región incluye el interior del agujero negro y la singularidad. Esto implícitamente impone en la región Lorentziana una evolución dada por un operador tiempo global tipo Kruskal ∂_T según un Hamiltoniano $H_T = H_L + H_R$, donde H_R y H_L son los Hamiltonianos de la región derecha e izquierda de cada región exterior del agujero negro [56, 115]. El estado inicial TFD para este estudio es solamente una construcción para proveer un estado inicial al sistema. En este contexto, notar que el estado TFD no es el vacío del Hamiltoniano según el que se lo hace evolucionar,

$$e^{-i(H_L+H_R)t}|\Psi_0\rangle\rangle = \sum_n e^{-2iE_n t} e^{-\frac{\beta}{2}E_i} |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle \neq |\Psi_0\rangle\rangle. \quad (5.3.8)$$

Nuestra geometría, por el contrario, provee un estado inicial en TFD y continúa con una evolución también globalmente extendida, excepto sobre el horizonte, según ∂_t de (2.2.31), que impone una evolución según $H_t = H_L - H_R$. Es conocido en la literatura que en términos de las coordenadas de Kruskal, el vector ∂_t representa una transformación de boost y produce una evolución tipo ventilador, como se muestra en la Fig. 5.6(a). Es importante notar que esta evolución no permite ingresar a las regiones detrás del horizonte, como se muestra en la Fig. 5.7(b). Esta será la evolución temporal de interés en este capítulo, ante la cual el

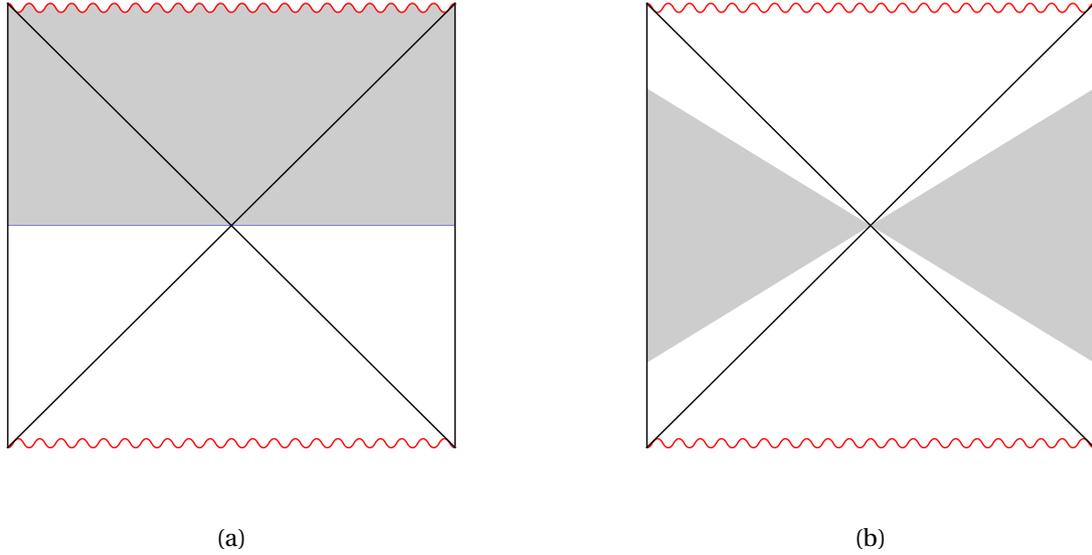


Figura 5.7: (a) En gris, región del BH maximalmente extendido tomada en [56]. (b) Para nuestro trabajo [78, 79], solo el exterior del BH es relevante.

estado TFD sí es invariante por construcción,

$$e^{-i(H_L - H_R)t} |\Psi_0\rangle\rangle = |\Psi_0\rangle\rangle. \quad (5.3.9)$$

Esta distinción permite también recordar que la relación entre estos tiempos es de todas formas relevante en tanto la buena definición global de energía requiere del tiempo ∂_T . Los modos normalizables de energía positiva en ∂_T se descomponen en los tiempos locales L y R en ∂_t como combinaciones de modos de energía positiva y negativa mediante la transformación de Bogoliubov introducida en la Sec. 2.1.2. Esto implica que los estados de vacío de ambas cuantizaciones son diferentes y da lugar al efecto Unruh. Esto será útil y se manifestará al cuantizar canónicamente los campos sobre nuestra geometría.

5.4. Campo escalar: BTZ

En esta sección se construyen las soluciones clásicas a un campo escalar masivo en una geometría de agujero negro BTZ presentada en la Sec. 5.3 y se estudian las excitaciones holográficas sobre el mismo.

El problema es más rico que el caso AdS térmico debido a que las regiones L y R se encuentran conectadas por un agujero de ER. Las condiciones de pegado de la prescripción SvR no deberán contradecir el pegado entre las regiones lorentzianas a través del agujero de gusano. Esto será un aspecto interesante a discutir: la geometría de agujero negro maximalmente extendido estándar impone unas condiciones entre estos campos que parece corresponder con un único camino de SK (el simétrico) de toda la familia $\sigma \neq 0$. Una generalización adecuada de las condiciones sobre la garganta del AN, induciendo una discontinuidad en la definición del vector ∂_t sobre la misma, permite obtener una geometría dual para toda la familia de caminos. No discutiremos este punto en profundidad en este trabajo.

Un detalle técnico pero importante es que trabajaremos directamente sin regularizar el borde asintótico, como en la Sec. 3.3.1. Como fue explicado en detalle en la Sec. 4.1 y en el Ap. A, este procedimiento permite obtener integrales de momento más sencillas al precio de obtener una función de 2 puntos con una normalización global tal que incumple las identidades de Ward. Dado que el factor de corrección es conocido y común para cualquier espacio asintóticamente AdS, se opta por este método. La normalización adecuada de la función de dos puntos se acomoda a posteriori sobre el resultado final, de acuerdo a [65].

La interpretación operatorial necesaria para caracterizar los estados excitados impone el cálculo de coeficientes de Bogoliubov. Físicamente, las excitaciones generadas por fuentes Euclídeas no corresponden puramente a excitaciones del sistema L o R por separado si no a una combinación precisa de estas.

A medida que el número de regiones y fuentes crece, las soluciones de los campos se vuelve más tediosa en notación aunque no más compleja, puesto que la linealidad del problema (libre) hace que pueda resolverse prendiendo una fuente a la vez y sumando para cada caso. Con el fin de clarificar el análisis, primero se obtiene la solución con fuentes Lorentzianas que permiten obtener los correladores y chequear que la causalidad del problema holográfico se corresponde con la que se conoce del problema original en la CFT. Este estudio es original de esta tesis y fue publicado en [78]. Hecho esto se construye la solución con fuentes euclidianas que llevan al estudio específico de los estados excitados. Esto también es una contribución original de esta tesis y fue publicado en [79].

5.4.1. Fuentes Lorentzianas

En esta sección se construye la solución para un campo escalar masivo Φ con fuente ϕ_L en la región L. La solución para una fuente ϕ_R en R puede obtenerse de forma análoga y la linealidad del problema garantiza que la suma de estas soluciones hacen la solución general. La acción y EDM están dadas por

$$S[\Phi] = -\frac{1}{2} \int \sqrt{|g|} (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^2), \quad (\square - m^2) \Phi = 0, \quad (5.4.1)$$

sobre la métrica (2.2.26). El campo cumple $\Phi \sim r^{\Delta-2} \phi_L(t, \varphi)$ en $r \rightarrow \infty$ sobre L, donde $\Delta = d/2 + \sqrt{d/2 + m^2}$, $d = 2$, y $\Phi \rightarrow 0$ en $r \rightarrow \infty$ en las demás regiones. Expandiendo en ondas planas $\Phi = e^{-i\omega t + il\varphi} f(\omega, l, r)$, donde $r_S l \in \mathbb{Z}$, se obtiene (5.4.1)

$$f(\omega, l, r) \equiv \mathcal{N}_{\omega l \Delta} r^{-\Delta} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^{i\frac{\omega}{2}} {}_2F_1\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}i(\omega - l), \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}i(\omega + l); i\omega + 1; 1 - \frac{1}{r^2}\right), \quad (5.4.2)$$

$$\mathcal{N}_{\omega l \Delta} \equiv \frac{\Gamma\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{i}{2}(\omega - l)\right) \Gamma\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{i}{2}(\omega + l)\right)}{\Gamma(\Delta - 1) \Gamma(i\omega + 1)}.$$

El factor de normalización $\mathcal{N}_{\omega l \Delta}$ fija el coeficiente dominante en la expansión asintótica como²,

$$f(\omega, l, r) \approx r^{\Delta-2} + \dots + \alpha(\omega, l, \Delta) r^{-\Delta} [\ln(r^2) + \beta(\omega, l, \Delta) + \dots], \quad r \rightarrow \infty \quad (5.4.3)$$

$$\alpha_{\omega l \Delta} \equiv (-1)^{\Delta-1} \frac{\left(\frac{2-\Delta}{2} + \frac{i}{2}(\omega - l)\right)_{\Delta-1} \left(\frac{2-\Delta}{2} + \frac{i}{2}(\omega + l)\right)_{\Delta-1}}{(\Delta - 2)! (\Delta - 1)!}, \quad (5.4.4)$$

$$\beta_{\omega l \Delta} \equiv -\psi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{i}{2}(\omega - l)\right) - \psi\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{i}{2}(\omega + l)\right), \quad (5.4.5)$$

donde $(x)_y$ representan los símbolos de Pochhammer y $\psi(x)$ las funciones Digamma[61]. Es importante notar que el factor de normalización introduce polos simples en $\omega = \pm l + i(2n + \Delta)$, con $n \in \mathbb{N}$. Estos se grafican en Fig. 5.8(a). Notar que $f(\pm\omega, l, r)$ son analíticas en el semiplano inferior/superior respectivamente.

Contrario al caso de AdS puro, el agujero negro admite dos soluciones NN, linealmente independientes y regulares en el interior de la variedad: $e^{-i\omega t + il\varphi} f(\pm\omega, l, r)$. Estas soluciones son modos salientes y entrantes del horizonte respectivamente. La solución general sobre L se puede escribir como

$$\Phi_L(r, t, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2 r_S} \sum_l \int d\omega \int dt' d\varphi' e^{-i\omega(t-t') + il(\varphi-\varphi')} \phi_L(t', \varphi') [L_{\omega l}^+ f(\omega, l, r) + L_{\omega l}^- f(-\omega, k, r)], \quad (5.4.6)$$

con $\omega \in \mathbb{R}$. Para cumplir con la condición asintótica basta con que

$$L_{\omega l}^+ + L_{\omega l}^- = 1. \quad (5.4.7)$$

Esta parametrización de la solución en términos de $L_{\omega l}^\pm$ será conveniente para el pegado de la solución. El cociente $L_{\omega l}^+ / L_{\omega l}^-$ puede interpretarse como el peso relativo entre modos salientes y entrantes al horizontes

²Se recuerda al lector que el término $\ln(r^2)$ aparece solo para $\Delta \in \mathbb{N}$ y es de interés si uno llega a este modelo mediante compactificaciones de Kaluza Klein. Esto no es de interés para la presente discusión y se refiere al lector al Ap. A para ver cómo se tratan estos términos en al regularizar la acción en la capa de masa y a [8, 44] para una discusión más completa.

de la solución NN. Según la discusión al principio de este capítulo sobre las condiciones de contorno refractarias en el borde asintótico de AdS y la radiación de Hawking, se espera que ninguno de los coeficientes se anule, $L_{\omega l}^{\pm} \neq 0$.

Los modos N se pueden construir como $e^{-i\omega t + i l \varphi} [f(\omega, l, r) - f(-\omega, l, r)]$ como se puede comprobar de (5.4.3). Estos modos son los apropiados para expandir las soluciones en las regiones R, I y F

$$\Phi_R(r, t, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2 r_S} \sum_l \int d\omega e^{-i\omega t + i l \varphi} R_{\omega l} [f(\omega, l, r) - f(-\omega, l, r)] , \quad (5.4.8)$$

$$\Phi_F(r, \tau, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2 r_S} \sum_l \int d\omega e^{-\omega \tau + i l \varphi} F_{\omega l} [f(\omega, l, r) - f(-\omega, k, r)] , \quad (5.4.9)$$

$$\Phi_I(r, \tau, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2 r_S} \sum_l \int d\omega e^{-\omega \tau + i l \varphi} I_{\omega l} [f(\omega, l, r) - f(-\omega, k, r)] . \quad (5.4.10)$$

Dado que $\omega \in \mathbb{R}$, (5.4.9) y (5.4.10) parecen divergentes a altas frecuencias y sin embargo el pegado impondrá $I_{\omega l}$ y $F_{\omega l}$ tales que garantizarán la regularidad de la solución.

El pegado de la solución se presenta con detalle en la sección que sigue, donde habrá también fuentes euclidianas, para presentar a continuación los correladores. Imponiendo (5.3.7) en (5.4.6), (5.4.8)-(5.4.10), se obtiene

$$-L_{\omega l}^- \tilde{\phi}_L e^{-i\omega T/2} = F_{\omega l} , \quad F_{\omega l} e^{-\pi\omega} = R_{\omega l} e^{-i\omega T/2} , \quad R_{\omega l} e^{i\omega T/2} = I_{\omega l} e^{\pi\omega} , \quad I_{\omega l} = L_{\omega l}^+ e^{i\omega T/2} \tilde{\phi}_L \quad (5.4.11)$$

que en combinación con (5.4.7) da

$$L_{\omega l}^+ = \frac{-1}{e^{2\pi\omega} - 1} = -n_{\omega} , \quad L_{\omega l}^- = \frac{e^{2\pi\omega}}{e^{2\pi\omega} - 1} = 1 + n_{\omega} . \quad (5.4.12)$$

Los demás coeficientes se obtienen de (5.4.12) y (5.4.11). Antes de presentar los correladores, sin embargo, se mencionan aspectos relevantes de la solución.

Unicidad

Se demuestra ahora que no pueden agregarse modos normalizables a la solución encontrada. Se consideran modos N en todas las variedades, i.e.:

$$\Phi_L(r, t, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2 r_S} \sum_l \int d\omega e^{-i\omega t + i l \varphi} L_{\omega l} [f(\omega, l, r) - f(-\omega, k, r)] , \quad (5.4.13)$$

sobre L, (5.4.8)-(5.4.10) en R, I, F y se impone (5.3.7). De esto se obtiene

$$I_{\omega l} = e^{2\pi\omega} I_{\omega l} .$$

Esta condición sobre $I_{\omega l}$ se puede interpretar como una manifestación de la periodicidad de la geometría en $-i\beta$ sobre la solución³. Para ω arbitrario, impone $I_{\omega l} = 0$, salvo que $\omega = im$ con $m \in \mathbb{Z}$, en cuyo caso $I_{(im)l}$ no está restringido. Este juego de soluciones, sin embargo no son tampoco admisibles dado que rompen el decaimiento en $r \rightarrow \infty$: $f(im, l, r) = 0$ para $m > 0$. Se concluye que $I_{\omega l} = 0$, y por tanto trivial en toda la variedad, es la única solución posible en ausencia de fuentes.

Analiticidad

Se encontró la solución anterior resolviendo independientemente para las regiones L y R, Φ_L y Φ_R . El pegado (5.4.11) lleva a

$$R_{\omega l} = \tilde{\phi}_L L_{\omega l}^+ e^{\omega\pi} = -\tilde{\phi}_L L_{\omega l}^- e^{-\omega\pi} , \quad (5.4.14)$$

relacionando los coeficientes de L y R. Se recuerda que los factores $e^{\pm\omega\pi}$ no fueron impuestos a priori si no que son consecuencia directa de que tanto I como II tengan longitud³ $\beta/2$. Es un resultado conocido que estas relaciones son precisamente las que descomponen los modos globales del agujero negro máximamente

³Recordar que la temperatura fue absorbida en la periodicidad del ángulo, haciendo $\beta = 2\pi$ (ver (2.2.26)). Las periodicidades en tiempo euclidiano de 2π en nuestros resultados deben entenderse en unidades de β .

extendido en términos de los modos de cada lado L y R por separado [38]. Este resultado es importante: el camino simétrico $\beta/2$ de las regiones euclidianas en el agujero negro lleva a modos Lorentzianos analíticos en toda la variedad. La cuenta con otras longitudes de secciones euclidianas puede hacerse, pero la solución Lorentziana ya no se asocia directamente a un agujero negro maximalmente extendido. La analiticidad se puede recuperar si en lugar de pegar los lados a igual tiempo se impone un pegado en el horizonte desfasado en el tiempo, aunque una interpretación física de esto no es clara para el autor.

Regularidad

La expresión final para las soluciones euclidianas es

$$\begin{aligned}\Phi_F(r, \tau, \varphi) &= \frac{1}{4\pi^2 r_S} \sum_l \int d\omega e^{-\omega\tau + i l \varphi} \left(-\tilde{\phi}_L e^{-i\omega T/2} \frac{e^{2\pi\omega}}{e^{2\pi\omega} - 1} \right) [f(\omega, l, r) - f(-\omega, k, r)], \quad \tau \in (-\pi, 0) \\ \Phi_I(r, \tau, \varphi) &= \frac{1}{4\pi^2 r_S} \sum_l \int d\omega e^{-\omega\tau + i l \varphi} \left(-\tilde{\phi}_L e^{+i\omega T/2} \frac{1}{e^{2\pi\omega} - 1} \right) [f(\omega, l, r) - f(-\omega, k, r)], \quad \tau \in (0, \pi).\end{aligned}$$

Se comprueba que los coeficientes encontrados regulan satisfactoriamente el integrando para todas las frecuencias, validando el procedimiento.

5.4.2. Correladores

Se calculan los correladores para el límite de N grande en la teoría CFT dual y se comprueba que se obtienen los ordenamientos temporales adecuados. La acción en la capa de masa se construye como la suma de las cuatro regiones

$$-iS_{\mathcal{C}}^0 = -S_I^0 - iS_L^0 - S_F^0 + iS_R^0.$$

La aproximación semiclassical evalúa las acciones sobre la capa de masa, dejando solo los términos del borde asintótico de cada término. En ausencia de fuentes en las regiones Euclídeas las contribuciones de I y F se anulan y

$$-iS_{\mathcal{C}}^0[\phi_L, \phi_R] = -\frac{i}{2} \int_{\mathcal{C}} \sqrt{\gamma} \Phi n^\mu \partial_\mu \Phi = -\frac{i}{2} r^\Delta \left[\int_0^T dt d\varphi \phi_L(r \partial_r \Phi_L) - \int_0^T dt d\varphi \phi_R(r \partial_r \Phi_R) \right]_{r \rightarrow \infty}. \quad (5.4.15)$$

Reemplazando sobre (5.4.15) las soluciones encontradas se obtienen los propagadores de la CFT en tiempo real a alta temperatura. Recordar que la diferencia de signo entre los términos se sigue de la parametrización, que se muestra en la Fig. 5.6(b).

Primero se obtienen los términos diagonales de la matriz (5.2.14). El primero de ellos resulta

$$\begin{aligned}\langle\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_L(t, \varphi) \mathcal{O}_L(t', \varphi') | \Psi_0 \rangle\rangle \Big|_{BH} &\equiv -i \frac{\delta^2 S_{\mathcal{C}}^0}{\delta \phi^L \delta \phi^L} \\ &= \frac{(\Delta - 1)}{2\pi^2 i r_S} \sum_l \int d\omega e^{-i\omega \Delta t + i l \Delta \varphi} \left(\frac{-1}{e^{2\pi\omega} - 1} \alpha_{\omega l \Delta} \beta_{\omega l \Delta} + \frac{e^{2\pi\omega}}{e^{2\pi\omega} - 1} \alpha_{(-\omega) l \Delta} \beta_{(-\omega) l \Delta} \right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(\Delta - 1)^2}{2^{\Delta-1} \pi} [\cosh(\Delta \varphi + 2\pi r_S j) - \cosh(\Delta t(1 - i\epsilon))]^{-\Delta}\end{aligned} \quad (5.4.16)$$

Las integrales de momento están en Ap. B. Se comprueban las siguientes propiedades al respecto del orden temporal de (5.4.16): la estructura de polos (analítico en el semiplano inferior/superior) de $\beta_{\pm\omega l \Delta}$ garantiza en la segunda línea de (5.4.16) que se reproduce la estructura apropiada de propagadores avanzados/retardados obtenida en (5.2.15). El resultado coincide con [116, 13] y, como se espera de una prescripción a tiempo real completa, el signo del regulador $i\epsilon$ está fijado por convergencia. El propagador (5.4.16) cumple la condición KMS, i.e. es invariante frente a $\Delta t \rightarrow \Delta t + i\beta$. Como se menciona en [56], decae exponencialmente para $\Delta t \rightarrow \infty$, manifestando que, a alta temperatura, la correlación se pierde rápidamente.

Los correladores en la región R, segundo elemento diagonal en (5.2.14), se obtienen fácilmente a partir de las expresiones anteriores. El resultado es,

$$\begin{aligned} \langle\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_R(t, \varphi) \mathcal{O}_R(t', \varphi') | \Psi_0 \rangle\rangle \Big|_{BH} &\equiv -i \frac{\delta^2 S_{\mathcal{C}}^0}{\delta \phi^R \delta \phi^R} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(\Delta - 1)^2}{2^{\Delta-1} \pi} [\cosh(\Delta \varphi + 2\pi r_S j) - \cosh(\Delta t(1 + i\epsilon))]^{-\Delta}. \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

La solución está ordenada temporalmente de forma inversa que (5.4.16) y también se obtiene de la misma por conjugación compleja, de acuerdo a lo impuesto por TFD.

El análisis de los elementos no diagonales es más interesante. Estos elementos requieren de los términos cruzados de L con R de la acción en la capa de masas y el resultado es,

$$\begin{aligned} \langle\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_R(t, \varphi) \mathcal{O}_L(t', \varphi') | \Psi_0 \rangle\rangle \Big|_{BH} &\equiv -i \frac{\delta^2 S_C^0}{\delta \phi^L \delta \phi^R} = \langle\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_L(t', \varphi') \mathcal{O}_R(t, \varphi) | \Psi_0 \rangle\rangle \Big|_{BH} \\ &= \frac{2(\Delta - 1)}{4\pi^2 i r_S} \sum_l \int d\omega e^{-i\omega \Delta t + i l \Delta \varphi} \frac{e^{\pi \omega}}{e^{2\pi \omega} - 1} (-\alpha_{\omega l \Delta} \beta_{\omega l \Delta} + \alpha_{(-\omega) l \Delta} \beta_{(-\omega) l \Delta}) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(\Delta - 1)^2}{2^{\Delta-1} \pi} [\cosh(\Delta \varphi + 2\pi r_S j) + \cosh(\Delta t)]^{-\Delta}, \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

donde el signo en la segunda línea coincide con (5.2.16) y la tercera con [56]. Notar que no hacen falta reguladores $i\epsilon$ para la convergencia de estas integrales⁴. Esto puede entenderse notando que los elementos no diagonales de la matriz surgen de integrales sobre modos N, que son bien comportados en el borde asintótico por construcción, por un lado y que si $\sigma \neq 0 \neq \beta$, $\Delta t \neq 0$ para puntos cruzados, en concordancia con las reglas TFD, i.e. $[\mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}}] = [\mathcal{O}_L, \mathcal{O}_R] = 0$.

Todos los resultados obtenidos se conciden con la matriz de correladores (5.2.15). Hecho este chequeo de consistencia para esta nueva geometría, pasamos al estudio y caracterización de los estados excitados sobre la misma.

5.4.3. Fuentes Euclídeas

Ahora encontraremos la solución clásica para un campo escalar libre, masivo y real, sujeto a condiciones de contorno arbitrarias en la región asintótica del camino representado en la Fig. 5.2(b).

El campo masivo consiste en modos N en las regiones R, I y L, i.e. (5.4.8), (5.4.9) y (5.4.13). La solución en la región F puede escribirse como

$$\Phi_F(r, \tau, \varphi) = \frac{i}{4\pi^2 r_S} \sum_l \int d\omega e^{-\omega \tau + i l \varphi} \bar{\phi}_F(-i\omega, l) [F_{\omega l}^+ f(\omega, l, r) + F_{\omega l}^- f(-\omega, l, r)], \quad (5.4.19)$$

con $F_{\omega l}^+ + F_{\omega l}^- = 1$. Este ansatz cumple apropiadamente la condición de límite asintótico. Para ver esto, puede deformarse el contorno de ω en el sentido de las agujas del reloj rodeando algunos polos en el procedimiento. De aquí se obtiene

$$\Phi_F(r, \tau, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2 r_S} \sum_l \int d\omega e^{i\omega \tau + i l \varphi} \bar{\phi}_F(-\omega, l) [F_{-i\omega l}^+ f(-i\omega, l, r) + F_{-i\omega l}^- f(i\omega, l, r)] + \text{QN}(r, \tau, \varphi), \quad (5.4.20)$$

donde QN recoge los residuos de los polos representados en la fig.5.8(b) y corresponden a modos cuasi normales [117]. Estas contribuciones decaen asintóticamente como $r^{-\Delta}$, por lo que los términos entre paréntesis garantizan las condiciones de contorno asintóticas siempre que $F_{-i\omega l}^+ + F_{-i\omega l}^- = 1$.

La parametrización (5.4.19) se puede pegar fácilmente a las soluciones (5.4.13) y (5.4.8). El proceso de pegado se explica en el siguiente apartado y los resultados son

$$F_{\omega l}^+ = \frac{e^{2\pi \omega}}{e^{2\pi \omega} - 1}, \quad F_{\omega l}^- = \frac{-1}{e^{2\pi \omega} - 1}, \quad e^{i\omega T/2} I_{\omega l} = I_{\omega l} = i \bar{\phi}_F(-i\omega, l) \frac{e^{i\omega T}}{e^{2\pi \omega} - 1} \quad (5.4.21)$$

⁴Salvo para los casos $\sigma = 0$ o $\sigma = \beta$ donde los segmentos Lorentziano están uno sobre el otro [13]

y a

$$R_{\omega l} = e^{\omega\pi} L_{\omega l} . \quad (5.4.22)$$

Una vez más, los factores de Boltzmann en los coeficientes hacen que la integral en ω de (5.4.19) converja. Además, cada modo en (5.4.19) es regular en el horizonte.

La solución general con fuentes distintas de cero en todas las regiones puede construirse directamente a partir de los casos estudiados anteriormente por superposición. Antes de estudiar la acción sobre la capa de masa, hacemos algunos comentarios sobre las propiedades analíticas de la solución.

Pegado de las soluciones

El pegado se realiza aprovechando la estructura analítica de (5.4.2) en el plano complejo ω . Como se ilustra en la fig.5.8(a) se obtiene por teorema de residuos que

$$\int d\omega e^{-i\omega\Delta t} f(\omega, l, r) = 0, \quad \Delta t > 0. \quad (5.4.23)$$

Tomemos por caso el pegado entre las regiones L y F en $t \sim T/2$ para una fuente Lorentziana encendida: la fuente $\phi_L(t', \varphi')$ tiene soporte para el pasado de la superficie de pegado, haciendo así $\Delta t = t - t' > 0$ en (5.4.6). Insertar (5.4.7) y usar (5.4.23) se encuentra

$$\Phi_L(r, t, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2 r_S} \sum_l \int d\omega e^{-i\omega t + i l \varphi} (-\bar{\phi}_L(\omega, l) L_{\omega l}^-) [f(\omega, l, r) - f(-\omega, l, r)], \quad t \sim T/2 \quad (5.4.24)$$

con $\bar{\phi}_L$ la transformación Fourier de la fuente. Análogamente, para el pegado de L y I a $t \sim -T/2$ se encuentra

$$\Phi_L(r, t, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2 r_S} \sum_l \int d\omega e^{-i\omega t + i l \varphi} (\bar{\phi}_L(\omega, l) L_{\omega l}^+) [f(\omega, l, r) - f(-\omega, l, r)], \quad t \sim -T/2 \quad (5.4.25)$$

Cabe mencionar dos características importantes: (i) (5.4.24) y (5.4.25) muestran que el campo consiste únicamente en modos N en las superficies de pegado, y (ii) el cociente $L_{\omega l}^+ / L_{\omega l}^-$ determina las propiedades causales de la solución, e.g. el caso $L_{\omega l}^+ = 0$ y $L_{\omega l}^- = 1$ da la solución retardada discutida en [118, 116].

Analiticidad a través del agujero de gusano

Hasta ahora hemos construido las soluciones pegando modos a través de regiones espaciales de signatura Euclidianas y Lorentzianas. Como resultado, el procedimiento ha dado una conexión precisa entre los coeficientes en las regiones L y R, es decir, a través del agujero de gusano.

Quisiéramos destacar que las longitudes de $\beta/2$ de las regiones Euclídeas relacionan los coeficientes de las piezas Lorentzianas L y R por los factores $e^{\pm\omega\pi}$ (5.4.14) y (5.4.22). Estas son precisamente las relaciones estándar que hacen que la combinación de los modos de L y R según el tiempo ∂_t describan modos de energía positiva globales ∂_T [38, 119, 36]. Si hubiéramos escogido $\sigma \neq \beta/2$ esto ya no funcionaría. Seguimos la notación en [116, 13] donde los modos Unruh fueron denotados como $\phi_{\pm\pm}$. El primer \pm denota modos de entrantes y salientes puros puros en el cuadrante L, mientras que el segundo \pm se refiere a si el modo es analítico en el plano inferior/superior del complejo U . La geometría de AdS hace que cada uno de estos cuatro modos sea divergente en el límite asintótico. Como vimos, los modos N en signatura Lorentziana surgen de combinaciones lineales adecuadas.⁵

A partir de (5.4.22) vemos que al encender las fuentes en F se aparecen modos $\phi_{\pm+}$. Es importante destacar que la relación (5.4.22) se deriva únicamente del pegado de las tres piezas sin fuente I, L, R. Por el contrario, es fácil ver que las fuentes I activan los modos $\phi_{\pm-}$. Crucialmente, la combinación resultante de los modos Lorentzianos a través del puente Einstein-Rosen y se convirtió en modos N globales.

Para completar el análisis, desde (5.4.14) vemos que las fuentes L activan los modos ϕ_{++} y ϕ_{--} mientras que las fuentes R excitan ϕ_{+-} y ϕ_{-+} . Sin embargo, estos modos (NN) no están asociados con las excitaciones de partículas.

⁵Una discusión similar acerca de la relevancia de la analiticidad a través del agujero de gusano en el contexto holográfico puede verse en [121].

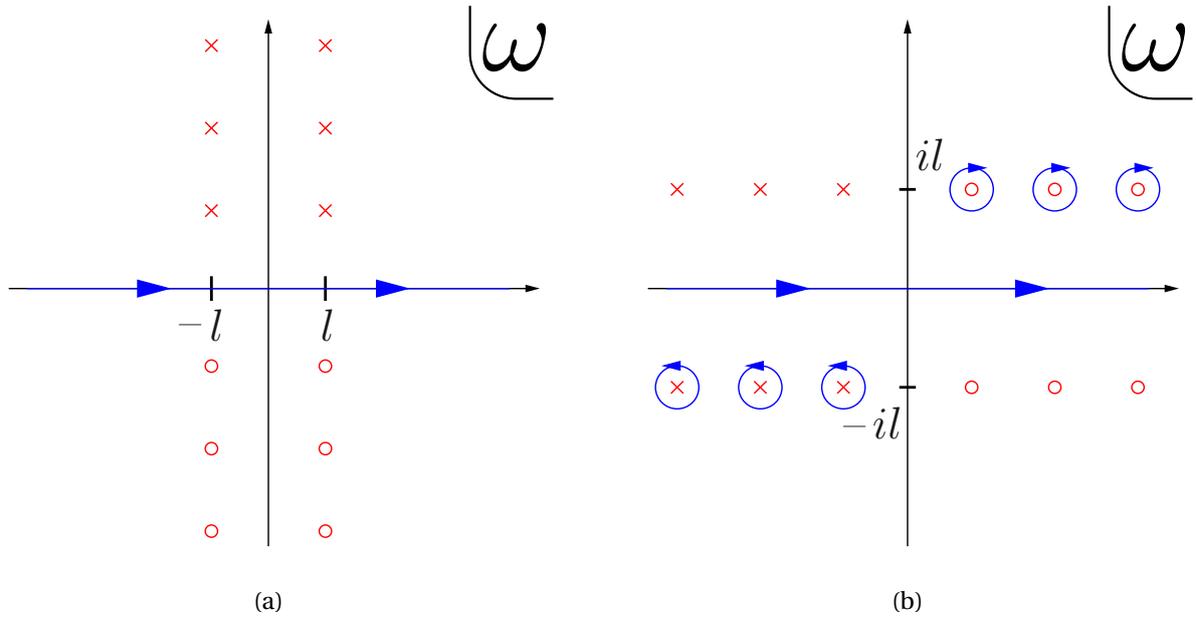


Figura 5.8: (a) Las cruces muestran la ubicación de los polos de $f(\omega, l, r)$ mientras que los círculos de $f(-\omega, l, r)$. La línea azul denota el contorno de integración de ω en (5.4.6). (b) Localización de los polos de $f(\pm i\omega, l, r)$ para el tratamiento de fuentes euclidianas. El contorno discurre a lo largo del eje real y la contribución de $QN(r, \tau, \varphi)$ en (5.4.20) surge de los polos circundantes. Las cruces denotan polos de $f(-i\omega, l, r)$ mientras que los círculos denotan polos de $f(i\omega, l, r)$. Girando el contorno de la fig.(b) hacia el eje imaginario en sentido contrario a las agujas del reloj se reduce a (5.4.20) a (5.4.19), recuperando la fig.(a).

Como conclusión se obtiene que piezas Euclidianas simétricas $\beta/2$ las piezas euclidianas permiten dar una interpretación de agujero negro maximalmente extendido a la región Lorentziana. La observación de que el agujero negro maximalmente extendido está relacionado con segmentos euclidianos idénticos de $\beta/2$ en los cálculos CFT fue sugerida originalmente en [116].

Otra forma de enfocar el interés en la relación entre modos es la siguiente. Para las regiones Lorentzianas es natural pensar en la existencia de una multiplicidad de modos locales y globales. Sin embargo, desde el punto de vista Euclideo, donde no hay interior del agujero negro, no es inmediato (contrastar con los ejemplos del Cap. 4 a $T = 0$) cuál es la buena forma de propagar los modos en el cambio de signatura y en consecuencia y más importante aún para nuestros objetivos, qué excitaciones serán descritas al encender fuentes. Responderemos cuantitativamente a este asunto cuando abordemos el estudio de los estados excitados desde un enfoque BDHM.

5.4.4. Estados Excitados

De los resultados de nuestras secciones anteriores se puede obtener la acción completa en la capa de masa

$$iS^0[\phi] = -\frac{i}{2} \int_{\partial} \sqrt{\gamma} \Phi n^\mu \partial_\mu \Phi = -\frac{i}{2} r^\Delta \int_{\partial} \phi(\mathcal{C}) [r \partial_r \Phi]_{r \rightarrow \infty}, \quad (5.4.26)$$

a partir de la cual se pueden obtener el producto interno y elementos de matriz de los operadores \mathcal{O} de la CFT.

Comenzamos por el producto interno entre los estados excitados, tomando $\Delta T \rightarrow 0$ en (5.2.7) se obtiene

$$\ln \langle \langle \Psi_F | \Psi_I \rangle \rangle \Big|_{BH} \equiv \lim_{\Delta T \rightarrow 0} iS^0 = \int_{\partial} \phi_E(\tau', \varphi') \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(\Delta - 1)^2}{2^{\Delta-1} \pi} [\cosh(\Delta\varphi + 2\pi r_S j) - \cos(\Delta\tau)]^{-\Delta} \phi_E(\tau, \varphi), \quad (5.4.27)$$

donde $\phi_E(\tau, \varphi) \equiv \phi_I(\tau, \varphi)\Theta(-\tau) + \phi_F(\tau, \varphi)\Theta(\tau)$, con Θ la función de Heaviside. Hemos incorporado la normalización adecuada de la función de dos puntos de acuerdo a [65].

Tomando derivadas simples de (5.4.26) con respecto a $\phi_{L/R}$ a alta temperatura, se obtiene

$$\frac{\langle\langle\Psi_F|\mathcal{O}_L(t,\varphi)|\Psi_I\rangle\rangle}{\langle\langle\Psi_F|\Psi_I\rangle\rangle}\Big|_{BH} = \frac{(\Delta-1)}{2\pi^2 i r_S} \sum_I \int d\omega e^{-i\omega t + i l \varphi} \left(\bar{\phi}_F(-i\omega, l) e^{i\omega T/2} + \bar{\phi}_I(-i\omega, l) e^{-i\omega T/2} \right) \times \frac{\alpha_{\omega l \Delta} \beta_{\omega l \Delta} - \alpha_{-\omega l \Delta} \beta_{-\omega l \Delta}}{e^{2\pi\omega} - 1} \quad (5.4.28)$$

$$\frac{\langle\langle\Psi_F|\mathcal{O}_R(t,\varphi)|\Psi_I\rangle\rangle}{\langle\langle\Psi_F|\Psi_I\rangle\rangle}\Big|_{BH} = \frac{(\Delta-1)}{2\pi^2 i r_S} \sum_I \int d\omega e^{-i\omega t + i l \varphi} \left(e^{\pi\omega} \bar{\phi}_F(-i\omega, l) e^{i\omega T/2} + e^{-\pi\omega} \bar{\phi}_I(-i\omega, l) e^{-i\omega T/2} \right) \times \frac{\alpha_{\omega l \Delta} \beta_{\omega l \Delta} - \alpha_{-\omega l \Delta} \beta_{-\omega l \Delta}}{e^{2\pi\omega} - 1} \quad (5.4.29)$$

Nos gustaría destacar algunos aspectos de estos resultados. Los factores $e^{\pm i\omega T/2}$ pueden entenderse como derivados de la distancia entre la ubicación de las fuentes en el plano t del complejo. Tenga en cuenta que los elementos de la matriz $\mathcal{O}_{L/R}$ se obtienen tomando $T \rightarrow 0$. Una segunda observación es que $\phi_{I/F}$ contribuyen con frecuencias tanto positivas como negativas, al contrario de lo que ocurre en el caso de la temperatura cero, ver (4.2.34). Este es un resultado esperado relacionado con el entrelazamiento entre los GDL de L y R y será discutido en la próxima sección. En este mismo sentido, el entrelazamiento puede también intuirse de los elementos de matriz en (5.4.28) y (5.4.29) cuyos cocientes son $e^{\pm\pi\omega} = e^{\pm\beta\omega/2}$. Enfatizamos que ya no es inmediato de (5.4.28) o (5.4.29) la naturaleza de nuestros estados.

5.5. Análisis BDHM

En esta sección estudiaremos los estados excitados desde la perspectiva de BDHM. Para establecer notación, revisaremos algunas consideraciones relevantes sobre la cuantización de campo en geometrías de AN. A través del mapa BDHM, construiremos los operadores CFT $\mathcal{O}_R, \mathcal{O}_L$. La naturaleza coherente de los estados excitados se demostrará al confrontar el resultado de la sección anterior. Como resultado, las excitaciones obtenidas por el encendido de las fuentes en las secciones euclidianas corresponden a estados coherentes *térmicos* [128] en el límite $N \rightarrow \infty$.

Cuantización canónica de campos escalares en una geometría BH

La cuantización de campos en una geometría AN da lugar a dos conjuntos de operadores escalar. Estos pueden ser vistos como resultado de la posibilidad de excitaciones independientes en los parches L y R o, alternativamente, de las dos posibles extensiones analíticas de las soluciones del modo L al parche R cuando se resuelve el problema en coordenadas Einstein-Rosen. Como ya mencionamos, los estados de vacío correspondientes resultan no equivalentes. Aquí seguimos el enfoque analítico.

Comenzamos a cuantizar la teoría del campo escalar en la métrica de BTZ en coordenadas de Einstein-Rosen. Escribiendo $u^2 = r^2 - 1$ [129], la métrica (5.3.4) se convierte en (2.2.31),

$$ds^2 = -u^2 dt^2 + \frac{du^2}{u^2 + 1} + (u^2 + 1) d\varphi^2. \quad (5.5.1)$$

Las regiones $u \geq 0$ corresponden a los parches L y R respectivamente, y la coordenada t coincide con la de la sección anterior. Ver Fig. 5.6(a) para una representación de la geometría. Es importante recordar que el tiempo t en estas coordenadas corre de forma inversa en L y R. Esto se puede ver mapeando (5.5.1) a coordenadas de Kruskal⁶. El campo KG (5.4.1) en la geometría ER se expande de la siguiente manera

$$\hat{\Phi}(u, t, \varphi) = \sum_l \int_0^\infty d\omega \hat{d}_{\omega l}^{(1)} h_{\omega l}^{(1)}(u, t, \varphi) + \hat{d}_{\omega l}^{(2)} h_{\omega l}^{(2)}(u, t, \varphi) + h.c.. \quad (5.5.2)$$

⁶Alternativamente, se puede recurrir a la analiticidad de la métrica en el plano complejo u : para el triángulo fijo $\Delta t > 0$, el signo del tiempo propio $\Delta t(u) = \int u dt > 0$ en el signo fijo $u > 0$ cambia al pasar de L ($u, \Delta t > 0$) a R ($u, \Delta t < 0$).

Los modos de energía positiva $h_{\omega l}^{(1,2)}$ se definen a partir de los modos L y R que tienen soporte en sus respectivos parches (también conocidos como modos Rindler). Explícitamente, los modos L se definen como

$$(\square - m^2) g_{L;\omega l} = 0 \quad \partial_t g_{L;\omega l} = -i\omega g_{L;\omega l} \quad g_{L;\omega l} \equiv \mathcal{N}_{\omega l} e^{-i\omega t + il\varphi} [f_{\omega l}(r) - f_{-\omega l}(r)], \quad \omega > 0 \quad (5.5.3)$$

mientras que los modos R vienen dados por

$$g_{R;\omega l} \equiv g_{L;\omega l}^*. \quad (5.5.4)$$

Los modos u -analíticos h son [130, 119]

$$h_{\omega l}^{(1)}(u, t, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega)}} \begin{cases} e^{\pi\omega/2} g_{L;\omega l} & \text{on L} \\ e^{-\pi\omega/2} g_{R;\omega l}^* & \text{on R} \end{cases} \quad h_{\omega l}^{(2)}(u, t, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega)}} \begin{cases} e^{-\pi\omega/2} g_{L;\omega l}^* & \text{on L} \\ e^{\pi\omega/2} g_{R;\omega l} & \text{on R} \end{cases} \quad (5.5.5)$$

los coeficientes $\mathcal{N}_{\omega l}$ garantizan que los modos g son ortonormales en sus respectivos parches tipo Rindler ⁷. El estado de vacío definido como (2.1.30),

$$\hat{d}_{\omega l}^{(1)} |\Psi_0\rangle\rangle = \hat{d}_{\omega l}^{(2)} |\Psi_0\rangle\rangle = 0, \quad (5.5.6)$$

corresponde al llamado estado de vacío TFD definido a en (2.1.30).

Los modos h presentados en esta sección son los de Unruh, construidos a partir de: Coordenadas ER, que cubren el exterior del BH, y exigiendo analiticidad en la coordenada radial a través del agujero de gusano.

BDHM a temperatura finita, TFD y coherencia

En esta sección revisamos el diccionario BDHM [15] y su extensión al presente caso de temperatura finita. La prescripción estándar define a los operadores CFT locales cuánticos $\hat{\mathcal{O}}(t, \varphi)$ de los campos cuantizados AdS $\hat{\Phi}(r, t, \varphi)$ a través del mapa

$$\hat{\mathcal{O}}(t, \varphi) \equiv 2(\Delta - d) \lim_{r \rightarrow \infty} r^\Delta \hat{\Phi}(r, t, \varphi), \quad (5.5.7)$$

donde $r \rightarrow \infty$ define el límite asintótico único de la teoría del volumen a temperatura cero. El factor r^Δ dependiente de las coordenadas conspira para dar un límite finito y el factor $2(\Delta - d)$ es necesario para tener una correspondencia precisa con los resultados de la prescripción de GKPW [16, 63]. A temperatura finita, de acuerdo con el enfoque TFD descrito en la Sec. 5.2.1, los GDL se duplican en la teoría de la gravedad, esto se manifiesta en dos límites asintóticos desconectados. Por lo tanto, a partir (5.5.2) definimos

$$\hat{\mathcal{O}}_L(t, \varphi) \equiv (2\Delta - d) \lim_{u \rightarrow \infty} \hat{\Phi}(u, t, \varphi) = \sum_l \int_0^\infty d\omega \hat{d}_{\omega l}^{(1)} e^{\pi\omega/2} e^{-i\omega t + il\varphi} \mathcal{O}_{\omega l} + \hat{d}_{\omega l}^{(2)} e^{-\pi\omega/2} e^{+i\omega t - il\varphi} \mathcal{O}_{\omega l}^* + h.c., \quad (5.5.8)$$

$$\hat{\mathcal{O}}_R(t, \varphi) \equiv (2\Delta - d) \lim_{u \rightarrow -\infty} \hat{\Phi}(u, t, \varphi) = \sum_l \int_0^\infty d\omega \hat{d}_{\omega l}^{(1)} e^{-\pi\omega/2} e^{-i\omega t + il\varphi} \mathcal{O}_{\omega l} + \hat{d}_{\omega l}^{(2)} e^{\pi\omega/2} e^{+i\omega t - il\varphi} \mathcal{O}_{\omega l}^* + h.c., \quad (5.5.9)$$

donde los coeficientes

$$\mathcal{O}_{\omega l} \equiv \frac{(2\Delta - d)}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega)}} \mathcal{N}_{\omega l} [\alpha_{\omega l} \beta_{\omega l} - \alpha_{-\omega l} \beta_{-\omega l}], \quad (5.5.10)$$

se heredan de la normalización de los modos.

⁷El producto escalar se define de forma estándar

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = -i \int_\Sigma (\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \partial_\mu \phi_1) n^\mu \sqrt{\gamma} du d\varphi,$$

con n^μ la unidad normal a la constante t -hipersuperficie Σ y γ_{ij} su métrica inducida. Un cambio de signo en n^μ entre parches L y R ($u \gtrless 0$) surge del carácter boost de t representado en Fig.5.6(a).

El estado de excitación de la imagen de interacción, construido a partir de la misma, se convierte en ⁸

$$|\Psi_I\rangle\rangle \equiv \mathcal{D} \left\{ e^{-\int_{-\pi}^0 d\tau \hat{\mathcal{O}}_R(\tau) \phi_I(\tau)} \right\} |\Psi_0\rangle\rangle \propto \exp \left\{ \sum_I \int_0^\infty d\omega \lambda_{I;\omega l}^{(1)} \hat{a}_{\omega l}^{(1)\dagger} + \lambda_{I;\omega l}^{(2)} \hat{a}_{\omega l}^{(2)\dagger} \right\} |\Psi_0\rangle\rangle. \quad (5.5.11)$$

donde

$$\lambda_{I;\omega l}^{(1)} = -e^{-\omega\pi/2} \bar{\phi}_I(-i\omega, l) \mathcal{O}_{\omega l}^* \quad \lambda_{I;\omega l}^{(2)} = -e^{\omega\pi/2} \bar{\phi}_I(+i\omega, l) \mathcal{O}_{\omega l}. \quad (5.5.12)$$

Para llegar a la identidad final el (5.5.12), se usaron los teoremas de desenredo estándar BCH [47]. Nótese la similitud del lado derecho de 5.5.11 con la expresión de temperatura cero 5.2.5. Observe que el operador que multiplica $|\Psi_0\rangle\rangle$ en las r.h.s. de (5.5.11) no es otra cosa que la forma del operador de evolución, representado en el esquema de interacción en la teoría de campos de AdS, y en virtud de (2.1.30), y de lo explicado en la Sec. 2.1.4 y 3.5 puede entonces reescribirse como un operador unitario de desplazamiento a menos de una constante de normalización.

El principal resultado de este trabajo es haber demostrado que los estados obtenidos mediante el encendido de las fuentes en las secciones euclidianas son estados térmicos coherentes en $N \rightarrow \infty$. Concluimos que el carácter coherente/semiclásico de los estados (5.5.11), originalmente desarrollados a temperatura cero en [63, 77], sigue siendo válido a temperatura finita. Para poner este resultado en el lenguaje de temperatura finita más familiar [128], la correspondiente matriz de densidad (no normalizada) para los estados excitados (5.5.11) es,

$$\rho_\phi \equiv \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}} |\Psi_\phi\rangle\rangle \langle\langle \Psi_\phi| = U_\phi U_\phi^\dagger$$

que es manifiestamente hermítica. Por lo tanto, al interpretar esta expresión en la teoría de campo libre, uno puede expresarla en el esquema de interacción como $\rho_\phi \propto D(\lambda) e^{-\beta H} D(\lambda)^\dagger$ donde $D(\lambda)$ es un operador de desplazamiento. Esta es la matriz de densidad estándar de un estado térmico coherente.

El cálculo directo usando (5.5.8), (5.5.9) y (5.5.11) conduce a

$$\frac{\langle\langle \Psi_F | \hat{\mathcal{O}}_L(t, \varphi) | \Psi_I \rangle\rangle}{\langle\langle \Psi_F | \Psi_I \rangle\rangle} = - \sum_I \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{-i\omega t + i l \varphi} (\bar{\phi}_F(-i\omega, l) + \bar{\phi}_I(-i\omega, l)) |\mathcal{O}_{\omega l}|^2 \quad (5.5.13)$$

$$\frac{\langle\langle \Psi_F | \hat{\mathcal{O}}_R(t, \varphi) | \Psi_I \rangle\rangle}{\langle\langle \Psi_F | \Psi_I \rangle\rangle} = - \sum_I \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{-i\omega t + i l \varphi} (e^{\pi\omega} \bar{\phi}_F(-i\omega, l) + e^{-\pi\omega} \bar{\phi}_I(-i\omega, l)) |\mathcal{O}_{\omega l}|^2 \quad (5.5.14)$$

donde se puede reconocer inmediatamente la estructura de (5.4.28) y (5.4.29) entre las fuentes. Una comparación más detallada de estas expresiones proporciona una expresión analítica para $|\mathcal{O}_{\omega l}|^2$, determinando a su vez $\mathcal{N}_{\omega l}$. Ver [130] para una expresión integral de $\mathcal{N}_{\omega l}$ donde se enfatiza la necesidad de un cálculo cuidadoso que involucre a los reguladores. Se puede comprobar que en el límite de temperatura cero, como en el régimen AdS térmico presentado aquí, donde se conocen los factores de normalización, las expresiones correspondientes coinciden exactamente con [63]. Recientemente se hicieron observaciones similares en [131]. La expresión precisa de los autovalores se obtiene comparando los resultados (5.5.13), (5.5.14), (5.5.8) y (5.5.9).

5.6. Campo escalar: AdS térmico

Aquí se resumen los pasos a seguir para encontrar la solución en la geometría dual al problema a baja T mostrado en la Fig. 5.2(a), i.e. AdS térmico. La geometría se construye pegando cilindros de AdS puro con signatura euclidiana y Lorentziana alternativamente, conformando una variedad toroidal como se muestra en Fig. 5.9(b). Se denominan L y R y se parametrizan con $t \in [-T/2, T/2]$ las regiones Lorentzianas para poder comparar más fácilmente los resultados que se obtendrán para el caso del agujero negro. Tomaremos secciones Euclidianas con distinto largo en este caso: σ para I y $\beta - \sigma$ para F como se muestra en Fig. 5.9(a). Se toma $\tau \in [\sigma - \beta, 0]$ para I y $\tau \in [0, \sigma]$ para F , que para $\sigma = \beta/2$ se reduce automáticamente a un camino simétrico. Por contraste con la geometría formada por agujeros negros, es relevante recordar que tanto

⁸Como se puede ver en el caso de (2.1.30), las acciones de \mathcal{O}_L y \mathcal{O}_R en el vacío TFD están relacionadas. Como consecuencia, uno puede elegir cualquiera de ellos para construir y las excitaciones por encima de $|\Psi_0\rangle\rangle$ son físicamente equivalentes.

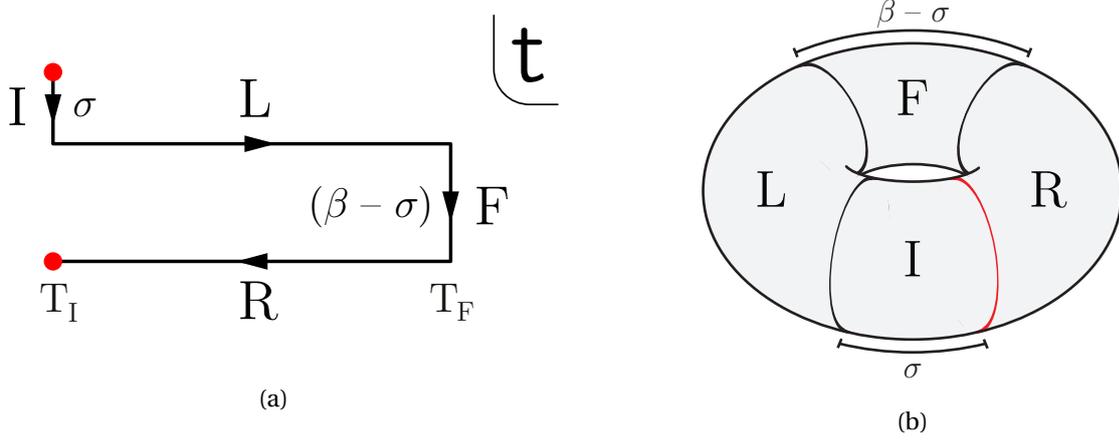


Figura 5.9: (a) Contorno SK para el caso de AdS térmico. Los segmentos euclidianos tienen extensión σ para I y $\beta - \sigma$ para F . (b) Geometría dual para el camino térmico. Notar que L y R están conectados solo a través de las regiones euclidianas. Las piezas están ordenadas según la flecha en el contorno de la izquierda.

desde la teoría de campos como la gravitatoria no hay forma de conectar L y R sin pasar a través de las regiones Euclidianas. En esta geometría entonces el análisis de analiticidad dentro de la variedad no tiene lugar y por eso se discute el caso σ general.

Las regiones Lorentzianas están definidas sobre AdS_3 ,

$$ds^2 = -(r^2 + 1)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 + 1} + r^2 d\varphi^2, \quad (5.6.1)$$

con $\varphi \sim \varphi + 2\pi$. Usando el ansatz $\Phi \propto e^{-i\omega t + il\varphi} s(\omega, l, r)$ en la ecuación de movimiento (5.4.1) da

$$s(\omega, l, r) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(|l| + \Delta - \omega)) \Gamma(\frac{1}{2}(|l| + \Delta + \omega))}{\Gamma(\Delta - 1) \Gamma(|l| + 1)} (1 + r^2)^{\omega/2} r^{|l|} {}_2F_1\left(\frac{\omega + |l| + \Delta}{2}, \frac{\omega + |l| - \Delta + 2}{2}; 1 + |l|; -r^2\right), \quad (5.6.2)$$

como la única solución regular en el interior. La normalización está fijada de forma que para frecuencia genérica $\{\omega, l\}$, $s(\omega, l, r) \approx r^{\Delta-2} + \dots$ asintóticamente. La solución general en L es

$$\Phi_L(r, t, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega e^{-i\omega t + il\varphi} \phi_L(\omega, l) s(\omega, l, r) + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ l \in \mathbb{Z}}} \left(L_{nl}^+ e^{-i\omega_{nl} t} + L_{nl}^- e^{+i\omega_{nl} t} \right) e^{il\varphi} s_{nl}(r), \quad (5.6.3)$$

con los coeficientes l_{nl}^\pm parametrizando los modos N

$$s_{nl}(r) \equiv \oint_{\omega = -\omega_{nl}} d\omega s(\omega, l, r), \quad \omega_{nl} = 2n + \Delta + |l|. \quad (5.6.4)$$

Los coeficientes se fijan al pegar las soluciones. La integral en frecuencias en (5.6.3) requiere definir un camino de integración en el plano ω que para evitar las singularidades que se muestran en Fig.5.10(a). La solución sobre R es análoga.

Las soluciones sobre las regiones euclidianas pueden también extrapolarse de la expresión anterior,

$$\Phi_I(r, \tau, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int d\omega e^{i\omega \tau + il\varphi} \bar{\phi}_I(-\omega, l) s(-i\omega, l, r) + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ l \in \mathbb{Z}}} \left(I_{nl}^+ e^{-\omega_{nl} \tau} + I_{nl}^- e^{\omega_{nl} \tau} \right) e^{il\varphi} s_{nl}(r),$$

Notar que el subíndice \mathcal{F} que definía el camino de integración en la frecuencia ya no está puesto que no es necesario: los polos de $s(-i\omega, l, r)$ no caen sobre el eje real, ver Fig. 5.10(b). Los coeficientes L_{nl}^\pm, I_{nl}^\pm así como también sus análogos para R y F se determinan pegando las soluciones. El pegado paso a paso es más trabajoso que pedagógico y el resultado general con fuentes en todas las regiones no se presenta. Como ejemplo, para una fuente solo en L , los coeficientes pueden pensarse asociados a la función de 1 punto de \mathcal{O}_L y resultan

$$L_{nl}^\pm = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\phi_L(\pm\omega_{nl}, l)}{e^{\omega_{nl}\beta} - 1} \quad I_{nl}^\pm = e^{\pm i\omega T/2} L_{nl}^\pm \quad R_{nl}^\pm = e^{\mp\omega\sigma} L_{nl}^\pm \quad F_{nl}^\pm = e^{\mp i\omega T/2} L_{nl}^\pm, \quad (5.6.5)$$

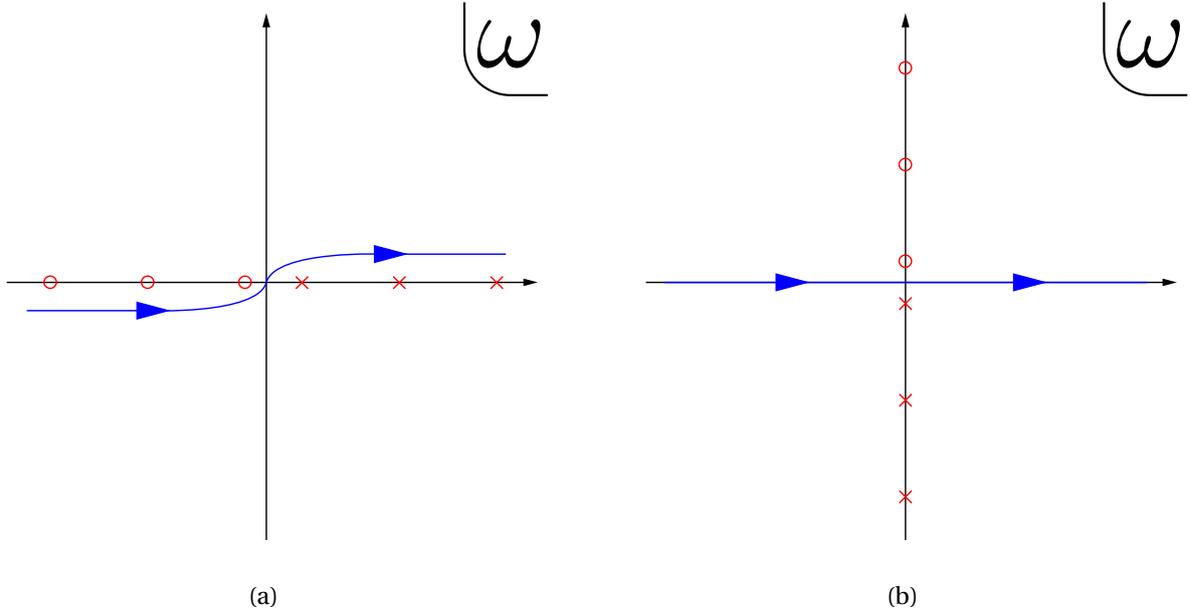


Figura 5.10: Polos Thermal

Usando (5.6.5) en (5.6.3), uno puede reescribir el campo como

$$\begin{aligned} \Phi_L(r, t, \varphi) = & \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{R}} d\omega dt' d\varphi' e^{-i\omega(t-t') + il(\varphi - \varphi')} \frac{e^{\omega\beta}}{e^{\omega\beta} - 1} \phi_L(t', \varphi') s(\omega, l, r) \\ & - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{A}} d\omega dt' d\varphi' e^{-i\omega(t-t') + il(\varphi - \varphi')} \frac{1}{e^{\omega\beta} - 1} \phi_L(t', \varphi') s(\omega, l, r) \end{aligned} \quad (5.6.6)$$

donde \mathcal{R} y \mathcal{A} representan caminos de integración asociados a propagadores retardados y avanzados respectivamente. Esto es otro ejemplo explícito, luego de In-In, donde el orden del propagador sugerido en (5.6.3) no es lo que define la causalidad del problema si no que el pegado de soluciones (determinadas a su vez por la física que describe el problema) es lo que determina cómo la información viaja en la variedad. La acción en la capa de masa completa se obtiene de resolver para el caso de fuentes generales e insertar las soluciones clásicas en los términos de borde y llevando adelante la renormalización holográfica. A continuación, se presentan los observables que pueden calcularse a partir de la acción regularizada.

Correladores

El resultado para AdS térmico se sigue de forma análoga a partir de (5.6.3) y (5.4.26), con el primer elemento diagonal

$$\langle\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_L(t, \varphi) \mathcal{O}_L(t', \varphi') | \Psi_0 \rangle\rangle \Big|_{Th} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(\Delta - 1)^2}{2^{\Delta-1} \pi} [\cos(\Delta t(1 - i\epsilon) + i\beta j) - \cos(\Delta\varphi)]^{-\Delta}. \quad (5.6.7)$$

Nuevamente, de su expansión en momentos, que ya se observa en (5.6.3), se observa la estructura causal esperada en (5.2.15). El resultado se interpreta como una suma de imágenes en t con período β de la función de 2 puntos a temperatura cero (4.2.46), lo que impone la condición KMS. La propagación de la información en esta solución, en contraste con (5.4.16), es oscilatoria como se espera a bajas temperaturas. En resumen, las expresiones (5.4.16) y (5.6.7) que dominan respectivamente en las regiones $\beta \lesssim \beta_c$ ⁹ describen la dinámica de la CFT a cualquier temperatura. El correlador en R está ordenado anti-temporalmente y también puede obtenerse por conjugación compleja en (5.6.7). Notar que una rotación de Wick doble $\varphi \rightarrow it$, $t \rightarrow i\varphi$ conecta los elementos diagonales de la matriz de propagadores (5.4.16) y (5.6.7) entre sí.

⁹Recordar que $\beta_c = 2\pi R_{AdS} = 2\pi$ en las unidades usadas.

En el límite de bajas temperaturas, el cálculo holográfico de los elementos no diagonales para σ general lleva a

$$\langle\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_R(t', \varphi') \mathcal{O}_L(t, \varphi) | \Psi_0 \rangle\rangle \Big|_{Th} \equiv -i \frac{\delta^2 S_{\mathcal{G}}^0}{\delta \phi^L \delta \phi^R} = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(\Delta - 1)^2}{2^{\Delta-1} \pi} [\cos(\Delta t + i\beta j - i\sigma) - \cos(\Delta \varphi)]^{-\Delta} \quad (5.6.8)$$

$$\langle\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_L(t', \varphi') \mathcal{O}_R(t, \varphi) | \Psi_0 \rangle\rangle \Big|_{Th} \equiv -i \frac{\delta^2 S_{\mathcal{G}}^0}{\delta \phi^R \delta \phi^L} = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(\Delta - 1)^2}{2^{\Delta-1} \pi} [\cos(\Delta t + i\beta j - i(\beta - \sigma)) - \cos(\Delta \varphi)]^{-\Delta}. \quad (5.6.9)$$

Como puede verse, el cálculo holográfico reproduce el caso no simétrico de matrices, que se recupera cuando $\sigma = \beta/2$. Este es el principal interés de considerar el caso $\sigma \neq \beta/2$. El cálculo de estas cantidades sigue argumentos análogos a los de la Sec. 2.1.1.

Algunos comentarios comparando (5.6.8) para $\sigma = \beta/2$ y (5.4.18). Primero, notar que a diferencia del caso de elementos diagonales, estos objetos no están conectados por la doble rotación de Wick $\varphi \rightarrow it$, $t \rightarrow i\varphi$. Esto se sigue de que las dependencias en σ en (5.6.8) no rotan. Este resultado está relacionado con la topología de las soluciones: a diferencia de la solución térmica, la del agujero negro conecta a las regiones L y R a través del agujero de gusano, comparar las Figs. 5.2(b) y 5.9(b). El hecho de que cantidades en (5.6.8) y (5.4.18) no estén conectadas por dobles rotaciones de Wick enfatiza la importancia de tener y comprender una prescripción holográfica en tiempo real.

Estos elementos no diagonales también se pueden interpretar como proveyendo información del entrelazamiento entre los GDL de las regiones L y R [99]. Los resultados (5.6.8) y (5.4.18), entendidos como cotas inferiores de la información mutua entre L y R de cada solución, se comportan también como se espera, siendo menor en la solución térmica y teniendo un máximo regular en $\Delta t = \Delta \varphi = 0$.

Estados Excitados

En el límite de baja temperatura, producto interno es

$$\ln \langle\langle \Psi_F | \Psi_I \rangle\rangle \Big|_{Th} \equiv \lim_{\Delta T \rightarrow 0} iS^0 = \int_{\partial} \phi_E(\tau', \varphi') \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(\Delta - 1)^2}{2^{\Delta-1} \pi} [\cosh(\Delta \tau + \beta j) - \cos(\Delta \varphi)]^{-\Delta} \phi_E(\tau, \varphi). \quad (5.6.10)$$

Como se esperaba de [132], los núcleos en (5.4.27) y (5.6.10) están conectados a través de una doble rotación de Wick. Extendiendo este cálculo para un campo complejo Φ_E y fuente ϕ_E podemos identificar estos núcleos como los potenciales de Kähler en el espacio de estados, como se observa en [133, 84]. En este sentido, tanto los de (5.4.27) y (5.6.10), como los del capítulo anterior [63, 77], proporcionan ejemplos explícitos no triviales. Note también que los estados $|\Psi_{I,F}\rangle\rangle$ no están normalizados ni son ortogonales. La norma se puede obtener de forma análoga a los casos anteriores.

Para los elementos de matriz el resultado es

$$\frac{\delta S_{Th}^0}{\delta \phi_L} \Big|_{\phi_L=0} = \frac{\Delta - 1}{2\pi^2} \sum_{nl} \left[\sum_{\pm} e^{\mp i\omega_{nl}t + i l \varphi} \left(\bar{\phi}_F(\mp i\omega_{nl}, l) e^{i\omega_{nl}T/2} + \bar{\phi}_I(\mp i\omega_{nl}, l) e^{-i\omega_{nl}T/2} \right) \right] \frac{S_{nl}(r)}{e^{\beta\omega_{nl}} - 1} \quad (5.6.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{Th}^0}{\delta \phi_R} \Big|_{\phi_R=0} &= \frac{\Delta - 1}{2\pi^2} \times \\ &\times \sum_{nl} \left[\sum_{\pm} e^{\mp i\omega_{nl}t + i l \varphi} \left(e^{\mp \omega_{nl}(\sigma - \beta)} \bar{\phi}_F(\mp i\omega_{nl}, l) e^{i\omega_{nl}T/2} + e^{\mp \omega_{nl}\sigma} \bar{\phi}_I(\mp i\omega_{nl}, l) e^{-i\omega_{nl}T/2} \right) \right] \frac{S_{nl}(r)}{e^{\beta\omega_{nl}} - 1} \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

donde ω_{nl} y s_{nl} , definidos en la Sec. 4.1 y son las frecuencias y modos normalizables a $T = 0$ en AdS y

$$\bar{\phi}_I(-i\omega_{nl}, l) \equiv \int_{\sigma-\beta}^0 d\tau d\varphi e^{\omega_{nl}\tau - i l \varphi} \phi_I(\tau, \varphi), \quad \bar{\phi}_F(-i\omega_{nl}, l) \equiv \int_0^{\sigma} d\tau d\varphi e^{\omega_{nl}\tau - i l \varphi} \phi_F(\tau, \varphi).$$

Observe que para el general σ los lhs de (5.6.11) y (5.6.12) no se refieren a ninguna notación de bra/ket. Esta interpretación sólo aparece en $\sigma = \beta/2$, donde surge la simetría de la reflexión temporal entre las piezas Euclideas.

La cuantización canónica de los campos, pensando en una interpretación según la prescripción BDHM, se sigue directamente del caso a $T = 0$ de la sección anterior. Cada segmento L y R por separado, aunque solo el caso con $\sigma = \beta/2$ lleva a reglas de conjugación hermítica naturales para los estados inicial y final. El resto de los casos requieren de factores ad-hoc [35, 31]. Los estados excitados pueden escribirse como

$$|\Psi_I\rangle\rangle \equiv \mathcal{P} \left\{ e^{-\int_{-\pi}^0 d\tau \mathcal{O}_R(\tau)\phi_I(\tau)} \right\} |\Psi_0\rangle\rangle \propto \exp \left\{ \sum_{nl} \lambda_{I;nl}^{(1)} d_{nl}^{(1)\dagger} + \lambda_{I;nl}^{(2)} d_{nl}^{(2)\dagger} \right\} |\Psi_0\rangle\rangle$$

donde $d^{(i)\dagger}$, $i = 1, 2$ combinan estados de energía positiva y negativa según los coeficientes de Bogoliubov estándar

$$\lambda_{I;nl}^{(1)} = -e^{-\omega_{nl}\pi/2} \bar{\phi}_I(-i\omega_{nl}, l) \mathcal{O}_{nl}^* \quad \lambda_{I;nl}^{(2)} = -e^{\omega_{nl}\pi/2} \bar{\phi}_I(+i\omega_{nl}, l) \mathcal{O}_{nl}.$$

y \mathcal{O}_{nl} son los coeficientes de normalización del operador a $T = 0$ discutidos en la sección anterior y que se obtienen siempre en la prescripción BDHM [63].

Esto completa el estudio de los duales holográficos al camino Térmico $\sigma = \beta/2$. Concluimos este capítulo con una breve sección donde se discuten una aplicación para los estados excitados holográficos en la que el autor está trabajando actualmente.

5.7. Entropía de estados excitados holográficos

El formalismo de campos a temperatura finita TFD construye su vacío como un estado entrelazado de dos sistemas L y R no interactuantes. De hecho, el vacío TFD está completamente determinado por la restricción,

$$[\hat{\Phi}_L(|u\rangle, t = T_I, \varphi) - \hat{\Phi}_R(-|u\rangle, t = T_I - i\pi, \varphi)] |\Psi_0\rangle\rangle = 0, \quad \forall u, \varphi, \quad (5.7.1)$$

Una interpretación de esto es que el estado de vacío, cuyo funcional de onda está descrito por la geometría euclidiana de la Fig. 5.6(b), es tal que actuar con un operador L en él a T_I , es lo mismo que actuar con el operador R a T_I pero trasladado ida y vuelta $-i\pi = -i\beta/2$ en tiempo imaginario,

$$\hat{\Phi}_R(T_I - i\pi) \equiv U_0(-i\pi) \hat{\Phi}_R(T_I) U_0^{-1}(i\pi). \quad (5.7.2)$$

La ortogonalidad de las autofunciones del problema permite demostrar que (5.7.1) es equivalente a (2.1.30), que resulta más familiar. De hecho, insertando (5.5.2) y (5.5.5) en la expresión anterior y usando la ortonormalidad de los modos, se obtiene

$$\hat{d}_{\omega l}^{(1)} |\Psi_0\rangle\rangle \propto \left(\hat{L}_{\omega l} - e^{-\omega\beta/2} \hat{R}_{\omega l}^\dagger \right) |\Psi_0\rangle\rangle = 0 \quad \hat{d}_{\omega l}^{(2)} |\Psi_0\rangle\rangle \propto \left(\hat{L}_{\omega l}^\dagger - e^{+\omega\beta/2} \hat{R}_{\omega l} \right) |\Psi_0\rangle\rangle = 0, \quad (5.7.3)$$

donde $\hat{L}_{\omega l}^\dagger$ y $\hat{R}_{\omega l}^\dagger$ crear excitaciones con soporte en L y R respectivamente, y $\hat{d}_{\omega l}^{(1,2)}$ definidas tales que aniquilan el estado $|\Psi_0\rangle\rangle$. Estas relaciones se conocen como condiciones de estado térmico y definen la transformación de Bogoliubov entre ambos conjuntos de operadores de escaleras¹⁰. Nótese que en (5.7.3) hemos reintroducido la dependencia explícita de la temperatura β .

Una consecuencia importante de esta formulación es que los modos asociados a los operadores $\hat{d}_{\omega l}^{(1,2)}$ son precisamente las combinaciones lineales de las soluciones L, R , que son analíticas a través de la garganta $u = 0$. Esto captura las características discutidas en la Sección 5.4.3. También vale la pena notar que esto es consistente con el hecho de que los puntos en la garganta del agujero de gusano, es decir, $u = 0$, son puntos fijos del operador de la evolución $U_0(\tau)$ de la teoría cuántica en AdS, cuyo Hamiltoniano es el generador de boost, y su extensión analítica a los tiempos imaginarios evoluciona las superficies de nivel τ como se representa en líneas rojas en la Fig. 5.6(b). En este sentido, $|\Psi_0\rangle\rangle$ es el estado térmico KMS con respecto al generador de boosts [123].

¹⁰Formulaciones similares en el contexto de cuerdas se pueden encontrar en Refs. [134, 122]

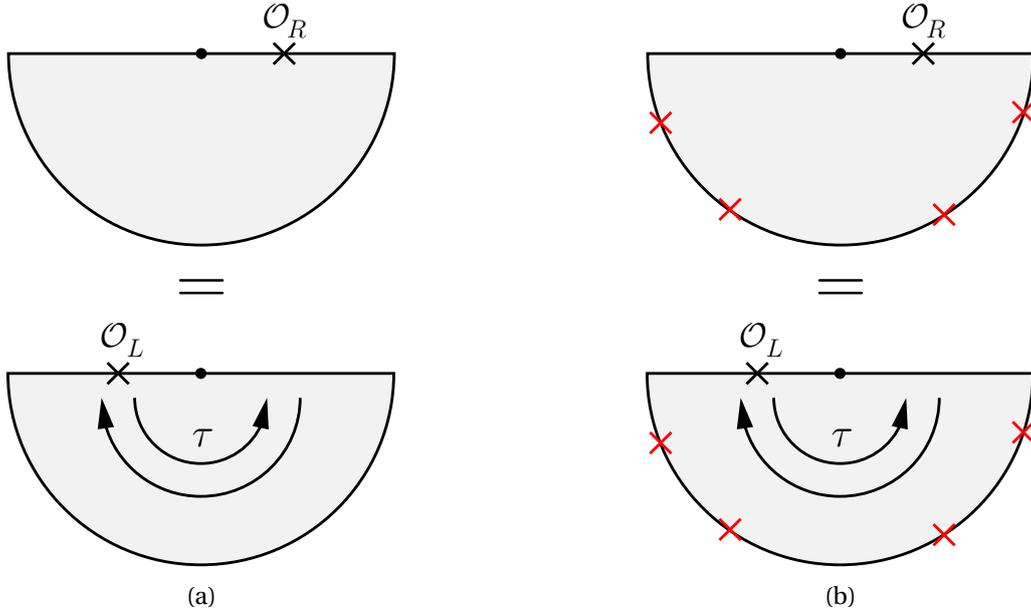


Figura 5.11: En la figura se representan pictóricamente en (a) y (b) los vínculos (5.7.1) y (5.7.4) respectivamente.

Motivados por la interpretación en (5.7.2), uno puede considerar una nueva evolución generalizada para un operador evolución Euclídeo perturbado con fuentes externas, i.e. del tipo que crean estados excitados de los considerados en esta tesis,

$$\hat{\Phi}_R(T_I - i\pi) \equiv U_0(-i\pi) \hat{\Phi}_R(T_I) U_0^{-1}(-i\pi) \quad \Rightarrow \quad U_\phi(-i\pi) \hat{\Phi}_R(T_I) U_\phi^{-1}(-i\pi).$$

Esto puede usarse para definir un estado de excitación (inicial) ya que la restricción (5.7.1) ahora se convierte en

$$\left[\hat{\Phi}_L(|u|, t = T_I, \varphi) - U_\phi(\pi) \hat{\Phi}_R(-|u|, t = T_I, \varphi) U_\phi^{-1}(\pi) \right] |\Psi_\phi\rangle = 0, \quad \forall u, \varphi, \quad (5.7.4)$$

La Fig. 5.11 es una representación gráfica de los vínculos (5.7.1) y (5.7.4). La descomposición de frecuencia de estas ecuaciones ahora produce

$$\left(\hat{d}_{\omega,l}^{(1,2)} - \lambda_{\omega,l}^{(1,2)} \right) |\Psi_\phi\rangle = 0 \quad (5.7.5)$$

donde hemos utilizado que el operador (adecuadamente normalizado) U_ϕ actúa sobre los operadores de escalera de AdS como un desplazamiento, i.e.

$$U_\phi(\pi) \hat{d}_{\omega,l}^{(1,2)} U_\phi^{-1}(\pi) = \hat{d}_{\omega,l}^{(1,2)} + \lambda_{\omega,l}^{(1,2)}$$

de acuerdo a lo discutido debajo de (5.5.11). Por lo tanto, la solución de (5.7.5) es claramente el estado (5.5.11). Esto presenta una perspectiva alternativa sobre nuestra prescripción de la Sec. 5.2.1 para los excitados estados iniciales/finales en la CFT dual.

El punto central de estas consideraciones es que (5.7.1) en combinación con (5.7.2), son una forma equivalente de escribir el teorema de Tomita-Takesaki para un estado $|\Psi_0\rangle$ separador y cíclico [33], esquemáticamente

$$[S_0 \Phi_L - \Phi_R] |\Psi_0\rangle = 0, \quad (5.7.6)$$

donde S_0 es el operador de Tomita para el estado $|\Psi_0\rangle$. De forma sucinta, el conocimiento del operador de Tomita permite a su vez el conocimiento del Hamiltoniano Modular del sistema, objeto de interés en muchas aplicaciones dentro y fuera del contexto de holografía, como teoría de campos y teoría de materia condensada, ver [33] y las referencias ahí citadas. El operador modular, se obtiene como $\Delta_0 \equiv S_0^\dagger S_0$ y en este caso es

$$\Delta_0 \equiv S_0^\dagger S_0 = e^{-\beta(H_L - H_R)}, \quad (5.7.7)$$

el operador de boost asociado a la coordenada de tiempo extendida ∂_τ según la métrica (5.5.1), en acuerdo con [123].

Luego, llevar el vínculo excitado (5.7.5) a la forma de Tomita-Takesaki comprobando sus hipótesis, se podría construir el operador S_ϕ excitado, calculando así el Hamiltoniano modular para los estados excitados en la teoría de gravedad.

La relación entre los Hamiltonianos modulares a ambos lados de la dualidad es un objeto de estudio actualmente y en su versión operatorial, conocida como JMLS [18], se propone que uno y otro objeto tienen una relación directa. No reconstruiremos los detalles de aquel ni de este trabajo aquí, puesto que excede los objetivos de esta tesis y es trabajo aún en progreso. La intención de este apartado era el de dar al menos una dirección en la que el estudio de estos estados permite obtener información de sistemas físicos por fuera del marco teórico en que fueron concebidos. Cerramos esta sección con otros dos comentarios a este respecto.

La entropía de entrelazamiento y otras propiedades entrópicas de los estados excitados holográficos fueron obtenidos mediante el truco de réplicas y por cálculo directo en [89] y luego extendido a la deformación del estado mediante operadores de traza múltiple en [81]. Esto provee un conjunto interesante de resultados independientes con los cuales comparar.

El caso de AdS puro en el marco de $T = 0$ admite otro juego de coordenadas AdS-Rindler, tal que la construcción admite una reinterpretación TFD del problema: el vacío global es el descrito en esta tesis y se descompone en un estado térmico para los parches AdS-Rindler. Esto representa un segundo caso de estudio para las consideraciones de esta sección y en vistas a trabajo futuro.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se discutieron aspectos formales acerca de extensiones de la dualidad AdS/CFT a tiempo real. Específicamente, se integraron aspectos de las prescripciones de Skenderis y van Rees (SvR) con la de Banks Douglas Horowitz y Martinec (BDHM) para construir y caracterizar una familia de estados excitados holográficos que por construcción tienen siempre asociada una interpretación geométrica del lado de gravedad. Los estados construidos, $|\Psi_\phi\rangle$, se definieron de forma no perturbativa como

$$|\Psi_\phi\rangle \equiv e^{-\int \mathcal{O} \phi} |0\rangle, \quad \langle \phi_\Sigma | \Psi_\phi \rangle \equiv \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_E[\Phi]} = \Psi_\phi[\phi_\Sigma], \quad (6.0.1)$$

donde a izquierda y derecha se los escribe en términos de los GDL de cada teoría dual de forma independiente. En (6.0.1), \mathcal{O} es un operador local de traza simple de la CFT cuyo campo dual es Φ y la función ϕ es, según las reglas estándar de la dualidad, a la vez fuente externa para \mathcal{O} en la CFT y de condición de contorno para los campos en AdS. En la expresión de la derecha, $|\phi_\Sigma\rangle$ es la autobase ortonormal de configuración de campo sobre una superficie tipo espacio Σ , $\Phi|\phi_\Sigma\rangle = \phi_\Sigma|\phi_\Sigma\rangle$.

En el límite semiclásico de la teoría de gravedad, la CFT es fuertemente acoplada y se obtiene

$$|\Psi_\phi\rangle \equiv e^{-\int \mathcal{O} \phi} |0\rangle, \quad \langle \phi_\Sigma | \Psi_\phi \rangle \equiv e^{-S_E^0[\phi, \phi_\Sigma]} = \Psi_\phi[\phi_\Sigma], \quad (6.0.2)$$

donde $S_E^0[\phi, \phi_\Sigma]$ es una acción en la capa de masa de los campos involucrados. Utilizando herramientas de integrales de caminos, se demostró que el lado de gravedad en este límite admite la reescritura como

$$|\Psi_\lambda\rangle = e^{-S_E[\Upsilon]} e^{-\int_\Sigma \sqrt{\gamma_\Sigma} \hat{\Pi}_\Sigma \Upsilon + \int_\Sigma \sqrt{\gamma_\Sigma} \hat{\Phi}_\Sigma \partial_n \Upsilon} |\Psi_0\rangle, \quad (6.0.3)$$

donde

$$\Upsilon_\Sigma = \langle \Psi_\lambda | \Phi | \Psi_\lambda \rangle; \quad \dot{\Upsilon}_\Sigma = \langle \Psi_\lambda | \Pi | \Psi_\lambda \rangle. \quad (6.0.4)$$

De esta forma, los estados (6.0.3) son una base del espacio de Hilbert. En todo este análisis el mapa BDHM resultó de gran utilidad para la caracterización de los estados (6.0.1). Por la forma de construir los estados, en este formalismo puede demostrarse que $\dot{\Upsilon}_\Sigma = 0$ aunque esto no es necesario para demostrar (6.0.3). En presencia de interacciones la expresión (6.0.3) se deforma el estado deja de ser coherente. Para este caso se logró dar una receta diagramática para calcular las correcciones semiclásicas a todo orden.

El formalismo y las propiedades de los estados (6.0.1) fue puesto a prueba y confirmado en varios casos de estudio a $T = 0$ y $T \neq 0$. Para todos los casos en el límite $N \rightarrow \infty$ se logró determinar de forma cerrada los autovalores de los estados coherentes (6.0.3). El estudio del caso $T \neq 0$ requirió de la construcción de un dual holográfico ad-hoc original de este trabajo de tesis.

Como ejemplo de la forma en que los estados (6.0.1) se incorporan a un camino SK, se escribe la expresión para el camino In-Out,

$$\langle \Psi_{\phi_+} | T \{ e^{-i \int \mathcal{O} \phi_L} \} | \Psi_{\phi_-} \rangle = \sum_{\phi_{\Sigma^\pm}} (\Psi_{\phi_+}[\phi_{\Sigma^+}])^* Z[\phi_L; \phi_{\Sigma^-}, \phi_{\Sigma^+}] \Psi_{\phi_-}[\phi_{\Sigma^-}], \quad (6.0.5)$$

donde $\Psi_{\phi_\pm}[\phi_{\Sigma^\pm}]$ es la funcional de onda del estado final/inicial y $Z[\phi_L; \phi_{\Sigma^-}, \phi_{\Sigma^+}]$ es la función generatriz para las funciones de n puntos conectadas de la teoría en tiempo real.

En el Capítulo 1 se dio un marco histórico y se enmarcó el proyecto de la tesis en la bibliografía actual sobre AdS/CFT. Se hizo también una descripción sucinta de la estructura del trabajo.

En el Capítulo 2 se introdujeron aspectos relevantes de teoría de campos y relatividad general. Sobre teorías de campos, se presentaron el formalismo de Schwinger-Keldysh (SK) enfocándonos en los caminos In-Out, In-In y Térmico, distinguiéndolos según sean caminos abiertos o cerrados en el plano complejo. Se presentó el formalismo de TFD y se mostró que es equivalente a un caso particular del camino térmico y se presentaron además dos realizaciones físicas no triviales de TFD, el espacio de Rindler y los agujeros negros eternos. Luego, se estudiaron el grupo de simetrías conformes $SO(d, 2)$ y sus propiedades salientes de teorías de campos conformes o CFT en dimensión d general y sus correladores. Finalmente, se presentaron los estados coherentes y el formalismo de Glauber para obtenerlos en teorías de campos mediante evoluciones de sistemas acoplados a fuentes externas clásicas. Desde el lado de gravedad, se estudiaron los espacios H_{d+1} y AdS_{d+1} , observando que su grupo de isometrías coincide con el de una CFT_d y se presentaron los parches de coordenadas relevantes para el trabajo. Se presentaron luego las soluciones de agujero negro para espacios con $\Lambda < 0$, duales a un estado CFT de equilibrio térmico y se presentaron las geometrías BTZ en tiempo Lorentziano y Euclídeo.

En el Capítulo 3 se hizo una recopilación de resultados de teoría de campos y de teoría de cuerdas que permitió dar una intuición sobre el primer ejemplo de la dualidad AdS/CFT de una teoría de campos $\mathcal{N} = 4$ SYM con una teoría de cuerdas tipo IIB sobre $AdS_5 \times S^5$. A continuación, se presentaron los enfoques de abajo hacia arriba: GKPW y el diccionario BDHM o extrapolar. Se presentaron las inconsistencias con el Principio Holográfico a las que lleva una formulación inocente de AdS/CFT en tiempo real y cómo la prescripción de Skenderis y van Rees (SvR) las resuelve, incorporando herramientas del formalismo de SK, en términos de duales holográficos de signatura cambiante. Finalmente, se presentaron los estados excitados (6.0.1) y sus características generales. En particular, en el límite $N \rightarrow \infty$ estricto los mismos son estados coherentes. Se obtuvieron los autovalores de los estados en esta aproximación y los efectos de correcciones $1/N$.

El Capítulo 4 se estudiaron los estados para los caminos In-Out en coordenadas globales y Poincaré, duales a CFT definidas sobre una esfera y espacio plano respectivamente, y el caso In-In en coordenadas globales, todas aplicaciones a $T = 0$. En el primer caso se describió en detalle cómo se procederá de forma general para todos los ejemplos de aplicación: se armó la geometría dual pegando secciones euclidianas y Lorentzianas según la prescripción SvR, se encontraron las soluciones clásicas más generales a las ecuaciones de movimiento de los campos en cada región y se mostró cómo el pegado garantiza que la solución en la variedad completa es única. Una vez obtenida la solución, se obtuvo la acción en la capa de masa y se obtuvieron el producto interno entre los estados excitados holográficos, los elementos de matriz de los operadores duales entre los estados así como también los correladores de la teoría. Los resultados de este ejemplo comprueban todas las propiedades generales propuestas en el Capítulo anterior. El estudio en Poincaré incorporó interacciones en la teoría de gravedad para estudiar las correcciones orden a orden en $1/N$. Las interacciones deforman la naturaleza coherente de los estados, que a primer orden en $1/N$ se comportan como estados coherentes-comprimidos. Se describe también un método diagramático para calcular las correcciones a las contribuciones de los estados excitados a cualquier orden. El caso In-In se incluye para hacer manifiesto el rol conjunto que juegan las condiciones de contorno asintóticas en combinación con el pegado de geometrías para obtener el correlador adecuado en cada región de la variedad. que el ordenamiento sobre los caminos SK queda fijo.

El Capítulo 5 estudió el camino Térmico $\sigma = \beta/2$, que admite una descripción completa de las excitaciones en términos de excitaciones sobre el vacío TFD y para el que se construyeron las geometrías duales a alta y baja temperatura. La primera de estas se construye pegando segmentos de agujeros negros Euclídeos y Lorentzianos y en particular las secciones Lorentzianas pueden describirse como el exterior de un agujero negro maximalmente extendido. Las excitaciones holográficas a orden dominante para estos casos que quedan conformadas como excitaciones coherentes de los GDL duplicados de TFD. Una descripción similar surge para el caso a bajas temperaturas. Para este ejemplo se recuperaron también todas las predicciones de la formulación general. Se describió por último un trabajo en construcción como ejemplo de aplicación de este formalismo para el cálculo de hamiltonianos modulares de estados excitados.

Los apéndices A y B resumen el formalismo de renormalización holográfica y algunas integrales demasiado largas para el cuerpo del texto.

Las perspectivas a futuro de este trabajo pueden clasificarse en aplicaciones de este formalismo dentro de sí mismo o en otras áreas. Como aplicaciones dentro del formalismo, se pueden seguir considerando distintos caminos de SK según el problema físico u observable que se desee calcular. Caminos más complejos o con más segmentos, tales como los que se necesitan para el cálculo de OTOCs [124], presentan una espectro muy rico de posibles duales geométricos que compiten en la aproximación semiclásica. La búsqueda del correcto dual geométrico para cada geometría particular sería el punto clave en esta línea de trabajo. La parte no trivial de este procedimiento es que la variedad que minimiza la acción en este procedimiento podría ser una que conecte con agujeros de gusano, como el caso a $T \neq 0$ distintas regiones dependiendo de la forma precisa del camino. La prescripción tanto libre como interactuante para nuestros estados excitados es clara una vez encontrada la geometría adecuada.

Otra aplicación dentro del formalismo es continuar el estudio de las condiciones de pegado fuera de la aproximación semiclásica. En este trabajo, la metodología de resolución para los campos es la de obtener una solución general para cada región en particular y luego pegar estas soluciones a través de regiones de pegado fijas. Por un lado, el pegado de soluciones ya es en sí un problema no trivial de resolver, como se observó en el caso de AdS Poincaré en la Sec. 4.2, aún siendo que las regiones elegidas eran las extendidas como vector de Killing tipo tiempo del borde a la geometría dual, aunque como se vio, el formalismo SvR admite pegados más generales. Estudiar si pueden elegirse otras regiones de pegado, resolver allí un campo único para la variedad completa y comparar con los resultados obtenidos en este trabajo podría ser de interés para explorar aspectos formales dentro del formalismo SvR. Considerar también correcciones gravitatorias a las geometrías explorando cómo se deforman las superficies de pegado es otro problema de interés, aún siendo posiblemente más complejo.

Como aplicaciones a otras áreas, se mencionan tres. En primer lugar, se pueden integrar los resultados y técnicas obtenidos en este trabajo, concretamente el estudio de estados excitados holográficos así como también las aplicaciones del pegado de variedades de distinta signatura, con herramientas de la teoría de información y teoría de campos algebraica (como entropía de entrelazado, el Hamiltoniano y flujo modular, la entropía relativa, la información mutua) para comprender mejor las teorías a ambos lados de la dualidad holográfica. El trabajo en desarrollo descrito en el Cap. 5 apunta precisamente en esta dirección.

Un objetivo también de interés sería estudiar si estos estados modifican en algún sentido las características de los agujeros negros que describen, como sus modos cuasi-normales. Basados en herramientas descritas en [54, 55] entre otros, puede estudiarse los modos cuasinormales de un agujero negro en términos de funciones de 3 puntos sobre geometrías de signatura mixta. Este trabajo me fue propuesto por el Prof. M. van Raamsdonk y es un proyecto en el futuro inmediato. En un sentido más amplio, dicho trabajo podría también ayudar a entender en mayor profundidad la relación entre la analiticidad en teoría de campos y la analiticidad en RG. Como se mencionó en el cuerpo del texto, esta propiedad pareciera jugar un rol mucho más importante en las primeras que en la segunda de las teorías, lo que sugiere un potencial conflicto dentro de AdS/CFT. Estudiar en profundidad este formalismo y la dualidad en casos de agujeros negros rotantes y cómo se pegan y cómo se entienden estas cosas podría ser otra dirección en la cual estudiar estos aspectos de la correspondencia.

Un último punto que podría también ser de interés¹ es ver cómo (si es que) se modifica la prescripción HRT [69] para geometrías de signatura mixta. Estas prescripciones, generalizaciones covariantes de la propuesta original de RT para el cálculo de entropías de entrelazamiento de forma holográfica, requieren de métodos de maximización y minimización sucesiva de distintos objetos geométricos dentro de la teoría de gravedad holográfica que podría verse modificados sobre variedades que presenten cambios de signatura, tales como las elaboradas en esta tesis.

En resumen, en este trabajo se definieron y describieron las propiedades de una familia de estados excitados que por construcción admiten siempre una interpretación en términos de una geometría dual, ver (6.0.1). A orden dominante en una expansión planar de la teoría de campos, estos son excitaciones coherentes, ver (6.0.2) y (6.0.3), de las cuales podemos calcular sus autovalores y por tanto representan una base del espacio de Hilbert. La coherencia, sin embargo se rompe al incluir correcciones, demostrando que la propiedad inmanente de los estados (6.0.1) es su carácter geométrico y no la coherencia. Se aplicó la construcción a casos con $T = 0$ y $T \neq 0$, lo que en el último caso requirió la construcción de un dual holográfico nuevo. Finalmente, se describieron aplicaciones presentes y futuras para el formalismo presentado.

¹Agradezco al Prof. Kostas Skenderis por esta idea.

Apéndice A

Renormalización holográfica

En este apéndice se buscan dos objetivos: en primer lugar, mostramos explícitamente la desaparición del segundo término en (4.2.7),

$$-\frac{g}{2} \left(\int_{\partial \mathcal{M}} \sqrt{\gamma} \Phi_0 n^\mu \partial_\mu \Phi_1 - \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} (\Phi_0)^3 \right) = 0 \quad (\text{A.0.1})$$

lo que conduce a la corrección de primer orden de la acción en la capa de masa que surge únicamente de (4.2.36); en segundo lugar, construimos los contratérminos adecuados necesarios para anular los términos de contacto en (4.2.29). El método de Renormalización Holográfica en el espacio regularizado (es decir, la prescripción ϵ), que revisaremos en lo que sigue, se ocupará de ambas cosas. Empezamos por ignorar los modos N en las soluciones, considerando sólo las soluciones NN que involucran el propagador en masa \mathcal{K}_ϵ definido en (4.2.13). Más adelante, mostraremos que si se consideran los modos N, los resultados no se ven afectados. Haremos este análisis en coordenadas AdS Poincaré, de modo de hacer un tratamiento más sencillo del procedimiento en dimensión general.

Por completitud, presentamos algunas fórmulas que serán útiles en lo que sigue. La solución de primer orden para hacer caso omiso de los modos N es

$$\Phi(z, t, \mathbf{x}) = \Phi_0(z, t, \mathbf{x}) + g \int_{\mathcal{M}_\epsilon} d\tilde{z} d\tilde{t} d\tilde{\mathbf{x}} \sqrt{\tilde{g}} \mathcal{G}_\epsilon(z, t, \mathbf{x}; \tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) (\Phi_0(\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}))^2 + O(g^2). \quad (\text{A.0.2})$$

con Φ_0 dado por la primera línea en (4.2.12) y \mathcal{G}_ϵ la función de Green de volumen a volumen de Feynman en el espacio regularizado, i.e.¹

$$(\square - m^2) \mathcal{G}_\epsilon(z, t, \mathbf{x}; \tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \delta(t - \tilde{t}) \delta(z - \tilde{z}) \quad \mathcal{G}_\epsilon(\epsilon, t, \mathbf{x}; \tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) = 0.$$

La propiedad relevante de \mathcal{G}_ϵ que usaremos en lo que sigue es la relación entre los propagadores de volumen a volumen y de volumen a borde \mathcal{K}_ϵ ,

$$z \partial_z (\mathcal{G}_\epsilon(z, t, \mathbf{x}; \tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}))|_{z=\epsilon} = -\epsilon^\Delta \mathcal{K}_\epsilon(\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}; t, \mathbf{x}). \quad (\text{A.0.3})$$

La acción en la capa de masa involucra derivadas radiales de \mathcal{K}_ϵ *epsilon*, que conducen a divergencias (ver Ap. A) al tomar el límite de $\epsilon \rightarrow 0$. La expansión que será útil a continuación es la siguiente

$$\begin{aligned} \epsilon^{\frac{d}{2}} K_\nu(q\epsilon) &= (-1)^\nu \frac{1}{2} \left(\frac{q}{2}\right)^\nu \epsilon^{\frac{d}{2}+\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k+1) + \psi(k+\nu+1) - 2 \log\left(\frac{q\epsilon}{2}\right)}{(v+k)!k!} \left(\frac{q\epsilon}{2}\right)^{2k} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{q}{2}\right)^{-\nu} \epsilon^{\frac{d}{2}-\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{(v-k-1)!}{k!} \left(\frac{q\epsilon}{2}\right)^{2k}, \quad \nu \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (\text{A.0.4})$$

donde $\psi(x)$ es la función DiGamma. Los términos divergentes en la acción en la capa de masa vendrán principalmente de la segunda línea anterior, conteniendo potencias enteras de q^2 que conducen a términos de contacto en el espacio de configuración y una divergencia logarítmica adicional que surge de la primera

¹Ver Sec. 3.2.1 en [44] para un estudio más detallado.

línea de $k = 0$ que conduce a la anomalía conforme [62]. Construimos a continuación los contratérminos apropiados para cada uno de estos términos divergentes.

Insertando (A.0.2) en (4.2.6) se encuentra a orden g

$$S = \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{M}_L} \epsilon^{-\Delta} \phi^L (z \partial_z \Phi_0) |_{z=\epsilon} + \frac{g}{2} \int_{\partial \mathcal{M}_L} \epsilon^{-\Delta} \phi^L (z \partial_z \Phi_1) |_{z=\epsilon} + \frac{g}{2} \int_{\mathcal{M}_L} \sqrt{\tilde{g}} (\Phi_0)^3 - \frac{g}{3} \int_{\mathcal{M}_L} \sqrt{\tilde{g}} (\Phi_0)^3 + O(g^2), \quad (\text{A.0.5})$$

donde la normal que apunta al exterior es $n^\mu \partial_\mu = -z \partial_z$. La cancelación entre el segundo y el tercer término en (A.0.5) se sigue al usar (A.0.3) en el segundo término de (A.0.5), que lleva a [44]

$$\frac{g}{2} \int_{\partial \mathcal{M}_L} \epsilon^{-\Delta} \phi^L (z \partial_z \Phi_1) |_{z=\epsilon} = -\frac{g}{2} \int_{\mathcal{M}_L} \sqrt{\tilde{g}} (\Phi_0)^2 \left(\int_{\partial \mathcal{M}_L} \mathcal{K}_\epsilon(\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}; t, \mathbf{x}) \phi^L(t, \mathbf{x}) \right) = -\frac{g}{2} \int_{\mathcal{M}_L} \sqrt{\tilde{g}} (\Phi_0)^3. \quad (\text{A.0.6})$$

lo que exactamente cancela el tercer término en (A.0.5). Uno puede preocuparse de que en presencia de modos N, la integral entre paréntesis ya no da Φ_0 , ya que falta la segunda línea en (4.2.12). Sin embargo, la cancelación persiste al considerar las contribuciones de Σ^\pm en (4.2.2). Un resultado útil de la construcción del SvR es que se puede escribir, en la variedad completa de signatura mixta \mathcal{M} , la solución de campo a (4.2.3) como (4.2.40) englobando tanto la información de los modos NN como la de los modos N en términos de un propagador \mathcal{K}_ϵ ahora extendido analíticamente. Por lo tanto (A.0.6) sigue siendo válido siempre y cuando integremos en toda la variedad \mathcal{M} .

Este argumento se extiende a todo el proceso de renormalización holográfica: pieza a pieza en la prescripción de SvR, las regiones Σ entorpecen el procedimiento general para la regularización de las divergencias, manifestándose en modos normalizables de la solución. En el marco de la prescripción de SvR, el hecho de que al final se considere una variedad cuyos únicos bordes son bordes asintóticos conformes, garantiza que luego del pegado se recupera la cancelación tradicional de las divergencias mediante los contratérminos, como lo hace en el caso Euclídeo estandar [62, 13, 77]. En lo que sigue, consideramos que se trabaja ya sobre la variedad completa.

Ahora nos dedicamos a construir los contratérminos necesarios para obtener una acción sobre la capa de masa finita. Las divergencias en ϵ de (A.0.5) surgen del primer término². Cada una de estas divergencias toma la forma de términos de borde, y como tal, puede ser sustraída sin alterar las ecuaciones de movimiento. Vamos a trabajar en el ejemplo de $nu = 1$ y $nu = 2$. El caso general de $\nu \in \mathbb{N}$ sigue el mismo procedimiento. Por completitud, mencionamos que el tratamiento del caso $\nu = 0$, correspondiente al caso Breitenlohner-Freedman de masa, difiere ligeramente del caso general. La razón es un decaimiento logarítmico en el campo cuando se aproxima al borde. La condición de contorno se modifica a $\Phi(\epsilon, t, \mathbf{x}) = \epsilon^\Delta \ln(\epsilon) \phi(t, \mathbf{x})$ y un resultado interesante a señalar es que el coeficiente en (4.2.35) cambia a $\Gamma(\Delta)/(2\pi^\Delta)$ lo cual puede ser fácilmente visto como necesario ya que $\nu/\Gamma(\nu)$ haría que, de lo contrario, el resultado fuera trivial [65].

Contra-términos para $\nu = 1$

Usando la expansión (A.0.4) para $nu = 1$, los términos dominantes en *epsilon* para la derivada normal en el primer término en A.0.5 se convierten en

$$\begin{aligned} (z \partial_z \Phi_0) |_{z=\epsilon}(t, \mathbf{x}) &= \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \int_{\partial \mathcal{M}_L} \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) e^{-i\omega(t-\tilde{t}) + i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})} \epsilon^{\frac{d}{2}-1} z \partial_z \left(\frac{z^{\frac{d}{2}} K_1(qz)}{\epsilon^{\frac{d}{2}} K_1(q\epsilon)} \right)_{z=\epsilon} \\ &\approx \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \int_{\partial \mathcal{M}_L} \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) e^{-i\omega(t-\tilde{t}) + i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})} \epsilon^{\frac{d}{2}-1} \left(\left(\frac{d}{2} - 1 \right) + q^2 \epsilon^2 \ln \left(\frac{e^\gamma \epsilon}{2} \right) + q^2 \epsilon^2 \ln(q) \right) \\ &\approx \left(\frac{d}{2} - 1 \right) \Phi_0 |_{z=\epsilon} - \ln(\tilde{\epsilon}) (\square_\gamma \Phi_0) |_{z=\epsilon} + \epsilon^{\frac{d}{2}+1} \times \\ &\quad \times \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \int_{\partial \mathcal{M}_L} \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) q^2 \ln(q) e^{-i\omega(t-\tilde{t}) + i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})} \end{aligned} \quad (\text{A.0.7})$$

²Los términos de volumen no contienen divergencias en *epsilon*, ver [65].

donde usamos la relación (5.3.7), $\tilde{\epsilon} \equiv \frac{1}{2}\epsilon e^\gamma$, γ es y $\square_\gamma \equiv \epsilon^2 \eta^{ij} \partial_i \partial_j$, con $i, j = 1, \dots, d$ es el D'Alambertiano inducido en la frontera. El primer término de (A.0.5) puede por lo tanto escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{M}_L} \phi^L \epsilon^{-\Delta} (z \partial_z \Phi_0)|_{z=\epsilon} &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2} - 1 \right) \int_{\partial \mathcal{M}_L} \sqrt{\gamma} (\Phi_0)^2 - \frac{1}{2} \ln(\tilde{\epsilon}) \int_{\partial \mathcal{M}_L} \sqrt{\gamma} \Phi_0 \square_\gamma \Phi_0 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{M}_L} \phi^L(t, \mathbf{x}) \int_{\partial \mathcal{M}_L} \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} q^2 \ln(q) e^{-i\omega(t-\tilde{t}) + i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})} \end{aligned} \quad (\text{A.0.8})$$

La primera línea de A.0.8 muestra que los términos divergentes de la acción en la capa de masa (en el límite de $\epsilon \rightarrow 0$) pueden ser escritos como funciones locales de los valores de límite $\Phi_0|_\epsilon = \epsilon^{d-\Delta} \phi^L$, por lo tanto pueden ser eliminados añadiendo términos idénticos con signos opuestos. La segunda línea en (A.0.8) es el término relevante en (4.2.29) y da lugar a la función de 2 puntos para un operador conforme de peso conforme Δ , como se muestra en el Apén. B. Quisiéramos mencionar que en la prescripción de ϵ que seguimos en el presente trabajo, la relación entre la condición de límite para el campo en el límite radial y la fuente CFT es simplemente $\Phi_0|_\epsilon = \epsilon^{d-\Delta} \phi^L$ en comparación con $\Phi_0 = z^{d-\Delta} \phi^L + \dots$ para $z \ll 1$ en la prescripción asintótica. La condición límite simple (5.3.7) evita el procedimiento iterativo que se encuentra en la determinación de los contra-términos en [62]. El segundo término en la primera línea de la primera línea de (A.0.8) que involucra $\ln \epsilon$ da lugar a la anomalía conforme de la materia de la CFT [44, 62]. Note que este término aparece como consecuencia de que ν es un entero positivo.

Los términos a agregar para $\nu = 1$ son

$$S_{ct; \nu=1} = -\frac{1}{2} (d - \Delta) \int_{\partial \mathcal{M}} \sqrt{\gamma} (\Phi_0)^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{M}} \sqrt{\gamma} \ln(\tilde{\epsilon}) \Phi_0 (\square_\gamma)^\nu \Phi_0. \quad (\text{A.0.9})$$

Contra-términos para $\nu = 2$

Una vez comprendidos los pasos del apartado anterior, todos los demás casos se siguen de forma directa. Obtenemos los contratérminos para el caso $\nu = 2$ con el fin de confirmar que obtenemos la misma estructura de contratérminos que (A.0.9) más un término cuya forma definirá la forma estándar del resto de los contratérminos para $\nu > 2$. Por $\nu = 2$, la expansión (A.0.4) permite escribir el primer término en (A.0.5) como

$$\begin{aligned} (z \partial_z \Phi_0)_\epsilon &= \left(\frac{d}{2} - 2 \right) \Phi_0|_\epsilon + \frac{1}{2} (-1)^1 (\square_\gamma) \Phi_0|_\epsilon + \frac{1}{4} (-1)^2 \ln(\tilde{\epsilon}) (\square_\gamma)^2 \Phi_0|_\epsilon \\ &+ \frac{1}{4} \epsilon^{\frac{d}{2}+2} \int_{\partial \mathcal{M}} \int_{\partial \mathcal{M}}^{\tilde{\mathbf{x}}} \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) q^4 \ln(q) e^{-i\omega(t-\tilde{t}) + i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})} \end{aligned}$$

donde $\tilde{\epsilon}$ se define para cada ν de forma de absorber cada término logarítmico que no sea $\ln p$. La parte de interacción de la acción se cancela para todo ν , ver (A.0.6), por lo que una vez más nos quedamos sólo con el término libre

$$\frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{M}}^{\text{tx}} \phi^L \epsilon^{-\frac{d}{2}-1} (z \partial_z \Phi_0)_\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2} - \nu \right) \int_{\partial \mathcal{M}}^{\text{tx}} \sqrt{\gamma} \Phi_0^2 - \frac{1}{4} \int_{\partial \mathcal{M}}^{\text{tx}} \sqrt{\gamma} \Phi_0 \square_\gamma \Phi_0 + \frac{1}{8} \int_{\partial \mathcal{M}}^{\text{tx}} \sqrt{\gamma} \ln(\tilde{\epsilon}) \Phi_0 (\square_\gamma)^2 \Phi_0 \quad (\text{A.0.10})$$

$$- \frac{1}{8} \int_{\partial \mathcal{M}}^{\text{tx}} \phi^L(t, \mathbf{x}) \int_{\partial \mathcal{M}}^{\omega \mathbf{k}} q^4 \ln(q) e^{-i\omega(t-\tilde{t}) + i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})} \quad (\text{A.0.11})$$

Los términos en (A.0.10) están listos para ser removido como contratérminos

$$S_{ct; \nu=2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{2} - \nu \right) \int_{\partial \mathcal{M}}^{\text{tx}} \sqrt{\gamma} \Phi_0^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{M}}^{\text{tx}} \sqrt{\gamma} \Phi_0 \square_\gamma \Phi_0 - \frac{1}{4} \int_{\partial \mathcal{M}}^{\text{tx}} \sqrt{\gamma} \ln(\tilde{\epsilon}) \Phi_0 (\square_\gamma)^2 \Phi_0$$

donde cada campo anterior se evalúa en $z = \epsilon$ y (A.0.11) coincide con el propagador correcto para $\nu = 2$ [44]

$$\frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{M}}^{\text{tx}} \int_{\partial \mathcal{M}}^{\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}} \phi^L(t, \mathbf{x}) \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) \left(-\frac{1}{4} \int_{\partial \mathcal{M}}^{\omega \mathbf{k}} q^4 \ln(q) e^{-i\omega(t-\tilde{t}) + i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})} \right) = \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{M}}^{\text{tx}} \int_{\partial \mathcal{M}}^{\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}} \frac{4\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}} \frac{\phi^L(t, \mathbf{x}) \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})}{((\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})^2 - (t-\tilde{t})^2 + i0^+)^\Delta}$$

Contra-términos para ν general

Llevando a cabo el mismo procedimiento para $\nu \in \mathbb{N}$ que uno encuentra: (i) ν términos locales divergentes de la forma $\Phi_0(\square_\gamma)^i \Phi_0$ con $i = 0, \dots, (\nu - 1)$ con $i = 0, \dots, (\nu - 1)$, (ii) un único término logarítmico divergente de la forma $(-1)^\nu \ln(\epsilon) \Phi_0(\square_\gamma)^\nu \Phi_0$ que conduzca a la anomalía conforme y (iii) un término de $\ln(p) p^{2\nu}$ que da lugar a la función de 2 puntos $\sim |x - y|^{-2\Delta}$.

El caso de ν no entero implica que la expansión (A.0.4) ya no es la indicada. El caso general se sigue de forma análoga en todo caso. El detalle más relevante es que las contribuciones logarítmicas están ausentes, pero ahora $p^{2\nu}$ ya no corresponda a una función analítica y ya no es en consecuencia una potencia de la función δ . Se puede demostrar que la contribución $p^{2\nu}$ para estos casos es la que da origen al correlador.

Apéndice B

Integrales

En este apéndice mostramos mayormente integrales en el espacio de momentos que llevan a la forma precisa de los correladores. En particular, mostraremos cómo se obtienen los correladores de la CFT a partir de cálculos holográficos en AdS_{2+1} en coordenadas Globales, AdS_{d+1} en coordenadas de Poincaré y BTZ en coordenadas exteriores. Para el caso de Poincaré, también se muestra la forma en que en [65] se obtiene la función de 3 puntos usando las isometrías del espacio de AdS.

B.1. Correladores Globales

En esta primera sección, nos ocuparemos en demostrar cómo surge en (4.2.35) el ordenamiento temporal, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Psi_{\phi_+} | T[\mathcal{O}(t, \varphi) \mathcal{O}(t', \varphi')] | \Psi_{\phi_-} \rangle}{\langle \Psi_{\phi_+} | \Psi_{\phi_-} \rangle} \Big|_c &\equiv -i \frac{\delta^2 S^0}{\delta \phi_L(t, \varphi) \delta \phi_L(t', \varphi')} \Big|_{\phi_L=0} \\ &= \frac{\Delta-1}{2\pi^2 i} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega e^{-i\omega(t-t') + il(\varphi-\varphi')} \frac{B(\omega, l)}{A(\omega, l)} \\ &= \frac{(\Delta-1)^2}{2^{\Delta-1} \pi} \left[\cos((t-t')(1-i\epsilon)) - \cos(\varphi-\varphi') \right]^{-\Delta} \end{aligned} \quad (\text{B.1.1})$$

además de hacer explícitamente la integral de momentos involucrada. En el proceso, veremos que esto demuestra también las expresiones (4.2.34) y (4.2.33).

Al igual que en el Apéndice anterior, es más fácil realizar la integración para valores precisos de $\Delta = 2, 3, \dots$ para entender los pasos a seguir y comprender su generalización para Δ arbitrario. En este caso, estudiaremos $\Delta = 2$.

Comenzamos poniendo sin pérdida de generalidad $t' = 0$ y $\varphi' = 0$,

$$\frac{\Delta-1}{2\pi^2 i} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega e^{-i\omega t + il\varphi} \frac{B(\omega, l)}{A(\omega, l)}, \quad (\text{B.1.2})$$

donde se puede ver que por teorema de residuos $t \geq 0$ permite cerrar la integral por abajo/arriba y convertir la integral en una suma sobre los residuos del integrando. Para $t \geq 0$ se termina sumando sobre $\omega = \pm\omega_{nl} = \pm(2n + |l| + \Delta)$, ver Fig. 4.2. Tomemos primero el caso de $\Delta t > 0$, i.e. $\omega = 2n + |l| + \Delta$

$$\frac{\Delta-1}{2\pi^2 i} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{F}} d\omega e^{-i\omega t + il\varphi} \frac{B(\omega, l)}{A(\omega, l)} = \frac{1}{\pi \Gamma(\Delta-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i(2n+|l|+\Delta)t + il\varphi} \frac{\Gamma(n+\Delta)\Gamma(|l|+n+\Delta)}{n!(|l|+n)!}, \quad (t > 0), \quad (\text{B.1.3})$$

donde se usó la forma explícita de A y B definidas en (4.1.28). El cociente a sumar es fácil de comprender usando valores naturales de Δ , donde se escribe como un polinomio finito de n y l por el cociente entre factoriales, i.e.

$$\frac{\Gamma(n+\Delta)\Gamma(|l|+n+\Delta)}{n!(|l|+n)!} = \begin{cases} (n+1)(l+n+1) & \Delta = 2 \\ (1+n)(2+n)(1+l+n)(2+l+n) & \Delta = 3 \\ (1+n)(2+n)(3+n)(1+l+n)(2+l+n)(3+l+n) & \Delta = 4 \end{cases}. \quad (\text{B.1.4})$$

Ambas sumas pueden hacerse sin problemas en Mathematica para cada Δ particular a menos de un detalle. La suma en n requiere un regulador $\epsilon > 0$ que puede incorporarse como $e^{-\epsilon n}$ de forma de regularizar las contribuciones para $n \rightarrow \infty$. El regulador puede incorporarse de la forma $e^{-int(1-i\epsilon)}$ a la exponencial temporal aprovechando que $t > 0$. El resultado para $\Delta = 2$ es

$$\left. \frac{\langle \Psi_{\phi_+} | T[\mathcal{O}(t, \varphi)\mathcal{O}(t', \varphi')] | \Psi_{\phi_-} \rangle}{\langle \Psi_{\phi_+} | \Psi_{\phi_-} \rangle} \right|_c = \frac{1}{2\pi} \left[\cos((t-t')(1-i\epsilon)) - \cos(\varphi - \varphi') \right]^{-2}, \quad (\text{B.1.5})$$

de acuerdo con (4.2.35). Los casos de mayor Δ se siguen de la misma forma.

Comprobaremos la consistencia del regulador incorporado, eligiendo $t < 0$ y demostrando que la prescripción es consistente. De haber considerado el caso $t < 0$, la integral se hubiese cerrado en el sentido contrario y los residuos relevantes serían $\omega = -\omega_n$. Las sumatorias nuevamente pueden hacerse aunque el regulador requiere cuidado. La exponencial temporal será $\sim e^{+int}$ y dado que el regulador aún es $e^{-\epsilon n} = e^{+\epsilon tn}$, dado que $t < 0$, el mismo se reacomoda como $e^{+int(1-i\epsilon)}$, en acuerdo con el resultado (B.1.5).

Un último comentario sobre el regulador. En rigor de verdad, el regulador $i\epsilon$ es adecuado para separar regiones dentro y fuera del cono de luz, que requiere $-t^2 + \varphi^2 \geq 0$ y no solo un cambio en el signo de t . El argumento expuesto arriba puede pensarse como el caso en que $\varphi = 0$ que corresponde a considerar solo distancias tipo tiempo y atravesar el cono de luz por su vértice al pasar $t \geq 0$. En todo caso, dado que los correladores físicos de teoría de campos son funciones analíticas, una vez encontrada la forma correcta del regulador para atravesar de algún modo el cono de luz la forma de todo el correlador queda precisada para todo el espacio. Volveremos a usar esto

Es directo comprobar que (4.2.33) se sigue de los argumentos expuestos con la salvedad de que la suma sobre residuos involucra siempre una suma sobre exponenciales reales decaentes, de forma que el regulador no es nunca necesario, en acuerdo con lo que se espera de un correlador Euclídeo. El caso de (4.2.34) es aún más sencillo, puesto que ya está escrito en términos de una suma sobre residuos del tipo presentado y contiene siempre exponenciales reales que regulan la suma en n . Esto concluye con los objetivos de la presente sección.

B.2. Correladores Poincaré

Llevaremos a cabo algunas integrales de ejemplo que conducen a los resultados (4.2.33)-(4.2.35). También revisamos el método utilizado en [65] para integrar (4.2.41).

Primer caso:

Consideraremos los casos $\nu = \sqrt{(d/2)^2 + m^2} \in \mathbb{N}$. Esto lleva a la aparición de logaritmos en las expansiones de las funciones de Bessel, ver (4.2.29), que debemos transformar de nuevo en espacio de configuración. Como ejemplo, (4.2.35) se obtiene de (4.2.28) haciendo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\Delta} (z \partial_z \Phi_0^L) |_{z=\epsilon} = \int d\tilde{t} \tilde{\mathbf{x}} \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) \left(\frac{(-4)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)^2} \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} q^{2\nu} \ln(q) e^{-i\omega(t-\tilde{t}) + i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})} \right). \quad (\text{B.2.1})$$

La integral de momentos entre paréntesis no es convergente en el sentido tradicional y debe entenderse en el sentido de distribuciones. Damos sentido a la integral de momento en (B.2.1) definiendo

$$\int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} q^{2\nu} \ln(q) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} \equiv \lim_{\nu \rightarrow \mathbb{N}} \frac{1}{2} \partial_\nu \left(\int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} q^{2\nu} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right) \quad (\text{B.2.2})$$

con ν en el lado derecho entendido como un parámetro continuo. En lo que sigue, ambos d y ν se entienden como parámetros continuos. Las integrales se hacen dentro de un dominio donde convergen en el sentido tradicional, y la integral deseada se define como la continuación analítica del resultado regular. Referimos al lector a [125, 126] para una formalización completa de estos conceptos.

Estamos interesados en demostrar

$$\int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} q^{2\nu} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = i \frac{C(d, \nu)}{(\mathbf{x}^2 - t^2 + i0^+)^{\Delta}}, \quad C(d, \nu) \equiv \frac{4^\nu \Gamma\left(\frac{d}{2} + \nu\right)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(-\nu)}, \quad (\text{B.2.3})$$

donde $q^2 = \mathbf{k}^2 - \omega^2 - i0^+$. Haremos uso de la invariancia de Lorentz para simplificar nuestros cálculos, calculando la integral anterior primero para un intervalo espacial $(x^\mu)^2 = \mathbf{X}^2 > 0$ y luego en un tiempo puramente temporal $(x^\mu)^2 = -T^2 < 0$, desde donde se puede recuperar el resultado general.

Intervalo tipo espacio: Una transformación de Lorentz permite ir a un marco de referencia $x^\mu = (0, \mathbf{X})$. Escribir \mathbf{k} en coordenadas esféricas y usar 3.915 5. en [95] conduce a integrales de ω y $k = \sqrt{b f k^2}$ que pueden ser calculadas explícitamente.

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} (-\omega^2 + \mathbf{k}^2 - i0^+)^{\nu} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} &= \frac{1}{X^{\frac{d-3}{2}}} \int_0^\infty \frac{dk k^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d+1}{2}}} J_{\frac{d-3}{2}}(kX) \int_{-\infty}^\infty d\omega (-\omega^2 + k^2 - i0^+)^{\nu} \\ &= i \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(-\nu - \frac{1}{2}) (1 - i0^+)}{X^{\frac{d-3}{2}} (2\pi)^{\frac{d+1}{2}} \Gamma(-\nu)} \int_0^\infty dk k^{\frac{1+d+4\nu}{2}} J_{\frac{d-3}{2}}(kX) \\ &= i \frac{C(d, \nu)}{X^{2\Delta}} (1 - i0^+). \end{aligned}$$

donde sólo se mantuvieron los principales términos en $i0^+$. Volviendo al marco de referencia original, se obtiene

$$\int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} q^{2\nu} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = i \frac{C(d, \nu)}{(\mathbf{x}^2 - t^2)^\Delta} (1 - i0^+), \quad \text{for } (x^\mu)^2 > 0. \quad (\text{B.2.4})$$

Intervalo tipo tiempo: Elegimos el marco de referencia $x^\mu = (T, \mathbf{0})$, escribir \mathbf{k} en coordenadas esféricas, y realizar la obtención de la integral angular

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} (-\omega^2 + \mathbf{k}^2 - i0^+)^{\nu} e^{-i\omega T} &= \frac{(4\pi)^{\frac{1-d}{2}}}{\pi \Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^\infty dk k^{d-2} \left(\int_{-\infty}^\infty d\omega (-\omega^2 + k^2 - i0^+)^{\nu} e^{-i\omega T} \right) \\ &= i \frac{2^{\frac{3}{2}-d+\nu} (1 - i0^+)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d-1}{2}) \Gamma(-\nu)} \frac{1}{(-T^2)^{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}}} \int_0^\infty dk k^{d+\nu-\frac{3}{2}} K_{\nu+\frac{1}{2}}(ikT(1 - i0^+)) \\ &= i \frac{C(d, \nu)}{(\mathbf{x}^2 - t^2)^\Delta} (1 + i0^+). \end{aligned}$$

Note el cambio de signo del desplazamiento $i0^+$ con respecto a (B.2.4) como resultado del coeficiente negativo que sale de la última integral. Volviendo al marco de referencia original, uno tiene

$$\int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} q^{2\nu} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = i \frac{C(d, \nu)}{(\mathbf{x}^2 - t^2)^\Delta} (1 + i0^+), \quad \text{for } (x^\mu)^2 < 0. \quad (\text{B.2.5})$$

Intervalo general y ordenamiento tipo tiempo: Habiendo conservado $i0^+$ hasta el final en ambos (B.2.4) y (B.2.5) podemos resumir ambos resultados en términos del propagador de Feynman. De hecho, expandiendo en $i0^+$ el propagador Feynman [127]

$$\frac{1}{(x^2 - t^2 + i0^+)^\Delta} \approx \frac{1}{(x^2 - t^2)^\Delta} \left(1 - i0^+ \frac{2\Delta}{x^2 - t^2} \right) \quad (\text{B.2.6})$$

comprobamos que coincide con las prescripciones de $i0^+$ de (B.2.4) y (B.2.5), obteniendo así (B.2.3). Esto confirma que las inserciones de $i0^+$ en (4.2.12) llevan al propagador de Feynman.

Conclusion: A partir de la definición (B.2.2) encontramos que,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} q^{2\nu} \ln(q) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} &\equiv \lim_{\nu \rightarrow \mathbb{N}} \frac{1}{2} \partial_\nu \left(\int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} q^{2\nu} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \mathbb{N}} \frac{i}{2} \frac{\partial_\nu C(d, \nu)}{(\mathbf{x}^2 - t^2 + i0^+)^\Delta} + \lim_{\nu \rightarrow \mathbb{N}} \frac{i}{2} \frac{C(d, \nu) \ln(\mathbf{x}^2 - t^2 + i0^+)}{(\mathbf{x}^2 - t^2 + i0^+)^\Delta} \\ &= i \frac{2}{\pi^{d/2}} \frac{(-4)^{\nu-1} \Gamma(\Delta) \Gamma(\nu+1)}{(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})^2 - (t - \tilde{t})^2 + i0^+} \end{aligned}$$

donde usamos que $C(d, \nu)$ en la segunda línea desaparece en el límite $\nu \rightarrow \mathbb{N}$. Insertando en (B.2.1), finalmente encontramos

$$\int d\tilde{\mathbf{x}} \phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) \left(\frac{(-4)^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)^2} \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} q^{2\nu} \ln(q) e^{-i\omega(t-\tilde{t})+i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})} \right) = i \frac{2\nu\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\Gamma(\nu)} \int d\tilde{\mathbf{x}} \frac{\phi^L(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})}{((\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})^2 - (t-\tilde{t})^2 + i0^+)^{\Delta}}.$$

Caso euclidiano: Este caso es completamente análogo al caso espacial considerado anteriormente, incluyendo ahora ω como parte del vector que se escribirá en coordenadas esféricas. Como resultado, no se necesita $i0^+$ y no aparece ningún factor i en el frente de la integral,

$$\int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} (\omega^2 + \mathbf{k}^2)^\nu e^{i\omega(\tau-\tilde{\tau})+i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})} = \frac{C(d, \nu)}{((\tau-\tilde{\tau})^2 + (\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})^2)^\Delta}.$$

Segundo caso:

Las integrales de momento que conducen a (4.2.34) son de naturaleza muy diferente. El integrando surge de la expansión (4.2.30),

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\Delta} (z\partial_z \Phi_0^L)|_{z=\epsilon} = \int_+ d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{x}} \phi^+(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}}) \left(\pi \frac{4^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)^2} \int_+ \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) e^{-i\omega((T_+ - i\tilde{\tau}) - t) + i\mathbf{k}(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x})} (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^\nu \right) + \dots \quad (\text{B.2.7})$$

donde sólo hemos mantenido la integral de \mathcal{M}_+ para ser concretos; la integral de \mathcal{M}_- es análoga. Dos puntos clave en (B.2.7) son que la función Heaviside restringe el dominio de integración a momentos temporales y que la integral en ω ya tiene a τ como un regulador automático $e^{-\omega\tilde{\tau}}$, dado que $\tilde{\tau} > 0$. Usando la notación $(T_+ - t) \rightarrow T$ y $(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{X}$ se escribe

$$\begin{aligned} & \int_+ \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) e^{-\omega\tilde{\tau}} e^{-i\omega T + i\mathbf{k}\mathbf{X}} (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^\nu \\ &= \frac{1}{X^{\frac{d-3}{2}}} \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{d+1}{2}}} \theta(\omega^2 - k^2) e^{-\omega\tilde{\tau}} e^{-i\omega T} k^{\frac{d-1}{2}} (\omega^2 - k^2)^\nu J_{\frac{d-3}{2}}(kX) \\ &= \frac{1}{X^{\frac{d-3}{2}}} \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^{\frac{d+1}{2}}} k^{\frac{d+1}{2}+2\nu} J_{\frac{d-3}{2}}(kX) \left(\int_1^\infty dr e^{-rk\tilde{\tau}} e^{-irkT} (r^2 - 1)^\nu \right) \\ &= \frac{2^{\nu-\frac{d}{2}} \Gamma(\nu+1)}{\pi^{\frac{d}{2}+1} X^{\frac{d-3}{2}} (i(T-i\tilde{\tau}))^{\nu+\frac{1}{2}}} \int_0^\infty dk k^{\frac{d}{2}+\nu} J_{\frac{d-3}{2}}(kX) K_{\nu+\frac{1}{2}}(ik(T-i\tilde{\tau})) \\ &= \frac{\nu\Gamma(\nu)\Gamma(\Delta)}{2^{1-2\nu}\pi^{\frac{d}{2}+1}} \frac{1}{(-(T-i\tilde{\tau})^2 + X^2)^\Delta} \end{aligned} \quad (\text{B.2.8})$$

donde hemos escrito \mathbf{k} en coordenadas esféricas, nos deshicimos de la función Heaviside en la segunda línea introduciendo $r = \omega k^{-1}$ con $r \in [1, \infty)$. Volviendo (B.2.7), obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\Delta} (z\partial_z \Phi_0^L)|_{z=\epsilon} = \frac{2\nu\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\Gamma(\nu)} \int_+ d\tilde{\tau} d\tilde{\mathbf{x}} \frac{\phi^+(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}})}{(-(t - (T_+ - i\tilde{\tau}))^2 + (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})^2)^\Delta}. \quad (\text{B.2.9})$$

Tenga en cuenta que este resultado puede obtenerse del caso Lorentziano con un intervalo de tiempo de $(t - \tilde{t})$ cambiando $\tilde{t} \rightarrow (T_\pm - i\tilde{\tau})$ sobre $\partial\mathcal{M}_\pm$. Al mismo tiempo, esta prescripción es consistente con la convergencia de las integrales de momento llevadas a cabo en (B.2.8). Esto motiva y justifica la distancia compleja definida en (4.2.31).

Intervalo tipo tiempo:

En este caso tomamos $(T_+ - t, \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = (T, 0)$ y sin cambiar la notación damos a T una parte imaginaria negativa $-i\tilde{\tau}$ de forma de escribir solo una exponencial. El integrando se manipula como

$$\begin{aligned} \pi \frac{4^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)^2} \int_+ \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) e^{-i\omega T} (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^\nu &= \frac{4^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)^2} \frac{(4\pi)^{\frac{1-d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_0^\infty dk d\omega \theta(\omega^2 - k^2) e^{-i\omega T} k^{d-2} (\omega^2 - k^2)^\nu \\ &= \frac{4^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)^2} \frac{(4\pi)^{\frac{1-d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_0^\infty dk \int_1^\infty dr e^{-irkT} k^{d+2\nu-1} (r^2 - 1)^\nu \end{aligned}$$

y nos deshicimos de la función Heaviside integrando en $r \in [1, \infty)$.

Tercer caso:

Ahora probamos (4.2.38) que muestra que los modos normalizables Lorentzianos pueden ser escritos en términos de un propagador en AdS convolucionado con una fuente Euclideana a una distancia compleja. Consideramos sólo el término que contiene ϕ^- ,

$$\frac{2^{1-\nu}\pi}{\Gamma(\nu)} \int_+ \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}} e^{-i\omega(t-(T_- - i\tilde{r})) + i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})} z^{\frac{d}{2}} J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z).$$

Aprovechando el ejemplo anterior, primero consideramos el caso Lorentziano

$$\frac{2^{1-\nu}\pi}{\Gamma(\nu)} \int_+ \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}} e^{-i\omega(t-\tilde{r}) + i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})} z^{\frac{d}{2}} J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z).$$

y después, analíticamente, continuamos $\tilde{r} \rightarrow (T_\pm - i\tilde{r})$ a $\partial\mathcal{M}_\pm$.

Intervalo tipo espacio: Considere el marco de referencia $x^\mu = (0, \mathbf{X})$

$$\frac{2^{1-\nu}\pi}{\Gamma(\nu)} \int_+ \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}} z^{\frac{d}{2}} J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z). \quad (\text{B.2.10})$$

escribiendo \mathbf{k} en coordenadas esféricas y haciendo $a = kX$ y $b = k^{-1}\sqrt{\omega^2 - k^2}$ con $a, b \in [0, \infty)$, la integral se convierte en

$$\begin{aligned} (\text{B.2.10}) &= \frac{2^{1-\nu}\pi}{\Gamma(\nu)} \frac{z^{\frac{d}{2}}}{X^{\frac{d-3}{2}}} \int_+ \frac{d\omega dk}{(2\pi)^{\frac{d+1}{2}}} (\omega^2 - k^2)^{\frac{\nu}{2}} k^{\frac{d+1}{2}} J_{\frac{d-3}{2}}(kX) J_\nu(\sqrt{\omega^2 - k^2} z) \\ &= \frac{2^{1-\nu}\pi}{\Gamma(\nu)} \frac{z^{\frac{d}{2}} X^{-d-\nu}}{(2\pi)^{\frac{d+1}{2}}} \int_0^\infty da a^{\frac{d}{2} + \nu + \frac{1}{2}} J_{\frac{d-3}{2}}(a) \left(\int_0^\infty db \frac{b^{\nu+1}}{\sqrt{b^2 + 1}} J_\nu\left(ba \frac{z}{X}\right) \right) \\ &= \frac{2^{1-\nu}\pi}{\Gamma(\nu)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{X}{z}} \frac{z^{\frac{d}{2}} X^{-d-\nu}}{(2\pi)^{\frac{d+1}{2}}} \int_0^\infty da a^{\frac{d}{2} + \nu} J_{\frac{d-3}{2}}(a) K_{\nu + \frac{1}{2}}\left(\frac{az}{X}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2} \Gamma(\nu)} \frac{z^\Delta}{(X^2 + z^2)^\Delta}. \end{aligned}$$

Intervalo tipo tiempo: Considerando $x^\mu = (T, 0)$

$$\frac{2^{1-\nu}\pi}{\Gamma(\nu)} \int_+ \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}} e^{-i\omega T} z^{\frac{d}{2}} J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z), \quad (\text{B.2.11})$$

Escribimos \mathbf{k} en coordenadas esféricas y cumplimos la condición Heaviside definiendo $\tilde{b} = \omega^{-1}\sqrt{\omega^2 - k^2}$ e integrando en $\tilde{b} \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} (\text{B.2.11}) &= \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \frac{(4\pi)^{\frac{1-d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} z^{\frac{d}{2}} \int_0^1 d\tilde{b} \frac{\tilde{b}^{\nu+1}}{(1-\tilde{b}^2)^{\frac{\nu+3}{2}}} \left(\int_0^\infty dk e^{-i\frac{kT}{\sqrt{1-\tilde{b}^2}}} k^{d+\nu-1} J_\nu\left(\frac{\tilde{b}kz}{\sqrt{1-\tilde{b}^2}}\right) \right) \\ &= \frac{4^{1-\Delta} \pi^{\frac{1-d}{2}} \Gamma(2\Delta)}{\nu \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \Gamma(\nu)^2} \frac{z^\Delta}{(-T^2)^\Delta} \int_0^1 d\tilde{b} \tilde{b}^{\nu+1} (1-\tilde{b}^2)^{\frac{d-3}{2}} {}_2F_1\left(\Delta, \frac{1}{2} + \Delta; 1 + \nu; \tilde{b}^2 \frac{z^2}{T^2}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2} \Gamma(\nu)} \frac{z^\Delta}{(-T^2 + z^2)^\Delta} \end{aligned}$$

Usando la prescripción discutida anteriormente obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{2^{1-\nu}\pi}{\Gamma(\nu)} \int_+ \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \Theta(\omega^2 - \mathbf{k}^2) (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^{\frac{\nu}{2}} e^{-i\omega(t-(T_- - i\tilde{r})) + i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})} z^{\frac{d}{2}} J_\nu(\sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2} z) \\ = \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\nu)} \frac{z^\Delta}{(-(t - (T_- - i\tilde{r}))^2 + (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})^2 + z^2)^\Delta}. \end{aligned}$$

que, junto con una integración análoga para la pieza ϕ^+ , demuestra (4.2.38).

Función de 3 puntos en Poincaré

Aquí revisamos el método desarrollado en [65] para realizar la integral

$$\int_{\mathcal{M}} \frac{d\tilde{z} d\tilde{t} d\tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{z}^{d+1}} \frac{\tilde{z}^\Delta}{\left((\tilde{x}^\mu - x_1^\mu)^2 + \tilde{z}^2\right)^\Delta} \frac{\tilde{z}^\Delta}{\left((\tilde{x}^\mu - x_2^\mu)^2 + \tilde{z}^2\right)^\Delta} \frac{\tilde{z}^\Delta}{\left((\tilde{x}^\mu - x_3^\mu)^2 + \tilde{z}^2\right)^\Delta} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2} \frac{\Gamma(\Delta/2)^3 \Gamma(\Delta/2 + \nu) \Gamma(\Delta)^{-3}}{(x_1^\mu - x_2^\mu)^\Delta (x_2^\mu - x_3^\mu)^\Delta (x_1^\mu - x_3^\mu)^\Delta}$$

que aparece a los autores al calcular la función de 3 puntos (euclidianos) entre los estados de vacío

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x_1^\mu) \mathcal{O}(x_2^\mu) \mathcal{O}(x_3^\mu) | 0 \rangle = \left(\frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\nu)} \right)^3 \int_{\mathcal{M}} \frac{d\tilde{z} d\tilde{t} d\tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{z}^{d+1}} \frac{\tilde{z}^\Delta}{\left((\tilde{x}^\mu - x_1^\mu)^2 + \tilde{z}^2\right)^\Delta} \frac{\tilde{z}^\Delta}{\left((\tilde{x}^\mu - x_2^\mu)^2 + \tilde{z}^2\right)^\Delta} \frac{\tilde{z}^\Delta}{\left((\tilde{x}^\mu - x_3^\mu)^2 + \tilde{z}^2\right)^\Delta},$$

y que en nuestro trabajo aparece en (4.2.41). Las isometrías de AdS, permiten sin pérdida de generalidad poner uno de los puntos del borde, digamos x_3^μ , cerca del origen $x_3^\mu \rightarrow \epsilon^\mu$, $\epsilon^\mu \epsilon_\mu \ll 1$. Para poner la integral en una forma más manejable, usaremos

$$\frac{z^\Delta}{(z^2 + (x^\mu - x_1^\mu)^2)^\Delta} = |x_1^{\prime\mu}|^{2\Delta} \frac{z'^\Delta}{(z'^2 + (x'^\mu - x_1^{\prime\mu})^2)^\Delta}$$

donde las variables primadas son invertidas, $(z', x'; x'^\mu) = (z, x^\mu)(z^2 + x^\mu x_\mu)^{-1}$. Observe que x_i^μ son puntos límite de modo que $z_i = z'_i = 0$. Para usar la propiedad anterior en los tres factores de la integral también necesitaremos invertir las variables de integración ($\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{t}e\tilde{x}$), tanto en los diferenciales como en la medida $z^{-d-1} = sqrtg$, ya que la inversión es una isometría de AdS_{d+1} . Sin embargo, después de la inversión, tomar $\epsilon^\mu \rightarrow 0$ equivale a tomar $x_3^{\prime\mu} \rightarrow \infty$, que en el lado derecho hace que

$$|x_3^{\prime\mu}|^\Delta \frac{z'^\Delta}{(z'^2 + (x'^\mu - x_3^{\prime\mu})^2)^\Delta} \rightarrow z'^\Delta,$$

mientras que en el lado izquierdo sólo pone $\mathcal{O}(x_3^\mu) \rightarrow \mathcal{O}(0)$. Después de estos pasos se llega a

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x_1^\mu) \mathcal{O}(x_2^\mu) \mathcal{O}(0) | 0 \rangle = \left(\frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\nu)} \right)^3 \frac{1}{|x_1^\mu|^{2\Delta} |x_2^\mu|^{2\Delta}} \int_{\mathcal{M}} d\tilde{z}' d\tilde{t}' d\tilde{\mathbf{x}}' \frac{\tilde{z}'^{3\Delta-d-1}}{\left((\tilde{x}'^\mu - x_1^{\prime\mu})^2 + \tilde{z}'^2\right)^\Delta \left((\tilde{x}'^\mu - x_2^{\prime\mu})^2 + \tilde{z}'^2\right)^\Delta}$$

donde usamos ese $|x_i^{\prime\mu}|^\Delta = |x_i^\mu|^{-\Delta}$. La integral restante puede realizarse con los métodos de parámetros Feynman estándar, lo que da como resultado

$$\int_{\mathcal{M}} dzdtd\mathbf{x} \frac{z^a}{\left((x^\mu - x_1^\mu)^2 + z^2\right)^b \left((x^\mu - x_2^\mu)^2 + z^2\right)^c} = P_{\{dv; abc\}} |x_1^\mu - x_2^\mu|^{a+d+1-2b-2c}$$

donde

$$P_{\{dv; abc\}} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma(b)\Gamma(c)} \frac{\Gamma\left(\frac{1+a+d-2b}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+a+d-2c}{2}\right)}{\Gamma(1+a+d-b-c)} \Gamma\left(\frac{2b+2c-d-a-1}{2}\right).$$

La integral da

$$\langle 0 | \mathcal{O}(x_1^\mu) \mathcal{O}(x_2^\mu) \mathcal{O}(0) | 0 \rangle = \left(\frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\nu)} \right)^3 \frac{\Gamma\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 \Gamma\left(\frac{\Delta}{2} + \nu\right)}{\Gamma(\Delta)^3} \frac{1}{|x_1^\mu|^{2\Delta} |x_2^\mu|^{2\Delta}} \frac{1}{|x_1^\mu - x_2^\mu|^\Delta}$$

lo que prueba el coeficiente en (4.2.41). Todavía tenemos que recuperar la dependencia en x_3^μ , lo que hacemos primero recuperando las variables no invertidas y luego usando la simetría de traslación rígida,

$$\frac{1}{|x_1^\mu|^{2\Delta} |x_2^\mu|^{2\Delta}} \frac{1}{|x_1^\mu - x_2^\mu|^\Delta} = \frac{1}{|x_1^\mu|^\Delta |x_2^\mu|^\Delta} \frac{1}{|x_1^\mu - x_2^\mu|^\Delta} \rightarrow \frac{1}{|x_1^\mu - x_2^\mu|^\Delta |x_2^\mu - x_3^\mu|^\Delta |x_1^\mu - x_3^\mu|^\Delta}$$

que es la dependencia en (4.2.41), concluyendo así la demostración. La integral relacionada que nos interesa es

$$\int_{\mathcal{M}} \frac{d\tilde{z} d\tilde{\eta} d\tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{z}^{d+1}} \frac{\tilde{z}^\Delta}{\left((\tilde{x}^\mu - x_1^\mu)^2 + \tilde{z}^2\right)^\Delta} \frac{\tilde{z}^\Delta}{\left((\tilde{x}^\mu - x_2^\mu)^2 + \tilde{z}^2\right)^\Delta} \frac{\tilde{z}^\Delta}{\left((\tilde{x}^\mu - x_3^\mu)^2 + \tilde{z}^2\right)^\Delta} = -i \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2} \frac{\Gamma(\Delta/2)^3 \Gamma(\Delta/2 + \nu) \Gamma(\Delta)^{-3}}{(x_1^\mu - x_2^\mu)^\Delta (x_2^\mu - x_3^\mu)^\Delta (x_1^\mu - x_3^\mu)^\Delta}. \quad (\text{B.2.12})$$

que es la extensión analítica del resultado anterior.

B.3. Correladores BTZ

En este apéndice se muestra que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_L(t, \varphi) \mathcal{O}_L(t', \varphi') \rangle &\equiv -i \frac{\delta^2 S_\epsilon^0}{\delta\phi^L \delta\phi^{\bar{L}}} \\ &= \frac{2(\Delta-1)}{4\pi^2 i r_S} \sum_l \int d\omega e^{-i\omega(t-t') + il(\varphi-\varphi')} \left(\frac{-1}{e^{2\pi\omega} - 1} \alpha_{\omega l \Delta} \beta_{\omega l \Delta} + \frac{e^{2\pi\omega}}{e^{2\pi\omega} - 1} \alpha_{(-\omega) l \Delta} \beta_{(-\omega) l \Delta} \right) \\ &= \frac{(\Delta-1)}{2\pi^2 i r_S} \sum_l \int d\omega e^{-i\omega\Delta t + il\Delta\varphi} (-n_\omega \alpha_{\omega l \Delta} \beta_{\omega l \Delta} + (1+n_\omega) \alpha_{(-\omega) l \Delta} \beta_{(-\omega) l \Delta}) \end{aligned} \quad (\text{B.3.1})$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(\Delta-1)^2}{2^{\Delta-1} \pi} [\cosh(\Delta\varphi + 2\pi r_S j) - \cosh(\Delta t(1 - i\epsilon))]^{-\Delta} \quad (\text{B.3.2})$$

donde $n_\omega \equiv (e^{2\pi\omega} - 1)^{-1}$, $\alpha_{\omega l \Delta}$ y $\beta_{\omega l \Delta}$ se definieron en (5.4.4) y (5.4.5) y el regulador Feynman $\epsilon > 0$ es obligatorio para la convergencia. La masa del agujero negro ha sido transferida a la periodicidad del ángulo polar $\varphi \sim \varphi + 2\pi i r_S$, por lo tanto, la suma de l es sobre $l = k/r_S$ con $k \in \mathbb{Z}$, ver (2.2.25).

Un comentario sobre la normalización de las funciones de 2 puntos es necesario. El factor $2(\Delta - d) = 2(\Delta - 1)$ en el numerador de la segunda línea en adelante no se deriva directamente de las soluciones de campo encontradas en (5.4.6), que producen en cambio 2Δ . La corrección surge de las diferentes formas de regularizar las divergencias que surgen en el límite asintótico. Sin embargo, esto no está relacionado con nuestro problema concreto y ya ha sido ampliamente cubierto en la literatura, ver [77, 65, 62]. Destacamos que el coeficiente correcto desde la perspectiva de AdS/CFT es el que se mantiene en (B.3.2).

Para hacer esto, escogeremos una distancia tipo espacio, encontraremos la intersección del regulador $\epsilon > 0$ correcta necesario para la convergencia cerca de los puntos de contacto. Se toma $\Delta\phi > \Delta t > 0$ de forma que $\Delta\phi + \Delta t > 0$ y $\Delta\phi - \Delta t > 0$. La analiticidad fuerza el resultado en todas partes en el plano de los conos de luz. Nos queda la tarea de inferir la prescripción de $i\epsilon$ implícita en (B.3.1). Esto se hace tomando $\Delta\phi = 0$ y $0 < \Delta t \ll 1$ primero y $-1 \gg \Delta t < 0$ luego para ver que el regulador adecuado es el de Feynman, i.e. que (B.3.2) es correcto.

La integral en ω en (B.3.1) se realizará haciendo uso del teorema de residuos, por lo que necesitamos conocer la estructura del polo del integrando:

- $\alpha_{\omega l \Delta}$ es un polinomio en ω y por lo tanto analítico en todo el plano complejo.
- n_ω tiene polos en $\omega = is$, $s \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, el producto $(n_\omega \alpha_{\omega l \Delta} \beta_{\omega l \Delta})$ es regular en $\omega = 0$.
- $\beta_{\omega l \Delta}$ tiene polos en $\omega = \pm l + i(2n + \Delta)$, $n \in \mathbb{N}$, i.e. en el semiplano superior.

La prueba de (B.3.2) se dividirá en 3 partes: en primer lugar, mostrar que los únicos polos que contribuyen a la función de 2 puntos son los que se derivan de $\beta_{\omega l \Delta}$ y $\beta_{(-\omega) l \Delta}$. En segundo lugar, pasamos de (B.3.1) a la expresión (B.3.2) en un marco espacial. En tercer lugar, mostramos que $\Delta t(1 - i\epsilon)$ es el regulador fijado implícitamente en (B.3.1).

Los residuos de n_ω no contribuyen

Consideramos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\Delta t, \Delta \varphi) &\equiv \frac{(\Delta - 1)}{2\pi^2 i r_S} \sum_l \int d\omega e^{-i\omega\Delta t + i l \Delta \varphi} (-n_\omega \alpha_{\omega l \Delta} \beta_{\omega l \Delta} + (1 + n_\omega) \alpha_{(-\omega) l \Delta} \beta_{(-\omega) l \Delta}) \\ &= \frac{(\Delta - 1)}{2\pi^2 i r_S} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int d\omega e^{-i\omega\Delta t + i \frac{l}{r_S} \Delta \varphi} \left(-n_\omega \alpha_{\omega \frac{l}{r_S} \Delta} \beta_{\omega \frac{l}{r_S} \Delta} + (1 + n_\omega) \alpha_{(-\omega) \frac{l}{r_S} \Delta} \beta_{(-\omega) \frac{l}{r_S} \Delta} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.3.3})$$

donde hicimos explícito el factor r_S en la suma del momento angular, ver (2.2.25). Para calcular explícitamente la integral elegimos $\Delta t > 0$. Esto exige cerrar la integral de ω por la mitad inferior del plano complejo. A continuación sólo se considerarán los aportes derivados de los residuos de n_ω . Cerrando el contorno a través del semiplano inferior se encuentra

$$\mathcal{J}(\Delta t, \Delta \varphi) = \frac{(\Delta - 1)}{2\pi^2 r_S} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{n=1} e^{-n\Delta t + i \frac{l}{r_S} \Delta \varphi} \left(\alpha_{(-in) \frac{l}{r_S} \Delta} \beta_{(-in) \frac{l}{r_S} \Delta} - \alpha_{(in) \frac{l}{r_S} \Delta} \beta_{(in) \frac{l}{r_S} \Delta} \right) + (\beta \text{ residues}).$$

Haciendo uso del truco de la resumativación de Poisson podemos traducir la suma en l en una integral y una suma de imágenes:¹

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{l}{a}\right) = a \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(ma) \quad \Rightarrow \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{l}{r_S}\right) = r_S \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int dl f(l) e^{i(2\pi r_S m)l} \quad (\text{B.3.4})$$

Insertándolo en la expresión anterior se obtiene

$$\mathcal{J}(\Delta t, \Delta \varphi) = \frac{(\Delta - 1)}{2\pi^2} \sum_{n=1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int dl e^{-n\Delta t + i l (\Delta \varphi + 2\pi r_S m)} (\alpha_{(-in) l \Delta} \beta_{(-in) l \Delta} - \alpha_{(in) l \Delta} \beta_{(in) l \Delta}) + (\beta \text{ residues}),$$

ahora, se puede ver que el integrando entre paréntesis, para enteros $\Delta \geq 2$ y $n \geq 1$, se convierte en polinomios de l que no tienen polos. Más precisamente, los polos en $\alpha_{(-in) l \Delta} \beta_{(-in) l \Delta}$ y $\alpha_{(in) l \Delta} \beta_{(in) l \Delta}$ se cancelan y dan lugar a una contribución regular. La integral de l ahora puede cerrarse en el plano superior o inferior dependiendo de la exponencial, aunque la ausencia de polos hace que estos términos no contribuyan en ningún caso. El caso $\Delta t < 0$ es análogo.

Residuos de $\beta_{\omega l \Delta}$

Consideramos ahora las contribuciones de los polos en $\beta_{\omega l \Delta}$. De (B.3.3),

$$\mathcal{J}(\Delta t, \Delta \varphi) = \frac{(\Delta - 1)}{2\pi^2 i r_S} \sum_l \int d\omega e^{-i\omega\Delta t + i l \Delta \varphi} (-n_\omega \alpha_{\omega l \Delta} \beta_{\omega l \Delta} + (1 + n_\omega) \alpha_{(-\omega) l \Delta} \beta_{(-\omega) l \Delta})$$

se toma $\Delta t > 0$, se cierra por abajo encerrando los polos $\omega = \pm l - i(2s + \Delta)$, $s \geq 0$ que vienen de $\beta_{(-\omega) l \Delta}$ y se obtiene

$$\mathcal{J}(\Delta t, \Delta \varphi) = \frac{2(-1)^{\Delta-1}}{\pi i r_S \Gamma(\Delta - 1)^2} \sum_{s \geq 0} (-s - \Delta + 1)_{\Delta-1} e^{-(2s+\Delta)\Delta t} \sum_l \sum_{\pm} e^{i l (\Delta \varphi \mp \Delta t)} (1 + n_{\pm l}) (\mp i l - s - \Delta + 1)_{\Delta-1},$$

donde hemos usado que $n_{\pm l - i(2s+\Delta)} = n_{\pm l}$ for $(2s + \Delta) \in \mathbb{Z}$ y la definición explícita de $\alpha_{(-\omega) l \Delta}$ (5.4.4). Observamos que el término $l = 0$ es regular para las cancelaciones de singularidad de n_0 . Nos centramos ahora en la suma de 1, otra vez por la resumativación de Poisson (B.3.4),

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\equiv \sum_l \sum_{\pm} e^{i l (\Delta \varphi \mp \Delta t)} (1 + n_{\pm l}) (\mp i l - s - \Delta + 1)_{\Delta-1} \\ &= \sum_l e^{i l (\Delta \varphi - \Delta t)} (1 + n_l) (-i l - s - \Delta + 1)_{\Delta-1} + e^{i l (\Delta \varphi + \Delta t)} (1 + n_{-l}) (+i l - s - \Delta + 1)_{\Delta-1} \\ &= r_S \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int dl e^{i(2\pi r_S m)l} \left(e^{i l (\Delta \varphi - \Delta t)} (1 + n_l) (-i l - s - \Delta + 1)_{\Delta-1} + e^{i l (\Delta \varphi + \Delta t)} (1 + n_{-l}) (+i l - s - \Delta + 1)_{\Delta-1} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.3.5})$$

¹ $\tilde{f}(k) = \int dx f(x) e^{-i2\pi kx}$ y $f(x) = \int dk \tilde{f}(x) e^{i2\pi kx}$

Ahora tomamos $\Delta\phi \pm \Delta t > 0$, de tal forma que ambas integrales l se cierran hacia abajo, dando como resultado

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &\equiv ir_S \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{i(2\pi r_S m)l} \left(e^{-j(\Delta\phi - \Delta t)} (+j - s - \Delta + 1)_{\Delta-1} - e^{-j(\Delta\phi + \Delta t)} (-j - s - \Delta + 1)_{\Delta-1} \right) \\ &= ir_S \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\pm} (\pm 1) e^{i(2\pi r_S m)l} e^{-j(\Delta\phi \mp \Delta t)} (\pm j - s - \Delta + 1)_{\Delta-1}\end{aligned}$$

de modo que (B.3.1) se convierte en

$$\frac{2(-1)^{\Delta-1}}{\pi\Gamma(\Delta-1)^2} \sum_{s \geq 0} (-s - \Delta + 1)_{\Delta-1} e^{-(2s+\Delta)\Delta t} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\pm} (\pm 1) e^{i(2\pi r_S m)l} e^{-j(\Delta\phi \mp \Delta t)} (\pm j - s - \Delta + 1)_{\Delta-1}$$

que se puede sumar para $2 < \Delta \in \mathbb{Z}$ y extender para los valores generales, dando

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{(\Delta-1)^2}{2^{\Delta-1}\pi} [-\cosh(\Delta t) + \cosh(\Delta\phi + 2\pi r_S m)]^{-\Delta}.$$

Este resultado se extiende por extensión analítica a otros puntos fuera del cono de luz. Ahora mostramos que el regulador correcto es el de Feynman.

Regulador de Feynman

Para descubrir el regulador volvemos a (B.3.5)

$$\mathcal{M} = \sum_l \sum_{\pm} e^{il(\Delta\phi \mp \Delta t)} (1 + n_{\pm l}) (\mp il - s - \Delta + 1)_{\Delta-1}$$

y se toma el caso límite $\Delta\phi = 0$ y $\Delta t(1 - i\epsilon) \sim -i\epsilon$ recordando que $\Delta t > 0$ fue necesario para llegar a este caso. Ahora se tiene

$$\mathcal{M} = \sum_l e^{-l\epsilon} (1 + n_l) (-il - s - \Delta + 1)_{\Delta-1} + e^{+l\epsilon} (1 + n_{-l}) (+il - s - \Delta + 1)_{\Delta-1},$$

donde cada término por sí solo se comporta bien en los límites límite $l \rightarrow \pm\infty$. Los símbolos de Pochhammer son polinomios mientras que $e^{\mp l\epsilon} (1 + n_{\pm l})$ son exponencialmente convergentes. El resultado análogo para $\Delta t < 0$, produce

$$\mathcal{M}' = \sum_l \sum_{\pm} e^{il(\Delta\phi \mp \Delta t)} n_{\pm l} (\pm il - s - \Delta + 1)_{\Delta-1}$$

pero ahora $\Delta t(1 - i\epsilon) \sim +i\epsilon$ lo que lleva a

$$\mathcal{M}' = \sum_l e^{l\epsilon} n_l (+il - s - \Delta + 1)_{\Delta-1} + e^{-l\epsilon} n_{-l} (-il - s - \Delta + 1)_{\Delta-1}$$

que de nuevo contiene el regulador correcto para cada término por separado. Esto completa la demostración de (B.3.2). Nuestro resultado concuerda con [13].

Bibliografía

- [1] Tsukerman, Ilya, ATLAS Collaboration, ATL-PHYS-PROC-2017-016
- [2] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo Collaborations], Phys. Rev. D **93**, no. 12, 122003 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.122003 [arXiv:1602.03839 [gr-qc]].
- [3] The EHT Collaboration et al. 2019. ApJL, 875
- [4] J. M. Maldacena, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999) [Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998)], [hep-th/9711200].
- [5] N. Beisert *et al.*, Lett. Math. Phys. **99**, 3 (2012) doi:10.1007/s11005-011-0529-2 [arXiv:1012.3982 [hep-th]].
- [6] A. Faraggi, L. A. Pando Zayas, G. A. Silva and D. Trancanelli, JHEP **1604**, 053 (2016) doi:10.1007/JHEP04(2016)053 [arXiv:1601.04708 [hep-th]].
- [7] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, Phys. Rept. **323**, 183 (2000) doi:10.1016/S0370-1573(99)00083-6 [hep-th/9905111].
- [8] E. D'Hoker and D. Z. Freedman, hep-th/0201253.
- [9] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis and J. Maldacena, JHEP **0810**, 091 (2008) doi:10.1088/1126-6708/2008/10/091 [arXiv:0806.1218 [hep-th]].
- [10] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 505 [hep-th/9803131].
- [11] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **428**, 105 (1998), [hep-th/9802109].
- [12] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998), [hep-th/9802150].
- [13] K. Skenderis and B. C. van Rees, JHEP **0905** (2009) 085, [arXiv:0812.2909 [hep-th]].
- [14] H. Liu and J. Sonner, arXiv:1810.02367 [hep-th].
- [15] T. Banks, M. R. Douglas, G. T. Horowitz and E. J. Martinec, [hep-th/9808016].
- [16] D. Harlow, D. Stanford, arXiv [hep-th/1104.2621].
- [17] A. Hamilton, D. N. Kabat, G. Lifschytz and D. A. Lowe, Phys. Rev. D **73**, 086003 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.73.086003 [hep-th/0506118]. A. Hamilton, D. N. Kabat, G. Lifschytz and D. A. Lowe, Phys. Rev. D **74**, 066009 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.74.066009 [hep-th/0606141].
- [18] D. L. Jafferis, A. Lewkowycz, J. Maldacena and S. J. Suh, JHEP **1606**, 004 (2016) doi:10.1007/JHEP06(2016)004 [arXiv:1512.06431 [hep-th]].
- [19] K. Skenderis and B. C. van Rees, Phys. Rev. Lett. **101**, 081601 (2008), [arXiv:0805.0150 [hep-th]].
- [20] J. Schwinger, "Brownian Motion of a Quantum Oscillator," J. Math. Phys. **2** (1961) 407. L. V. Keldysh, "Diagram Technique For Nonequilibrium Processes," Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47** (1964) 1515 [Sov. Phys. JETP **20** (1965) 1018].

- [21] J.B. Hartle and S.W.Hawking, Phys. Rev. D 28 (1983) 2960.
- [22] R. J. Glauber, Phys. Rev. **84**, 395 (1951). doi:10.1103/PhysRev.84.395 ; R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963). doi:10.1103/PhysRev.131.2766
- [23] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* Ch.4. Addison-Wesley 1995
- [24] A. Baldazzi, R. Percacci and V. Skrinjar, Class. Quant. Grav. **36**, no. 10, 105008 (2019) doi:10.1088/1361-6382/ab187d [arXiv:1811.03369 [gr-qc]].
- [25] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, San Francisco 1973, 1279p
- [26] Condensed matter field theory - 2006. Alexander Altland and Ben Simons, Cambridge University Press.
- [27] R. Balian, *From Microphysics to Macrophysics: Methods and Applications of Statistical Physics*, Vol. 1 & 2, Springer Science & Business Media, 2007
- [28] A. Kamenev *Field Theory of Non-Equilibrium Systems*, Cambridge University Press, 2011. ISBN 9780521760829
- [29] É. Lantagne-Hurtubise, S. Plugge, O. Can and M. Franz, arXiv:1907.01628 [cond-mat.str-el].
- [30] Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras, Rudolf Haag, DOI 10.1007/978-3-642-61458-3
- [31] H. Umezawa, *Advanced field theory: Micro, macro, and thermal physics*, New York, USA: AIP (1993).
- [32] Y. Takahashi and H. Umezawa, Int. J. Mod. Phys. B **10**, 1755 (1996), doi:10.1142/S0217979296000817.
- [33] E. Witten, Rev. Mod. Phys. **90**, no. 4, 045003 (2018) doi:10.1103/RevModPhys.90.045003 [arXiv:1803.04993 [hep-th]].
- [34] Neil W. Ashcroft, N. David Mermin, Cengage Learning; ISBN-13: 978-0030839931
- [35] H. Matsumoto, Y. Nakano, H. Umezawa, F. Mancini, M. Marinaro Progress of Theoretical Physics, Volume 70, Issue 2, August 1983, Pages 599–602,
- [36] W. Israel, Phys. Lett. A 57, 107 (1976).
- [37] S. M. Carroll, “Spacetime and geometry: An introduction to general relativity,” San Francisco, USA: Addison-Wesley (2004)
- [38] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976). doi:10.1103/PhysRevD.14.870.
- [39] A. Zee, Quantum Field Theory in a Nutshell, Princeton University Press, ISBN-13: 978-0691010199
- [40] Francesco, Philippe, Mathieu, Pierre, Sénéchal, David, Conformal Field Theory, Springer-Verlag New York, DOI 10.1007/978-1-4612-2256-9
- [41] Michael B. Green, John H. Schwarz, Edward Witten, Superstring Theory , Cambridge University Press, ISBN 9781139248563
- [42] Barton Zwiebach, A First Course in String Theory, Cambridge University Press, ISBN-13: 978-0521880329
- [43] Ralph Blumenhagen, Erik Plauschinn, Introduction to Conformal Field Theory, Springer, Berlin, Heidelberg , Online ISBN 978-3-642-00450-6
- [44] W. Mück, “*Studies on the AdS/CFT correspondence*”, PhD Thesis, Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada, 1999.
- [45] J. Kaplan, “Lectures on AdS/CFT from the Bottom Up”, <http://www.pha.jhu.edu/~jaredk/AdSCFTCourseNotesPublic.pdf>, unpublished. A. L. Fitzpatrick and J. Kaplan, arXiv:1104.2597 [hep-th].

- [46] S. Weinberg; The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations. ISBN: 0521670535
- [47] W. M. Zhang, D. H. Feng and R. Gilmore, Rev. Mod. Phys. **62**, 867 (1990).
- [48] W. M. Zhang, In *Mitra, A.N. (ed.): Quantum field theory* 297-323 [hep-th/9908117].
- [49] E. Martín Fierro, Los estados coherentes en la descripción semiclásica de la mecánica cuántica, Tesis Doctoral
- [50] Rossmann, Wulf (2002), Lie Groups – An Introduction Through Linear Groups, Oxford Graduate Texts in Mathematics, Oxford Science Publications, ISBN 978-0-19-859683-7
- [51] C. A. Ballon Bayona, Nelson R. F. Braga, *Anti-de Sitter boundary in Poincare coordinates* [hep-th/0512182v3]
- [52] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, Phys. Rev. D **48**, 1506 (1993)
- [53] A. Almheiri, R. Mahajan, J. Maldacena and Y. Zhao, arXiv:1908.10996 [hep-th].
- [54] P. Kraus, H. Ooguri and S. Shenker, Phys. Rev. D **67**, 124022 (2003) doi:10.1103/PhysRevD.67.124022 [hep-th/0212277].
- [55] L. Fidkowski, V. Hubeny, M. Kleban and S. Shenker, JHEP **0402**, 014 (2004) doi:10.1088/1126-6708/2004/02/014 [hep-th/0306170].
- [56] J. M. Maldacena, Eternal black holes in anti-de Sitter, JHEP 04 (2003) 021, [hep-th/0106112].
- [57] S. Ryu and T. Takayanagi, JHEP **0608**, 045 (2006) doi:10.1088/1126-6708/2006/08/045 [hep-th/0605073].
- [58] Sidney Coleman, Springer, Boston, MA, ISBN 978-1-4684-1065-5
- [59] M. Moshe and J. Zinn-Justin, Phys. Rept. **385**, 69 (2003) doi:10.1016/S0370-1573(03)00263-1 [hep-th/0306133].
- [60] C. G. Callan, Jr., E. J. Martinec, M. J. Perry and D. Friedan, Nucl. Phys. B **262**, 593 (1985). doi:10.1016/0550-3213(85)90506-1
- [61] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions ISBN-13: 978-0486612720
- [62] K. Skenderis, “Lecture notes on holographic renormalization,” Class. Quant. Grav. 19 (2002) 5849–5876, [hep-th/0209067].
- [63] M. Botta-Cantcheff, P. Martínez and G. A. Silva, JHEP **1602** (2016) 171 doi:10.1007/JHEP02(2016)171 [arXiv:1512.07850 [hep-th]].
- [64] K. Skenderis and M. Taylor, JHEP **0605**, 057 (2006) doi:10.1088/1126-6708/2006/05/057 [hep-th/0603016]. I. Kanitscheider, K. Skenderis and M. Taylor, JHEP **0704**, 023 (2007) doi:10.1088/1126-6708/2007/04/023 [hep-th/0611171].
- [65] D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis and L. Rastelli, Nucl. Phys. B **546**, 96 (1999), [hep-th/9804058].
- [66] P. Breitenlohner and D. Z. Freedman, Annals Phys. **144**, 249 (1982).
- [67] E. Witten, hep-th/0112258.
- [68] M. Rangamani and T. Takayanagi, Lect. Notes Phys. **931**, pp.1 (2017) doi:10.1007/978-3-319-52573-0 [arXiv:1609.01287 [hep-th]].
- [69] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, JHEP **0707**, 062 (2007) [arXiv:0705.0016 [hep-th]].
- [70] A. Lewkowycz and J. Maldacena, JHEP **1308**, 090 (2013) doi:10.1007/JHEP08(2013)090 [arXiv:1304.4926 [hep-th]].

- [71] Mark Srednicki, arXiv:cond-mat/9403051
- [72] D. Marolf, JHEP 05, 042 (2005), [hep-th/0412032].
- [73] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Rev. D 15, 2752 – Published 15 May 1977; James W. York, Jr. Phys. Rev. Lett. 28, 1082 – Published 17 April 1972
- [74] G. Hayward, “Gravitational action for space-times with nonsmooth boundaries,” Phys. Rev. D 47 (1993) 3275–3280.
- [75] W. Israel, Nuovo Cimento 44B, 1 (1966); Corrections in 44B, 463
- [76] C. Fefferman and C. Robin Graham, *Conformal Invariants*, Elie Cartan et les Mathématiques d’aujourd’hui (Astérisque, 1985)
- [77] M. Botta-Cantcheff, P. J. Martínez and G. A. Silva, JHEP **1703**, 148 (2017) doi:10.1007/JHEP03(2017)148 [arXiv:1703.02384 [hep-th]].
- [78] M. Botta-Cantcheff, P. J. Martínez and G. A. Silva, JHEP **1811**, 129 (2018) doi:10.1007/JHEP11(2018)129 [arXiv:1808.10306 [hep-th]].
- [79] M. Botta-Cantcheff, P. J. Martínez and G. A. Silva, JHEP **1904**, 028 (2019) doi:10.1007/JHEP04(2019)028 [arXiv:1901.00505 [hep-th]].
- [80] M. Botta-Cantcheff and P. J. Martínez, arXiv:1703.03483 [hep-th].
- [81] F. M. Haehl, E. Mintun, J. Pollack, A. J. Speranza and M. Van Raamsdonk, JHEP **1906**, 005 (2019) doi:10.1007/JHEP06(2019)005 [arXiv:1904.01584 [hep-th]].
- [82] A. Bernamonti, F. Galli, J. Hernandez, R. C. Myers, S. M. Ruan and J. Simón, Phys. Rev. Lett. **123**, no. 8, 081601 (2019) doi:10.1103/PhysRevLett.123.081601 [arXiv:1903.04511 [hep-th]].
- [83] J. de Boer, M. P. Heller and N. Pinzani-Fokeeva, JHEP **1905**, 188 (2019) doi:10.1007/JHEP05(2019)188 [arXiv:1812.06093 [hep-th]].
- [84] A. Belin, A. Lewkowycz and G. Sárosi, JHEP **1903**, 044 (2019) doi:10.1007/JHEP03(2019)044 [arXiv:1811.03097 [hep-th]].
- [85] M. Van Raamsdonk, arXiv:1809.01197 [hep-th].
- [86] D. Marolf, JHEP **1809**, 114 (2018) doi:10.1007/JHEP09(2018)114 [arXiv:1808.00394 [hep-th]].
- [87] A. Belin, A. Lewkowycz and G. Sárosi, Phys. Lett. B **789**, 71 (2019) doi:10.1016/j.physletb.2018.10.071 [arXiv:1806.10144 [hep-th]].
- [88] A. May and E. Hijano, JHEP **1810**, 036 (2018) doi:10.1007/JHEP10(2018)036 [arXiv:1806.06077 [hep-th]].
- [89] D. Marolf, O. Parrikar, C. Rabideau, A. Izadi Rad and M. Van Raamsdonk, JHEP **1806**, 077 (2018) doi:10.1007/JHEP06(2018)077 [arXiv:1709.10101 [hep-th]].
- [90] D. Marolf, A. C. Wall and Z. Wang, JHEP **1905**, 127 (2019) doi:10.1007/JHEP05(2019)127 [arXiv:1901.03879 [hep-th]].
- [91] S. Fubini, A.J. Hanson and R. Jackiw, Phys. Rev. D 7 (1973) 1732.
- [92] N. Bao, A. Chatwin-Davies, J. Pollack and G. N. Remmen, JHEP **1907**, 152 (2019) doi:10.1007/JHEP07(2019)152 [arXiv:1905.04317 [hep-th]].
- [93] V. Balasubramanian, P. Kraus and A. E. Lawrence, Phys. Rev. D **59**, 046003 (1999), doi:10.1103/PhysRevD.59.046003 [hep-th/9805171]; V. Balasubramanian, P. Kraus, A. E. Lawrence and S. P. Trivedi, Phys. Rev. D **59**, 104021 (1999), doi:10.1103/PhysRevD.59.104021 [hep-th/9808017]; V. Balasubramanian, S. B. Giddings and A. E. Lawrence, JHEP **9903**, 001 (1999), doi:10.1088/1126-6708/1999/03/001 [hep-th/9902052].

- [94] A. Christodoulou and K. Skenderis, JHEP **1604**, 096 (2016), [arXiv:1602.02039 [hep-th]].
- [95] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik Table of Integrals, Series, and Products Seventh Edition, ISBN-13: 978-0-12-373637-6
- [96] Fan, J. J. High Energ. Phys. (2011) 2011: 136, [hep-th/1105.0678].
- [97] S. B. Giddings, The Boundary S matrix and the AdS to CFT dictionary, Phys.Rev.Lett. 83 (1999) 2707–2710, [hep-th/9903048].
- [98] Y. Takahashi and H. Umezawa, Collective Phenomena 2 55 (1975)
- [99] M. Van Raamsdonk Gen. Rel. Grav. 42 (2010) 2323–2329., [hep-th/1005.3035v1].
- [100] *Quantum states of the spacetime, and formation of black holes in AdS*; arXiv [hep-th] 1205.3113, Int. J. Mod. Phys. D, 21, 1242009 (2012); M. Botta Cantcheff *Emergent spacetime, and a model for unitary gravitational collapse in AdS*, CERN-PH-TH/2011-235, arXiv: hep-th/1110.0867.
- [101] A. Lewkowycz and J. Maldacena, Generalized gravitational entropy, JHEP 08 (2013) 090;
- [102] J. Maldacena and L. Susskind, Cool horizons for entangled black holes, Fortsch. Phys. 61 (2013) 781–811;
- [103] N. Lashkari, M. McDermott, and M. Van Raamsdonk, Gravitational dynamics from entanglement “thermodynamics”, JHEP 4 (2014) 195.
- [104] B. Swingle, Entanglement renormalization and holography, Phys. Rev. D 86 (2012) 065007.
- [105] B. Swingle, “Constructing holographic spacetimes using entanglement renormalization.” arXiv:1209.3304.
- [106] F. Pastawski, B. Yoshida, D. Harlow and J. Preskill, JHEP **1506** (2015) 149 doi:10.1007/JHEP06(2015)149 [arXiv:1503.06237 [hep-th]].
- [107] S.W. Hawking and D.N. Page, *Thermodynamics of Black Holes in Anti-de Sitter Space*, Commun. Math. Phys. 87, 577 (1983)
- [108] Jacob D. Bekenstein Phys. Rev. D 7, 2333 – Published 15 April 1973
- [109] D. N. Page, New J. Phys. **7**, 203 (2005) doi:10.1088/1367-2630/7/1/203 [hep-th/0409024].
- [110] B. de Wit, hep-th/0503211.
- [111] K. Papadodimas and S. Raju, JHEP **1310**, 212 (2013) doi:10.1007/JHEP10(2013)212 [arXiv:1211.6767 [hep-th]].
- [112] R.B.Mann, A.Shiekh, L.Tarasov, Nuclear Physics B Volume 341, Issue 1, 3 September 1990, Pages 134-154
- [113] T. Faulkner, F. M. Haehl, E. Hijano, O. Parrikar, C. Rabideau and M. Van Raamsdonk, JHEP **1708**, 057 (2017) doi:10.1007/JHEP08(2017)057 [arXiv:1705.03026 [hep-th]].
- [114] B. Mosk, Class. Quant. Grav. **35**, no. 4, 045013 (2018) doi:10.1088/1361-6382/aaa4e9 [arXiv:1710.01316 [hep-th]].
- [115] K. Papadodimas and S. Raju, Phys. Rev. D **93**, no. 8, 084049 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.084049 [arXiv:1503.08825 [hep-th]].
- [116] C. P. Herzog and D. T. Son, JHEP **0303**, 046 (2003), [hep-th/0212072].
- [117] D. Birmingham, I. Sachs and S. N. Solodukhin, Phys. Rev. Lett. **88**, 151301 (2002)

- [118] D. T. Son and A. O. Starinets, JHEP **0209**, 042 (2002), [hep-th/0205051]; D. T. Son and A. O. Starinets, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **57**, 95 (2007), [arXiv:0704.0240 [hep-th]].
- [119] S. Hemming and E. Keski-Vakkuri, Phys. Rev. D **64**, 044006 (2001) [gr-qc/0005115].
- [120] B. C. van Rees, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **192-193**, 193 (2009) doi:10.1016/j.nuclphysbps.2009.07.078 [arXiv:0902.4010 [hep-th]].
- [121] P. Glorioso, M. Crossley and H. Liu, arXiv:1812.08785 [hep-th].
- [122] M. Botta Cantcheff, Eur. Phys. J. C **55**, 517 (2008) doi:10.1140/epjc/s10052-008-0603-9 [arXiv:0710.3186 [hep-th]].
- [123] J. J. Bisognano and E. H. Wichmann, J. Math. Phys. **16**, 985 (1975). doi:10.1063/1.522605; J. Math. Phys. **17**, 303 (1976). doi:10.1063/1.522898
- [124] J. Maldacena, S. H. Shenker and D. Stanford, JHEP **1608**, 106 (2016) doi:10.1007/JHEP08(2016)106 [arXiv:1503.01409 [hep-th]].
- [125] I.M.Gelfand and G.E.Shilov, Generalized Functions, Academic press, 1963.
- [126] N. Ya. Vilenkin, Functional Analysis, Ch VIII, §3.2 and Table p.345 Eq. 10, Wolters Noordhoff, 1972.
- [127] Birrell, N. D. and Davies, P. C. W. (1994). Quantum Fields in Curved Space, Cambridge.
- [128] Oz-Vogt, J., Mann, A., and Revzen, M., Journal of Modern Optics **38** (1991) 2339–2347.
- [129] A. Einstein and N. Rosen, Phys. Rev. **48**, 73 (1935). doi:10.1103/PhysRev.48.73
- [130] M. Kenmoku, M. Kuwata and K. Shigemoto, Class. Quant. Grav. **25**, 145016 (2008) doi:10.1088/0264-9381/25/14/145016 [arXiv:0801.2044 [gr-qc]].
- [131] A. Belin, N. Iqbal and S. F. Lokhande, SciPost Phys. **5**, 024 (2018) doi:10.21468/SciPostPhys.5.3.024 [arXiv:1805.08782 [hep-th]].
- [132] D. Birmingham, I. Sachs and S. N. Solodukhin, Phys. Rev. D **67**, 104026 (2003) [hep-th/0212308].
- [133] A. Belin, A. Lewkowycz and G. Sárosi, arXiv:1806.10144 [hep-th].
- [134] M.C.B. Abdalla, A.L. Gadelha, Daniel L. Nedel Phys.Lett. B613 (2005) 213-220